Notion de dimension

Dimension linéaire

Dimension topologique

Dimension fractale

Dimension linéaire

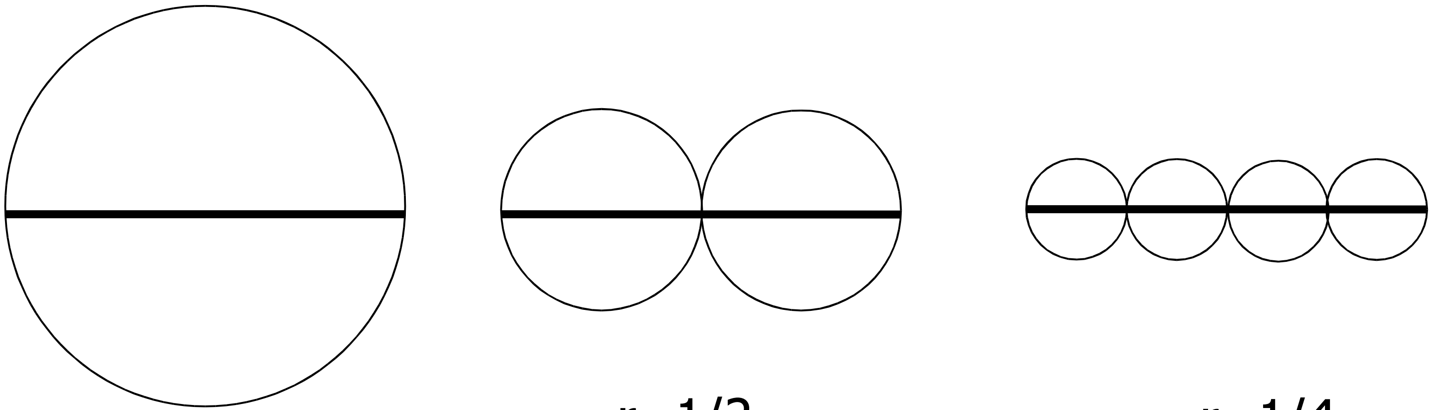
- nb de coordonnées nécessaires pour situer un point dans l'espace
- Exemple :
  - $[0,1]$ = 1 coordonnée => dimension = 1
  - $[0,1]^2$ = 2 coordonnées => dimension = 2
- Pb : courbe de Peano
  - => une seule coordonnée suffit pour localiser un point de $[0,1]^2$

Dimension topologique

- $D_T(Y) =$ sup {n tq $\exists$ 1 voisinage $V \subset Y$ avec V homéomorphe à un voisinage de $\mathbb{R}^n$}

Mais alors, l'ensemble de Cantor ?

Dimension fractale



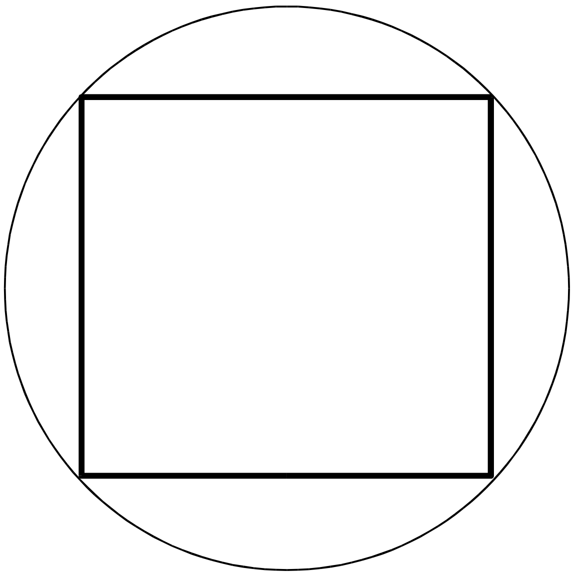
r=1
N(r)=1

r=1/2
N(r)=2=(1/2)

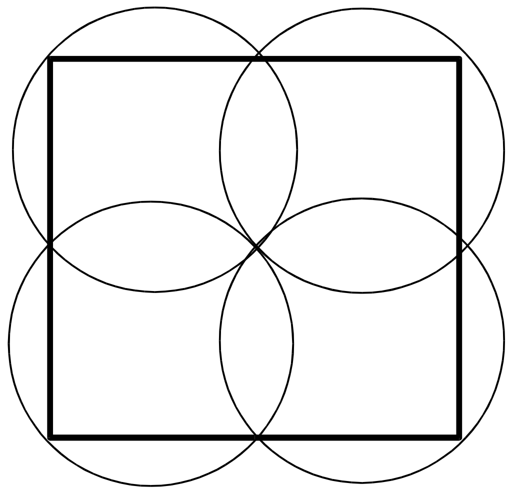
r=1/4
N(r)=4=(1/4)

