Modélisation à l’aide des IFS

Fonction d’adressage
Fonction de transport
Courbes et surfaces : condition de raccords

Fonction d'adressage

- Etant donné un IFS composé d'un ensemble fini d'opérateurs

$$\mathbb{T}=\left\{T_i, i=0, N-1\right\}$$

- On lui associe un ensemble fini d'indices

$$\Sigma=\left\{0,\cdots,N-1\right\}$$

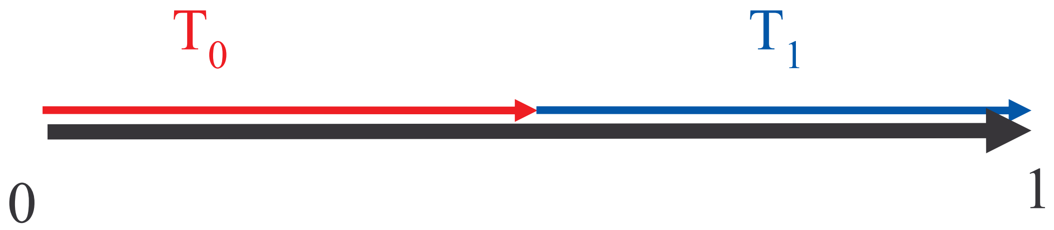
Fonction d'adressage

- L'attracteur A, associé à $\mathbb{T}$, est muni d'une fonction d'adressage ϕ [BAR88] définie sur l'ensemble des mots infinis sur Σ (noté Σ^ω)

$$\begin{array}{llll} \phi: & \Sigma^\omega & \rightarrow & A \subset E \\ & \sigma & \rightarrow & \phi(\sigma) = \lim\limits_{n \to \infty} T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \cdots T_{\sigma_n} p \end{array}$$

- Où $p \in E$ et $\phi(\sigma)$ est indépendant de p

Exemple

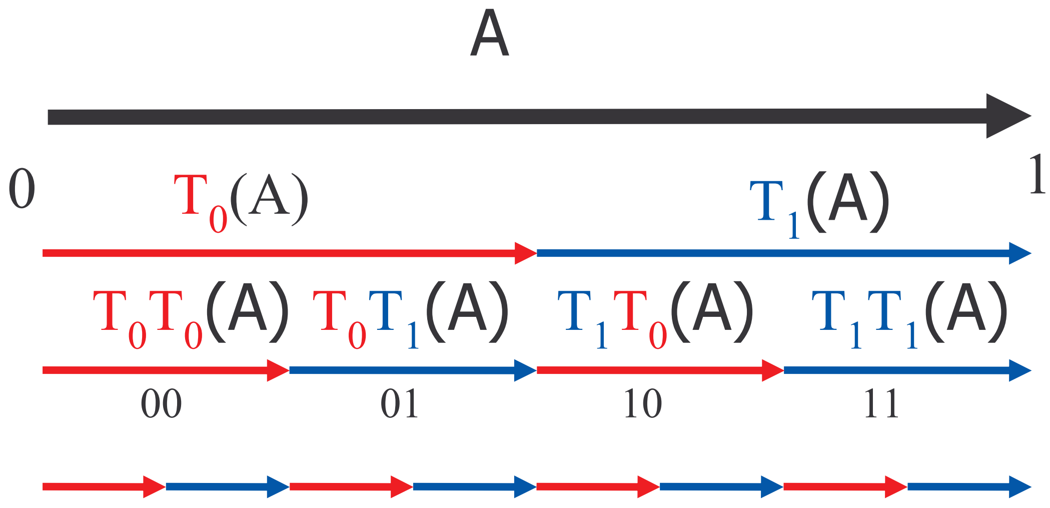


$[0,1]=T_0([0,1]) \cup T_1([0,1])$
$[0,1] = A(\mathbb{T})$ où $\mathbb{T} = \{T_0, T_1\}$

$T_0(s) = \frac{1}{2} s$
$T_1(s) = \frac{1}{2} s + \frac{1}{2}$

$T_0(0)=0= c_0$
$T_1(1)=1= c_1$

Fonction d'adressage sur [0,1]



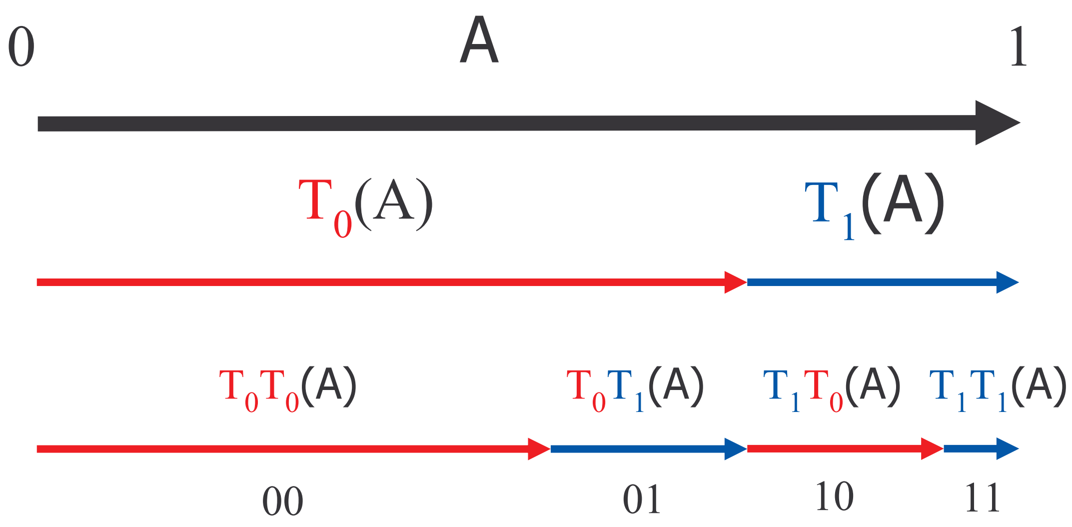
Fonction d'adressage ϕ : *10010..* $\rightarrow p = Lim\ (T_1T_0T_0T_1T_0..(p_0))$

