Traitement Numérique du Signal

Digital Signal Processing

Dr. Moustapha MBAYE

Le traitement (numérique) du signal consiste en un ensemble de théorie et de méthodes permettant de créer, d'analyser, de modifier, de classifier et de reconnaitre les signaux

Il s'agit d'une science appliquée, puisque le signal signal numérique n'existe pas pour ainsi dire dans la nature. Il est une invention de l'homme qui a pour but principal de permettre une manipulation aisée des signaux analogique à l'aide de calculateurs numériques

Applications

Ses applications sont nombreuses dans des domaines aussi variés que les télécommunications

- le traitement du son
- le traitement de la parole
- le radar, le sonar
- l'étude des vibration sismiques,
- l'ingénierie biomédicale,
- l'imagerie etc.

En marche Vers l'embarqué

On assiste aujourd'hui à une révolution plus silencieuse, mais plus importante pour l'essor du traitement de signal : celle des systèmes embarqué (embedded systèmes).

Les technologie soujacente au traitement numérique des signaux (CAN, CNA, DSP) sont en effet devenues tellement bon marché que les objets qui nous entourent en sont progressivement équipées

Échantillonnage

- La plupart des signaux à support énergique d'origine physique sont de type analogique (amplitude à temps continu).
- Si l'on veut transmettre ces information sous forme numérique, ou si l'on désire les traiter avec des systèmes numérique, il faut convertir au préalable ces signaux par une suite de nombre codés sous forme binaire.
- Cette représentation binaire d'un signal analogique est réalisée à travers la conversion analogique numérique. Celle-ci s'appuie sur l'échantillonnage et la quantification.

Le concept d'échantillonnage est une opération transformant un signal à temps continu en un signal à temps discret. Il se fait par un prélèvement régulier de valeurs $s(nT_e)$ sur le signal analogique toutes les périodes T_e,

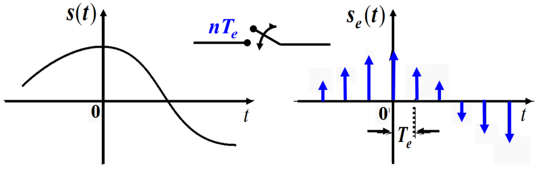
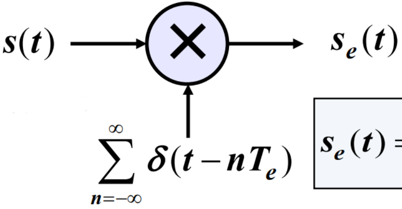


Fig. 4.1a,b

- T_e est la période d'échantillonnage
- $f_e = \dfrac{1}{T_e}$ est la fréquence d'échantillonnage

- Le modèle général d'un échantillonneur idéal est



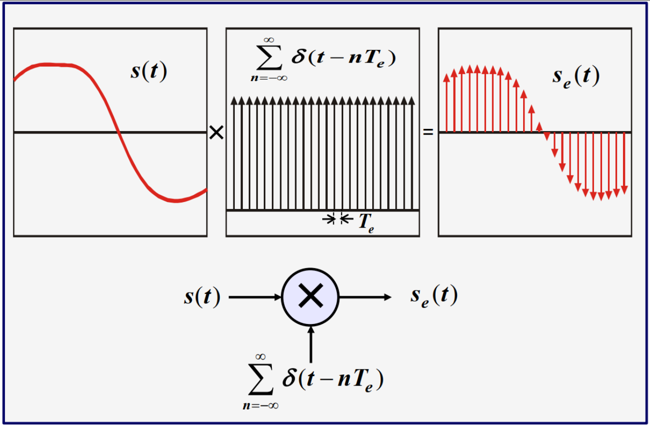
$$\boxed{s_e(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)}$$

- Avec la propriété de localisation [1]

$$\boxed{s_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e)}$$

Les impulsions de Dirac aux moments nT_e sont évaluées par l'amplitude du signal $s(t)$

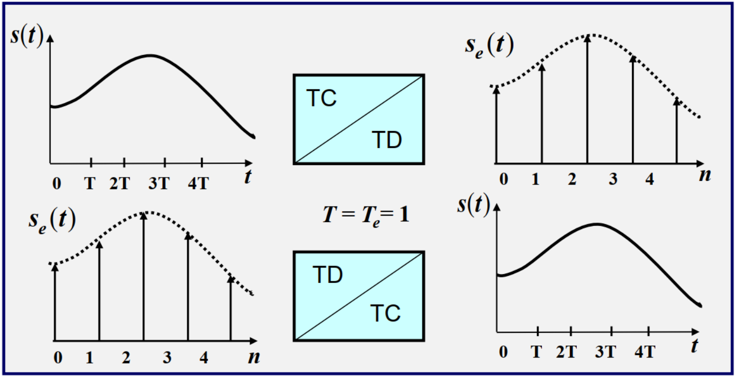
1. $\left[s(t) \cdot \delta(t - T)\right] = s(T) \cdot \delta(t - T)$



- Le signal analogique doit être reconstitué à partir des échantillons.
- Les théorème sur l'échantillonnage doivent préciser les conditions (sur f_e) à respecter pour que cette reconstitution puisse se faire

