



Capítulo VIII

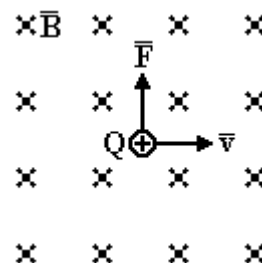
FORÇAS E CIRCUITOS MAGNÉTICOS, MATERIAIS E INDUTÂNCIA

8.1 – FORÇA SOBRE UMA CARGA EM MOVIMENTO

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{Unidade da força: N})$$

Se ambos os campos elétrico e magnético estão presentes, a força sobre uma carga pontual Q , chamada *força de Lorentz*, é:

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \text{ em N, ou } \vec{f} = \rho_v(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \text{ em N/m}^3$$

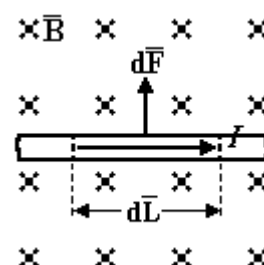


8.2 – FORÇA SOBRE UM ELEMENTO DIFERENCIAL DE CORRENTE

$$d\vec{F} = dQ(\vec{v} \times \vec{B}) = Idt(\vec{v} \times \vec{B}) = I(\vec{v}dt) \times \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = I d\vec{L} \times \vec{B}$$

Para um *condutor retilíneo*, com $\vec{B} = \text{cte.}$, obtemos: $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$

Módulo da força \vec{F} : $F = BIL \sin \theta$ onde θ é o ângulo entre os vetores \vec{L} e \vec{B}



Sentido da força \vec{F} : Regra do produto vetorial, indo de \vec{L} para \vec{B} .

Nota: Caso os vetores \vec{L} e \vec{B} sejam perpendiculares ($\theta = 90^\circ$), pode-se usar a conhecida “Regra dos 3 dedos da mão esquerda” para obter o sentido de \vec{F} . Assim, com o dedo indicador apontando \vec{B} e o dedo médio apontando \vec{L} (ou I), obtém-se o dedo polegar apontando o sentido de \vec{F} .

Exemplo: Determinar as forças de repulsão entre 2 condutores filamentos retilíneos longos e paralelos, separados por uma distância d por onde fluem correntes I iguais e opostas.

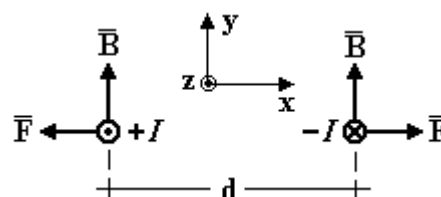
Solução:

Os sentidos das forças estão indicados na figura.

As duas forças possuem mesmo módulo, o qual é obtido do seguinte modo (no vácuo):

$$F = BIL \text{ onde } B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2\pi d}$$

$$\text{Logo: } F = \mu_0 \frac{I}{2\pi d} IL \Rightarrow \boxed{\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}} \quad [\text{N/m}]$$

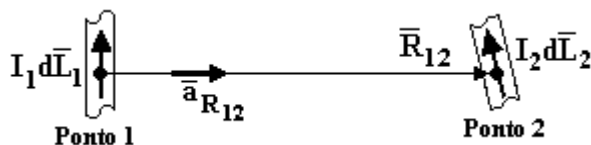




8.3 – FORÇA ENTRE ELEMENTOS DIFERENCIAIS DE CORRENTE

Densidade do fluxo magnético no ponto 2 devido ao elemento diferencial de corrente no ponto 1:

$$d\vec{B}_2 = \mu_0 d\vec{H}_2 = \mu_0 \frac{I_1 d\vec{L}_1 \times \vec{a}_{R_{12}}}{4\pi R_{12}^2}$$



Relembrando, a força diferencial em um elemento diferencial de corrente é expressa por:

$$d\vec{F} = Id\vec{L} \times \vec{B}$$

Substituindo \vec{B} por $d\vec{B}_2$, e $Id\vec{L} = I_2 d\vec{L}_2$, a quantidade diferencial da força diferencial no elemento diferencial de corrente no ponto 2 torna-se:

$$d(d\vec{F}_2) = I_2 d\vec{L}_2 \times d\vec{B}_2$$

Substituindo $d\vec{B}_2$:

$$d(d\vec{F}_2) = I_2 d\vec{L}_2 \times \mu_0 \frac{I_1 d\vec{L}_1 \times \vec{a}_{R_{12}}}{4\pi R_{12}^2}$$

$$d(d\vec{F}_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} d\vec{L}_2 \times \frac{d\vec{L}_1 \times \vec{a}_{R_{12}}}{R_{12}^2} \Rightarrow \vec{F}_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint d\vec{L}_2 \times \oint \frac{d\vec{L}_1 \times \vec{a}_{R_{12}}}{R_{12}^2}$$

Nota: A segunda integral é necessária para obter o campo magnético em 2 devido à corrente no ponto 1. Pelo demonstrado, é melhor dividir o problema de calcular a força magnética em duas partes: primeiro calcula-se primeiro o vetor campo magnético e depois a força.

