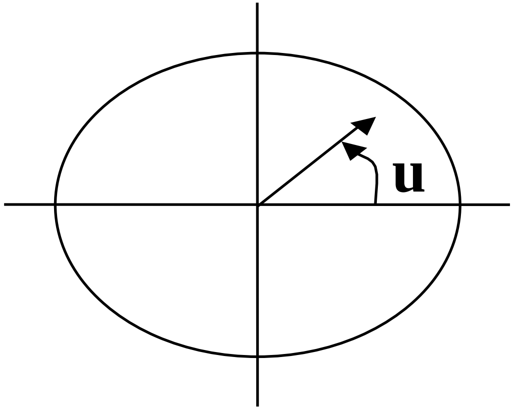
Courbes & Surfaces Paramétriques

Paramétrique / Implicite
Courbes Paramétriques (Splines)
Surfaces Paramétriques
~~Subdivision~~

Christian Gentil - Marc Neveu – LIB – Université de Bourgogne

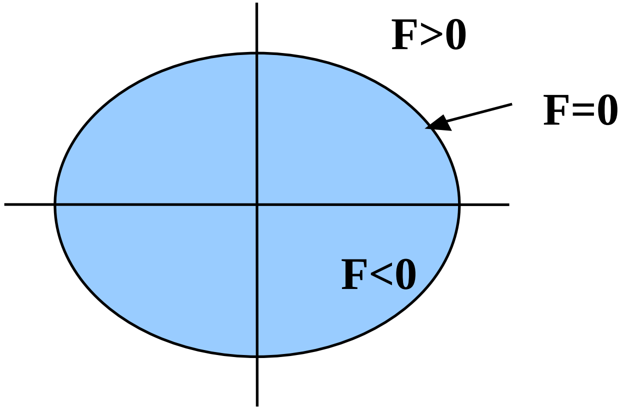
2 façons de définir un cercle

Paramétrique



$$\begin{cases} x(u) = r.cos(u) \\ y(u) = r.sin(u) \end{cases}$$

Implicite



$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$$

Représentations d'une courbe (2D)

Explicite : $y = y(x)$

$y=mx+b \quad y=x^2$

doit être une fonction (x->y) : limitation importante

Paramétrique : $(x,y)=x(u),y(u))$

$(x,y) = (\cos u, \sin u)$

+ facile à spécifier

- variable additionelle cachée u : le paramètre

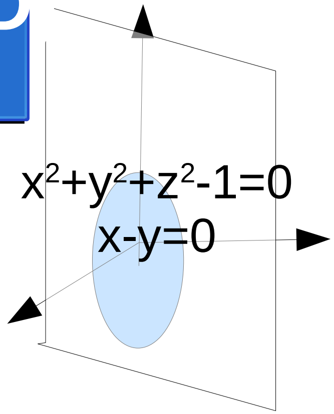
Implicite : $f(x,y) = 0$

$x^2+y^2-r^2=0$

+ y peut être une fonction multivaluée de x

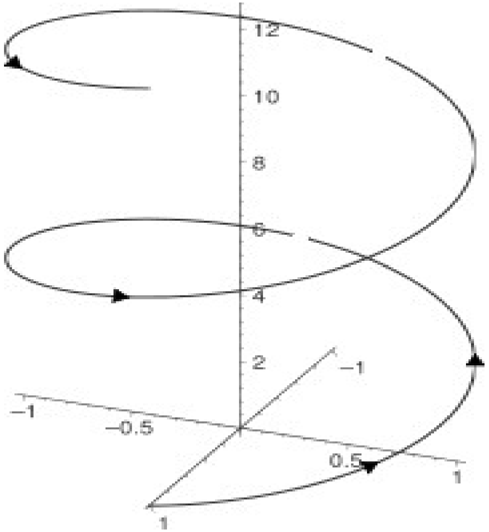
- difficile à spécifier, modifier, contrôler

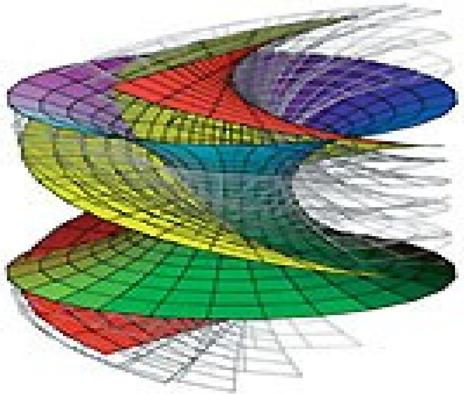
Représentations des courbes et surfaces (3D



- Représentation Implicite
  - Courbes : f(x,y,z) = 0 et g(x,y,z) =0
  - Surfaces : f(x,y,z) =0

- Représentation Paramétrique
  - Courbes : x = f(t), y = g(t), z = h(t)
  - Surfaces : x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v)
  - Courbe Cubique :
    - $x = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$
    - $y = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$
    - $z = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$





$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R.cos(2\pi.t) \\ y(t) = y_0 + R.sin(2\pi.t) \\ z(t) = z_0 + p.t \end{cases}$$

Hélice passant par (x_0,y_0,z_0), rayon R, pas p

$Helicoide\ :$

$u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = v.cos(u) \\ y = v.sin(u) \\ z = u \end{cases}$$

Représentation des Surfaces

Surface Paramétrique – (x(u,v),y(u,v),z(u,v))

Ex : plan, sphère, cylindre, tore, surface bicubique, surface de balayage

Les fonctions paramétriques permettent de se déplacer sur la surface en faisant varier u et v (ex en boucles imbriquée)

Pratique pour maillages polygonaux, etc

Terrible pour les intersections (rayon/surface), intériorité, appartenance, etc

Surface Implicite F(x,y,z)=0

Ex : plan, sphère, cylindre, tore, blobs

Terrible pour la visualisation

Pratique pour les intersections, le morphing

Surface de Subdivision

Définie par un maillage de contrôle et une subdivision récursive

Pratique pour la conception interactive

Visualisation des Courbes Paramétriques

- Evaluation des fonctions x(t), y(t), z(t)
- Par échantillnage de l'espace des paramètres
- Paramétrisation d'une courbe: nombre de solutions infini
    - Paramètre = vitesse de parcours de la courbe
        - avec vitesse (non-) constante,
        - (dis-)continue,
        - par longueur d'arc,...

Courbes Paramétriques : résumé

- Pourquoi des polynomiales par morceaux, pourquoi des cubiques ?
- Principales courbes :
  - Splines de Hermite , splines de Bezier , splines de Catmull-Rom ,splines naturelles cubiques , B-Splines, NURBS

Et extension aux surfaces

Construction de Courbes

Représenter <> construire

Buts pour construire des courbes :

Courbe lisse, “élastique”

Utilise des points de contrôle => et coordonées barycentriques

Comme les architectes de marine :

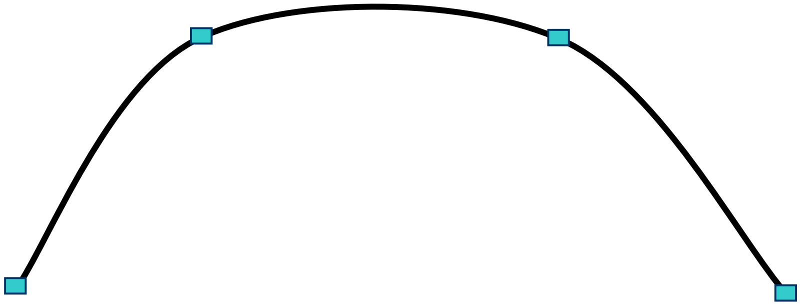
Poids ou joints pour maintenir une latte flexible (spline)

la latte passe par les joints et a une forme “lisse”

Mathématiquement ?

2 types de courbes

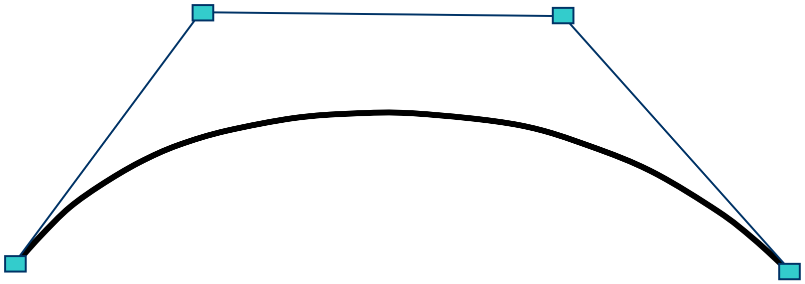
Interpolation



la courbe passe par

les points de contrôle

Approximation



la courbe approche

les points de contrôle

Avant de démarrer...

Quelques rappels mathématiques....

Soit E^3 l'espace Euclidien
Courbe paramétrique :

ex :

$$Q(t)=[x(t), y(t), z(t)]=Q_0+Q_1 t+Q_2 t^2+\ldots+Q_n t^n$$

$$Q(t)=Q_0+Q_1 t$$

combinaison barycentrique BC de E^3 : point de E^3 /

$$\begin{cases} BC=\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i \\ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i=1 \end{cases}$$

combinaison convexe BC /

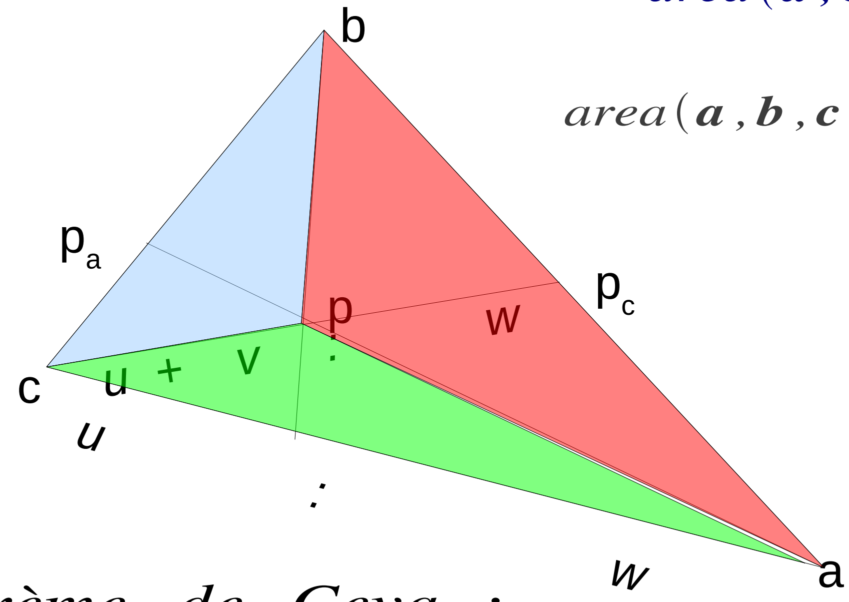
$$\alpha_i \geq 0 \ \forall i$$

Coordonnées Barycentriques

$$\boldsymbol{p} = u\,\boldsymbol{a} + v\,\boldsymbol{b} + w\,\boldsymbol{c}$$
$$u + v + w = 1$$

$$u = \frac{area(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}{area(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})} \qquad v = \frac{area(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c})}{area(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})} \qquad w = \frac{area(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p})}{area(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}$$

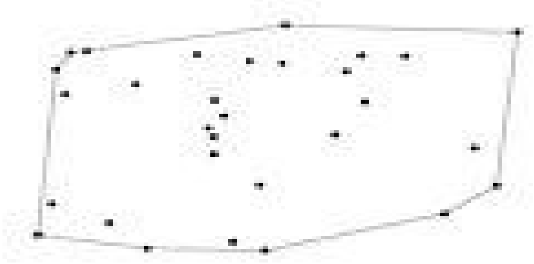
$$area(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_c \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



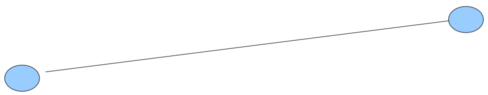
$$th\acute{e}or\grave{e}me \quad de \quad Ceva \; :$$
$$ratio(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p_c}, \boldsymbol{b}).ratio(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p_a}, \boldsymbol{c}).ratio(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{p_b}, \boldsymbol{a}) = 1$$

Enveloppe convexe

L'ensemble de toutes les combinaisons convexes d'un ensemble Γ de points de E^3 est l'enveloppe convexe de Γ



un cas particulier d'une combinaison convexe : l'interpolation linéaire de 2 points distincts a et b :
$Q(t) = (1-t)\, a + t\, b$

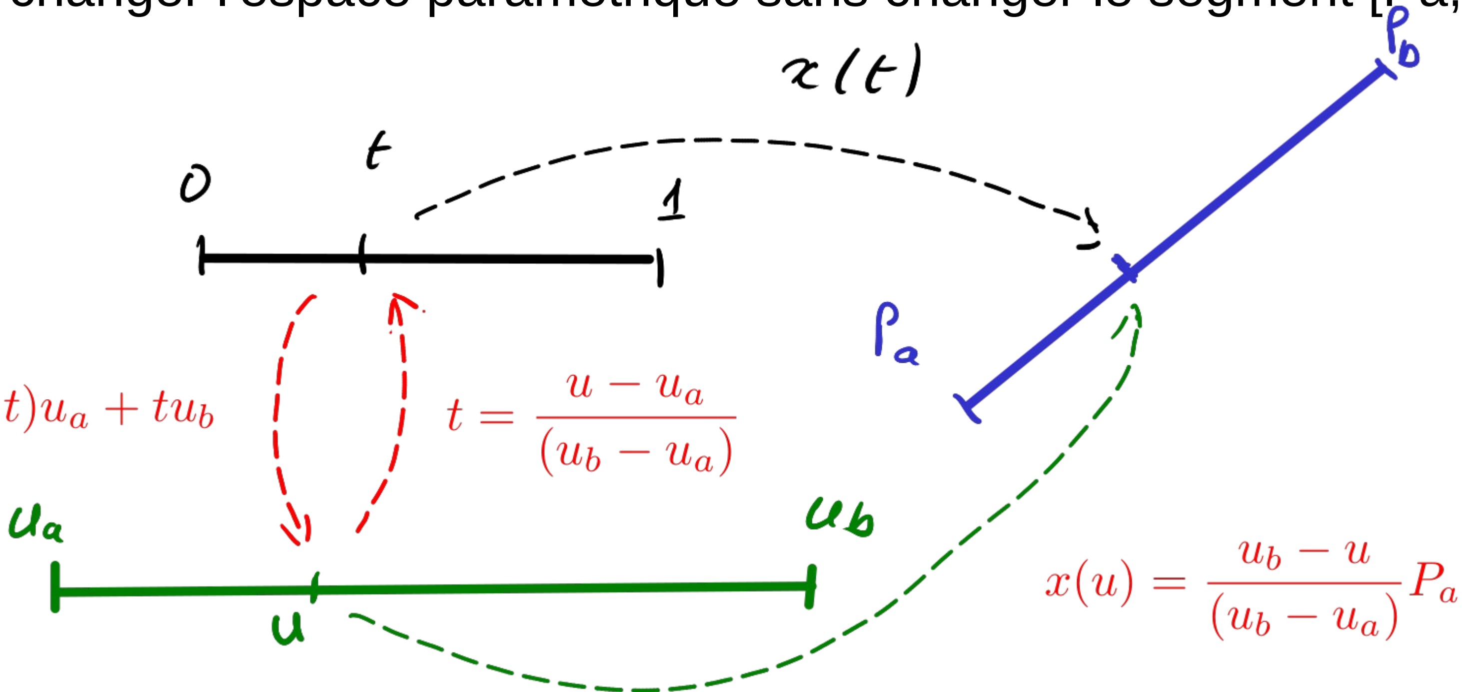


Changement de paramètre

Le segment [Pa, Pb] est défini par l'application affine

$$x(t) = (1-t)\,P_a + t\,P_b \qquad t \in [0,1]$$

On peut changer l'espace paramétrique sans changer le segment [Pa, Pb]



$$u = (1-t)u_a + tu_b$$

$$t = \frac{u - u_a}{(u_b - u_a)}$$

$$x(u) = \frac{u_b - u}{(u_b - u_a)}P_a + \frac{u - u_a}{(u_b - u_a)}P_b$$

Interpolation Polynomiale

soient $P_0, \ldots, P_n$ et $t_0, \ldots, t_n$ les valeurs paramétriques correspondantes

– **l'Interpolation =** trouver une courbe P(t) passant par tous les points

– Calculer un polynome satisfaisant les contraintes d'interpolation : $P(t_i) = P_i$ (i=0..n)

- **Théorème** :

– il existe un polynome unique P de degré ≤ n tel que $P(t_i) = P_i$ (i=0..n) avec P_i et t_i fixés

Interpolation Polynomiale

un polynome de degré n interpole une courbe en (n+1) points

Ex : courbe 2[e] degré interpole 3 points

$x(t) = at^2+bt+c$ en (t_1,x_1), (t_2,x_2), (t_3,x_3)

3 équations linéaires avec 3 inconnues pour trouver a,b,c

Interpolation de Lagrange

courbe « sinueuse », globale, instable

=> polynomes de bas degré et courbe lisse

simuler un fil élastique (thin plate)

Interpolation de Lagrange

Données :

n + 1 points (avec x_i distincts 2 à 2).

