

ATIVIDADE AVALIATIVA X

Questão 1 (3 pontos)

Considere o conjunto de pontos complexos

$$z(t) = (3 + 2 \cos t) + (-1 + 3 \sin t) i,$$

onde $t \in \mathbb{R}$.

(a) (1 ponto) Mostre que $|z^n(t)| = |z(t)|^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução: Usaremos indução sobre n . É natural pensarmos: existe algum natural que essa igualdade seja verdadeira? Bom... não é difícil perceber que para $n = 1$ ela é verdadeira. Para $n = 2$ também é verdadeira... Então, passamos a pensar: "Talvez só existe algum subconjunto de \mathbb{N} onde ela vale, mas não deve valer para todos os naturais".

Seja, então, $\mathcal{X} \subset \mathbb{N}$ definido por

$$\mathcal{X} = \{n \in \mathbb{N}; |z^n(t)| = |z(t)|^n\}$$

ou seja, um subconjunto de número naturais onde se verifica a igualdade.

(i) $1 \in \mathcal{X}$; pois $|z^1(t)| = |z(t)| = |z(t)|^1$.

(ii) Além disso, se certo natural $k \in \mathcal{X}$, então

$$|z^{k+1}(t)| = |z^k(t) \cdot z(t)| = |z^k(t)| \cdot |z(t)| = |z(t)|^k \cdot |z(t)| = |z(t)|^{k+1}$$

ou seja, $k+1 \in \mathcal{X}$

Ora, se o natural 1 está em \mathcal{X} e se para cada natural k em \mathcal{X} o seu sucessor também está... pelo Axioma 4 de Peano, tem-se $\mathcal{X} = \mathbb{N}$. Isso significa que a igualdade não apenas é válida para uma parte dos naturais, mas para todo natural n .

(b) (0.5 pontos) Calcule o valor de $|z^4(t)|$, quando $t = 3\pi/2$.

Solução: Note que

$$z(3\pi/2) = [3 + 2 \cos(3\pi/2)] + [-1 + 3 \sin(3\pi/2)] i = (3 + 2 \cdot 0) + [-1 + 3 \cdot (-1)] i = 3 - 4i.$$

Ora, pelo item (a), podemos fazer:

$$|z^4(3\pi/2)| = |z(3\pi/2)|^4 = |3 - 4i|^4 = (\sqrt{3^2 + (-4)^2})^4 = 25^2 = \boxed{625}.$$

(c) (0.5 pontos) O que representa, geometricamente, esse conjunto de números complexos?

Solução: Seja $z = x + yi$. Fazendo $x = 3 + 2 \cos t$ e $y = -1 + 3 \sin t$, temos

$$\cos t = \frac{x-3}{2} \quad (1)$$

$$\sin t = \frac{y+1}{3} \quad (2)$$

Elevado ao quadrado as equações (1) e (2), e somando membro a membro, encontramos:

$$\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{3}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t \Rightarrow \boxed{\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1}$$

Ou seja, uma Elipse de centro $(3, -1)$ e de semieixos $a = 2$ e $b = 3$. Veja a Figura 1.

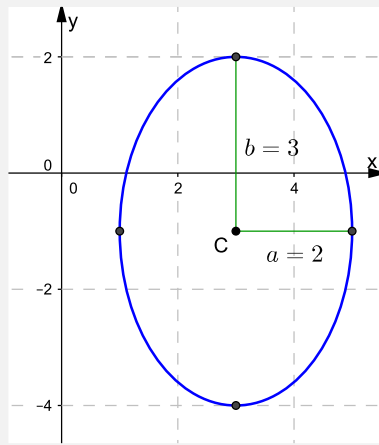


Figure 1: Conjunto dos complexos $z(t)$ visto geometricamente.