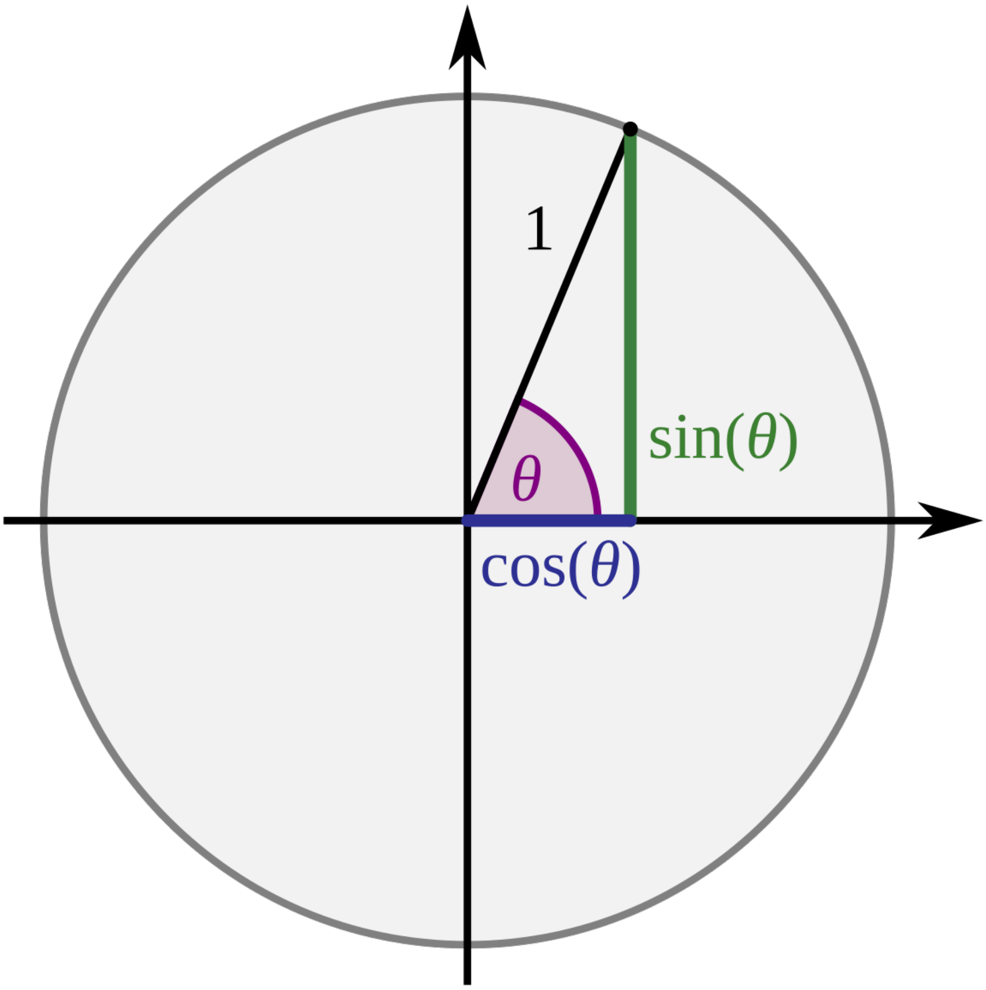
TRIGONOMETRÍA

4º ESO Matemáticas B



Adrián Álvarez Ramiro

Isabel María Cacho Correa

Lucía García Nogales

Daniel Serrano Serrano

Índice

1. Introducción a la Trigonometría

La palabra trigonometría viene de las palabras griegas *trigonos* (triángulo) y *metria* (cualidad de medir algo; véanse las palabras geometría «medida de la tierra», simetría «medida de las cosas que van juntas»). En efecto, la trigonometría es el estudio de las relaciones numéricas entre los elementos de los triángulos: lados, ángulos y vértices. Si bien los babilonios y los egipcios contaban con nociones de geometría y trigonometría ligadas a la astronomía, en la Grecia Antigua adquiere ya la importancia de una rama matemática independiente y prestigiosa, basada en la semejanza de triángulos.

Hiparco de Nicea (190 a.C. - 120 a.C.) confeccionó una tabla de medidas de cuerdas en un círculo, con la que se podían resolver varios problemas trigonométricos. Otro gran nombre de la trigonometría griega aplicada fue **Claudio Ptolomeo** (circa 100-170 d.C.) gracias a su presentación de un modelo geocéntrico del Universo que perduró hasta el siglo XVI, usando las tablas de Hiparco.

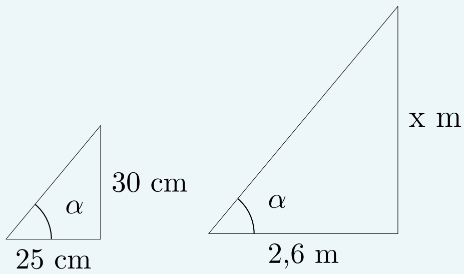
La trigonometría ha estado muy ligada al curso de la Historia. Las conquistas de Alejandro Magno (s. IV a.C.) trajeron la herencia matemática griega al subcontinente indio y expandieron el mundo conocido. Siglos después, esto repercutirá de vuelta en el canon occidental matemático, porque a diferencia de Hiparco y Ptolomeo, la **edad de oro de la matemática india** (400-1300) constituye la base de la trigonometría tal y como la conocemos hoy. Su introducción a Europa vino dada por los **geómetras árabes**; la traducción de sus textos al latín a partir del siglo XII en ciudades como **Toledo** supuso la restitución de la tradición griega.

Desde entonces, la trigonometría se ha refinado considerablemente hasta convertirse en una herramienta esencial no sólo en geometría, sino en otras áreas de la matemática: por ejemplo, el matemático francés Joseph Fourier introdujo la idea de descomponer muchas funciones en funciones seno y coseno, lo cual tuvo una repercusión enorme en la resolución de ecuaciones y en la física matemática.

A continuación presentamos un ejercicio clásico de trigonometría:

Ejercicio Resuelto

- Queremos calcular la altura de un árbol con una estaca y un transportador de ángulos. Para ello, necesitamos que proyecten sus sombras a un mismo ángulo y poder medir su longitud. Supongamos que la estaca mide 30 cm y que su sombra mide 25 cm. Medimos la sombra del árbol y obtenemos 2,6 m.



Como estos dos triángulos son semejantes, las razones entre los lados son iguales:

$$\frac{30}{25} = \frac{x}{2,6}$$

Entonces,

$$x = \frac{30 \cdot 2,6}{25} = 3{,}12 \text{ m}$$

Fijémonos que para calcular la longitud de cualquier sombra en este escenario, basta con multiplicar por una cantidad fija:

$$\frac{30}{25}$$

En este tema veremos que esta razón es la **tangente** del ángulo α.

Curiosidad Etimológica

Como se ha discutido anteriormente, la geometría griega aportó una gran base para los matemáticos indios. Tanto es así que la palabra griega para «cuerda», ***khordé***, se tradujo a los textos trigonométricos sánscritos como ***jyā*** o ***jiva***, palabra que designaba tradicionalmente la cuerda de un arco con flechas. Cuando el mundo árabe tuvo contacto con la India y sus tratados de trigonometría, la palabra jiva ya se usaba no para designar la cuerda, sino la mitad de una cuerda. Los matemáticos árabes transcribieron la palabra como ***jib***. En el siglo XII, el traductor Gerardo de Cremona leyó la palabra como ***jayb***, que se escribe exactamente igual que *jib* en árabe pero significa «cavidad», y así la tradujo al latín como ***sinus***. De ahí se originan los términos ***seno*** y ***coseno***.

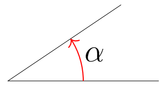
2. Sistemas de medida de ángulos

2.1. Sistema sexagesimal

Hasta ahora, la manera en la que has trabajado con ángulos es mediante el sistema sexagesimal, que divide a un círculo en 360 grados. Como el número 360 cuenta con muchos factores, es muy fácil expresar distintas fracciones: así, un cuarto de círculo es 90º, un sexto de círculo 60º... de ahí que cuente con más de cinco mil años de uso.

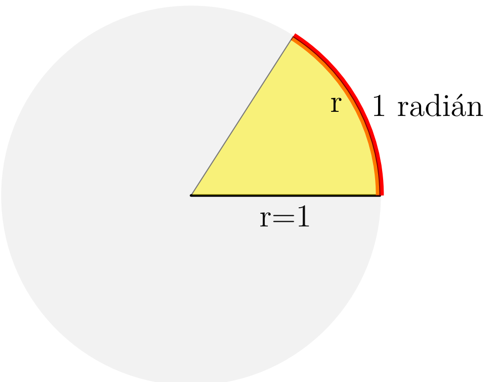
Recuerda

El sentido positivo de un ángulo va contrario a las agujas del reloj.



2.2. Sistema internacional

Fijo un círculo de radio 1 unidad, si trazamos un arco de longitud igual al radio de la circunferencia, obtenemos un *ángulo* muy concreto que llamaremos **radián**. La unidad se escribe **rad**.



- La fórmula de la longitud de una circunferencia es $L = 2\pi r$. Ya que $r = 1$, vemos que en la circunferencia caben 2π radianes (aprox. 6,28 rad).
- De lo anterior se deduce que un radián es aproximadamente 57,3º, porque si en la circunferencia caben 360 grados y 2π radianes, en un radián cabrán $\frac{360}{2\pi} \approx 57{,}3$º.
- En general, para pasar de radianes a grados, usamos ese factor:

$$\text{grados} = \text{radianes} \cdot \frac{360}{2\pi}; \quad \text{radianes} = \text{grados} \cdot \frac{2\pi}{360}.$$

¡Ten en cuenta!

Cuando es posible, los radianes se expresan como múltiplos o fracciones de π: por ejemplo, para pasar 45 grados a radianes, escribimos

$$45^\circ = 45^\circ \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{90\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}.$$

Con esta nueva unidad, las fórmulas para la longitud de arco y área del sector circular se simplifican:

$$\text{Longitud del arco} = \theta \cdot r, \text{ Área del sector circular} = \theta \cdot r^2/2.$$

θ es el ángulo en radianes y r el radio del círculo.

