Anexo III

ASPECTOS GERAIS SOBRE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS[1]

III.1 - VELOCIDADE DAS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

A figura 1 abaixo representa uma região perto de uma das extremidades de uma longa linha de transmissão, composta de dois fios de resistência nula, no espaço vazio (vácuo). No instante t = 0 fecha-se a chave S. A linha é então carregada da esquerda para a direita (com carga positiva no fio superior e carga negativa no fio inferior) numa velocidade constante u.

Num instante t, após a fonte ter sido ligada, a distância (comprimento) ut da linha terá sido carregada. Observem que à esquerda do plano limite que identifica a propagação da perturbação, existe uma corrente I dirigida para a direita no fio superior e para a esquerda no fio inferior.

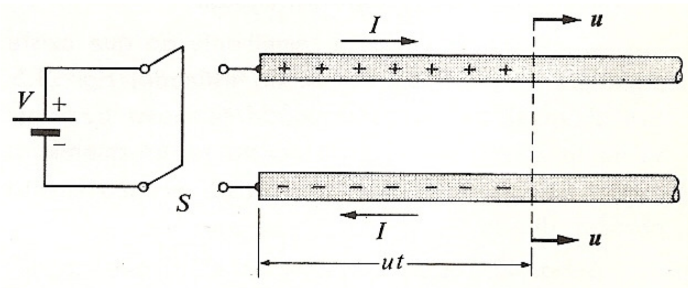

Figura 1 – Energização de uma linha de transmissão de dois fios de resistência nula no vácuo

Os campos elétricos e magnéticos formados num plano transversal a linha de transmissão estão ilustrados na figura 2.

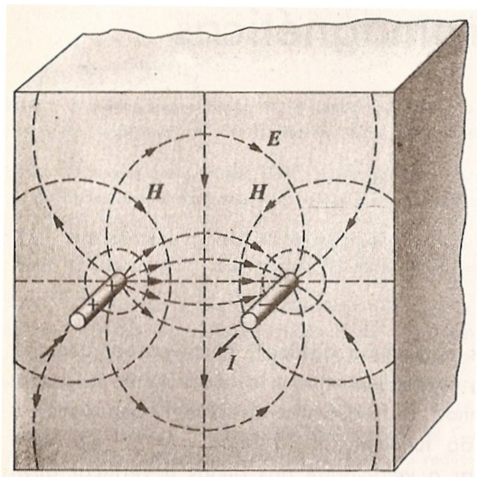

Figura 2 – Campos elétricos e magnéticos da linha de transmissão de dois fios da figura 1

O problema simplifica geometricamente se, em lugar de uma linha de dois fios, considerarmos uma linha constituída de duas placas condutoras planas e paralelas, conforme a figura 3. Observem novamente os campos elétricos e magnéticos formados.

Considerando que as duas placas planas possuem dimensões infinitas quando comparadas com a distância entre elas, os campos elétricos (**E**) e magnéticos (**H**) são uniformes e perpendiculares e ficam contidos na região interna às duas placas, como mostrado na figura 4.

[1] Material extraído e adaptado da referência [16].

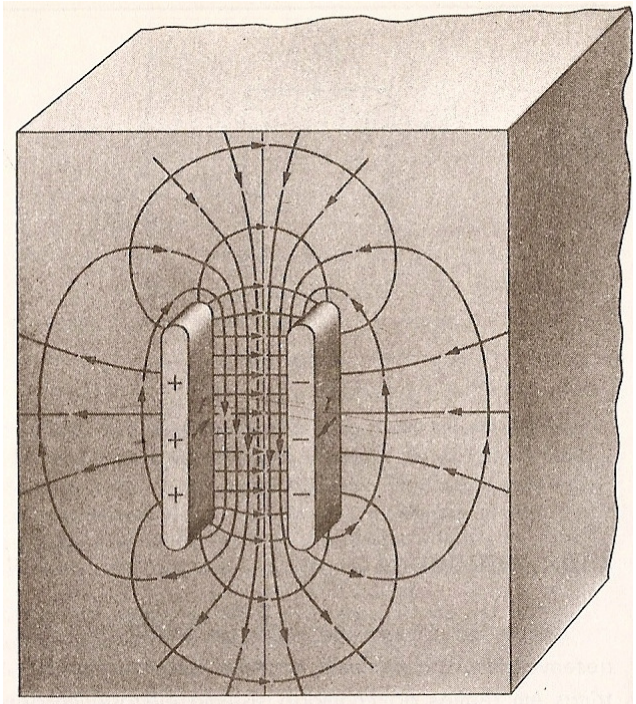

Figura 3 – Vista frontal de uma linha constituída por duas placas planas paralelas