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots (x_n, y_n)$$

Polynomes de Lagrange

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_j - x_n}$$

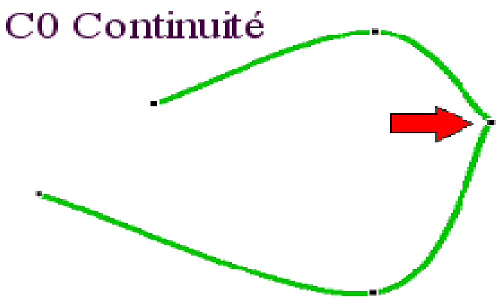
Deux propriétés : $\forall j \quad degre(L_j) = n$

$$L_j(x_i) = \delta_{j,i} \quad ie \quad L_j(x_j) = 1 \ \wedge \ L_j(x_i) = 0 \ \ if \quad j \neq i$$

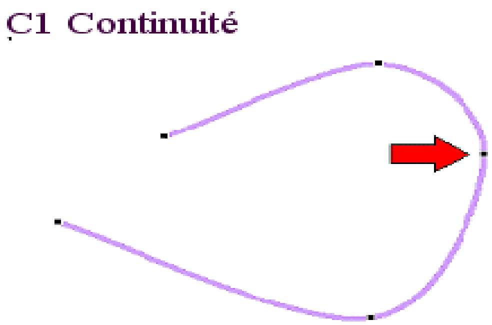
$L(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x)$ Est l'unique polynome de degré n vérifiant $L(x_i) = y_i \quad \forall i$

Polynomes par morceaux

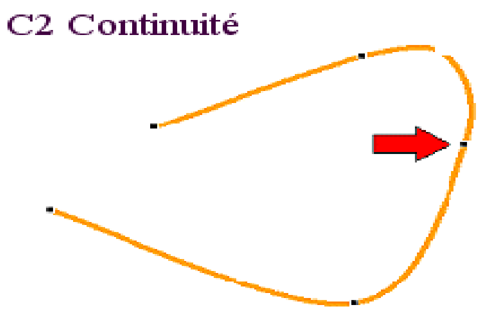
Spline : plusieurs morceaux combinés
combinaison« correcte »



Position
continuité

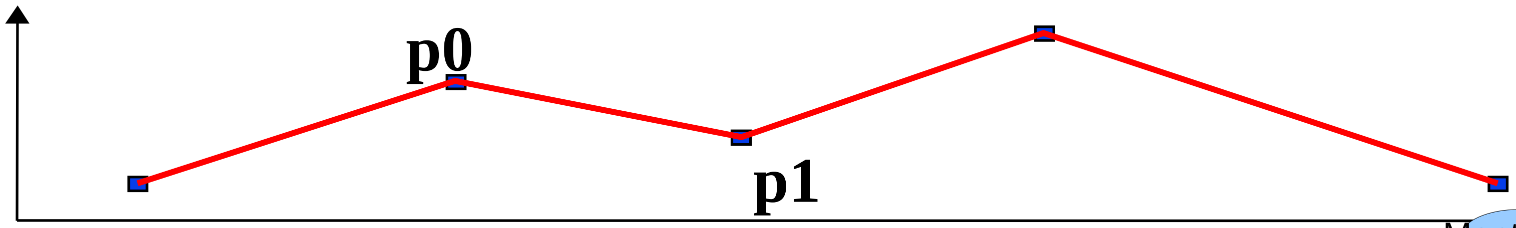


Position et
alignement
des tangentes



Position,
tangence
et continuité
de la courbure

Polynomes linéaires par morceaux

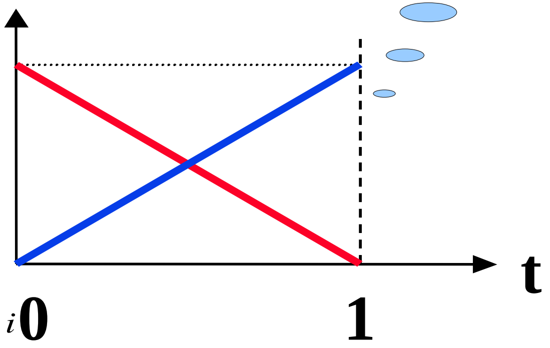


Montrer le segment dans BI2

$$p(t) = (1-t)\,p_0 + t\,p_1$$

2 fonctions de base

$$p(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \sum_{i=O}^{1} B_i^1(t)\, p_i$$

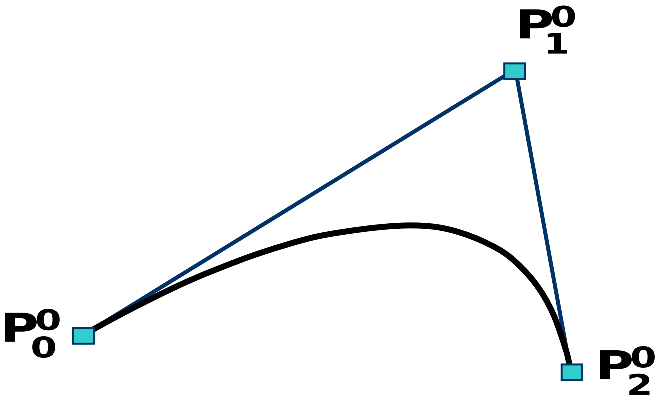


Courbe de Bézier

Lien entre
polynomes de **Bernstein,**
développement du binome,
et loi binomiale

$$P(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t + 1 \\ -2t^2 + 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^2(t) \\ B_1^2(t) \\ B_2^2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix}$$



$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} \boxed{B_i^n(t)} P_i^0$$

Polynomes de Bernstein

Degré n=2

Courbe de Bézier

Lien entre polynômes de **Bernstein,** développement du binome et loi binomiale

$$\boxed{P_0^1(t) = (1-t)P_0^0 + t\,P_1^0}$$

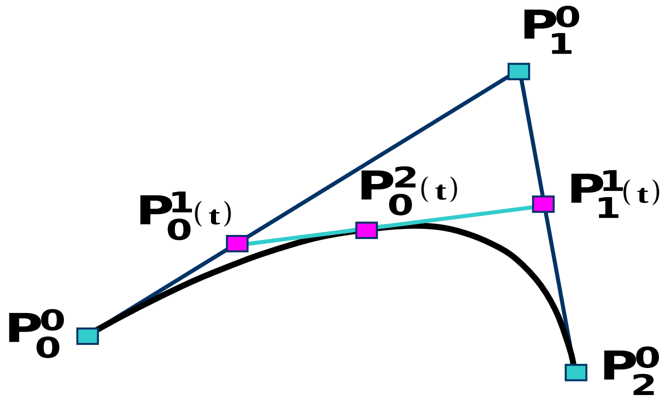
$$\boxed{P_1^1(t) = (1-t)P_1^0 + tP_2^0}$$

$$P_0^2(t) = (1-t)\boxed{P_0^1} + t\boxed{P_1^1}$$

$$P_0^2(t) = (1-t)\boxed{(1-t)P_0^0 + tP_1^0} + t\boxed{(1-t)P_1^0 + tP_2^0}$$

$$P_0^2(t) = \boxed{(1-t)^2}P_0^0 + \boxed{2t(1-t)}P_1^0 + \boxed{t^2}P_2^0$$

$$= \boxed{B_0^2}P_0^0 + \boxed{B_1^2}P_1^0 + \boxed{B_2^2}P_2^0 = \sum_{i=0}^{n} B_i^n P_i^0$$

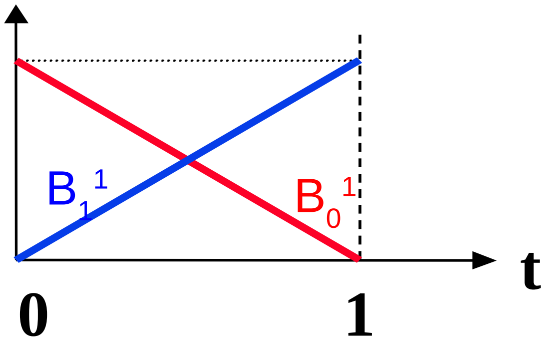


degré n = 2

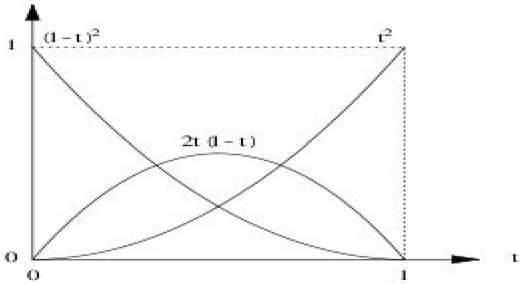
Fonctions de mélange de Bézier

Démo avec courbebaseparam

Degré 1



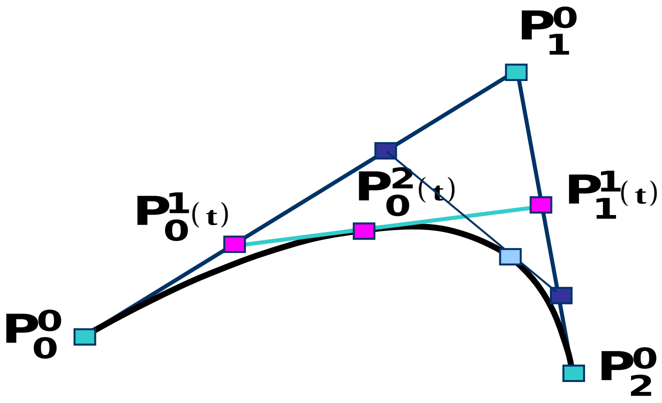
Degré 2

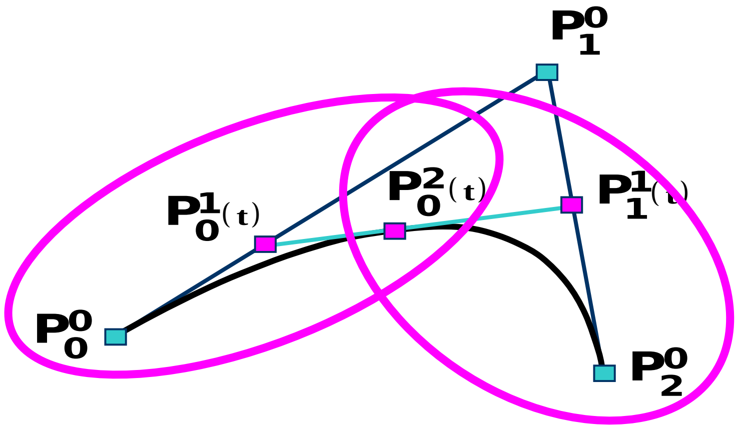


Montrer la courbe
dans BI2 +
Repère entre vecteurs canoniques
Et point de contrôle

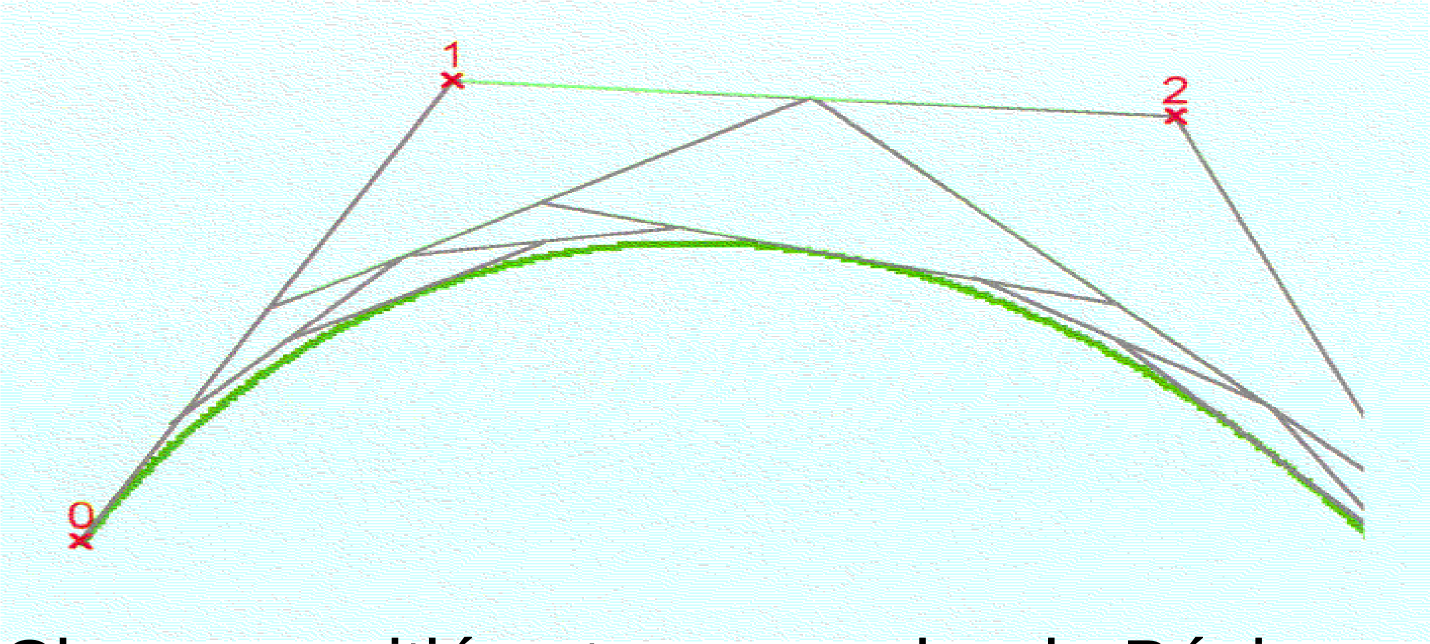
Propriétés :
Enveloppe convexe,
Symétrie,
Valeur aux bords