Il est possible de reconstituer le signal $s(t)$ à partir de ses échantillons $s(nT_e)$ si la fréquence d'échantillonnage f_e est au minimum égale au double de fréquence maximale f_{max} de $s(t)$

$$f_e \geq 2f_{max} \Leftrightarrow T_e \leq \frac{1}{2f_{max}}$$



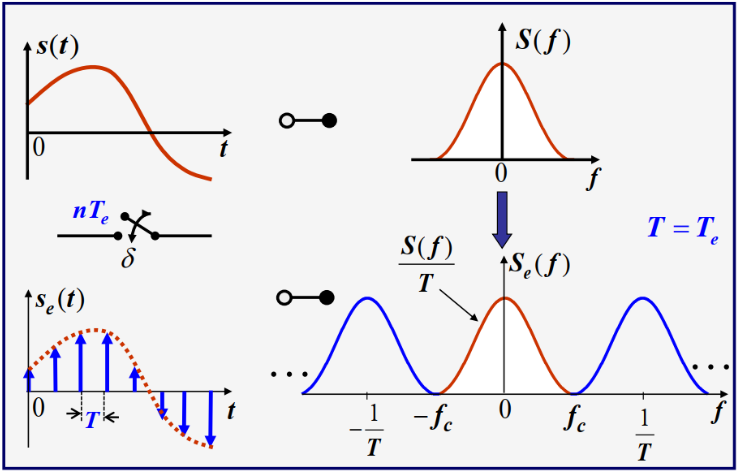
Le spectre $S_e(f)$ de $s_e(t)$ est déterminé avec la transformée de Fourier

$$s_e(t) = s(t) \cdot \frac{1}{|T|} \text{III}\left(\frac{t}{T}\right) \qquad T = T_e$$

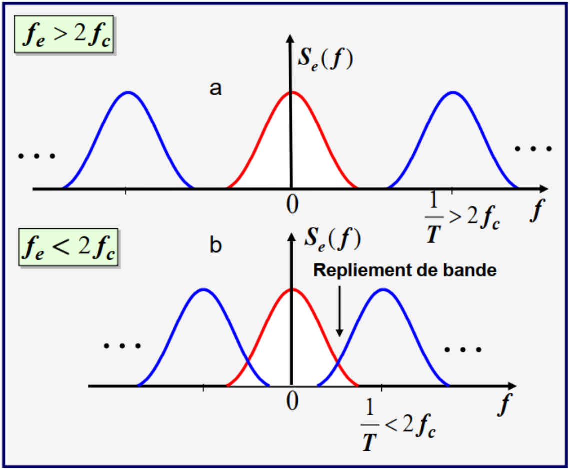
$$S_e(f) = S(f) * \text{III}(Tf) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{n}{T}\right)^{*}$$

- $S_e(f)$ est une série de infinie de $S(f)$ décalée de valeurs multiple de $\dfrac{1}{T}$ et multiplié par un facteur $\dfrac{1}{T}$
- $f_e = \dfrac{1}{T_e}$ est la fréquence d'échantillonnage

Échantillonnage dans le domaine fréquentiel



Si la condition de Shannon n'est pas satisfaite ($fe < 2f_{max}$) les répétitions de $S(f)$ se chevauchent l'une de l'autre. Ce phénomène est connu sous le nom de **repliement de bande**



Signaux déterministes à temps discret

Les signaux discrets sont souvent issus de l'échantillonnage à la fréquence f_e de signaux temporels $s(t)$ analogique Par contre certains signaux discret le sont par nature. Par exemple un texte écrit avec un alphabet $\{a \cdots z\}$peut être considéré comme un signal à temps discret.

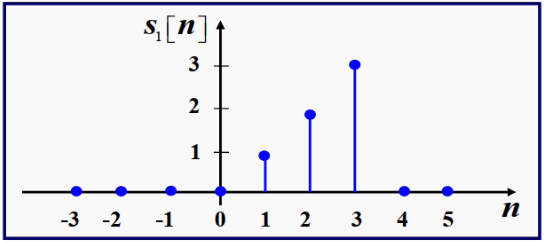
Les signaux numériques sont mathématiquement représentés par des séquences de nombres notées $s[n]$ pour $-\infty < n < +\infty$. Dans le cas où la séquence provient d'un échantillonnage périodique d'un signal $s(t)$, on aura

$$s[n] = s[nT_e] = s[nT]$$

- $s[n]$ n'est défini que pour n entier
- Pour n non entier $s[n]$ n'est simplement pas défini

Exemple 1

$$s_1[n] = \begin{cases} 0 & pour \quad n < 0 \;\; et \;\; n > 3 \\ n & pour \quad 0 \leq n \leq 3 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

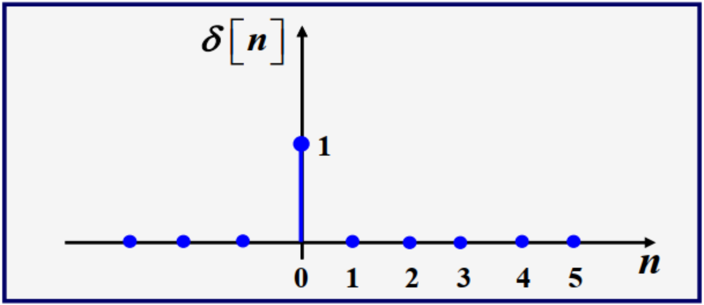


Ce signal discret est de durée finie

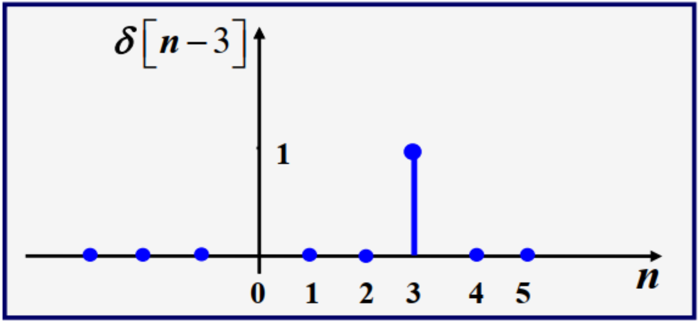
Impulsion de Dirac

Elle peut se servir à décrire n'importe quelle autre séquence discrète

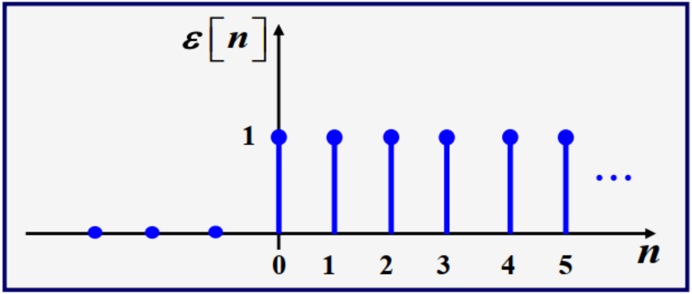
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n \neq 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$



$$\delta[n-i] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = i \\ 0 & \text{pour } n \neq i \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

