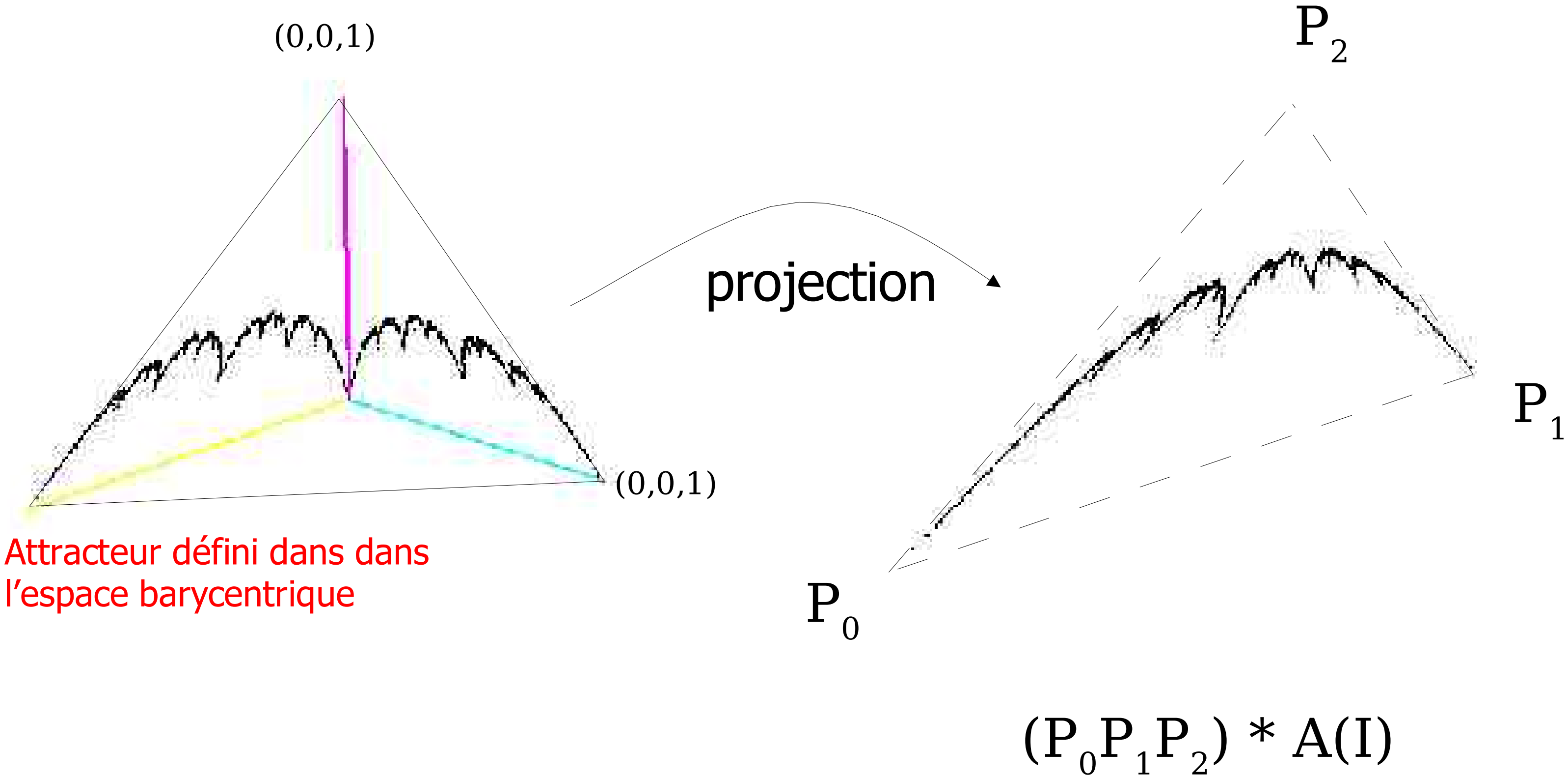
Modélisation à l’aide des IFS

Fractales à pôles

Condition d'existence des attracteur d'IFS

- Contexte = espace métrique complet
- Ensemble de transformations contractantes
- Exemple :
  - R^n
  - BI=espace barycentrique

Application à BI => formes fractales à pôles



Formes fractales à pôle

- Cette approche permet de dissocier
  - l'espace d'itération :
    dans lequel est défini l'attracteur
  - De l'espace de modélisation :
    dans lequel est projeté l'attracteur à l'aide des points de contrôles

