Matemática Discreta I - MAT A42 | 2021.1
Março de 2021 | UFBA
Professor Andreas | ♯Contra Racismo

Primeira lista de exercícios
(Lógica proposicional, conjuntos, funções e cardinalidade)

"*O trabalho intenso qual consome toda a nossa mente é o maior prazer deste mundo.*"
(Rosa Luxemburg, escritora e ativista, 1871 - 1919)

1. Dadas as seguintes proposições $r :=$ "João é rico", $c :=$ "João ćontente" e $f :=$ "João é feliz".

   (a) Formalize na linguagem da lógica proposicional:
   João é pobre, mas feliz. João é contente e pobre, mas feliz. João é rico ou infeliz. João é nem rico nem feliz. João é pobre, ou ele é ambos, rico e infeliz. Se João fosse feliz, então seria rico. João é rico, mas infeliz, o que implica que ele é não contente. Dado que João é pobre, ele é contente ou feliz. João não é rico e portanto não é feliz. Para João ser feliz é necessário que ele seja contente. Para João ser contente é suficiente ele ser feliz. É equivalente que João é feliz e pobre com ele ser contente. Se João fosse infeliz, então seria rico.

   (b) Nege as frases do ítem (a) e formalize-as.

   (c) Elabore as tabelas de verdade das proposições dos ítens (a) e (b).

2. Determine, dentre as frases abaixo, quais são proposições e quais não são, e explique o porquê:

   (a) $2 + 7$.
   (b) $3 - 1 > 1$.
   (c) $10^{2019} - 1$ é divisível por 7.
   (d) Este é um número primo.
   (e) $-x$ é um número negativo.

3. Determine o valor lógico (1 ou 0) de cada uma das seguintes proposições:

   (a) Damasco é a capital da Síria.
   (b) $(3 + 5)^2 = 3^2 + 5^2$.
   (c) $\sqrt{4} = \pm 2$.
   (d) A metade de 2^{2018} é 2^{1009}.
   (e) O heptágono regular pode ser contruído com régua e compasso.

4. Considere as proposições p:= Está frio e q:= Está chovendo. Traduza para a linguagem corrente as seguintes proposições:

   (a) $(\neg p)$.
   (b) $(p \wedge q)$.
   (c) $(p \vee q)$.
   (d) $(q \leftrightarrow p)$.
   (e) $(p \to (\neg q))$.
   (f) $(p \vee (\neg q))$.
   (g) $((\neg p) \wedge (\neg q))$.
   (h) $(p \leftrightarrow (\neg q))$.
   (i) $((p \wedge (\neg q)) \to p)$.

5. Sejam p:= Samuel fala português, q:= Samuel fala kimbundu e r:= Samuel fala tupi. Traduza para a linguagem simbólica as seguintes proposições:
   (a) Samuel fala português ou kimbundu, mas não fala tupi.
   (b) Samuel fala português e kimbundu, ou não fala português e tupi.
   (c) É falso que: Samuel fala tupi mas não fala kimbundu.
   (d) Nao é verdade que: Samuel fala kimbundu e tupi, mas não fala português.

6. Determine uma linguagem L proposicional, onde podemos formalizar as seguintes afirmações. Em seguida, traduza para a linguagem simbólica L as seguintes proposições matemáticas:
   (a) $x = 0$ ou $x > 0$.
   (b) $x \neq 0$ e $y = 0$.
   (c) $x = 0$ e $(y + z > x$ ou $z < 1)$.
   (d) Se $x > 0$ então $z = 2$.
   (e) Se $x = 1$ ou $z = 2$ então $y = 3$.
   (f) Se $x + y > z$ e $z = 1$, então $x + y > 1$.
   (g) $x \geq 0$ se, e somente se, $x > 0$ ou $x = 0$.

