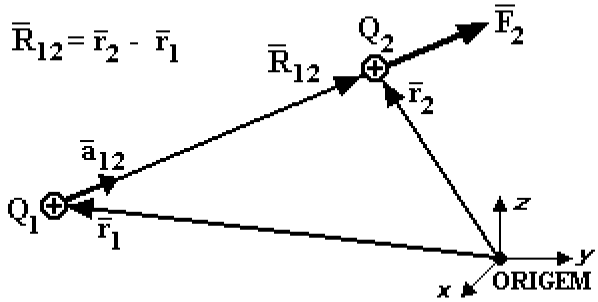
Capítulo II

LEI DE COULOMB E INTENSIDADE DE CAMPO ELÉTRICO

2.1 – LEI DE COULOMB

Força de uma carga Q_1 sobre uma carga Q_2:

$$\boxed{\overline{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_{12}^2}\,\overline{a}_{12}} \qquad [N]$$



onde:

$\overline{R}_{12}$ = vetor orientado de Q_1 a Q_2
$\overline{a}_{12}$ = versor orientado de Q_1 a Q_2

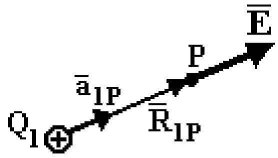
<u>Notas</u>: O <u>módulo</u> de $\overline{F}_2$ depende dos valores das <u>cargas pontuais</u>, da <u>distância</u> entre elas e do <u>meio</u>. Adota-se <u>vácuo</u> como o meio neste caso, e em todas as análises posteriores até o capítulo 5. A <u>orientação</u> de $\overline{F}_2$ (ou sentido de $\overline{F}_2$) depende <u>apenas</u> dos sinais das 2 cargas pontuais.

2.2 –INTENSIDADE DE CAMPO ELÉTRICO

Força de uma carga pontual Q_1 sobre uma carga de prova positiva Q_P situada num ponto P:

$$\overline{F}_P = \frac{Q_1 Q_P}{4\pi\varepsilon_o R_{1P}^2}\,\overline{a}_{1P}$$

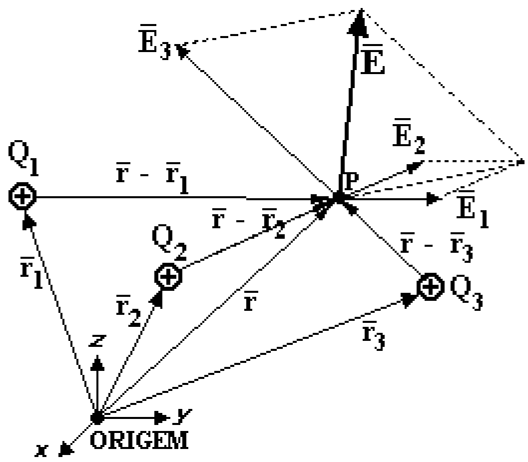
Campo elétrico gerado pela carga pontual Q_1 no ponto P (definição):



$$\boxed{\overline{E} = \frac{\overline{F}_P}{Q_P} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_{1P}^2}\,\overline{a}_{1P}} \qquad \text{(Unidade: N/C ou V/m)}$$

<u>Nota</u>: A <u>orientação</u> do campo elétrico $\overline{E}$ depende <u>apenas do sinal da carga que o produz</u>(Q_1). Assim, as linhas de força do campo elétrico <u>saem</u> (ou divergem) das <u>cargas positivas</u> e <u>entram</u> (ou convergem) para as <u>cargas negativas</u>.

Campo elétrico gerado por <u>n</u> cargas pontuais:



$$\boxed{\overline{E}(\overline{r}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\varepsilon_o \left|\overline{r} - \overline{r}_m\right|^2}\,\overline{a}_m} \qquad [V/m]$$

onde: Q_m = m-ésima carga pontual
$\overline{r}_m$ = posição da m-ésima carga pontual
$\overline{r}$ = posição do ponto onde se quer o campo

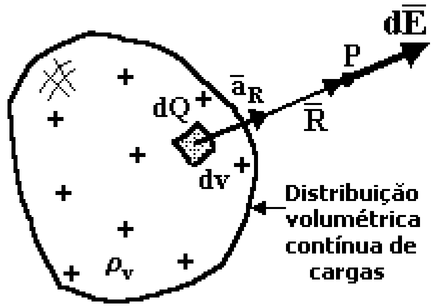
$$\overline{a}_m = \frac{\overline{r} - \overline{r}_m}{\left|\overline{r} - \overline{r}_m\right|} = \text{versorda m-ésima carga pontual}$$

2.3 – CAMPO ELÉTRICO DE UMA DISTRIBUIÇÃO VOLUMÉTRICA CONTÍNUA DE CARGAS

Definindo $\boxed{\rho_V = \frac{dQ}{dv}}$ = ***densidade volumétrica de carga*** (em C/m^3), temos que $dQ = \rho_v dv$.