10010.. =Adresse de $p = \sigma \Rightarrow p = \phi(\sigma)$

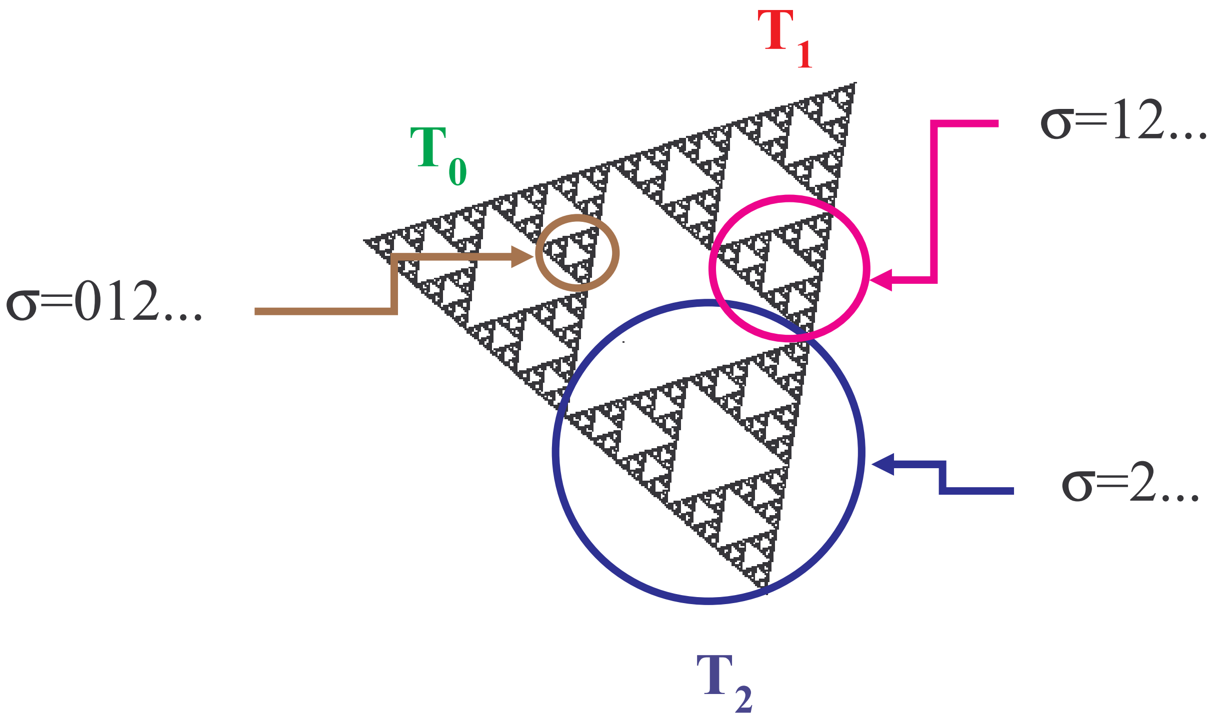
Dans cet exemple σ = développement binaire de p

Fonction d'adressage sur [0,1]

Attention la fonction d'adressage est propre à chaque l'IFS



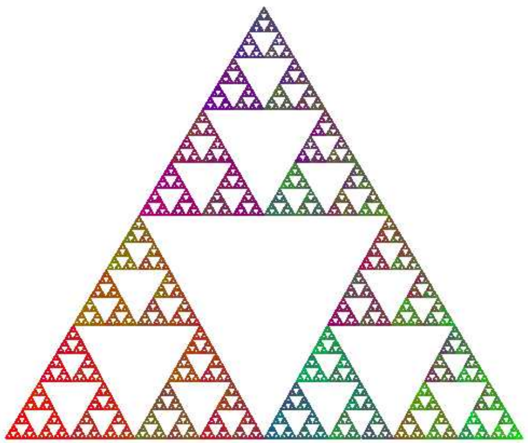
Exemple d'adresse sur le triangle de Sierpinski