7. Determine o valor lógico das seguintes proposições:
   (a) Não é verdade que 12 é ímpar.
   (b) Nao é verdade que Kuwait é um país.
   (c) $3 + 2 = 7$ e $5 + 5 = 2 \cdot 5$.
   (d) É falso que: $1 + 2 = 3$ e $1 + 1 = 3$.
   (e) $\sqrt{-1} = 0$ ou $|-5| < 0$.
   (f) $5^2 = 10 \;\vee\; \pi$ é racional.
   (g) $2 = 2 \;\vee\; \sin\frac{\pi}{2} \neq \tan\frac{\pi}{4}$.
   (h) Se $3 + 2 = 6$, ento $4 + 4 = 9$.
   (i) $\pi > 4 \;\rightarrow\; 3 > \sqrt{5}$.
   (j) $\sqrt{-1} = -1 \;\rightarrow\; \sqrt{25} \geq 5$.
   (k) $\sqrt{-1} = -1 \;\leftrightarrow\; \sqrt{-2} = -2$.
   (l) $(\neg(1 + 1 = 2 \;\leftrightarrow\; 3 + 4 = 5))$.
   (m) $(\neg(1 + 1 = 5 \;\leftrightarrow\; 3 + 3 = 1))$.
   (n) $2 + 2 = 4 \;\rightarrow\; (3 + 3 = 7 \;\leftrightarrow\; 1 + 1 = 4)$.
   (o) $(\neg(2 + 2 \neq 4$ e $2 + 5 = 7))$.
   (p) $2 + 3 = 5$ e é falso que $1 + 1 = 3$.
   (q) 9 é ímpar se, e somente se, 9 é primo.
   (r) $3^4 = 81 \;\rightarrow\; \neg(2 + 1 = 3 \;\wedge\; 5 \cdot 0 = 0)$.

8. Explique por que $10 \geq 10$ é uma proposião verdadeira.

9. Calcule a tabela de verdade das seguintes sentenças bem formadas.
   (a) $(p \wedge (p \vee q))$,
   (b) $\big(\neg((\neg p) \vee (\neg q))\big)$,
   (c) $\big((p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))\big)$,
   (d) $\big(((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)\big)$,
   (e) $\big(((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q)))\big)$.
   (f) $\big(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))\big)$.

10. Supondo que os valores lógicos das proposições p e q sejam 1 e 0, respectivamente, determine o valor lógico das proposições

$$P(p,q) = (p \wedge (\neg p \vee q)) \text{ e } Q(p,q) = (\neg((\neg p) \wedge (p \ \vee (\neg q)))).$$

11. Escreva a recíproca e a contrapositiva das seguintes proposições:
    (a) Se a lua estiver cheia então os vampiros saem de casa à noite.
    (b) 2 é par se 3 for ímpar.
    (c) Se uma função for derivável, então ela é contínua.
    (d) Se Ana não vai a escola a pé, então ela vai de bicicleta ou de carro.
    (e) Uso guarda-chuva ou casaco se chover e fizer frio.

12. Apresente, se possível, um exemplo de proposião condicional verdadeira tal que:
    (a) A recíproca seja também verdadeira.
    (b) A recíproca seja falsa.
    (c) A contrapositiva seja verdadeira.
    (d) A contrapositiva seja falsa.

13. Construa as tabelas de verdade das seguintes proposições:
    (a) $P(p,q) := (\neg((p \vee q) \wedge ((\neg p) \vee (\neg q))))$.
    (b) $Q(p,q) := (((\neg q) \vee p) \leftrightarrow (q \to \ (\neg p)))$.
    (c) $P(p,q,r) := (p \vee (q \wedge r))$.
    (d) $Q(p,q,r) := ((p \ \wedge (\neg q)) \vee r)$.
    (e) $R(p,q,r) := ((\neg p) \vee (q \ \wedge (\neg r)))$.
    (f) $S(p,q,r) := ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$.
    (g) $P(p,q,r) := ((p \ \vee (\neg r)) \wedge (q \ \vee (\neg r)))$.
    (h) $Q(p,q) := ((\neg(p \ \vee (\neg q))) \wedge ((\neg p) \vee q))$.

