Modélisation géométrique et synthèse d'images Propriétés différentielles des courbes et des surfaces

Christian Gentil

Master 2 IIA - Université de Bourgogne

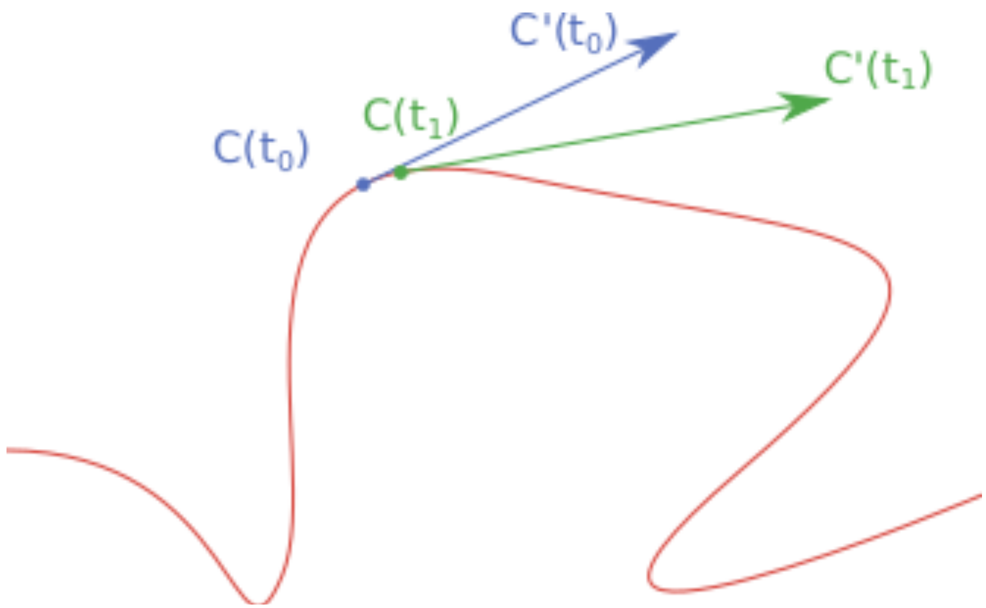
MGSI : B-Rep - maillage 2020-2021

Pourquoi

- Pb de raccord $C1$, C_2, ..., C_n
- Expression de contraintes (surface posée sur un plan : plan = plan tangent)
- Géométrie : construction d'une surface par balayage
  $\Rightarrow$ repère de Frenet $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$.
- Visualisation : calcul d'illumination
  $\Rightarrow$ normal à la surface.
- Animation : déplacer un objet le long d'une courbe
  $\Rightarrow$ repère de Frenet

Dérivée/tangente et vitesse

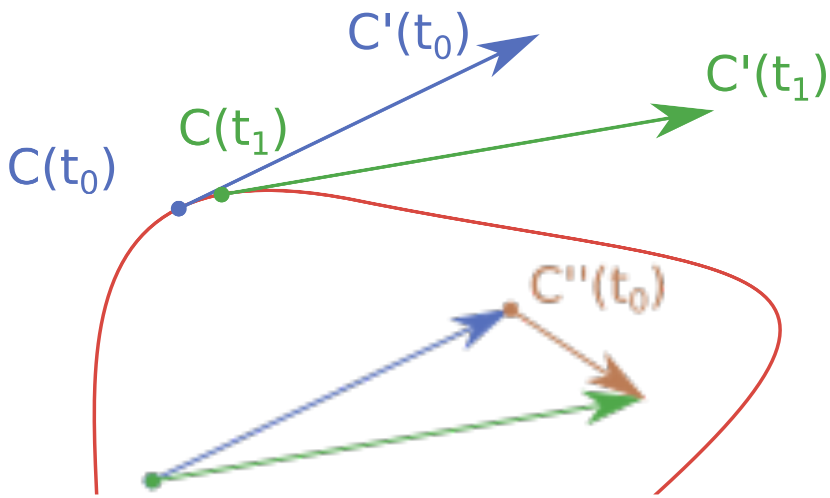
$C(t)$ une courbe.
Le vecteur $C'(t) =$ vitesse de parcours de la courbe au point t



