Les fractales

Objectifs

- Comprendre le principe de la géométrie fractale
- Connaître quelques notions associées aux fractales
- Savoir comment manipuler les fractales en synthèse d'images à l'aide du modèle IFS (Iterated Function systems)

Les fractales

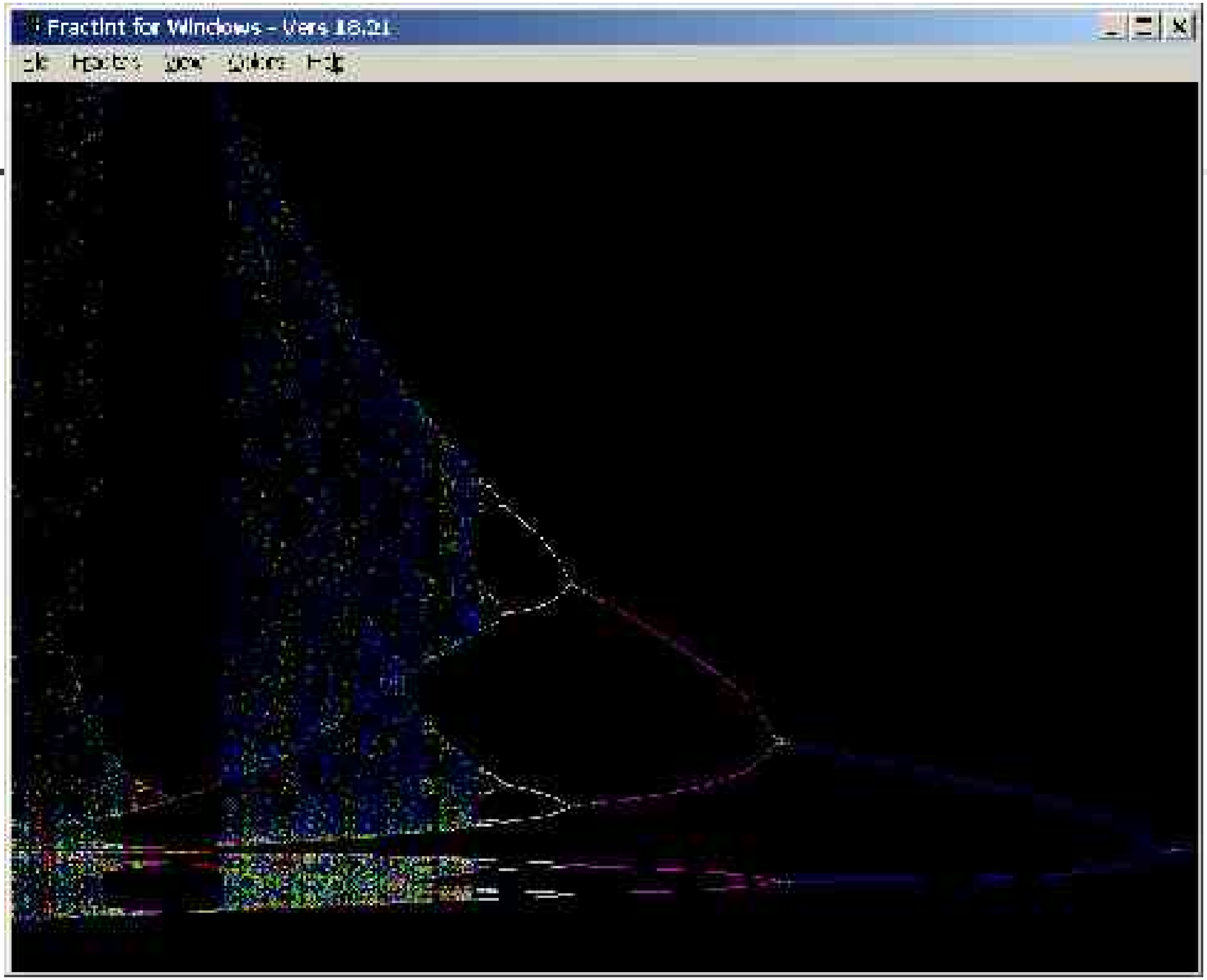
- Notions associées aux fractales
  - système dynamique
    - Attracteur :
    - Chaos
    - Bassin d’attraction
  - Dimension fractale

système dynamique

- = système d'équations différentielles
  - qui décrit l'évolution du système à l'instant t en fonction de son état
- Exemple :
  - Cas continu : $dx(t)/dt = F(x(t))$
  - Cas discret : $X_{n+1} = F(X_n)$
- L'évolution du système est caractérisée par
  - Cas continu : la solution $x(t)$ (pour $x(0)=x_0$ donné)
  - Cas discret : la suite X_n (avec X_0 donné)

Comportement

- Divergence
- Convergence vers un Attracteur
  - vers un point
    - $X_{n+1} = \frac{1}{2} X_n$ A={0}
  - Vers un cycle limite = attracteur cyclique limite ou attracteur périodique
    - $X_{n+1} = (-1)^n$ A={-1,1}
  - Vers un attracteur étrange (exemple attracteur de Lorentz
    - $X_{n+1} = 4 \mu X_n (1- X_n)$ (avec $\mu \in [0,1]$) A = ?