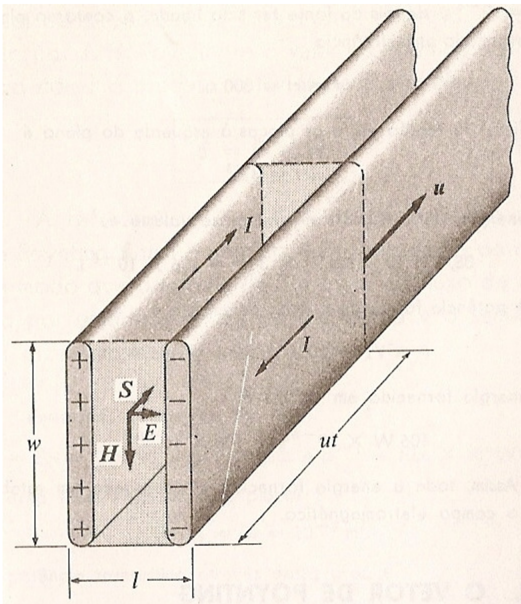

Figura 4 – Campos **E** (elétrico), **H** (magnético) e **S** (vetor de Poynting) para a linha da figura 3

O fluxo elétrico que sai da placa da esquerda (positiva) é expresso por:

$$\Psi = +Q = D\,S_{\Psi} = (\varepsilon_0 E)(wut) \qquad (01)$$

Derivando em relação ao tempo, obtém-se a corrente +I da placa da esquerda:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \varepsilon_0 Ewu = I \qquad (02)$$

Mas, pela aplicação da lei circuital de Ampère em torno da placa positiva, obtém-se também I:

$$Hw = I \qquad (03)$$

Da igualdade entre (01) e (02) chega-se a:

$$H = \varepsilon_0 Eu \qquad (04)$$

O fluxo magnético entre as duas placas é expresso por:

$$\Phi = B\,S_{\Phi} = (\mu_0 H)(\ell u t) \qquad (05)$$

Derivando em relação ao tempo, obtém-se a diferença de potencial V entre as placas:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 H \ell u = V \qquad (06)$$

Mas, pela aplicação da definição de diferença de potencial, obtém-se:

$$E\ell = V \qquad (07)$$

Da igualdade entre (06) e (07) chega-se a:

$$E = \mu_0 H u \qquad (08)$$

Multiplicando (04) por (08) e cancelando o produto EH, chega-se a expressão da velocidade u:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad [m/s] \qquad (09)$$

Substituindo os valores dos parâmetros magnético e elétrico, no vácuo, chega-se a **velocidade de propagação da onda eletromagnética no vácuo** que é idêntica à velocidade da luz.

$$u = \frac{1}{\sqrt{(4\pi\times 10^{-7})(8,854\times 10^{-12})}} = 2,998\times 10^{8} = c \quad [m/s]$$

Dividindo (08) por (04) e organizando os termos, chega-se a **impedância característica do vácuo**:

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0 \quad [\Omega] \qquad (10)$$

Substituindo os valores dos parâmetros magnético e elétrico, no vácuo, chega-se ao valor da impedância característica do vácuo.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{4\pi\times 10^{-7}}{8,854\times 10^{-12}}} = 377 \approx 120\pi \quad [\Omega]$$

A **impedância característica da linha** pode ser calculada dividindo as expressões (07) e (03) para a diferença de potencial e a corrente, respectivamente, da seguinte maneira:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{w}\frac{E}{H} = \frac{\ell}{w} Z_0 \qquad (11)$$

<u>**Nota:**</u> Se considerarmos a largura e também a distância entre asplacas de 1 m, então $Z = Z_0$.