$$\boxed{\text{Rq : } N(r) = 1/r}$$

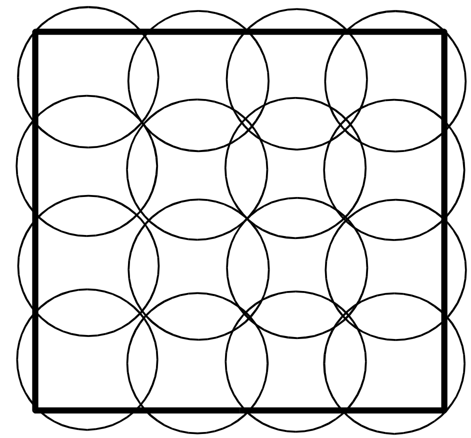
Dimension fractale



$r=1$
$N(r)=1$



$r=1/2$
$N(r)=4=(1/2^2)$



$r=1/4$
$N(r)=16=(1/4^2)$

RQ : $N(r) = 1/r^2$

Dimension fractale

- Nous observons la propriété suivante
- $N(r)\, r^{d} = 1 \qquad (1)$
- Avec d = dimension de l'objet
- (1) peut être vu comme une reformulation de la dimension
- (1) peut encore être explicité sous la forme

$$D = \frac{\ln(N(r))}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Dimension fractale : définition

$$D_F(Y) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\sup \frac{\ln(N(\varepsilon, Y))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right)$$

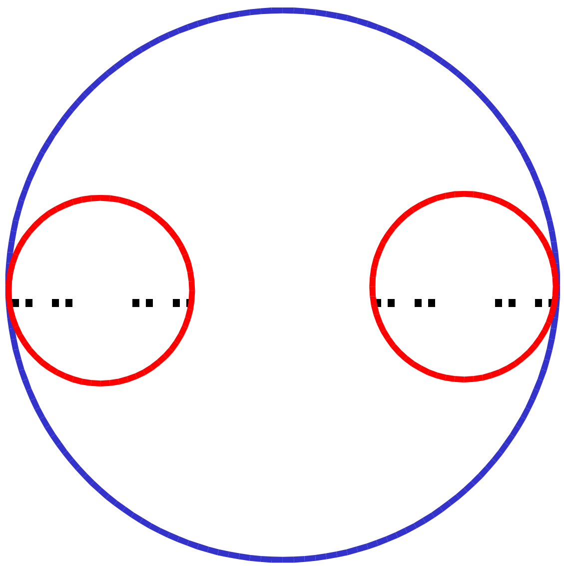
$N(\varepsilon, Y) =$ nb de boules de diamètre ε nécessaires pour recouvrir Y

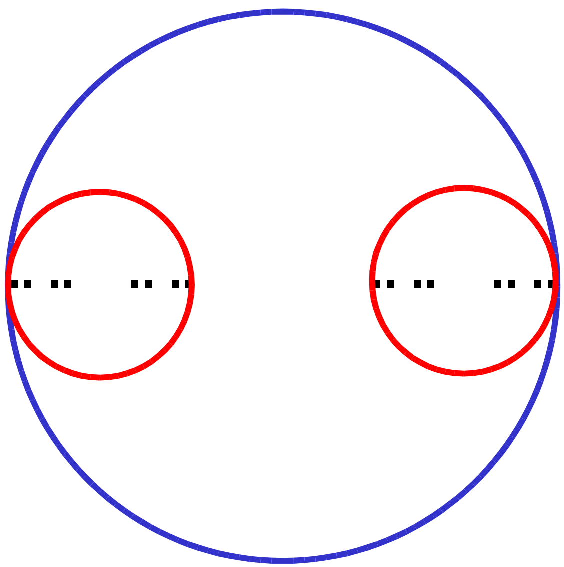
- Dimension fractale = dimension de recouvrement