Fractint for Windows - Vers 18.21

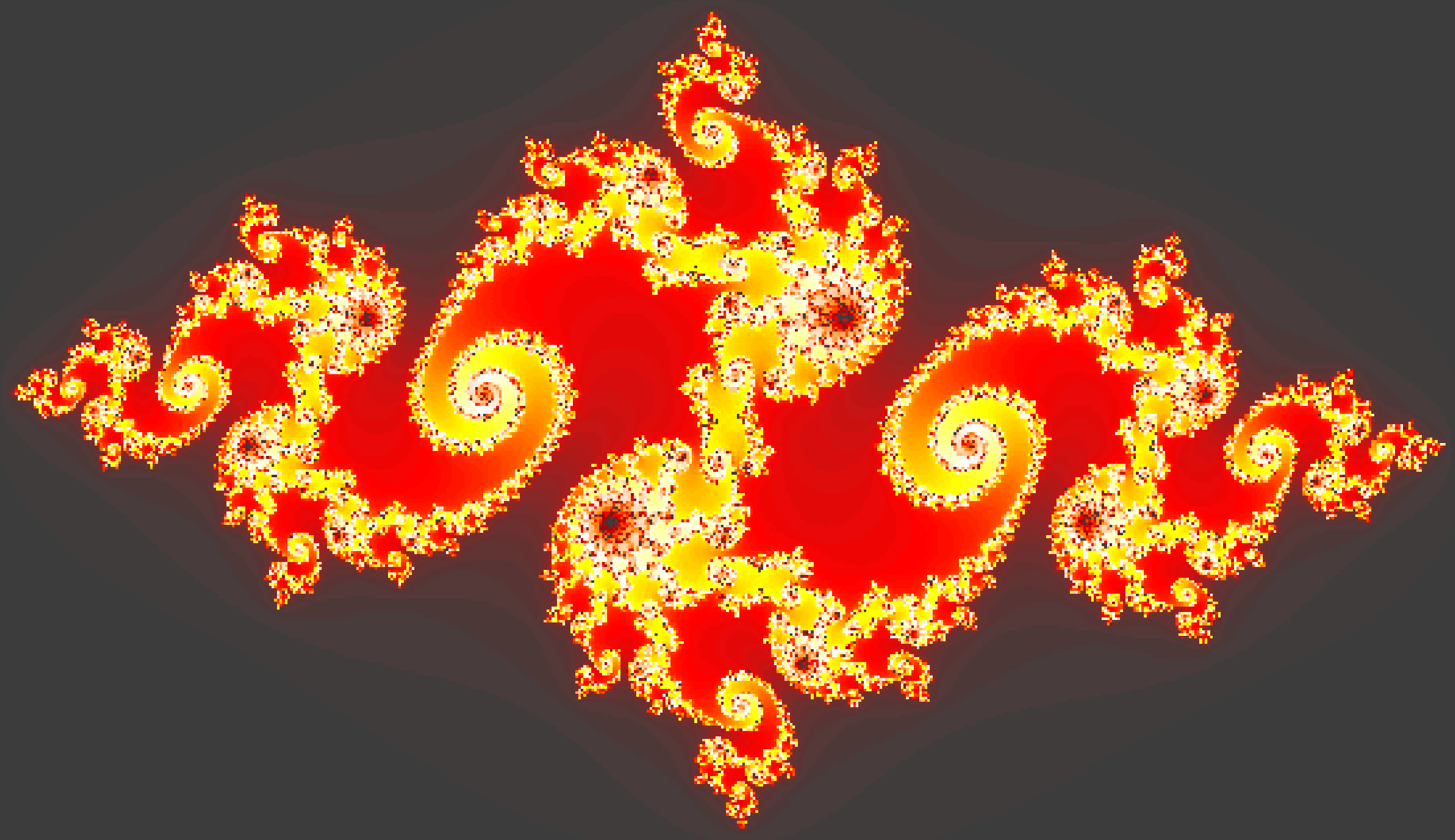
Définition

- Bassin d'attraction

  = ensemble des points X_0 dont la suite X_n tend vers l'attracteur

Ensemble de Julia :Jc

- Itération de $F_c(Z)=Z^2 + c$
- c = point du plan complexe définissant l'ensemble de Julia Jc
- Pour chaque point Z du plan complexe
  - On calcule la suite $Z_n = F_c^n(Z)$
  - Si la suite $|Z_n|$ reste bornée => $Z \in J_c$
  - J_c = complémentaire du bassin d'attraction du point ∞.