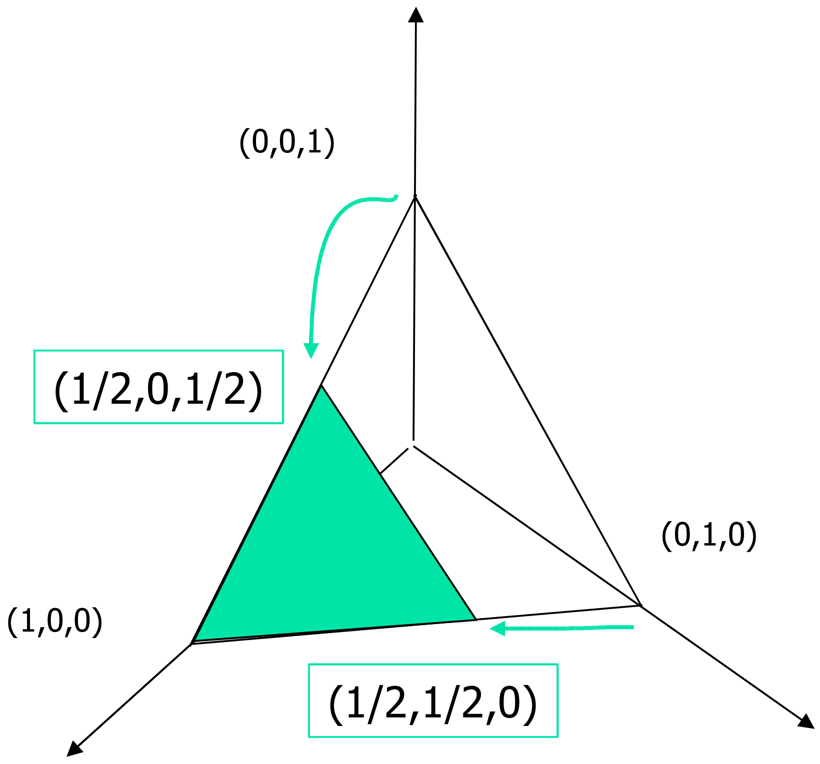
Formes fractales à pôle

- Si les T_i sont des opérateurs affines
- Pour qu'ils soient internes (à BI)

=> les matrices doivent être des matrices de Markov

  - (Somme des coeff. d'une colonne =1)