Remarque

- Pour un objet « classique »
  - $D_F(Y) = D_T(Y)$

Cas de Cantor





r=1
N(r)=1

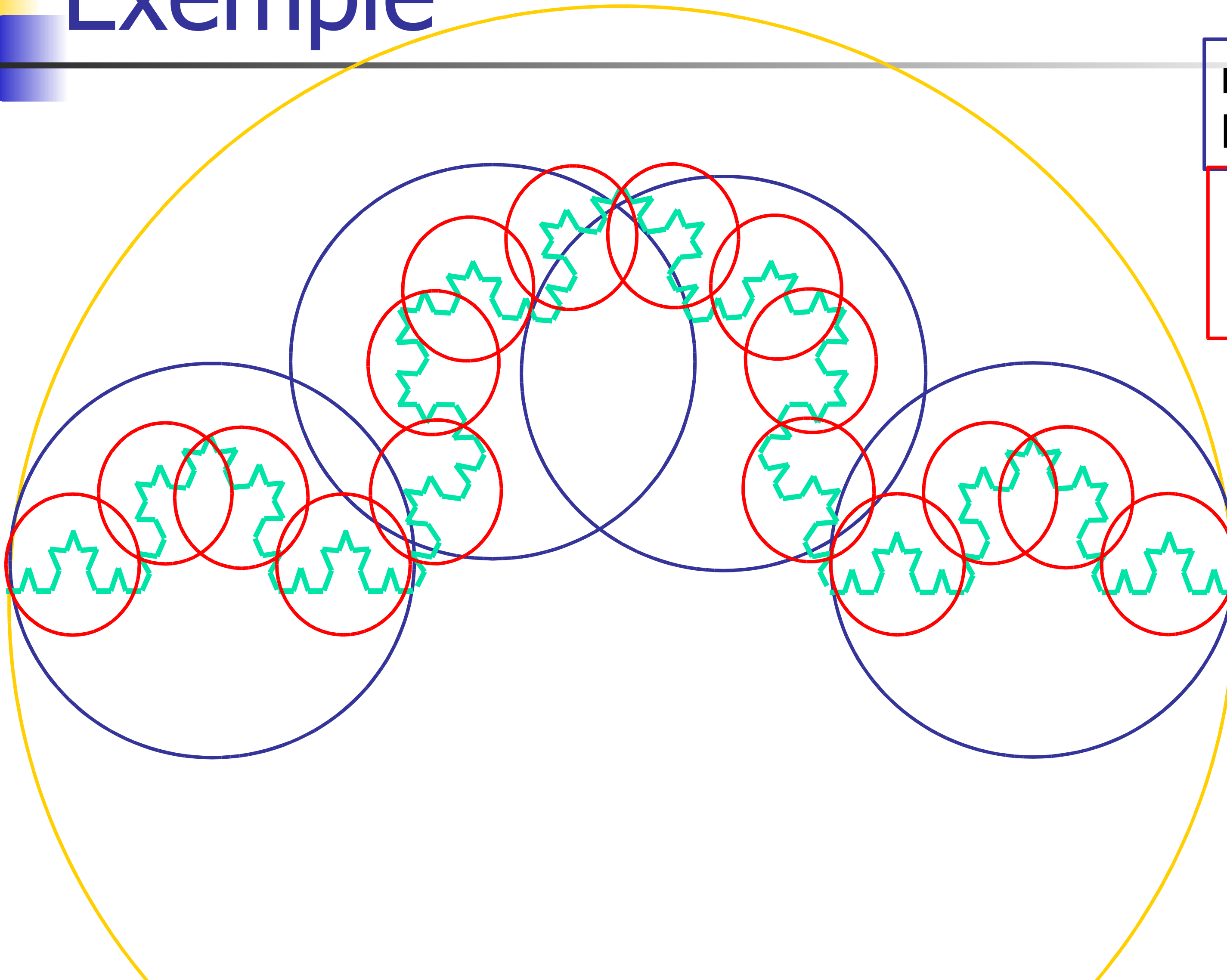
r=1/3
N(r)=2

r=1/9
N(r)=4

$$D_F = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{\ln(4)}{\ln(9)} = 0{,}63$$

Exemple

$$D_F = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} = \frac{\ln(16)}{\ln(9)} = 1{,}26$$



Propriétés

- La dimension fractale est :
  - une dimension non entière
  - Une dimension de recouvrement
    - Quantifie la capacité d'un objet à remplir l'espace dans lequel il est plongé.
      - On peut avoir des courbes de dimension > 2
- $D_F(Y) \geq D_T(Y)$

Définition 1 d'une fractale

- Mandelbrot 1983

Un objet Y est une fractale si:

$$D_F(Y) > D_T(Y)$$

Notion géométrique

- La dimension fractale est une notion de recouvrement
- « On voit » d'après la définition qu'une construction récursive est nécessaire
- Mais l'association à des propriétés géométriques n'est pas immédiate

=> On définit une notion plus restrictive mais plus commode d'un point de vue modélisation géométrique