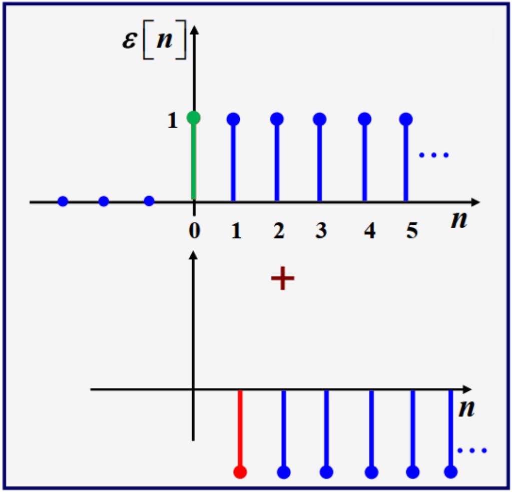


$$\varepsilon[n] = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad n < 0 \\ 1 & \text{pour} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

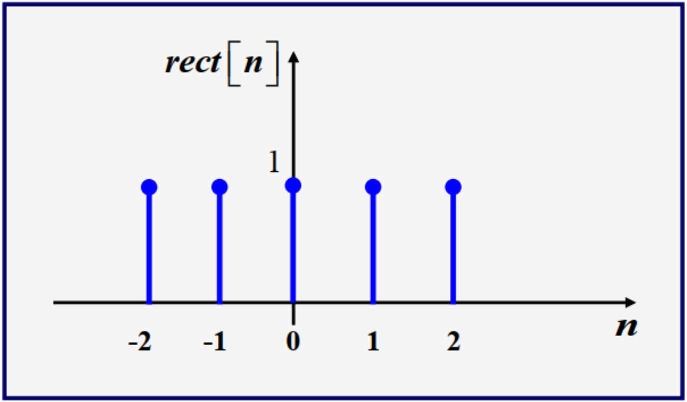


Dirac avec des sauts d'impulsion

$$\boxed{\delta[n] = \varepsilon[n] - \varepsilon[n-1]}$$

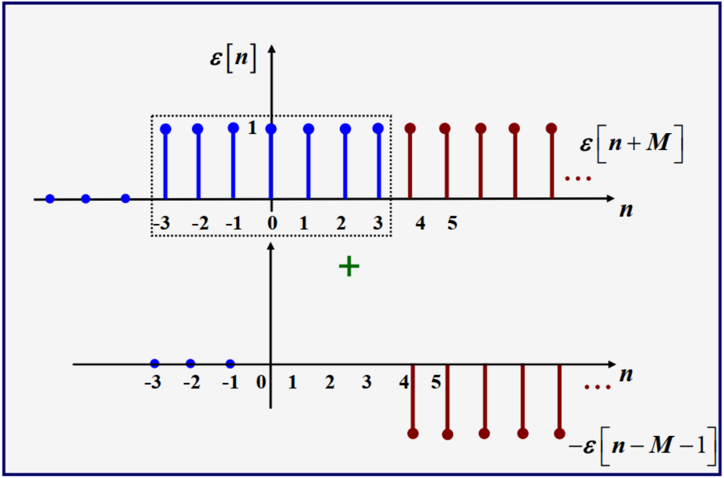


$$\boxed{rect[n] = \varepsilon[n+M] - \varepsilon[n-M-1]}$$



Fonction rectangle discrète

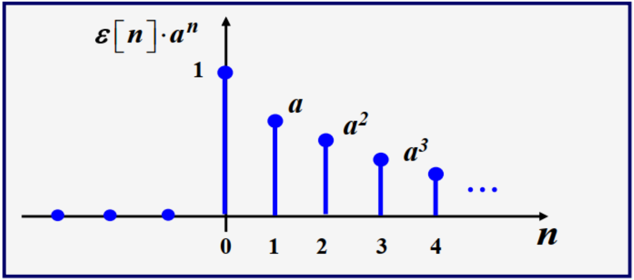
$$\boxed{rect[n] = \varepsilon[n+M] - \varepsilon[n-M-1]}$$



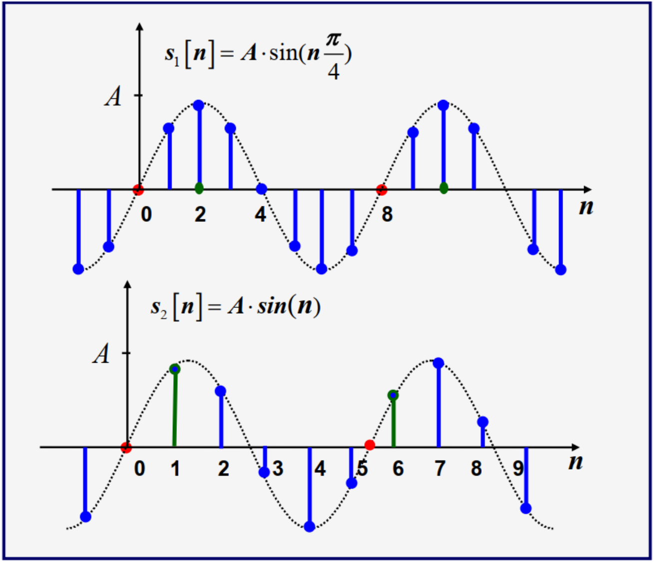
Fonction exponentielle discrète

$$s[n] = \varepsilon[n]\cdot a^n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n < 0 \\ a^n & \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