III.2- O VETOR DE POYNTING

A potência fornecida a linha da figura 4 é expressa por:

$$P = VI = (E\ell)(Hw) = (EH)(\ell w) = (EH)(A) \quad [W] \qquad (12)$$

onde A representa a área transversal do campo eletromagnético entre as placas. Assim, a densidade de potência é expressa por

$$\frac{P}{A} = EH \quad [W/m^2] \qquad (13)$$

J. H. Poynting sugeriu que o fluxo de energia através de qualquer seção transversal do campo, por unidade de área e de tempo, pode ser obtido através do produto vetorial do campo elétrico pelo campo magnético, sendo que o sentido do vetor resultante representa o sentido de propagação da onda eletromagnética.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad [W/m^2] \qquad |\vec{S}| = EH = P/A = \text{ densidade de potência } [W/m^2] \tag{14}$$

III.3– PROPAGAÇÃO DE UMA ONDA NUMA LINHA DE TRANSMISSÃO

Suponha que a chave S da figura 1 seja substituída por uma chave inversora, como da figura 5, e que depois da linha ter sido ligada à fonte durante um certo intervalo de tempo (T), a chave seja invertida instantaneamente. A região dos campos elétricos e magnéticos que foi estabelecida inicialmente continua a se propagar para a direita e se estabelece uma segunda região atrás da primeira, na qual os campos são opostos. Essa região também se propaga para a direita com velocidade da luz (c).

Se a chave for invertida periodicamente, em iguais intervalos de tempo (T), uma sucessão de regiões, uma atrás da outra, cada uma das quais com comprimento cT, propagar-se-á ao longo da linha, como na figura 5. Temos assim uma onda quadrada se propagando.

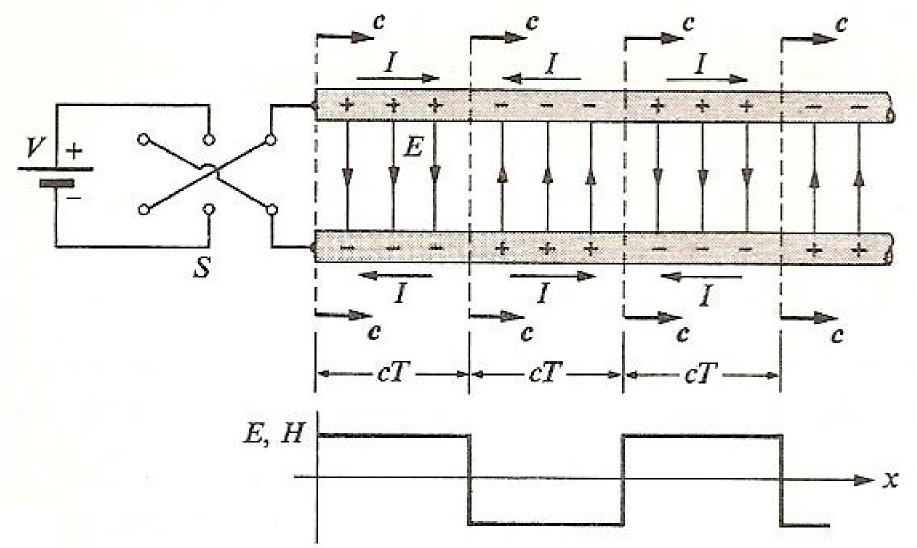

Figura 5 – Propagação de uma onda eletromagnética quadrada ao longo da linha de dois fios

Se a fonte e a chave forem substituídas por uma fonte CA senoidal, como na figura 6, a tensão através da linha será invertida automaticamente e continuamente. Os campos E e H são perpendiculares à direção de propagação e a onda é transversal.

