Chapitre 2 : Langages réguliers et expressions régulières

Dr. Mandicou BA

mandicou.ba@esp.sn

http:// www.mandicouba.net

Diplôme D'Ingénieur de Conception (DIC, 2^e année)

Option Informatique

ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE

www.esp.sn

Plan du Chapitre

Sommaire

Positionnement du problème

« Énormité » d'un langage

- ☛ Un langage peut être simple et ne comporter qu'un petit nombre d'éléments mais aussi être très compliqué et « énorme ».

Objectif des langages en expressions relationnels

- ☛ Étude des types de langage qui ne sont pas trop compliqué pour être manipulé mais qui ne sont pas non plus trop simple pour qu'ils puissent servir à quelque chose :

Langages dénotés par des expressions relationnelles

- ☛ La classe de langages relationnels est le premier niveau de la hiérarchie de Chomsky
- ☛ Langage relationnel $\leftrightsquigarrow$ Langage régulier
- ☛ Expression relationnelle $\leftrightsquigarrow$ Expression régulière

Sommaire

Définition d'un langage régulier

Définition 1

- Soit un alphabet $\sum$
- On appelle langage régulier sur un alphabet $\sum$, un langage défini sur $\sum$ de la façon suivante :
  1. $\emptyset$ (l'ensemble vide) est un langage régulier sur $\sum$
  2. ε est un langage régulier sur $\sum$
  3. $\{a\}$ est un langage régulier sur $\sum$ pour tout $a \in \sum$
  4. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux langages réguliers sur $\sum$ alors le sont aussi :
     - $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ (propriété de l'union)
     - $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ (propriété du produit)
     - $\mathcal{P}^*$ (propriété de l'étoile)
- Rien d'autre n'est un langage régulier.

Exemples de langages réguliers

Exemple 1 (Pour tout mot $u \in \sum^*$, le langages $\{u\}$ est régulier)

- *Si u s'écrit $a_1 \cdots a_n$, alors le langage $\{u\}$ s'écrit comme suit :*
  - $\{u\} = \{a_1\}\{a_2\} \cdots \{a_n\}$
- *$\{u\}$ est donc régulier car chaque $\{a_i\}$ l'est :*
  - *L'ensemble des langages réguliers est clos pour la concaténation*

Exemple 2 (Tout langage fini est régulier)

- *Soit $\mathcal{L}$ un langage fini*
- *L'ensemble des mots fini de $\mathcal{L} = \{u_1, \cdots u_k\}$ s'écrit :*
  - $\mathcal{L} = \{u_1\} \cup \{u_2\} \cdots \{u_k\}$
- *$\mathcal{L}$ est régulier car chaque $\{u_i\}$ l'est :*
  - *L'ensemble des langages réguliers est clos pour l'union*

Exemples de langages réguliers

Exemple 3 (L'ensemble de tous les mot, $\sum^*$ est régulier)

- *Soit* $\sum = \{a_1, \cdots c_p\}$
- *Le langage* $\{a_1, \cdots c_p\}$ *est régulier car*
  - $\sum^*$ *n'est rien d'autre que la fermeture de Kleene de ce langage*
  - *Donc* $\sum^*$ *est un langage régulier car ces deniers sont clos pour cette opération*

Exemple 4 (Sur l'alphabet $\{a, b\}$, l'ensemble $\{a^n, b^p | n, p \in \mathbb{N}\}$ est régulier)

- *Le langage* $\{a^n | n \in \mathbb{N}\} = \{a\}^*$ *est régulier :*
  - *Car fermeture de Kleene du langage régulier* $\{a\}$
- *Le langage* $\{b^n | n \in \mathbb{N}\} = \{b\}^*$ *est régulier :*
  - *Car fermeture de Kleene du langage régulier* $\{b\}$
- *Donc, le langage* $\{a^n, b^p | n, p \in \mathbb{N}\}$*, étant une concaténation des précédents, est donc régulier*

Sommaire

Définition d'une expression régulière

Définition 2

Les expressions régulières sont définies récursivement comme suit :

