CapítuloVI

EQUAÇÕES DE POISSON E DE LAPLACE

6.1 – IMPORTÂNCIA DAS EQUAÇÕES DE POISSON E LAPLACE

Veja no quadro abaixo uma comparação de 2 procedimentos usados para a determinação da capacitância de um capacitor. Os passos do primeiro são baseados nos conceitos teóricos desenvolvidos até o capítulo V, os quais dependem inicialmente do conhecimento da distribuição de carga, grandeza esta de difícil obtenção prática. Por outro lado, o segundo procedimento apresenta uma situação mais realística, a qual requer primeiramente a obtenção do potencial através das equações de Poisson ou Laplace. Essas equações e esse novo procedimento serão tratados a seguir.

Quadro - Procedimentos para cálculo da CAPACITÂNCIA de um CAPACITOR

Passo ou Etapa	**Procedimento I – Antigo**	**Procedimento II – Novo**
	Considera-se <u>conhecida</u> a (expressão da) densidade superficial de carga ρ_S de um dos condutores do capacitor (Nota: Se a carga deste condutor não for positiva, trabalhar com o módulo de ρ_S).	Considera-se <u>conhecida</u> a expressão que fornece o potencial V em todos os pontos do capacitor, incluindo a diferença de potencial V_0 entre os 2 condutores.
(i)	Calcula-se a carga do condutor: $Q = \int_S \rho_S \, dS$	Calcula-se o vetor $\vec{E}$ no dielétrico: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$
(ii)	Calcula-se o vetor $\vec{D}$ no dielétrico: $\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = Q$ (Gauss)	Calcula-se o vetor $\vec{D}$ no dielétrico: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$
(iii)	Calcula-se o vetor $\vec{E}$ no dielétrico: $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$	Calcula-se a densidade ρ_S em um condutor (de preferência o condutor positivo): $\rho_S = D_N = \left|\vec{D}\right|_{\text{na superfíciecondutora}}$
(iv)	Calcula-se a ddp V_0 entre os condutores: $V_0 = V_{AB} = -\int_B^A \vec{E} \bullet d\vec{L}$	Calcula-se a carga total no condutor escolhido: $Q = \int_S \rho_S \, dS$
(v)	Calcula-se, finalmente, a capacitância do capacitor: $C = \dfrac{Q}{V_0}$	Calcula-se, finalmente, a capacitância do capacitor: $C = \dfrac{Q}{V_0}$

6.1.1 – Equação de Poisson

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} \bullet \vec{D} = \rho_v \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} V \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla} \bullet \left[\varepsilon\left(-\vec{\nabla} V\right)\right] = \rho_v \Rightarrow \vec{\nabla} \bullet \left[\varepsilon\left(\vec{\nabla} V\right)\right] = -\rho_v$$

Se a permissividade ε for constante, obtemos: $\overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}$ ou $\boxed{\overline{\nabla}^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}}$ Poisson

6.1.2 – Equação de Laplace

Se ainda a densidade volumétrica ρ_v for nula (dielétrico perfeito), obtemos: $\boxed{\overline{\nabla}^2 V = 0}$ Laplace

<u>Nota</u>: $\overline{\nabla}^2 = \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla}$ = divergência do gradiente = (div.)(grad.) = Laplaciano ou “nabla 2”

6.2 – TEOREMA DA UNICIDADE

"Se uma resposta do potencial satisfaz a equação de Laplace ou a equação de Poisson e também satisfaz as condições de contorno, então esta é a única solução possível."

6.3 – EXEMPLOS DE SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE

A seguir serão mostrados vários exemplos de solução da Equação de Laplace para problemas unidimensionais, isto é, onde V é função somente de uma única variável. Os tipos de exemplos possíveis são:

1. V = f(x), sendo x coordenada cartesiana (válido também para V = f(y) e V = f(z))
2. V = f(ρ), sendo ρ coordenada cilíndrica
3. V = f(ϕ), sendo ϕ coordenada cilíndrica (válido também se ϕ é coordenada esférica)
4. V = f(r), sendo r coordenada esférica
5. V = f(θ), sendo θ coordenada esférica

Ex.1: ***Cálculo de V = f(x), sendo x coordenada cartesiana***

$$\overline{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

Integrando 1ª vez: $\dfrac{dV}{dx} = A$

Integrando 2ª vez: $\boxed{V = Ax + B}$

onde A e B são as constantes de integração que são determinadas a partir de condições de contorno (ou de fronteira) estabelecidas para a região em análise.