PIENSA Y PRACTICA

1. Pasa las siguientes medidas de grados a radianes:

a) $45°$
b) $90°$
c) $180°$
d) $270°$
e) $720°$
f) $315°$
g) $-30°$
h) $210°$
i) $20°$
j) $100°$
k) $150°$
l) $60°$
m) $50°$
n) $120°$
ñ) $320°$
o) $350°$
p) $280°$
q) $340°$

2. Pasa las siguientes medidas de radianes a grados:

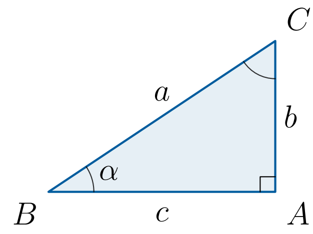
a) π rad
b) 3π rad
c) $\frac{\pi}{4}$ rad
d) $\frac{2\pi}{3}$ rad
e) $\frac{3\pi}{4}$ rad
f) $\frac{\pi}{6}$ rad
g) $\frac{2\pi}{5}$ rad
h) $\frac{\pi}{2}$ rad
i) 2π rad
j) $\frac{3\pi}{2}$ rad
k) 8π rad
l) $\frac{\pi}{5}$ rad
m) $\frac{\pi}{9}$ rad
n) $\frac{2\pi}{9}$ rad
ñ) $\frac{3\pi}{5}$ rad
o) $\frac{\pi}{10}$ rad
p) $\frac{6\pi}{9}$ rad
q) 200π rad

3. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Vamos a plantearnos la siguiente pregunta:

- ¿Cómo se puede calcular la altura de un árbol sin subir a él? ¿Acaso podemos saber la respuesta?

La respuesta es sí, podemos hacerlo si usamos los **ángulos** y las **distancias** para conocer algo que no podemos medir directamente. Vamos a empezar por el caso más sencillo: los **triángulos rectángulos**.



En este tipo de triángulos, los lados tienen una relación fija entre sí que depende solo del ángulo. A esas relaciones las llamamos **razones trigonométricas**.

Antes de hablar de razones trigonométricas, conviene recordar qué significa el término de **razón**:

Una **razón** es la comparación entre dos cantidades mediante una división.

Ejemplo: si en una clase hay 12 chicas y 8 chicos, la razón entre chicas y chicos es

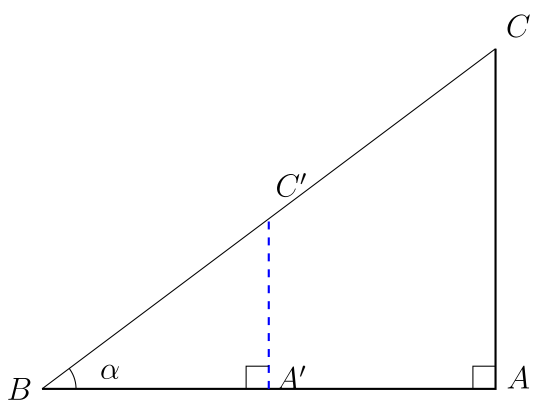
$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Esto quiere decir que por cada 3 chicas hay 2 chicos.

En trigonometría haremos algo parecido: compararemos los lados de un triángulo.

Las **razones trigonométricas** son cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. Lo único nuevo es que ahora esa comparación depende del ángulo que tomemos como referencia. A este ángulo lo llamaremos α.

Estas razones no dependen de cuál triángulo rectángulo usemos, sino del ángulo en cuestión. Si construimos otro triángulo rectángulo $\triangle A'BC'$ con el mismo ángulo α en B, entonces ambos triángulos tienen los mismos ángulos y, por tanto, son **semejantes**. Aunque la forma y el tamaño cambien, la relación entre los lados se mantiene proporcional.



$\triangle A'BC'$ es semejante a $\triangle ABC$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \Rightarrow \text{ el seno es independiente del triángulo.} \\ \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \Rightarrow \text{ el coseno es independiente del triángulo.} \\ \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \Rightarrow \text{ la tangente es independiente del triángulo.} \end{cases}$$

3.1. Razones trigonométricas directas de un ángulo agudo

Si conocemos una de las razones trigonométricas del ángulo α, es posible calcular las razones trigonométricas restantes, gracias a las dos relaciones trigonométricas fundamentales siguientes: En un triángulo, los **vértices** se denotan con letras mayúsculas (A, B y C).

Los **lados** se denotan con la letra minúscula del vértice opuesto al lado. Los **ángulos** se denotan con el acento circunflejo encima de la letra mayúscula que denota el vértice del ángulo (ej. $\hat{A}$).

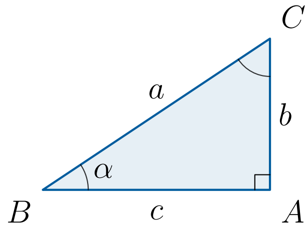
En un triángulo rectángulo, el ángulo recto se asigna la letra A y así, a la **hipotenusa** la letra a minúscula, siendo b y c los dos **catetos**. Se utilizan las letras griegas α y β para nombrar a los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ respectivamente.

También se verifica el **teorema de Pitágoras** (el cuadrado de la hipotenusa es igual a suma de los cuadrados de los catetos):

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Y también se cumple que los dos ángulos agudos son complementarios, es decir, $\alpha + \beta = 90°$.

Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo anterior, vamos a definir las **razones trigonométricas directas** del ángulo α para el **seno**, el **coseno** y la **tangente**.



- **Seno de** α es la razón entre la longitud del cateto opuesto a α y la longitud de la hipotenusa.

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

- **Coseno de** α es la razón entre la longitud del cateto contiguo a α y la longitud de la hipotenusa.

$$\cos\alpha = \cos\hat{B} = \frac{\text{Cateto Contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

- **Tangente de** α es la razón entre la longitud del cateto opuesto a α y la longitud del cateto contiguo a α. También se utilizan las expresiones $tg\,\alpha$ y $tag\,\alpha$ como símbolos de la tangente de α.

$$\tan\alpha = \tan\hat{B} = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Contiguo}} = \frac{b}{c}$$

En un ángulo agudo:

- **Seno y Coseno:** Para ángulos agudos en un triángulo rectángulo, el valor de sen α y cos α **oscila entre 0 y 1**.

$$\mathbf{0} < \operatorname{sen}\,\alpha < \mathbf{1}$$

$$\mathbf{0} < \cos\,\alpha < \mathbf{1}$$

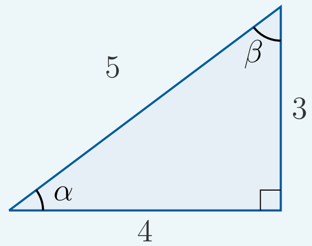
- **Tangente:** Para ángulos agudos en un triángulo rectángulo, el valor de tan α es siempre **mayor que 0**.

$$\tan\,\alpha > \mathbf{0}$$

Ejercicio Resuelto

- Calcula las siguientes razones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}\alpha$
b) $\cos\alpha$
c) $\tan\alpha$
d) $\operatorname{sen}\beta$
e) $\cos\beta$
f) $\tan\beta$



a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0,6$

b) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0,6$

c) $\tan\alpha = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Contiguo}} = \frac{3}{4} = 0,75$

d) $\operatorname{sen}\beta = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{4}{5} = 0,8$

e) $\cos\beta = \frac{\text{Contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0,6$

f) $\tan\beta = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Contiguo}} = \frac{4}{3} = 1,\overline{3}$

PIENSA Y PRACTICA

1. Averigua los ángulos de un triángulo isósceles sabiendo que el distinto mide $2\pi/7$ rad.
2. Dibuja sobre un ángulo de 45º, un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 10 cm. ¿Cuánto vale la tangente? Explica brevemente por qué.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS (ARCOFUNCIONES)

Las funciones inversas de las funciones trigonométricas son las funciones **arco** (arco seno, arco coseno, y arco tangente). Se definen así:

$$\operatorname{arcsen}(x) = y \Leftrightarrow x = \operatorname{sen}(y)$$
$$\arccos(x) = y \Leftrightarrow x = \cos(y)$$
$$\operatorname{arctg}(x) = y \Leftrightarrow x = \operatorname{tg}(y)$$

Su uso principal es calcular (despejar) el valor de un ángulo cuando lo que conocemos es el resultado de su seno, coseno o tangente.

Por ejemplo, si sabes que $\sin(\alpha) = 0{,}5$, usas $\alpha = \operatorname{arcsen}(0{,}5)$ para encontrar que $\alpha = 30°$.

En la calculadora, estas funciones suelen aparecer como $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$.

Nota

Uso de la calculadora en trigonometría

Grados sexagesimales
La introducción de ángulos en grados, minutos y segundos se efectúa de la siguiente manera: supongamos que queremos emplear el ángulo $5°35'8''$. Entonces, presionaríamos las teclas: $5\ \boxed{\circ\,'\,''}\ 35\ \boxed{\circ\,'\,''}\ 8\ \boxed{\circ\,'\,''}$.

Grados y radianes
Las calculadoras científicas permiten trabajar tanto en grados como en radianes. Para saber en qué unidad estamos trabajando, en la zona superior del indicador aparecerá una **D** si estamos trabajando en grados sexagesimales y una **R** caso de trabajar en radianes. Para cambiar de una unidad a otra, presionamos **CONFIG**>*Config. cálculo*>*Unidad angular*.

Funciones trigonométricas

- Las teclas $\boxed{\text{sen}}$, $\boxed{\text{cos}}$ y $\boxed{\text{tan}}$ devuelven el seno, coseno y tangente de un ángulo respectivamente.
- Para obtener el **Arcoseno** (sen^{-1} o asin):

$$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{sen}} \rightarrow \text{Se obtiene} \quad \text{sen}^{\mathbf{-1}}$$

- Para obtener el **Arcocoseno** ($\cos^{-1}$ o acos):

$$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{cos}} \rightarrow \text{Se obtiene} \quad \cos^{\mathbf{-1}}$$

- Para obtener la **Arcotangente** ($\tan^{-1}$ o atan):

$$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{tan}} \rightarrow \text{Se obtiene} \quad \tan^{\mathbf{-1}}$$

PIENSA Y PRACTICA

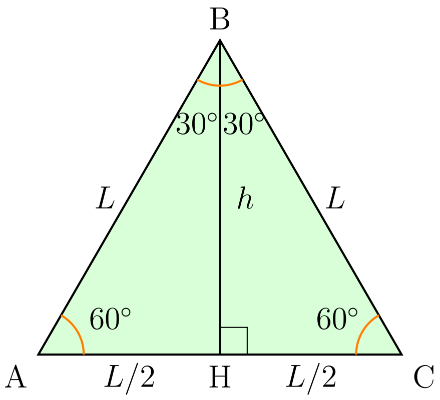
1. Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, calcula las razones trigonométricas secante, cosecante y cotangente de α.
2. Si $\text{cotan}\ \alpha = 2$, calcula las cinco razones trigonométricas del ángulo α.
3. Demuestra que $\text{cosec}^2\alpha = 1 + \text{cotan}^2\alpha$