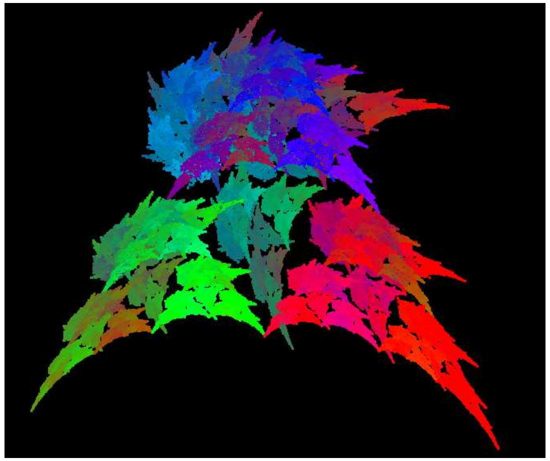


Intérêt/application

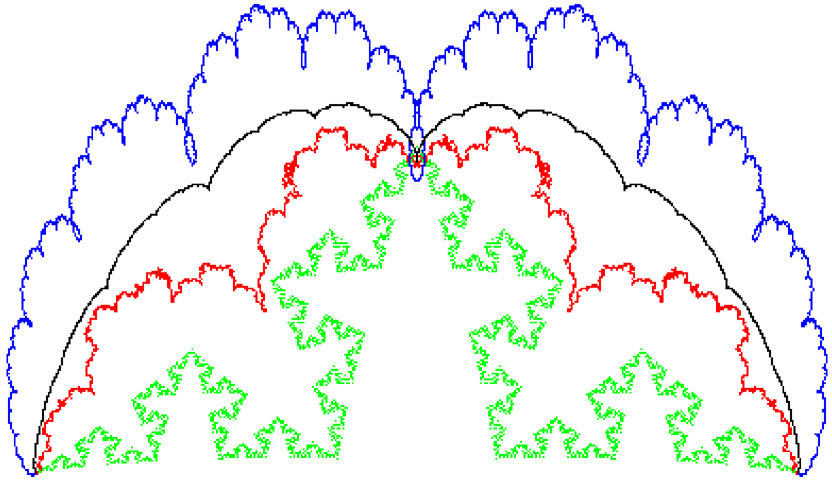
- Permet de paramétré les attracteurs
  - Par l'ensemble des mots infinis de Σ
  - On peut mettre en correspondance avec [0,1] (développement en base N =# $\mathbb{T}$)
- Permet de mettre en correspondance des attracteurs
  - Utilisation pour le texturage des attracteurs
  - Création de courbes paramétrées.

Exemple d’attracteur texturé





- Attention la fonction d’adressage est injective mais pas nécessairement surjective, i.e. un point de A peut posséder plusieurs adresses.



Fonction de transport

- Objectif:
  - Définir des morphismes et homéomorphisme d'IFS
  - Condition d'équivalence topologique entre attracteurs
  - Construction de courbes et surfaces paramétrées

Fonction de transport

- Définition
  - Étant donnés 2 IFS

$$\mathbb{T}=\{T_i, i\in\Sigma\} \qquad \mathbb{T}'=\{T_i', i\in\Sigma\}$$

indicés par le même ensemble

on peut définir une application *H* par:

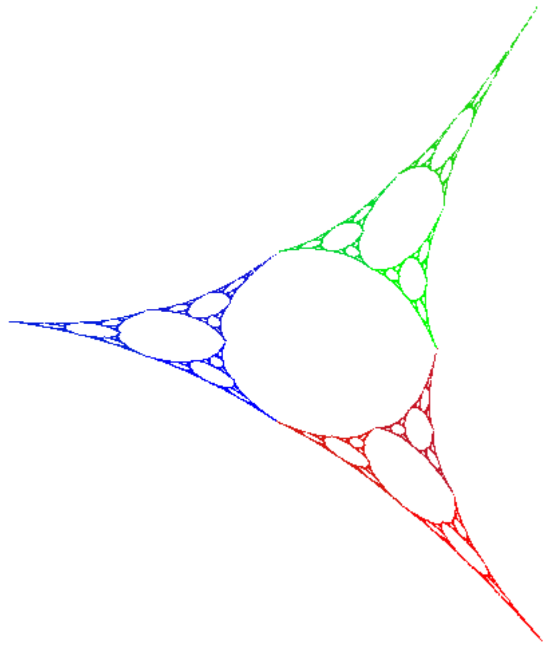
$$\forall\, p\in A \quad H(T_i p)=T_i' H(p)$$