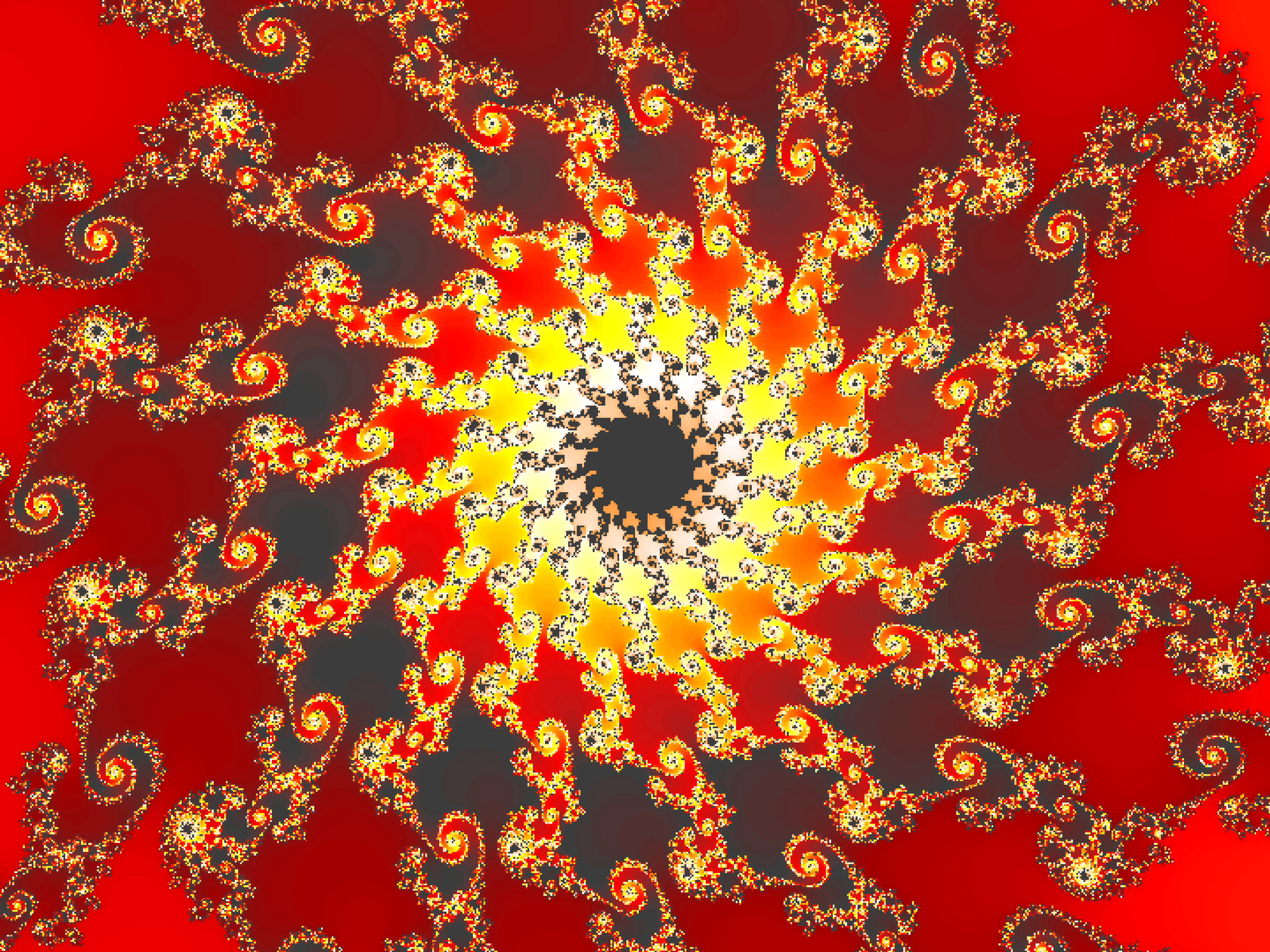
Ensemble de Julia :J_c^n

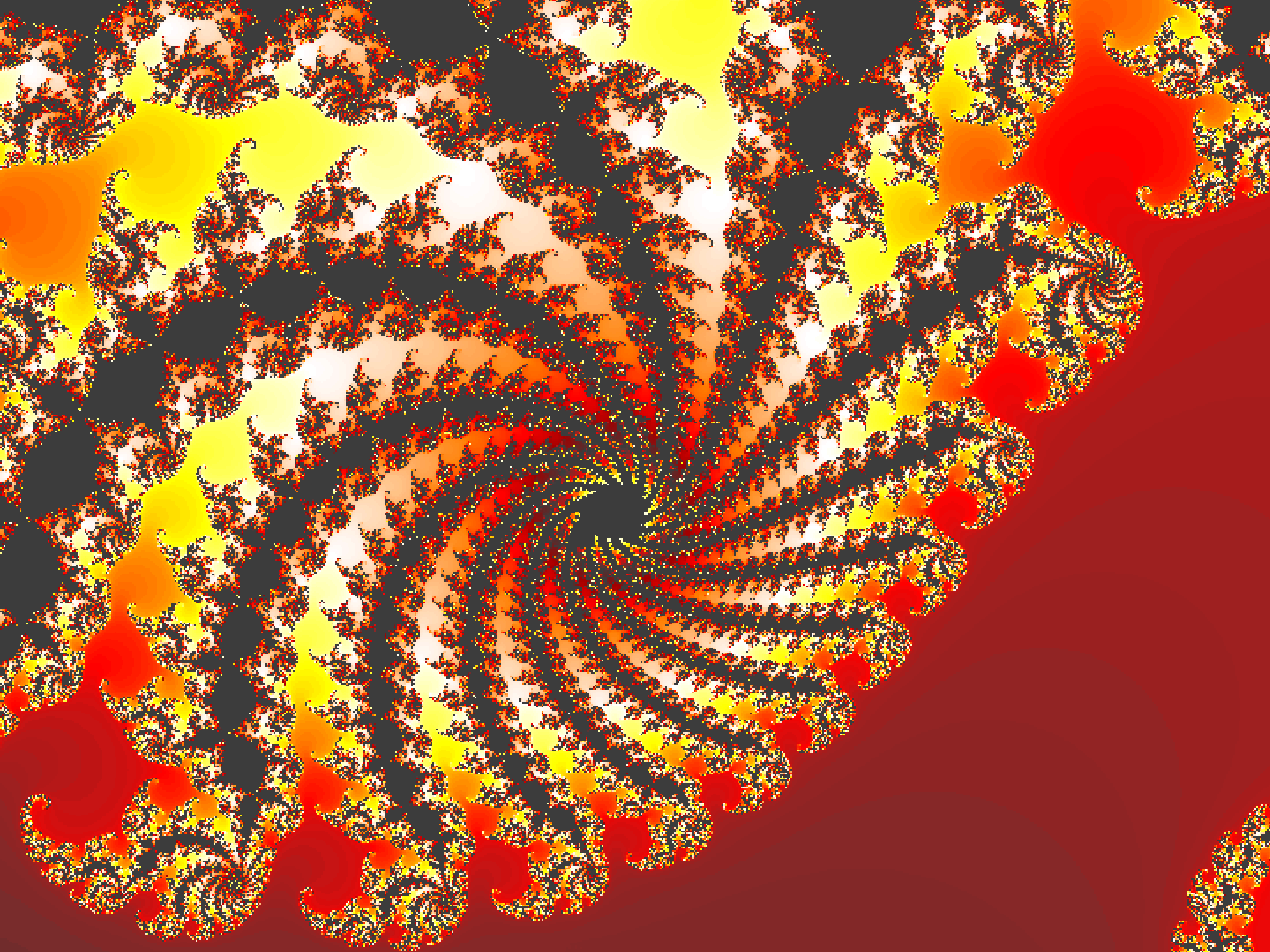
=> l'appartenance de Z à Jc est indécidable