3.2. Razones Trigonométricas de 30°, 45° y 60°

3.2.1 Razones Trigonométricas de 30° y 60°

Consideramos un triángulo equilátero de lado L. Trazamos la altura h correspondiente al lado sobre el que se apoya. Con ello queda dividido en dos triángulos rectángulos iguales cuyos ángulos miden 90°, 30° y 60°. Además la hipotenusa mide L y uno de sus catetos $L/2$. Por el teorema de Pitágoras podemos obtener el que nos falta:

$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$



Calculamos las razones trigonométricas de 30° y 60° en el triángulo ABH:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{L} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}L}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{L/2}{L} = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{L/2} = \frac{2h}{L} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}L}{L} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{L/2}{L} = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{L} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}L}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{L/2}{h} = \frac{L}{2h} = \frac{L}{2\frac{\sqrt{3}}{2}L} = \frac{L}{L\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Fíjate como también se obtiene el valor para $\tan\alpha$ usando la segunda relación fundamental de la trigonometría ($\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$)

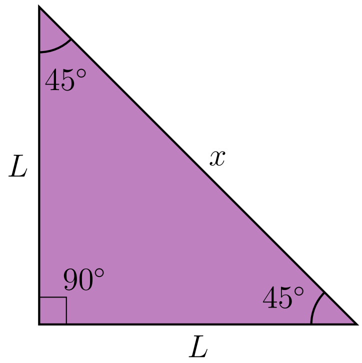
$$\frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 1} = \sqrt{3}$$

Este resultado, $\sqrt{3}$, es exactamente el mismo valor que obtuvimos para $\tan 60^\circ$.

$$\frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Este resultado, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, es exactamente el mismo valor que obtuvimos para $\tan 30^\circ$.

3.2.2 Razones Trigonométricas de 45°



Ahora vamos a trabajar con un triángulo rectángulo isósceles. Pongamos que los dos catetos tienen una longitud L, como se muestra en la figura. Utilizamos de nuevo el teorema de Pitágoras y obtenemos el valor de la hipotenusa x en función de L:

$$x = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2}$$

Ahora podemos calcular las razones trigonométricas de 45°. Antes de hacer los cálculos, podemos pensar qué valor deberían dar: como en un triángulo isósceles rectángulo los dos catetos son iguales, es lógico que $\operatorname{sen} 45°$ y $\cos 45°$ tengan el mismo valor. Además, la tangente es muy sencilla: si los catetos son iguales (o dicho de otra forma, si $\operatorname{sen} 45° = \cos 45°$), entonces su cociente vale 1.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 45° &= \frac{L}{x} = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\cos 45° &= \frac{L}{x} = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\tan 45° &= \frac{L}{L} = 1
\end{aligned}$$

Tras la deducción de las razones trigonométricas correspondientes a los ángulos especiales de 30°, 45° y 60° , se procede a presentar una tabla con sus respectivos valores.

Esta tabla es un recurso fundamental para el cálculo y análisis, ya que proporciona los valores de **seno**, **coseno** y **tangente** que deben ser manejados con precisión en la resolución de identidades y ecuaciones trigonométricas sin el uso de la calculadora.

	Seno	Coseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Truco. La forma más sencilla de recordar los valores del seno (sen α) y el coseno (cos α) para los ángulos notables (0°, 30°, 45°, 60°, 90°) es mediante la aplicación de una secuencia numérica a la fórmula general $\frac{\sqrt{\mathbf{n}}}{\mathbf{2}}$. Para el **seno**, la secuencia numérica n es **ascendente** $(0, 1, 2, 3, 4)$. Al aplicar la fórmula a estos números, se obtienen los valores: 0, $1/2$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/2$ y 1. Para el **coseno**, la secuencia n es **descendente** $(4, 3, 2, 1, 0)$, lo que significa que los valores son exactamente los mismos que los del seno, pero en orden inverso: 1, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{2}/2$, $1/2$ y 0.

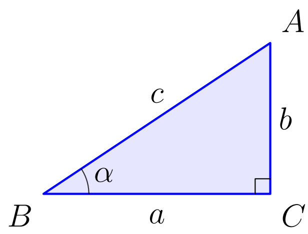
3.3. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo consiste en calcular todos sus lados y ángulos desconocidos a partir de un conjunto de datos iniciales. Siempre partimos de que conocemos un ángulo: el **ángulo recto (90º)**.

A continuación, veremos los tres casos principales que se pueden presentar.

3.3.1 Caso A: Conocidos un ángulo agudo (α) y la hipotenusa (c)

Para hallar los catetos, usamos las definiciones de seno y coseno, que relacionan un ángulo con la hipotenusa.



- El **cateto opuesto** al ángulo α será:

$$b = c \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$

- El **cateto adyacente** al ángulo α será:

$$a = c \cdot \cos(\alpha)$$

3.3.2 Caso B: Conocidos un ángulo agudo (α) y un cateto

Aquí la herramienta principal es la **tangente**, aunque también podemos usar el seno o el coseno si buscamos la hipotenusa.

- **Opción 1: Conocemos el cateto adyacente (b)**
  - **Cateto opuesto (a):** $a = b \cdot \tan(\alpha)$
  - **Hipotenusa (c):** $c = \frac{b}{\cos(\alpha)}$
- **Opción 2: Conocemos el cateto opuesto (a)**
  - **Cateto adyacente (b):** $b = \frac{a}{\tan(\alpha)}$
  - **Hipotenusa (c):** $c = \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)}$

3.3.3 Caso C: Conocidos dos lados

En este caso, primero hallamos el lado que falta usando Pitágoras y luego los ángulos usando las razones trigonométricas inversas.

- **Paso 1: Hallar el tercer lado**
  - Usamos el **Teorema de Pitágoras**: $a^2 + b^2 = c^2$
  - Si falta la hipotenusa (c): $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
  - Si falta un cateto (a): $a = \sqrt{c^2 - b^2}$
- **Paso 2: Hallar un ángulo agudo (α)**
  - Usamos las funciones inversas $(\arcsin, \arccos, \arctan)$
  - La más directa si tenemos los dos catetos es la **Arcotangente**:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}\right)$$

- **Paso 3: Hallar el otro ángulo (β)**
  - Sabiendo que los dos ángulos agudos suman 90º:

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

PIENSA Y PRACTICA

1. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 48 cm y 71 cm. Halla los dos ángulos agudos. Representa el triángulo con todas sus medidas y ángulos.
2. En un triángulo rectángulo, un ángulo mide 37º, y el cateto opuesto, 87 cm. Halla el otro cateto y la hipotenusa. Representa el triángulo con todas sus medidas y ángulos.
3. En un triángulo rectángulo, su hipotenusa mide 20 cm y un angulo mide 35º. Halla ambos catetos. Representa el triángulo con todas sus medidas y ángulos.

3.4. Aplicaciones de la resolución de triángulos rectángulos al cálculo de distancias

La trigonometría es una una herramienta clave para solucionar problemas de geometría y calcular longitudes reales. En muchos casos, el cálculo de distancias se basa directamente en la resolución de triángulos rectángulos. Para ello, se usan instrumentos como el teodolito (ver Figura 1), que mide ángulos tanto verticales como horizontales. Estos ángulos, al aplicarles las razones trigonométricas, nos permiten averiguar distancias o alturas de puntos inaccesibles.

Figura 1: Un topógrafo usando un teodolito.

El Teodolito: Este instrumento óptico-mecánico se emplea en topografía e ingeniería para medir ángulos con gran precisión. Los topógrafos lo utilizan para determinar elevaciones, alineaciones y coordenadas. Gracias a las mediciones angulares que proporciona, y aplicando las razones trigonométricas, es posible calcular con exactitud la altura de una montaña o la distancia entre dos puntos inaccesibles.

PIENSA Y PRACTICA

1. Desde un punto en el suelo situado a 50 metros de la base de una torre, se observa la cima de la torre con un ángulo de elevación de 30º. Plantea un dibujo del ejercicio y calcula la altura de la torre.

2. Se quiere construir una rampa de acceso para salvar un desnivel (altura) de **7 metros**. La normativa exige que la rampa comience a una distancia horizontal de **12 metros** de la base del desnivel.

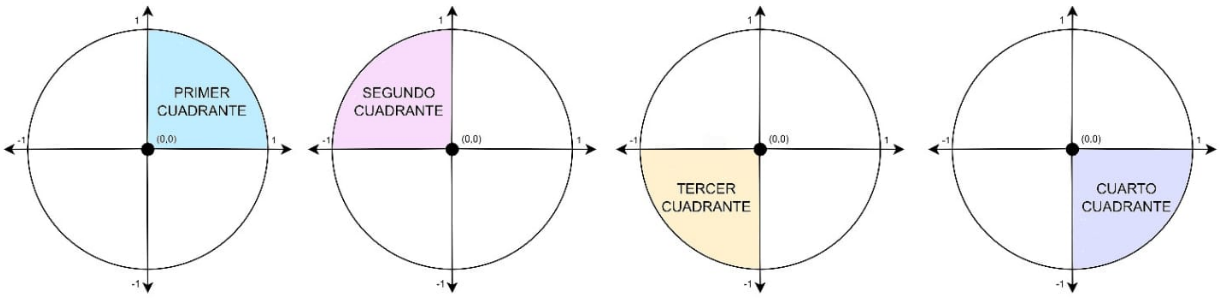
   a) Calcula la longitud total que tendrá la rampa.
   b) Calcula el ángulo de inclinación (el ángulo que la rampa forma con el suelo).
   c) Calcula el ángulo que forma la rampa con la pared vertical.

4. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

4.1. Circunferencia goniométrica. Cuadrantes

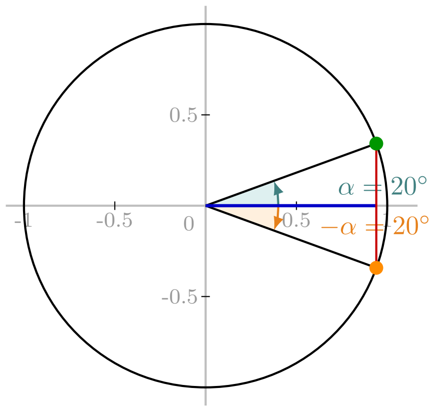
La **circunferencia goniométrica**, también llamada circunferencia trigonométrica o unitaria, es una circunferencia centrada en el punto $(0,0)$ y con radio 1 en un plano cartesiano.