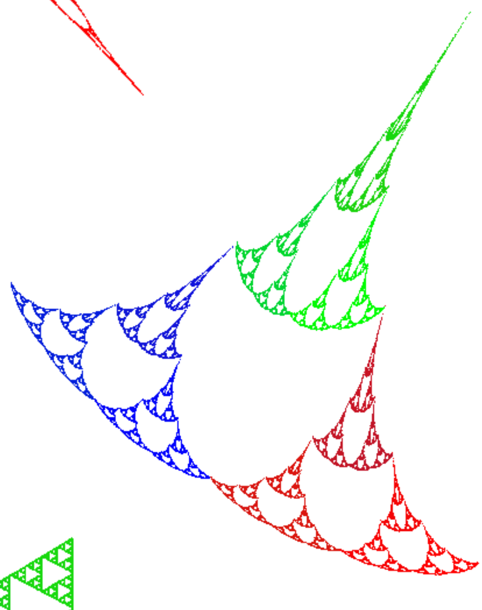
Propriétés de H

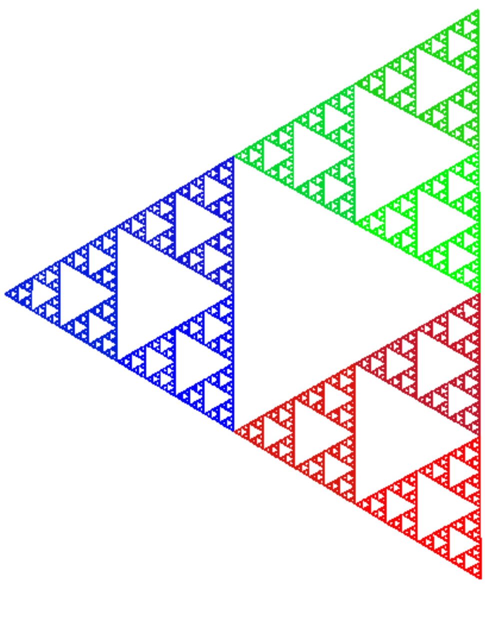
H(A)=A'
Et par conséquence
H met en correspondance les subdivisions des attracteurs

$$H(A)=A'$$
$$H(T_{\sigma_1}A)=T_{\sigma_1}A'$$
$$H(T_{\sigma_1}T_{\sigma_2}A)=T_{\sigma_1}'T_{\sigma_2}'A'$$
$$H(T_{\sigma_1}T_{\sigma_2}\cdots T_{\sigma_n}A)=T_{\sigma_1}'T_{\sigma_2}'\cdots T_{\sigma_n}'A'$$

Illustration du transport des sous attracteurs







Propriétés de H

- par passage à la limite *H* met en correspondance les fonctions d'adressage associés aux IFS

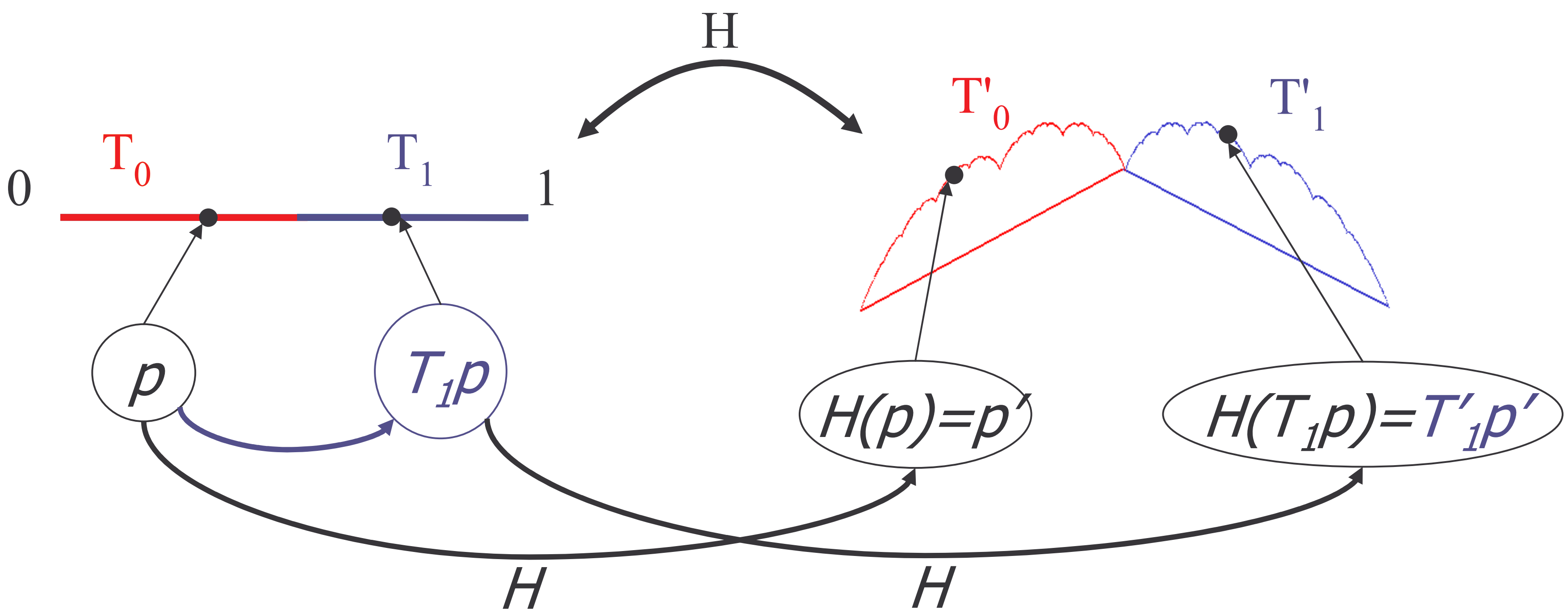
$$\forall \sigma \in \Sigma^{\omega}, \forall p \in A,$$