- Mais on sait que s'il existe n tq $|Z_n|>2$ => divergence ($Z \notin J_c$)
- On visualise J_c^n , étant donné n fixé
  - $J_c^n=\{ Z \text{ tq } |Z_p| < 2, \forall\ p\leq n\}$
  - $J_c^n \to J_c$ quand $n \to \infty$

Les couleurs

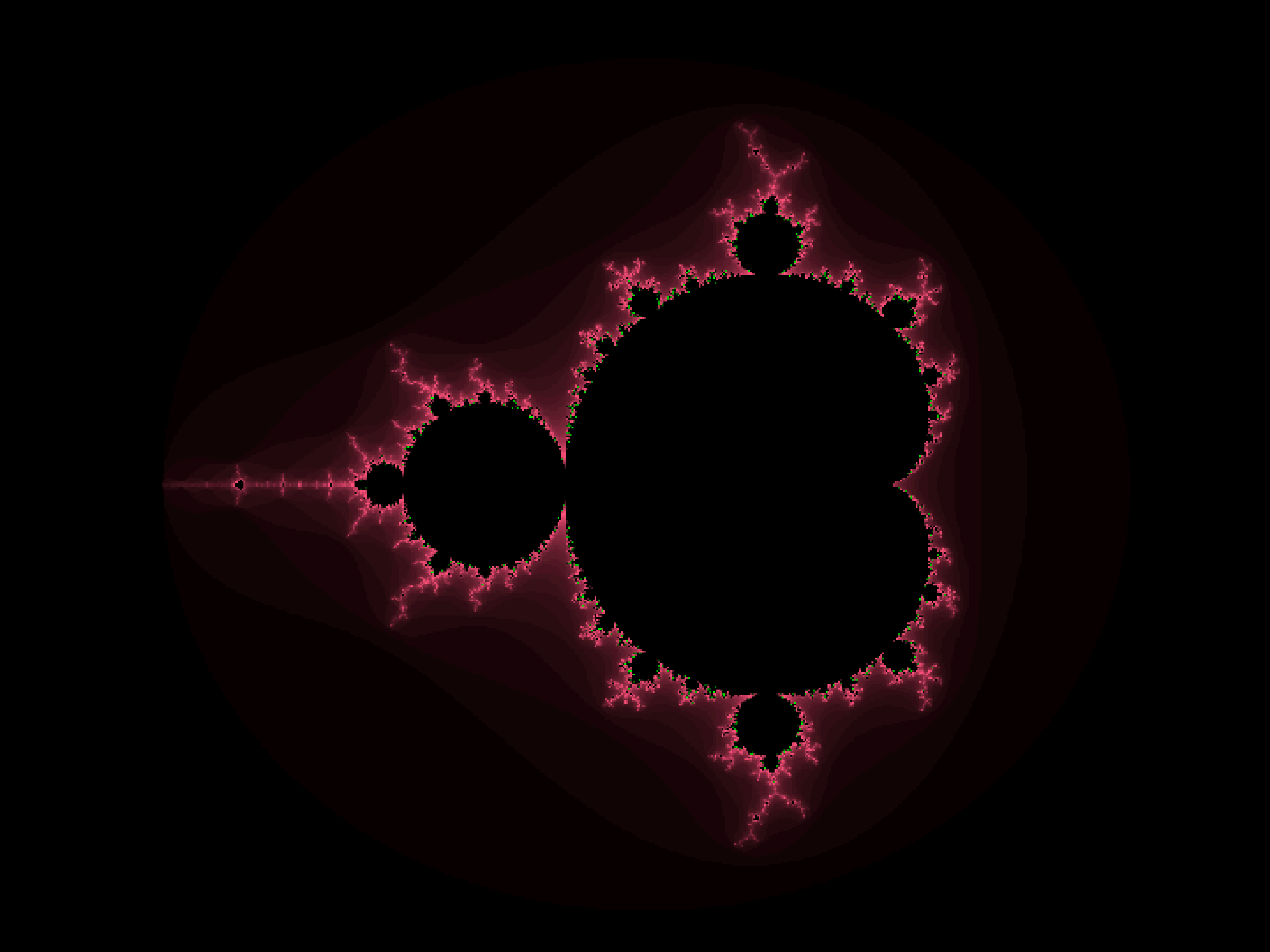
- Les couleurs représentent la «vitesse de divergence»
  - L'indice de couleur de Z est p
    si p est le 1er indice tq $|Z_p| \geq 2$ (=> divergence)
  - $\forall\ p \leq n\ |Z_p| < 2$ => l'indice de couleur = 0
  - Un dégradé de couleurs est associé aux indices