Assim a fórmula para calcular o campo elétrico num ponto P, no vácuo, de um volume de cargas é:

$$\boxed{\overline{E} = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_o R^2}\overline{a}_R} \quad [V/m] \quad \text{(FÓRMULA GERAL)}$$



sendo:

$\overline{a}_R$ = versor orientado de dQ ao ponto P (saindo)
R = distância de dQ ao ponto P
ε_o = permissividade elétrica do vácuo [F/m]

<u>**Nota:**</u> Genericamente: $\rho_v\,dv = \rho_S\,ds = \rho_L\,dL = dQ$, para volume → superfície → linha → ponto.

2.4 – CAMPO ELÉTRICO DE UMA DISTRIBUIÇÃO LINEAR CONTÍNUA DE CARGAS

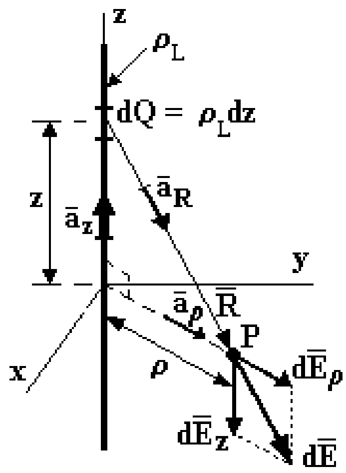
Definindo $\boxed{\rho_L = \frac{dQ}{dL}}$ = ***densidade linear de carga*** (em C/m), temos que $dQ = \rho_L dL$.

Demonstrar que a fórmula que fornece o campo elétrico num ponto P, no vácuo, devido a uma filamento retilíneo ∞ com carga uniformemente distribuída (ver figura), é expressa por:

$$\boxed{\overline{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho}\overline{a}_\rho}$$

sendo:

ρ_L = densidade linear de carga [C/m] (valor constante)
ρ = menor distância (direção normal) da linha ao ponto P [m]
$\overline{a}_\rho$ = versor normal à linha orientado para o ponto P



<u>**Solução:**</u> Posicionando o eixo z sobre o filamento e o plano xy sobre o ponto P para facilitar a solução (ver figura), temos:

$dQ = \rho_L dz$

$\overline{R} = -z\overline{a}_z + \rho\overline{a}_\rho$ e $|\overline{R}| = \sqrt{z^2+\rho^2} \Rightarrow$

$$\overline{a}_R = \frac{\overline{R}}{|\overline{R}|} = \frac{-z\overline{a}_z + \rho\overline{a}_\rho}{\sqrt{z^2+\rho^2}}$$

Substituindo na fórmula geral acima obtemos:

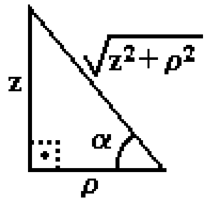
$$\overline{E} = \int_{z=-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_L dz}{4\pi\varepsilon_o(z^2+\rho^2)}\frac{-z\overline{a}_z + \rho\overline{a}_\rho}{\sqrt{z^2+\rho^2}} = \int_{z=-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_L dz(-z\overline{a}_z + \rho\overline{a}_\rho)}{4\pi\varepsilon_o(z^2+\rho^2)^{3/2}} = \overline{E}_z + \overline{E}_\rho$$

Por simetria $\overline{E}_z = 0$.

