Modelo Genérico	
Professor: Ícaro Vidal Freire	**Disciplina:** SIMPLEX (2020)
Curso: Licenciatura em Matemática	8° semestre
Aluno (a): *Fulano de Tal, Cicrano Beltrano*	**Data:** 00/00/2020

Atividade Avaliativa X

Questão 1 **(3 pontos)**
Considere o conjunto de pontos complexos

$$z(t) = (3 + 2\cos t) + (-1 + 3\,\text{sen}\,t)\,i,$$

onde $t \in \mathbb{R}$.

(a) **(1 ponto)** Mostre que $|z^n(t)| = |z(t)|^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução: *Usaremos indução sobre n. É natural pensarmos: existe algum natural que essa igualdade seja verdadeira? Bom...não é difícil perceber que para $n = 1$ ela é verdadeira. Para $n = 2$ também é verdadeira...Então, passamos a pensar: "Talvez só existe algum subconjunto de $\mathbb{N}$ onde ela vale, mas não deve valer para todos os naturais".*
Seja, então, $\mathcal{X} \subset \mathbb{N}$ definido por

$$\mathcal{X} = \{\, n \in \mathbb{N};\ \ |z^n(t)| = |z(t)|^n \,\}$$

ou seja, um subconjunto de número naturais onde se verifica a igualdade.

(i) $1 \in \mathcal{X}$; *pois* $\left|z^1(t)\right| = |z(t)| = |z(t)|^1$.

(ii) Além disso, se certo natural $k \in \mathcal{X}$, então

$$\left|z^{k+1}(t)\right| = \left|z^k(t)\cdot z(t)\right| = \left|z^k(t)\right|\cdot|z(t)| = |z(t)|^k\cdot|z(t)| = |z(t)|^{k+1}$$

ou seja, $k + 1 \in \mathcal{X}$

Ora, se o natural 1 está em $\mathcal{X}$ e se para cada natural k em $\mathcal{X}$ o seu sucessor também está...pelo Axioma 4 de Peano, tem-se $\mathcal{X} = \mathbb{N}$. Isso significa que a igualdade não apenas é válida para uma parte dos naturais, mas para todo natural n.

(b) **(0.5 pontos)** Calcule o valor de $\left|z^4(t)\right|$, quando $t = 3\pi/2$.

Solução: *Note que*

$$z(3\pi/2) = [3 + 2\cos(3\pi/2)] + [-1 + 3\,\text{sen}\,(3\pi/2)]\ i = (3 + 2\cdot 0) + [-1 + 3\cdot(-1)]\,i = 3 - 4\,i.$$

Ora, pelo item (a), podemos fazer:

$$\left|z^4(3\pi/2)\right| = |z(3\pi/2)|^4 = |3 - 4\,i|^4 = \left(\sqrt{3^2 + (-4)^2}\right)^4 = 25^2 = \boxed{625}.$$

(c) **(0.5 pontos)** O que representa, geometricamente, esse conjunto de números complexos?

Solução: *Seja $z = x + y\,i$. Fazendo $x = 3 + 2\cos t$ e $y = -1 + 3\,\text{sen}\,t$, temos*

$$\cos t = \frac{x-3}{2} \tag{1}$$

$$\text{sen}\,t = \frac{y+1}{3} \tag{2}$$

Elevado ao quadrado as equações (1) e (2), e somando membro a membro, encontramos:

$$\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{3}\right)^2 = \cos^2 t + \text{sen}^2\,t \Longrightarrow \boxed{\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y-(-1))^2}{3^2} = 1}$$

Ou seja, uma Elipse *de centro $(3, -1)$ e de semieixos $a = 2$ e $b = 3$. Veja a Figura 1.*

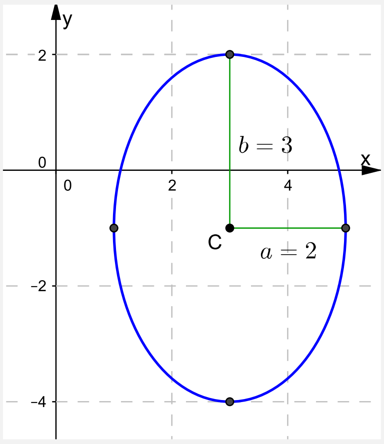

Figura 1: Conjunto dos complexos $z(t)$ visto geometricamente.