Ensemble de Mandelbrot :M

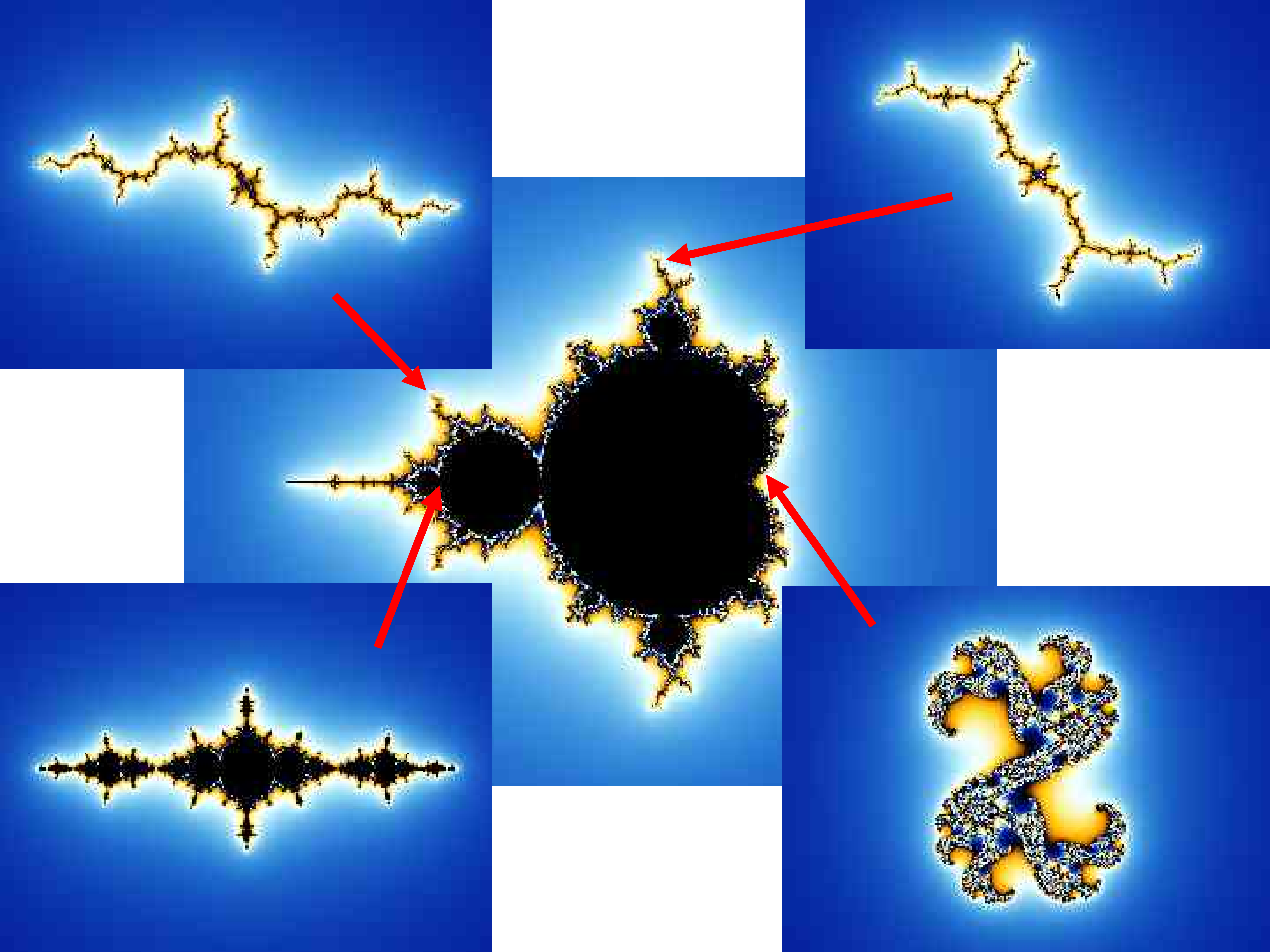
- Itération de $F(Z)=Z^2 + c$
- Pour chaque point c du plan complexe :
  - On calcule la suite $Z_n = F_c^n(0)$
  - Si $|Z_n|$ reste borné => $c \in M$
- La visualisation se fait comme pour les ensembles de Julia



