Cálculo Fracionário
Exercícios

Amargosa-BA

2021.1

Resumo

Conjunto de questão sobre a técnica de integração popularizada por Feynman. As questões foram retiradas do Capítulo VI, do livro *Advanced Calculus*, de Frederick S. Woods.

Questão 1

Se $f(x)$ é uma função ímpar, isto é, $f(-x) = -f(x)$, prove que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Questão 2

Se $f(x)$ é uma função par, isto é, $f(-x) = f(x)$, prove que

$$\int_{-a}^{a} f(x) = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Questão 3

Se $f(a - x) = f(x)$, prove que

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\frac{1}{2}a} f(x)\,dx.$$

Questão 4

Sendo k um inteiro positivo, mostre que

$$\int_0^{2k\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx = k \int_0^{2\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx$$

Questão 5

Se $f(x)$ possui período a, isto é, $f(x + a) = f(x)$, prove que

$$\int_0^{ka} f(x)\, dx = k \int_0^{a} f(x)\, dx,$$

onde k é qualquer inteiro.

Questão 6

Se $a < b$; e $f_1(x) < f_2(x) < f_3(x)$ para todo x no intervalo (a, b), prove que:

$$\int_a^b f_1(x)\, dx < \int_a^b f_2(x)\, dx < \int_a^b f_3(x)\, dx.$$

Questão 7

Se m e M são, respectivamente, o `menor` e o `maior` valor de $f(x)$ no intervalo (a, b); bem como, $\phi(x) > 0$, neste mesmo intervalo, prove que:

$$m \int_a^b \phi(x)\, dx < \int_a^b f(x)\phi(x)\, dx < M \int_a^b \phi(x)\, dx$$

e, portanto, para $a < \xi < b$:

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b \phi(x)\, dx.$$

Questão 8

Calcule $\displaystyle\int_0^3 \left(1+x^2\right)^{3/2}\,dx$, pela regra de Simpson, com $n=3$.

Questão 9

Calcule $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$, pela regra de Simpson, com $n=2$.

Questão 10

Calcule $\displaystyle\int_1^{\pi/3} \log\left(\cos x\right)dx$, pela regra de Simpson, com $n=2$.

Questão 11

Examine a integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}$ para continuidade quando $\alpha = 0$.

Questão 12

Examine a integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}$ na vizinhança de $\alpha = 0$.

Questão 13

Encontre as derivadas, com respeito a α, das seguintes integrais, sem primeiro integrá-las; e, depois, verifique o resultado integrando e derivando em seguida.

(a) $\displaystyle\int_0^{\alpha x} \cos\left(x+\alpha\right)dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{x} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\alpha}} x\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{\alpha^2}^{\alpha^8} \left(x^2+\alpha^2\right)dx$

Questão 14

Por diferenciação em relação a α, encontre os valores da seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 + \alpha\cos x)\, dx$; (b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{\alpha} - 1}{\ln x}\, dx$

Questão 15

Por sucessivas diferenciações de $\displaystyle\int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$, obtenha:

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^m\, dx = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$$

Questão 16

Sabendo-se, para $\alpha > 1$, que:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}},$$

mostre que:

$$\int_0^{\pi} \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x}\, dx = \pi \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}.$$

Questão 17

Teste a convergência das seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\, dx$.

(c) $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{x^4\, dx}{(x^2 + a^2)^{5/2}}$.

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos(bx)\, dx$.

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}}\, dx$.

(f) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$.

Questão 18

Prove[1] a convergência de $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\, dx$.

Questão 19

Prove a convergência de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\operatorname{sen} mx}{x}\, dx$.

Questão 20

Prove que as seguintes integrais satisfazem as condições de diferenciabilidade em relação a α, sob o sinal da integral:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx$.

(b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\, dx$.

(c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-bx^2}\cos(\alpha x)\, dx$.

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha}\, dx$.

Questão 21

Sabendo-se que $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}$, obtenha, por diferenciação,

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\, dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

Questão 22

Sabendo-se que $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, obtenha, por diferenciação,

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n \alpha^{n+\frac{1}{2}}}.$$

[1] o autor indica um caminho semelhante ao adotado no Exemplo 3, §62, do livro

Questão 23

De $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$, obtenha, por diferenciação,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n\alpha^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Questão 24

De $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \cos mx \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+m^2}$, obtenha, por integração:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x \sec mx} \, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}.$$

Questão 25

De $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \operatorname{sen} mx \, dx = \frac{m}{\alpha^2+m^2}$, obtenha, por integração:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x \operatorname{cossec} mx} \, dx = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{m}.$$

Questão 26

De $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha}$, obtenha, por integração:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, dx = \ln \frac{b}{a}.$$

Questão 27

De $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$, obtenha, por integração:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2} \, dx = (b-a)\sqrt{\pi}.$$

Questão 28

Investigue a convergência das seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n \, dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} \, dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^4)^{1/3}} \, dx.$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^{2/3}(1+x)} \, dx.$

(e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx.$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} \, dx.$

Questão 29

Calcule as integrais que seguem. Em alguns casos, apenas uma mudança de variável é necessária.

(a) $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} mx}{x} \, dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{se } m > 0, \\ 0, & \text{se } m = 0, \\ -\pi/2, & \text{se } m < 0. \end{cases}$$

(b) $$\int_0^\pi x \ln(\operatorname{sen} x) \, dx = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2.$$

(c) $$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \, dx = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\pi}.$$

(d) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} = \sqrt{\pi}.$$

(e) $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x \cos mx}{x} \, dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m < -1 \text{ ou } m > 1, \\ \pi/4, & \text{se } m = -1 \text{ ou } m = 1, \\ \pi/2, & \text{se } -1 < m < 1. \end{cases}$$

(f) $$\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}} \, dx = \frac{e^{-2\alpha}\sqrt{\pi}}{2}.$$

(Dica): Representando a integral por u, primeiro mostre que $\frac{du}{da} = -2u$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,\mathrm{sen}\,bx}{x}\,dx = \mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}.$

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\,x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

(i) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(1+k\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi\,\mathrm{arcsen}\,k$, com $0 < k < 1$.

(j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+k\,\mathrm{sen}\,x}{1-k\,\mathrm{sen}\,x}\right)\cdot\frac{dx}{\mathrm{sen}\,x} = \pi\,\mathrm{arcsen}\,k$, com $0 < k < 1$.

(k) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}.$

(l) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{arccos}\left(\frac{x}{a}\right)\,dx = a^2\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\right).$

(m) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{sen}\,x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}} = \begin{cases} 2, & \text{se } \alpha^2 \leqslant 1, \\ \frac{2}{\alpha}, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$

Questão 30

Mostre para x suficientemente grande que:

$$\int_x^\infty e^{-x}\,\frac{dx}{x} = e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\ldots+(-1)^n\frac{(n-1)!}{x^n}\right)+R_n$$

(a) Mostre que a série diverge, mas que R_n é menor, em valor absoluto, do que o último termo entre parênteses. Esta é uma série assintótica.

Questão 31

Mostre que

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{e^{-x^2}}{2x}\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1\cdot 3}{2^2x^4}-\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^nx^{2n}}\right)+R_n.$$

(a) Mostre, também, que esta é uma série assintótica, como na questão anterior.