Se divide en 4 regiones o cuadrantes siguiendo el sentido antihorario:



La circunferencia goniométrica se utiliza para representar ángulos. Para ello, construiremos un triángulo dentro de la circunferencia siguiendo los siguientes pasos:

1. Fijamos el vértice del triángulo en el centro de la circunferencia (punto $(0,0)$).
2. Uno de los lados lados del triángulo será fijo y coincidirá con la parte positiva del eje de abscisas (eje x).
3. Por último, colocamos el otro lado del triángulo:
   - Si el ángulo es positivo, se dibuja en sentido antihorario.
   - Si el ángulo es negativo, se dibuja en sentido horario.

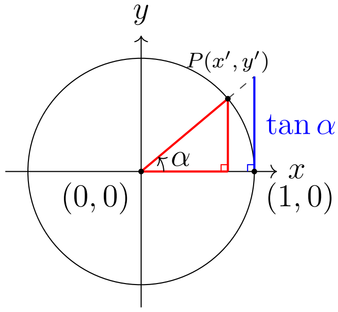


Nota

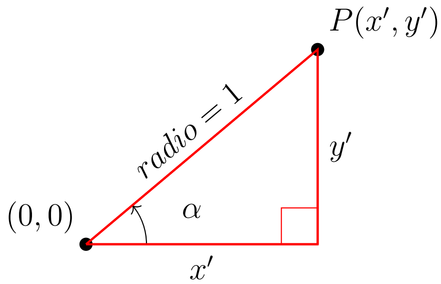
Ten en cuenta que si damos una vuelta entera a la circunferencia, partiendo desde el primer cuadrando, estaríamos formando un ángulo de 360° por lo que:

- el primer cuadrante iría desde 0° hasta 90°.
- el segundo cuadrante iría desde 90° hasta 180°.
- el tercer cuadrante iría desde 180° hasta 270°.
- el cuarto cuadrante iría desde 270° hasta 360°.

4.2. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

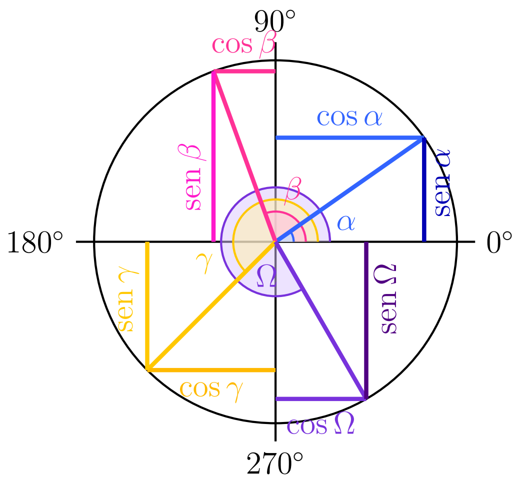


Al representar un ángulo, la semirrecta que forma uno de los lados del triángulo corta a la circunferencia. Si denominamos $P(x', y')$ al punto dónde se cortan y extraemos el triángulo en rojo, mediante las propiedades trigonométricas podemos definir $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$:



- $\operatorname{sen}\alpha = \frac{y'}{1} = y'$
- $\cos\alpha = \frac{x'}{1} = x'$
- $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y'}{x'}$,

Dependiendo del cuadrante dónde se encuentre el álngulo α, los signos del sen, cos y de la tan cambiarán:



	sen α	cos α	tan α
PRIMER CUADRANTE	+	+	+
SEGUNDO CUADRANTE	+	-	-
TERCER CUADRANTE	-	-	+
CUARTO CUADRANTE	-	+	-

Ejercicio Resuelto

- A continuación te proporciono un ejercicio en *GeoGebra* que permite observar los signos del sen y cos para los diferentes ángulos: `https://www.geogebra.org/m/rwsTkMqN`.

PIENSA Y PRACTICA

1. Dibujo el cuadrante en el que se encuentran los ángulos: 35°, $\frac{\pi}{4}$, 183°, 120°, $\frac{5\pi}{3}$. Indica el signo del sen , cos y de la tan para cada uno de ellos.
2. Calcula $\cos\alpha$ sabiendo que el $\operatorname{sen}\alpha = -0{,}45$ y que el ángulo α está en el tercer cuadrante.

4.3. Relaciones fundamentales

Las siguientes dos relaciones son consideradas fundamentales porque se derivan directamente del Teorema de Pitágoras y de las definiciones de las razones trigonométricas. Nos permiten calcular cualquier razón trigonométrica conociendo solo una de ellas.

PRIMERA RELACIÓN FUNDAMENTAL:

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \qquad [I]$$

También puede estar escrita como $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

SEGUNDA RELACIÓN FUNDAMENTAL:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad [II]$$

Demostración:

Teniendo en cuenta las razones trigonométricas directas y el triángulo anterior, estas igualdades son fáciles de demostrar:

[I] $(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2} \overset{(*)}{=} \frac{a^2}{a^2} = 1$

(*) Por el teorema de Pitágoras, se cumple que $b^2 + c^2 = a^2$.

[II]

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b\cdot a}{c\cdot a} = \frac{b}{c} = \tan\alpha.$$

Ejercicios Resueltos

- Sabiendo que $\cos(\alpha) = 0,63$, calcula $\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$.

  Usamos la **relación fundamental [I]:**

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + (0{,}63)^2 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + 0{,}3969 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - 0{,}3969 = 0{,}6031$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \sqrt{0{,}6031}$$

  Para la tangente, usamos $\tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$:

$$\tan(\alpha) = \frac{0{,}777}{0{,}63}$$

- Sabiendo que $\tan(\alpha) = 2$, calcula $\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$.

Hacemo uso de las **relaciones fundamentales [I] y [II]:**

[I]

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

[II]

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$$

Sustituimos nuestros datos en la ecuación [II]:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2$$

Cuidado: $\tan(\alpha) = 2$ *no significa que* $\operatorname{sen}(\alpha) = 2$ *y* $\cos(\alpha) = 1$. *Recuerda que el valor de sen α y cos α* ***oscila entre 0 y 1****. Este es un error muy común.*

Despejamos el seno y tenemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = 2 \cdot \cos(\alpha)$$

Ahora, sustituimos esta expresión en la ecuación [I]:

$$2 \cdot \cos(\alpha))^2 + \cos^2(\alpha) = 1$$

(Para calcular $2 \cdot \cos(\alpha))^2$, pensemoslo como $(2c)^2 = 4c^2$)

$$4 \cdot \cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$5 \cdot \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{5}$$

$$\cos(\alpha) \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{5}}$$

Trabajamos con triángulos rectángulos, por lo que α es agudo y sus razones seno y coseno son siempre positivas. Por eso tomamos solo la raíz positiva.

Finalmente, usamos la relación que despejamos al principio para hallar $\operatorname{sen}(\alpha)$:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = 2 \cdot \cos(\alpha) = \frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{5}}$$

PIENSA Y PRACTICA

1. **Ejercicio:** Si $\operatorname{sen}(\beta) = \frac{4}{5}$, ¿cuánto valen $\cos(\beta)$ y $\tan(\beta)$
2. **Ejercicio:** Si $\tan(\beta) = 0,53$, ¿cuánto valen $\cos(\beta)$ y $\operatorname{sen}(\beta)$?

¡Ten en cuenta!

Cuando aplicamos $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y despejamos, obtenemos dos posibles soluciones: $\cos\theta = \pm\sqrt{\cdots}$ o $\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\cdots}$. Esto sucede porque al extraer una raíz cuadrada siempre aparecen dos valores, uno positivo y otro negativo. Sin embargo, en ejercicios con triángulos rectángulos, el ángulo es agudo (primer cuadrante), por lo que tomamos solo la solución positiva.

4.4. Otras funciones trigonométricas. Otras relaciones

OTRAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Otras razones trigonométricas de un ángulo α son la **cosecante**, la **secante** y la **cotangente**. Sus notaciones y definiciones (como inversas de las razones principales) son:

$$\operatorname{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \quad ; \quad \sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad ; \quad \operatorname{cotan}\,\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

OTRAS RELACIONES FUNDAMENTALES

Con su definición, aparecen nuevas relaciones trigonométricas. Las primeras son evidentes por definición:

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\,\alpha = 1 \quad ; \quad \cos\alpha\cdot\sec\,\alpha = 1 \quad ; \quad \tan\alpha\cdot\operatorname{cotan}\,\alpha = 1 \quad [III]$$

Las otras dos, que también son fundamentales y se derivan de la primera, son:

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha \qquad [IV]$$
$$\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{cotan}^2\alpha \qquad [V]$$

Demostración (de la relación [IV]):

A partir de $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, dividimos a ambos miembros entre $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

(La demostración de [V] se haría de forma idéntica, pero dividiendo por $\operatorname{sen}^2\alpha$).

4.5. Reducción al primer cuadrante

A cualquier ángulo del segundo, tercer o cuarto cuadrante le podemos asociar un ángulo del primer cuadrante de manera que sen, cos y tan tienen el mismo valor absoluto en ambos ángulos. A esto se le denomina **reducción al primer cuadrante**.