$$H(\lim_{n \to \infty} T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \cdots T_{\sigma_n} p) = \lim_{n \to \infty} T_{\sigma_1}' T_{\sigma_2}' \cdots T_{\sigma_n}' H(p)$$

$$H(\phi(\sigma)) = \phi'(\sigma)$$

Fonction de transport

- Illustration



Fonction de transport

- Pour que *H* soit une fonction, pour tout *p* du domaine de définition de *H*, *H(p)* doit être réduit à un singleton.
- Dans la cas où les T_i sont inversibles la définition devient :

$$\forall P \in T_i(A) \quad H(P) = T_i' H\left((T_i)^{-1} P\right)$$

- Si $\quad P \in T_i(A) \cap T_j(A)$
- *H(p)* peut s'exprimer de 2 façons

Fonction de transport

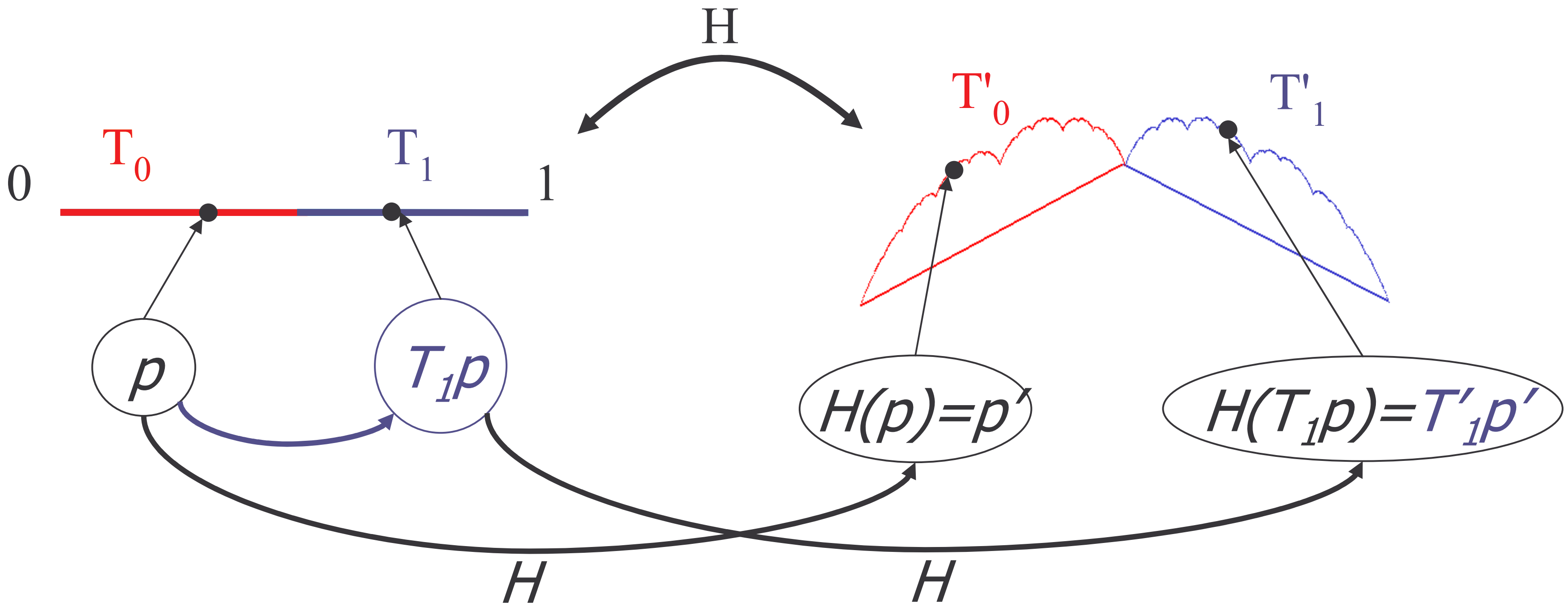
- D'où la conditions :

$$P \in T_i(A) \cap T_j(A) \Rightarrow T_{\mathrm{i}}{}' H((T_{\mathrm{i}})^{-1} P) = T_{\mathrm{j}}{}' H((T_{\mathrm{j}})^{-1} P)$$