8.4 – TORQUE EM UMA ESPIRA INFINITESIMAL PLANA

Para a espira infinitesimal retangular da figura e da definição de torque ($\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$), obtém-se:

$$d\vec{T} = Id\vec{S} \times \vec{B} \quad (\text{Unidade de } \vec{T}: \text{Nm})$$

Definindo o momento magnético diferencial da espira como:

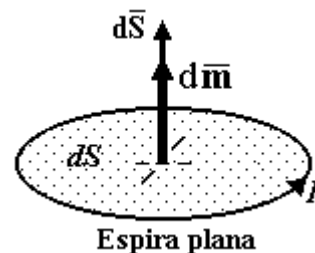
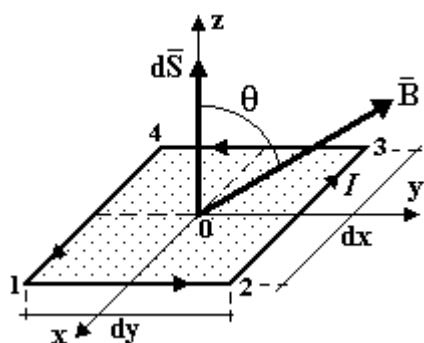
$$d\vec{m} = Id\vec{S} \quad (\text{Unidade de } \vec{m}: \text{Am}^2)$$

podemos escrever o torque na espira como sendo:

$$d\vec{T} = d\vec{m} \times \vec{B}$$

De uma maneira geral, para \vec{B} constante em toda área S, temos:

$$\vec{T} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$



Notas:

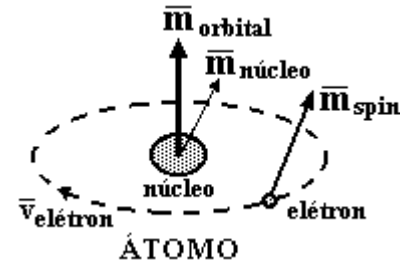
- As equações acima são também válidas para qualquer forma de espira de corrente, como por exemplo a espira circular.
- O torque na espira (\vec{T}) atua de tal maneira a alinhar o momento magnético (\vec{m}) produzido pela espira com o campo magnético externo (\vec{B}).



8.5 – A NATUREZA DOS MATERIAIS MAGNÉTICOS

Existem 3 tipos de momentos magnéticos em um átomo causados por:

- 1º) Rotação (spin) do elétron em torno de seu próprio eixo: \vec{m}_{spin}
- 2º) Rotação do núcleo em torno de seu próprio eixo: $\vec{m}_{\text{núcleo}}$
- 3º) Movimento circular (órbita) do elétron em torno do núcleo: \vec{m}_{orb}



Dependendo da combinação desses momentos magnéticos pode-se classificar 6 tipos diferentes de material, conforme mostrado na tabela (μ_R = permeabilidade magnética relativa, ver seção 8.6):

CLASSIFICAÇÃO DO MATERIAL	μ_R (VALORES USUAIS)	ALGUNS EXEMPLOS E COMENTÁRIOS
1 – Diamagnético	$\mu_R < 1$ e $\mu_R \approx 1$ ($\mu_R = 1$)	H, He, NaCl, Cu, Au, Si, Ge, S, grafite, gases inertes.
2 – Paramagnético	$\mu_R > 1$ e $\mu_R \approx 1$ ($\mu_R = 1$)	K, O, Al, Be, tungstênio, terras-raras, vários sais.
3 – Ferromagnético	$\mu_R \gg 1$ ($10^3 < \mu_R < 10^6$)	Fe, Co, Ni, ligas. Elementos com domínios magnéticos fortes
4 – Antiferromagnético	$\mu_R \approx 1$ ($\mu_R = 1$)	Óxido de magnésio. Os momentos adjacentes se opõem e cancelam
5 – Ferrimagnético	$\mu_R > 1$ ($10 < \mu_R < 10^3$)	Ferrites. Momentos adjacentes desiguais paralelos e opostos
6 – Superparamagnético	$\mu_R > 1$ ($1 < \mu_R < 10$)	Fitas magnéticas de gravação. Matriz não magnética.

8.6 – MAGNETIZAÇÃO E PERMEABILIDADE MAGNÉTICA

Magnetização \vec{M} é definido como sendo o momento magnético total por unidade de volume, isto é:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \vec{m}_i = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\vec{m}_{\text{total}}}{\Delta v} \quad (\text{Unidade: A/m – mesma unidade de H})$$

onde n é o número de dipolos magnéticos por unidade de volume Δv

A lei circuital de Ampère relaciona o campo magnético \vec{H} com a corrente de condução I que produz este campo, isto é:

$$I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{L}$$

Por analogia, pode-se também relacionar o campo \vec{M} com uma corrente, I_m , que produz este campo, sendo esta corrente chamada de *corrente de magnetização*.

$$I_m = \oint \vec{M} \cdot d\vec{L}$$

A lei circuital de Ampère em termos da corrente total, I_T , é expressa por:

$$I_T = \oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{L}$$

onde:

$I_T = I + I_m$ = soma das correntes de condução e de magnetização

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ = permeabilidade magnética do vácuo (unidade: H/m)

Substituindo as correntes pelas suas expressões com integrais, obtemos a seguinte expressão geral que relaciona os 3 campos \vec{B} , \vec{H} e \vec{M} em qualquer tipo de meio:

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})} \quad (\text{Análoga a } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$$

Para um meio *linear e isotrópico*, pode-se relacionar \vec{M} linearmente com \vec{H} por:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (\text{Análoga a } \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E})$$

sendo χ_m chamada de susceptibilidade magnética (constante adimensional).

Substituindo \vec{M} na expressão geral, e arranjando os termos, obtemos a conhecida relação:

$$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}$$

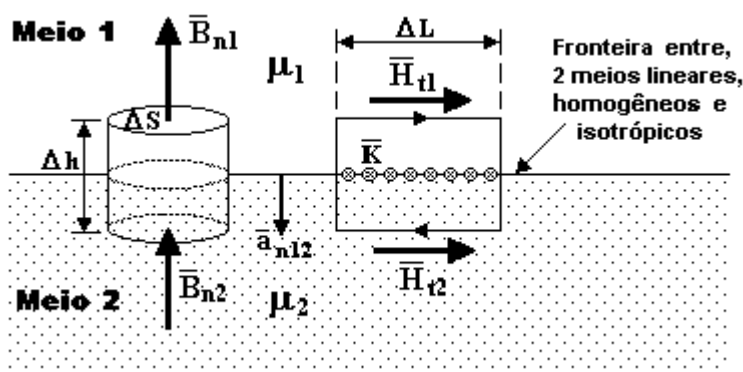
onde:

$\mu = \mu_R \mu_0$ = permeabilidade magnética absoluta (unidade: H/m)

$\mu_R = 1 + \chi_m$ = permeabilidade magnética relativa (constante adimensional)

Nota: Por analogia com $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$, pode-se chegar a: $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}_m$ e $\vec{\nabla} \times (\vec{B}/\mu_0) = \vec{J}_T$.