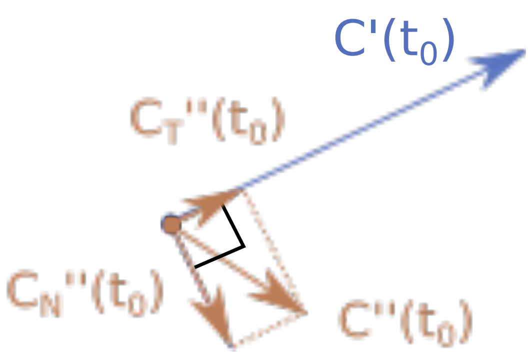
- Il est tangent à la courbe.
- Sa norme dépend du paramétrage.
- Sa direction est indépendante du paramétrage.
- Pour la paramétrisation curviligne sa norme $= 1$.

Dérivée Seconde et accélérations

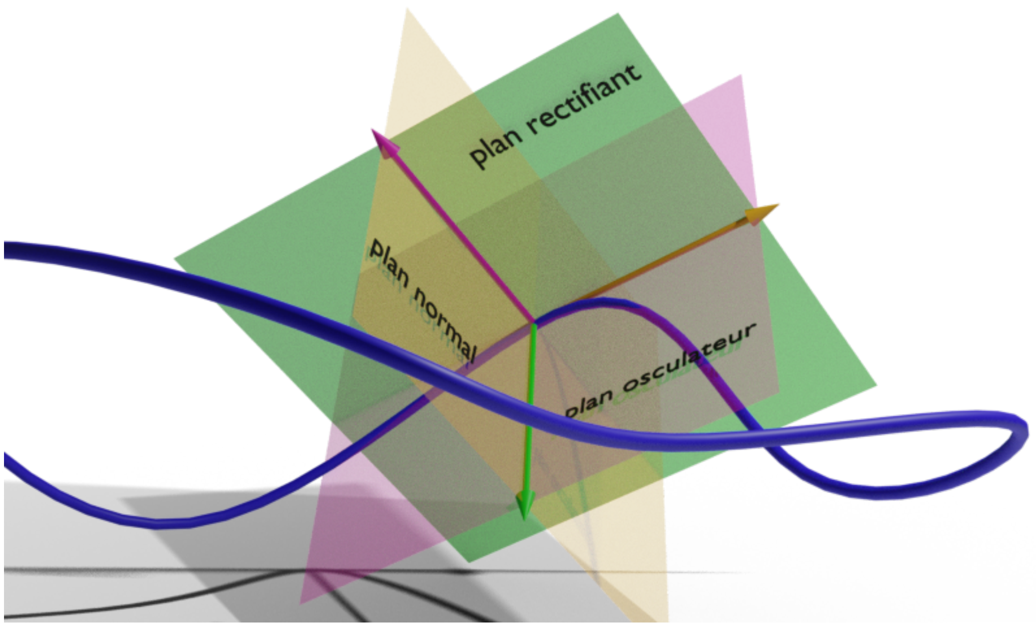
= variation de la dérivée
= variation de la vitesse = accélération = $C''(t)$



Se décompose en une accélération normale et une accélération tangentielle $C''(t) = C''_T(t) + C''_N(t)$



Repère de Frenet et cercle osculateur



Repère de Frenet :

$$\vec{t} = \frac{C'(t)}{||C'(t)||}$$

$$\vec{n} = \frac{C''_N(t)}{||C''_N(t)||}$$

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$$

Les différents plans :

- Plan orthogonal à $\vec{t}$= plan normal
- Plan orthogonal à $\vec{n}$= plan rectifiant
- Plan orthogonal à $\vec{b}$= plan osculateur

Calcul de la dérivée

Exemple d'une courbe cubique :

$$C(t) = (t^3 \; t^2 \; t \; 1) M_B P$$

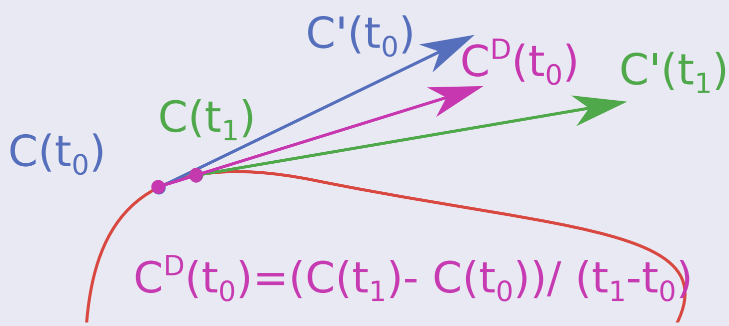
$$C'(t) = (3t^2 \; 2t \; 1 \; 0) M_B P$$

c'est tout!