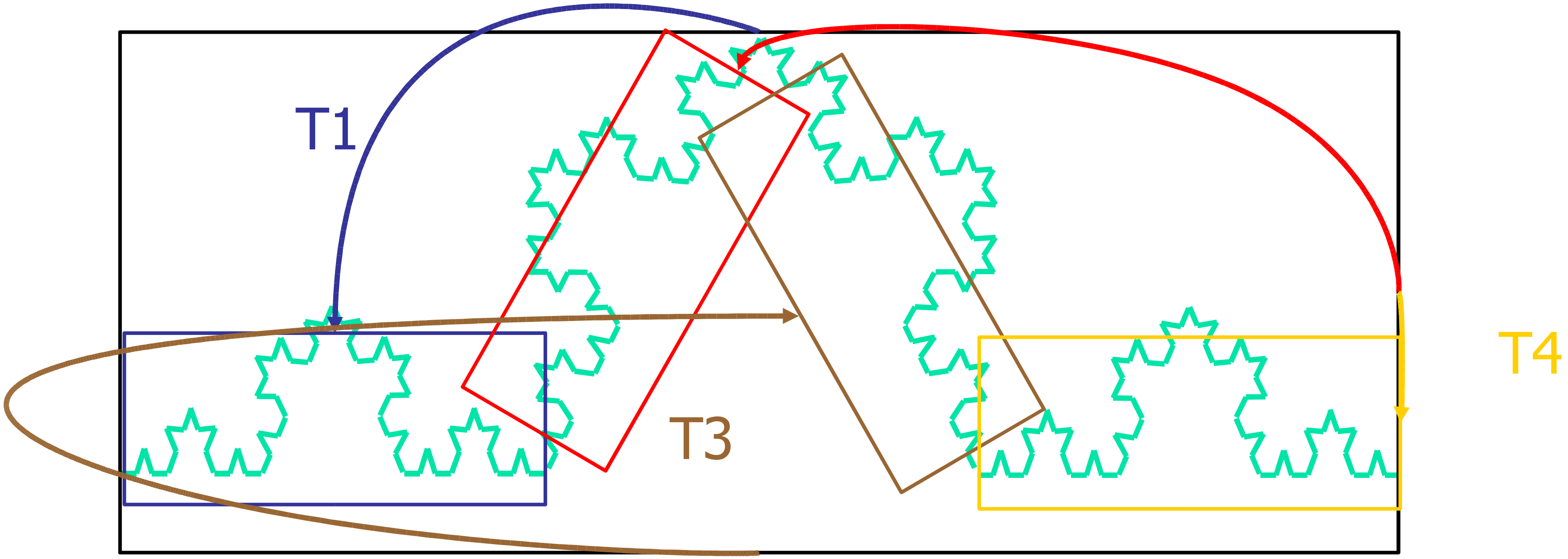
Définition 2 d'une fractale

- Invariance par changement d'échelle
  - Un objet Y est dit invariant par changement d'échelle si $\exists$ N transformations $T_i,\ldots,T_N$ telles que

$$Y = \bigcup_{i=1}^{N} T_i(Y)$$

Où chaque T_i est un homéomorphisme contractant

Exemple



Exemple 2 : Les « Julia »

- $F_c(Z)=Z^2+c$
- En inversant F_c

$$T_1(Z)=\sqrt{Z-c}$$

$$T_2(Z)=-\sqrt{Z-c}$$

$$J_c=T_1(J_c)\cup T_2(J_c)$$

Les IFS : Iterated Function Systems

- Hutchinson 1981 Barnsley 1988
  - Formalisme basé sur l'invariance par changement d'échelle
  - IFS = I = ensemble des transformations traduisant l'invariance par changement d'échelle

$$Y = \bigcup_{i=1}^{N} T_i(Y)$$

$$I = \{T_i, \dots, T_N\}$$

à I on associe un opérateur T

$$T : C(\Re^n) \to C(\Re^n)$$

$$Y \mapsto T(Y) = \bigcup_{i=1}^{N} T_i(Y)$$

Les IFS : Iterated Function Systems

- On montre qu'il existe un unique objet appelé Fractale (F) tel que

$$F = \bigcup_{i=1}^{N} T_i(F)$$

$$T = \bigcup_{i=1}^{N} T_i = \text{opérateur de Hutchinson}$$

est contractant dans l'espace des compacts non-vide muni de la distance de Hausdorff (d_H)

Parallèle entre 1 fonction et 1 IFS

- Contexte=
- Ensemble des points de R
- Fonction contractante F
  - $F(x)= ½ x + ½$
  - Point fixe = 1
  - $F(1) = ½ x 1 + ½ = 1$
- Pour obtenir le point fixe
  - $F^n(x)$-> point fixe (n->∞)
  - ∀ x

- Contexte =
- Ensemble des compacts de R
- IFS = I = $\{T_1, T_2\}$
  - $T_1(x)= ½ x$
  - $T_2(x)= ½ x + ½$
  - Point fixe = [0,1]
  - $T([0,1]) = T_1([0,1]) \cup T_2([0,1])$
  - $T_1([0,1])=[0,½]$
  - $T_2([0,1])=[½;1]$
- Pour obtenir le point fixe
  - $T^n(O)$-> point fixe (n->∞)
  - ∀ O

Visualisation

- $\forall$ O un compact $T^n(O)$ tend vers F
- O = {x} où x $\in R^n$
- La Fractale est l'attracteur associé à I noté A(I)