8.7 – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O CAMPO MAGNÉTICO



Aplicando a lei de Gauss do campo magnético ao pequeno cilindro da figura e fazendo $\Delta h \rightarrow 0$:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow B_{n1} \Delta S - B_{n2} \Delta S = 0 \Rightarrow \boxed{B_{n1} = B_{n2}}$$

Logo, a componente normal da densidade de fluxo magnético é contínua, isto é, não se altera.

Aplicando a lei circuital de Ampère ao pequeno circuito fechado da figura, fazendo $\Delta h \rightarrow 0$, temos:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I_{\text{enlaçada}} \Rightarrow H_{t1} \Delta L - H_{t2} \Delta L = K \Delta L \Rightarrow \boxed{H_{t1} - H_{t2} = K}$$

Logo, a componente tangencial do campo magnético sofre uma descontinuidade de K , isto é, altera-se de K quando existe uma distribuição superficial de corrente na fronteira entre os 2 meios. Em forma vetorial, a expressão para o campo magnético acima é dada por:

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{a}_{n12} = \vec{K} \quad (\text{Nota: } \vec{a}_{n12} = \text{versor normal à fronteira dirigido da região 1 para a 2})$$



Se não existe distribuição de corrente na fronteira, isto é, se $K = 0$, obtém-se: $H_{t1} = H_{t2}$

Logo, a componente tangencial do campo magnético é contínua, isto é, não se altera quando não existe uma distribuição superficial de corrente (K) na fronteira entre os 2 meios.

8.8 – CIRCUITO MAGNÉTICO

A análise de circuitos magnéticos é feita por analogia com circuitos elétricos de corrente contínua constante. O quadro abaixo indica a analogia entre as equações desses circuitos.

CIRCUITO ELÉTRICO	CIRCUITO MAGNÉTICO
1) Intensidade de campo elétrico $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$	1) Intensidade de campo magnético $\vec{H} = -\vec{\nabla}V_m$
2) Diferença de potencial elétrico $V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L}$	2) Diferença de potencial magnético $V_{m,AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{L}$
3) Lei de Ohm, forma pontual $\vec{J} = \sigma \vec{E}$	3) Densidade de fluxo magnético $\vec{B} = \mu \vec{H}$
4) Corrente elétrica $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$	4) Fluxo magnético $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
5) Resistência (R) $R = \frac{L}{\sigma S}$	5) Relutância (\mathfrak{R}) $\mathfrak{R} = \frac{L}{\mu S}$
6) Lei de Ohm $V = R I$	6) Lei de Ohm para circuitos magnéticos $V_m = \mathfrak{R} \Phi$
7) Lei de Kirchhoff das malhas $\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$	7) Lei circuital de Ampère $\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I_{\text{enlaçada}} \quad \text{ou} \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = NI$

Exemplo: Seja um toróide de núcleo de ar, de área de seção reta $S = 6 \text{ cm}^2$, raio médio $r_m = 15 \text{ cm}$, envolvido por um enrolamento com $N = 500$ espiras onde circula uma corrente $I = 4 \text{ A}$. Calcular a intensidade do campo magnético H no interior do toróide.

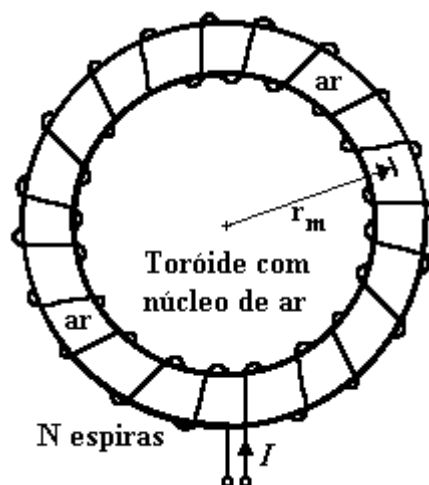
Solução 1: Usando a equação do circuito elétrico análogo:

$$F_{mm} = NI = \mathfrak{R} \Phi = H L$$

$$\mathfrak{R} = \frac{L}{\mu_0 S} = \frac{2\pi r_m}{\mu_0 S} = \frac{2\pi \times 15 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}} = 1,25 \times 10^9 \text{ Aesp/Wb}$$

$$\Phi = \frac{F_{mm}}{\mathfrak{R}} = \frac{NI}{\mathfrak{R}} = \frac{500 \times 4}{1,25 \times 10^9} = 1,6 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1,6 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-4}} = 2,67 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2$$



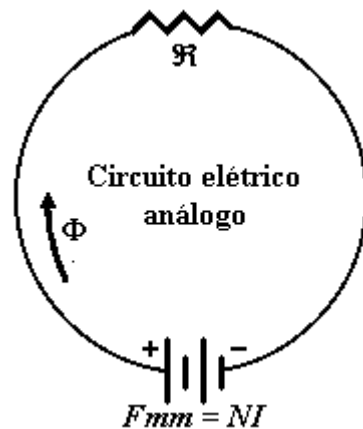


$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{2,67 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}} = 2120 \text{ Aesp/m}$$

