

Subdivision et IFS

Modélisation Géométrique Itérative

Géraldine Morin* et Christian Gentil**

* VORTEX - IRIT-ENSEEIH, ** LE2I-Université de Bourgogne

18 novembre 2010

Journée des jeunes chercheurs DIJON

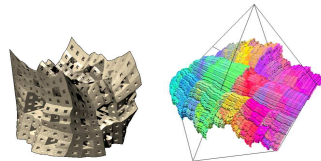
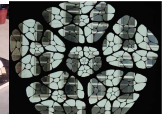
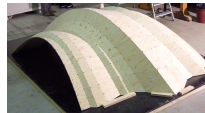
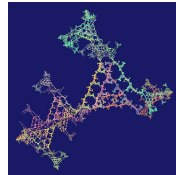
Plan

- 1 Introduction
- 2 Notions de base
 - IFS
 - Formes fractales à pôles
 - CIFS et représentation par automates
 - IFS et formes à pôles : Algorithme de Chaikin
- 3 BC-IFS et contrôle de la topologie des attracteurs
 - Etude du cas des courbes B-splines quadratiques
- 4 Etude des propriétés différentielles
 - Tangente à une courbe fractale
 - Cas des courbes construites par élimination des coins
- 5 Représentation par BCIFS des splines quadratiques non-uniformes

Introduction

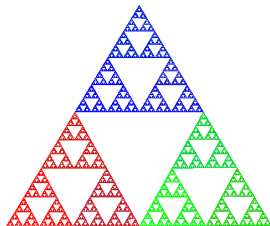
Nouvel univers de formes

- Intérêt esthétique
- Structures aux propriétés physiques particulières
 - Antennes de téléphones portables
 - Coque en bois
- Modélisation de caractéristiques non-conventionnelles
 - lacunarité,
 - rugosité



Le modèle itératif : Iterated Function System (IFS)

Traduction de la propriété d'auto-similarité (Huchinson88, Barnsley88)



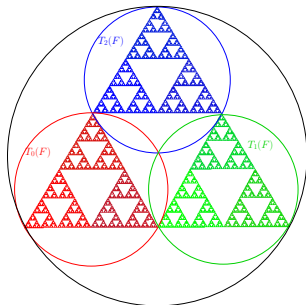
Formulation ensembliste

$$F = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(F)$$

- T_i opérateurs contractants :
 $\forall x, y, d(T_i(x), T_i(y)) \leq s d(x, y), (s < 1)$
- $\Rightarrow F$ existe et est unique.
- $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$ est appelé IFS,
 $\Sigma = \{0, \dots, N-1\}$

Le modèle itératif : Iterated Function System (IFS)

Traduction de la propriété d'auto-similarité (Huchinson88, Barnsley88)



Formulation ensembliste

$$F = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(F)$$

- T_i opérateurs contractants :
 $\forall x, y, d(T_i(x), T_i(y)) \leq s d(x, y), (s < 1)$
- $\Rightarrow F$ existe et est unique.
- $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$ est appelé IFS,
 $\Sigma = \{0, \dots, N-1\}$

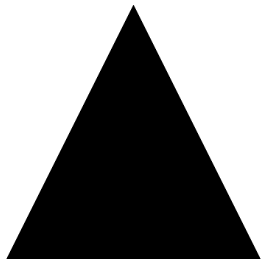
Le modèles itératifs : Opérateur de Hutchinson

- T_i = opérateurs contractants de (E, d) un espace métrique complet.
- $\mathcal{H}(E)$ = ensemble des compacts non-vides de E .
- Opérateur de Hutchinson :

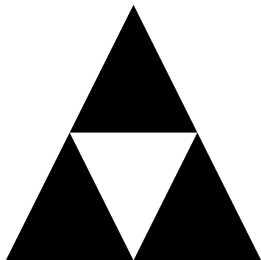
$$\begin{aligned} \mathbb{T} : \mathcal{H}(E) &\longrightarrow \mathcal{H}(E) \\ O \in \mathcal{H}(E) &\longmapsto T(O) = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(O) \end{aligned}$$

- \mathbb{T} opérateur contractant de $(\mathcal{H}(E), d_H)$,
- F unique point fixe de $\mathbb{T} : \mathbb{T}(F) = F$
- $\forall O \in \mathcal{H}(E), \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{T}^j(O) = F$
- F est appelé attracteur de \mathbb{T} , noté $A(\mathbb{T})$.

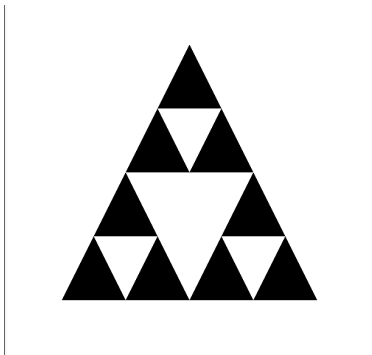
Le modèle itératif : IFS



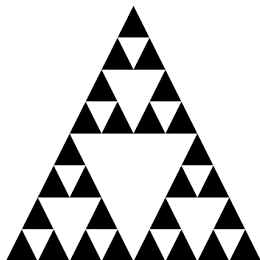
Le modèle itératif : IFS



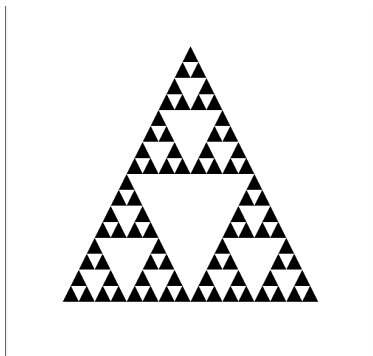
Le modèle itératif : IFS



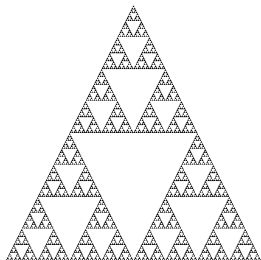
Le modèle itératif : IFS



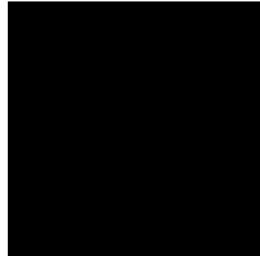
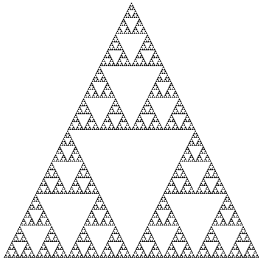
Le modèle itératif : IFS