Remarque

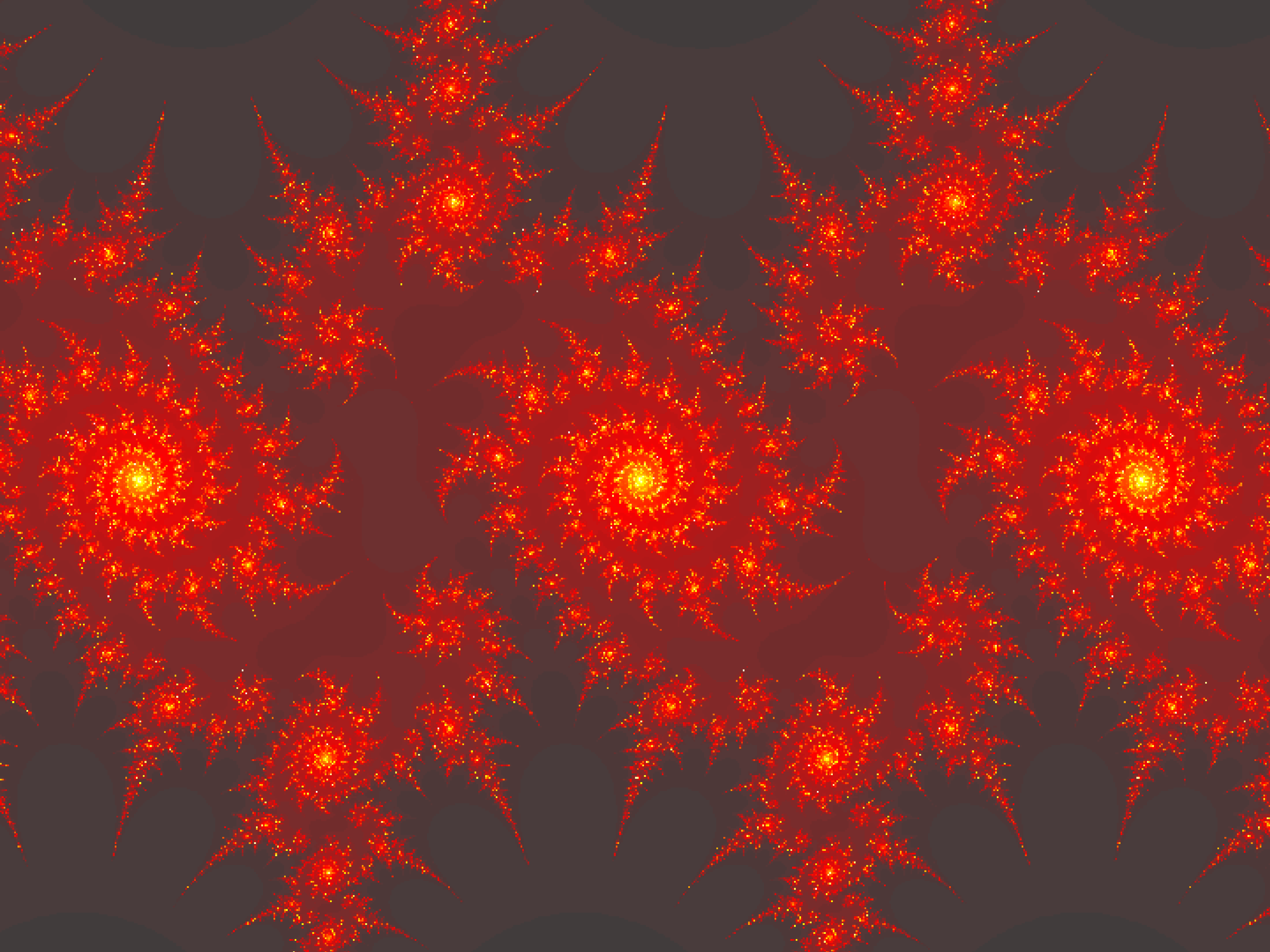
- Julia
  - Si Z = c
  - $Z_n = F_c(Z) = Z^2 + c$
  - c
  - c^2+c
  - $(c^2+c)^2+c$
- Mandelbrot
  - Au point c
  - $Z_n = F_c^n(0)$
  - c
  - c^2+c
  - $(c^2+c)^2+c$

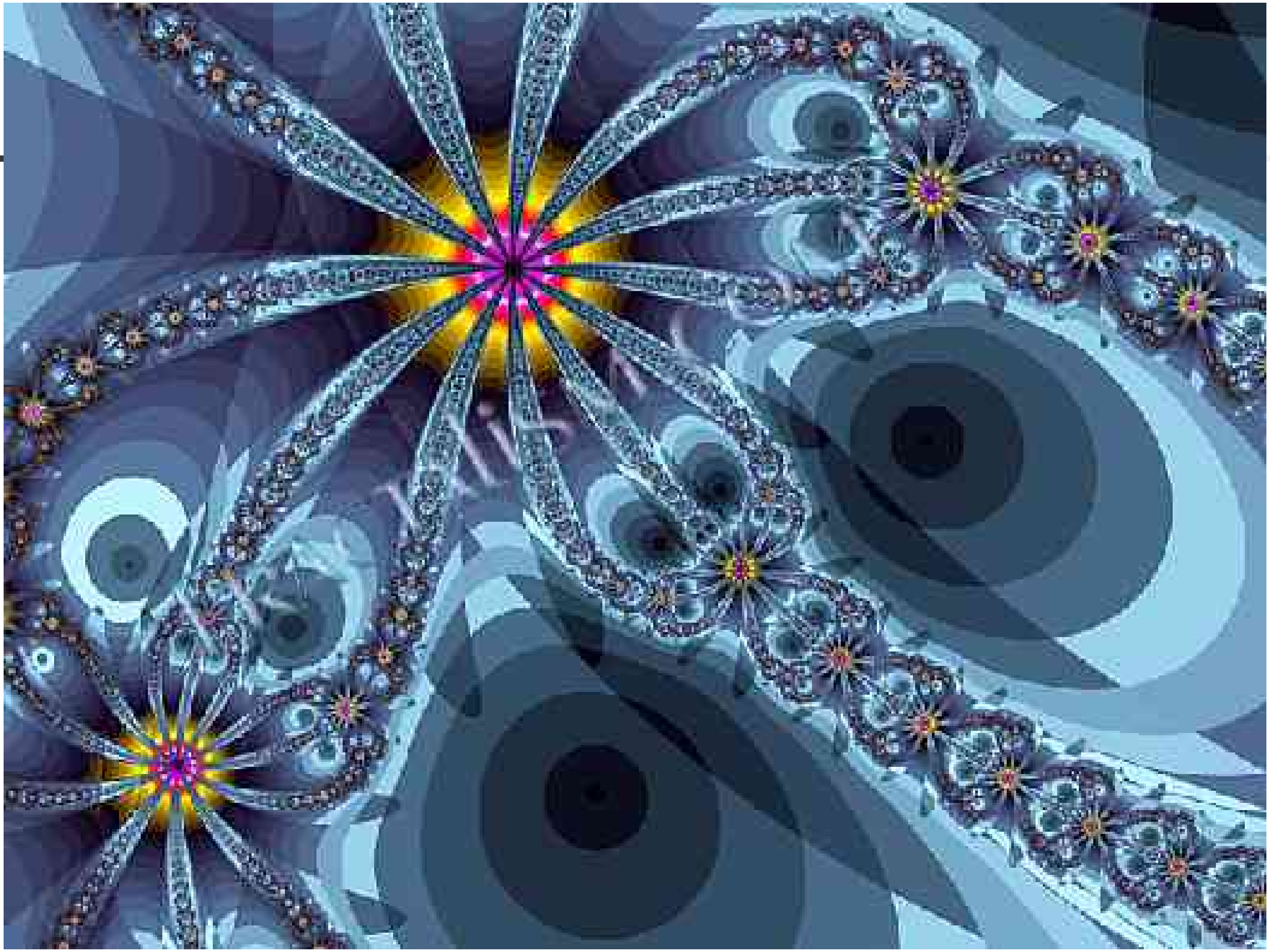
On obtient la même suite et par « stabilité structurelle» localement (autour de du point c) J_c à le même aspect que l'ensemble de Mandelbrot.