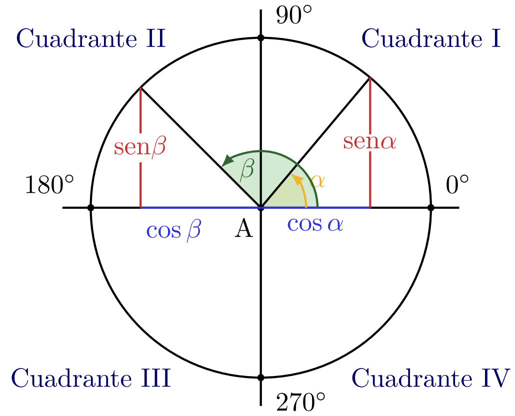
4.5.1 Ángulos del segundo cuadrante

En el primer cuadrante tendremos el ángulo α y en el segundo cuadrante el ángulo β. Podemos escribir β como $\beta = 180° - \alpha$ de manera que:

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\beta = \cos(180° - \alpha) = -\cos\beta$$

$$\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$$



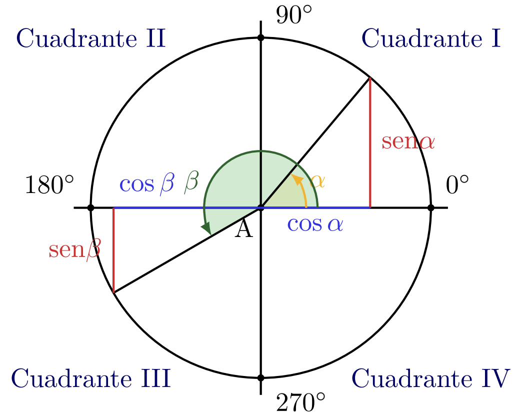
4.5.2 Ángulos del tercer cuadrante

En este caso, tenemos que el ángulo α se encuentra en el primer cuadrante y el ángulo β en el tercero. Podemos escribir que $\beta = 180° + \alpha$ obteniendo entonces que:

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\beta = \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}(180° + \alpha)}{\cos(180° + \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha$$



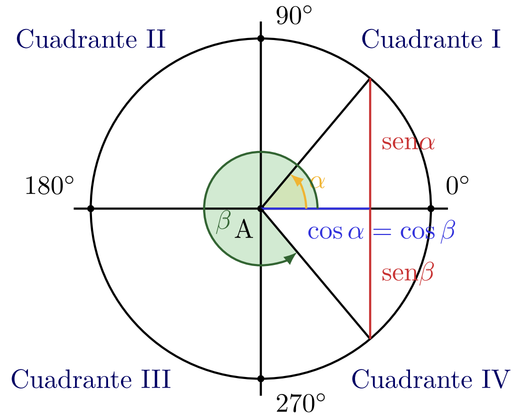
4.5.3 Ángulos del cuarto cuadrante

Si el ángulo β se encuentra en el cuarto cuadrante y α se mantiene en el primer cuadrante, podemos escribir β como $\beta = 360° - \alpha$ y así:

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(360° - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\beta = \cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}(360° - \alpha)}{\cos(360° - \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$



Nota

Como podemos observar:

- para reducir un ángulo del **segundo cuadrante** al primero basta con hacer $180° - \beta$.
- para reducir un ángulo del **tercer cuadrante** al primero basta con hacer $180° + \beta$.
- para reducir un ángulo del **cuarto cuadrante** al primero basta con hacer $360° - \beta$.

PIENSA Y PRACTICA

1. Sitúa el ángulo dado sobre la circunferencia goniométrica y calcula sus razones:

   a) $150°$ b) $240°$
   c) $300°$ d) $225°$
   e) $1920°$ f) $-30°$

2. Relaciona las razones trigonométricas con las de un ángulo α del primer cuadrante:

   a) $\frac{\pi}{2} + \alpha$ b) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$
   c) $\frac{3\pi}{2} + \alpha$

Reto

Calcula (sin utilizar la calculadora) el valor de las expresiones:

a) $\dfrac{\operatorname{cotan} 270° + \operatorname{sen} 270°}{2 \cdot \tan 30°}$

b) $\dfrac{\operatorname{sen} 120° - \cos 45°}{\tan 30° \cdot \operatorname{cotan} 135°}$

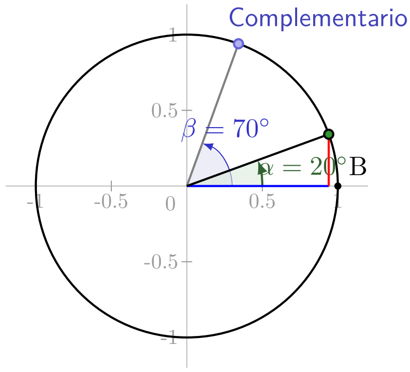
3. Une con flechas cada expresión trigonométrica de la columna izquierda con su resultado simplificado en la columna derecha.

$\dfrac{\operatorname{sen}(180° - \alpha)}{\operatorname{sen}\alpha}$ •	• -1
$\dfrac{\cos(180° + \alpha)}{\cos\alpha}$ •	• $\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(360° - \alpha)$ •	• 1
$\cos(360° - \alpha)$ •	• $-\operatorname{tg}\alpha$

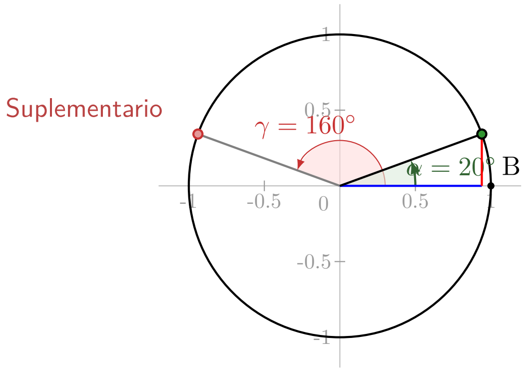
IMPORTANTE: Recuerda los signos de cada cuadrante.

4.6. Ángulos complementarios, suplementarios y opuestos. Ángulos de más de 360°

Se dice que dos ángulos son **complementarios** si suman 90° (los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios).



En estos casos se cumplen que los valores de sus senos y cosenos están intercambiados (como sucede con α y β). Conocer esto nos va a permitir relacionar más ángulos entre los diferentes cuadrantes.

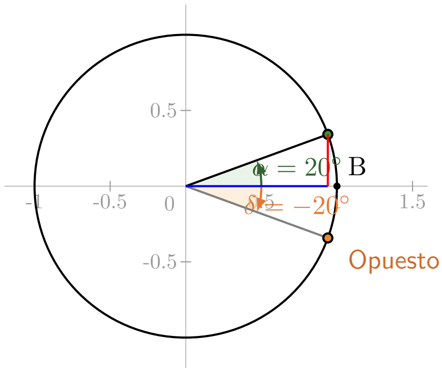


Se dice que dos ángulos son **suplementarios** si suman 180º.

El suplementario de un ángulo agudo es $180° - \alpha$ (su ángulo del 2° cuadrante). Comparten valores para sus razones trigonométricas, pero no sus signos.

Los ángulos **opuestos** son los que miden igual, pero tienen distinto signo.

El ángulo **opuesto** $-\alpha$ (en nuestra figura δ) se representa en sentido antihorario y coincide con $360° - \alpha$ (su ángulo del 4° cuadrante).



¿Qué sucede cuando tenemos un ángulo mayor de 360°?
Si dividimos nuestro ángulo α entre 360°, su cociente indicará el número de vueltas completas que dadas mientras que el resto indicará un ángulo cuyas razones trigonométricas coinciden con α.

Ejercicio Resuelto

- En el siguiente enlace de *GeoGebra*, `https://www.geogebra.org/m/AbpeHuyd`, podemos ver para diferentes ángulos, su ángulo complementario, su suplementario y su opuesto.

Ejercicio Resuelto

- Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\alpha = 4725°$ y $\beta = 4080°$.

  Calculamos el resto de las divisiones de los ángulos dados entre 360, esto es,

$$4725 = 360 \cdot 13 + 45 \quad \text{y} \quad 4080 = 360 \cdot 11 + 120$$

  Así, las razones trigonométricas de 4725° coinciden con las de 45°, es decir,

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \sec\alpha = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha = 1$$

  Las razones trigonométricas de 4080° coinciden con las de 120°, suplementario de 60°:

$$\operatorname{sen} 4080° = \operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 4080° = \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 4080° = \operatorname{tg} 120° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}, \quad \operatorname{cotg} 4080° = \operatorname{cotg} 120° = -\operatorname{cotg} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 4080° = \sec 120° = -\sec 60° = -2, \quad \operatorname{cosec} 4080° = \operatorname{cosec} 120° = \operatorname{cosec} 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

PIENSA Y PRACTICA

1. Halla las razones trigonométricas del ángulo de $\frac{5\pi}{12}$, sabiendo que las razones de $\frac{\pi}{12}$ son:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = 0,259 \quad ; \quad \cos\frac{\pi}{12} = 0,966 \quad ; \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 0,268$$

2. Obtén las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = -20°$.

3. Sin usar la calculadora y sabiendo que $\operatorname{sen} 20° = 0{,}432$, $\cos 20° = 0{,}939$ y $\tan 20° = 0{,}364$, calcula:

   a) $\operatorname{sen} 160°$
   b) $\cos 200°$
   c) $\tan(-20°)$
   d) $\tan 70°$

4. Calcula, sin usar la calculadora, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

   a) 120°
   b) 240°
   c) 270°
   d) 1890°

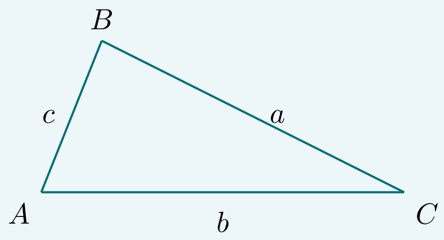
5. Resolución de triángulos cualquiera

Las definiciones de seno, coseno y tangente que hemos aplicado en triángulos rectángulos no se pueden aplicar directamente en triángulos no rectángulos. Para resolver triángulos no rectángulos se utilizan dos teoremas muy importantes en trigonometría: el teorema de los senos y el teorema de los cosenos. Veamos a continuación en qué consisten estos teoremas:

5.1. Teorema de los senos

El **Teorema de los Senos** establece que, para un triángulo cualquiera con lados **a**, **b** y **c** y con ángulos interiores **A**, **B** y **C** (son los ángulos opuestos a los lados, respectivamente), se cumple la relación:

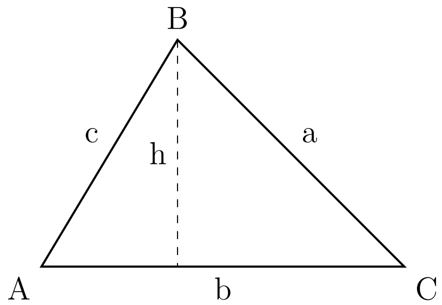
$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\widehat{A})} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\widehat{B})} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\widehat{C})}$$



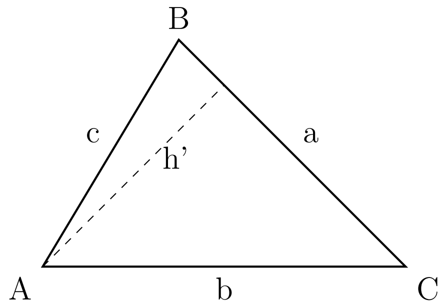
Demostración:

Consideremos el triángulo ABC y tracemos dos alturas cualesquiera h y h' que dividen el triángulo no rectángulo en dos triángulos rectángulos:

1º Triángulo:



2º Triángulo:



Aplicando la definición de seno en el primer triángulo a los dos triángulos rectángulos que contienen la altura h:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h}{c} \to h = c \operatorname{sen}\hat{A}$$
$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h}{a} \to h = a \operatorname{sen}\hat{C}$$

Por tanto:

$$c \operatorname{sen}\hat{A} = a \operatorname{sen}\hat{C} \to \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Aplicando la definición de seno en el segundo triángulo a los dos triángulos rectángulos que contienen la altura h':

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{h'}{c} \rightarrow h' = c\operatorname{sen}\hat{B}$$
$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h'}{b} \rightarrow h' = b\operatorname{sen}\hat{C}$$

Por tanto:

$$c\operatorname{sen}\hat{B} = b\operatorname{sen}\hat{C} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Entonces, se deduce que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

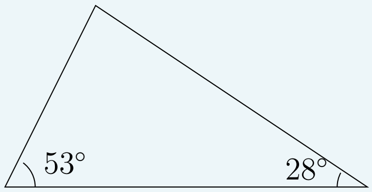
Nota

El teorema de los senos permite resolver triángulos en dos situaciones:

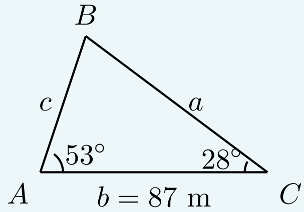
- Cuando se conocen **dos ángulos y un lado** (el tercer ángulo se deduce sabiendo que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°).
- Cuando se conocen **dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos**.