1. $\emptyset$ est une expression régulière dénotant l'ensemble régulier $\emptyset$
2. ε est une expression régulière dénotant l'ensemble régulier $\{\varepsilon\}$
3. $a \in \sum$ est une expression régulière dénotant l'ensemble régulier $\{a\}$
4. Si p et q sont des expressions régulières dénotant respectivement les ensembles réguliers $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ alors :
   - $(p+q)$ est une expression régulière dénotant le langage régulier $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$
   - (pq) est une expression régulière dénotant le langage régulier $\mathcal{P}\mathcal{Q}$
   - $(p)^*$ est une expression régulière dénotant le langage régulier $\mathcal{P}$
5. Rien d'autre n'est expression régulière

Notations, équivalence et priorités

Notation

- Si $\mathcal{E}$ est une expression régulière, on notera $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ le langage régulier dénoté par $\mathcal{E}$.

  Si $\mathcal{E} = 0 + (1(0)^*)$ alors $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \{0, 1, 10, 100, \cdots\}$

Équivalence (notée $\equiv$)

- Deux expressions régulières $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont équivalentes si $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \mathcal{L}(\mathcal{E})'$

Priorité

- Dans une expression régulière, l'étoile $(*)$ a la plus forte priorité suivit de la concaténation $(\cdot)$, puis de l'union $(+)$:
  - priorité$(*)$ $>$ priorité$(\cdot)$ $>$ priorité$(+)$
- L'expression régulière $0 + 10^*$ est donc équivalente à $(0 + (1(0)^*))$

Exemples d'expressions régulières

1. $01 = \{m \in \{01\}, |$ m est exactement 01 $\}$
2. $0^* = \{m \in \{0\}^*, |$ m est constitué uniquement de 0 ou vide $\}$
3. $0^*10^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a exactement un 1 $\}$
4. $(0+1)^*1(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a au moins un 1 $\}$
5. $(0+1)^*110 = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m se termine par 110 $\}$
6. $(0+1)^*101(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a continent la sous-chaîne 101 $\}$
7. $((0+1)(0+1))^* = \{m \in \{0,1\}^*, |\ |m|$ est paire $\}$

Exemples d'expressions régulières

1. $01 = \{m \in \{01\}, |$ m est exactement 01 $\}$
2. $0^* = \{m \in \{0\}^*, |$ m est constitué uniquement de 0 ou vide $\}$
3. $0^*10^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a exactement un 1 $\}$
4. $(0+1)^*1(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a au moins un 1 $\}$
5. $(0+1)^*110 = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m se termine par 110 $\}$
6. $(0+1)^*101(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a continent la sous-chaîne 101 $\}$
7. $((0+1)(0+1))^* = \{m \in \{0,1\}^*, |\ |m|$ est paire $\}$

Exemples d'expressions régulières

1. $01 = \{m \in \{01\}, |$ m est exactement 01 $\}$
2. $0^* = \{m \in \{0\}^*, |$ m est constitué uniquement de 0 ou vide $\}$
3. $0^*10^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a exactement un 1 $\}$
4. $(0+1)^*1(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a au moins un 1 $\}$
5. $(0+1)^*110 = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m se termine par 110 $\}$
6. $(0+1)^*101(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a continent la sous-chaîne 101 $\}$
7. $((0+1)(0+1))^* = \{m \in \{0,1\}^*, | \; |m|$ est paire $\}$

Exemples d'expressions régulières

1. $01 = \{m \in \{01\}, |$ m est exactement 01 $\}$
2. $0^* = \{m \in \{0\}^*, |$ m est constitué uniquement de 0 ou vide $\}$
3. $0^*10^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a exactement un 1 $\}$
4. $(0+1)^*1(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a au moins un 1 $\}$
5. $(0+1)^*110 = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m se termine par 110 $\}$
6. $(0+1)^*101(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a continent la sous-chaîne 101 $\}$
7. $((0+1)(0+1))^* = \{m \in \{0,1\}^*, |\ |m|$ est paire $\}$