A frequência (f), o comprimento de onda (λ) e a velocidade de propagação da onda (c) são relacionados pela seguinte equação:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad [m] \tag{15}$$

Nota: Se f = 60 Hz, então o comprimento de onda será dado aproximadamente por:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{60} = 5 \times 10^6 \quad [m] = 5.000 \quad [km]$$

Este valor é da ordem do raio médio da Terra (6.371 km)

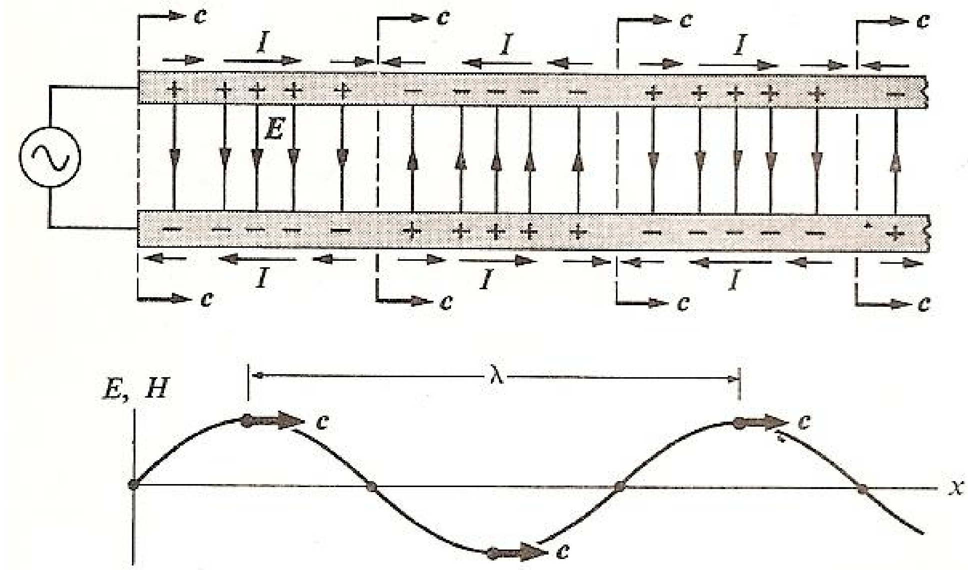

Figura 6 – Propagação de uma onda eletromagnética senoidal ao longo da linha de dois fios

A figura 7 representa esquematicamente os vetores **E** e **H** em um plano perpendicular à direção de propagação indicado pelo vetor de Poynting **S**.

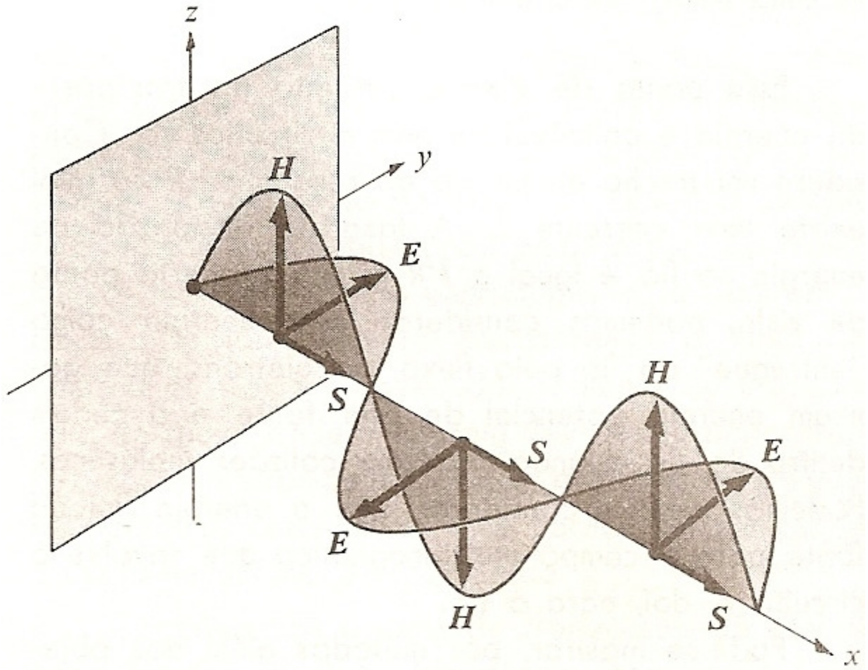

Figura 7 – Vetores **EH** e **S** de uma onda senoidal propagando no sentido **positivo**do eixo x

As equações da propagação da onda eletromagnética da figura 6 são expressas por

$$e = -E\text{sen}(\omega t - kx) \quad [V/m] \tag{16a}$$

$$h = -H\text{sen}(\omega t - kx) \quad [A/m] \tag{16b}$$

sendo: e e h os valores instantâneos, E e H os valores máximos, ωa frequência angular ($\omega = 2\pi f = 2\pi / T$ em rad/s) e k a constante de propagação ($k = 2\pi / \lambda$ em rad/m).