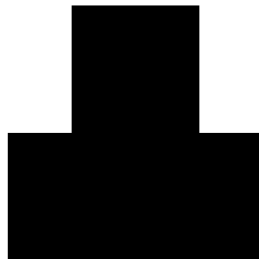
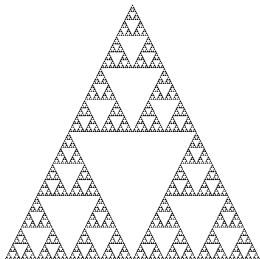
Le modèle itératif : IFS



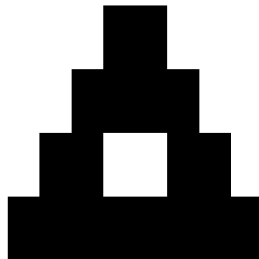
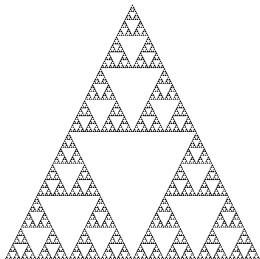
Le modèle itératif : IFS



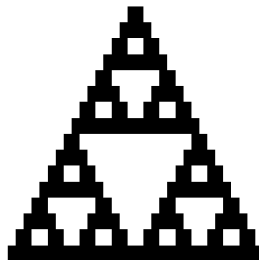
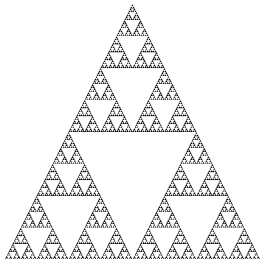
Le modèle itératif : IFS



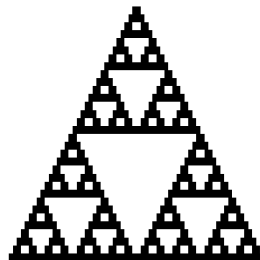
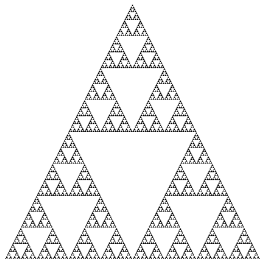
Le modèle itératif : IFS



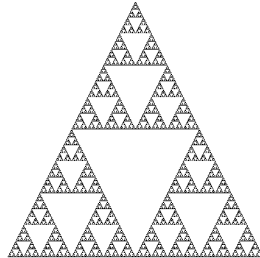
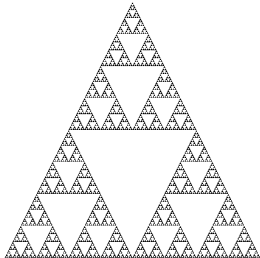
Le modèle itératif : IFS



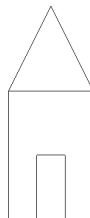
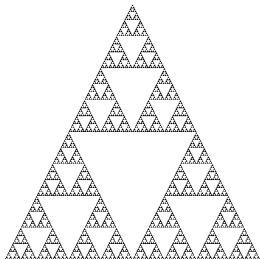
Le modèle itératif : IFS



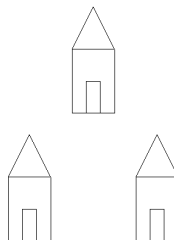
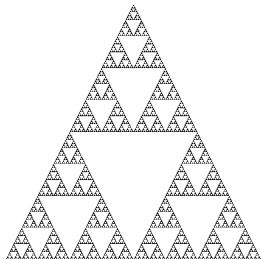
Le modèle itératif : IFS



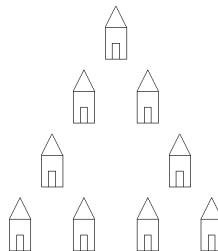
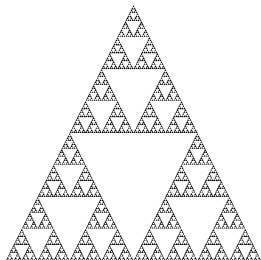
Le modèle itératif : IFS



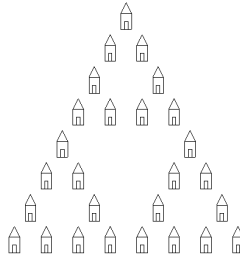
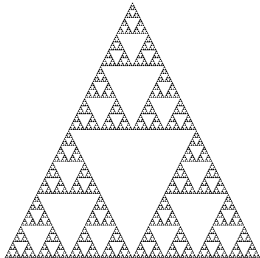
Le modèle itératif : IFS



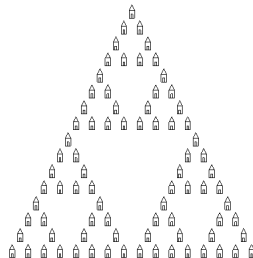
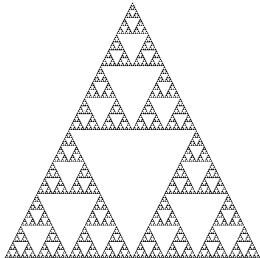
Le modèle itératif : IFS



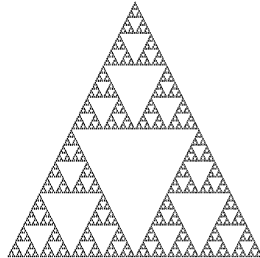
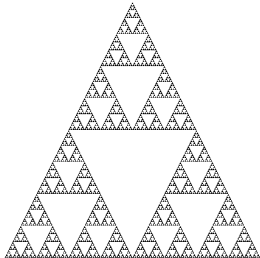
Le modèle itératif : IFS