Courbe de Bézier





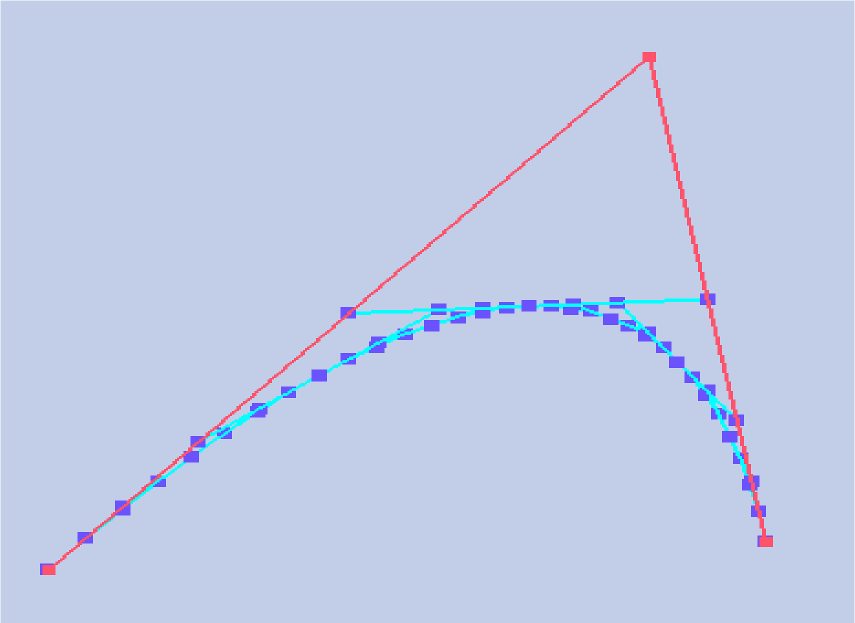
Subdivision des courbes de Bézier



Chaque moitié est une courbe de Bézier
Algorithme général de de Casteljau

-

Courbe de Bézier

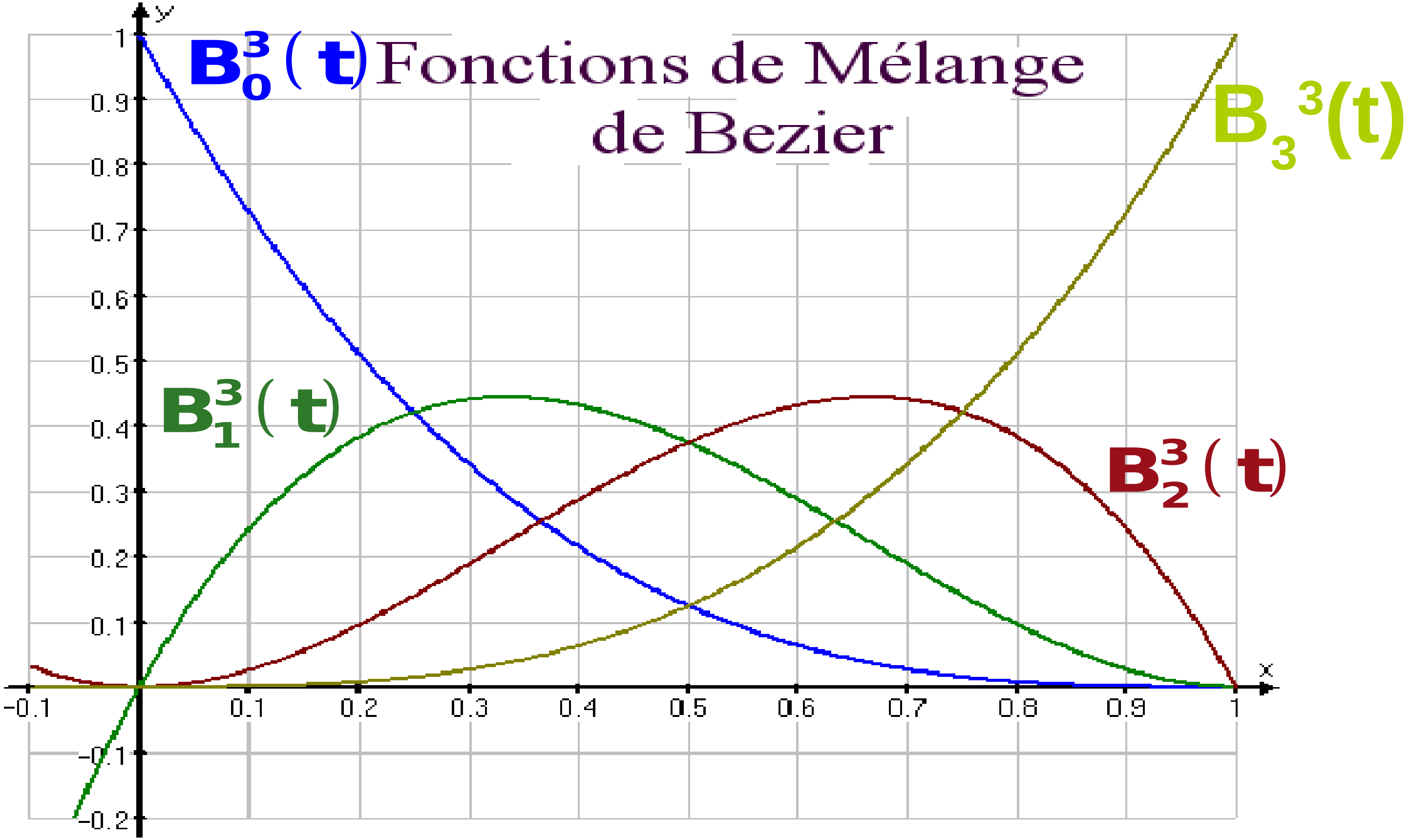


Courbe de Bézier Cubique

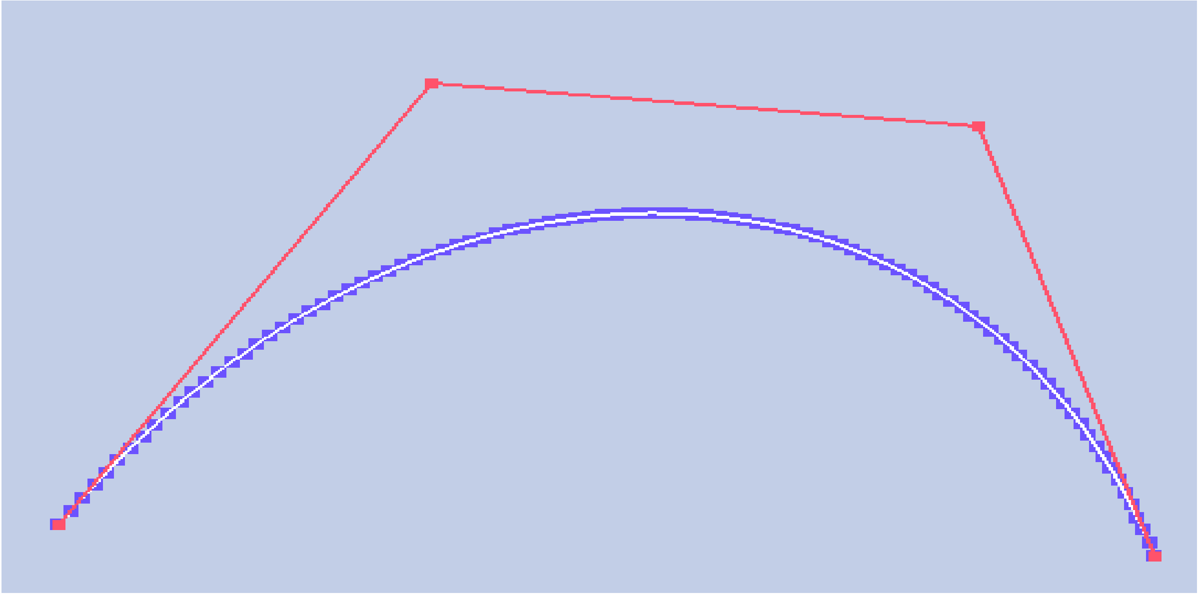
$$P(t) = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \\ P_3^0 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \\ P_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \\ P_3^0 \end{pmatrix}$$

Fonctions de mélange de Bézier



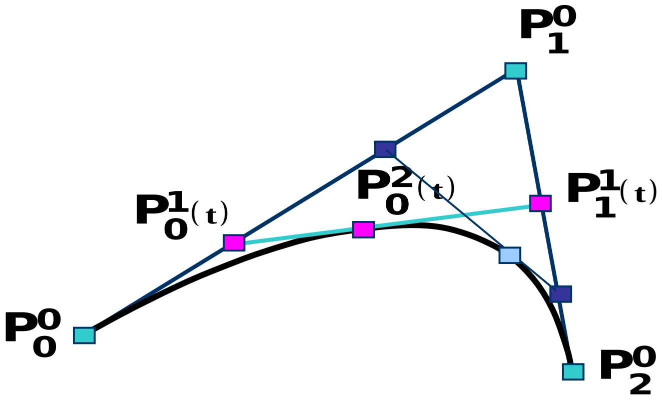
Courbe de Bézier



De Casteljau

$$
\begin{cases}
P_i^r(t) = (1-t)\,P_i^{r-1}(t) + t P_{i+1}^{r-1}(t) \\
r = 1, \dots, n \qquad i = 0, \dots, n-r \qquad t \in [0,1] \\
P_i^0(t) = P_i
\end{cases}
$$

Faire le De Casteljau récussif
Montrer que toutes courbes polynomiales
Peut être décomposée
en 2 courbes du meme type.
=> on peut appliquer De Casteljau



Polynomes de Bernstein

- Courbe de Bezier :

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

où les $B_i^n(t)$ sont les polynomes de Bernstein de degré n

et les P_i les points de contrôl

- Polynomes de Bersnstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

$$\text{avec } \binom{n}{i} = C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Propriétés des Polynomes de Berns

$$\begin{cases} B_i^n(t)=(1-t)\,B_{i-1}^{n-1}(t)+t\,B_{i-1}^{n-1}(t) \\ B_0^0(t)=1 \quad \wedge \quad B_j^n(t)=0 \quad if \quad j \ \notin \ \{0,\dots,n\} \end{cases}$$

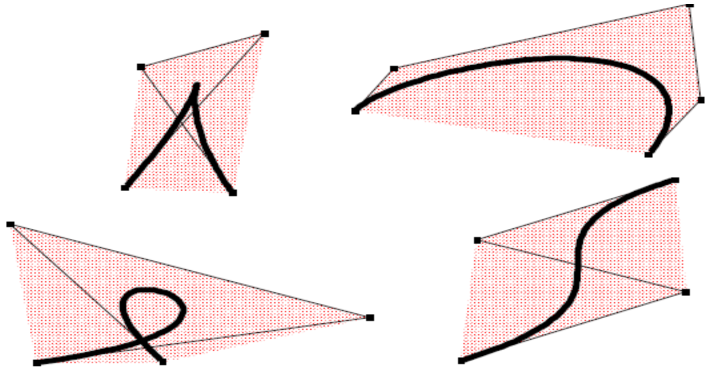
Extrémités et enveloppe Convexe

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)=1 \quad \wedge \quad B_i^n(t)\geq 0 \quad \forall \quad t \ \in \ [0,1] \\ B_n(0)=P_0 \quad \wedge \quad B_n(1)=P_n \end{cases}$$

Invariance Affine

$$soit \ f(\boldsymbol{x})=A\,.\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b} \quad une \quad transformation \quad affine$$

$$f\left(B_n(t)\right)=\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\,f(P_i)$$



Propriétés des Polynomes de Berns

Symétrie

$$B_i^n(t)=B_{n-i}^n(1-t) \;\rightarrow\; \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)P_i=\sum_{i=n}^{0} B_{n-i}^n(1-t)P_i \quad \forall \; t \; \in [0,1]$$

Invariance Affine des paramètres

$$soit \quad t=\frac{u-a}{b-a} \qquad t\in[0,1] \;\wedge\; u\in[a,b] \qquad B_n(t) \;\; est \;\; la \;\; même \;\; courbe \;\; que \;\; B_n(u)$$

Faire l’inverse passer de u in [a,b]
À t in [0,1]

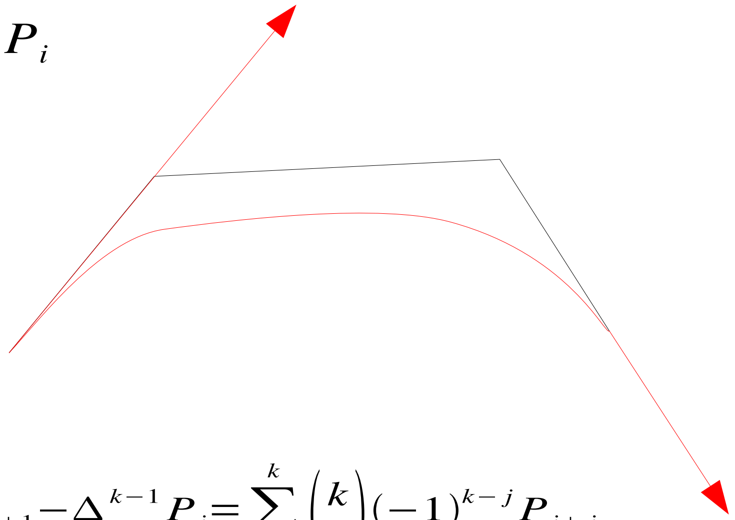
Propriétés des Polynomes de Berns

Dérivées

première dérivée

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta P_i B_i^{n-1}(t) \quad with \quad \Delta P_i = P_{i+1} - P_i$$

$$\leftarrow \quad \frac{dB_i^n(t)}{dt} = n\left(B_{i-1}^n(t) - B_i^n(t)\right)$$



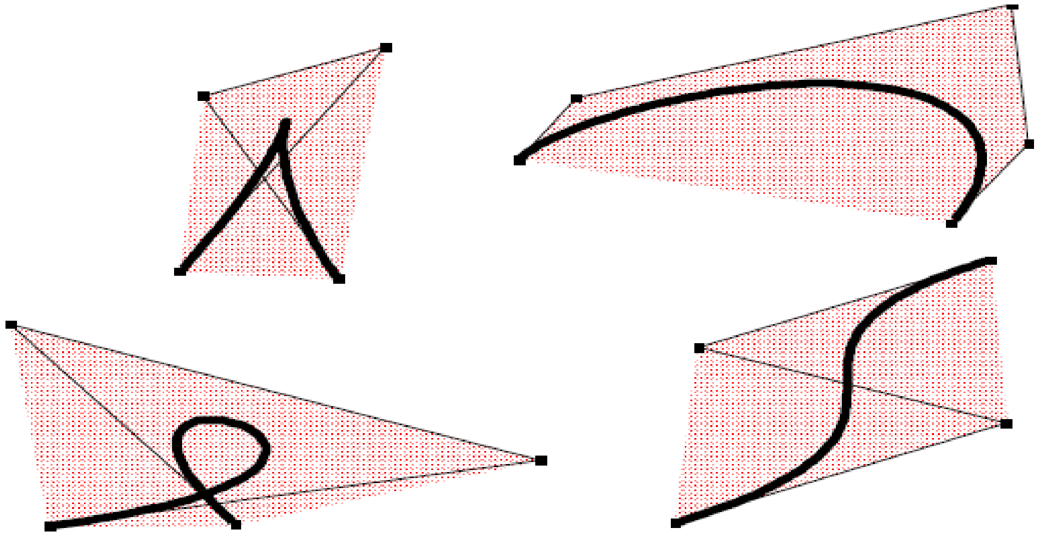
Vecteurs Tangents

$$\frac{dB_n(0)}{dt} = n \Delta P_0 \quad \wedge \quad \frac{dB_n(1)}{dt} = n \Delta P_{n-1}$$

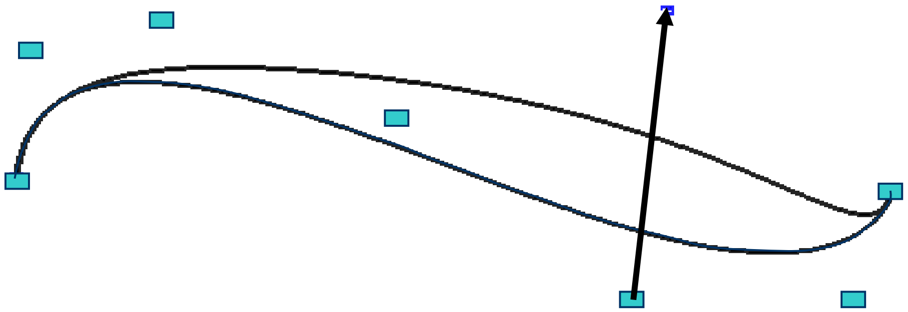
Forme Générale

$$\frac{d^k B_n(t)}{d^k t} = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k P_i B_i^{n-1}(t) \quad with \quad \Delta^k P_i = \Delta^{k-1} P_{i+1} - \Delta^{k-1} P_i = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} P_{i+j}$$

Courbe de Bézier

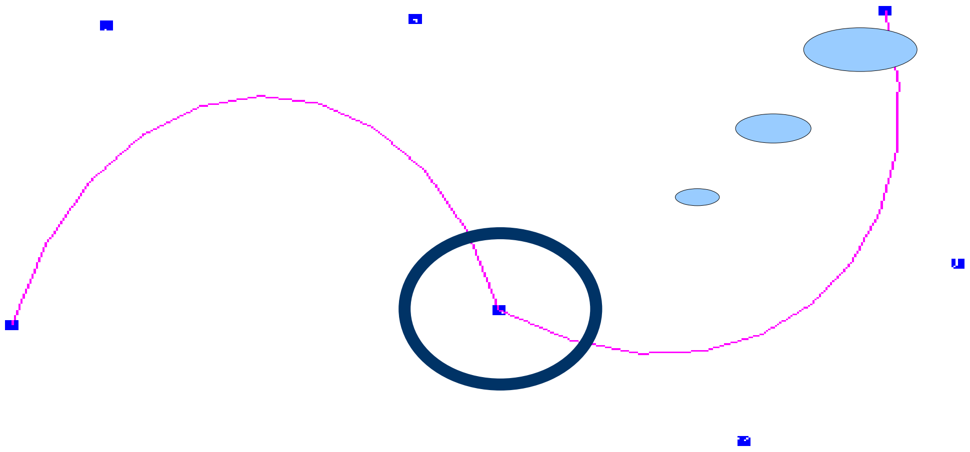


Courbe de Bézier



Courbe de Bézier par morceaux

Expliquer raccord C1
Et introduction B-spline uniforme

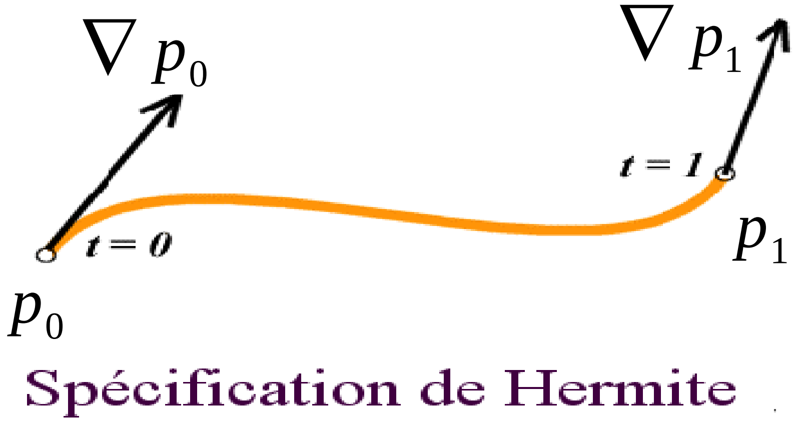


Hermite
CatmullRom

Hermite

Pourquoi celles-là ? Elles vérifient :

$$p(0)=p_0$$
$$p(1)=p_1$$
$$\frac{dp}{dt}\Big|_{t=0}=\nabla p_0$$
$$\frac{dp}{dt}\Big|_{t=1}=\nabla p_1$$



Interpole les extrémités et les tangentes aux extrémités

Hermite

Courbe polynomiale : forme générale

$$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d = T \, . \, A$$

$$avec\ T = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \ et\ A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^T$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Calcul des Splines de Hermite

4 contraintes : positions et tangentes aux extremités de [0,1]

$$p(0) = p_0$$
$$p(1) = p_1$$
$$\frac{dp}{dt}\Big|_{t=0} = \nabla p_0$$
$$\frac{dp}{dt}\Big|_{t=1} = \nabla p_1$$

Hyp : forme cubique : $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$

4 inconnues : *a,b,c,d*

Calcul des Splines de Hermite

- $$comme \quad p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$
  $$p'(t) = \frac{dp(t)}{dt} = 3at + 2bt + c$$
- Les 4 contraintes donnent 4 équations linéaires
  $$p(0) = p_0 = d$$
  $$p(1) = p_1 = a + b + c + d$$
  $$\frac{dp}{dt}\Big|_{t=0} = p'(0) = \nabla p_0 = c$$
  $$\frac{dp}{dt}\Big|_{t=1} = p'(1) = \nabla p_1 = 3a + 2b + c$$
- Résoudre en a, b, c, d:

$$a = 2p_0 - 2p_1 + \nabla p_0 + \nabla p_1 \quad b = -3p_0 + 3P_1 - 2\nabla p_0 - \nabla p_1 \quad c = p_0 \quad d = p_0$$

Splines de Hermite : forme matricielle

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \frac{dp_0}{dt} \\ \frac{dp_1}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Vecteur de Contrôle   Base   coefficients spline

Résoudre les coefficients spline

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \frac{dp_0}{dt} \\ \frac{dp_1}{dt} \end{bmatrix}$$