Fazendo a substituição trigonométrica (ver triângulo ao lado):

$z = \rho\, tg\alpha$

$dz = \rho\, sec^2\alpha\, d\alpha$



e levando na expressão acima e desenvolvendo,

$$\overline{E} = \overline{E}_\rho = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\alpha=-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\rho\, sec^2\alpha\, d\alpha\, \overline{a}_\rho}{\left(\rho^2\, tg^2\alpha + \rho^2\right)^{3/2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o \rho}\int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2} cos\alpha\, d\alpha\, \overline{a}_\rho$$

$$\overline{E} = \overline{E}_\rho = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o}\left[sen\alpha\right]_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2}\ \overline{a}_\rho = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o}\left[1+1\right]_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2}\ \overline{a}_\rho$$

Daí chegamos finalmente a: $\boxed{\overline{E} = \overline{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o \rho}\ \overline{a}_\rho}$

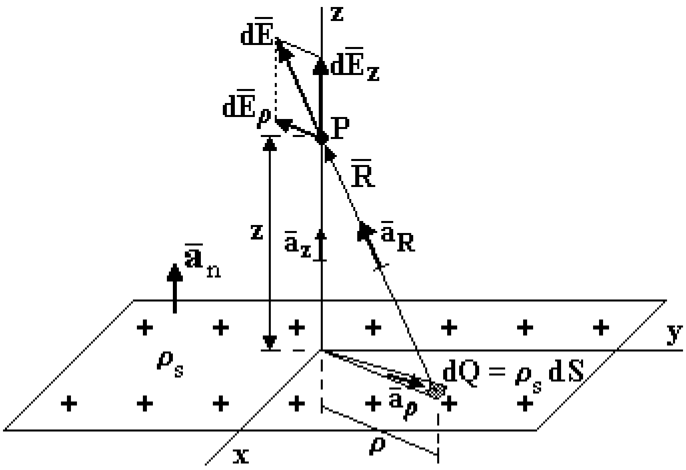
Logo, para uma linha ∞ com carga uniformemente distribuída, a <u>magnitude</u> de $\overline{E}$ é <u>inversamente proporcional à distância</u> (ρ), e a <u>direção</u> de $\overline{E}$ é <u>radial</u> (normal) à linha.

2.5 – CAMPO ELÉTRICO DE UMA DISTRIBUIÇÃO SUPERFICIAL CONTÍNUA DE CARGAS

Definindo $\boxed{\rho_S = \frac{dQ}{dS}}$ = ***densidade superficial de carga*** (em C/m^2), temos que dQ = ρ_S dS.

Demonstrar que a fórmula que fornece o campo elétrico num ponto P, no vácuo, devido a uma superfície plana ∞ com carga uniformemente distribuída (ver figura), é expressa por:

$$\boxed{\overline{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\overline{a}_n}$$



sendo:

ρ_S = densidade superficial de carga [C/m^2] (constante)

$\overline{a}_n$ = versor normal ao plano orientado para o ponto P

<u>**Solução**</u>**:**

Observando a figura temos:

$dQ = \rho_s dS = \rho_s \rho d\rho d\phi$

$$\overline{R} = -\rho\overline{a}_\rho + z\overline{a}_z \text{ e } \left|\overline{R}\right| = \sqrt{\rho^2+z^2} \Rightarrow \overline{a}_R = \frac{\overline{R}}{\left|\overline{R}\right|} = \frac{-\rho\overline{a}_\rho + z\overline{a}_z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

Substituindo na fórmula geral acima obtemos:

$$\overline{E} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{+\infty} \frac{\rho_s \rho d\rho d\phi}{4\pi\varepsilon_o\left(\rho^2+z^2\right)} \frac{-\rho\overline{a}_\rho + z\overline{a}_z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

$$\overline{E} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{+\infty} \frac{\left(-\rho_s\rho^2\overline{a}_\rho + \rho_s\rho z\overline{a}_z\right)d\rho d\phi}{4\pi\varepsilon_o\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}} = \overline{E}_\rho + \overline{E}_z$$

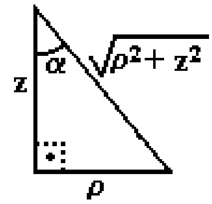
Por simetria $\overline{E}_\rho = 0$.

$$\overline{E} = \overline{E}_z = \frac{\rho_s z \overline{a}_z}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\rho=0}^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{\rho_s z \overline{a}_z}{2\varepsilon_o} \int_{\rho=0}^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Fazendo a substituição trigonométrica (ver triângulo ao lado):