O valor instantâneo do vetor de Poynting (s) é:

$$s = eh = EH\text{sen}^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2}EH\left[1 - \cos 2(\omega t - kx)\right] \quad [W/m^2] \tag{17}$$

O valor médio no tempo (S_{med}) do vetor de Poynting (ou a potência média transmitida por unidade de área) é:

$$S_{med} = \frac{1}{2}EH \quad [W/m^2] \tag{18}$$

III.4–ONDAS ESTACIONÁRIAS NUMA LINHA DE TRANSMISSÃO

Suponha que a linha da figura 6 não se estenda indefinidamente para a direita, mas tenha um comprimento finito. As ondas propagando-se para a direita podem ser **refletidas** ou **absorvidas** na extremidade, dependendo de como a linha termina.

Se a linha terminar em **circuito aberto** ou em **curto-circuito**, as ondas serão **refletidas** quase que completamente.

Se as extremidades da linha forem ligadas por um **resistor igual a impedância característica da linha**, as ondas serão **completamente absorvidas**.

A figura 8 mostra esquematicamente os campos elétricos e magnéticos de uma onda propagando-se no sentido negativo do eixo dos x. As equações desta onda são:

$$e = E\text{sen}(\omega t + kx) \quad [V/m] \tag{19a}$$

$$h = -H\text{sen}(\omega t + kx) \quad [A/m] \tag{19b}$$

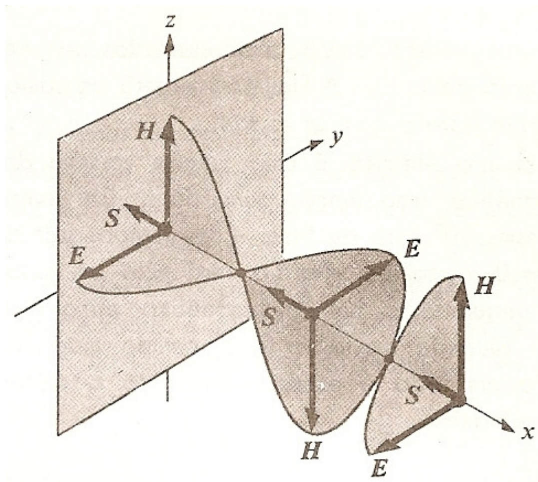

Figura 8 – Vetores **EH** e **S** de uma onda senoidal propagando no sentido **negativo** do eixo x

Suponha agora que temos uma onda **incidente** propagando-se para a direita, e também uma onda **refletida**, de mesma amplitude, propagando-se para a esquerda.

Vamos utilizar os índices 1 e 2 para referir às ondas incidente e refletida, respectivamente, utilizando também o princípio da superposição. Assim, tomando as equações (16) e (19), pode-se obter os campos resultantes. Estes são:

$$e = e_1 + e_2 = 2E\cos\omega t\,\text{sen}kx \quad [V/m] \tag{20a}$$

$$h = h_1 + h_2 = -2H\text{sen}\omega t\cos kx \quad [A/m] \tag{20b}$$

O campo elétrico é **nulo**, em todos os instantes, nos planos para os quais:

$\text{sen}kx = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, ...$ Estes definem os planos **nodais** do campo **E**.

O campo magnético é **nulo**, em todos os instantes, nos planos para os quais:

$\cos kx = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4}, ...$ Estes definem os planos **nodais** do campo **H**.