Coefficients Spline   Base   Vecteur de Contrôle

Equation des Splines de Hermite Cubiques

$$[\,p\,] = [\,t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1\,] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \dfrac{dp_0}{dt} \\ \dfrac{dp_1}{dt} \end{bmatrix}$$

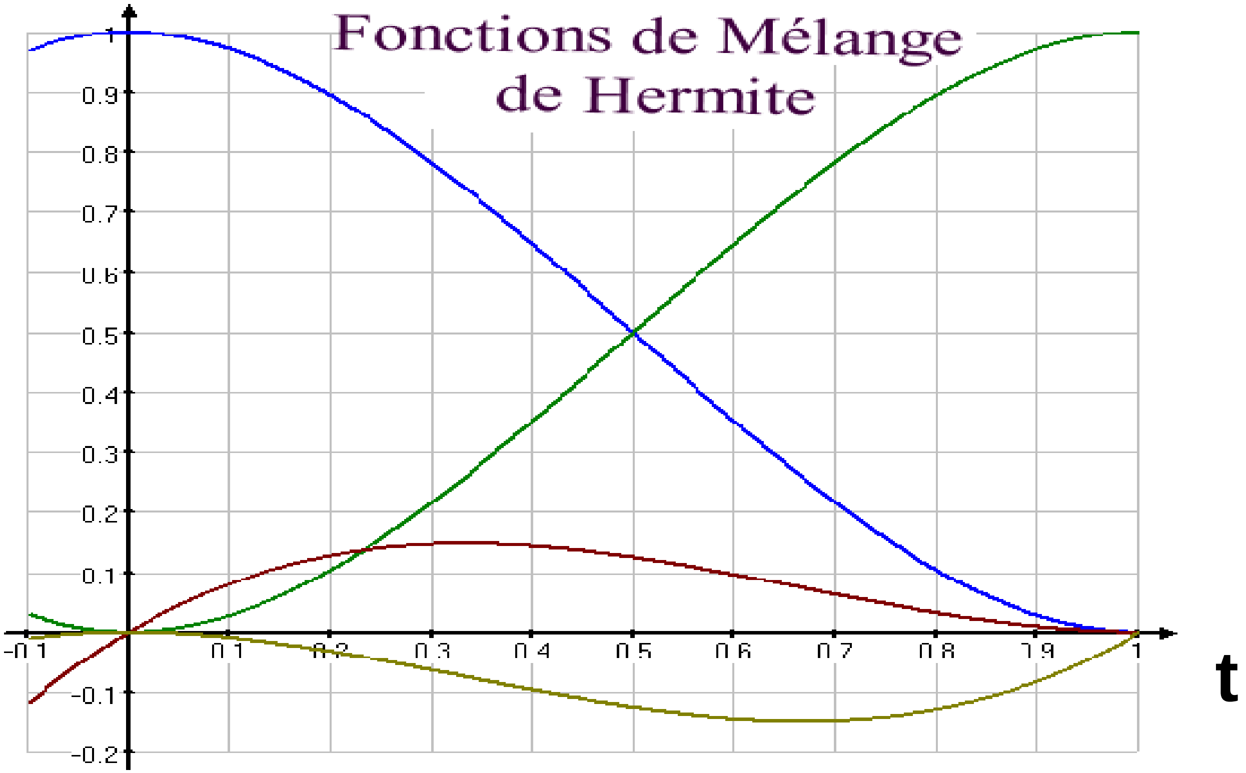
$$p(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 - 2t^2 + t \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_1 \\ p_2 \\ \nabla p_1 \\ \nabla p_2 \end{pmatrix}$$

Matrice de Base Points/vecteurs de Contrôle

4 fonctions de base des cubiques de Hermite

$$p(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 - 2t^2 + t \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_0 \\ p_1 \\ \nabla p_0 \\ \nabla p_1 \end{pmatrix}$$

4 fonctions de base



chaque Spline de Hermite est une combinaison linéaire (un mélange) de ces 4 fonctions

Retour aux Courbes de Bézier

- Une sorte de courbe de Hermite
- 4 points de contrôle : P_0 et P_3 aux extrémités, P_1 et P_2 contrôlent les tangentes aux extrémités
  - $p(0)= P_0$,
  - $p(1)=P_3$,
  - $p'(0)=3(P_1-P_0)$,
  - $p'(1)=3(P_3-P_2)$
- Matrice de Bézier ~ Matrice de Hermite
- Propriété de l'enveloppe Convexe

de Hermite à Bézier

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \frac{dp_0}{dt} & \frac{dp_1}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$p(0)= P_0$

$p(1)=P_3$

$p'(0)=3(P_1-P_0)$

$p'(1)=3(P_3-P_2)$

Vecteur de Contrôle de Hermite

Bézier vers Hermite

Vecteur de Contrôle de Bézier

Bézier : forme matricielle

$$[P(t)] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Base de Hermite

Bézier vers Hermite

Vecteur de Contrôle de Bézier

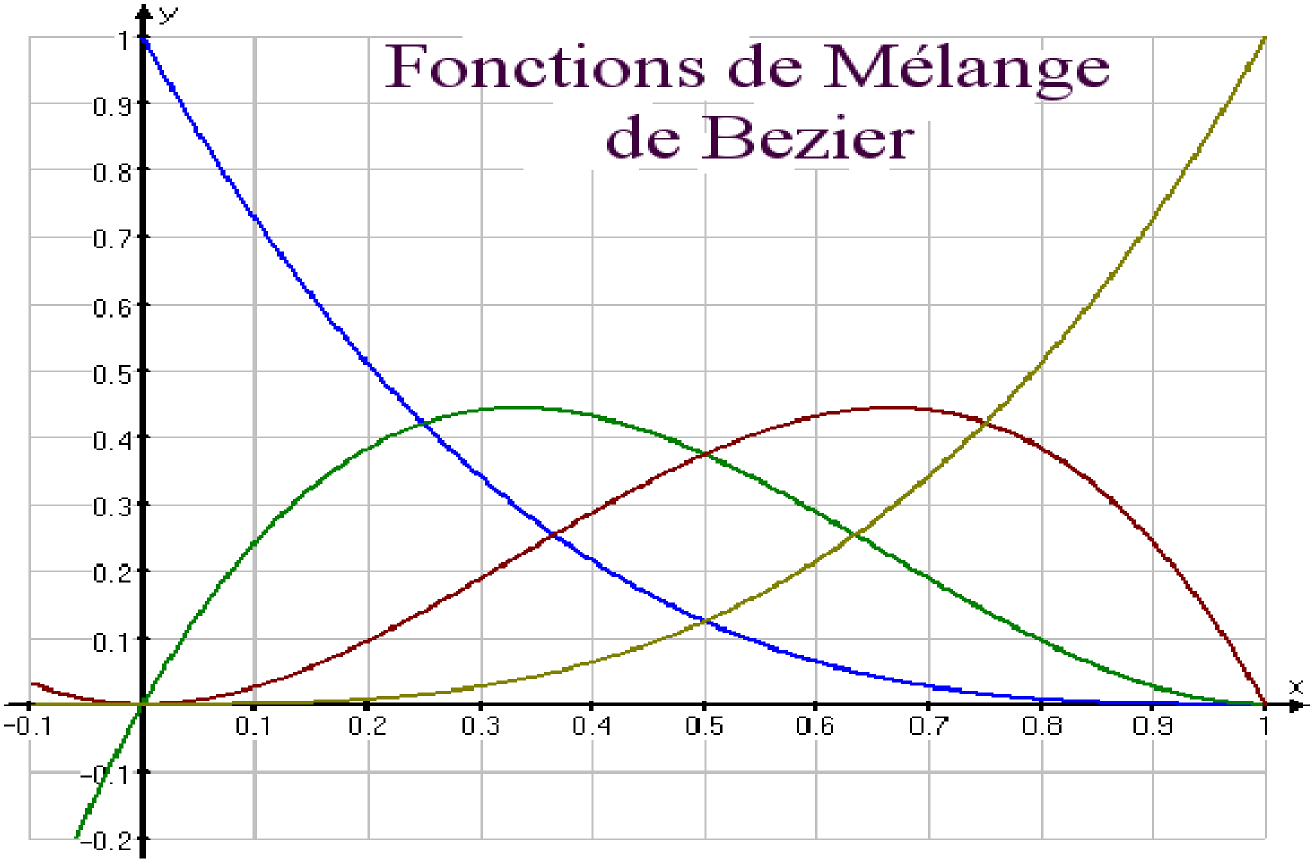
$$[P(t)] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Fonctions de Base de Bézier

$$p(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Polynomes de Bernstein de degré 3
Positifs sur [0,1], somme à 1
Propriété : courbe dans l'enveloppe convexe des points de contrôle

Fonctions de mélange de Bézier



-

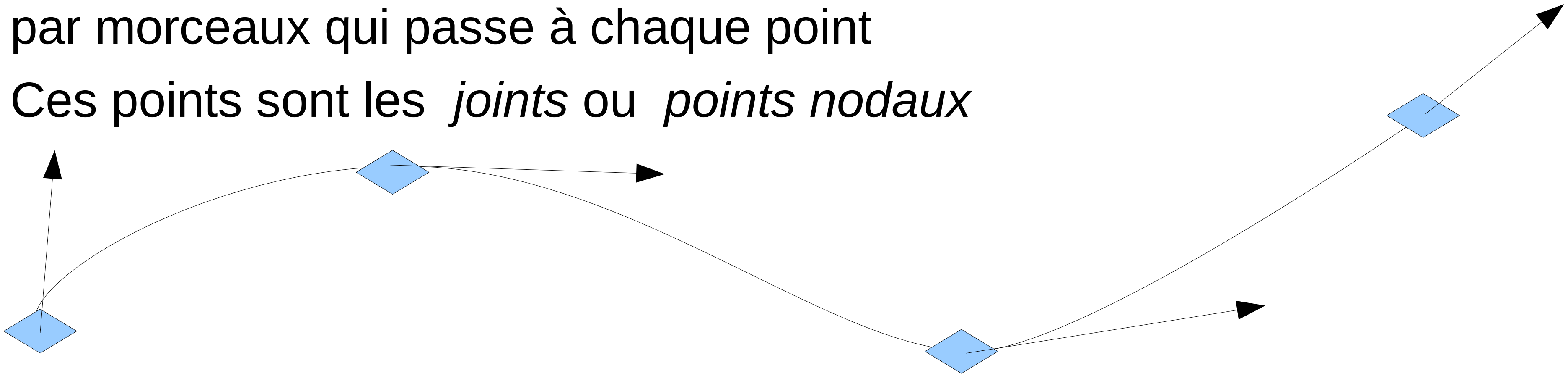
Composition de Splines de Hermite

Spline de Hermite composée

- Chaque morceau est une cubique de Hermite
- Spécifier la position et la tangente à chaque joint
- Les morceaux interpolent les positions et les tangentes
- Continuité C1

A partir d'une liste de positions et tangentes, construire une cubique par morceaux qui passe à chaque point

Ces points sont les *joints* ou *points nodaux*



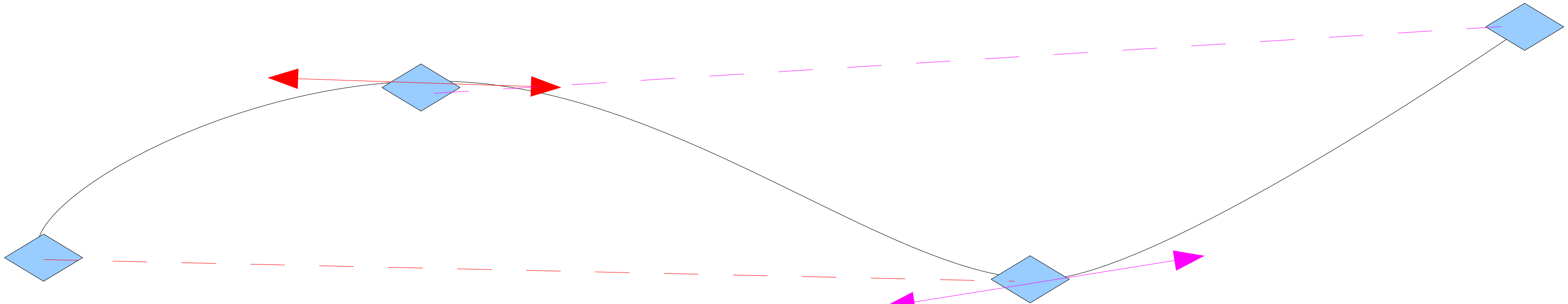
Splines de Catmull-Rom

Avec Hermite ou Bézier, difficile de composer des courbes assurant la continuité C^1 ou G^1

Catmull-Rom : splines cubiques d'interpolation C^1 continues

Données :

- (n+1) points de contrôle $P_0,\ldots,P_n$
- Tangentes à chaque P_i : $s\,(P_{i+1} - P_{i-1})$ i=2..n-1
- « fantômes » aux extrémités
- Splines de Hermite “en série”. Chaque morceau est déterminé par 4 points



Matrice de Catmull-Rom

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s & 2-s & s-2 & s \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Coefficients Spline

Matrice de Catmull-Rom

Points de Contrôle

Calcul comme pour Hermite et Bezier

S : paramètre de tension (souvent s=1/2)

Splines cubiques, interpolation, loca

	Localité	Interpolation	C2	
Splines de Bezier	Oui et non	Oui et non	Oui et non	
Catmull Rom	oui	oui	non	
Splines Naturelles	non	oui	oui	
B-splines	oui	non	oui	

On ne peut pas tout avoir avec du cubique !!!

B-Splines

Approximation (pas d'interpolation)

la courbe passe « près » des points de contrôle

Propriété d'enveloppe Convexe

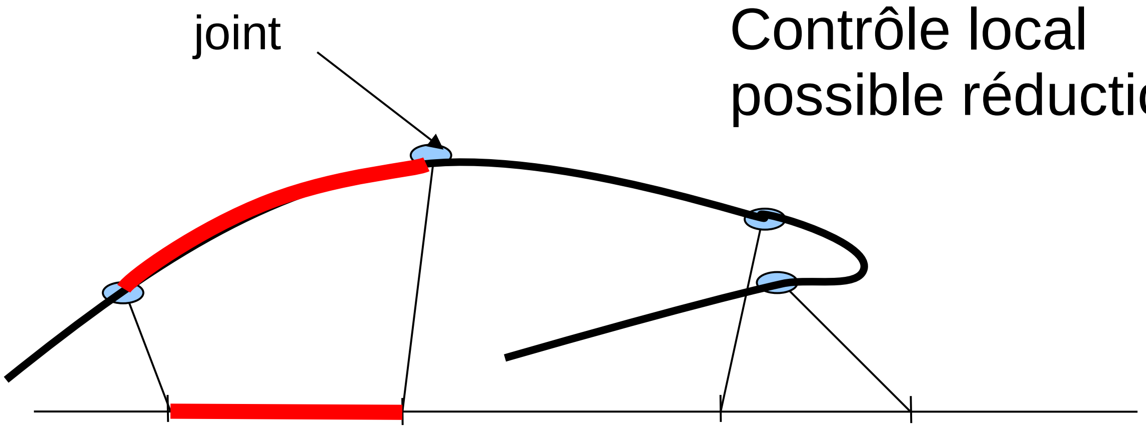
Continuité C^2 ,contrôle local

Base des B-Splines cubiques uniformes

$$P_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$

B-Splines Non Uniformes

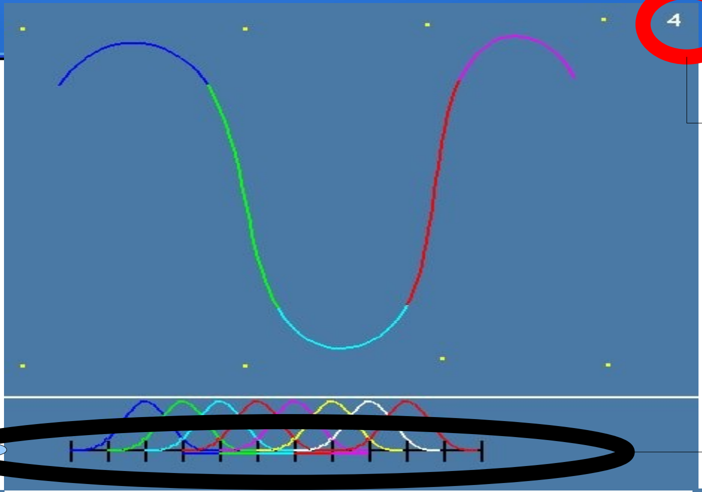
Séquence non uniforme
Différentes fonctions de base pour chaque intervalle nodal (morceau de courbe)
Contrôle local
possible réduction de la continuité