$\rho = z\,tg\alpha$

$d\rho = z\,sec^2\alpha\, d\alpha$,



e levando na expressão acima e desenvolvendo,

$$\overline{E} = \overline{E}_z = \frac{\rho_s z \overline{a}_z}{2\varepsilon_o} \int_{\alpha=0}^{\pi/2} \frac{z\,tg\alpha\, z\,sec^2\alpha\, d\alpha}{\left(z^2\, tg^2\alpha + z^2\right)^{3/2}} = \frac{\rho_s \overline{a}_z}{2\varepsilon_o} \int_{\alpha=0}^{\pi/2} \frac{tg\alpha\, d\alpha}{sec\alpha} = \frac{\rho_s \overline{a}_z}{2\varepsilon_o} \int_{\alpha=0}^{\pi/2} sen\alpha\, d\alpha$$

$$\overline{E} = \overline{E}_z = \frac{\rho_s \overline{a}_z}{2\varepsilon_o} \left[-cos\alpha\right]_{\alpha=0}^{\pi/2} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}[0+1]\overline{a}_z \Rightarrow \overline{E} = \overline{E}_z = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\overline{a}_z$$

De uma forma mais geral, fazendo $\overline{a}_z = \overline{a}_n \Rightarrow \boxed{\overline{E} = \overline{E}_n = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\overline{a}_n}$

Logo, para o plano ∞ com carga uniformemente distribuída, a <u>magnitude</u> de $\overline{E}$ é <u>independente da distância</u> (z) do plano a P, e a <u>direção</u> de $\overline{E}$ é normal ao <u>plano</u>.

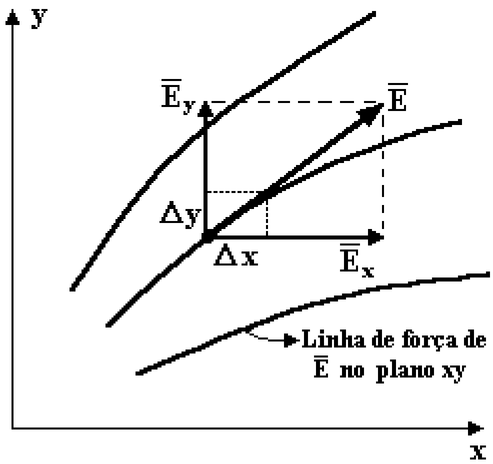
2.6 – LINHA DE FORÇA E ESBOÇO DE CAMPO

Obtenção da equação da linha de força de $\overline{E}$ no plano xy:

Para um ponto na linha de força no plano *xy*, temos:

$\overline{E} = E_x \overline{a}_x + E_y \overline{a}_y$

$\Delta\overline{L} = \Delta x\, \overline{a}_x + \Delta y\, \overline{a}_y$



onde $\overline{E} \mathbin{//} \Delta\overline{L}$ (2 vetores em paralelo)

Fazendo $\Delta\overline{L} \to d\overline{L}$, obtemos:

$d\overline{L} = dx\, \overline{a}_x + dy\, \overline{a}_y$

Como, $\overline{E} \propto d\overline{L}$, obtemos:

$$\boxed{\frac{E_x}{dx} = \frac{E_y}{dy}}$$

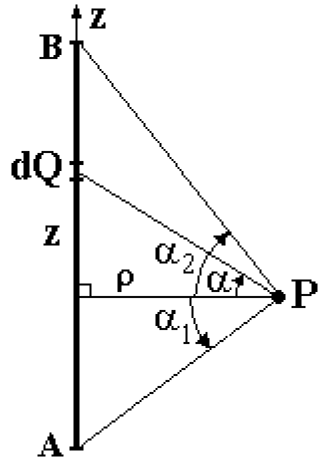
Logo, basta resolver esta equação diferencial para obter a equação da linha de força no plano *xy*.

<u>Nota</u>: Para uma linha de força de $\overline{E}$ no <u>espaço tridimensional</u>, obtém-se a expressão:

$$\boxed{\frac{E_x}{dx} = \frac{E_y}{dy} = \frac{E_z}{dz}}$$

(<u>Atenção</u>: Resolve-se duas a duas, segundo as projeções em *xy*, *yz* e *zx*)

2.7 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS



2.1) (a) Demonstrar que o campo elétrico $\vec{\mathbf{E}}$, num ponto P no vácuo, devido a umacarga uniformemente distribuída sobre um filamento retilíneo de comprimento finito (extremidades A e B) no eixo z, é dado por:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left[(\operatorname{sen}\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_1)\ \vec{\mathbf{a}}_\rho + (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\ \vec{\mathbf{a}}_z\right],$$

sendo:

ρ_L = densidade linear de carga (constante),

ρ =distância (medida na perpendicular) do eixo zao ponto P,

α_1, α_2 = ângulos positivos medidos conforme indicados,

$\vec{\mathbf{a}}_\rho$ e $\vec{\mathbf{a}}_z$ = vetores unitáriosem coordenadas cilíndricasem P.