- C'est ce qu'on appelle la condition d'intersection

Fonction de transport

- Exemple où *H* est bien définie et donc continue

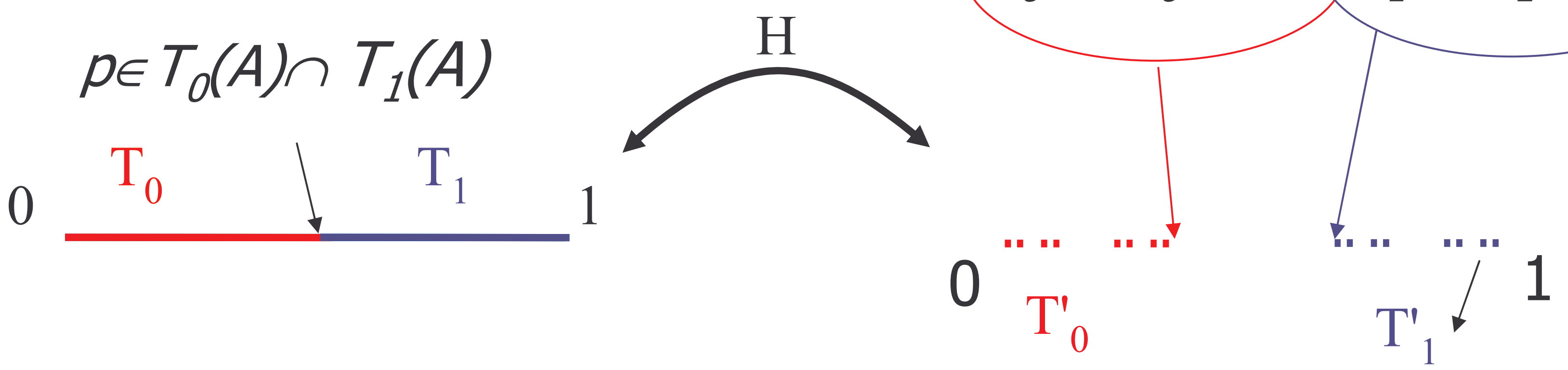


Fonction de transport

- Exemple où H n’est pas “bien défini” et donc est non continue

$H(p)=\{T'_0\, H\, T_0^{-1}\,(p); T'_1\, H\, T_1^{-1}\,(p)\}$

$p \in T_0(A) \cap T_1(A)$



$T_0(s) = ½\ s$
$T_1(s) = ½\ s + ½$
$A = [0,1]$

$T'_0(s) = 1/3\ s$
$T'_1(s) = 1/3\ s + 2/3$
A = Cantor

Exemple

- Cas des courbes de Bézier

$$\tau_0 * t = \frac{t}{2}$$

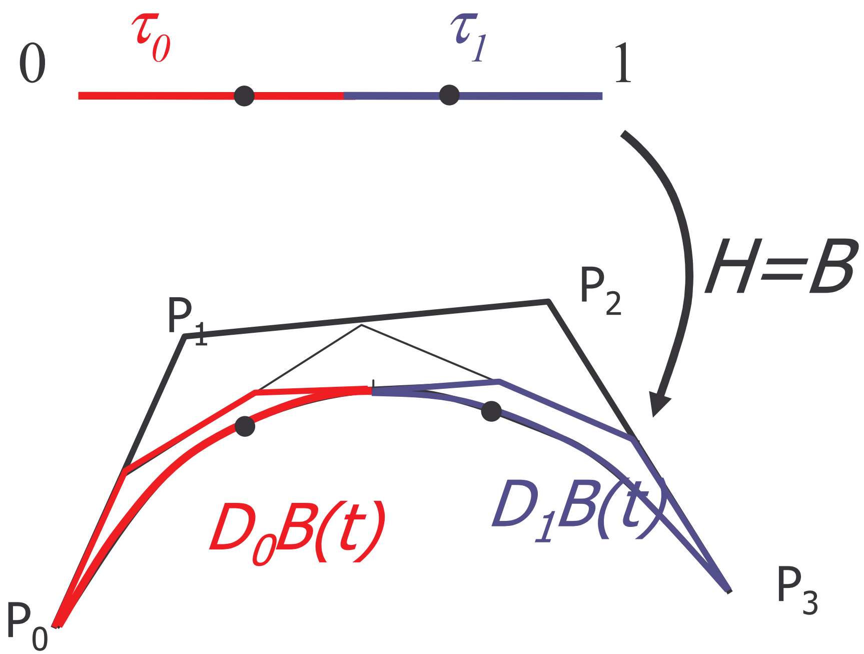
Rq : A({τ_0, τ_1})=[0,1]

$$\tau_1 * t = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}$$

$$B(t)\begin{cases} B(\tau_0 * t) = D_0 * B(t) \text{ si } t \in [0,1] \\ B(\tau_1 * t) = D_1 * B(t) \text{ si } t \in [0,1] \end{cases}$$