Séquence nodale ou vecteur nodal

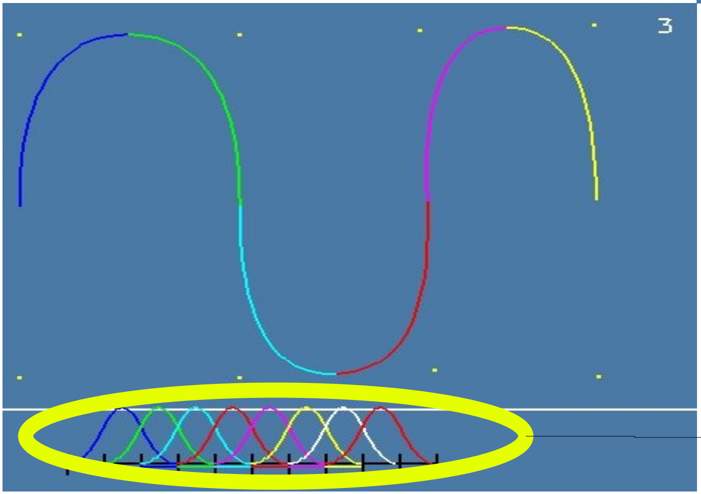
Courbes B-Spline : exemples

Faire démo
BsplineNonUniforme

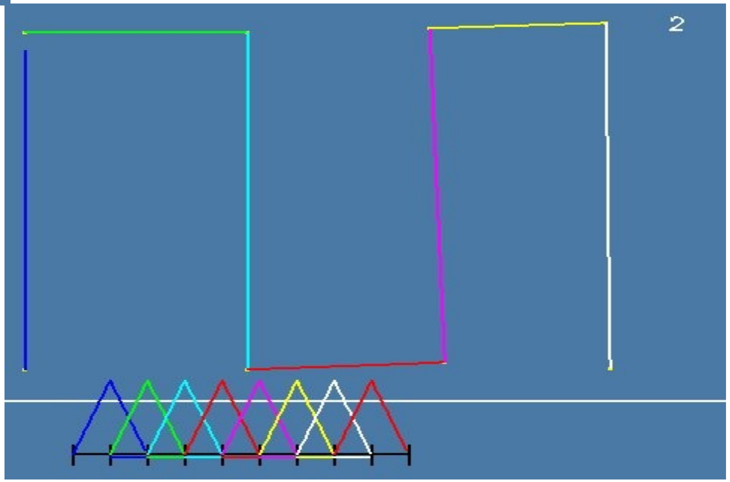


Ordre = degré+1

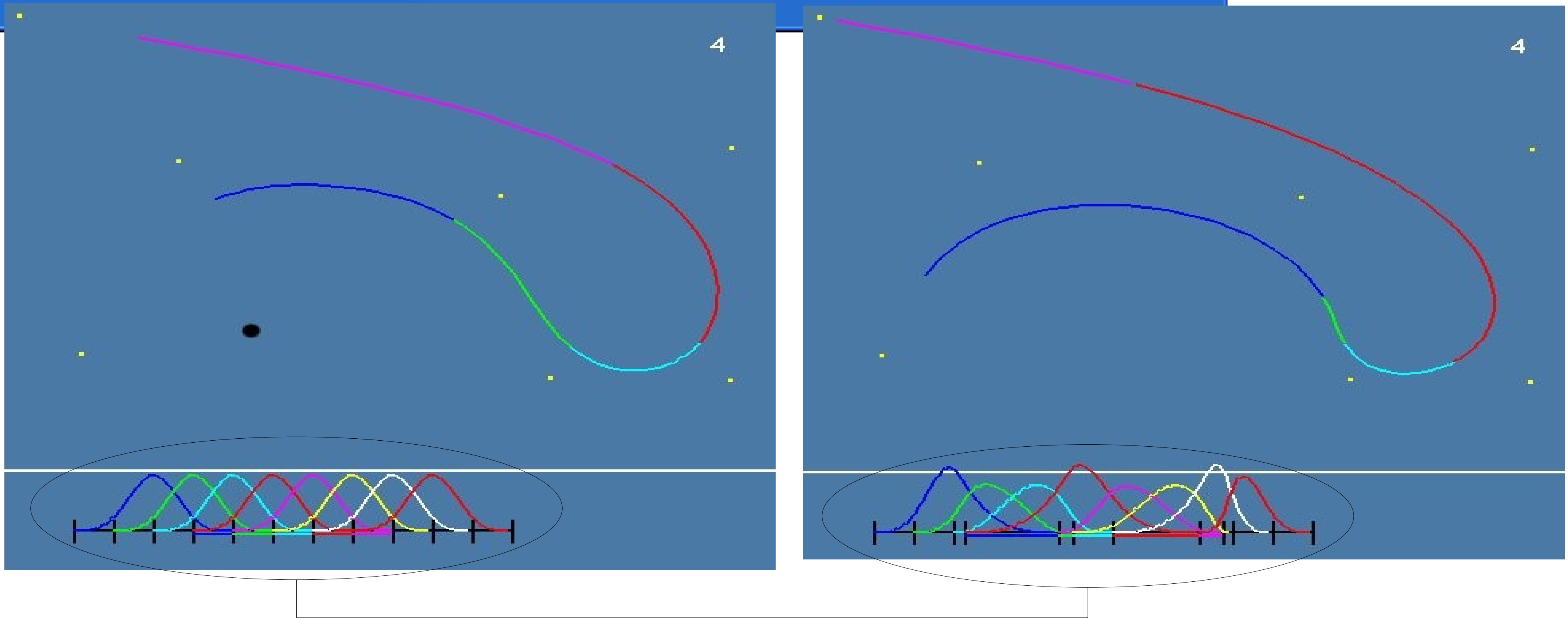
Vecteur nodal



Fonctions de Base

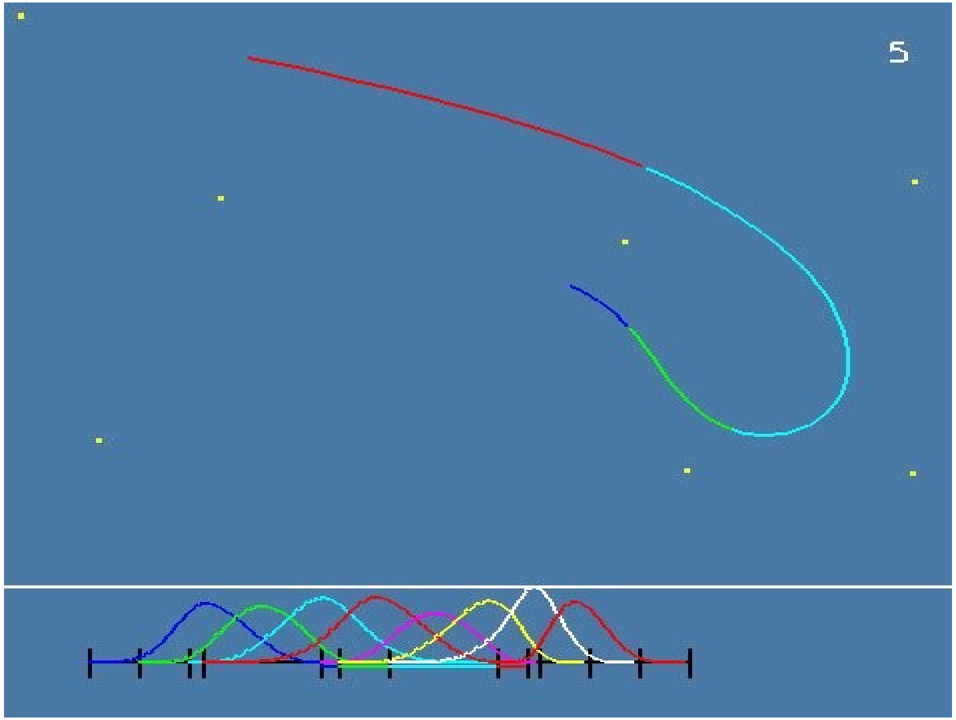


Courbes B-Spline : exemples



Points de Contrôle et ordre inchangés. Le vecteur nodal change

Courbes B-Spline : exemples



points de Contrôle et vecteur nodal inchangés. L'Ordre change

Courbes B-spline

Courbe Globale : $t \in [t_0, t_{m+k}]$

$$C(t) = \sum_{i=0}^{m} P_i B_{i,k}(t)$$

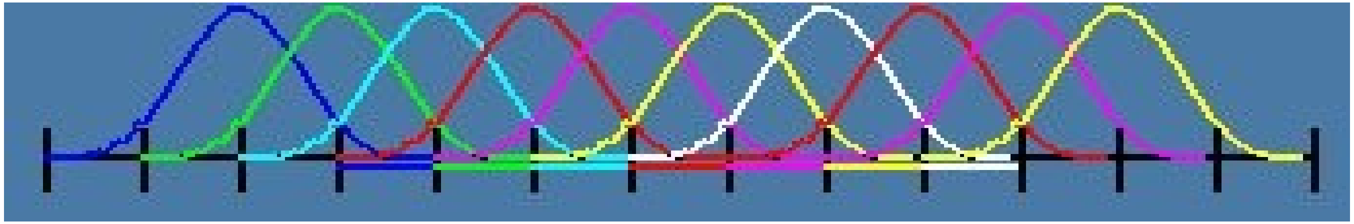
Union de m-k+2 courbes

$$C(t) = \coprod_{j=k-1}^{j=m} C_j(t)$$

chaque courbe C_j est d'ordre k

$$C(t) = \coprod_{j=d}^{j=m} \left(\sum_{i=-(d)}^{i=0} P_{i+j} N_{i+j,d}(t) \right)$$

Exemple : ordre k=4, 10 points de contrôle (de 0 à m=9), m+k=13 noeuds, m-k+2=7 morceaux de courbe



Courbes B-splines

$n = nb\ de\ points\ de\ controle$

$$Equation\ de\ la\ Courbe\ :\ C(t)=\sum_{i=0}^{n-1} N_{i,d}(t)\ \ P_i$$

$k=d+1, ordre$
$d=degré$

$$Vecteur\ \ nodal\ :\ T=\{t_i ; i\in\{0,\ldots,n-1+k\}\ \ et\ \ t_0\leqslant t_i\leqslant t_{n-1+k}\}$$

Calcul par Récurrence

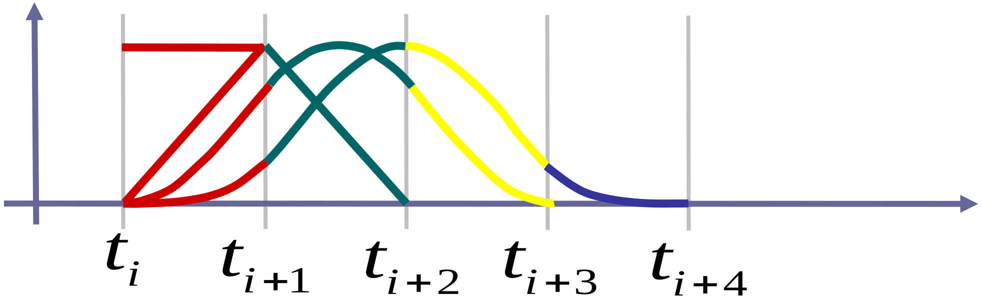
$$N_{i,0}(t)=\begin{cases}1 & si\ \ t\in[t_i, t_{i+1}[\\ 0 & sinon\end{cases}$$

$$N_{i,d}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+d}-t_i}N_{i,d-1}(t)\ +\ \frac{t_{i+d+1}-t}{t_{i+d+1}-t_{i+1}}N_{i+1,d-1}(t)\quad pour\ \ t\in\{2,k\}$$

$$(\text{convention } \frac{0}{0}=0)$$

Courbes B-splines

$$N_{i,0}(t)=\begin{cases} 1 \quad si \quad t\in[t_i, t_{i+1}[\\ O \quad sinon \end{cases}$$



$$N_{i,1}=\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}N_{i,0}$$

$$+\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}N_{i+1,0}$$

$$N_{i,2}=\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}N_{i,0}$$

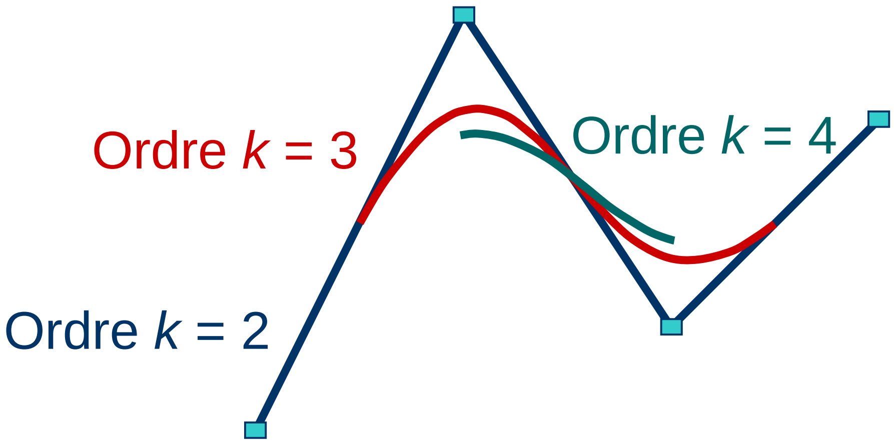
$$+\left\{\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}+\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}\frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right\}N_{i+1,0}$$

$$+\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+2}}N_{i+2,0}$$

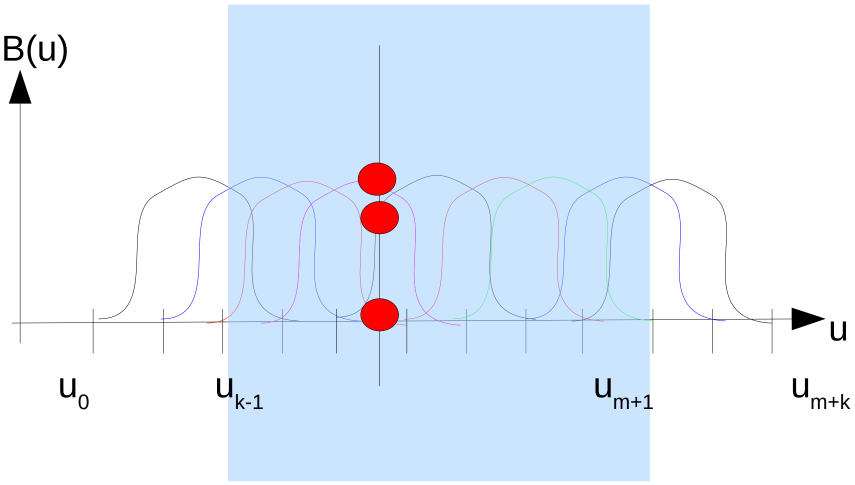
$$N_{i,3}(t)$$

Courbes B-splines

Démo blender



B-Splines : nb morceaux



Exemple ici :
k=3
n=7
n-k+1=7

$$
\begin{aligned}
N &= [n-1+k-(k-1)]-[0+(k-1)] \\
&= [n]-[k-1] \\
&= n-k+1
\end{aligned}
$$

Continuité

Paramétrique : C^k

P(u) continue jusqu'à la $k^{ème}$ dérivée

Valeur, pente, 2^e dérivée,...

Important pour les animations (paramètre =temps)

Géométrique : G^k

P continue indépendamment de u jusqu'à la k^e dérivée

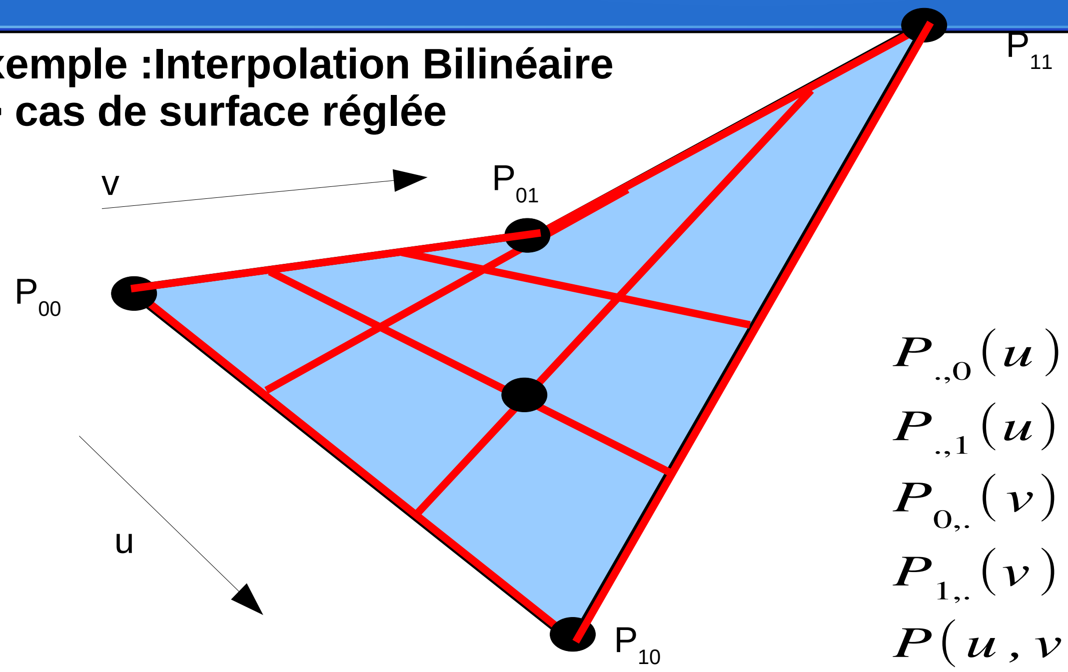
Position, tangent, courbure,...

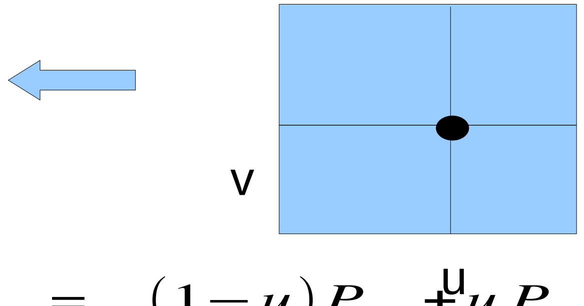
CAGD,...

Une courbe peut être G^k et pas C^k .
Et vice versa ?