Si formule trop compliquée alors on utilise

les différences finies

$\epsilon = valeurpetite$

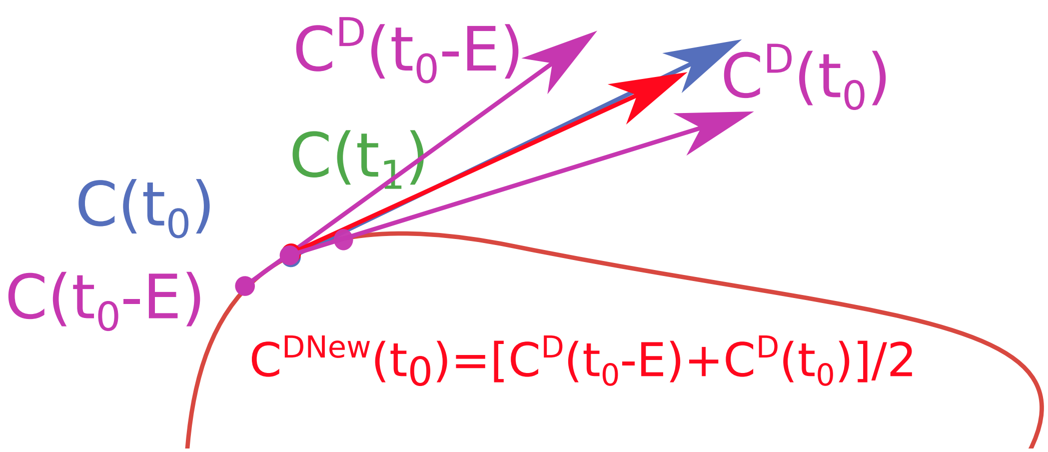


$$C'(t) \approx C^D(t) = \frac{C(t+\epsilon)-C(t)}{\epsilon}$$

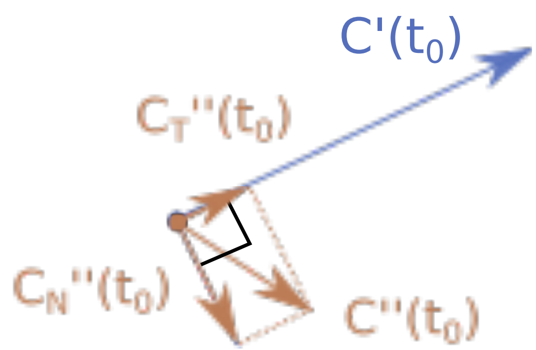
Calcul de la dérivée

Les différences finies améliorées = moyenne de la dérivée avant et après (bien si la dérivée est continue) :

$$C'(t) \approx C^{DNew}(t) = \frac{C^D(t-\epsilon) + C^D(t)}{2} = \frac{C(t+\epsilon) - C(t-\epsilon)}{2\epsilon}$$



Dérivée seconde



- $C''_T(t)$ augmentation de la vitesse
- $C''_N(t)$ changement de direction de la vitesse
  ce qui définie la courbure

$$C''_T(t) = \frac{C'(t)}{\| C'(t) \|}.C''(t) \times \frac{C'(t)}{\| C'(t) \|}$$

$$C''_T(t) = C'(t).C''(t)\frac{C'(t)}{\| C'(t) \|^2}$$

$$C''_N(t) = C''(t) - C''_T(t)$$

Calcul de la dérivée seconde

Exemple d'une courbe cubique :

$$C(t) = (t^3 \; t^2 \; t \; 1)M_B P$$

$$C'(t) = (3t^2 \; 2t \; 1 \; 0)M_B P$$

$$C''(t) = (6t \; 2 \; 0 \; 0)M_B P$$

Si formule trop compliquée alors on utilise différences finies des différences finies

les différences finies

$\epsilon = valeurpetite$

$C''(t) \approx C^{DD}(t) = \frac{C^D(t+\epsilon)-C^D(t)}{\epsilon}$

ou encore mieux avec les différences finies améliorées (à vous de trouver).