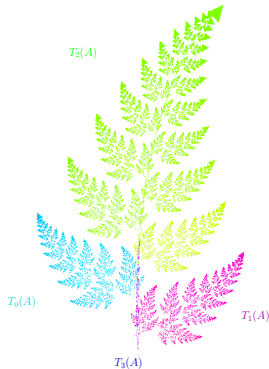
Le modèle itératif : IFS



Le modèle itératif : IFS

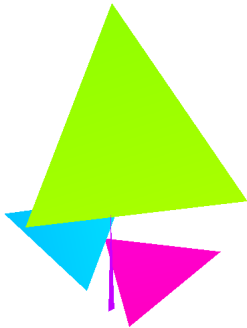


Le modèle itératif : IFS



- S'il existe $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$ tel que $F = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(F)$
- La forme F peut être codée par $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$
- \mathbb{T} est un processus de construction
- L'évaluation se fait par le calcul de $\mathbb{T}^j(O)$, avec $O \in \mathcal{H}(E)$ quelconque et $j \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Le modèle itératif : IFS



- S'il existe $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$ tel que $F = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(F)$
- La forme F peut être codée par $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$
- \mathbb{T} est un processus de construction
- L'évaluation se fait par le calcul de $\mathbb{T}^j(O)$, avec $O \in \mathcal{H}(E)$ quelconque et $j \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Le modèle itératif : IFS



- S'il existe $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$ tel que $F = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(F)$
- La forme F peut être codée par $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$
- \mathbb{T} est un processus de construction
- L'évaluation se fait par le calcul de $\mathbb{T}^j(O)$, avec $O \in \mathcal{H}(E)$ quelconque et $j \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Le modèle itératif : IFS



- S'il existe $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$ tel que $F = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(F)$
- La forme F peut être codée par $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$
- \mathbb{T} est un processus de construction
- L'évaluation se fait par le calcul de $\mathbb{T}^j(O)$, avec $O \in \mathcal{H}(E)$ quelconque et $j \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Le modèle itératif : IFS



- S'il existe $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$ tel que $F = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(F)$
- La forme F peut être codée par $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$
- \mathbb{T} est un processus de construction
- L'évaluation se fait par le calcul de $\mathbb{T}^j(O)$, avec $O \in \mathcal{H}(E)$ quelconque et $j \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Le modèle itératif : IFS



- S'il existe $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$ tel que $F = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(F)$
- La forme F peut être codée par $\mathbb{T} = \{T_i, i \in \Sigma\}$
- \mathbb{T} est un processus de construction
- L'évaluation se fait par le calcul de $\mathbb{T}^j(O)$, avec $O \in \mathcal{H}(E)$ quelconque et $j \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Autres exemples d'objets auto-similaires

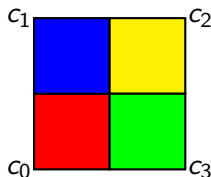
0  1

$$\mathbb{T} = \left\{ \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right\}$$

Autres exemples d'objets auto-similaires

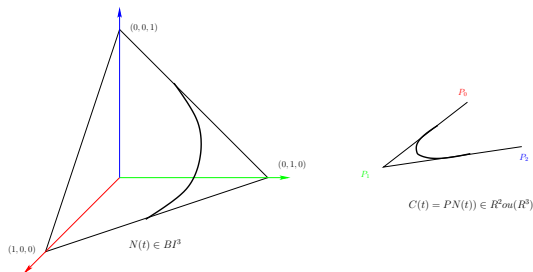


$$\mathbb{T} = \left\{ \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right\}$$



$$\mathbb{T} = \left\{ Ho\left(\frac{1}{2}, c_i\right), i = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

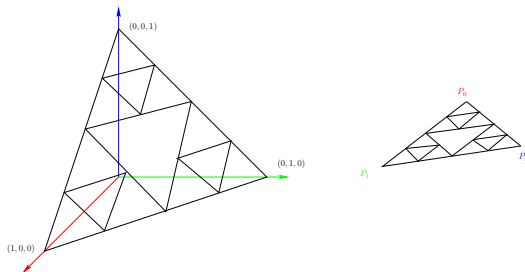
IFS et formes fractales à pôles



- $N(t) \in BI^n = \{\lambda | \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = 1\}$

- $C(t) = PN(t) = (P_0 \cdots P_{n-1}) \begin{pmatrix} N_0(t) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} N_i(t) P_i,$

IFS et formes fractales à pôles

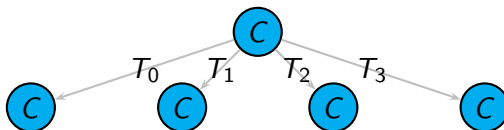
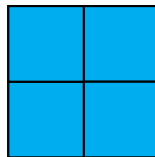
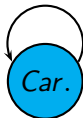


- si T_i tels que la somme des coeff. de chaque colonne = 1
alors $A(\mathbb{T}) \in BI^n = \{\lambda \mid \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = 1\}$
- $C = PA = \{\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_i, \lambda \in A\}$,

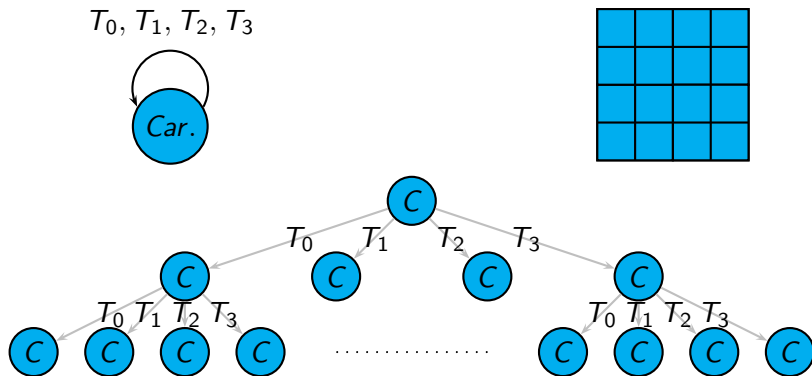
IFS et représentation par automates

 T_0, T_1, T_2, T_3 

IFS et représentation par automates

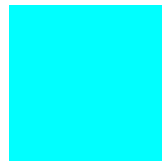
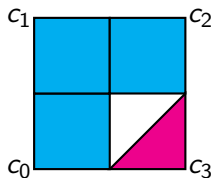
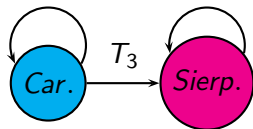
 T_0, T_1, T_2, T_3 