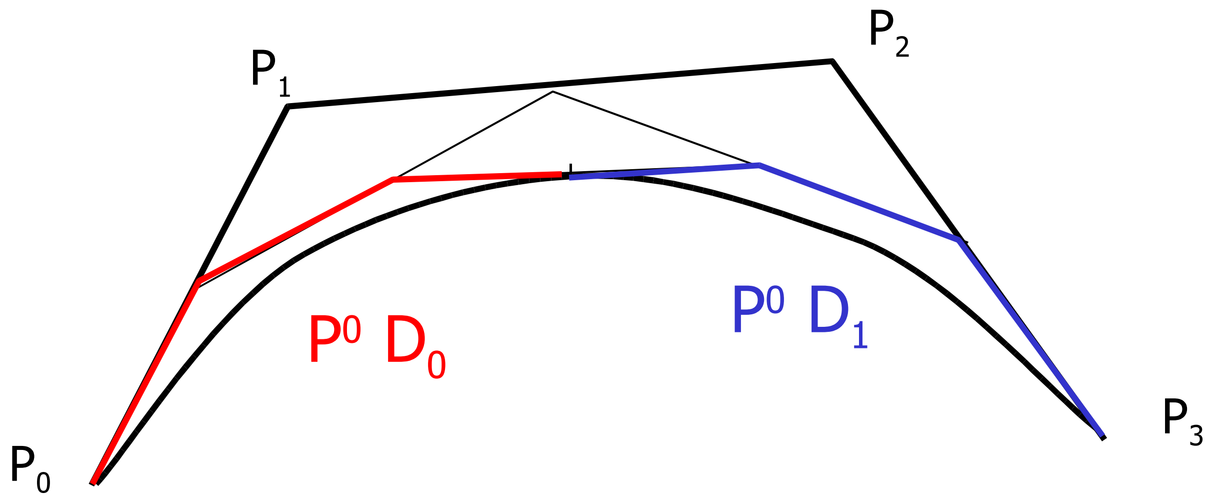
Exemple de construction d'IFS dans BI



$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

IFS et formes à pôle

- Algorithme de De Casteljau



Et on recommence
On montre que B(t) est invariant par D_0 et D_1

ICE des fonctions de base

$$Q(t) = P * B(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i(t) p_i$$

$B(t) = [B_0, \ldots, B_n]^T$ vecteur des fct de Bernstein

$P = [p_0, \ldots, p_n]$ ensemble de points de contrôle

$$Q(t) = P * B(t) = \begin{cases} (P * D_0) * B(2t) \text{ si } t \in [0, 1/2] \\ (P * D_1) * B(2t-1) \text{ si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$B(t) = \begin{cases} D_0 * B(2t) \text{ si } t \in [0, 1/2] \\ D_1 * B(2t-1) \text{ si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

ICE des fonctions de base

- En redéfinissant le paramétrage de B(t) par

$$\tau_0 * t = \frac{t}{2}$$

$$\tau_1 * t = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}$$

Rq : $A(\{\tau_0, \tau_1\})=[0,1]$

$$B(t) = \begin{cases} D_0 * B\left(\tau_0^{-1} * t\right) \text{si } t \in [0,1/2] \\ D_1 * B\left(\tau_1^{-1} * t\right) \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

$$\tau_0^{-1} * t = 2t$$

$$\tau_1^{-1} * t = 2t - 1$$

$$\begin{cases} B(\tau_0 * t) = D_0 * B(t) \text{si } t \in [0,1] \\ B(\tau_1 * t) = D_1 * B(t) \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

ICE des fonctions de base

$$\begin{cases} B(\tau_0 * t) = D_0 * B(t) \text{si } t \in [0,1] \\ B(\tau_1 * t) = D_1 * B(t) \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B([0,1]) &= B(\tau_0 * [0,1] \cup \tau_1 * [0,1]) \\ &= B(\tau_0 * [0,1]) \cup B(\tau_1 * [0,1]) \\ &= D_0 * B([0,1]) \cup D_1 * B([0,1]) \end{aligned}$$

B([0,1]) est invariant par $\{D_0,D_1\}$

$$\boxed{A(\{D_0, D_1\}) = B([0,1])}$$

IFS et formes à pôle

- Les fonctions de Bernstein sont autosimilaires.

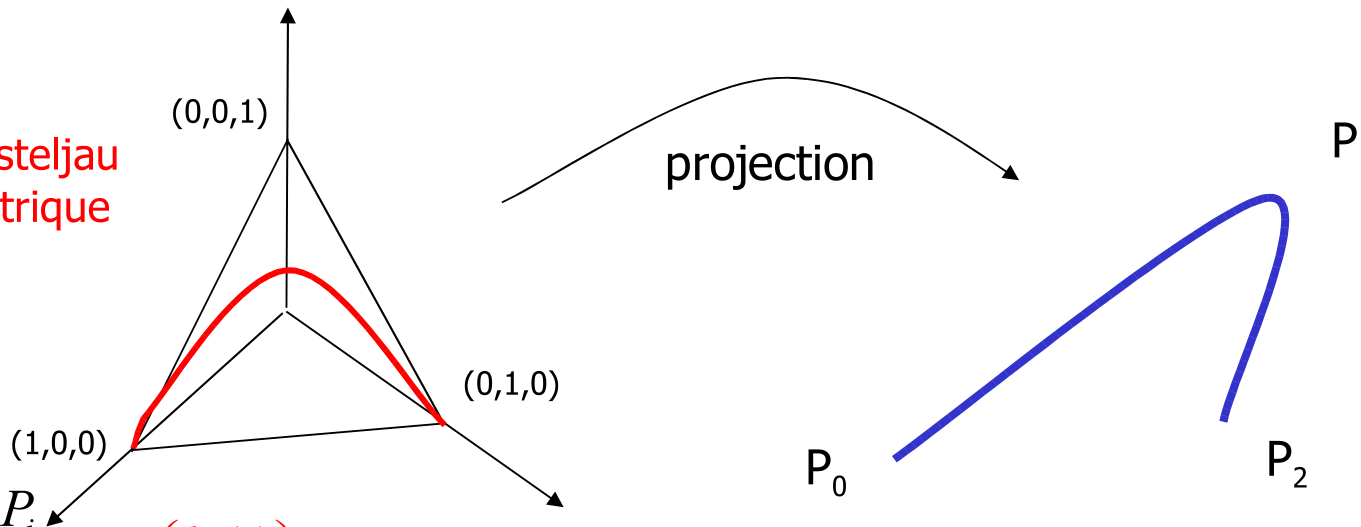
  => elles peuvent être représentées par des IFS