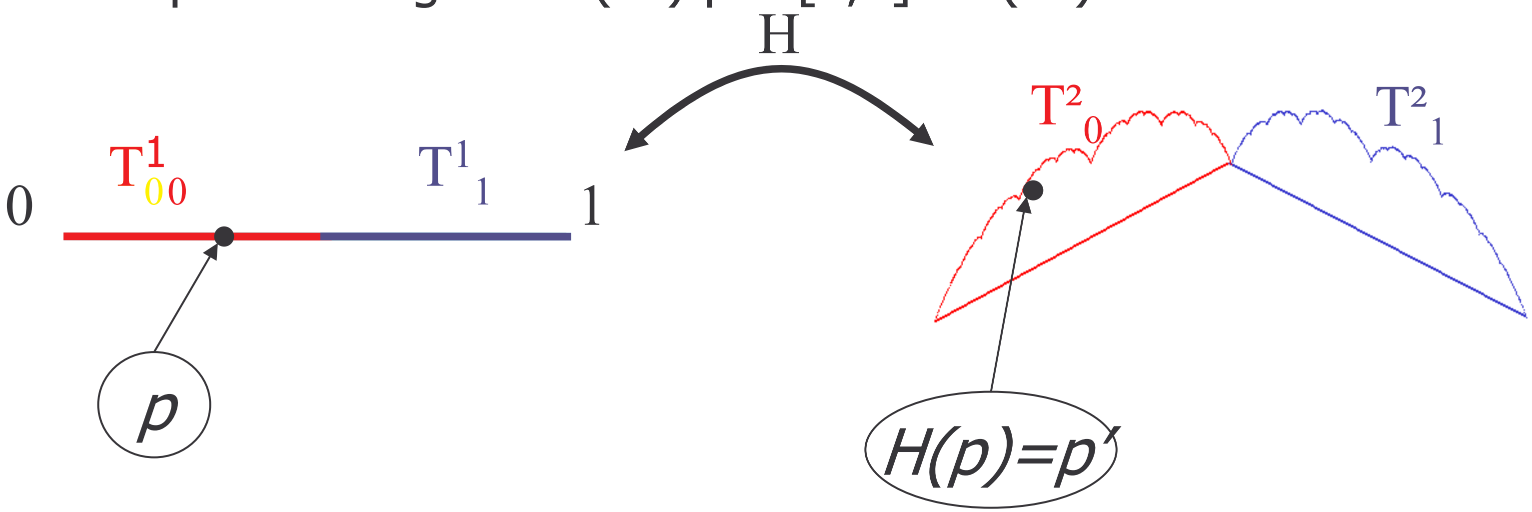
$$B(\tau_i * p) = D_i * B(p)$$

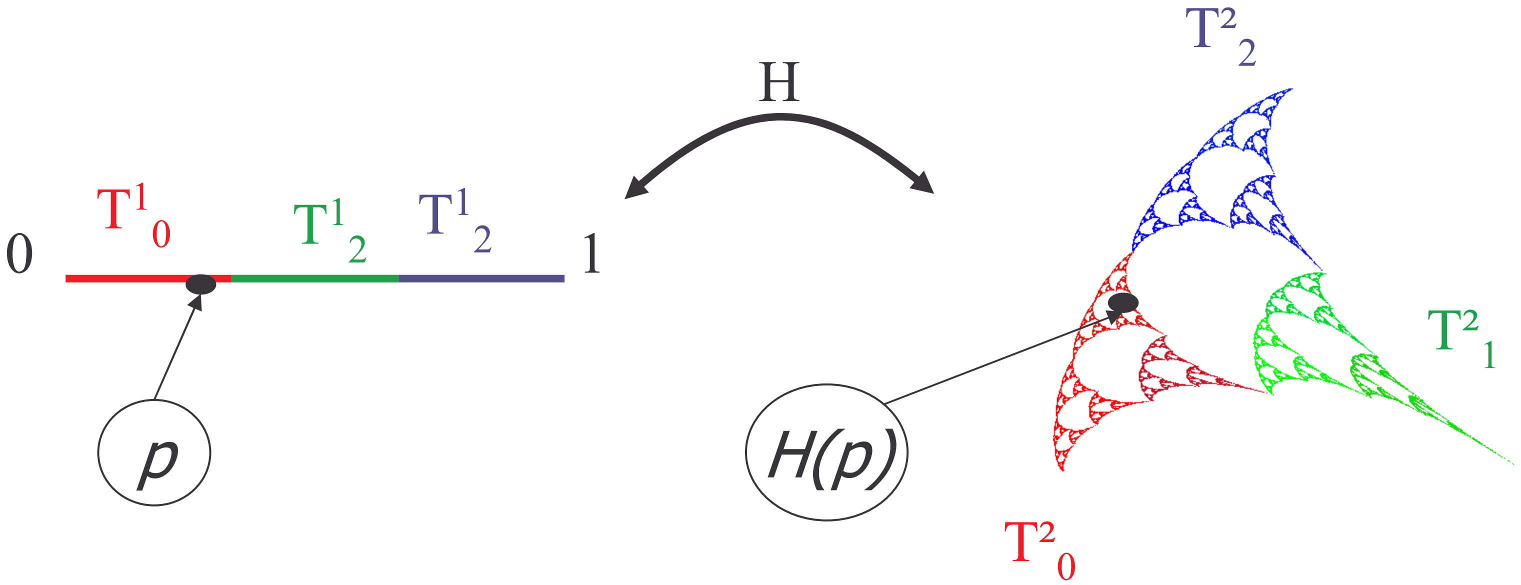
$$B(p) = D_i * B(\tau_i^{-1} * p)$$



Fonction de transport

- IFS paramétré :
- Soient $\mathbb{T}^1$ et $\mathbb{T}^2$ 2 IFS indexés par le même ensemble Σ
  - Si $A(\mathbb{T}^1) = [0,1]$
  - Si H est bien défini (ie la condition d'intersection est vérifiée)
  - Alors la fonction de transfert permet de réaliser un paramètrage de $A(\mathbb{T}^2)$ par $[0,1]= A(\mathbb{T}^1)$