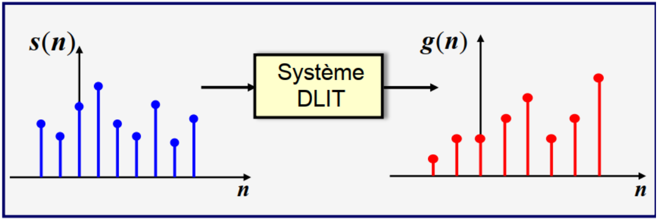
Dans le cas où $0 < a < 1$, on obtient une exponentielle décroissante alors que pour $|a| > 1$, l'amplitude de la séquence ne cesse d'augmenter avec n.



Fonction sinusoïdale discrète



Le système discret transforme un ou plusieurs signaux d'entrée discrets $s(n)$ en un ou plusieurs signaux de sorties $g(n)$ selon certaines règles.



Études des propriétés de systèmes

Linéarité

$$Tr\left\{\sum_i a_i s_i(n)\right\} = \sum_i a_i \cdot Tr\left\{s_i(n)\right\} = \sum_i a_i \cdot g_i(n)$$

Invariance dans le temps

Un décalage du signal d'entrée provoque le même décalage à la sortie

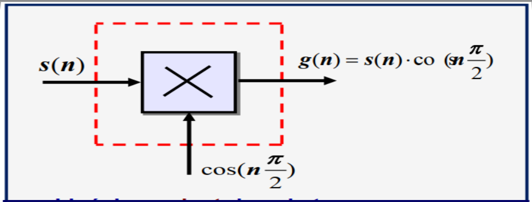
$$Tr\left\{s(n-m)\right\} = g(n-m)$$

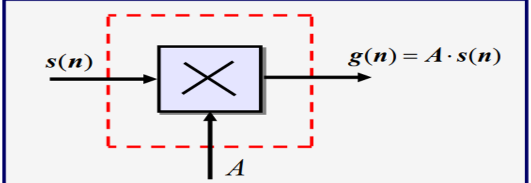
Stabilité

Un système discret est stable si tout signal d'entrée arbitraire $s(n)$ d'amplitude finite, $|s(n)|_{max} \leqslant A$ produit en sortie un signal $g(n)$ d'amplitude finie $|g(n)|_{max} \leqslant B$

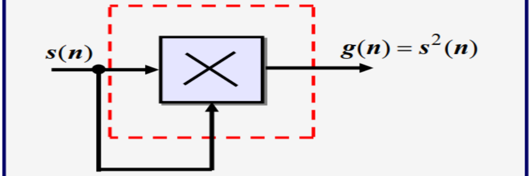
Causalité

Un système discret est causal si tout signal de sortie à l'instant $n = n_0$ est indépendant des signaux d'entrée aux instants





Linéaire invariant dans le temps



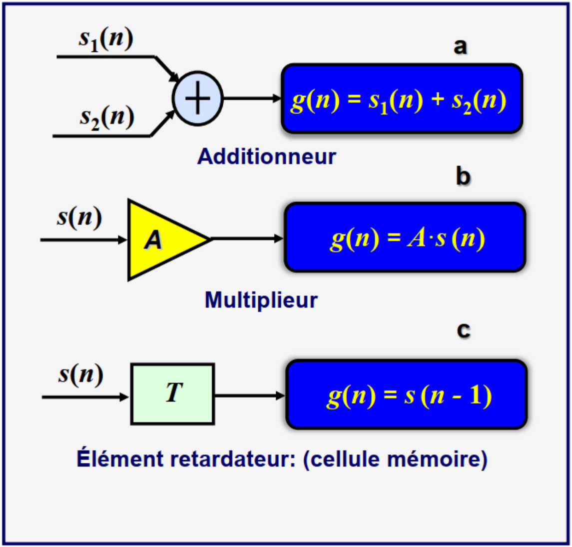
Non linéaire invariant dans le temps

Composant d'un système DLIT

Les système DLIT possèdent un certain nombre de propriétés particulièrement attrayantes. En premier lieu, tous les systèmes de ce type physiquement réalisable sont composé à partir des trois éléments de base suivants

- **L'Additionneur**, dans lequel des signaux d'entrée sont additionnés pour donner un signal de sortie $g(n) = s_1(n) + s_2(n)$.
- **Le multiplieur**, dans lequel un signal est multiplié par une constante $g(n) = A.s(n)$
- **La cellule mémoire**, ou élément retardataire, dans laquelle un signal d'entrée $s(n)$ est retardé d'un intervalle : $g(n) = s(n-1)$ d'échantillonnage.

Avec ces éléments, on peut fabriquer par exemple un **soustracteur** en combinant un addition et en multiplieur avec un facteur $A = -1$.