(b) Calcular $\vec{\mathbf{E}}$ nos pontos C(0, 3, 0) e D(0, 3, 3), para a carga com $\rho_L = 12\pi\varepsilon_0$ C/m distribuída sobre o filamento retilíneo no eixo z com as extremidades A(0, 0, -3) e B(0, 0, 3).

(c) Calcular $\vec{\mathbf{E}}$ nos mesmos pontos C e D, para a carga com $\rho_L = 12\pi\varepsilon_0$ C/m distribuída sobre a reta semi-infinita iniciando em A(0,0,0) e estendendo ao longo do eixo z no sentido positivo.

Respostas: a) Demonstração,

b) $\vec{E}_C = \sqrt{2}\,\vec{a}_y = 1,4142\vec{a}_y$, $\vec{E}_D = 0,8944\vec{a}_y + 0,5528\vec{a}_z$,[V/m];

c) $\vec{E}_C = \vec{a}_y - \vec{a}_z$, $\vec{E}_D = 1,7071\vec{a}_y - 0,7071\vec{a}_z$ [V/m].

2.2) Uma linha infinita possui uma distribuição de carga com densidade ρ_L = -100 [ηC/m] e está situada no vácuo sobre a reta y = –5 [m] e z=0. Uma superfície plana infinita possui uma distribuição de carga com densidade $\rho_S = \alpha/\pi$ [ηC/m^2] e está situada no vácuo sobre o plano z = 5 [m]. Determinar o valor da constante α para que o campo elétrico resultante no ponto P(5,5,-5) não possua componente no eixo z.

Resposta: $\alpha = 4$.

2.3) Dado um campo $\vec{\mathbf{E}}(\rho,\phi) = E_\rho(\rho,\phi)\vec{\mathbf{a}}_\rho + E_\phi(\rho,\phi)\vec{\mathbf{a}}_\phi$ em coordenadas cilíndricas, as equações das linhas de força em um plano z = constante são obtidas resolvendo a equação diferencial: $\boxed{E_\rho/E_\phi = d\rho/\rho\, d\phi}$

a) Determinar a equação da linha de força que passa pelo ponto P(ρ = 2, ϕ = 30°, z = 0) para o campo $\vec{\mathbf{E}} = \rho\, sen 2\phi\, \vec{\mathbf{a}}_\rho - \rho\, cos 2\phi\, \vec{\mathbf{a}}_\phi$.

b) Determinar um vetor unitário passando pelo ponto P(ρ = 2, ϕ = 30°, z = 0), que seja paralelo ao plano z = 0 e normal a linha de força obtida no item anterior.

Respostas:a) $\rho^2 = 8\cos 2\phi$; b) $\vec{\mathbf{a}} = \pm\left(\frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}_\rho + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mathbf{a}}_\phi\right)$.

2.4) Uma carga pontual de 1 nC localiza-se na origem, no vácuo. Determine a equação da curva no plano z = 0, para o qual E_x = 1 V/m.

Resposta: $80,8x^2 = (x^2 + y^2)^3$ ou $\rho = 2,998\sqrt{\cos\phi}$

2.5) Duas linhas infinitas de carga com mesmas densidades lineares uniformes $\rho_L = k$ [ηC/m] estão colocadas sobre o plano z = 0. As duas linhas se cruzam no ponto (-2, 1, 0), sendo que uma é paralela ao eixo x e a outra paralela ao eixo y. Determinar exatamente em que posição no plano z = 0 deverá ser colocada uma carga pontual Q = k [ηC] para que o campo elétrico resultante na origem se anule.

Resposta: $P\left(\frac{\sqrt[4]{5}}{5};\frac{-2\sqrt[4]{5}}{5};0\right)$.

2.6) Determinar a força que atua sobre uma carga pontual Q_1 em P(0,0,a) devido à presença de uma outra carga Q_2, a qual está uniformemente distribuída sobre um disco circular de raio a situado sobre o plano z=0.

Resposta: $\vec{\mathbf{F}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o a^2}\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)\vec{\mathbf{a}}_z$

2.7) Seja um campo elétrico dado por $\vec{\mathbf{E}} = 5e^{-2x}\left(\operatorname{sen} 2y\,\vec{\mathbf{a}}_x - \cos 2y\,\vec{\mathbf{a}}_y\right)$ [V/m]. Determinar:

a) A equação da linha de força que passa pelo ponto P(x=0,5; y=π/10; z=0);
b) Um vetor unitário tangente a linha de força no ponto P.