14. Verifique quais das fórmulas proposicionais P e Q abaixo são equivalentes:
    (a) $P(p,q,r) := ((p \vee q) \to r)$ e $Q(p,q,r) := ((p \to r) \wedge (q \to r))$.
    (b) $P(p,q,r) := (p \to (q \to r))$ e $Q(p,q,r) := ((p \wedge q) \to r)$.
    (c) $P(p,q) := (p \wedge ((\neg q) \to (\neg p)))$ e $Q(p,q) := q$.
    (d) $P(p,q,r) := ((p \vee q) \wedge r)$ e $Q(p,q,r) := (p \vee (q \wedge r))$.

15. Mostre que a proposição $P := ((p \to q) \to ((p \vee r) \to (q \vee r)))$ é uma tautologia.

16. Determine quais das seguintes proposições são tautologias, contradições ou satifatíveis:
    (a) $(p \to ((\neg p) \to q))$.
    (b) $(((\neg p) \vee q) \to (p \to q))$.
    (c) $(p \to (q \to (q \to p)))$.—— (d) $(((p \to q) \leftrightarrow q) \to p)$.
    (e) $((p \ \vee (\neg q)) \to (p \to \ (\neg q)))$.
    (f) $(((\neg p) \vee (\neg q)) \to (p \to q))$.
    (g) $(p \to ((p \vee q) \vee r))$.
    (h) $((p \wedge q) \to (p \leftrightarrow (q \vee r)))$.

17. Das sentenças abaixo, decida quais são bem formadas (com explicação) e quais não o são. Indique também quais são tautologias e quais contradições– claro somente nos casos de sentenças bem formadas.
    (a) $\big((p \to (\neg p)) \to (\neg p)\big)$,
    (b) $\big(p \wedge q \to p\big)$,
    (c) $\big((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))\big)$,

(d) $\big(((\neg q) \wedge p) \wedge q\big)$.
(e) $(p \wedge q) \neg r)$.

18. Escreva a negação de cada uma das seguintes afirmações:

(a) $e^5 > 0$.
(b) $3 < 5$ ou $7 \geq 8$.
(c) $f(x) = x^2$ é par e eu sou marroquino.
(d) Se $y = 3$ então $y^2 = 7$.
(e) $x - 3 > 0$ implica $x^2 + 9 > 6x$.
(f) $a - b = c$ se, e somente se, $a = b + c$.

19. Mostre que o conjunto das seguintes premissas é inconsistente.
(a) $(p \to q), (p \to r), (q \to (\neg r)), p$.
(b) $(p \to (q \to r)), (s \to (q \wedge \neg r)), (p \wedge s)$.

20. Determine quais das sentenças abaixo são equivalentes à sentença "Se corre, cansa":

(a) Não corre ou cansa.
(b) Se não cansa, então não corre.
(c) Se não corre então não cansa.
(d) Não é verdade que: corre e não cansa.

21. Quais das condições abaixo são *necessárias* ou *suficientes* para $n \in \mathbb{N}$ ser múltiplo de 10?

(a) n é múltiplo de 5.
(b) $n = 30$.
(c) n é múltiplo de 25.
(d) n é múlltiplo de 20.
(e) n^2 é múltiplo de 5.
(f) n é par e múltiplo de 5.

22. Considere a seguinte afirmação: *Todo número primo maior que 2 é ímpar.*

(a) Escreva a afirmação no formato $\varphi \Longrightarrow \psi$.
(b) Prove a afirmação.

23. * Prove, de 3 formas distintas, o seguinte resultado:

$$\textit{Se } 2x^2 + x - 1 = 0, \textit{ então } x < 1.$$

24. Demonstre os seguintes resultados matemáticos:

(a) Se n é um inteiro par tal que $4 \leq n \leq 12$, então n é uma soma de dois números primos.
(b) A soma de dois inteiros pares é par.
(c) Se $a, b \in \mathbb{Z}$ forem números ímpares, então $a + b$ é par.