$s_1(n)$
a
$s_2(n)$
$g(n) = s_1(n) + s_2(n)$
Additionneur
b
$s(n)$
A
$g(n) = A \cdot s(n)$
Multiplieur
c
$s(n)$
T
$g(n) = s(n - 1)$
Élément retardateur: (cellule mémoire)

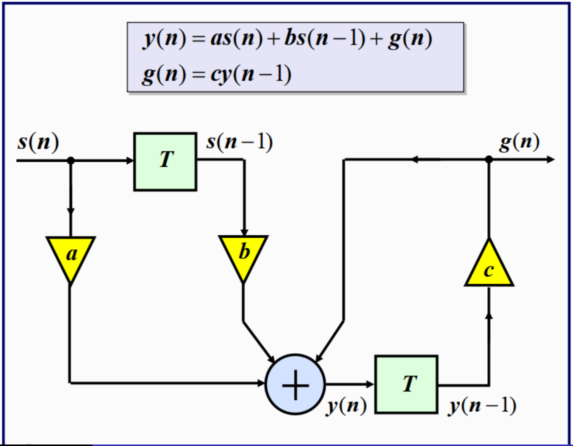
Description d'un système DLIT par des équations aux différences

La réponse impulsionnelle $h(n)$ est une description du système dans l'espace des temps. Si on applique la transformée de fourier pour les signaux discrets on obtient la réponse fréquentielle $H(f)$, qui constitue une description dans l'espace des fréquences.

Il est aussi possible de décrire les système DLIT (dans l'espace des temps) avec les équations aux différences.

Il est aussi possible de décrire les système DLIT (dans l'espace des temps) avec les équations aux différences.

Exemple :



Description d'un système DLIT par des équations aux différences

Les équations de ce type dans lesquelles la valeur du signal discret à un instant particulier (ici $y(n)$, $g(n)$) s'expriment en fonction de valeur de signaux à des instants antérieurs (ici $s(n-1)$, $y(n-1)$) s'appelle **équation aux différences**

On peut combiner ces deux équations pour obtenir une équation aux différences unique (appelée récurrence linéaire) qui contient uniquement des versions retardées du signal d'entrée $s(n)$ des versions retardées du signal de sortie $g(n)$

$$\boxed{g(n) = acs(n-1) + bcs(n-2) + cg(n-1)}$$

Prenons comme exemple le Dirac comme signal d'entrée.

- $s(n) = \delta(n)$ où $\delta(n) = 0$ pour $n \neq 0$
- $g(n) = 0$ pour $n < 0$

$$\boxed{g(n) = acs(n-1) + bcs(n-2) + cg(n-1)}$$

$$
\begin{aligned}
g(0) &= ac\cancel{s(-1)} + bc\cancel{s(-2)} + c\cancel{g(-1)} && = 0 \\
g(1) &= acs(0) + bc\cancel{s(-1)} + c\cancel{g(0)} && = ac \\
g(2) &= ac\cancel{s(1)} + bcs(0) + cg(1) && = (b+ac)c \\
g(3) &= ac\cancel{s(2)} + bc\cancel{s(1)} + cg(2) && = (b+ac)c^2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots && \quad \vdots
\end{aligned}
$$

$$g(n) = acs(n-1) + bcs(n-2) + cg(n-1) = (b+ac)c^{n-1}$$

- On trouve comme signal de sortie

$$
g(n) = \begin{cases} 0 & pour \quad n \leq 0 \\ ac & pour \quad n = 1 \\ (b+ac)c^{n-1} & pour \quad n \geq 2 \end{cases}
$$

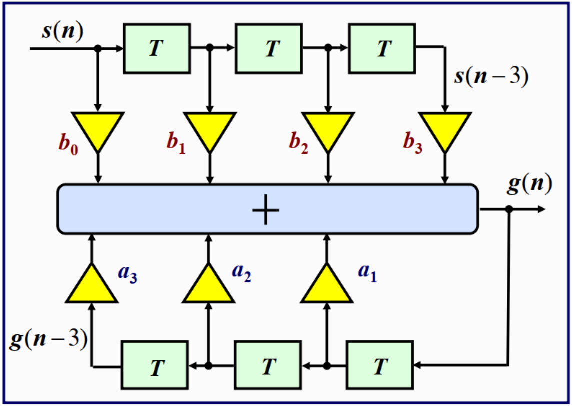
Description d'un système DLIT par des équations aux différences

Les systèmes DLIT ou filtres numériques peuvent être décrits, de manière générale, par l'équation aux différences suivante,

$$\boxed{g(n) = \sum_{i=0}^{N} b_i s\left(n-i\right) + \sum_{j=1}^{M} a_j g\left(n-j\right)}$$

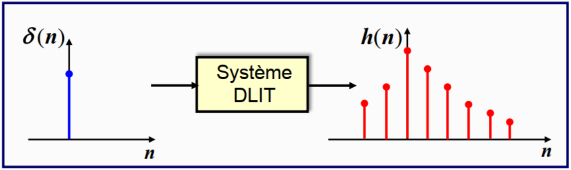
- C'est une équation aux différences linéaire à coefficient constant.
- L'équation aux différences donne une indication sur une structure possible du système

Pour $\mathbf{N = M = 3}$, le système décrit par l'équation aux différences peut être réalisé par le circuit suivant



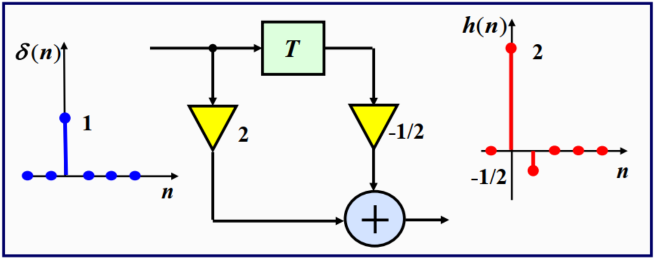
Description d'un système DLIT par sa réponse impulsionnelle

Comme nous l'avons déjà vu, un système DLIT peut être entièrement décrit par sa réponse impulsionnelle, c'est à dire le signal de sortie $h(n)$ qui correspond à un dirac comme signal d'entrée.