IFS et représentation par automates



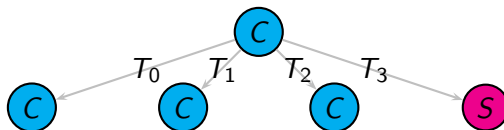
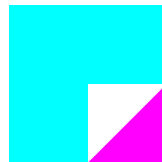
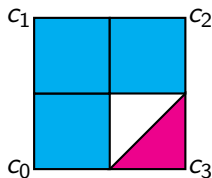
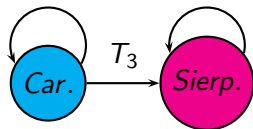
CIFS : On fait varier les règles

T_0, T_1, T_2 T_4, T_5, T_6



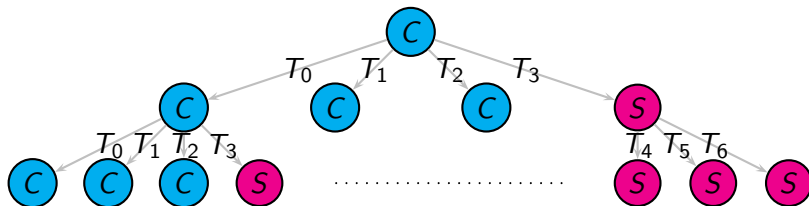
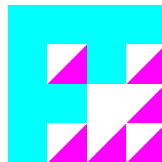
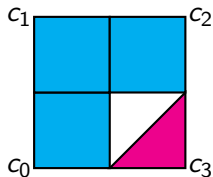
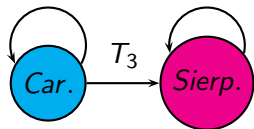
CIFS : On fait varier les règles

T_0, T_1, T_2 T_4, T_5, T_6

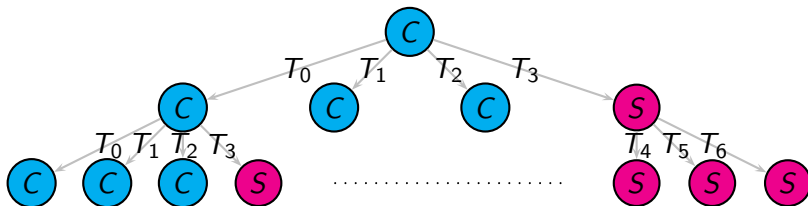
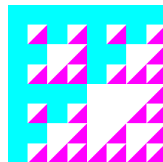
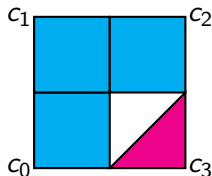
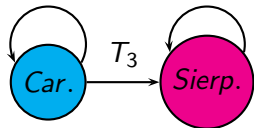


CIFS : On fait varier les règles

T_0, T_1, T_2 T_4, T_5, T_6

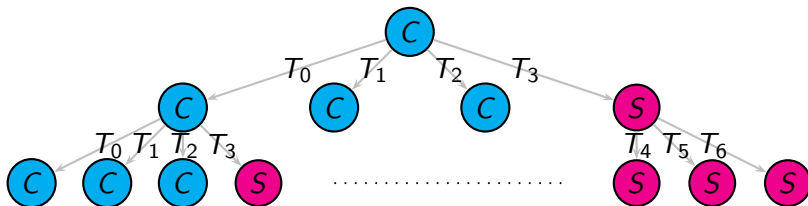
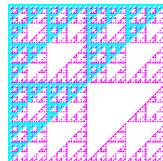
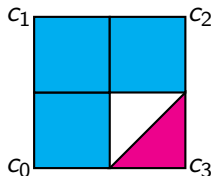
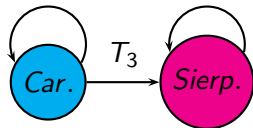


CIFS : On fait varier les règles

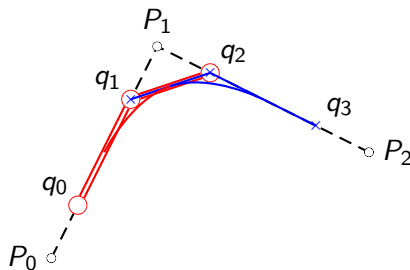
 T_0, T_1, T_2 T_4, T_5, T_6


CIFS : On fait varier les règles

T_0, T_1, T_2 T_4, T_5, T_6



IFS et formes à pôles : Algorithme de Chaikin



$$C(t) = PN(t) = \sum_{i=0}^{n-1} N_i(t) P_i$$

$$C([0, 1]) = \textcolor{red}{PT_0 N([0, 1])} \cup \textcolor{blue}{PT_1 N([0, 1])}$$

$$N([0, 1]) = \textcolor{red}{T_0 N([0, 1])} \cup \textcolor{blue}{T_1 N([0, 1])}$$

$$N([0, 1]) = A(\{T_0, T_1\})$$

$$N(t) \in B\mathbb{I}^3$$

T_0 et T_1 = opérateurs de $B\mathbb{I}^3 \Rightarrow$ matrices (3×3)

$$T_0 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Boundary Controlled Iterated Function System (BC-IFS)

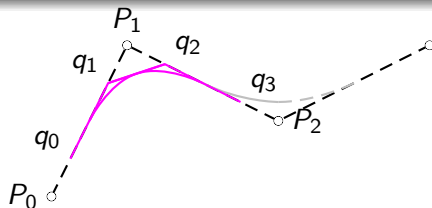
BC-IFS=

- la topologie de la BREP
- la géométrie des formes à pôles
- le calcul itératif des IFS

Intérêt :

- Contrôle de la topologie
- Contrôle de la géométrie
 - Globale (formes à pôles)
 - Locale : lisse, rugueux