25. Descreva os conjuntos abaixo por meio de uma propriedade:

(a) $A = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$.
(b) $B = \{-3, 3\}$.
(c) $C = \{4, 9, 16, 25, \ldots\}$.

26. Escreva a forma tabular dos seguintes conjuntos:
(a) $X = \{x \in \mathbb{Z} \; ; \; x^2 = 2x\}$.
(b) $Y = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq x\}$.
(c) $Z = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 2x\}$.

27. Prove que $A = \{2, 3, 4, 5\}$ não é subconjunto de $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par }\}$.

28. Escreva três conjuntos X tais que $X \subseteq A$, sendo $A = \{2, 4\}$.

29. Considere o conjunto universal $\mathcal{U} = \{n \in \mathbb{N} : n < 13\}$ e os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 11\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ e $C = \{4, 6, 8, 10, 12\}$. Especifique os seguintes conjuntos:
(a) $(A \cup B) \cap C$.
(b) $(A \cup C)^c$.
(c) $A \cap (B \cup C)$.
(d) $A \setminus (B \cup C)^c$.

30. Se $A := \{x \in \mathbb{N} : \frac{30}{x} = n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \; ; \; x = 3n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$, calcule o número de elementos de $A \cap B$.

31. * Pelo princípio da compreensão dissolva o paradóxo de Russell.

32. Sejam a, b e c conjuntos. Demonstre que:
(a) $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$ (associatividade da interseção).
(b) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ (distributividade da interseção sobre a união).
(c) $a \cap \emptyset = \emptyset$ e $a \cup \emptyset = a$.

33. Decida, dando uma prova matemática ou um contra-exemplo, se valem para quaisquer conjuntos a, b e c as seguintes propriedades:
(a) $a \subseteq b$ sse $a \cap b = a$,
(b) $a = (a \cap b) \cup (a - b)$.
(c) $a \setminus b = a \setminus (a \cap b)$.
(d) $a \setminus (b \setminus c) = (a \setminus b) \setminus c$.

34. Sejam a, b, c conjuntos. Mostre que
(a) $c \setminus (a \cap b) = (c \setminus a) \cup (c \setminus b)$ (lei de de Morgan).
(b) $a \subseteq b \quad \Longrightarrow \quad c \setminus b \subseteq c \setminus a$.
Vale em (b) também a implicação da volta, i.e., $\Longleftarrow$?

35. Para a diferença simétrica $\triangle$ e a e b conjuntos, mostre que
(a) $a \triangle a = \emptyset$.
(b) $a \triangle \emptyset = a$.
(c) $a \triangle b = b \triangle a$.

36. Sejam a, b e c conjuntos. Mostre que
(a) se $a \subseteq b$ então $\bigcup a \subseteq \bigcup b$.
(b) se $a \cup b = a \cup c$ e $a \cap b = a \cap c$ então $b = c$.

37. Determine $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$. Decida, dando uma prova matemática ou um contra-exemplo, se vale para quaisquer conjuntos a e b:
(a) $\mathcal{P}(a \cup b) = \mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(b)$.
(b) $\mathcal{P}(a \cap b) = \mathcal{P}(a) \cap \mathcal{P}(b)$.

38. Seja $a := \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. Determine
(a) $\mathcal{P}(a)$.
(b) $\bigcup a$.
(c) $\mathcal{P}(\bigcup a)$.
(d) $\bigcup \mathcal{P}(a)$.

39. Sejam a, b conjuntos não vazios. Mostre que $\bigcap(a \cup b) = \bigcap a \cap \bigcap b$.

40. Seja a um conjunto não vazio. Mostre que
(a) $\mathcal{P}(\bigcap a) = \bigcap\{\mathcal{P}(x) : \quad x \in a\}$.
(b) $\bigcup\{\mathcal{P}(x) : \quad x \in a\} \subseteq \mathcal{P}(\bigcup a)$. Sob quais condições vale igualdade?

41. Determine para $a := \{1,2,3\}$ e $b := \{\alpha, \beta, \gamma\}$ o produto Cartesiano $a \times b$. Além disso, mostre para conjuntos arbitrários a, b e c que $a \times (b \cap c) = (a \times b) \cap (a \times c)$.