Ejercicios Resueltos

- **Hallar los lados desconocidos de este triángulo.**



Empezamos hallando el ángulo desconocido:



$$\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180° - (53° + 28°) = 99°$$

Aplicamos el teorema de los senos:

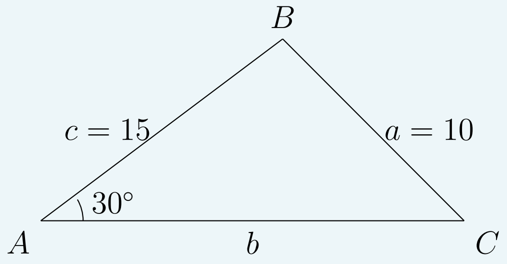
$$\frac{a}{\text{sen } 53°} = \frac{87}{\text{sen } 99°} = \frac{c}{\text{sen } 28°}$$

$$a = \frac{\text{sen } 53° \cdot 87}{\text{sen } 99°} \approx 70,35 \text{ m}$$

$$c = \frac{\text{sen } 28° \cdot 87}{\text{sen } 99°} \approx 41,35 \text{ m}$$

Observa: Hemos podido aplicar el teorema de los senos porque conocemos un ángulo y su lado opuesto.

- **En el siguiente triángulo de lados $c = 15$ cm y $a = 10$ cm. Calcular cuánto mide el ángulo $\widehat{C}$ sabiendo que el ángulo $\widehat{A}$ mide $30°$.**



Como conocemos los lados a y c y el ángulo $\widehat{A}$, aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\widehat{A})} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\widehat{C})}$$

Por tanto,

$$\frac{10}{\operatorname{sen}(30°)} = \frac{15}{\operatorname{sen}(\widehat{C})}$$

Despejamos el seno de $\widehat{C}$:

$$\operatorname{sen}(\widehat{C}) = \frac{15 \cdot \operatorname{sen}(30°)}{10} = \frac{15 \cdot 0{,}5}{10} = 0{,}75$$

Finalmente, despejamos $\widehat{C}$ utilizando la inversa del seno (arcoseno):

$$\widehat{C} = \operatorname{arc\,sen}(0{,}75) \approx 48{,}59°$$

Luego el ángulo es

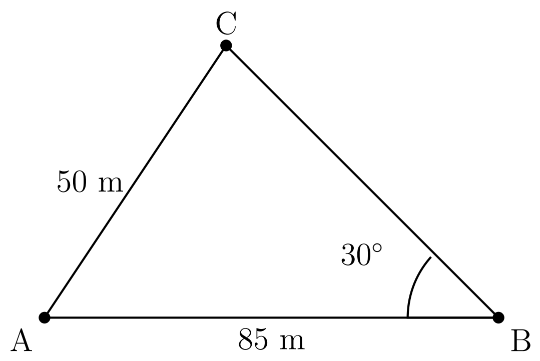
$$\widehat{C} \approx 48{,}59°$$

PIENSA Y PRACTICA

1. Aplica el teorema de los senos para resolver los siguientes triángulos:

   a) Halla los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC sabiendo que $\overline{AC} = 100$ cm, $\widehat{A} = 42°$ y $\widehat{C} = 18°$.

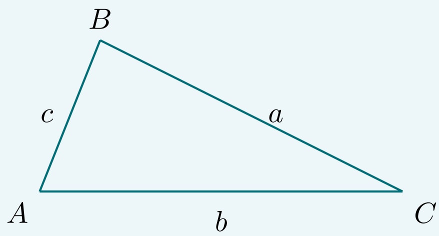
   b) ¡Atención! Hay dos soluciones.



5.2. Teorema de los cosenos

El **Teorema de los cosenos** establece que, para un triángulo cualquiera con lados **a**, **b** y **c** y con ángulos interiores **A**, **B** y **C** (son los ángulos opuestos a los lados, respectivamente), se cumple que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$



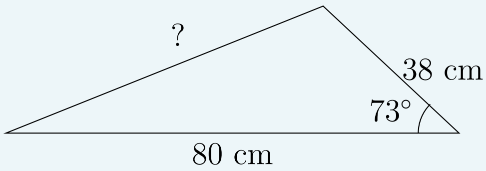
Nota

El teorema de los cosenos es una generalización del teorema de Pitágoras. Es decir, cuando el triángulo es rectángulo, el teorema de los cosenos se reduce al teorema de Pitágoras. Podemos utilizar el teorema de los cosenos si en un triángulo conocemos:

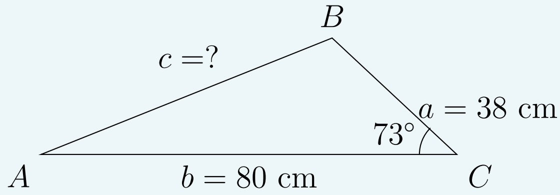
- **Los tres lados** (para calcular un ángulo).
- **Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos** (para calcular el tercer lado).
- **Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos**.

Ejercicios Resueltos

- **Hallar los elementos desconocidos en este triángulo.**



Primero nombramos los elementos del triángulo:



Empezamos obteniendo el lado c por el teorema del coseno:

$$c^2 = 80^2 + 38^2 - 2 \cdot 80 \cdot 38 \cdot \cos 73^\circ$$

$$c^2 = 6066{,}38$$

$$c = 77{,}89 \text{ m}$$

Ahora aplicamos el teorema de los senos para obtener los ángulos desconocidos, es decir, $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}$$

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{38}{77{,}89} \cdot \operatorname{sen} 73^\circ$$

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = 0{,}46655$$

$$\widehat{A} = 27{,}81^\circ = 27^\circ\, 48'\, 36''$$

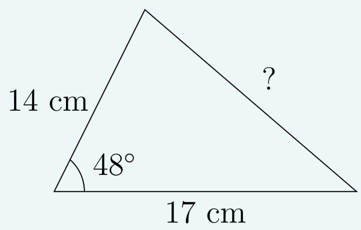
Finalmente hallamos $\widehat{B}$:

$$\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C})$$

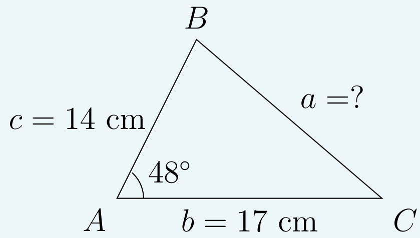
$$\widehat{B} = 180^\circ - (73^\circ + 27^\circ\, 48'\, 36'')$$

$$\widehat{B} = 79^\circ\, 11'\, 24''$$

- **Hallar el lado desconocido de este triángulo.**



Primero nombramos los elementos del triángulo:



Aplicamos el teorema del coseno para hallar el lado a (opuesto al ángulo A):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$a^2 = 17^2 + 14^2 - 2 \cdot 17 \cdot 14 \cdot \cos 48° = 166,49 \text{ cm}^2$$

$$a = \sqrt{166,49} = 12,9 \text{ cm}$$

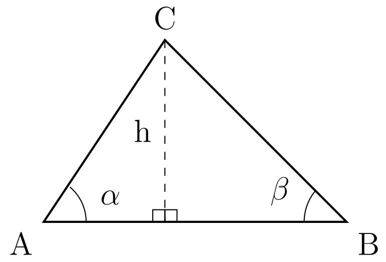
Ahora, que conocemos el lado a y su ángulo opuesto $\widehat{A}$, se deja como ejercicio aplicar el teorema de los senos para hallar los ángulos $\widehat{B}$ o $\widehat{C}$.

PIENSA Y PRACTICA

1. Calcula el lado c conociendo $a = 7$ m, $b = 22$ m y $\widehat{C} = 40°$.
2. En un triángulo conocemos los datos, a = 107 m y c = 48 m y el ángulo que forman, $\widehat{B} = 119°$. Halla el otro lado y los dos ángulos desconocidos.

5.3. Resolución de triángulos cualesquiera

Las herramientas fundamentales para resolver triángulos no rectángulos son los **teoremas del seno y del coseno**, que hemos estudiado en las secciones anteriores. Sin embargo, existe una estrategia alternativa que consiste en **trazar una altura** del triángulo, dividiéndolo así en dos triángulos rectángulos que podemos resolver utilizando las razones trigonométricas básicas.



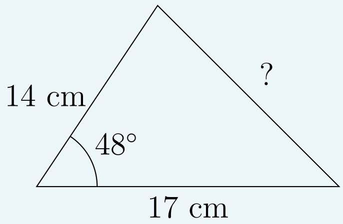
Ambos enfoques son válidos, pero los teoremas del seno y del coseno nos permiten resolver los triángulos de forma más directa y sistemática. La estrategia general consiste en:

1. **Identificar los datos conocidos** (lados y ángulos).
2. **Seleccionar el teorema apropiado** según los datos disponibles.
3. **Aplicar los teoremas** hasta encontrar todas las incógnitas.

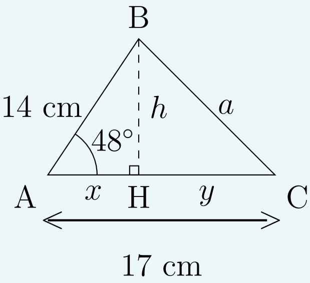
En esta sección practicaremos la aplicación conjunta de ambos teoremas para resolver diferentes tipos de triángulos.

Ejercicios Resueltos

- **Resolver el triángulo aplicando la estrategia de la altura**



Trazamos la altura desde B para dividir el triángulo en dos triángulos rectángulos.