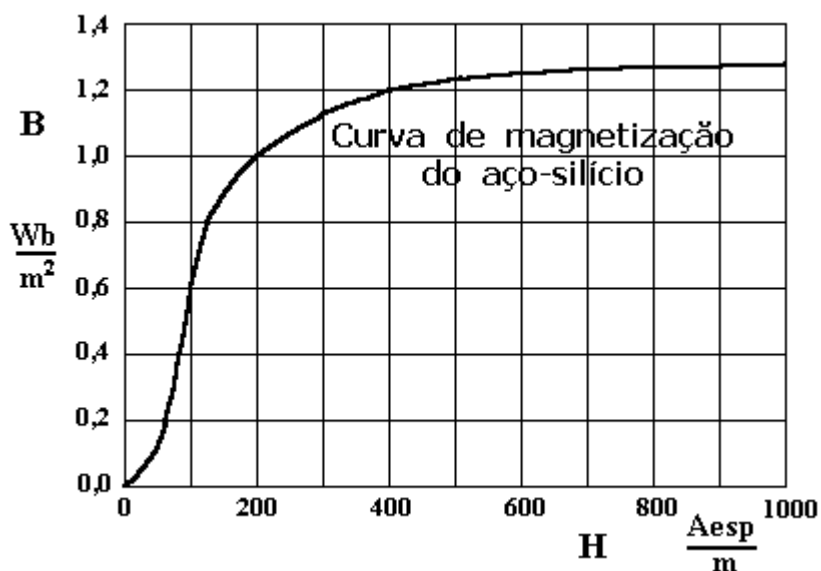
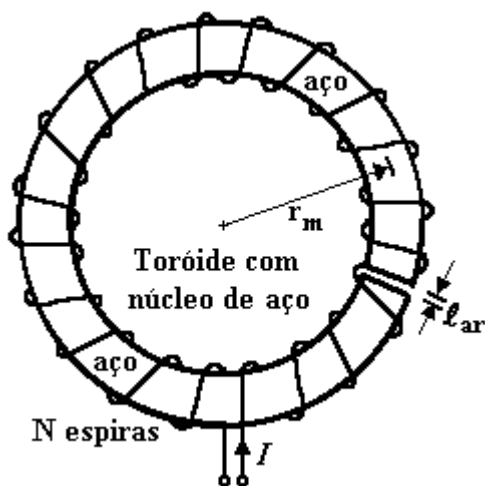
Solução 2: Usando a lei circuital de Ampère:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I_{\text{enlaçada}} \Rightarrow H \times 2\pi r_m = NI \Rightarrow$$

$$H = \frac{NI}{2\pi r_m} \Rightarrow H = \frac{500 \times 4}{2\pi \times 15 \times 10^{-2}} = 2120 \text{ Aesp/m}$$



Exemplo: Seja um toróide de núcleo de aço-silício (figura abaixo) de área de seção reta $S = 6 \text{ cm}^2$, raio médio $r_m = 15 \text{ cm}$, com um entreferro $\ell_{\text{ar}} = 2 \text{ mm}$, o qual está envolvido por um enrolamento com $N = 500$ espiras. Calcular a corrente I que deve circular no enrolamento para que a densidade de fluxo magnético em todo o núcleo seja $B = 1 \text{ Wb/m}^2$.



Solução:

Escrevendo a equação do circuito elétrico análogo:

$$F_{mm} = NI = \mathcal{R}_{\text{aço}} \Phi + \mathcal{R}_{\text{ar}} \Phi$$

ou,

$$F_{mm} = NI = V_{m,\text{aço}} + V_{m,\text{ar}}$$

ou,

$$F_{mm} = NI = H_{\text{aço}} L_{\text{aço}} + H_{\text{ar}} L_{\text{ar}}$$

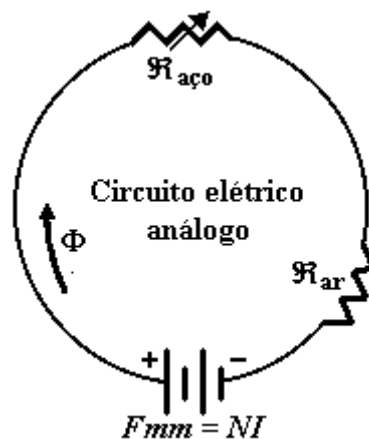
Daí,

$$I = \frac{H_{\text{aço}} L_{\text{aço}} + H_{\text{ar}} L_{\text{ar}}}{N}$$

Fazendo $B_{\text{aço}} = B = 1 \text{ Wb/m}^2$ e levando na curva do aço-silício (ver figura acima) obtemos:

$$H_{\text{aço}} = 200 \text{ Aesp/m}$$

Fazendo $B_{\text{ar}} = B = 1 \text{ Wb/m}^2$, obtemos:





$$H_{ar} = \frac{B_{ar}}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}} = 7,9577 \times 10^5 \text{ Aesp/m}$$

Logo,

$$I = \frac{200 \times (2\pi \times 0,15 - 0,002) + 7,9577 \times 10^5 \times 0,002}{500} = 3,56 \text{ A}$$

Nota: Se desejarmos considerar o aumento da área da seção transversal por onde passa o fluxo no ar (devido ao espalhamento de fluxo quando o mesmo passa do ferro para o ar), utiliza-se o fator de espraçamento k , fazendo $S_{ar} = kS_{ferro}$, sendo $k > 1$.