42. Prove que $\sqrt{5}$ é irracional. Em seguida, prove a irracionalidade do *número de ouro* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

43. Sejam $f : a \to b$ e $g : b \to c$ funções. Mostre que
(a) Se f e g forem 1 a 1, então, $(g \circ f)$ é 1 a 1.
(b) Se f e g forem bijeções, então, $(g \circ f)$ é bijeção.

44. Seja $2 := \{0, 1\}$. Determine todas as funções possíveis de 2 em 2 .

45. Sejam dadas funções arbitrárias $f : a \to b$ e $g : b \to c$.
(a) Considere a seguinte função $F : \mathcal{P}(b) \to \mathcal{P}(a), y \mapsto F(y) := f^{-1}[y]$, onde f^{-1} denota a imagem inversa de f definida em aula. Observe que a função composta $(g \circ f) : a \to c$ é bem definida.
Mostre que $\quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Dica: Mostre simplesmente que para qualquer $y \in \mathcal{P}(b)$, temos que as imagens inversas $(g \circ f)^{-1}[y]$ e $(f^{-1} \circ g^{-1})[y]$ coincidem, ou seja, os dois conjuntos são iguais.
(b) Mostre que para $y_1, y_2 \in \mathcal{P}(b)$ temos que
$$y_1 \subseteq y_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1}[y_1] \subseteq f^{-1}[y_2].$$

46. Seja $f : a \to b$ uma função. Então, f induz uma função $f_* : \mathcal{P}(a) \to \mathcal{P}(b)$, definida pela seguinte condição: Para $s \in \mathcal{P}(a)$, seja $f(s) := \{y \in b | \ y = f(x) \text{ para algum } x \in s\}$. Mostre que
(a) f_* é de fato uma função.
(b) $f_*(a) = Im(f)$.
(c) Para qualquer $x \in a$, $f_*(\{x\}) = \{f(x)\}$.
(d) $f_*(\emptyset) = \emptyset$.

47. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n + 1$. Mostre que
   (a) f é uma função.
   (b) f tem inversa à esquerda.
   (c) f é 1 a 1.
   (d) f é sobre $\mathbb{N}$?
   Seja $a := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Determine
   (e) $im(f)$, $f[a]$ e $f^{-1}[\{k \in \mathbb{N} |\ 0 \leq k \leq 20\}]$.

48. Sejam a e b conjuntos finitos. Mostre que $a \cup b$ e $a \times b$ são também finitos. Os conjuntos $a \cup b$ e $a \times b$ têm quantos elementos?

**Segunda lista de exercícios
(Naturais, indução, relações e relações de equivalência, fecho transitivo e combinatória)**

"Nunca esqueça que todo o que Hitler[1] fez na Alemanha era legal.[2]"
(Martin Luther King[3], pastor afro-americano, prêmio Nobel da Paz 1964, 1929 - 1968.)

49. Mostre que o produto $m \cdot n$ está definido para todo par de números naturais. Dica: Use definição de $\cdot$ da aula e faça indução em uma variável, deixando a outra fixa.

50. Mostre que
(a) $1 \cdot m = m \quad$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
(b) O elemento neutro 1 da multiplicação é único.

51. Mostre que o produto de naturais (veja a definição da aula) satisfaz a propriedade associativa.

52. Mostre que para $m, n, p \in \mathbb{N}, \quad m(n+p) = mn + mp$. Dica: Faça indução em p, deixando m e n fixos.

53. Sejam m, n naturais. Defina recursivamente m^n.

54. Sejam as famílias em seguinda indexadas em $\mathbb{N}$.
(a) Defina união, $\bigcup$, e interseção, $\bigcap$, para família de conjuntos por recursão.
(b) Defina soma, $\sum$, e produto, $\prod$, para sequência de números por recursão.