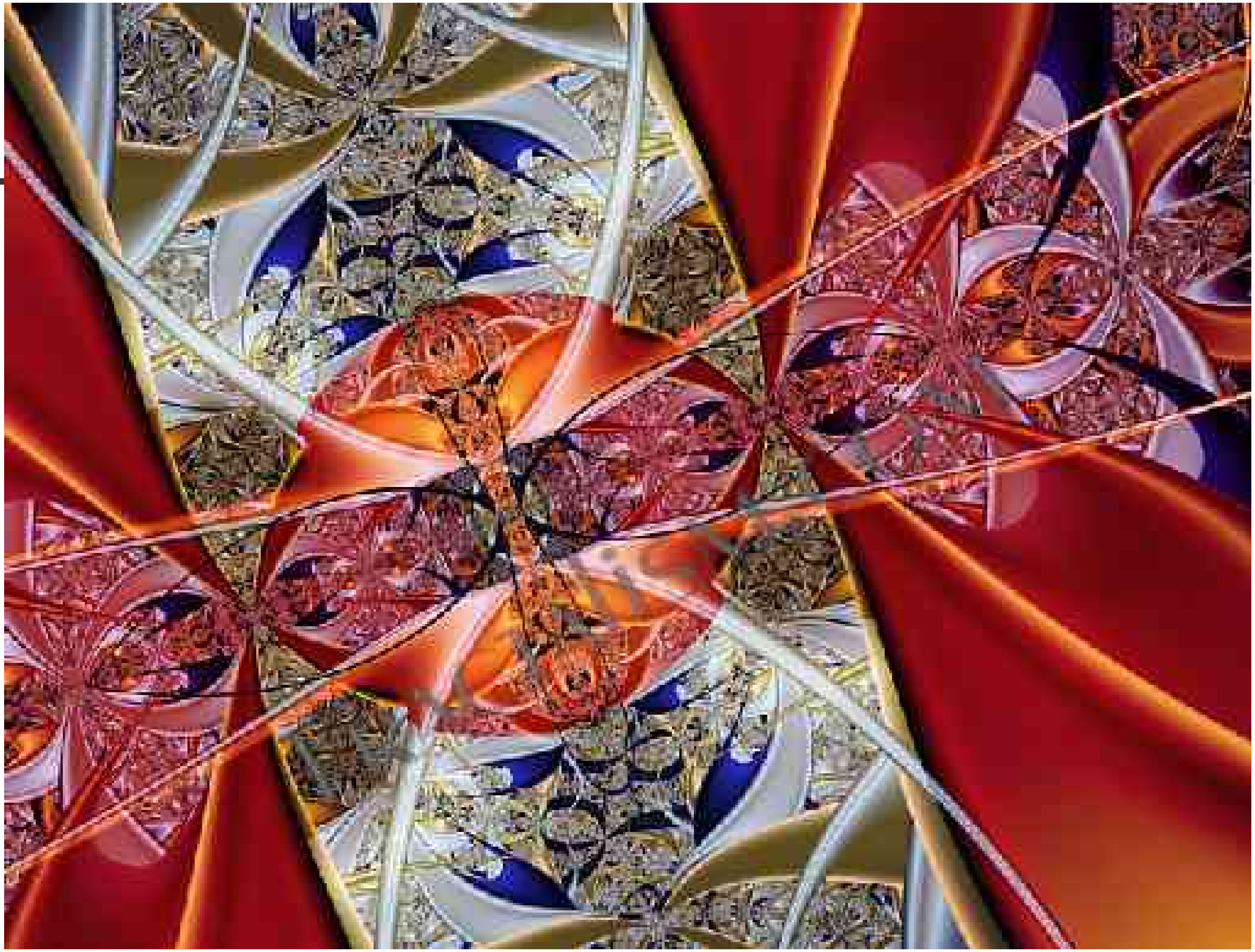
Itération d'autres fonctions

- Itération d'autres fonctions complexes
  - HOOOO! la belle rouge !
  - HOOOO! la belle verte !