Produit Tensoriel

Exemple :Interpolation Bilinéaire
=> cas de surface réglée



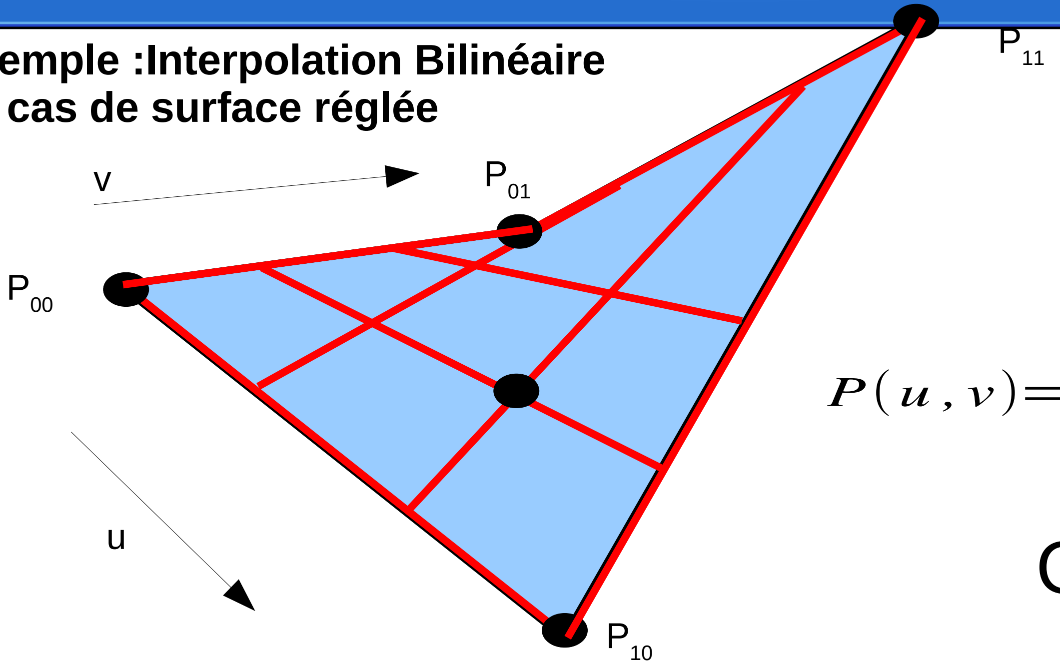


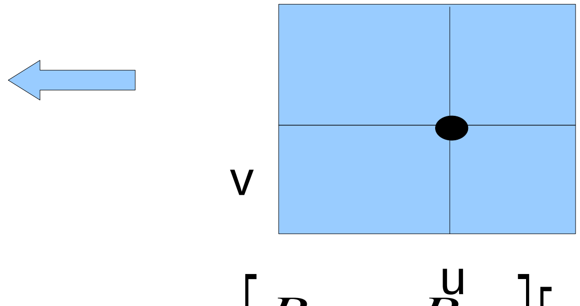
$$
\begin{aligned}
P_{.,0}(u) &= (1-u)P_{0,0}+u\,P_{1,0}\\
P_{.,1}(u) &= (1-u)P_{1,0}+u\,P_{1,1}\\
P_{0,.}(v) &= (1-v)P_{0,0}+v\,P_{0,1}\\
P_{1,.}(v) &= (1-v)P_{1,0}+v\,P_{1,1}\\
P(u,v) &= (1-v)P_{.,0}(u)+v\,P_{.,1}(u)\\
&= (1-u)P_{0,.}(v)+v\,P_{1,.}(v)\\
&= (1-u)(1-v)P_{0,0}+(1-u)v\,P_{0,1}\\
&+ u(1-v)P_{1,0}+u\,v\,P_{1,1}
\end{aligned}
$$

$$P(u,v)=\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{0,0} & P_{0,1}\\ P_{1,0} & P_{1,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}$$

Produit Tensoriel

Exemple :Interpolation Bilinéaire
=> cas de surface réglée





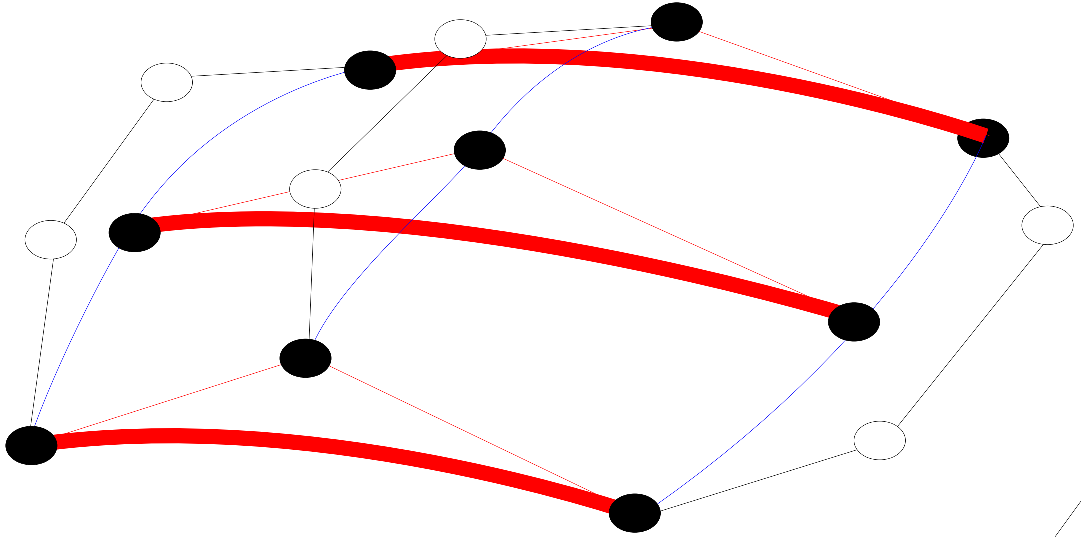
$$P(u,v)=\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{0,0} & P_{0,1}\\ P_{1,0} & P_{1,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}$$

Ou encore

$$P(u,v)=\begin{bmatrix}u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{0,0} & P_{0,1}\\ P_{1,0} & P_{1,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ 1\end{bmatrix}$$

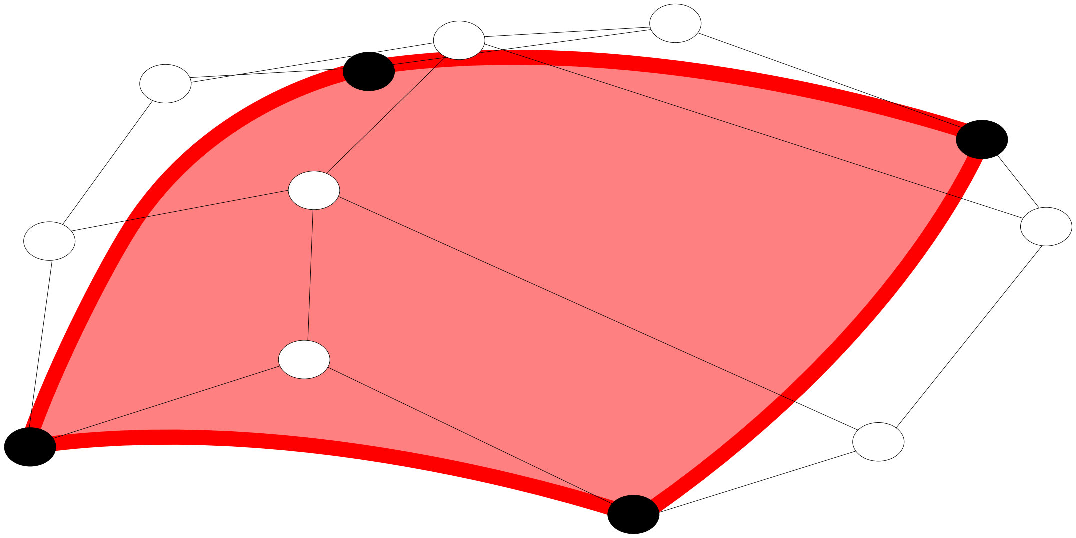
$$=\begin{bmatrix}u & 1\end{bmatrix}M_B P M_B^T\begin{bmatrix}v\\ 1\end{bmatrix}$$

Produit Tensoriel



$$P^m(u)=\sum_{i=0}^{m} P_i B_i^m(u)$$

$$P_i(v)=\sum_{j=0}^{n} P_{i,j} B_j^n(v)$$



$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{i,j} B_i^m(u)\, B_j^n(v)$$

Surfaces Bicubiques

Surfaces à l'aide de fonctions bicubiques

x(u,v),y(u,v),z(u,v) polynômes bicubiques en u et v

16 termes pour combiner les puissances de u et v

Matriciellement

$$u=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix} \quad v=\begin{bmatrix}v^3 & v^2 & v & 1\end{bmatrix}$$

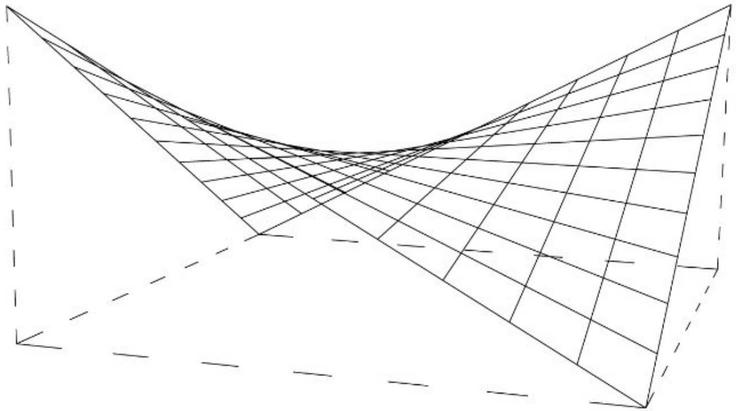
$$s(u,v)=u\,A\,v^T \quad ou \quad encore \quad s(u,v)=u\,M\,P\,M^T\,v^T$$

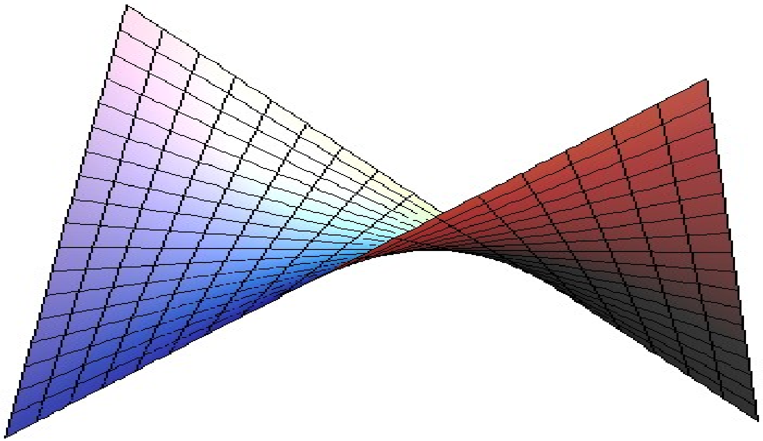
$$avec \quad M \quad matrice \quad de \quad base \quad et \quad P \quad matrice \quad de \quad points \quad de \quad contrôle$$

(produit tensoriel)

Produit Tensoriel

$$P(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} \\ P_{1,0} & P_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \Leftrightarrow P(u,v) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} P_{i,j} B_i^1(u) B_j^1(v)$$

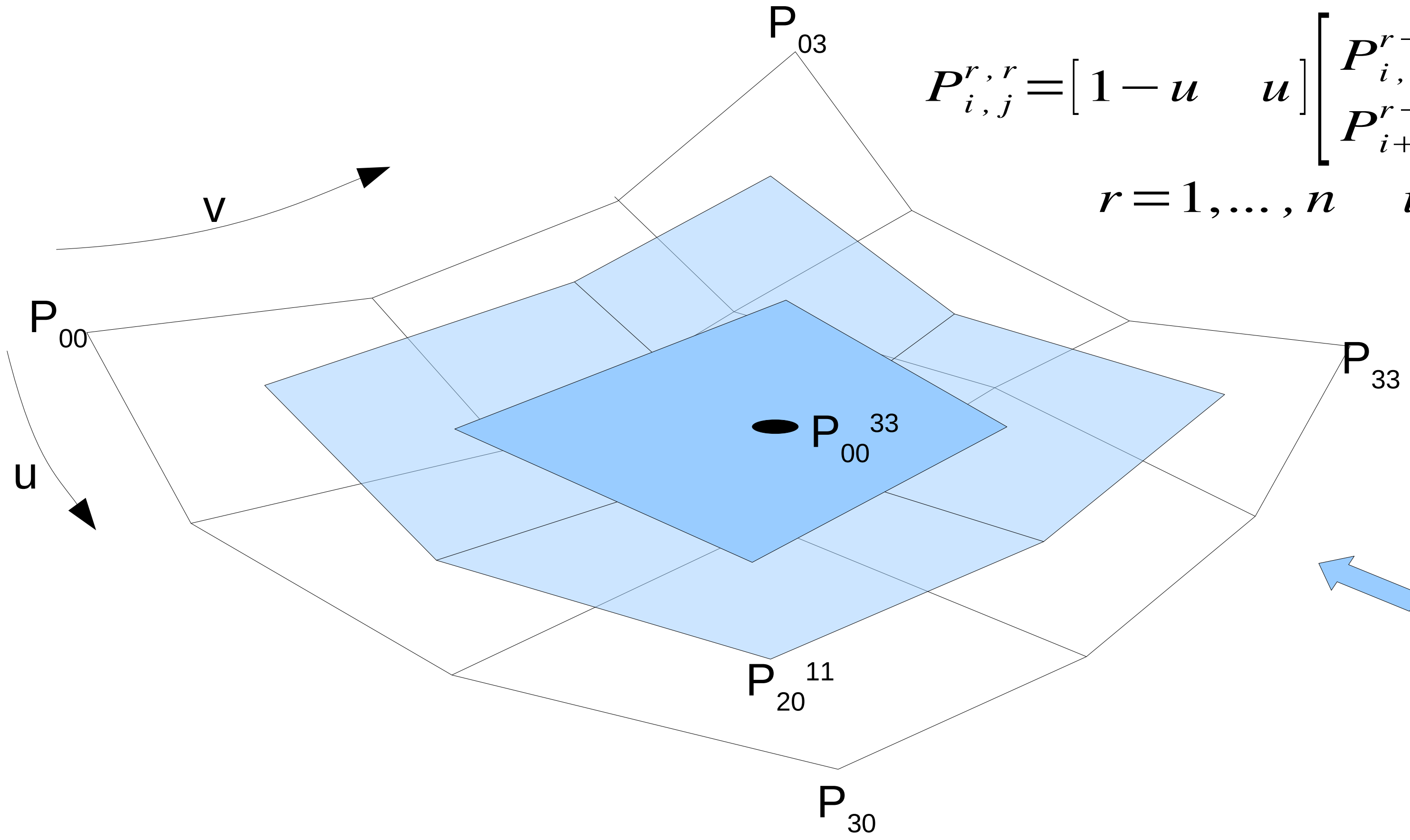


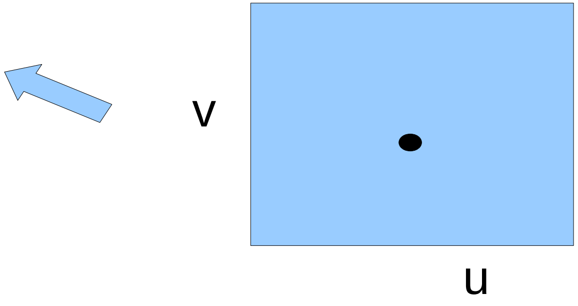


De Casteljau

$$P_{i,j}^{r,r} = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i,j}^{r-1,r-1} & P_{i,j+1}^{r-1,r-1} \\ P_{i+1,j}^{r-1,r-1} & P_{i+1,j+1}^{r-1,r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

$$r = 1, \dots, n \quad i, j = 0, \dots, n-r$$





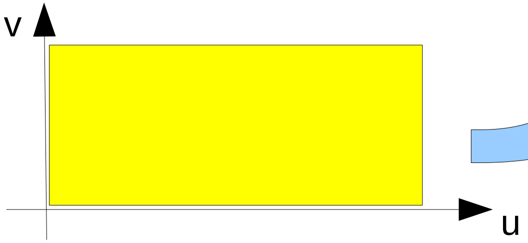
Surfaces de Bézier

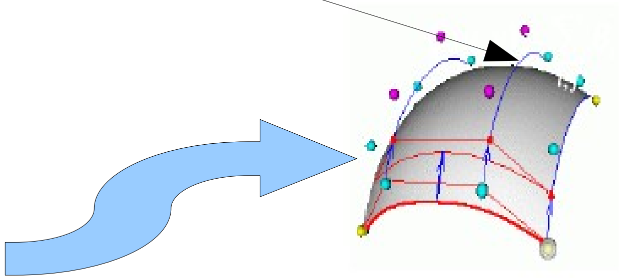
$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{i,j}\, B_i^m(u)\, B_j^n(v) \qquad (u,v)\in[0,1]^2$$