1º: Triángulo ABH (rectángulo en H):

$$h = 14 \cdot \operatorname{sen}(48°) \approx 10{,}40 \text{ cm}$$

$$x = 14 \cdot \cos(48°) \approx 9{,}37 \text{ cm}$$

2º: Calculamos el segmento a:

$$a = 17 - 9{,}37 = 7{,}63 \text{ cm}$$

3º: Triángulo CBH:

$$\overline{BC} = \sqrt{10{,}40^2 + 7{,}63^2} \approx 12{,}90 \text{ cm}$$

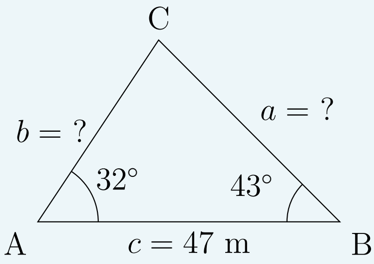
4º: Ángulos:

$$\widehat{C} \approx 53{,}7°, \quad \widehat{B} \approx 78{,}3°$$

Solución final:

- $\overline{BC} \approx 12{,}90$ cm
- $\widehat{C} \approx 53{,}7°, \quad \widehat{B} \approx 78{,}3°$

- **En un triángulo ABC conocemos $\widehat{A} = 32°$, $\widehat{B} = 43°$ y el lado $c = 47\,\text{m}$. Calcula los lados b y a.**



Primero hallamos el ángulo desconocido:

$\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} = 180° - 32° - 43° = 105°$.

Cálculo del lado b:

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} \quad\Longrightarrow\quad b = \frac{c\cdot\operatorname{sen}\widehat{B}}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$

Sustituyendo:

$$b = \frac{47\cdot\operatorname{sen}(43°)}{\operatorname{sen}(105°)}$$

Con aproximaciones:

$$\operatorname{sen}(43°) \approx 0{,}6820, \qquad \operatorname{sen}(105°) \approx 0{,}9659$$

$$b \approx \frac{47\cdot 0{,}6820}{0{,}9659} \approx 33{,}18\,\text{m}$$

Cálculo del lado a:

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{c\cdot\operatorname{sen}\widehat{A}}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$

Sustituyendo:

$$a = \frac{47\cdot\operatorname{sen}(32°)}{\operatorname{sen}(105°)}$$

Con aproximaciones:

$$\operatorname{sen}(32°) \approx 0{,}5299$$

$$a \approx \frac{47\cdot 0{,}5299}{0{,}9659} \approx 25{,}78\,\text{m}$$

Solución final:

- $b \approx 33{,}18\,\text{m}$
- $a \approx 25{,}78\,\text{m}$
- $\widehat{C} = 105°$

PIENSA Y PRACTICA

1. En un triángulo ABC, halla el lado $\overline{BC}$ conociendo los lados $\overline{AB} = 37\,\text{cm}$ y $\overline{AC} = 50$ cm y el ángulo $\widehat{A} = 32°$.

2. Halla los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC sabiendo que el lado $\overline{AC} = 100$ cm y los ángulos $\widehat{A} = 42°$ y $\widehat{C} = 18°$.

3. Halla los lados b y c de un triángulo ABC conociendo que $a = 56\,\text{m}$, $\widehat{B} = 52°$ y $\widehat{C} = 112°$.

4. Calcula $\widehat{C}$ de un triángulo ABC conociendo que $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ y $\widehat{B} = 30°$.

5. Resuelve los siguientes triángulos:

   a) $a = 12\,\text{cm},\ b = 16\,\text{cm},\ c = 10\,\text{cm}$
   b) $b = 22\,\text{cm},\ a = 7\,\text{cm},\ \widehat{C} = 40°$
   c) $b = 4\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm},\ \widehat{A} = 105°$
   d) $a = 4\,\text{m},\ \widehat{B} = 45°,\ \widehat{C} = 60°$
   e) $b = 5\,\text{m},\ \widehat{A} = \widehat{C} = 35°$
   f) $a = b = 10\,\text{cm},\ \widehat{C} = 40°$
   g) $a = 5\,\text{cm},\ \widehat{A} = 75°,\ \widehat{B} = 45°$
   h) $a = 16\,\text{cm},\ \widehat{A} = 90°,\ \widehat{C} = 30°$

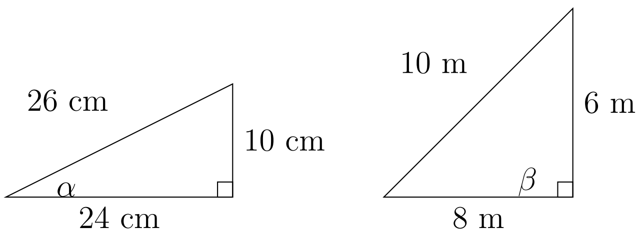
6. Ejercicios y problemas

Sistemas de medida de ángulos

1. Pasa de radianes a grados: $\pi/4$, $\pi/2$, 4π, $\frac{2}{3}\pi$ rad.
2. Pasa de grados a radianes: 30°, 200°, 500°, 60°, 45°.
3. Pasa 0,4 radianes a grados y redondea a las centésimas.
4. Halla el área de un sector circular de ángulo central 1.86 rad en un círculo de 3.1 m de radio.
5. Halla la longitud de un arco con ángulo central $\pi/3$ radianes sobre un círculo de 6 mm de diámetro.
6. Halla en radianes el ángulo central de un arco de 252 cm de longitud sobre un círculo de 145 cm de radio.
7. Halla en grados el ángulo central de un sector circular de 20 cm^2 en un círculo de 5 cm de radio.

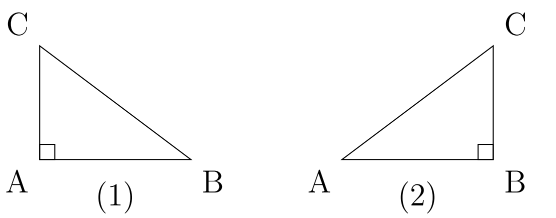
Razones trigonométricas de un ángulo agudo

8. Expresa con una fracción cada una de las razones trigonométricas de α y β.



9. Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de estos triángulos rectángulos donde a es la hipotenusa y b y c los catetos:
   a) $b = 56$ cm; $a = 62,3$ cm
   b) $b = 33,6$ cm; $c = 4,5$ cm
   c) $c = 16$ cm; $a = 36$ cm

10. Indica qué razón o razones trigonométricas representan estos cocientes en el triángulo (1) o en el (2):



a) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

b) $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$

c) $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$

d) $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

Relaciones trigonométricas fundamentales

13. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla:

	30°	45°	60°
sen α			
$\cos\alpha$			
tg α			

14. Completa la tabla en tu cuaderno siendo $\alpha < 90^\circ$. Utiliza fracciones y radicales.

$\operatorname{sen}\alpha$	$\frac{2}{3}$		
$\cos\alpha$		$\frac{\sqrt{2}}{3}$	
$\tan\alpha$			2

15. Calcula, en cada caso, las razones trigonométricas que faltan ($\alpha < 90^\circ$), sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora:

    a) sen $\alpha = 0,28$
    b) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$
    c) tg $\alpha = \sqrt{5}$

16. Completa con la calculadora en tu cuaderno.

α	15°	$55^\circ 20'$	$72^\circ 25' 40''$	$85,5^\circ$
sen α				
$\cos\alpha$				
tg α				

17. Halla el ángulo $\alpha < 90^\circ$ en cada caso. Exprésalo en grados, minutos y segundos:

    a) sen $\alpha = 0,58$
    b) $\cos\alpha = 0,75$
    c) tg $\alpha = 2,5$
    d) sen $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$
    e) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$
    f) tg $\alpha = 3\sqrt{2}$

18. Halla, con la calculadora, las otras razones trigonométricas del ángulo $\alpha < 90^\circ$ en cada caso:

    a) sen $\alpha = 0,23$
    b) $\cos\alpha = 0,74$
    c) tg $\alpha = 1,75$
    d) sen $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$
    e) tg $\alpha = \sqrt{3}$
    f) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolución de triángulos

19. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos ($\widehat{C} = 90°$) hallando la medida de todos los elementos desconocidos:

    a) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm. Halla c, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$.

    b) $a = 43$ m, $\widehat{A} = 37°$. Halla b, c, $\widehat{B}$.

    c) $c = 5,8$ km, $\widehat{A} = 71°$. Halla a, b, $\widehat{B}$.

20. Cuando los rayos de sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?

21. Para medir la altura de un árbol, nos situamos a 20 m de su base y observamos, desde el suelo, su parte más bajo un ángulo de 50°. ¿Cuánto mide? (Nota: Hay un error en el enunciado original: "su parte más bajo un ángulo de 50º". Asumo que dice "su parte más alta con un ángulo de 50º").

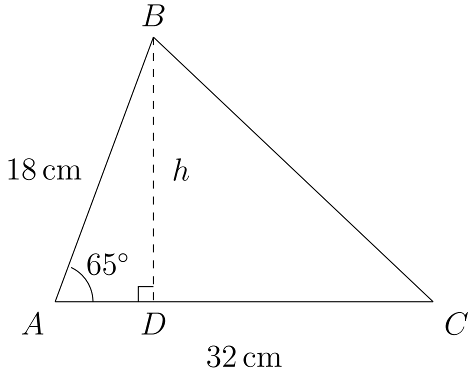
22. Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?

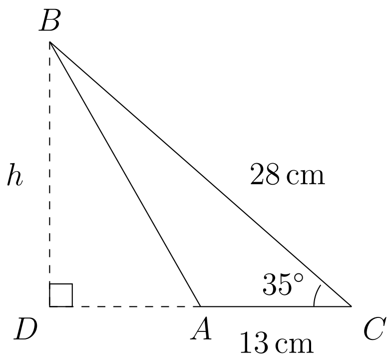
ENTRÉNATE Y PRACTICA

23. Un mástil está sujeto a tierra con dos cables de 12 m que forman ángulos de 50° con el suelo. Calcula la altura del mástil y la distancia de la base a los puntos de sujeción.

24. Calcula el perímetro y el área de un triángulo isósceles en el que el ángulo desigual mide 72° y la medida del lado opuesto a ese ángulo es de 16 m.