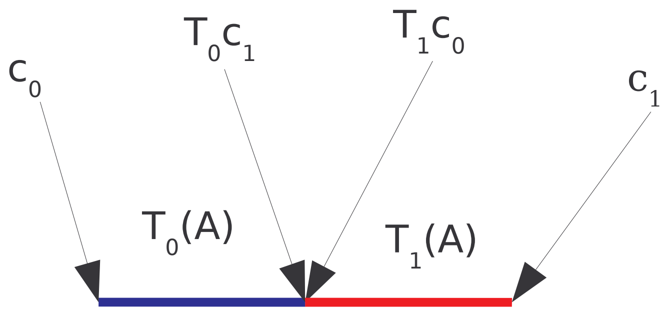


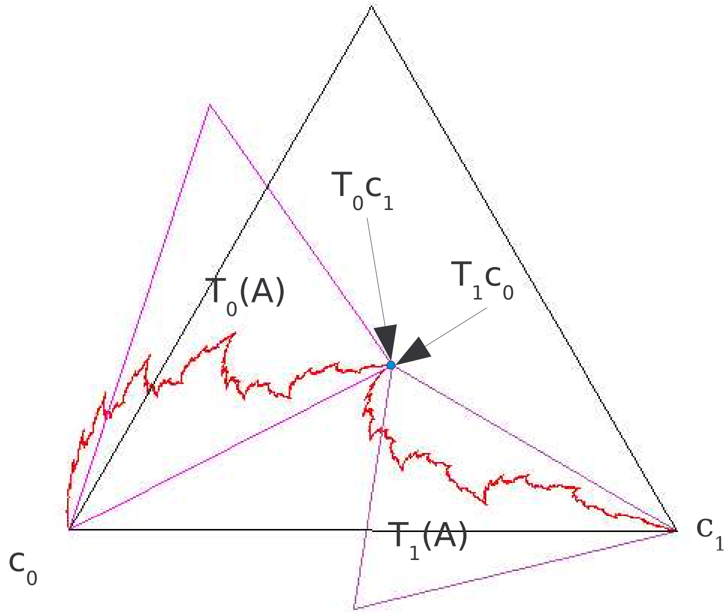
H
0
T^1_0
T^1_2
T^1_2
1
p
$H(p)$
T^2_2
T^2_1
T^2_0

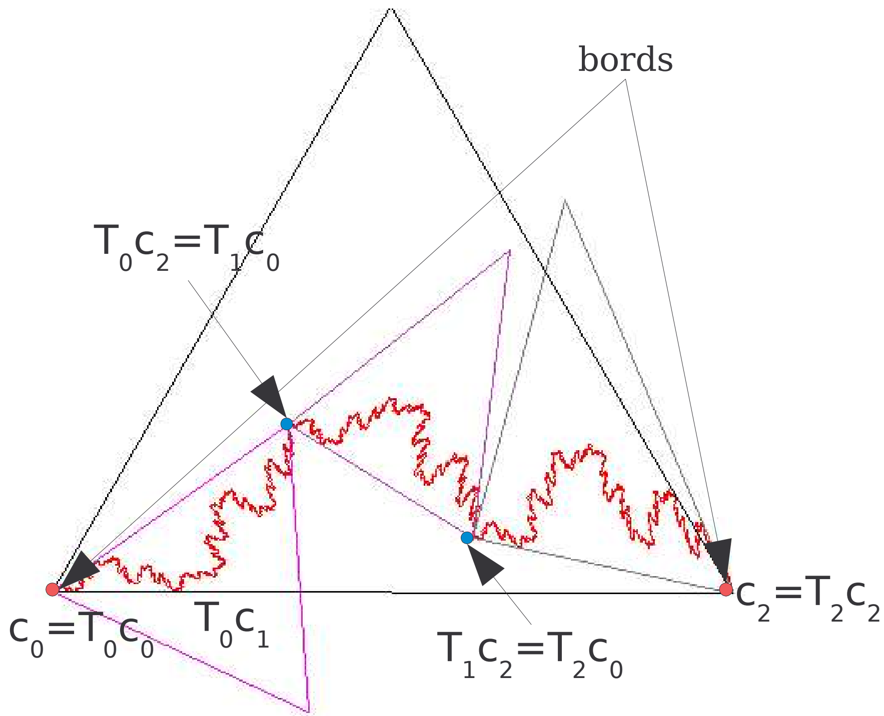
Construction de courbes paramétrées

- Condition de raccord faible (ou condition de connexité)
  - Idée :
  - En notant par l'ensemble des indices des bords (dans le cas des courbes est réduit à 2 éléments). Soit l'ensemble fini des adresses des bords
  - L'ensemble des raccords est caractérisé par   une relation d'équivalence sur   telle que :

$$((i\tau_k),(j\tau_l))\in\Upsilon \Rightarrow T_i(\phi(\tau_k))=T_j(\phi(\tau_l))$$


c_0
T_0c_1
T_1c_0
c_1
$T_0(A)$
$T_1(A)$


T_0c_1
$T_0(A)$
T_1c_0
$T_1(A)$
c_1
c_0


bords
$T_0c_2=T_1c_0$
$c_0=T_0c_0$
T_0c_1
$T_1c_2=T_2c_0$
$c_2=T_2c_2$