Artigo Genérico Isento de Sentido

Fulano de Tal *

10 de maio de 2023

Resumo

Esse é um pequeno resumo sobre o texto. Seja objetivo e destaque pontos relevantes. Em nosso caso, esse texto versará sobre um artigo genérico e, em muitos pontos, provavelemente, isento de sentido. Tem por objetivo ser usado para um momento prático de um quase microcurso sobre LaTeX ministrado no II Colóquio de Matemática do CFP.

Sumário

1 O Corpo dos Números Complexos

Definir o Conjunto dos Números Complexos, inicialmente, por

$$\mathbb{C} = \left\{ a + bi;\ a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1 \right\},$$

pode esconter algumas coisas fundamentais no entendimento desse novo conjunto. Afinal... Seria essa soma entre a e bi é usual? O que significa $i^2 = -1$? Como você explicaria o seguinte Paradoxo?

*fulantal@email.com

Paradoxo de Bernouli. Considerando, $i^2 = -1$, temos:

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Portanto, $-1 = 1$?

Mas, como Gauss já dizia: *Na Matemática não existem controvérsias verdadeitas*!

Faz-se necessário uma formalização na definição dos números complexos.

1.1 Formalizando as coisas

Precisamos entender os Númetos Complexos não como uma "sacola de números", mas como uma "corpo de números", ou seja, um conjunto com uma estrutura algébrica associada, preferencialmente já conhecida.

Hamilton, matemático, físico e astrónomo irlandês, foi que trouxe uma definição adequada aos números complexos, sendo adotada até os dias atuais. Nela vê-se o conjunto dos números complexos como um conjunto de pares ordenados munidos com as operações de soma e produdo, este último bem peculiar, mas que oferece subsídios para verificar que essa estrutura é um Corpo.

Proposição 1.1. *Considere o subconjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$, não vazio, munido das seguintes operações de soma e produdo, dadas por*

$$\begin{array}{rcl} +\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \to & \mathcal{C} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} \cdot\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \to & \mathcal{C} \\ (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

Então, são satisfeitas as seguintes condições, para $z, w, t \in \mathbb{C}$:

(i) $z + (w + t) = (z + w) + t$

(ii) $z + w = w + z$

(iii) $\exists\ 0 \in \mathcal{C}$, *tal que* $z + 0 = z$

(iv) $\exists\ -z \in \mathcal{C}$, *tal que* $z + (-z) = 0$

(v) $z(wt) = (zw)t$

(vi) $zw = wz$

(vii) $\exists\ 1 \in \mathcal{C}$, *tal que* $z \cdot 1 = z, \forall z$

(viii) $\exists\ z^{-1} \in \mathcal{C}$, *tal que* $z \cdot z^{-1} = 1$, *para todo* $z \neq 0$

(ix) $z(w + t) = zw + zt$

Definição 1.1 (Corpo dos Números Complexos). A esse conjunto $\mathcal{C}$, definido acima, denominamos Corpo dos Números Complexos e será denotado por $\mathbb{C}$.

Observação 1. É possível mostrar algumas identificaçãos, tais como

1. $(x, 0) \sim x$
2. $(0, 1)^2 = -1$
3. $(0, y) \sim yi$

Assim, um número complexo $z = (x, y)$, pode ser identificado por

$$\begin{aligned} z &= (x, y) \\ &= (x, 0) + (0, y) \\ &= x + yi \end{aligned} \tag{1}$$

Dizemos que (1) está na **Forma Algébrica**.

1.2 Representação Matricial

Também é possível representar um número complexo $z = a + bi$, na forma **Matricial**:

$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

2 Teorema Fundamental da Álgebra

Na Seção 1, vimos qualquer coisa sobre números complexos. Então, nessa seção, demonstraremos o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). Nunca escreva uma introdução de seção dessa forma!

Para a demonstação do TFA precisaríamos de todo um curso de Variáveis Complexas. Mas, como não é possível isso, considere que $\mathbb{C}[z]$ seja o conjunto dos polinômios complexos. Também vou considerear que você acreditará nos lemas seguintes:

Lema 2.1. Seja $f(z) \in \mathbb{C}[z]$. Então, $|f(z)|$ atinge um valor mínimo em algum ponto $z_0 \in \mathbb{C}$

Lema 2.2. Suponha que $f(z) \in \mathbb{C}[z]$, sendo $f(z)$ não constante. Se $f(z_0) \neq 0$, então $|f(z_0)|$ não é o valor mínimo de $|f(z)|$.

