: Représentation des 2 coupes considérées

Et on remarque que: A':B' = (A $\cap B'$) $: (A \cap A') \sqcup (B \cap B' : B \cap A') = (A_1 : A_2) \sqcup (B_1 : B_2)$
$A : B' = (A \cap B') : (B \cap B') \sqcup (A \cap A' : B \cap A') = (A_1 : B_1) \sqcup (A_2 : B_2)$ Ainsi on a $\Delta = A_1 : A_2 + B_1 : B_2 - A_1 : B_1 - A_2 : B_2$

De plus dans le cadre de ce modèle on a $A_1 : B_1, A_2 : B_2(k(m-k), p)$.

En effet $A_1 : B_1$ est le nombre d'arêtes présentes entre $A_1 = A \cap B'$ et $B_1 = B \cap B'$, il y a $A_1 \times B_1 = k(N-k)$ arêtes possibles entre ces deux ensembles. Deplus chacune sont présentes avec probabilité p puisque $A_1 \subset A$ et $B_1 \subset B$.

Avec un raisonnement similaire on obtient que $A1 : A2(k(m-k), p_A)$ et $B1 : B2(k(m-k), p_B)$.

On peut alors écrire $\Delta = \sum_{i=1}^{k(m-k)} \chi_i$ où les χ_i sont des variables aléatoires entières à valeurs dans $[-2, 2]$ et d'espérance $[\chi_i] = p_a + p_b - 2p$.

Par application de l'inégalité d'Hoeffding on obtient alors: $[\Delta < 0] = [\Delta - \Delta < \Delta] = [\Delta - \Delta < k(N-k)(p_a + p_b - 2p)]$
$\leq \exp\left(-\frac{2(k(N-k)(p_a+p_b-2p))^2}{\sum_{i=1} k(n-k)(2+2)^2}\right)$
$\leq \exp\left(-\frac{2k^2(N-k)^2(p_a+p_b-2p)^2}{k(n-k)16}\right)$
$\leq \exp\left(-\frac{2k(N-k)(p_a+p_b-2p)^2}{16}\right)$ On peut maintenant contrôler $[A : Bn'estpaslabissectionminimale]$
[A:B n'est pas la bissection minimale] $\leq \sum_{A':B' unecoupe} [\Delta < 0]$
$= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} Nk^2 [\Delta < 0]$
$\leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} Nk^2 \exp\left(-\frac{2k(N-k)(p_a+p_b-2p)^2}{16}\right)$
$\leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} Nk^2 \exp\left(-2k(N-k)\lambda^2\right) avec \lambda = \frac{p_a+p_b-2p}{4} > 0$

Ainsi on obtient finalement $[A : Bn'estpaslabissectionminimale] N \to \infty = \left(N^2 \exp\left(-2N\lambda^2\right)\right)$

Ainsi on a bien [A:B est la bissection minimale] = 1-[A:B n'est pas la bissection minimale]
N $\to \infty$=$1 - o(1)$

Ce qui conclut la preuve.

Ainsi on peut ramener le problème de reconstruction exacte de communauté à la recherche d'une bissection minimale qui sera alors avec grande probabilité les communautés recherchées.

On se place dans le cadre du modèle ?? et on suppose ainsi que l'on a $G(N, p_A, p_B, p)$ avec A et B les communautés originelles et σ l'étiquetage associé. On suppose sans perte de généralité que $p_A \leq p_B$. De plus on suppose que le bruit dans le graphe n'est pas trop grand, c'est à dire que la probabilité qu'il y ait des arêtes inter-communauté est plus petit que la probabilité d'arête intra-classe: $2p \leq p_A + p_B$. $[A : Best l'unique bissection minimale] N \to \infty = 1 + o(1)$ Dans le cadre ci-dessus. Soient A', B' une bissection de G, on a donc $A' = B' = N$. On va alors comparer le flot des deux bissections $A : B$ et $A' : B'$, on définit pour cela $\Delta = A' : B' - A : B$ et $\Delta < 0$ si et seulement si $A' : B'$ est une bissection plus petite que $A : B$. On commence par borner $[A' : B' \prec A : B] = [\Delta < 0]$, pour cela on va réécrire Δ. Tout d'abord on note llll $A_1 = A \cap B'$ $B_1 = B \cap B'$ $A_2 = A \cap A'$ $B_2 = B \cap A'$ et $k = A_1 = B_2$. On peut d'ailleurs supposer sans perte de généralité que $k \leq \frac{1}{2}N$ quitte à permuter les notations[1]. En effet, on a $B' = A_1 \sqcup B_1$ donc $B' = k + B_1$ et donc $B_1 = N - k$ or $B = B_1 \sqcup B_2$ donc $B = B_1 + B_2$ et ainsi $B_2 = N - (N - k) = k$. De plus si $k \geq \frac{1}{2}N$, alors $A_2 = N - k \leq \frac{1}{2}N$ et par le même raisonnement que précédemment B_1 aussi. Il suffit alors de permuter les notation et d'échanger A_1, A_2 et B_1, B_2. [scale=0.5, every node/.style=scale=0.6] [fill=red, draw=black, opacity=0.2] (0,0) ellipse (3cm and 8cm); [fill=red, draw=black, opacity=0.2] (10,0) ellipse (3cm and 8cm); [fill=blue, draw=black, opacity=0.2](5,4) ellipse (7cm and 4cm); [fill=blue, draw=black, opacity=0.2](5,-4) ellipse (7cm and 4cm); (setA) at (-1,0) A; (setB) at (11,0) B; (setAp) at (5,5) A'; (setBp) at (5,-5) B'; (setA1) at (0,-4) $A_1 = A \cap B'$; (setA2) at (0,4) $A_2 = A \cap A'$; (setB1) at (10,-4) $B_1 = B \cap B'$; (setB2) at (10,4) $B_2 = B \cap A'$; [color=gray, thick, <->] (setA1) – (setA2); [color=gray, thick, <->] (setA2) – (setB2); [color=gray, thick, <->] (setA1) – (setB1); [color=gray, thick, <->] (setB1) – (setB2);