55. Mostre por indução que:
(a) $\sum_{k=1}^{n} k(\frac{1}{2})^{k-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.
(b) Seja x um inteiro positivo não nulo, então: $\quad (1+x)^n > 1 + nx, \ \forall n \geq 2$.
(c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$.
(d) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$.
(e) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
(f) $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
(g) $2^n > n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.
(h) $\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
(i) O número $5^{2n} - 1$ é divisível por 8.

56. Considere o polinômio $p(n) = n^2 + n + 41$. É verdade que $p(n)$ é um número primo, $\forall \ n \in \mathbb{N}$?

[1] Adolf Hitler, ditador, genocida e chanceler alemão, entre 1933 e 1945.
[2] Em original: Never forget that everything that Hitler did in Germany was legal.
[3] King era pastor afro-americano, ativista em favor da igualdade entre negros e brancos e contra racismo, nos EUA. Ele faleceu após um atentado sofrido em 4 de abril de 1968, deixando uma esposa e quatro filhos. Foi condenado um criminoso, porém não está claro até hoje se o condenado foi de fato o assassino. Suspeita-se que o governo americano estava envolvido no assassinato.

57. Sejam $a \subseteq \mathbb{N}$, $r := \{\langle x, 2x\rangle |\ x \in \mathbb{N}\}$ e $s := \{\langle x, 3x+2\rangle |\ x \in \mathbb{N}\}$ relações em $\mathbb{N}$.
(a) Para $a = \{x \in \mathbb{N} : \quad x \leq 30\}$ escreva as relações r e s explicitamente.
(b) Determine as relações compostas em a, $r \circ s$, $s \circ r$, $r \circ (s \circ r)$ e r^3.

58. Mostre que:
(a) Se r for uma relação reflexiva, então $\tilde{r}$ também é reflexiva.
(b) Se r for uma relação simétrica, então $\tilde{r}$ também é simétrica.
(c) Se r for uma relação anti-simétrica, então $\tilde{r}$ também é anti-simétrica.
(d) Se r for uma relação transitiva, então $\tilde{r}$ também é transitiva.

59. Mostre, em cada caso, que a relação r dada no conjunto a é uma relação de equivalência:
(a) $a = \{1, 2, 3\}$ e $r = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$.
(b) $a = \mathbb{Z}$ e $r = \{(x, y) : x \text{ e } y \text{ têm a mesma paridade }\}$.
(c) $a = \mathbb{R}$ e $r = \{(x, y) : \quad x^2 = y^2\}$.

60. Exibe as partições correspondentes (para o conjunto a) das relações de equivalência r do exercício 59.

61. Se $A = \{a, b, c\}$ e $r = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (c, a), (a, c), (b, c)\}$, então r é uma relação de equivalência em A?

62. Seja $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} - \{0\}$. Considerando o produto Cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definimos a seguinte relação $r \qquad \langle a, b\rangle \quad r \quad \langle c, d\rangle \quad \text{sse} \quad ad = bc.$
(a) Mostre que r é uma relação de equivalência.
(b) Seja $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/r$. Defina $\langle a, b\rangle/r + \langle c, d\rangle/r := \langle ad+bc, bd\rangle/r$. Mostre que esta definição é independente dos representantes, isto é, se $\langle a, b\rangle/r = \langle a', b'\rangle/r$ e $\langle c, d\rangle/r = \langle c', d'\rangle/r$ entao, $\langle a, b\rangle/r + \langle c, d\rangle/r = \langle a', b'\rangle/r + \langle c', d'\rangle/r$.

63. Sejam a, b conjuntos. Dizemos que a é **equipotente** a b, $a \sim b$, sse a e b têm as mesmas cardinalidades, ou seja, existe bijeção entre a e b. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência na classe de todos os conjuntos. Qual é a partição (induzida por esta relação de equivalência) da classe de todos os conjuntos?