8.9 – ENERGIA DE UM CAMPO MAGNETOSTÁTICO

A energia total armazenada no campo magnetostático no qual \vec{B} é relacionado linearmente com \vec{H} é obtida por:

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{vol} \vec{B} \cdot \vec{H} dv \quad [J] \quad (\text{Análoga a: } W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} \vec{D} \cdot \vec{E} dv)$$

Notas: a) Fazendo $\vec{B} = \mu \vec{H}$, ou $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ obtemos:

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{vol} \mu H^2 dv \quad \text{ou} \quad W_H = \frac{1}{2} \int_{vol} \frac{B^2}{\mu} dv$$

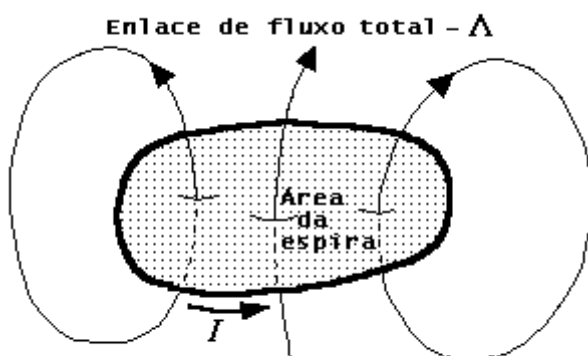
b) A densidade de energia (em J/m^3) é dada por:

$$\frac{dW_H}{dv} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

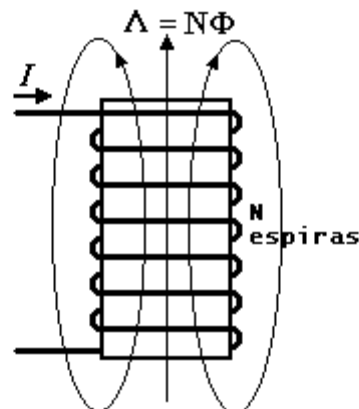
8.10 – AUTO-INDUTÂNCIA E INDUTÂNCIA MÚTUA

Auto-indutância ou *indutância própria* ou simplesmente *indutância*, L , de um circuito fechado (espira ou bobina) é definida como a razão entre o fluxo total enlaçado pelo circuito (Λ) e a corrente (I) que produz este fluxo. (Ver figura).

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{N\Phi}{I} \quad (\text{Unidade: Henry, H})$$



$$\text{Auto-indutância da espira: } L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{N\Phi}{I}$$



$$\text{Auto-indutância da bobina: } L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{N\Phi}{I}$$



Nota: A equação da indutância pode também ser obtida a partir da energia no campo magnético (W_H) devido a corrente I que flui no circuito fechado. Assim, temos:

$$L = \frac{2W_H}{I^2} \Rightarrow W_H = \frac{1}{2}LI^2$$

Indutância mútua, M , entre 2 circuitos fechados é definida como a razão entre o fluxo total enlaçado pelos 2 circuitos e a corrente que produz este fluxo. (Ver figura).

$$M_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \quad (\text{Unidade: Henry, H})$$

Nota: Em termos de energia mútua, temos:

$$M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{vol}} (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_2) dv = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{vol}} (\mu \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2) dv$$

onde:

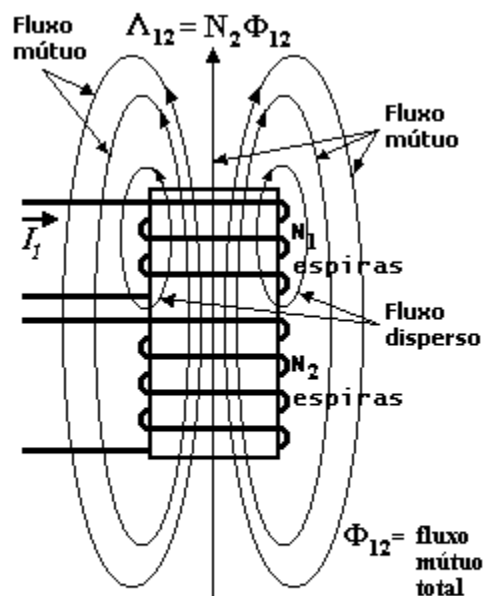
\vec{B}_1, \vec{H}_1 = campo que resulta de I_1 (com $I_2 = 0$)

\vec{H}_2 = campo que resulta de I_2 (com $I_1 = 0$)

Na obtenção de M_{21} , o lado direito da expressão acima não varia, pois o produto escalar é comutativo.

Portanto,

$$M_{12} = M_{21}$$



Indutância mútua entre 2 bobinas:

$$M_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$

Exemplo: A figura mostra 2 solenóides coaxiais de raios r_1 e r_2 , $r_1 < r_2$, com n_1 e n_2 espiras/m. Determinar (em H/m) as auto-indutâncias L_1 e L_2 e as indutâncias mútuas M_{12} e M_{21} .

Solução: Da seção 7.2, e sendo $N = n^\circ$ espiras, $n = n^\circ$ espiras/m:

$$\vec{H} = \frac{NI}{\ell} \vec{a}_z = nI \vec{a}_z \quad \text{bem dentro do solenóide}$$

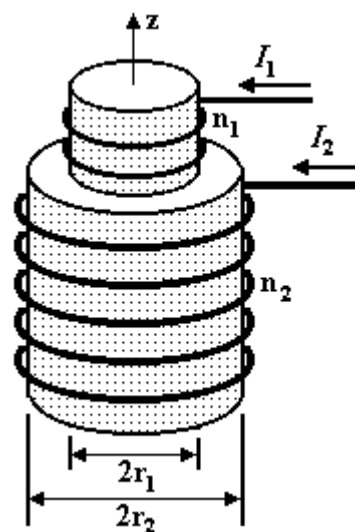
$$\vec{H} = 0 \quad \text{fora do solenóide}$$

Assim, para o solenóide 1 (interno) temos:

$$\vec{H}_1 = \begin{cases} \frac{N_1 I_1}{\ell} \vec{a}_z = n_1 I_1 \vec{a}_z & \text{para } \rho < r_1 \\ 0 & \text{para } \rho > r_1 \end{cases}$$