Exemples d'expressions régulières

1. $01 = \{m \in \{01\}, |$ m est exactement 01 $\}$
2. $0^* = \{m \in \{0\}^*, |$ m est constitué uniquement de 0 ou vide $\}$
3. $0^*10^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a exactement un 1 $\}$
4. $(0+1)^*1(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a au moins un 1 $\}$
5. $(0+1)^*110 = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m se termine par 110 $\}$
6. $(0+1)^*101(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a continent la sous-chaîne 101 $\}$
7. $((0+1)(0+1))^* = \{m \in \{0,1\}^*, | \; |m|$ est paire $\}$

Exemples d'expressions régulières

1. $01 = \{m \in \{01\}, |$ m est exactement 01 $\}$
2. $0^* = \{m \in \{0\}^*, |$ m est constitué uniquement de 0 ou vide $\}$
3. $0^*10^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a exactement un 1 $\}$
4. $(0+1)^*1(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a au moins un 1 $\}$
5. $(0+1)^*110 = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m se termine par 110 $\}$
6. $(0+1)^*101(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a continent la sous-chaîne 101 $\}$
7. $((0+1)(0+1))^* = \{m \in \{0,1\}^*, |\ |m|$ est paire $\}$

Exemples d'expressions régulières

1. $01 = \{m \in \{01\}, |$ m est exactement 01 $\}$
2. $0^* = \{m \in \{0\}^*, |$ m est constitué uniquement de 0 ou vide $\}$
3. $0^*10^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a exactement un 1 $\}$
4. $(0+1)^*1(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a au moins un 1 $\}$
5. $(0+1)^*110 = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m se termine par 110 $\}$
6. $(0+1)^*101(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a continent la sous-chaîne 101 $\}$
7. $((0+1)(0+1))^* = \{m \in \{0,1\}^*, | \ |m|$ est paire $\}$

Exemples d'expressions régulières

1. $01 = \{m \in \{01\}, |$ m est exactement 01 $\}$
2. $0^* = \{m \in \{0\}^*, |$ m est constitué uniquement de 0 ou vide $\}$
3. $0^*10^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a exactement un 1 $\}$
4. $(0+1)^*1(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a au moins un 1 $\}$
5. $(0+1)^*110 = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m se termine par 110 $\}$
6. $(0+1)^*101(0+1)^* = \{m \in \{0,1\}^*, |$ m a continent la sous-chaîne 101 $\}$
7. $((0+1)(0+1))^* = \{m \in \{0,1\}^*, |\ |m|$ est paire $\}$

Équivalence ou égalité

- Il est possible de trouver au moins une expression régulière détonnant tout langage régulier
- Il est également possible de construire le langage régulier dénoté par toute expression régulière
- Par contre, pour tout langage régulier, il existe une infinité d'expression régulière le détonnant

Équivalence

- Deux expressions régulières sont équivalentes ($\equiv$) si et seulement si elles dénotent le même langage régulier

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Soient α, β et γ trois expressions régulières. Ainsi :

(1)	$\alpha+(\beta+\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha+\beta)+\gamma$	associativité de l'union
(2)	$\alpha+\beta$	$\equiv$	$(\beta+\alpha)$	commutativité de l'union
(3)	$\alpha+\emptyset$	$\equiv$	α	élément neutre pour l'union
(4)	$\alpha+\alpha$	$\equiv$	α	idempotente de l'union
(5)	$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
(6)	$\alpha\varepsilon$	$\equiv$	$\varepsilon\alpha\equiv\alpha$	élément neutre pour la concaténation
(7)	$\alpha(\beta+\gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta+\alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(8)	$(\alpha+\beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma+\beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(9)	$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\emptyset\alpha\equiv\emptyset$	$\emptyset$ est absorbant pour la concaténation
(10)	$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
(11)	$(\alpha^*)^*$	$\equiv$	α^*	
(12)	α^*	$\equiv$	$\alpha+\alpha^*$	

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Soient α, β et γ trois expressions régulières. Ainsi :