64. Relembre que tinhamos denotado por $\Leftrightarrow$ a **equivalência lógica** no conjuntos *Prop* das fórmulas bem formadas numa linguagem L, i.e.,
$$\varphi \Leftrightarrow \psi \quad \text{sse} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \text{ é uma tautologia em } Prop.$$
(a) Mostre que $\Leftrightarrow$ é uma relação de equivalência em *Prop*.
(b) Determine as classes de equivalência desta relação e o conjunto quociente.
(c) Qual é a partição relacionada a esta relação? Explique!

65. Sejam dadas as relações do exercício 57. Calcule para $a := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ os fechos reflexivos e transitivos destas relações.

66. Um *ponto fixo* de uma função f é um número real a tal que $f(a) = a$. Encontre os pontos fixos, se existirem, das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2x - 5$.
(b) $f(x) = x^2$.
(c) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

67. A *função cartaterística* de $A \subseteq \mathbb{R}$ é dada por
$$\chi_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}, x \mapsto \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{se} x \in A \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
Esboce o gráfico das seguintes funções características: (a) $\chi_{\{2\}}$, (b) $\chi_{[1,3[}$.

68. * Mostre que existe uma correspondência 1 a 1 e sobrejetiva entre a função característica χ_a e o conjunto das partes $\mathcal{P}(a)$, para cada conjunto a.

69. Sejam $f : A \longrightarrow B$ uma função, $E, F \subseteq A$ e $G, H \subseteq B$. Mostre que:
(a) $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$.
(b) $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$.
(c) Se f for injetora, então $f(E \cap F) = f(E) \cap f(F)$.

70. Sejam dadas as relações r e s do exemplo 4.1.7 das notas de aula, calcule os fechos reflexivos e transitivos destas relações.

71. As placas de autmóveis são formadas por três letras seguidas por três algarismos. Quantas placas diferentes podem ser formadas, supondo que o alfabeto tem 26 letras?

72. (a) Quantas palavras diferentes contendo três letras diferentes podem ser formados num alfabeto de 26 letras?
(b) Quantas são os gabaritos possíveis de um teste de dez questões múltipla-escolha, com cinco alternativas por questão?

73. Os conjuntos a e b contém n e m elementos, respectivamente.
(a) Quantas funções injetoras de a em b existem?
(b) Quantas funções bijetoras de a em a existem?
(c) Quantas aplicações sobrejetivas de a em b existem? (Dica: Observe que cada aplicação f pode ser descrita pelas imagens inversas $\{f^{-1}(\{y\}) : \quad y \in b\}$. Agora observe que se f for sobrejetora, então essas imagens inversas formam uma m-partição de a. Observe que reciprocamente também cada m-partição resulta numa aplicação sobrejetora. Tente entender isso e com isso resolve este exercício.)

74. De quantos modos cinco rapazes e cinco moças podem se sentar em cinco bancos de dois lugares cada de tal modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?

75. Quantas são os anagramas da palavra CAPÍTULO
(a) que começam por consoante e terminam por vogal?
(b) que têm as letras C, A, P juntas?

76. De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em 2 grupos de 4 pessoas cada?

77. Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhido em um grupo de 8 homens e 5 mulheres. Quantas comissões podem ser formadas?

78. Mostre que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
(a) algebricamente,
(b) por combinatoria.

79. De quantos modos cinco meninos e cinco meninas podem formar uma roda de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

80. Quantos divisores naturais possui o número 360?

81. (a) Seja a um conjunto de 512 subconjuntos. Quantos elementos tem a?
(b) Determine um conjunto com exatamente 64 subconjuntos.
(c) Existe um conjunto a com 300 subconjuntos? Refute ou demonstre.

82. Prove o teorema de binômio de Newton,
(a) por combinatoria,
(b) por indução nos naturais.

83. (a) Determine o termo central do desenvolvimento de $(x^2 - \frac{1}{x})^8$.
(b) Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $(x^2 + \frac{1}{x^3})^{10}$.
(c) Detremine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(2x^4 - \frac{1}{x})^{15}$.

84. Calcule
(a) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k$. (Dica: Tente reduzir a soma para a forma de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k$ e use o Teorema de Binômio de Newton.)
(b) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.