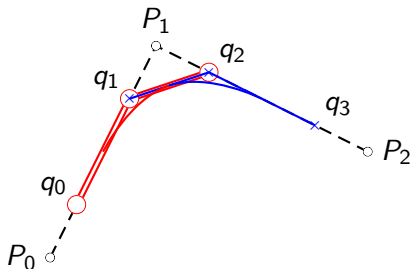
Exemple des B-splines quadratiques



- $P^{j+1} = P^j S$
- S matrice de subdivision

$$[P_0 P_1 P_2] \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = [q_0 q_1 q_2 q_3]$$

Algorithme de Chaikin



$$C(t) = PN(t)$$

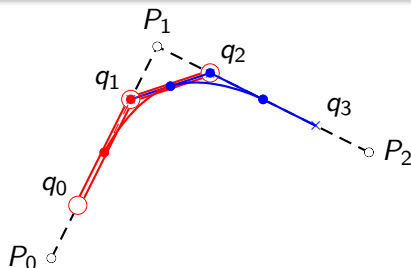
$$PN(t) = \textcolor{red}{PT_0}N([0, 1]) \cup \textcolor{blue}{PT_1}N([0, 1])$$

$$N([0, 1]) = \textcolor{red}{T_0}N([0, 1]) \cup \textcolor{blue}{T_1}N([0, 1])$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Propriétés des matrices de Chaikin : Extrémités



Calcul de l'extrémité $C(0)$

$$[P_0^{j+1} P_1^{j+1}] = [P_0^j P_1^j] T_s$$

avec $T_s = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

$$T_s^\infty \Rightarrow C(0)$$

$C(0)$ est l'attracteur de $\{T_s\}$

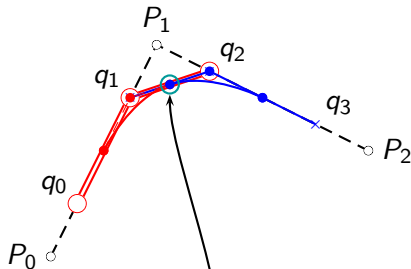
$C(1)$ est l'attracteur de $\{T_s\}$

T_s opérateur de l'espace
barycentrique de dimension 2

$T_s = \text{matrice } (2 \times 2)$

$$T_0 = \begin{pmatrix} \boxed{3/4} & \boxed{1/4} & 0 \\ \boxed{1/4} & \boxed{3/4} & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} T_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & \boxed{3/4} & \boxed{1/4} \\ 0 & \boxed{1/4} & \boxed{3/4} \end{pmatrix}$$

Propriétés des matrices de Chaikin : Condition d'adjacence



$$C([0, 1]) = C_0([0, 1]) \cup C_1([0, 1])$$

$$C_0(1) = C_1(0)$$

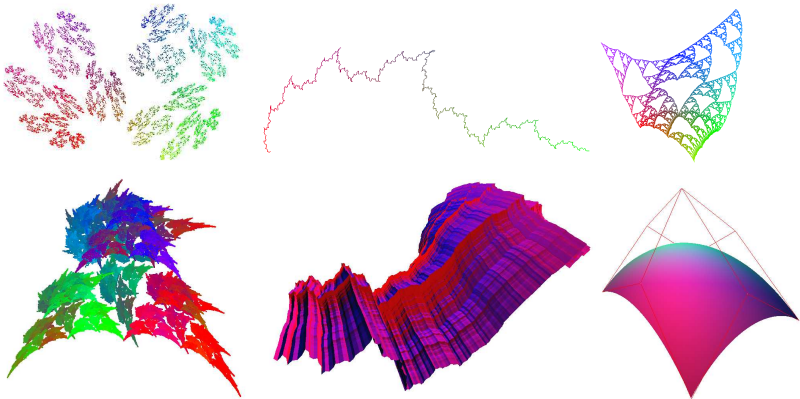
$$C_0(t) = PT_0 N(t) = [q_0 \quad q_1 \quad q_2] N(t)$$

$$C_1(t) = PT_1 N(t) = [q_1 \quad q_2 \quad q_3] N(t)$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

BC-IFS : Introduction

Si T_0 et T_1 quelconques, on peut obtenir tout type de structures topologiques:



BC-IFS : Introduction

$$\text{BC-IFS} = \text{C-IFS} + \text{Formes à Pôles} + \text{BREP}$$

- Formes à Pôles = IFS dans un espace barycentrique
- BREP = opérateurs d'incidences
 - définition de cellules
 - définition de relations d'adjacence
 - définition de relations d'incidence

BC-IFS

Attracteur = structure BREP

A chaque cellule on associe:

- un état
- une dimension (nb de points de contrôle)
- un IFS

Exemple : Arête-Sommet Arête

- état = "a"
- dimension = 3 (3 points de contrôle)
- $\text{IFS} = \{T_0, T_1\}$

Sommet

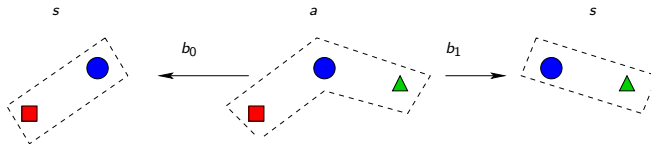
- état = "s"
- dimension = 2 (2 points de contrôle)
- $\text{IFS} = \{T_s\}$

BC-IFS : opérateurs d'incidence

Opérateurs de bord d'une cellule :

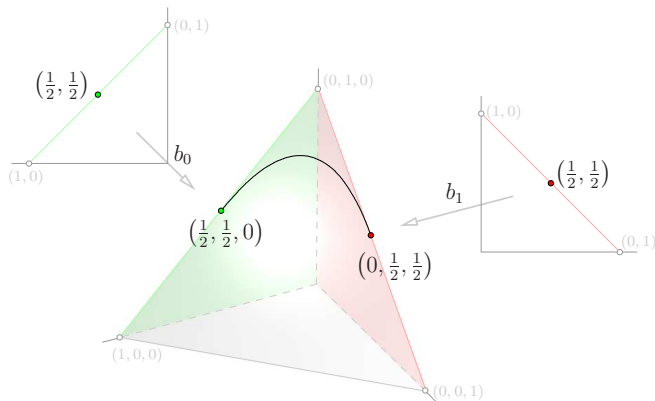
- définissent quelles cellules bordent celle-ci
- définissent de quels points de contrôle elle dépend
- définissent l'imbrication des sous-espaces barycentriques et des sous attracteurs.