Exemple 1 :

On voit directement que la réponse impulsionnelle du système de la figure suivante est donnée par,



$$h(n) = 2\delta(n) - 0{,}5\delta(n-1)$$

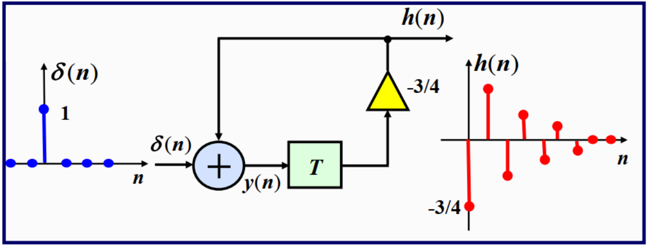
RIF

$h(n)$ est une réponse impulsionnelle de durée finie et un tel système est appelé filtre à **Réponse Impulsionnel Finie (RIF)** ou FIR en anglais.

Description d’un système DLIT par sa réponse impulsionnelle

Exemple 2 :

La réponse impulsionnelle du système de la figure suivante est donnée par,



$$\left.\begin{aligned} y(n) &= \delta(n) + h(n) \\ h(n) &= -\frac{3}{4}\, y(n-1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; h(n) = \left(-\frac{3}{4}\right)^{n} \varepsilon(n-1)$$

RII

C’est une réponse impulsionnelle de durée infinie et un tel système est appelé filtre à **Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)** ou IIR en anglais.

Description d'un système DLIT par sa réponse impulsionnelle

Il est possible de voir directement sur la réponse impulsionnelle d'un système $h(n)$ si ce dernier est causal ou stable ou s'il possède les deux propriétés

- Pour un système stable nous avons

$$\boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| h(m) \right| < \infty}$$

- Pour un système causal nous avons

$$\boxed{h(n) = 0 \quad \text{pour} \quad n < 0}$$

A partir de la réponse impulsionnelle $h(n)$ d'un système DLIT, on peut calculer le signal de sortie $g(n)$ corrspondant à un signal d'entrée $s(n)$ par le produit de convolution suivant

$$\boxed{g(n) = s(n) * h(n) = h(n) * s(n)}$$

$$\boxed{g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) \cdot h(n-m)}$$

Illustration de la convolution

$$g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) \cdot h(n-m)$$

Le calcul par étapes du produit de convolution de deux signaux $s(n)$ et $h(n)$ s'illustre comme suit. En partant de $s(m)$ et $h(m)$ nous procédons au opération suivante :

1. Repliement de $h(m)$ dans le temps, donne $h(-m)$
2. Décalage d'une valeur de n(exemple $n = 2$), on obtient $h(n-m)$.
3. Multiplication de $s(m)$ par $h(n-m)$, on obtient $s(m) \times h(n-m)$
4. Sommation sur m de ce produit donne la valeur du signal $g(2)$
5. Ainsi de suite : la variation de n allant de $-\infty$ à $+\infty$ donne $g(n)$

Illustration de la convolution

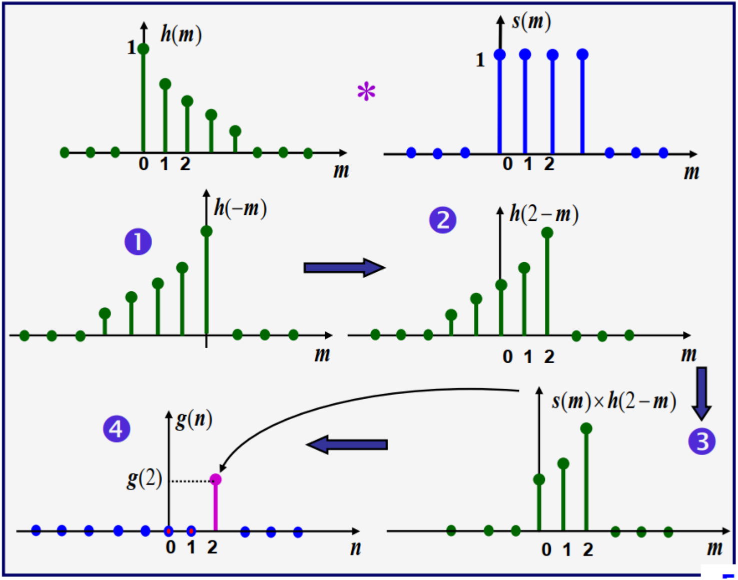
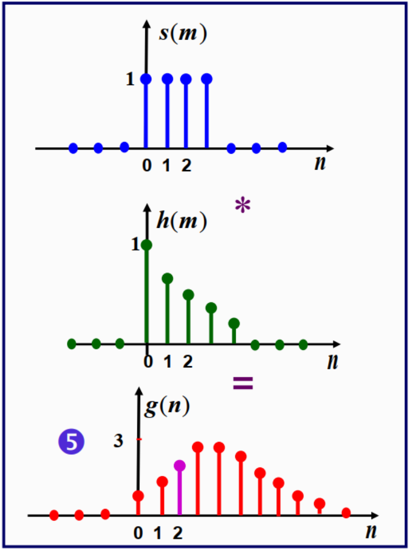