Similarmente, para o solenóide 2 (externo) temos:

$$\vec{H}_2 = \begin{cases} \frac{N_2 I_2}{\ell} \vec{a}_z = n_2 I_2 \vec{a}_z & \text{para } \rho < r_2 \\ 0 & \text{para } \rho > r_2 \end{cases}$$





a) Cálculo de L_1 e M_{12} em H/m (supondo $I_2 = 0$):

$$L_1 = \frac{\Lambda_1}{I_1} = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} = \frac{n_1 \ell \Phi_1}{I_1} \quad \text{onde} \quad \Phi_1 = B_1 S_1 = \mu_0 H_1 S_1 = \mu_0 n_1 I_1 \pi r_1^2$$

$$\text{Logo: } \boxed{\frac{L_1}{\ell} = \mu_0 n_1^2 \pi r_1^2} \quad [\text{H/m}]$$

$$M_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} = \frac{n_2 \ell \Phi_{12}}{I_1} \quad \text{onde} \quad \Phi_{12} = \Phi_1 = B_1 S_1 = \mu_0 H_1 S_1 = \mu_0 n_1 I_1 \pi r_1^2$$

$$\text{Logo: } \boxed{\frac{M_{12}}{\ell} = \mu_0 n_1 n_2 \pi r_1^2} \quad [\text{H/m}]$$

b) Cálculo de L_2 e M_{21} em H/m (supondo $I_1 = 0$):

$$L_2 = \frac{\Lambda_2}{I_2} = \frac{N_2 \Phi_2}{I_2} = \frac{n_2 \ell \Phi_2}{I_2} \quad \text{onde} \quad \Phi_2 = B_2 S_2 = \mu_0 H_2 S_2 = \mu_0 n_2 I_2 \pi r_2^2$$

$$\text{Logo: } \boxed{\frac{L_2}{\ell} = \mu_0 n_2^2 \pi r_2^2} \quad [\text{H/m}]$$

$$M_{21} = \frac{\Lambda_{21}}{I_2} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{I_2} = \frac{n_1 \ell \Phi_{21}}{I_2} \quad \text{onde} \quad \Phi_{21} = B_2 S_1 = \mu_0 H_2 S_1 = \mu_0 n_2 I_2 \pi r_1^2$$

$$\text{Logo: } \boxed{\frac{M_{21}}{\ell} = \mu_0 n_1 n_2 \pi r_1^2 = \frac{M_{12}}{\ell}} \quad [\text{H/m}]$$

Atenção: Adotando agora $n_1 = 50$ espiras/cm e $n_2 = 80$ espiras/cm; $r_1 = 2$ cm e $r_2 = 3$ cm, para os 2 solenóides coaxiais da figura, calcular os valores numéricos de L_1 e L_2 e M_{12} e M_{21} .

$$L_1 = 4\pi \times 10^{-7} \times 50^2 \times \pi \times 2^2 \Rightarrow L_1 = 39,5 \text{ mH/m}$$

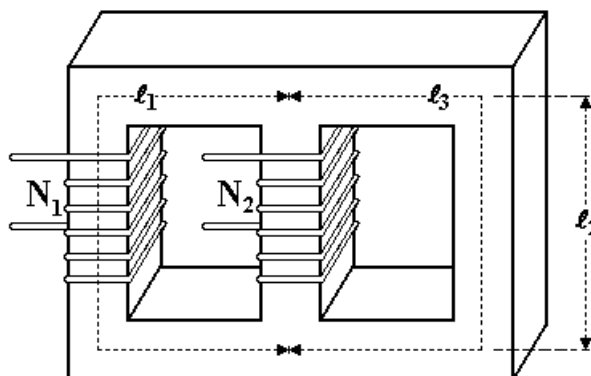
$$L_2 = 4\pi \times 10^{-7} \times 80^2 \times \pi \times 3^2 \Rightarrow L_2 = 227,4 \text{ mH/m}$$

$$M_{12} = M_{21} = 4\pi \times 10^{-7} \times 50 \times 80 \times \pi \times 2^2 \Rightarrow M_{12} = M_{21} = 63,2 \text{ mH/m}$$



8.11 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

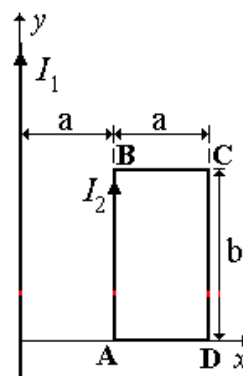
- 8.1) Assume-se que o material ferromagnético da figura possui permeabilidade constante igual a μ . Sendo $S_1 = S_2 = S_3 = S$ = a área da seção reta em qualquer parte do núcleo, ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 = os comprimentos médios do braço esquerdo, braço central e braço direito, respectivamente (com $\ell_1 = \ell_3 = 2\ell$ e $\ell_2 = \ell$), determinar:



- a) A indutância L_2 da bobina de N_2 espiras do braço central;
b) A indutância mútua M_{21} entre as duas bobinas.

Respostas: a) $L_2 = \frac{N_2^2 \mu S}{2\ell}$; b) $M_{21} = \frac{N_1 N_2 \mu S}{4\ell}$.

- 8.2) Um condutor retilíneo muito longo estende-se sobre o eixo y, possuindo uma corrente I_1 , no sentido indicado. Um condutor de forma retangular rígida, com corrente I_2 no sentido ABCDA, é posicionado no plano xy ao lado do condutor retilíneo, conforme mostrado na figura. Determinar:



- a) Os vetores forças sobre cada um dos lados do condutor retangular;
b) O vetor força resultante sobre o condutor retangular;
c) O fluxo total devido a I_1 que atravessa o condutor retangular;
d) A indutância mútua entre os 2 condutores.

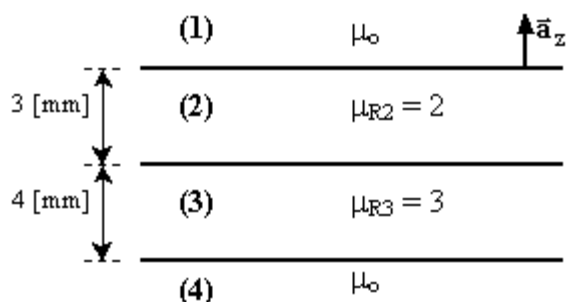
Respostas: a) $\vec{F}_{AB} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi a} \vec{a}_x$, $\vec{F}_{BC} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln 2 \vec{a}_y$,

$\vec{F}_{CD} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{4\pi a} \vec{a}_x$,

$\vec{F}_{DA} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln 2 \vec{a}_y$; b) $\vec{F}_R = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{4\pi a} \vec{a}_x$;

c) $\Phi = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln 2$; d) $M_{12} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln 2$.