25. Calcula la altura, h, y el área de cada triángulo:





26. Sitúa en la circunferencia goniométrica estos ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas. Comprueba con la calculadora.

a) 128°	d) 98°	g) 1320°
b) 198°	e) 285°	h) 740°
c) 87°	f) 305°	i) −105°

27. Explica en qué cuadrante está α, en cada caso, y calcula las restantes razones trigonométricas:

    a) $\operatorname{sen}\alpha = 0,6; \quad \cos\alpha < 90°$
    b) $\cos\alpha = 2/3; \quad \tan\alpha > 270°$
    c) $\tan\alpha = -2; \quad \operatorname{sen}\alpha > 0°$
    d) $\cos\alpha = -1/3; \quad \tan\alpha < 0°$

28. Justifica en qué cuadrante está α, en cada caso, y calcula las restantes razones trigonométricas:

    a) $\operatorname{sen}\alpha = 4/5; \quad \alpha < 90°$
    b) $\cos\alpha = 2/3; \quad \alpha > 270°$
    c) $\tan\alpha = 3; \quad \alpha > 180°$
    d) $\cos\alpha = -3/4; \quad \alpha < 180°$

29. Indica en qué cuadrante se encuentra el ángulo α:

    a) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ y $\cos\alpha < 0$
    b) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ y $\tan\alpha > 0$
    c) $\operatorname{sen}\alpha < 0$ y $\tan\alpha > 0$
    d) $\operatorname{sen}\alpha < 0$ y $\tan\alpha < 0$

30. Calcula el valor de las siguientes expresiones sin utilizar la calculadora:

    a) $\operatorname{sen} 45° - \cos 45°$
    b) $\operatorname{sen} 30° + \cos 60°$
    c) $\operatorname{sen} 30° + \cos 30°$
    d) $\tan 30° + \tan 60°$
    e) $\tan 45° - \cos 60°$
    f) $\tan 45° + \operatorname{sen} 45°$

RESUELVE PROBLEMAS

31. Un carpintero quiere construir una escalera de tijera cuyos brazos, una vez abiertos, formen un ángulo de 60°. Si la altura de la escalera, estando abierta, es de 2 m, ¿Qué longitud deberá tener cada brazo?

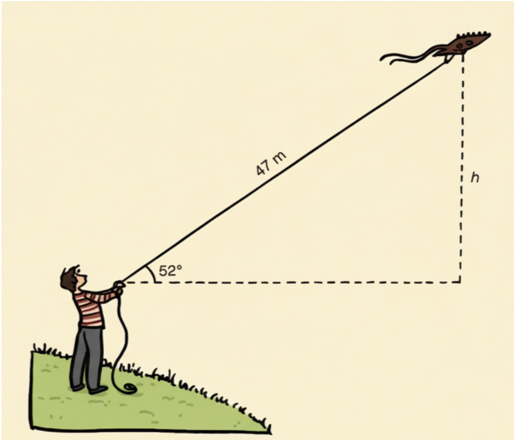
32. Víctor y Ramón quieren saber la altura a la que se encuentra el campanario de la iglesia de su pueblo. Para ello, Víctor sube al campanario y lanza el extremo de una cuerda hacia fuera. El pie de la torre no es accesible. Ramón se aleja con la cuerda hasta que se tensa y la clava en el suelo. Forma un ángulo de 42°. La cuerda mide 51 m.

    a) ¿A qué altura está el campanario?
    b) ¿A qué distancia se encuentra Ramón de la base del campanario?

33. Los brazos de un compás miden 12 cm y forman un ángulo de 60°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa apertura?

34. Observamos el punto más alto de una torre bajo un ángulo de 72° sobre la horizontal. Si nos alejamos 350 m, lo vemos bajo un ángulo de 31°. ¿Cuál es la altura de la torre?

35. Alfonso está haciendo volar su cometa. Ha soltado ya 47 m de hilo y el ángulo que forma la cuerda de la cometa con la horizontal es de 52°. ¿Cuál es la altura h a la que se encuentra la cometa?

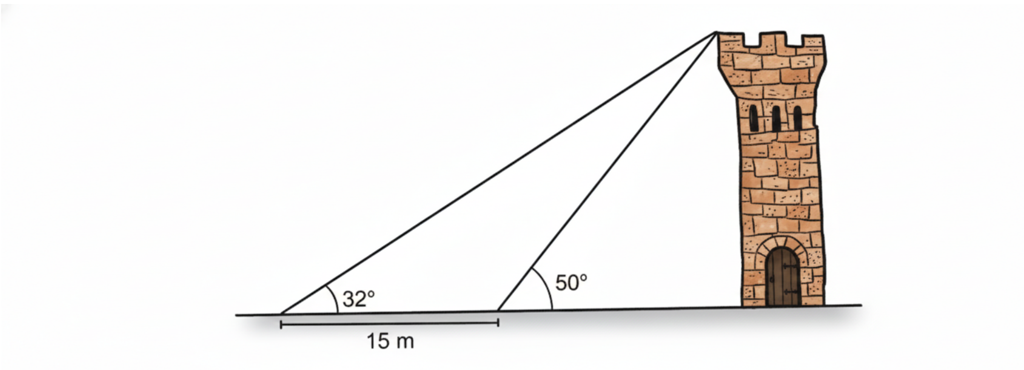


36. Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12 %. ¿Qué ángulo forma este tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7 km?

37. En una ruta de montaña una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1065 m. Halla la pendiente de esa ruta y el ángulo que forma con la horizontal.

38. Un avión que vuela a 3000 m de altura ve un pueblo A bajo un ángulo de 40° con respecto a la horizontal de vuelo (ángulo de depresión) y otro pueblo B bajo un ángulo de 15°. ¿Qué distancia hay entre A y B?

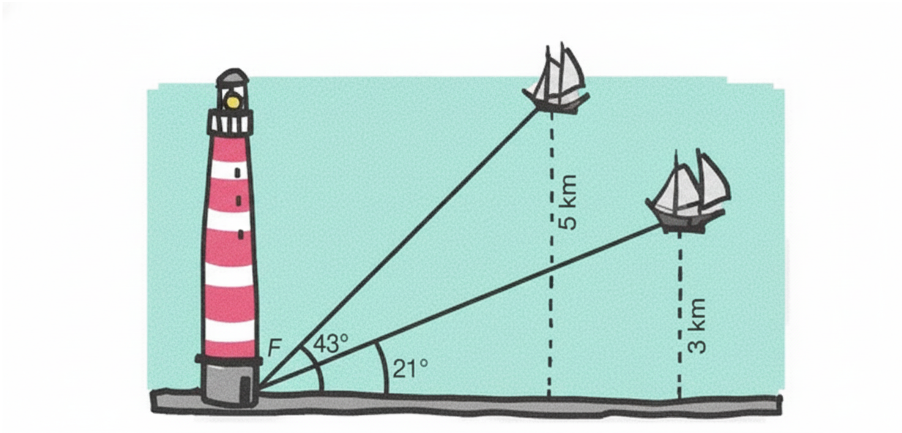
39. Desde el lugar donde me encuentro la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal. Si me acerco 15 m, el ángulo es de 50°. ¿Cuál es la altura de la torre?



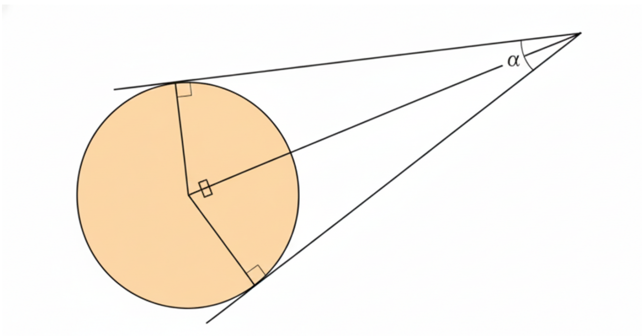
40. Dos edificios distan entre sí 150 m. Desde un punto que está entre los edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20°. ¿Cuál es la altura de los edificios si sabemos que miden lo mismo?

41. Una escultura está colocada sobre un pedestal de $1,5$ m de altura. Desde un punto del suelo se ve la escultura bajo un ángulo de 42° y el pedestal bajo un ángulo de 18°. Calcula la altura de la escultura.

42. Desde el faro F se observa el barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa, y el barco B bajo un ángulo de 21°. El barco A está a 5 km de la costa y el barco B a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.



43. El diámetro de una moneda de dos euros es de $2,5$ cm (aprox.). Averigua el ángulo que forman sus tangentes trazadas desde una distancia de $4,8$ cm del centro, como indica la siguiente figura:



RETOS

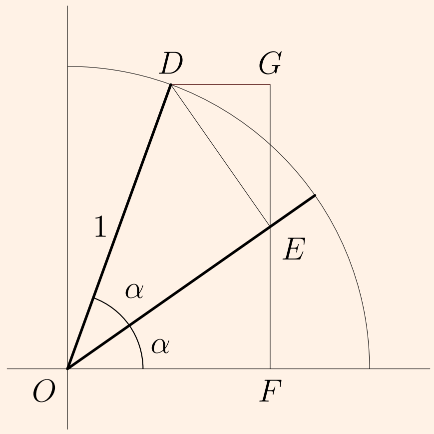
1. Dos barcos parten de un puerto a la misma hora, uno con un ángulo de 34° a velocidad de 16 nudos y otro a 131° a velocidad de 9 nudos. Sabiendo que un nudo es 1,852 km/h, calcula a qué distancia estarán al cabo de 100 minutos.

2. Deduce la fórmula del seno del doble de un ángulo mediante los siguientes pasos:

   a) Razona que el triángulo ODE es semejante al triángulo OEF, pero no congruente. Observa que OE<1.

   b) Averigua los ángulos del triángulo DEG.

   c) Calcula la longitud de sus lados. La suma de la longitud de los segmentos GE y EF dará el resultado que deseamos (¿Ves por qué?).



   d) Con un esquema similar, ¿podrías generalizarlo a la suma de dos ángulos cualesquiera?

7. Formulario

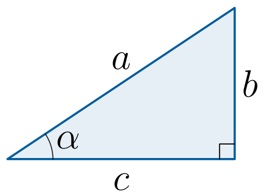
Sistema internacional

$$\text{grados} = \text{radianes} \cdot \frac{360}{2\pi}$$

$$\text{radianes} = \text{grados} \cdot \frac{2\pi}{360}$$

Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Razones trigonométricas

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{b}{c}$$

Ecuaciones fundamentales

$$\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\text{sen}(\alpha) \cdot \text{cosec}(\alpha) = 1$$

$$\cos(\alpha) \cdot \sec(\alpha) = 1$$

$$\tan(\alpha) \cdot \text{cotan}(\alpha) = 1$$

$$\text{cosec}^2(\alpha) = 1 + \text{cotan}^2(\alpha)$$

$$\sec^2(\alpha) = 1 + \tan^2(\alpha)$$

Teorema de los senos

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C}$$

Teorema de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Ángulos de un Triángulo

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

Circunferencia Goniométrica