$P_{i,j}$ Réseau des points de contrôle

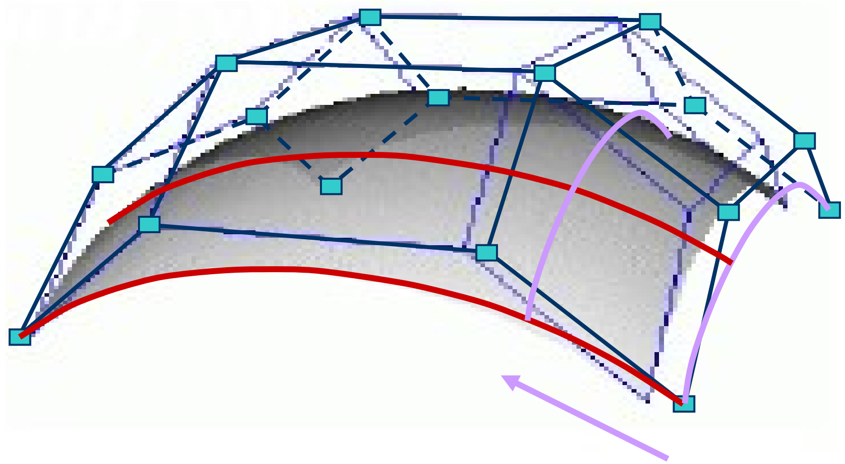
$B_i^m(u)$ **et** $B_j^n(v)$

Fonctions de base de Bézier





Surfaces de Bézier



Surfaces B-splines (NUBS)

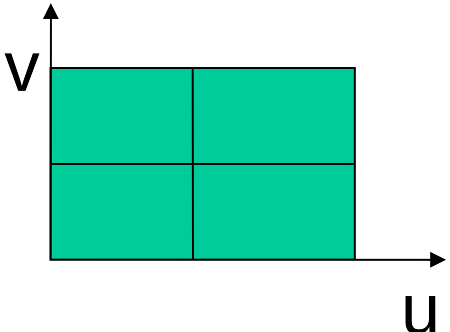
$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{i,j} N_i^k(u) N_j^l(v) \qquad (u,v)\in[u_0, u_{m+k}] x [v_0, v_{n+l}]$$

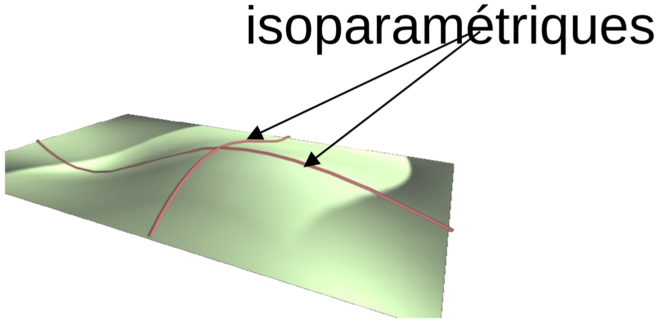
$$P_{i,j} \quad avec \quad i\in\{0,m\} \quad et \quad j\in\{0,n\}$$

$$U=\{u_i/0\leqslant i\leqslant m+k \quad \wedge \quad u_0\leqslant\cdots\leqslant u_i\cdots\leqslant u_{m+k}\}$$

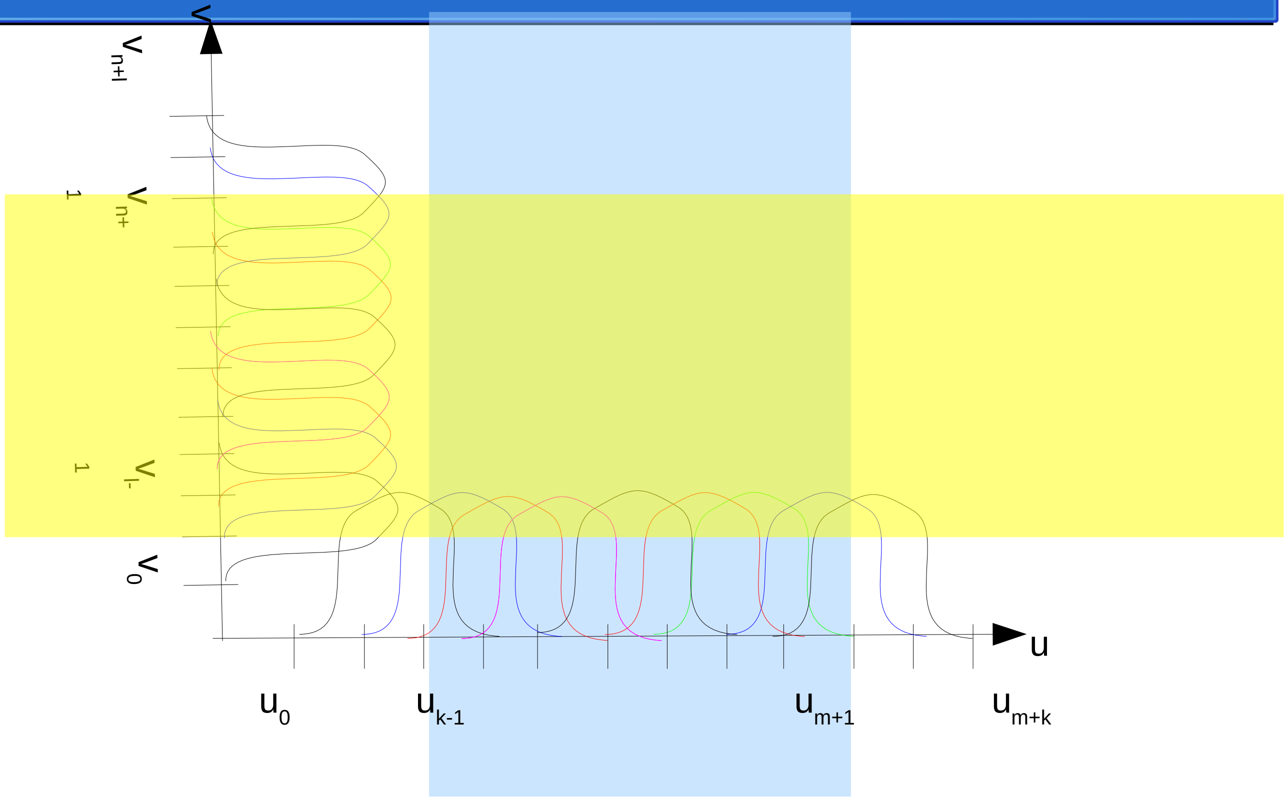
$$V=\{v_j/0\leqslant j\leqslant n+l \quad \wedge \quad v_0\leqslant\cdots\leqslant v_j\cdots\leqslant v_{n+l}\}$$

$$N_i^k(u) \quad et \quad N_j^l(v) \quad : \quad fonctions \quad de \quad base$$



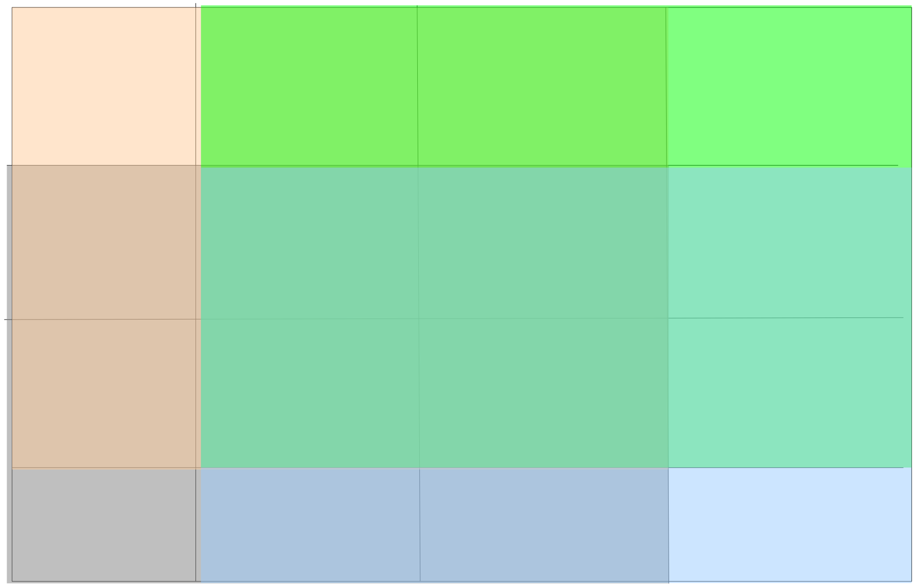


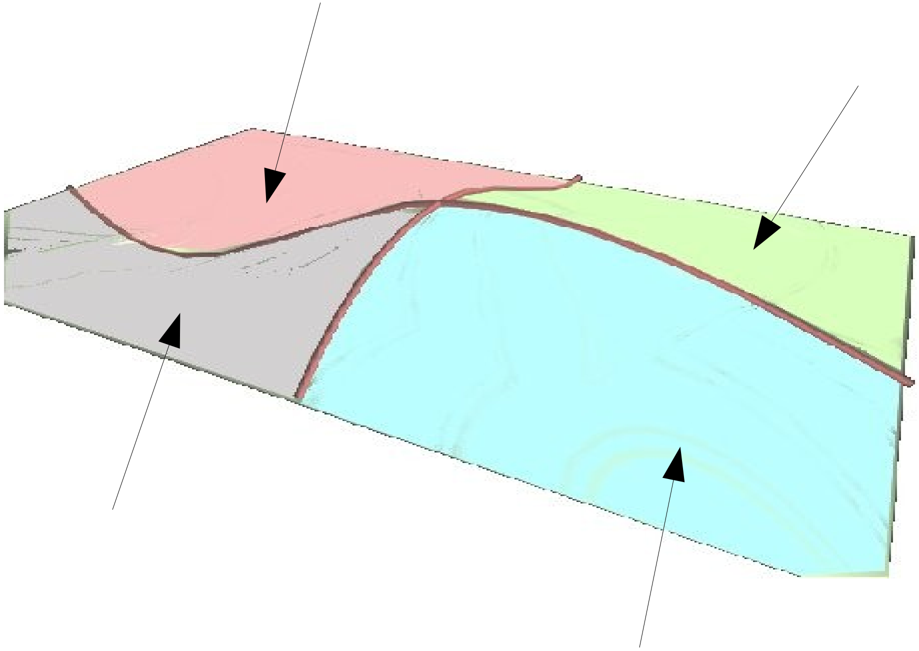
Surfaces B-Splines (NUBS)



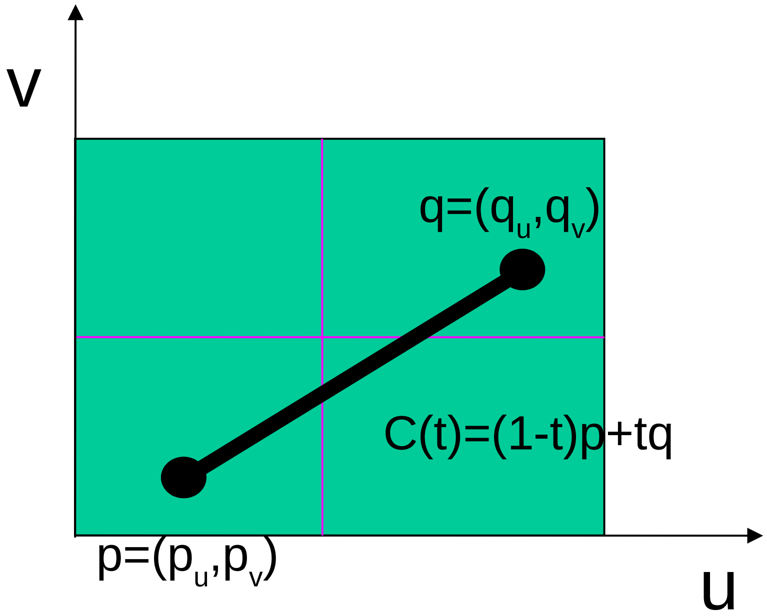
$$N=(m-k+2)\,x\,(n-l+2)$$

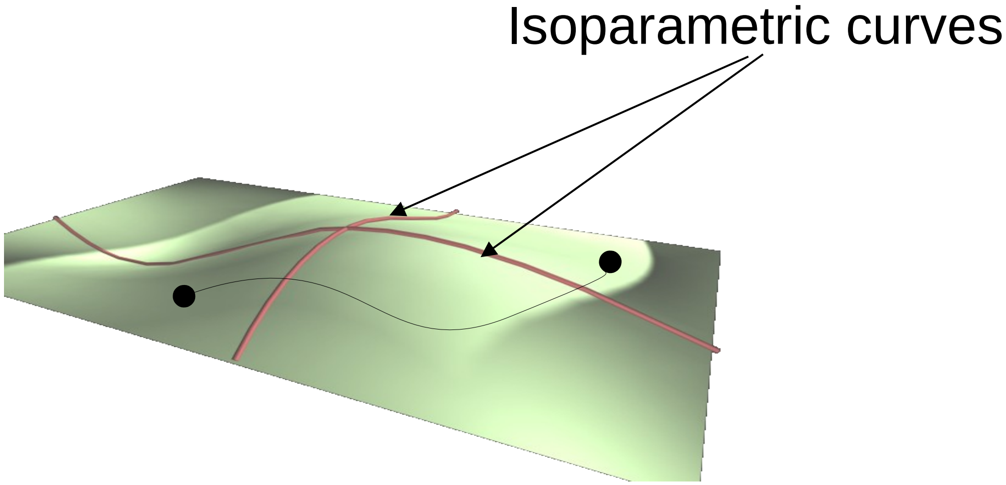
B-Splines : carreaux (patchwork) ex : bicubiques





Courbes sur surfaces





Vecteur Normal & Torsion

Vecteur Normal

$$n(u,v)=\frac{\frac{\partial}{\partial u}s(u,v)\wedge\frac{\partial}{\partial v}s(u,v)}{\left\|\frac{\partial}{\partial u}s(u,v)\wedge\frac{\partial}{\partial v}s(u,v)\right\|}$$

Vecteur Torsion

$$t(u,v)=\frac{\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}s(u,v)}{\left\|\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}s(u,v)\right\|}$$

NURBS

- Idée : utiliser les coordonnées homogènes
- Plus ”vastes” que les B-Splines non uniformes : permettent aussi une représentation exacte des surfaces coniques (dont les cônes à base circulaire ou elliptique, la sphère et les ellipsoïdes avec un axe focal d'orientation quelconque, les paraboloïdes et hyperboloïdes, mais aussi les facettes planes…)
- Conservent leurs propriétés via certaines transformations non isométriques comme les projections, y compris la perspective

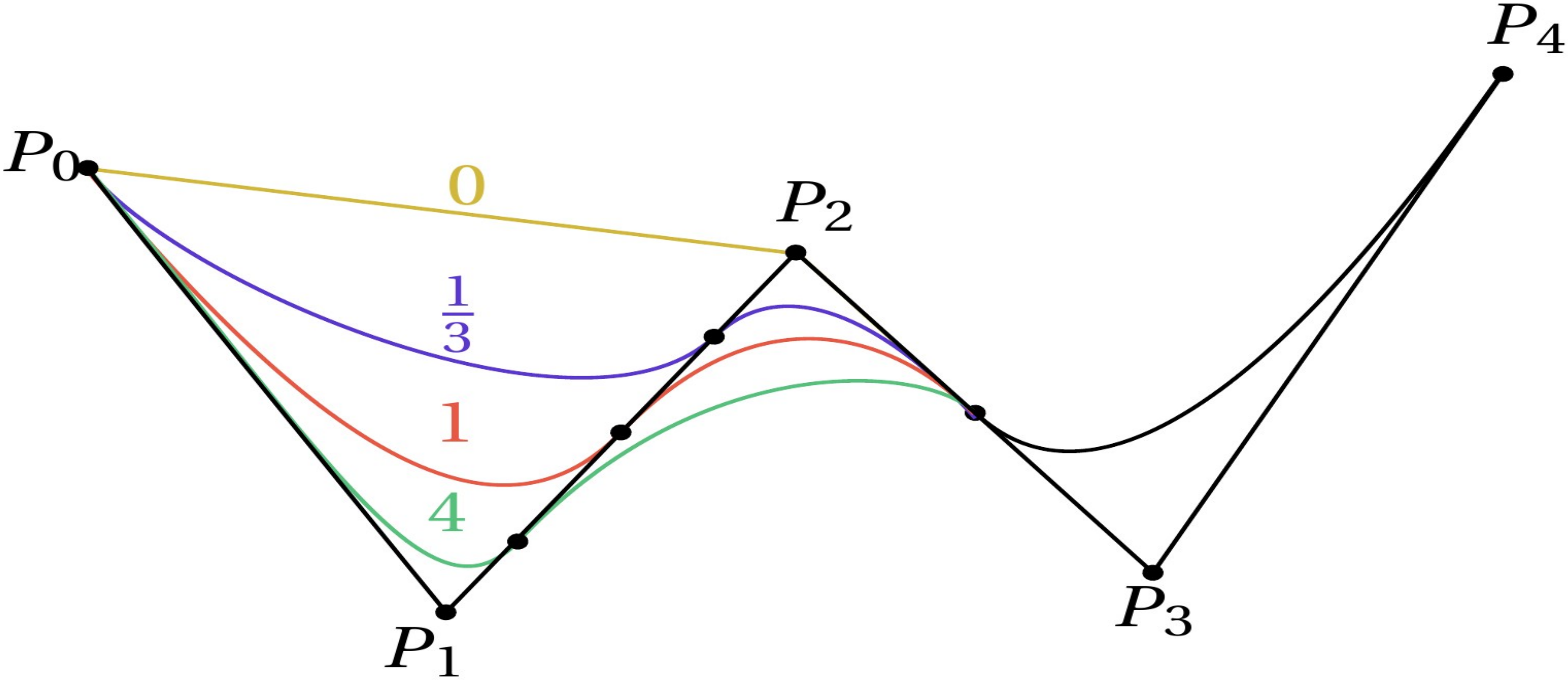
NURBS

- Courbes :