  => IFS = les matrices de De Casteljau

  définissent un attracteur dans l'espace barycentrique

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} b_0(t) \\ b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} = P * A(I)$$

Attracteur défini par
les matrices de De Casteljau
dans l'espace barycentrique



$$P * B(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i(t)\, P_i$$

$$\sum_{i=0}^{n} b_i(t) = 1 \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\begin{pmatrix} b_0(t) \\ b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \textit{pour } t \in [0,1] = \text{attracteur } A(I) \text{ de } I = \{D_0, D_1\}$$

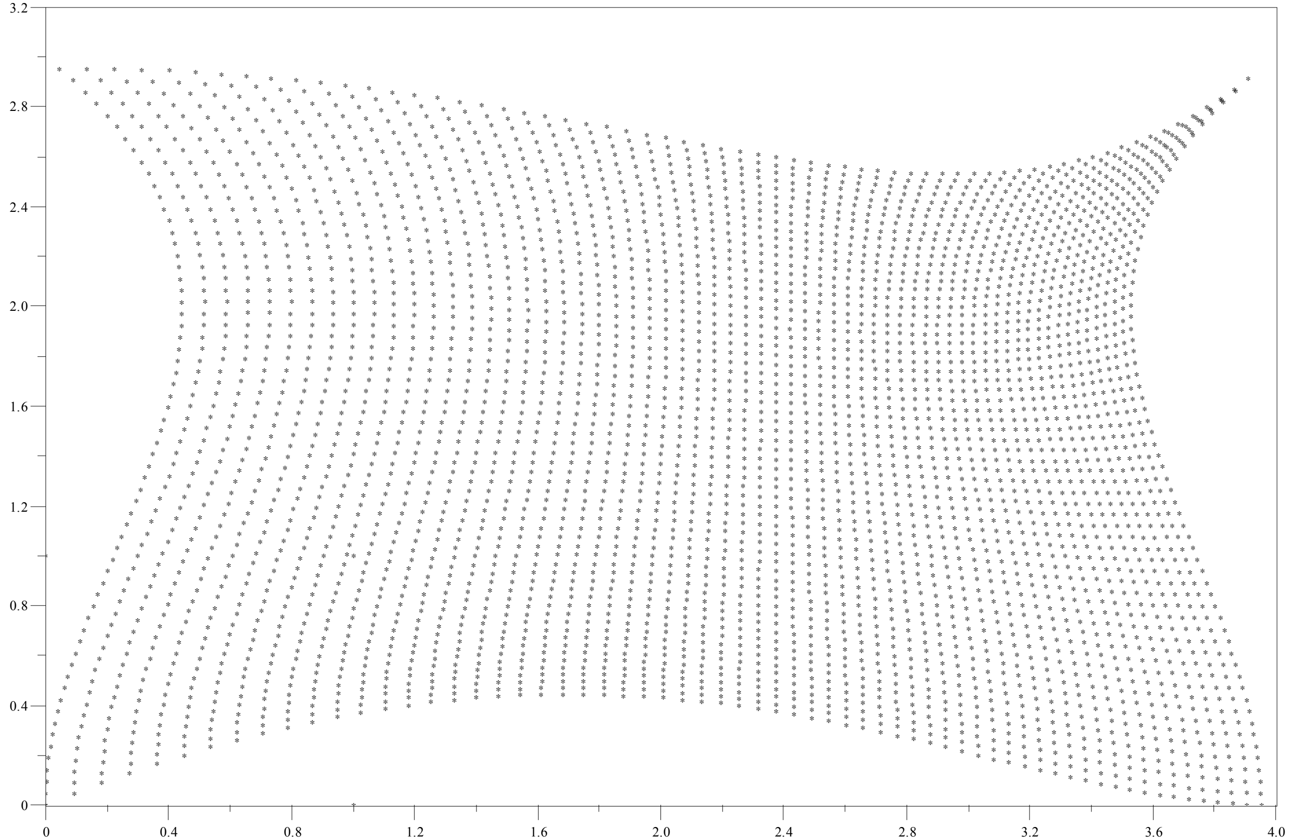
Unification des fractales et formes à pôles