Jay Jacobson



Jay Jacobson

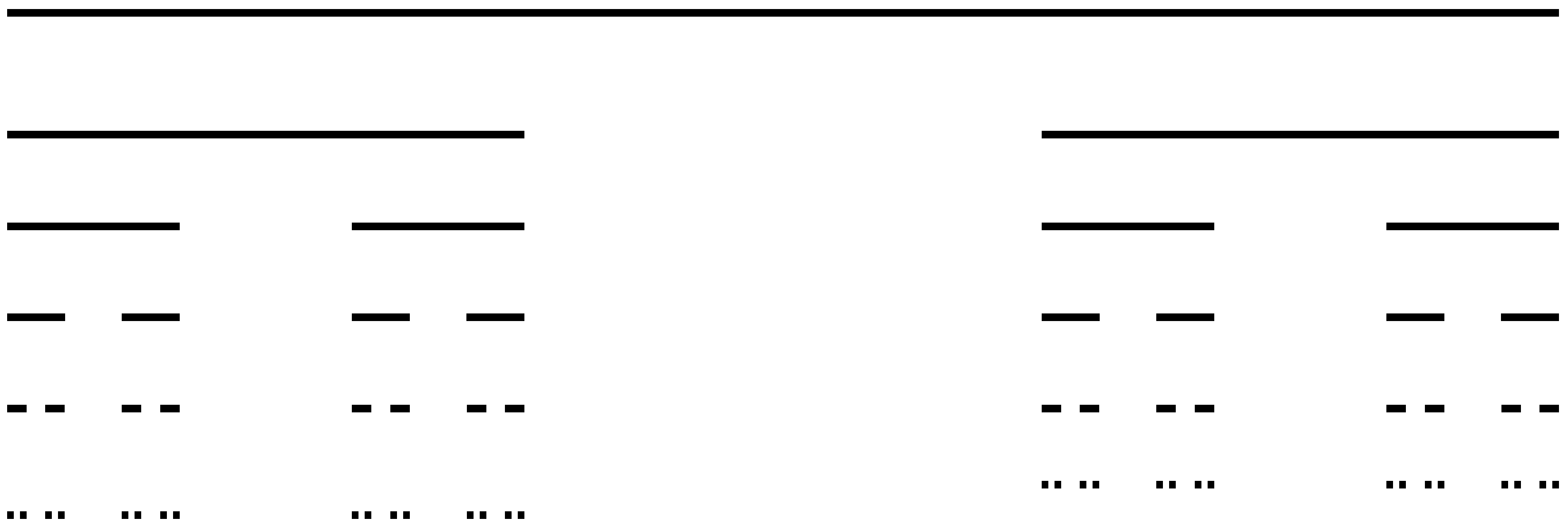
Jay Jacobson

Jay Jacobson

Curiosités mathématiques

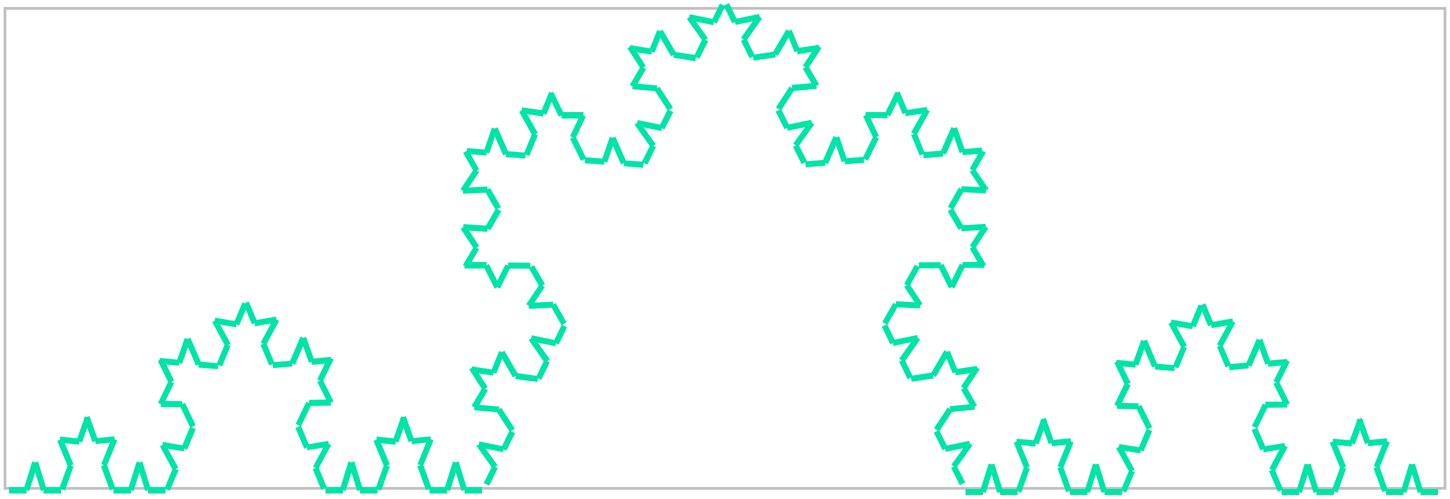
- Ensemble de Cantor
- Courbe de Von Koch

Ensemble de Cantor



Dimension topologique = 0 mais en bijection avec [0;1]

Courbe de Von Koch



Courbe bornée mais de longueur infinie

Notion d'ICE

- Tous ces objets ont un point commun
  - Si on regarde un détail de l'objet
    on retrouve la structure globale de l'objet
  - C'est ce que nous formaliserons sous la notion d'invariance par changement d'échelle (ICE)

Oui mais a quoi ça sert ?

- C’est joli
- C’est rigolo
- Structures qui se retrouvent dans la nature
  - Front de diffusion
  - Arbre
  - Montage
  - Alvéoles pulmonaires/ Vaisseaux sanguins
  - Cote de bord de mer
  - Surfaces rugueuses
- Cette approche apporte un nouvel éclairage sur ce type d’objet