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Se* $f(z) \in \mathbb{C}[z]$, *com* $f(z)$ *não constante; então* $f(z)$ *possui, pelo menos, uma raíz complexa.*

Demonstração. Considere $f(z)$ um polinômio complexo não constante. Pelo Lema 2.1, $|f(z)|$ atinge um valor mínimo em algum ponto $z_0 \in \mathbb{C}$. Então, pelo Lema 2.2, segue-se que $f(z_0) = 0$; pois, caso contrário, não seria o valor mínimo. Portanto, $f(z)$ possui uma raíz complexa. $\square$

Quantos anos você possui? O que tens feito da vida até aqui? Pois saiba que Gauss demonstrou esse teorema[1] aos 18 anos de idade, em sua tese de doutorado!

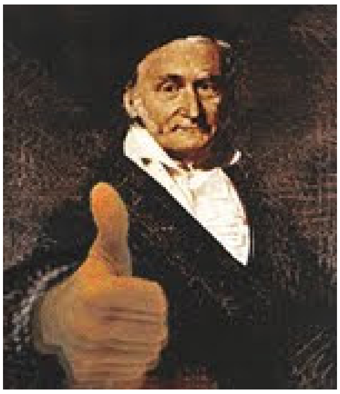

Figura 1: Gauss dando Legal

Para mais detalhes, veja Fine e Rosenberger (1997)

3 Cálculo Fracionário

3.1 Derivada Fracionária

Você sabe que se $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$, a **derivada** da função f no ponto a é o limite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Usamos a notação $f^n(a)$ para a n-ésima derivada da função f. Quando existe $f^n(x)$ para todo $x \in I$, sendo I um intervalo, dizemos que a função $f\colon I \to \mathbb{R}$ é *n-vezes derivável no intervalo* I.

A Tabela 1 lembra-nos de algumas derivadas notáveis

O **Cálculo Fracionário** é uma área da Matemática que foi idealizada quando tentou-se generalizar a ideia da derivada para uma ordem *arbitrária*, não apenas inteira.

Você já imaginou uma derivada como $f^{1/2}(x)$? Ou, mais surpreendente: $f^{\sqrt{\pi}}(x)$?? Ou, absurda e mais surpreendente: $f^{2+3i}(z)$???

[1]não foi a demonstração acima, mas uma outra com as ferramentas disponíveis à época

Tabela 1: Tabela de Derivadas

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a)$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

Pois é ... muitas definições surgiram ao longo da história, mas vou exibir uma formulação de Riemann-Liouville.

Definição 3.1 (Derivada de Riemann-Liouville em intervalo finito). Uma das derivadas, em um intervalo fnito, de Riemann-Liouville, $D^{\alpha}_{a^+}f$, de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$, é definida por:

$$\left(D^{\alpha}_{a^+}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \tag{2}$$

com $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ e $x > a$, sendo $[\mathrm{Re}(\alpha)]$ é a parte inteira de $\mathrm{Re}(\alpha)$ e

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt,$$

com $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Sei que é complicado! Mas, pior, é uma análise morfossintática, não?

3.2 Funções de Mittag-Leffler

Uma função, denotada por $E_\alpha(z)$, possui papel relevante nos estudos do Cálculo Fracionário. Isto porque, podemos interpretá-la como uma generalização da função exponencial.

Definição 3.2 (Função de Mittag-Leffler). A função de Mittag-Leffler, $E_\alpha(z)$, é uma função complexa que depende de um parâmetro complexo α, sendo $\mathrm{Re}(z) > 0$, é dada pela série de potências:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Note que, se você demonstrar a igualdade $\Gamma(k+1) = k!$, você perceberá a ideia da generalização da exponencial; pois, para $\alpha = 1$, temos:

$$
\begin{aligned}
E_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\
&= e^z
\end{aligned}
$$

Se deseja conhecer mais sobre o Cálculo Fracionário, veja Figueiredo Camargo e Capelas de Oliveira (2015).

Referências

FIGUEIREDO CAMARGO, R; CAPELAS DE OLIVEIRA, E. **Cálculo Fracionário**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. 183 p.

FINE, Benjamin; ROSENBERGER, Gerhard. **The fundamental theorem of algebra**. New York: Springer Science & Business Media, 1997. 208 p.

NAGWA. **Lesson Explainer: Matrix Representation of Complex Numbers**. (Site). Disponível em: <https://www.nagwa.com/en/explainers/152196980513/>. Acesso em: 14 set. 2022.

SOARES, Marcio G. **Cálculo em uma Variável Complexa**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 196 p. (Coleção Matemática Universitária). ISBN 978-85-244-0144-2.