- 8.3) Duas placas infinitas, formadas de materiais magnéticos homogêneos, lineares e isotrópicos, de espessuras 3 e 4 [mm], localizam-se no vácuo conforme a figura abaixo. Se \vec{a}_z tem a direção indicada e $\vec{H}_1 = \vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$ [kA/m] na região (1), ache o ângulo entre o campo vetorial \vec{H} e o vetor unitário \vec{a}_z nas regiões (1), (2), (3) e (4).



Respostas:

$\theta_1 = \theta_4 = 36,70^\circ$,

$\theta_2 = 56,14^\circ$;

$\theta_3 = 65,91^\circ$.



- 8.4) Um condutor filamentar infinito situa-se sobre o eixo z e conduz uma corrente I_1 no sentido $+\vec{a}_z$. Um segmento reto de condutor sólido se estende de $P_A(-\ell, 1, 0)$ a $P_B(+\ell, 1, 0)$. Determinar:

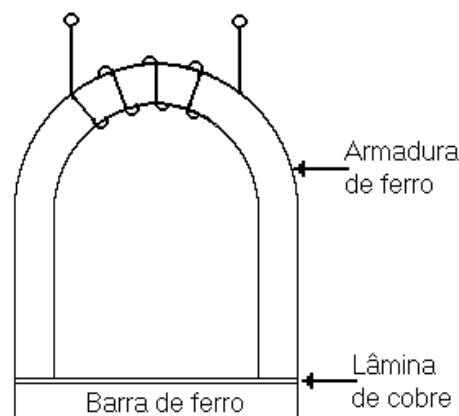
- O campo magnético \vec{H} gerado pelo condutor infinito em um ponto genérico sobre o segmento condutor;
- O valor diferencial de força $d\vec{F}$ que surge devido ao campo magnético \vec{H} do item (a) atuando em um ponto genérico no segmento condutor quando este conduz uma corrente I_2 no sentido $+\vec{a}_x$;
- O torque resultante \vec{T}_{total} sobre o segmento condutor em relação ao ponto $P_0(0, 1, 0)$.

Respostas: a) $\vec{H} = \frac{I_1(x\vec{a}_y - \vec{a}_x)}{2\pi(x^2 + 1)}$;
 b) $d\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 x dx}{2\pi(x^2 + 1)} \vec{a}_z$;
 c) $\vec{T}_{\text{total}} = \frac{-\mu_0 I_1 I_2}{\pi} (\ell - \arctg \ell) \vec{a}_y$.

- 8.5) Um eletroímã com a armadura de ferro em forma de \cup produz força suficiente para manter uma barra de ferro suspensa. Seja $\mu_R = 1800$ para o ferro da armadura e da barra, e os ampêres-espiras aplicados à bobina $NI = 1$ [kA]. O comprimento médio total ao longo da armadura e da barra é de 1 [m] com uma seção transversal de $0,1$ [m²]. Uma lâmina de cobre de 1 [mm] entre a armadura e a barra previne o contato ferro-a-ferro.

Adotando $\mu_{\text{cobre}} = \mu_0$, determinar:

- fluxo magnético produzido pelo eletroímã;
- A massa da barra de ferro ($g = 9,8$ m/s²).



Respostas: a) $\Phi = 0,0492$ [Wb]; b) $m = \Phi^2/(\mu_0 g S) = 1965,6$ [Kg].

- 8.6) Uma espira condutora circular de raio a está localizada sobre o plano $z = 0$ e nela circula uma corrente I na direção $+\vec{a}_\phi$. Para um campo uniforme $\vec{B} = B_0(\vec{a}_x + \vec{a}_y)/\sqrt{2}$, calcular a magnitude (módulo) e a direção (vetor unitário) do torque na espira.

Respostas: $|\vec{T}| = \pi a^2 B_0 I$; $\vec{a}_T = (-\vec{a}_x + \vec{a}_y)/\sqrt{2}$.

- 8.7) Seja uma bobina solenoidal (solenóide) de N espiras, com núcleo de ar, raio da seção reta igual a a e comprimento do núcleo igual a ℓ .

- Determinar, usando a Lei Circuital de Ampère, a expressão que fornece o campo magnético resultante no interior do solenóide;
- Determinar, utilizando a definição de indutância, a expressão que fornece a indutância própria da bobina solenoidal.

Respostas: a) $\vec{H} = \frac{NI}{\ell} \vec{a}_z$; b) $L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{\ell}$.



8.8) Um toróide, que possui seção transversal quadrada, é limitado pelas superfícies $z = 0$, $z = 20$ [mm], $\rho = 30$ [mm] e $\rho = 50$ [mm]. A superfície em $\rho = 30$ [mm] conduz uma corrente distribuída cuja densidade superficial é $\vec{K} = -10\vec{a}_z$ [kA/m]. Determinar:

- As densidades superficiais de correntes correspondentes às outras três superfícies, isto é $\vec{K}_{(\rho=50)}$, $\vec{K}_{(z=0)}$ e $\vec{K}_{(z=20)}$;
- O campo magnético \vec{H} no interior do toróide;
- A energia total armazenada (W_H) no interior do toróide, cuja permeabilidade relativa é $\mu_R = 20$.