Exemple : une arête est bordée par 2 sommets:

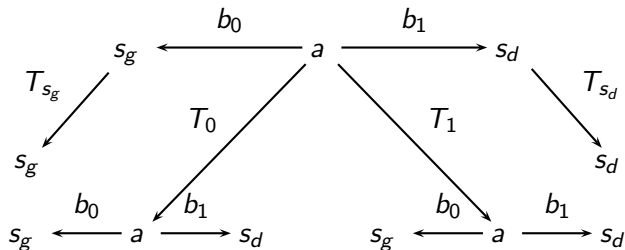
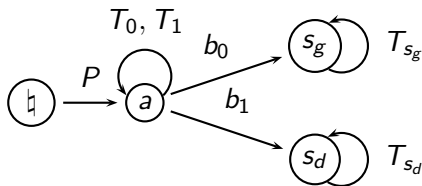


$$b_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

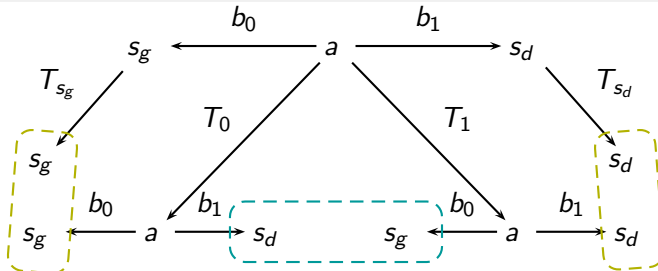
BC-IFS : opérateurs d'incidence



BC-IFS : Automate



Relations d'incidence et d'adjacence



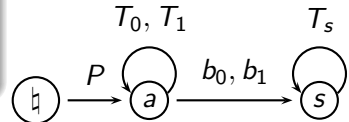
Equations d'adjacence:

$$s_g = s_d \Rightarrow T_{s_g} = T_{s_d} = T_s$$

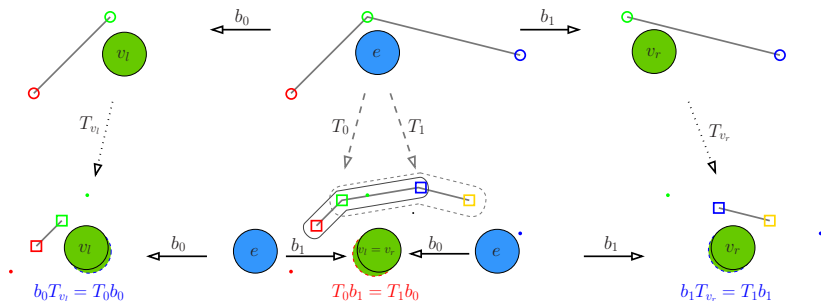
$$T_0 b_1 = T_1 b_0$$

Equations d'incidence :

$$b_0 T_s = T_0 b_0, b_1 T_s = T_1 b_1$$



Relations d'incidence et d'adjacence



Résolution des contraintes

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & e_0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 \\ e_0 & f_0 \\ h_0 & i_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & e_1 \\ g_1 & h_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ d_s & e_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & e_0 & f_0 \\ g_0 & h_0 & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_s & b_s \\ d_s & e_s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ d_0 & e_0 \\ g_0 & h_0 \end{pmatrix}$$

BC-IFS : Structure des matrices

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1-a & b & 0 \\ a & 1-b & 1-a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad T_1 = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 1-b & 1-a & b \\ 0 & a & 1-b \end{pmatrix}$$

Il ne reste que 2 degrés de liberté

Structure des matrices : Cas général d'une courbe

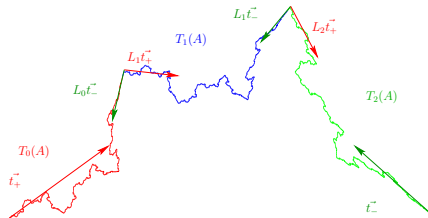
$$T_0 = \begin{pmatrix} (p \times p) & \cdots & \\ 0 & \cdots & ((n-p) \times p) \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} (n \times p) & \cdots & 0 \\ & & (p \times p) \end{pmatrix}$$

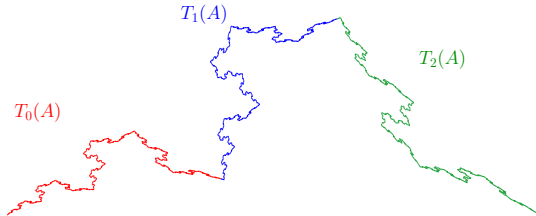
Pour n points de contrôle et des sommets de dimension p

Rappel sur les tangentes pour une courbe définie par IFS

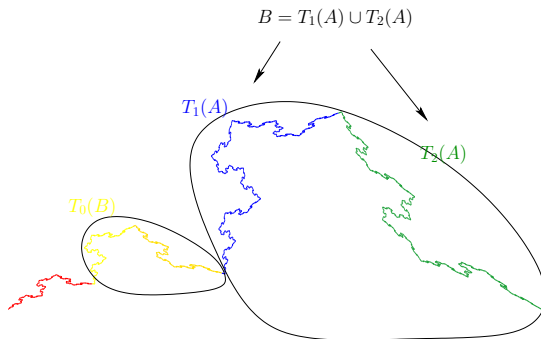
- On regarde les demi-tangentes aux extrémités de la courbe
- On déduit les demi-tangentes aux autres points par auto-similarité



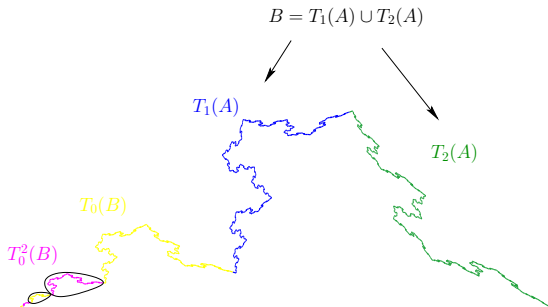
Rappel sur les demi-tangentes aux extrémités