Respostas: a) $\cos 2y = e^{2x-1{,}212}$ ou $x = 0{,}5\ln(\cos 2y + 0{,}606)$; b) $\vec{\mathbf{a}}_T = 0{,}5878\vec{\mathbf{a}}_x - 0{,}8090\vec{\mathbf{a}}_y$.

2.8) O segmento reto semi-infinito, z ≥ 0, x = y = 0, está carregado com ρ_L = 15 nC/m, no vácuo. Determine $\overline{E}$ nos pontos:
a) P_A (0, 0, –1); b) P_B (1, 2, 3)
Respostas:a) $\overline{E}_A = -134{,}8\overline{a}_z$ [V/m]; b) $\overline{E}_B = 48{,}6\overline{a}_x + 97{,}2\overline{a}_y - 36{,}0\overline{a}_z$ [V/m].

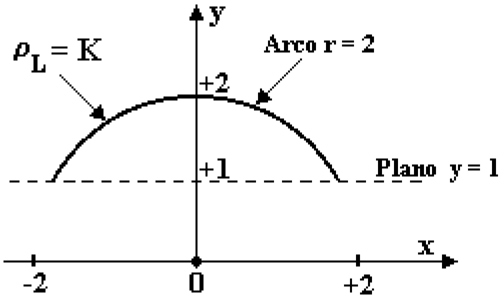
2.9) Duas bolas dielétricas iguais de diâmetro bem pequeno, pesando 10 g cada uma, podem deslizar livremente numa linha plástica vertical. Cada bola é carregada com uma carga negativa de 1 μC.Qual é a distância entre elas, se a bola inferior for impedida de se mover?

Resposta: d = 300 [mm]

2.10) Duas cargas pontuais de +2 C cada uma estão situadas em (1, 0, 0) m e (-1, 0, 0) m. Onde deveria ser colocada uma carga de –1 C de modo que o campo elétrico se anule no ponto (0, 1, 0)?

Resposta: Em (x = 0, y = 0,16 m, z = 0)

2.11) a) Uma carga com densidade uniforme ρ_L = K C/m está distribuída sobre um pedaço de condutor circular de raio r = 2 m, posicionado sobre o plano y = 1 m, conforme mostra a figura abaixo. Determinar o campo elétrico $\overline{E}$ resultante na origem.
b) Repetir o item (a), supondo, porém, que toda a carga seja concentrada no ponto (0,2,0).



Respostas:a) $\overline{E} = \frac{-K\sqrt{3}}{8\pi\varepsilon_o}\overline{a}_y$ [V/m]; b) $\overline{E} = \frac{-K}{12\varepsilon_o}\overline{a}_y$ [V/m]

2.12) Uma carga é distribuída uniformemente, com densidade $\rho_s = 10^{-9}/(18\pi)$ C/m^2, sobre uma lâmina retangular finita de 1 mm × 1 m, estando centrada na origem, sobre o plano z = 0, e com os lados paralelos aos eixos x e y. Usando aproximações de senso comum, estimar o valor do campo elétrico $\vec{E}$ nos seguintes pontos do eixo z:

(a) z = 0,001 mm; (b) z = 1 cm; (c) z = 100 m

Respostas:a) $\overline{E} = 1\overline{a}_z$ [V/m]; b) $\overline{E} = \frac{0{,}1}{\pi}\overline{a}_z$ [V/m]; c) $\overline{E} = \frac{10^{-7}}{2\pi}\overline{a}_z$ [V/m]

2.13) Quatro cargas pontuais, iguais a 3 μC localizam-se, no vácuo, nos quatro vértices de um quadrado de 5 cm de lado. Determine o módulo da força que age em cada carga.

Resposta: 61,9 N

2.14) Três cargas pontuais Q, 2Q e 3Q ocupam respectivamente os vértices A, B e C de um triângulo equilátero de lado l. Uma das cargas tem a máxima força exercida sobre ela e uma outra tem a mínima força. Determinar a razão entre as magnitudes destas 2 forças.

Resposta: Razão = 1,82, sendo as magnitudes das forças máxima e mínima iguais, respectivamente, a 7,94k e 4,36k, onde k = $Q^2/(4\pi\varepsilon_o l^2)$

Anotações

Anotações