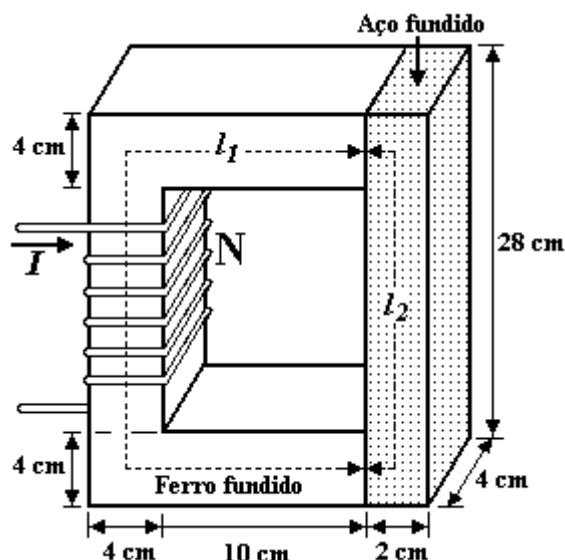
Respostas: a) $\vec{K}_{(\rho=50)} = 6\vec{a}_z$ [kA/m], $\vec{K}_{(z=0)} = \frac{300}{\rho}\vec{a}_\rho$ [A/m] e $\vec{K}_{(z=20)} = -\frac{300}{\rho}\vec{a}_\rho$ [A/m];

b) $\vec{H} = -\frac{300}{\rho}\vec{a}_\phi$ [A/m]; c) $W_H = 72,6$ [mJ].

8.9) A figura mostra uma bobina com $N = 400$ espiras enrolada num núcleo de material ferromagnético formado com 2 materiais diferentes: (1) ferro fundido e (2) aço fundido. Determinar a corrente I na bobina, se a densidade de fluxo magnético no ferro fundido é $B_1 = 0,5$ T.

Nota: Ver em anexo as curvas B-H destes materiais.

Resposta: $I = 2,41$ A



8.10) Determinar o módulo da intensidade de campo magnético no interior de um material para o qual:

- a densidade de fluxo magnético é 4 mWb/m^2 e a permeabilidade relativa é 1,008;
- a suscetibilidade magnética é $-0,006$ e a magnetização é 19 A/m ;
- temos $8,1 \times 10^{28}$ átomos/ m^3 , cada átomo possui um momento de dipolo de $4 \times 10^{-30} \text{ A.m}^2$ e $\chi_m = 10^{-4}$.

Respostas: a) $H = 3.160$ [A/m]; b) $H = 3.170$ [A/m]; c) $H = 3.240$ [A/m].

8.11) Em um certo material magnético $\vec{H} = 5\rho^3\vec{a}_\phi$ A/m e $\mu = 4 \times 10^{-6}$ H/m.

Determinar, para $\rho = 2$ m:

- \vec{J} ;
- \vec{J}_m
- \vec{J}_T

Respostas: a) $\vec{J} = 80\vec{a}_z$ [A/m²]; b) $\vec{J}_m = 174,6\vec{a}_z$ [A/m²]; c) $\vec{J}_T = 254,6\vec{a}_z$ [A/m²]



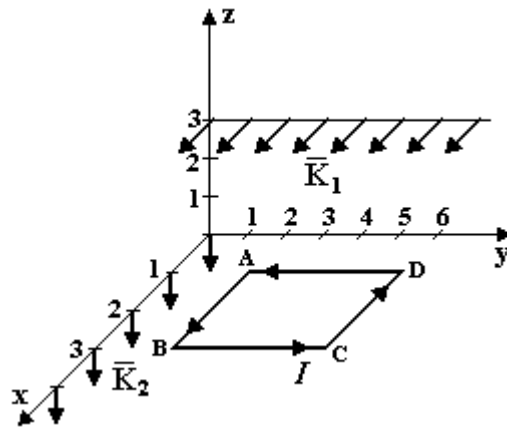
- 8.12) a) Usando a lei circuital de Ampère, demonstrar que o campo magnético \vec{H} produzido por uma lâmina de corrente com densidade superficial de corrente \vec{K} uniforme é expresso por:

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \vec{K} \times \vec{a}_N$$

sendo:

\vec{a}_N = versor normal à lâmina orientado para o lado desejado

- b) Uma espira retangular condutora está posicionada sobre o plano $z = 0$ conforme mostra a figura ao lado, sendo seus vértices em $A(1,2,0)$, $B(3,2,0)$, $C(3,6,0)$ e $D(1,6,0)$. Uma pequena corrente I circula no sentido anti-horário na espira, que está submetida a uma densidade de fluxo magnético \vec{B} produzido por 2 lâminas de corrente $\vec{K}_1 = 400 \vec{a}_x$ A/m em $z = 3$ m, e $\vec{K}_2 = -300 \vec{a}_z$ A/m em $y = 0$, no espaço livre. Determinar:



- O campo vetorial total \vec{B} sobre a espira devido as 2 lâminas de corrente;
- As forças resultantes sobre os 4 lados da espira e força total resultante;
- O torque total resultante \vec{T} em relação ao centro da espira, usando a fórmula $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$.
 (Nota: Supor as forças aplicadas nos centros de cada lado da espira);
- O torque total resultante \vec{T} , usando a fórmula $\vec{T} = I \vec{S} \times \vec{B}$.

Respostas: a) Demonstração;

b.1) $\vec{B} = 200\mu_0 \vec{a}_y + 150\mu_0 \vec{a}_x$

b.2) $\vec{F} = 0$, $\vec{F}_{AB} = 400\mu_0 I \vec{a}_z = -\vec{F}_{CD}$, $\vec{F}_{DA} = 600\mu_0 I \vec{a}_z = -\vec{F}_{BC}$;

b.3) $\vec{T} = -1600\mu_0 I \vec{a}_x + 1200\mu_0 I \vec{a}_y$;

b.4) $\vec{T} = -1600\mu_0 I \vec{a}_x + 1200\mu_0 I \vec{a}_y$ (igual ao obtido no item anterior)



Anotações