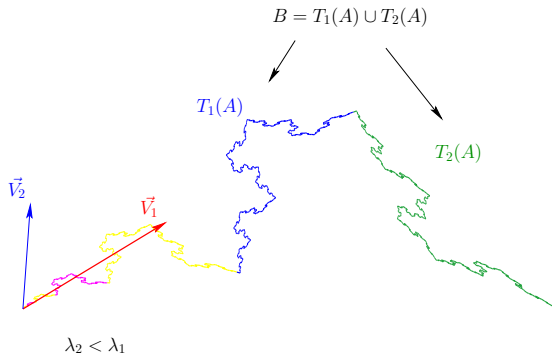
Rappel sur les demi-tangentes aux extrémités



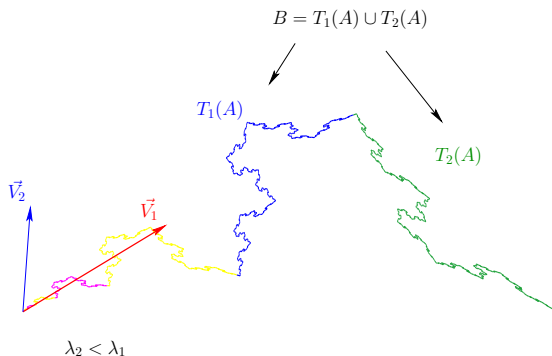
Rappel sur les demi-tangentes aux extrémités



Rappel sur les demi-tangentes aux extrémités



Rappel sur les demi-tangentes aux extrémités



Elles sont données par les vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres de L_0 et L_{N-1} . (L_i = partie linéaire de T_i)

Cas d'opérateurs définies dans BI^n

- Il y a toujours une valeur propre $= 1$.
- Le vecteur propre associé est le point fixe de la transformation.
- le vecteur propre associé à la valeur propre sous-dominante λ_{i_0} détermine la demi-tangente

Conditions nécessaires

$$|\lambda_i| < \lambda_{i_0} < 1, \forall i \neq i_0$$

Cas des courbes définies dans BI^n

Vecteur tangent = vecteur propre associé à la valeur propre sous dominante.

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1-a & b & 0 \\ a & 1-b & 1-a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad T_1 = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 1-b & 1-a & b \\ 0 & a & 1-b \end{pmatrix}$$

Rq : les valeurs propres de T_s sont valeurs propres de T_0 et T_1

Etude des valeurs et vecteurs propres

Valeurs propres de T_0

$$(1, 1 - a - b, a)$$

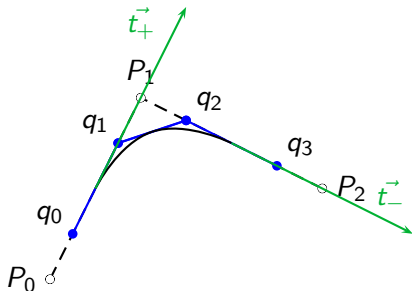
Valeurs propres de T_1

$$(1, 1 - a - b, b)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} \\ \frac{a}{a+b} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ 1-2a \\ 2a+b-1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{a+b} \\ \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2b-1 \\ 1-2b \\ -a \end{pmatrix}$$

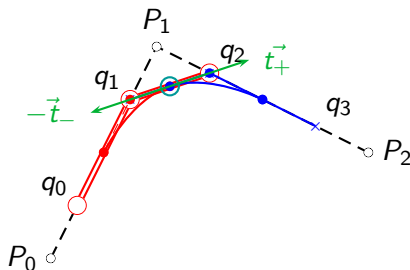
Valeur propre = 1 \rightarrow vecteur propre = Point fixe à gauche à droite
 valeur propre sous-dominante \rightarrow vecteur propre = vecteur tangent

Tangentes aux extrémités



- Si $1 - a - b \geq a$
 $\vec{t}_+ = \overrightarrow{P_0 P_1}$
 sinon dépend des 3 points de contrôle
- Si $1 - a - b \geq b$
 $\vec{t}_- = \overrightarrow{P_1 P_2}$
 sinon dépend des 3 points de contrôle

Condition de différentiabilité au point de raccord



$$C_0(t) = PT_0 N(t) = [q_0 \boxed{q_1 q_2}] N(t)$$

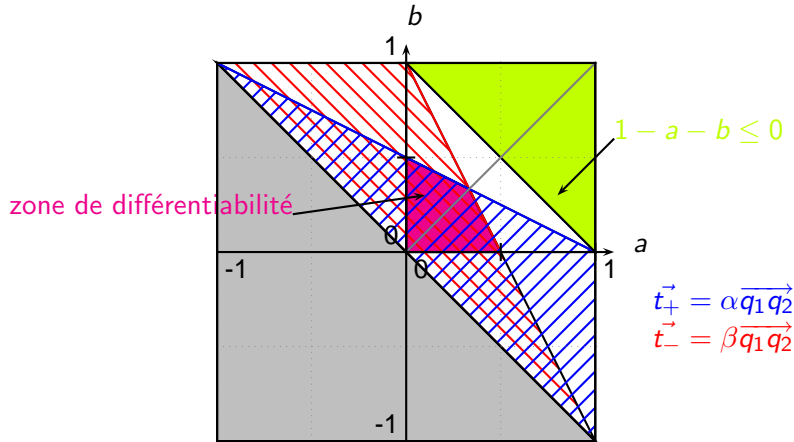
$$C_1(t) = PT_1 N(t) = [\boxed{q_1 q_2} q_3] N(t)$$

Condition nécessaire

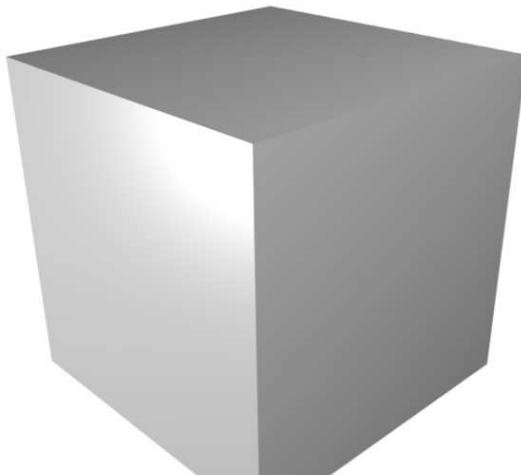
\vec{t}_- en $C_0(1) = \vec{t}_+$ en $C_1(0)$
ssi $1 - a - b$ est la valeur propre
sous-dominante de T_0 et T_1

$$\begin{cases} 1 - 2a - b \geq 0 \\ 1 - a - 2b \geq 0 \end{cases}$$

Condition de différentiabilité au point de raccord



Exemple d'application aux surfaces ?