Illustration de la convolution

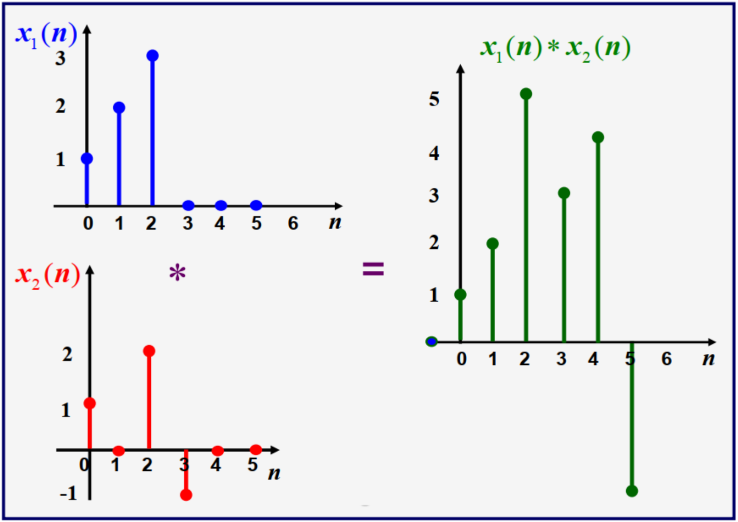


$$\{x_1(n)\} * \{x_2(n)\} = \{1,2,3\} * \{1,0,2,-1\} = \sum_m x_2(m) \cdot x_1(n-m)$$

n \ m	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$x_1(n) * x_2(n)$
$x_2(m)$	0	0	1	0	2	-1	0	0	0	
$x_1(-m)$	3	2	1	0	0	0	0	0	0	
0	3	2	1							1
1		3	2	1						2
2			3	2	1					5
3				3	2	1				3
4					3	2	1			4
5						3	2	1		-3
6							3	2	1	
7										

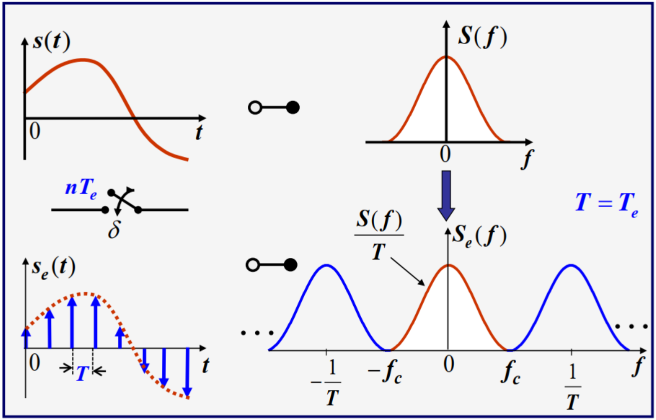
$N_1 + N_2 - 1$

Exemple de convolution



Description dans l'espace de fréquence

Comme nous l'avons vu avec les signaux continus, il est aussi possible de décrire les signaux discrets dans le domaine fréquentiel. Pour se faire nous pouvons utiliser la transformée de Fourier.



La transformée de Fourier d'un signal discret est donnée par

$$\boxed{S_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \cdot e^{-j2\pi nTf}}$$

La transformée inverse est donnée par $(T = 1)$

TFSD $$S_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \cdot e^{-j2\pi nf}$$

TFSDI $$s(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_e(f) \cdot e^{j2\pi nf} \, df$$

Transformée de Fourier des Signaux Discrets Inverse (TFSDI)

En général la TFSDI est donnée par

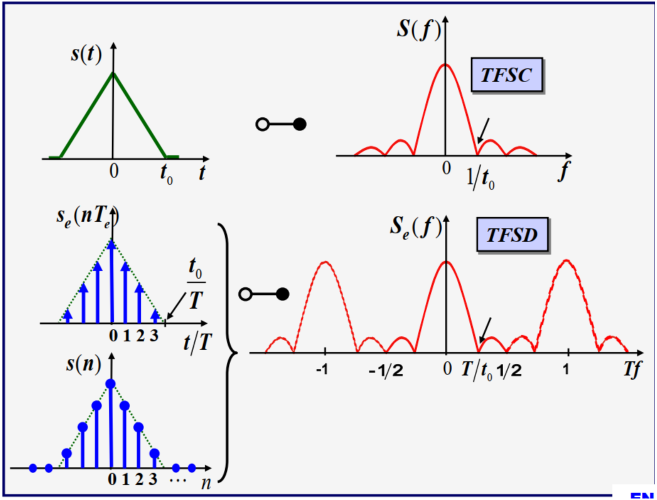
$$s(nT) = T \int_{\frac{-1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S_e(f) \cdot e^{j2\pi nfT} df$$

$$s(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S_e(f)$$

ou

$$s(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} S_e\left(e^{j\omega}\right) \cdot e^{jn\omega T} d\omega$$

$$s(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S_e(e^{j\omega})$$


s(t)
0
t_0
t
S(f)
TFSC
0
$1/t_0$
f
$s_e(nT_e)$
$\frac{t_0}{T}$
0 1 2 3
t/T
$S_e(f)$
TFSD
-1
-1/2
0
T/t_0
1/2
1
Tf
s(n)
0 1 2 3 ...
n

Propriétés de la TFSD

- Linéarité

$$a \cdot s_1(n) + b \cdot s_2(n) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; a \cdot S_{e1}(f) + b \cdot S_{e2}(f)$$

- Décalage dans le temps

$$s(n-i) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-j2\pi if} S_e(f)$$
$$s(n-i) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-ji\theta} S_e\left(e^{j\theta}\right)$$

- Décalage en fréquence

$$s(n) \cdot e^{j2\pi f_0} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; S_e(f - f_0)$$
$$s(n) \cdot e^{j\theta_0} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; S_e\left(e^{j(\theta-\theta_0)}\right)$$

- Produit de convolution dans l'espace temps

$$s_1(n) * s_2(n) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; S_{e1}(f) \cdot S_{e2}(f)$$
$$s_1(n) * s_2(n) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; S_{e1}\left(e^{j\theta}\right) \cdot S_{e2}\left(e^{j\theta}\right)$$