(1)	$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
(2)	$\alpha + \beta$	$\equiv$	$(\beta + \alpha)$	commutativité de l'union
(3)	$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	élément neutre pour l'union
(4)	$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotente de l'union
(5)	$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
(6)	$\alpha\varepsilon$	$\equiv$	$\varepsilon\alpha \equiv \alpha$	élément neutre pour la concaténation
(7)	$\alpha(\beta + \gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta + \alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(8)	$(\alpha + \beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma + \beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(9)	$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\emptyset\alpha \equiv \emptyset$	$\emptyset$ est absorbant pour la concaténation
(10)	$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
(11)	$(\alpha^*)^*$	$\equiv$	α^*	
(12)	α^*	$\equiv$	$\alpha + \alpha^*$	

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Soient α, β et γ trois expressions régulières. Ainsi :

(1)	$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
(2)	$\alpha + \beta$	$\equiv$	$(\beta + \alpha)$	commutativité de l'union
(3)	$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	élément neutre pour l'union
(4)	$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotente de l'union
(5)	$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
(6)	$\alpha\varepsilon$	$\equiv$	$\varepsilon\alpha \equiv \alpha$	élément neutre pour la concaténation
(7)	$\alpha(\beta + \gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta + \alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(8)	$(\alpha + \beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma + \beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(9)	$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\emptyset\alpha \equiv \emptyset$	$\emptyset$ est absorbant pour la concaténation
(10)	$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
(11)	$(\alpha^*)^*$	$\equiv$	α^*	
(12)	α^*	$\equiv$	$\alpha + \alpha^*$	

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Soient α, β et γ trois expressions régulières. Ainsi :

(1)	$\alpha+(\beta+\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha+\beta)+\gamma$	associativité de l'union
(2)	$\alpha+\beta$	$\equiv$	$(\beta+\alpha)$	commutativité de l'union
(3)	$\alpha+\emptyset$	$\equiv$	α	élément neutre pour l'union
(4)	$\alpha+\alpha$	$\equiv$	α	idempotente de l'union
(5)	$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
(6)	$\alpha\varepsilon$	$\equiv$	$\varepsilon\alpha\equiv\alpha$	élément neutre pour la concaténation
(7)	$\alpha(\beta+\gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta+\alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(8)	$(\alpha+\beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma+\beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(9)	$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\emptyset\alpha\equiv\emptyset$	$\emptyset$ est absorbant pour la concaténation
(10)	$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
(11)	$(\alpha^*)^*$	$\equiv$	α^*	
(12)	α^*	$\equiv$	$\alpha+\alpha^*$	

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Soient α, β et γ trois expressions régulières. Ainsi :

(1)	$\alpha+(\beta+\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha+\beta)+\gamma$	associativité de l'union
(2)	$\alpha+\beta$	$\equiv$	$(\beta+\alpha)$	commutativité de l'union
(3)	$\alpha+\emptyset$	$\equiv$	α	élément neutre pour l'union
(4)	$\alpha+\alpha$	$\equiv$	α	idempotente de l'union
(5)	$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
(6)	$\alpha\varepsilon$	$\equiv$	$\varepsilon\alpha\equiv\alpha$	élément neutre pour la concaténation
(7)	$\alpha(\beta+\gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta+\alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(8)	$(\alpha+\beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma+\beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(9)	$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\emptyset\alpha\equiv\emptyset$	$\emptyset$ est absorbant pour la concaténation
(10)	$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
(11)	$(\alpha^*)^*$	$\equiv$	α^*	
(12)	α^*	$\equiv$	$\alpha+\alpha^*$	

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Soient α, β et γ trois expressions régulières. Ainsi :

(1)	$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
(2)	$\alpha + \beta$	$\equiv$	$(\beta + \alpha)$	commutativité de l'union
(3)	$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	élément neutre pour l'union
(4)	$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotente de l'union
(5)	$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
(6)	$\alpha\varepsilon$	$\equiv$	$\varepsilon\alpha \equiv \alpha$	élément neutre pour la concaténation
(7)	$\alpha(\beta + \gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta + \alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(8)	$(\alpha + \beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma + \beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(9)	$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\emptyset\alpha \equiv \emptyset$	$\emptyset$ est absorbant pour la concaténation
(10)	$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
(11)	$(\alpha^*)^*$	$\equiv$	α^*	
(12)	α^*	$\equiv$	$\alpha + \alpha^*$	