Exemple d'application aux surfaces ?



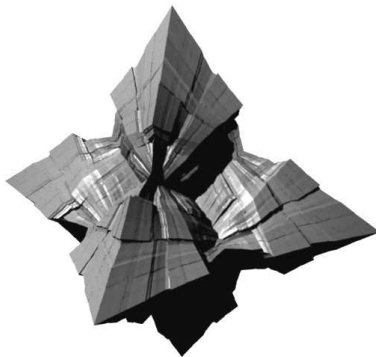
Exemple d'application aux surfaces ?



Exemple d'application aux surfaces ?



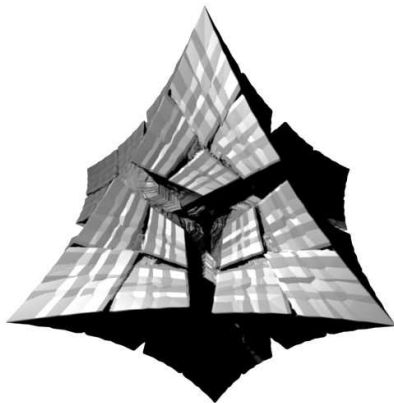
Exemple d'application aux surfaces ?



Exemple d'application aux surfaces ?



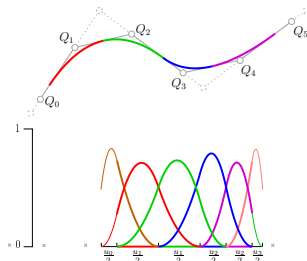
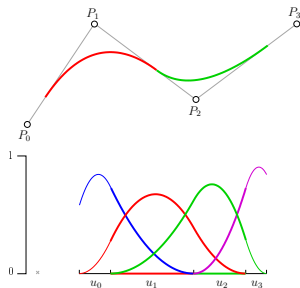
Exemple d'application aux surfaces ?



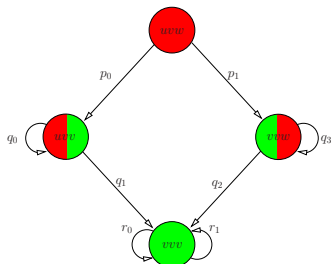
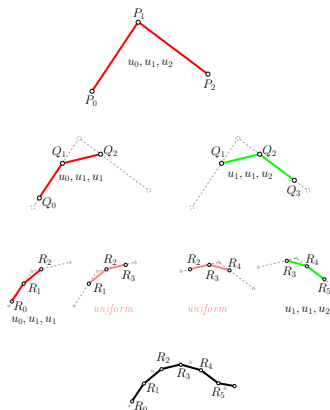
Splines non-uniformes : Algorithme d'insertion des noeuds

$$Q_{2i} = \frac{(u_i + 2u_{i+1})P_i + u_i P_{i+1}}{2(u_i + u_{i+1})} \quad (1)$$

$$Q_{2i+1} = \frac{u_{i+1}P_i + (2u_i + u_{i+1})P_{i+1}}{2(u_i + u_{i+1})} \quad (2)$$



Splines non-uniforme : Automate du BCIFS



Splines non-uniformes : Les matrices de subdivision

$$p_0(u, v, w) = \begin{bmatrix} 1 - a(u, v) & b(u, v) & 0 \\ a(u, v) & 1 - b(u, v) & 1 - a(v, w) \\ 0 & 0 & a(v, w) \end{bmatrix}$$

$$p_1(u, v, w) = \begin{bmatrix} b(u, v) & 0 & 0 \\ 1 - b(u, v) & 1 - a(v, w) & b(v, w) \\ 0 & a(v, w) & 1 - b(v, w) \end{bmatrix}$$

$$q_0(u, v, \cdot) = \begin{bmatrix} 1 - a(u, v) & b(u, v) & 0 \\ a(u, v) & 1 - b(u, v) & 1 - c \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$q_2(\cdot, v, w) = \begin{bmatrix} 1 - c & d & 0 \\ c & 1 - d & 1 - a(v, w) \\ 0 & 0 & a(v, w) \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} 1 - c & d & 0 \\ c & 1 - d & 1 - c \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$r_1 = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 1 - d & 1 - c & d \\ 0 & c & 1 - d \end{bmatrix}$$

$$q_1(u, v, \cdot) = \begin{bmatrix} b(u, v) & 0 & 0 \\ 1 - b(u, v) & 1 - c & d \\ 0 & c & 1 - d \end{bmatrix}$$

$$q_3(\cdot, v, w) = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 1 - d & 1 - a(v, w) & b(v, w) \\ 0 & a(v, w) & 1 - b(v, w) \end{bmatrix}$$

Conclusion

C-IFS= outils de description d'un processus de subdivision

- Représentation à l'aide d'un automate
- Implémentation simple
- Une seule implémentation pour les courbes, surfaces et fractals.

Conclusion

BC-IFS = BREP + Formes à Pôles + C-IFS

- Contrôle de la topologie :
 - Relations d'incidences et conditions d'adjacences
 - Equations matricielles
 - Contraintes sur les structures des matrices
- Contrôle de la géométrie:
 - Forme globale à l'aide de points de contrôle
 - Forme locale, à l'aide des degrés de liberté restants
 - Différentiabilité, à l'aide des vecteurs propres et valeurs