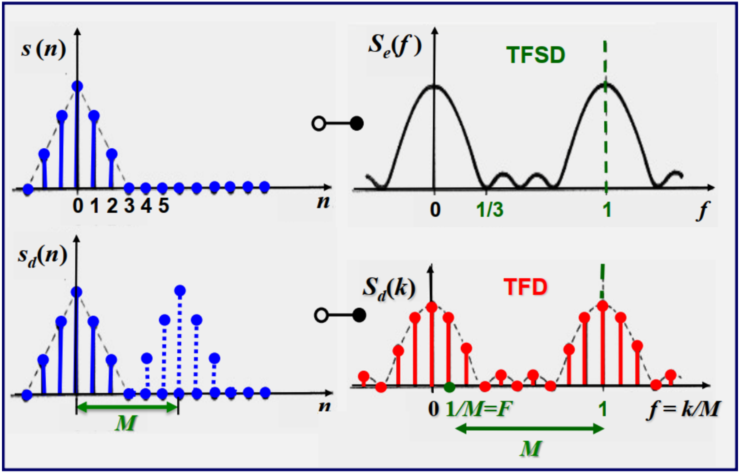
La Transformée de Fourier Discrète (TFD), est un traitement numérique qui transforme un bloc de M échantillons régulièrement répartis dans le temps provenant d'un signal, et qui donne M points régulièrement espacés dans le domaine des fréquences.

$$\boxed{S(k) = \sum_{n=0}^{M-1} s(n) \cdot e^{-j2\pi\frac{kn}{M}}}$$

La transformée inverse est donnée par

$$\boxed{s(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} S(k) \cdot e^{+j2\pi\frac{nk}{M}}}$$

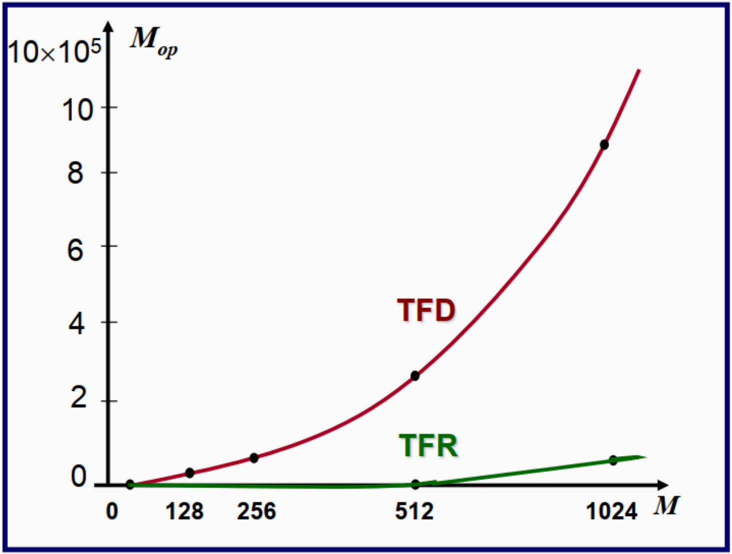
Transformée de Fourier Discrète (TFD)



Transformée de Fourier Rapide (TFD)
Fast Fourier Transform (FFT)

La TFD joue un important dans le traitement des signaux discrets. Cependant le nombre d'opérations requis (additions et multiplications) est très important puisqu'il détermine le temps de calcul de l'ordinateur. À cet effet des algorithmes ont été proposé pour réduire ce temps de calcul

L'algorithme le plus courant qui permet de réduire le temps de calcul est le FFT


M_{op}
10×10⁵
10
8
6
4
2
0
TFD
TFR
0
128
256
512
1024
M

Transformée de Fourier Rapide (TFD)
Fast Fourier Transform (FFT)

John Tukey, (1915-2000), statisticien américain. Après une licence en chimie et deux en mathématiques à Brown et Princeton University, il devint professeur de statistiques à Princeton et continua en parallèle une carrière de chercheur aux Bell Labs. Il travailla notamment dans le domaine de l'analyse statistique robuste. Avec l'aide de James Cooley, il mit au point l'algorithme de la Transformée de Fourier Rapide (FFT). John Tukey est également l'inventeur du mot « software ».

James Cooley (1926-), mathématicien américain, pionnier dans le développement du traitement numérique du signal. Alors qu'il travaillait dans les laboratoires de recherche de IBM à New York, il co-inventa la FFT avec J. Tukey. Cet algorithme est aujourd'hui l'un des plus utilisés en sciences et en ingénierie, de la géophysique à l'astronomie en passant la biologie. Il a volontairement été rendu public par IBM dès sa découverte en 1965, sans aucune protection intellectuelle (sans brevet), afin de favoriser le développement de logiciels.

La transformée en z est un outil mathématique de traitement du signal, qui est l'équivalent discret de la transformée de Laplace. Elle est utilisée pour le calcul de filtre numérique.

Définition

On appelle transformée en z de $s_n = s(nT_e) = s(n)$ la fonction échantillonnée de $s(t)$ la fonction de la variable complexe définie par :

$$\boxed{S_z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot z^{-n}}$$

Définition

Un filtre numérique est constitué d'un groupement de circuits logique astreints à un processus de calcul (ou algorithme) qui confère à ce filtre une fonction déterminée.

Un filtre numérique effectue un traitement sur signaux échantillonnés ou numériques. La transformée en z permet d'obtenir sa fonction de transfert.

Filtres numériques

Un filtres numérique est défini par

- sa réponse impulsionnelle
- sa fonction de transfert en z
- son équation aux différences finies
- sa réponse fréquentielle

Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

Ces systèmes sont caractérisés par des réponses impulsionnelle de durée finie.

Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)

Ces systèmes sont caractérisés par des réponses impusionnelles de durée infinie

Filtres numérique

Filtres RIF

- Toujours stable
- Phase linéaire
- Les performances dépendent du nombre des coefficients
- Le calcul des coefficients est facile.

Filtres RII

- Grande performance avec peu de calculs
- Peuvent osciller : il faut étudier la stabilité