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^{m} w_i B_{i,k}(t) P_i}{\sum_{i=0}^{m} w_i B_{i,k}(t)}$$

- Surfaces :

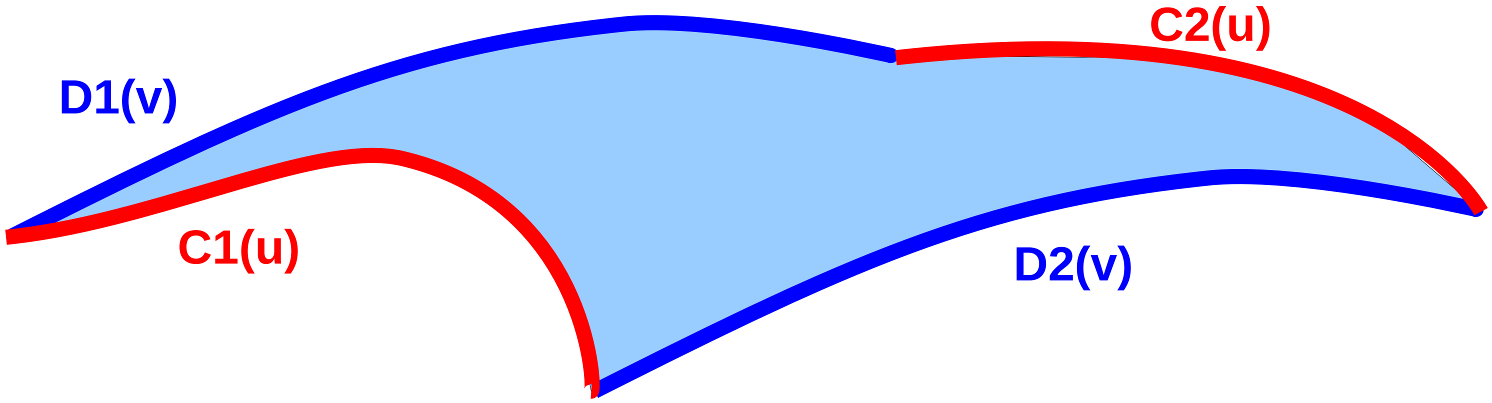
$$S(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,l}(v) P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,l}(v)}$$



NURBS : effet de la variation de w_1 (poids de P_1)

Carreaux de Coons

Idée : remplir entre courbes

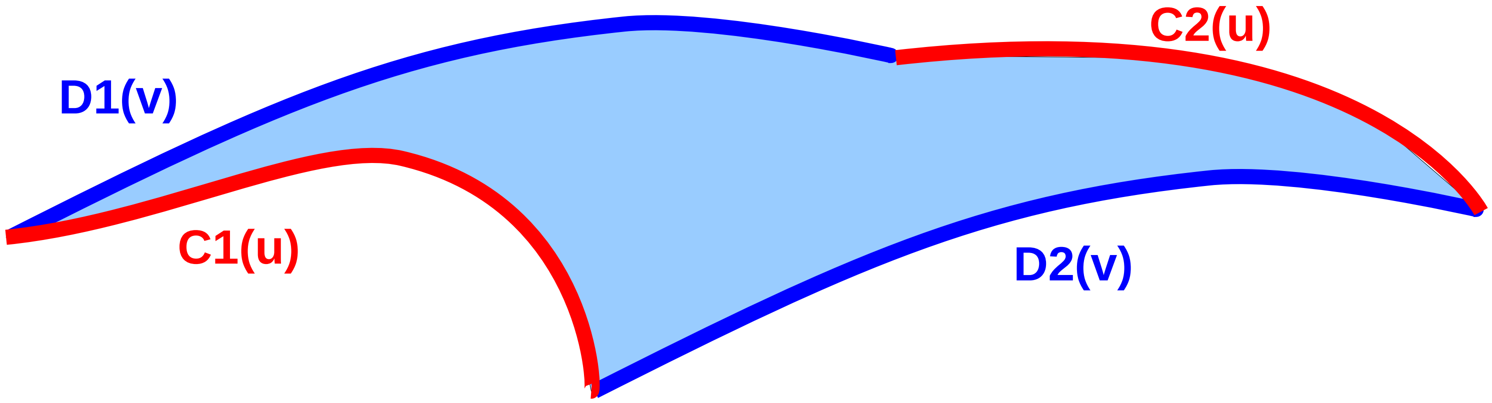


Degré qcq

$u \in [u_{min}, u_{max}]$, $v \in [v_{min}, v_{max}]$

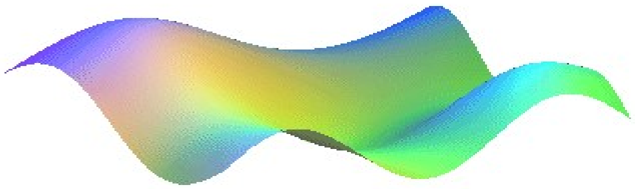
Carreaux de Coons

Idée : remplir entre courbes



Degré qcq

$u \in [u_{min}, u_{max}]$, $v \in [v_{min}, v_{max}]$



Surfaces Réglées

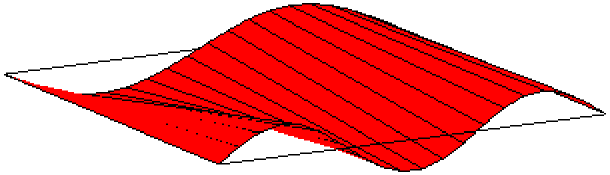
Surface qui interpole $c_1(u)$ et $c_2(u)$

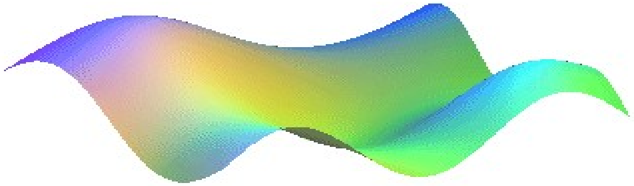
$u \in [u_{min}, u_{max}]$, ex : [0,1].

trouver $x(u,v)$ / $x(u,0) = c_1(u) \wedge x(u,1) = c_2(u)$.

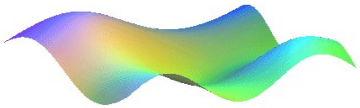
Solution la + simple : interpolation linéaire

$$x(u,v) = (1-v)\,c_1(u) + v\,c_2(u)$$
$$x(u,v) = (1-v)\,x(u,0) + v\,x(u,1)$$





Carreaux de Coons



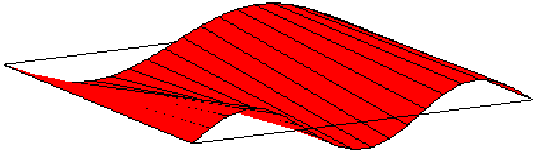
2 surfaces réglées

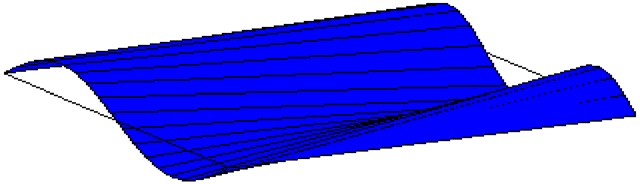
$$r_c(u,v)=(1-v)\,c_1(u)+v\,c_2(u)=(1-v)\,x(u,0)+v\,x(u,1)$$

$$r_d(u,v)=(1-u)\,d_1(v)+u\,d_2(v)=(1-u)\,x(0,v)+u\,x(1,v)$$

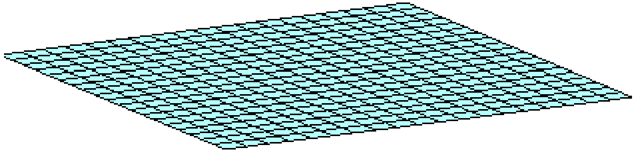
r_c interpole $c_1(u)$ et $c_2(u)$ mais ne reproduit pas $d_1(v)$ ni $d_2(v)$

(idem pour r_d)



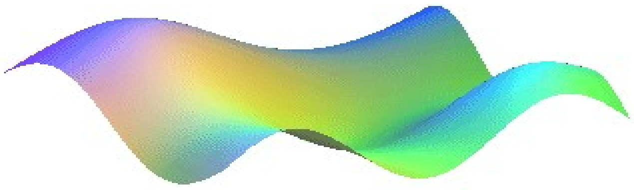


$$r_{cd}(u,v)=\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0,0) & x(0,1)\\ x(1,0) & x(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}$$



=> retirer interpolation bilinéaire

Carreau de Coons : $x = r_c + r_d - r_{cd}$



Carreaux de Coons

Coons Bilinéaire

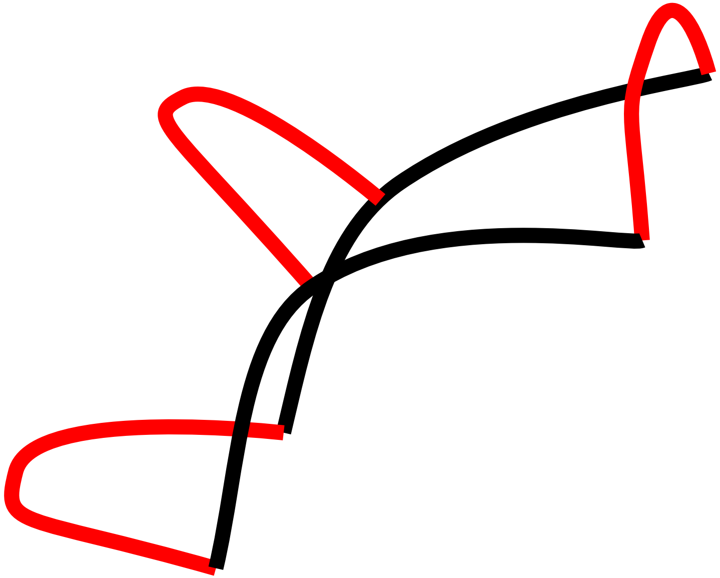
$$x(u,v)=\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0,v)\\ x(1,v)\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}x(u,0) & x(u,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}$$
$$-\begin{bmatrix}1-u\\ u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0,0) & x(0,1)\\ x(1,0) & x(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}$$

Coons Général

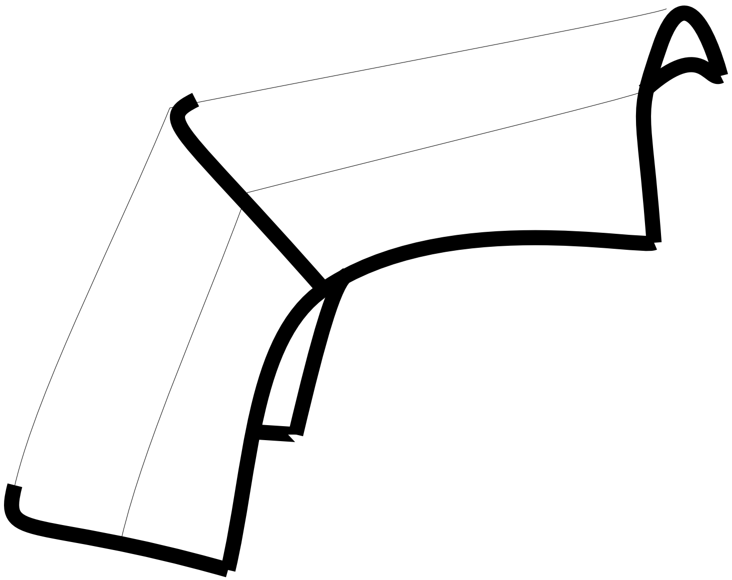
$$x(u,v)=\begin{bmatrix}f_1(u) & f_2(u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0,v)\\ x(1,v)\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}x(u,0) & x(u,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1(v)\\ g_2(v)\end{bmatrix}$$
$$-\begin{bmatrix}f_1(u)\\ f_2(u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0,0) & x(0,1)\\ x(1,0) & x(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1(v)\\ g_2(v)\end{bmatrix}$$

Coons Patches

Inconvénient



u∈ [0,2], v∈ [0,1]



Bords x(u,0) et x(u,1) differentiables
Derivees croisées discontinues le long de x(1,v)

Carreaux de Coons Mélange Partiel Bicubique

$$H_0^3(t)=2t^3-3t^2+1$$
$$H_1^3(t)=t^3-2t^2+t$$
$$H_2^3(t)=t^3-t^2$$
$$H_3(t)=-2t^3+3t^2$$

Fonctions de Hermite : $f_1=g_1=H_0^3$ et $f_2=g_2=H_3^3$

Derivée "transverse" (suivant v) le long de u=0 :

$$x_u(0,v)=\begin{bmatrix} x_u(0,0) & x_u(0,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0^3(v) \\ H_3^3(v) \end{bmatrix}$$

Tous les autres termes disparaissent car

$$\frac{dH^3_{3i}(0)}{du}=\frac{dH^3_{3i}(1)}{du}=0 \quad i=0,1$$

Derivée croisée le long d'un bord depend seulement de ce bord

Inconvénient : aplats aux coins

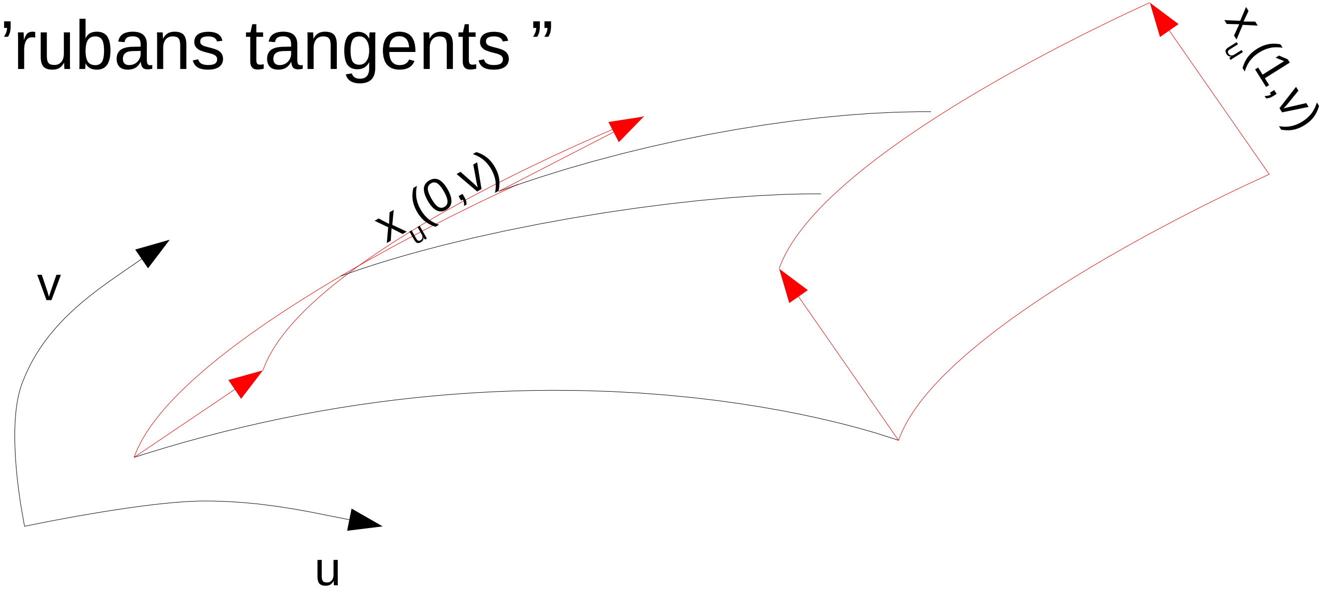
$$x_{uv}(i,j)=0 \quad i,j\in\{0,1\}$$

Carreaux de Coons Mélange Partiel Bicubique

Données : $x(u,0), x(u,1), x(0,v), x(1,v)$

$\boldsymbol{x}_v(\boldsymbol{u},\boldsymbol{0}), \boldsymbol{x}_v(\boldsymbol{u},\boldsymbol{1}), \boldsymbol{x}_u(\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}), \boldsymbol{x}_u(\boldsymbol{1},\boldsymbol{v})$ (tangentes le long des courbes)

= ”rubans tangents ”



Carreaux de Coons Bicubique

Surfaces réglées généralisées

$$h_c(u,v)=H_0^3(u)\,x(0,v)+H_1^3(u)\,x_u(0,v)+H_2^3(u)\,x_u(1,v)+H_3^3(u)\,x(1,v)$$

$$h_d(u,v)=H_0^3(v)\,x(u,0)+H_1^3(v)\,x_v(u,0)+H_2^3(v)\,x_v(u,1)+H_3^3(v)\,x(u,1)$$

$$h_{cd}(u,v)=\begin{bmatrix}H_0^3(u) & H_1^3(u) & H_2^3(u) & H_3^3(u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0,0) & x_v(0,0) & x_v(0,1) & x(0,1)\\ x_u(0,0) & x_{uv}(0,0) & x_{uv}(0,1) & x_u(0,1)\\ x_u(1,0) & x_{uv}(1,0) & x_{uv}(1,1) & x_u(1,1)\\ x(1,0) & x_v(1,0) & x_v(1,1) & x(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_0^3(v)\\ H_1^3(v)\\ H_2^3(v)\\ H_3^3(v)\end{bmatrix}$$

Carreau de Coons : $x = h_c + h_d - h_{cd}$

$$\mathbf{x}_{uv}(i,j)=\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\mathbf{x}(i,j)= \text{ ddl (à choisir)}$$

Vecteurs twist à choisir aux quatre coins du patche