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Soient α, β et γ trois expressions régulières. Ainsi :

(1)	$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
(2)	$\alpha + \beta$	$\equiv$	$(\beta + \alpha)$	commutativité de l'union
(3)	$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	élément neutre pour l'union
(4)	$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotente de l'union
(5)	$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
(6)	$\alpha\varepsilon$	$\equiv$	$\varepsilon\alpha \equiv \alpha$	élément neutre pour la concaténation
(7)	$\alpha(\beta + \gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta + \alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(8)	$(\alpha + \beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma + \beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(9)	$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\emptyset\alpha \equiv \emptyset$	$\emptyset$ est absorbant pour la concaténation
(10)	$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
(11)	$(\alpha^*)^*$	$\equiv$	α^*	
(12)	α^*	$\equiv$	$\alpha + \alpha^*$	

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Soient α, β et γ trois expressions régulières. Ainsi :

(1)	$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
(2)	$\alpha + \beta$	$\equiv$	$(\beta + \alpha)$	commutativité de l'union
(3)	$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	élément neutre pour l'union
(4)	$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotente de l'union
(5)	$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
(6)	$\alpha\varepsilon$	$\equiv$	$\varepsilon\alpha \equiv \alpha$	élément neutre pour la concaténation
(7)	$\alpha(\beta + \gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta + \alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(8)	$(\alpha + \beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma + \beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(9)	$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\emptyset\alpha \equiv \emptyset$	$\emptyset$ est absorbant pour la concaténation
(10)	$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
(11)	$(\alpha^*)^*$	$\equiv$	α^*	
(12)	α^*	$\equiv$	$\alpha + \alpha^*$	

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Soient α, β et γ trois expressions régulières. Ainsi :

(1)	$\alpha+(\beta+\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha+\beta)+\gamma$	associativité de l'union
(2)	$\alpha+\beta$	$\equiv$	$(\beta+\alpha)$	commutativité de l'union
(3)	$\alpha+\emptyset$	$\equiv$	α	élément neutre pour l'union
(4)	$\alpha+\alpha$	$\equiv$	α	idempotente de l'union
(5)	$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
(6)	$\alpha\varepsilon$	$\equiv$	$\varepsilon\alpha\equiv\alpha$	élément neutre pour la concaténation
(7)	$\alpha(\beta+\gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta+\alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(8)	$(\alpha+\beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma+\beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(9)	$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\emptyset\alpha\equiv\emptyset$	$\emptyset$ est absorbant pour la concaténation
(10)	$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
(11)	$(\alpha^*)^*$	$\equiv$	α^*	
(12)	α^*	$\equiv$	$\alpha+\alpha^*$	

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Soient α, β et γ trois expressions régulières. Ainsi :

(1)	$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
(2)	$\alpha + \beta$	$\equiv$	$(\beta + \alpha)$	commutativité de l'union
(3)	$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	élément neutre pour l'union
(4)	$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotente de l'union
(5)	$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
(6)	$\alpha\varepsilon$	$\equiv$	$\varepsilon\alpha \equiv \alpha$	élément neutre pour la concaténation
(7)	$\alpha(\beta + \gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta + \alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(8)	$(\alpha + \beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma + \beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(9)	$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\emptyset\alpha \equiv \emptyset$	$\emptyset$ est absorbant pour la concaténation
(10)	$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
(11)	$(\alpha^*)^*$	$\equiv$	α^*	
(12)	α^*	$\equiv$	$\alpha + \alpha^*$	

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Soient α, β et γ trois expressions régulières. Ainsi :

(1)	$\alpha+(\beta+\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha+\beta)+\gamma$	associativité de l'union
(2)	$\alpha+\beta$	$\equiv$	$(\beta+\alpha)$	commutativité de l'union
(3)	$\alpha+\emptyset$	$\equiv$	α	élément neutre pour l'union
(4)	$\alpha+\alpha$	$\equiv$	α	idempotente de l'union
(5)	$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
(6)	$\alpha\varepsilon$	$\equiv$	$\varepsilon\alpha\equiv\alpha$	élément neutre pour la concaténation
(7)	$\alpha(\beta+\gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta+\alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(8)	$(\alpha+\beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma+\beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(9)	$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\emptyset\alpha\equiv\emptyset$	$\emptyset$ est absorbant pour la concaténation
(10)	$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
(11)	$(\alpha^*)^*$	$\equiv$	α^*	
(12)	α^*	$\equiv$	$\alpha+\alpha^*$	