- Principe de construction :
  - On construit l'attracteur dans l'espace barycentrique avec les IFS
  - On fait le plongement avec les points de contrôles
- Conséquence :
  - Même modèle pour les fractales et les formes à pôles
    - Manipulation des figures lisses et fractales identique
    - Formes à pôles fractales / Déformation de fractales
    - Surface définie par produit tensoriel (lisse/lisse, fractale / lisse , fractale / fractale)
    - Combinaison de fractales et formes à pôles

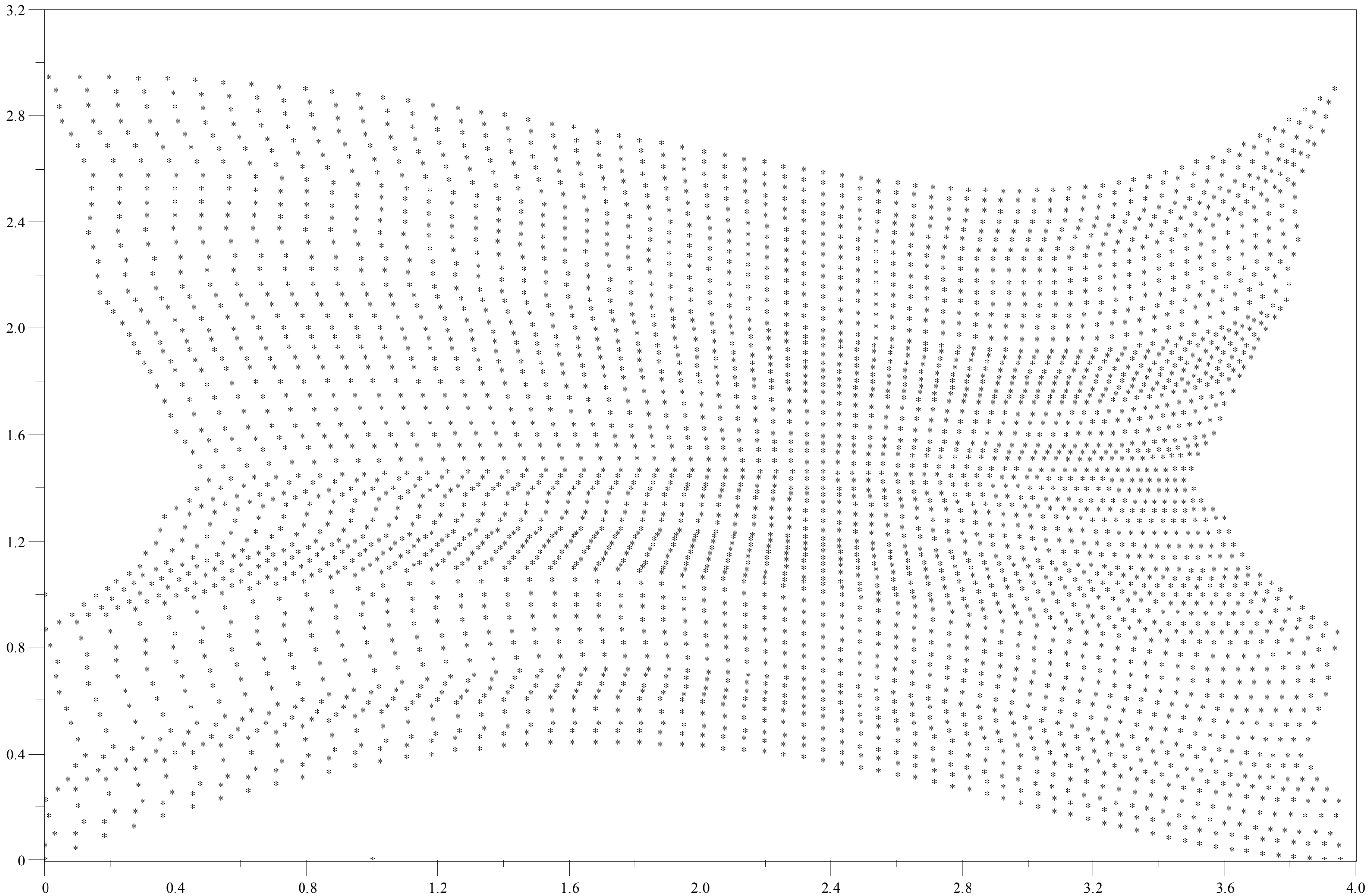
Exemple d'application

- Construction de surface:
  - Pour les formes à pôles, les surfaces sont générées par produit tensoriel de courbes.
  - Ce qui se traduit, dans l'algorithme de De Casteljau, par l'utilisation des produits tensoriels des matrices D_0 et D_1 :
    - D_0*D_0, D_0*D_1, D_1*D_0, D_1*D_1
  - Ceci reste valable quelle que soit la nature des matrices.