Courbure

On montre que l'accélération s'exprime en fonction du rayon de courbure $\mathcal{K} = 1/R$ par :

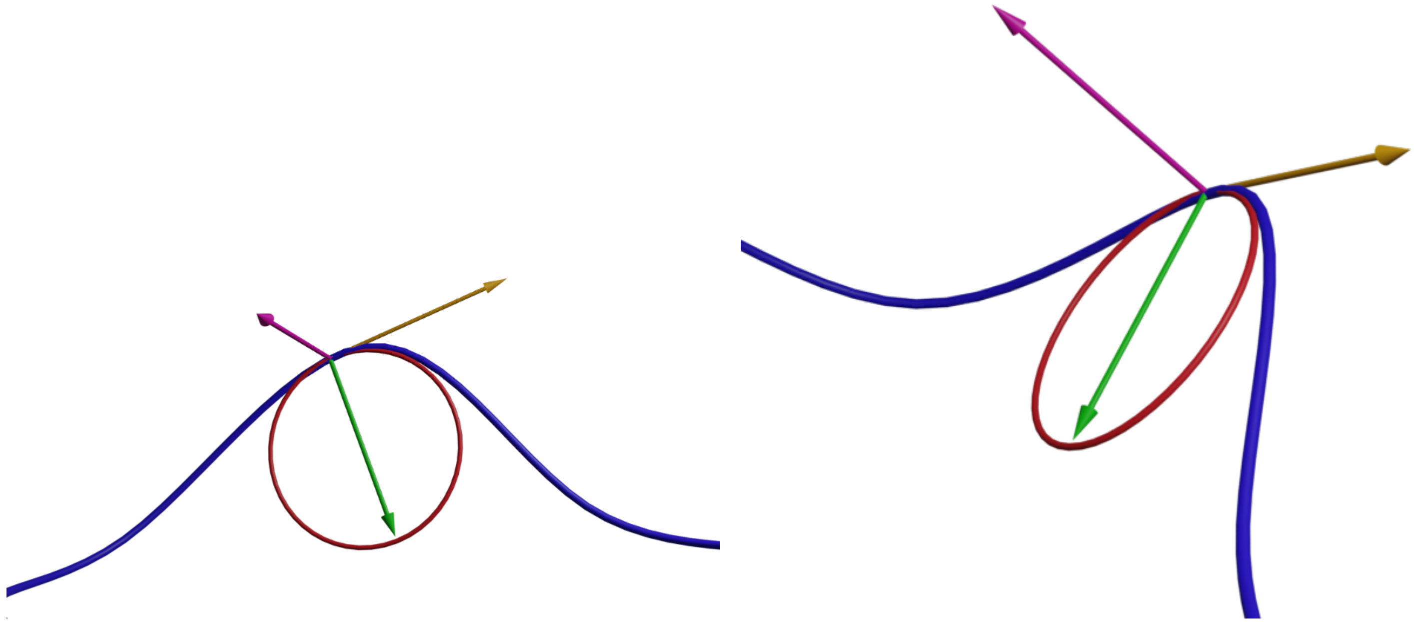
$$\vec{A} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

d'où

$$||C''_N(t)|| = \frac{||C'(t)||^2}{R}$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{R} = \frac{||C'(t) \wedge C''(t)||}{\| C'(t) \|^3}$$

Cercle osculateur



Cercle osculateur :

- Représente la courbure de la courbe au point P,
- Il est situé dans le plan osculateur,
- Son rayon est le rayon de courbure de la courbe $= R$,
- centre $= C = P + R\vec{n}$.

Questions

- Pour une courbe plane, quel est son plan osculateur ?
- Et pour une ligne droite ?
- Déterminez l'équation paramétrique de la droite tangente à P.
- Déterminez l'équation du plan normal.
- Déterminez l'équation du plan osculateur.
- Déterminez l'équation du plan rectifiant.