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Soient α, β et γ trois expressions régulières. Ainsi :

(1)	$\alpha+(\beta+\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha+\beta)+\gamma$	associativité de l'union
(2)	$\alpha+\beta$	$\equiv$	$(\beta+\alpha)$	commutativité de l'union
(3)	$\alpha+\emptyset$	$\equiv$	α	élément neutre pour l'union
(4)	$\alpha+\alpha$	$\equiv$	α	idempotente de l'union
(5)	$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
(6)	$\alpha\varepsilon$	$\equiv$	$\varepsilon\alpha\equiv\alpha$	élément neutre pour la concaténation
(7)	$\alpha(\beta+\gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta+\alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(8)	$(\alpha+\beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma+\beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(9)	$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\emptyset\alpha\equiv\emptyset$	$\emptyset$ est absorbant pour la concaténation
(10)	$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
(11)	$(\alpha^*)^*$	$\equiv$	α^*	
(12)	α^*	$\equiv$	$\alpha+\alpha^*$	

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Soient α, β et γ trois expressions régulières. Ainsi :

(1)	$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
(2)	$\alpha + \beta$	$\equiv$	$(\beta + \alpha)$	commutativité de l'union
(3)	$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	élément neutre pour l'union
(4)	$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotente de l'union
(5)	$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
(6)	$\alpha\varepsilon$	$\equiv$	$\varepsilon\alpha \equiv \alpha$	élément neutre pour la concaténation
(7)	$\alpha(\beta + \gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta + \alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(8)	$(\alpha + \beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma + \beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
(9)	$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\emptyset\alpha \equiv \emptyset$	$\emptyset$ est absorbant pour la concaténation
(10)	$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
(11)	$(\alpha^*)^*$	$\equiv$	α^*	
(12)	α^*	$\equiv$	$\alpha + \alpha^*$	

Quelques propriétés algébriques des expressions régulières

Autres équivalences utiles :

$$
\begin{array}{lcl}
(\alpha\beta)^*\alpha & \equiv & \alpha(\beta\alpha)^* \\
(\alpha^*\beta)^*\alpha^* & \equiv & (\alpha+\beta)^* \\
\alpha^*(\beta\alpha^*)^* & \equiv & (\alpha+\beta)^* \\
(\varepsilon+\alpha)^* & \equiv & \alpha^* \\
\alpha\alpha^* & \equiv & \alpha^*\alpha
\end{array}
$$

Preuves d'équivalence d'expressions régulières

✍ Les axiomes précédents peuvent être utilisés pour prouver que deux expressions régulières sont équivalentes

- Exemple : $\varepsilon + 0 + 00 \equiv (\varepsilon + 0)(\varepsilon + 0)$
- Preuve :

$$\begin{array}{rcll} \varepsilon + 0 + 00 & \equiv & \varepsilon + 0 + 0 + 00 & \alpha + \alpha \equiv \alpha \\ & \equiv & \varepsilon\varepsilon + \varepsilon 0 + 0 + 00 & \varepsilon\alpha \equiv \alpha \\ & \equiv & \varepsilon(\varepsilon + 0) + 0(\varepsilon + 0) & \alpha(\beta + \gamma) \equiv \alpha\beta + \alpha\gamma \\ & \equiv & (\varepsilon + 0)(\varepsilon + 0) & (\alpha + \beta)\gamma \equiv \alpha\gamma + \beta\gamma \end{array}$$

Chapitre 2 : Langages réguliers et expressions régulières

Dr. Mandicou BA
mandicou.ba@esp.sn
http:// www.mandicouba.net

Diplôme D'Ingénieur de Conception (DIC, 2^e année)
Option Informatique

ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
www.esp.sn