Modélisation géométrique et synthèse d'images
Propriétés différentielles des courbes et des surfaces

Christian Gentil

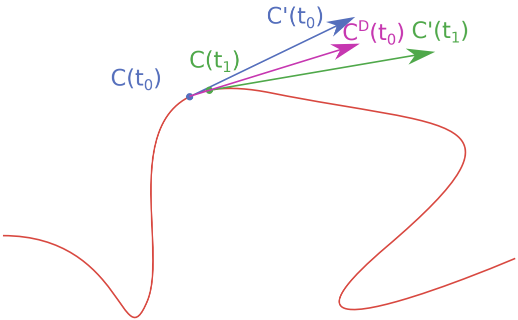
Master 2 IIA - Université de Bourgogne

MGSI : B-Rep - maillage 2020-2021

Pourquoi

- Pb de raccord $C1$, C_2, ..., C_n
- Expression de contraintes (surface posée sur un plan : plan = plan tangent)
- Géométrie : construction d'une surface par balayage
  $\Rightarrow$ repère de Frenet $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$.
- Visualisation : calcul d'illumination
  $\Rightarrow$ normal à la surface.
- Animation : déplacer un objet le long d'une courbe
  $\Rightarrow$ repère de Frenet

$C(t)$ une courbe. Le vecteur $C'(t)$ la vitesse de parcours de la courbe au point t



Il est tangent à la courbe.

Exemple d'une courbe cubique :

$$C(t) = (u^3 \ u^2 \ u \ 1) M_B P$$

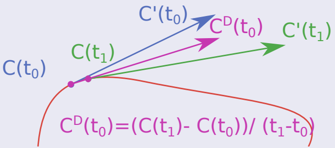
$$C'(t) = (3u^2 \ 2u \ 1 \ 0) M_B P$$

c'est tout!

Si formule trop compliquée alors on utilise

les différences finies

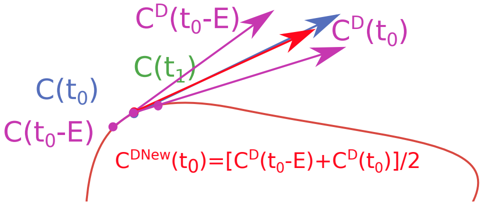
$\epsilon = valeurpetite$



$$C'(t) \approx C^D(t) = \frac{C(t+\epsilon) - C(t)}{\epsilon}$$

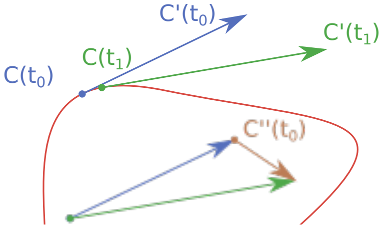
Les différences finies améliorées = moyenne de la dérivée avant et après (bien si la dérivée est continue) :

$$C'(t) \approx C^{DNew}(t) = \frac{C^D(t-\epsilon) + C^D(t)}{2} = \frac{C(t+\epsilon) - C(t-\epsilon)}{2\epsilon}$$

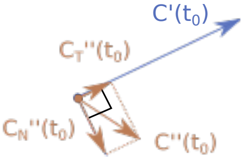


Dérivée seconde

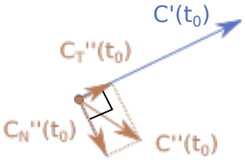
= variation de la dérivée
= variation de la vitesse = accélération = $C''(t)$



Se décompose en une accélération normale et une accélération tangentielle $C''(t) = C''_T(t) + C''_N(t)$



Dérivée seconde et courbure



- $C''_T(t)$ augmentation de la vitesse
- $C''_N(t)$ changement de direction de la vitesse
  ce qui définie la courbure

$$C''_N(t) = \frac{C'(t) \wedge C''(t)}{\| C'(t) \|}$$

($\wedge$ = produit vectoriel)

On montre que l'accélération s'exprime en fonction du rayon de courbure $\rho = 1/R$ par :

$$\vec{A} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

d'où

$$||C''_N(t)|| = \frac{||C'(t)||^2}{R}$$

$$\rho = \frac{1}{R} = \frac{||C'(t) \wedge C''(t)||}{\| C'(t) \|^3}$$

Calcul de la dérivée seconde

Exemple d'une courbe cubique :

$$C(t) = (u^3\ \ u^2\ \ u\ \ 1)M_B P$$

$$C'(t) = (3u^2\ \ 2u\ \ 1\ \ 0)M_B P$$

$$C''(t) = (6u\ \ 2\ \ 0\ \ 0)M_B P$$

Si formule trop compliquée alors on utilise différences finies des différences finies

les différences finies

$\epsilon = valeurpetite$

$C'(t) \approx C^{DD}(t) = \frac{C^D(t+\epsilon) - C^D(t)}{\epsilon}$

Abscisse curviligne

Longueur d'une courbe $C(t)$:

$$\phi(t) = \int_0^t \| C'(u) \| \, du$$

RQ $\phi'(t) = \| C'(t) \|$
paramétrage par l'abscisse curviligne $s = \phi(t)$ = abscisse curviligne
$C(s) = C(\phi^{-1}(t)$