A figura 9 mostra os campos para um instante no qual $\omega t=\pi/4$. Neste caso teremos:

$$e = \sqrt{2}E\ \text{sen}kx$$

$$h = -\sqrt{2}H \cos kx$$

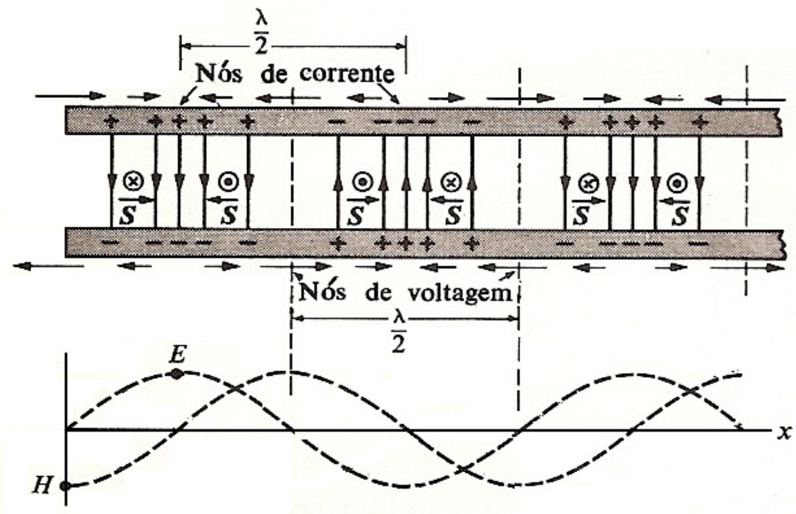

Figura 9 – Ondas estacionárias em uma linha de transmissão a dois fios ($\omega t=\pi/4$)

A partir da figura 9 observa-se o seguinte:

a) O campo elétrico é uma função do cosseno de t e o campo magnético uma função do seno de t. Logo, estes campos **E** e **H**estarão **90º fora de fase** (ou defasados);

b) Para tempos tais que **cosωt=0**, então **E =0**em todo espaço, enquanto que o campo magnético atingirá seu valor máximo no tempo;

c) Por outro lado, para tempos tais que **senωt=0**, então **H = 0** em todo espaço, enquanto que o campo elétrico atingirá seu valor máximo no tempo;

d) A diferença de potencial entre as placas, em qualquer plano, é proporcional ao campo **E** nesse plano. Daí, os planos nodais do campo **E** são também **nós de tensão** (onde a ddp se anula);

e) A corrente, em qualquer plano, é proporcional ao campo **H** desse plano. Daí, os planos nodais do campo **H** são também **nós de corrente** (onde a corrente se anula);

f) Os nós de corrente situam-se entre os nós de tensão sendo a distância entre eles igual a $\lambda/4$.

A figura 10 mostra os vetores **E, H** e **S** para um cabo coaxial, com resistência nula, no vácuo.

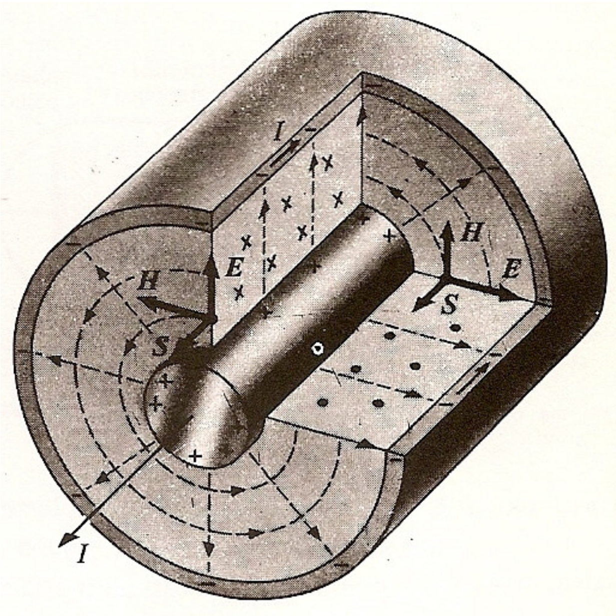

Figura 10 – Visualização dos vetores **E, H** e **S** entre os condutores de um cabo coaxial