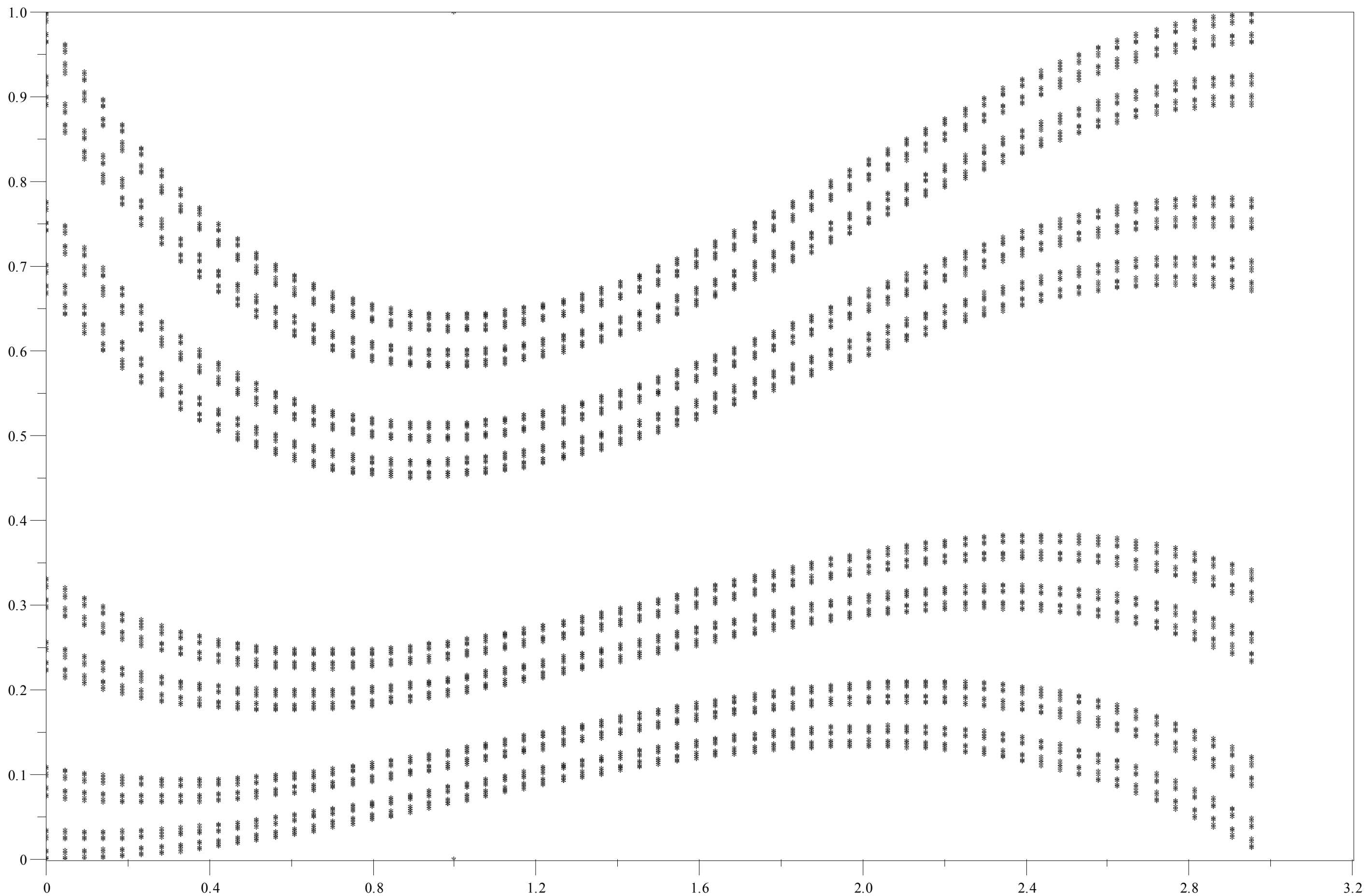
Surface par produit tensoriel: lisse / lisse



Surface par produit tensoriel: lisse / fractale



Surface par produit tensoriel: lisse / fractale



Surface par produit tensoriel: fractale / fractale