Condições de contorno: x = constante ⇒ superfície plana

Sejam: $\begin{cases} V = V_1 & \text{em} \quad x = x_1 \\ V = V_2 & \text{em} \quad x = x_2 \end{cases}$

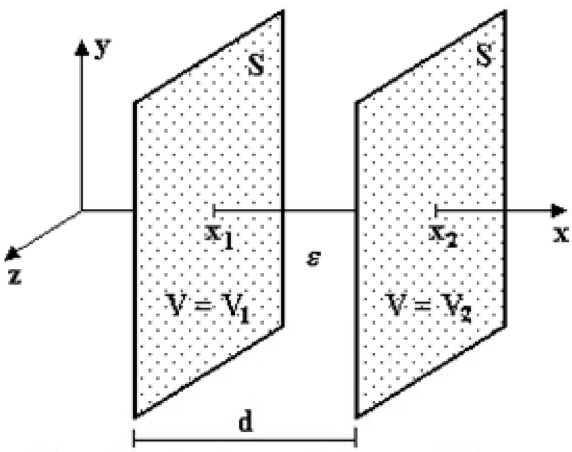
Substituindo acima, obtemos A e B como:

$$A = \frac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1}$$

e

$$B = \frac{V_1 x_2 - V_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

Logo: $\boxed{V = \dfrac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1} x + \dfrac{V_1 x_2 - V_2 x_1}{x_2 - x_1}}$



Capacitor de placas planas paralelas

Suponha agora que as condições de contorno sejam estabelecidas da seguinte maneira:

$\begin{cases} V = V_1 = 0 & \text{em} \quad x = x_1 = 0 \\ V = V_2 = V_o & \text{em} \quad x = x_2 = d \end{cases}$

Assim, temos: $A = \dfrac{V_o}{d}$ e $B = 0 \Rightarrow \boxed{V = \dfrac{V_o}{d} x}$ $\qquad (0 \le x \le d)$

Etapas de cálculo da capacitância C do capacitor de placas // formado:

(i) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\dfrac{V_o}{d}\vec{a}_x$

(ii) $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = -\dfrac{\varepsilon V_o}{d}\vec{a}_x$

(iii) $\rho_s = \left|\vec{D}_n\right| = \left|\vec{D}\right|_{x=0} = \left|\vec{D}\right|_{x=d} = \dfrac{\varepsilon V_o}{d}$

(iv) $Q = \int_S \rho_s \, dS = \rho_s S = \dfrac{\varepsilon V_o}{d} S$

(v) $C = \dfrac{Q}{V_o} = \dfrac{\varepsilon V_o \, S/d}{V_o} \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{\varepsilon S}{d}}$ (Mesmo resultado obtido na seção 5.8)

<u>Ex.2</u>: ***Cálculo de V = f(ρ), sendo ρ coordenada cilíndrica***

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dV}{d\rho}\right) = 0 \qquad (\rho \neq 0)$$

Integrando 1ª vez: $\rho \dfrac{dV}{d\rho} = A$

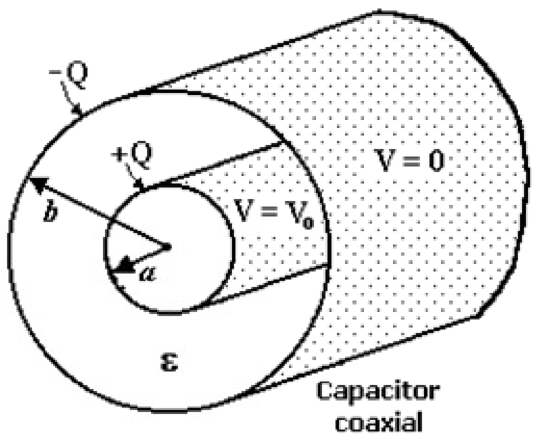
Rearranjando e integrando 2ª vez: $\boxed{V = A \ln\rho + B}$

<u>Condições de contorno</u>: ρ = constante $\Rightarrow$ superfície cilíndrica

$$\begin{cases} V = 0 \ \text{ em } \rho = b \quad \text{(refer.)} \\ V = V_o \ \text{ em } \rho = a \end{cases} \qquad (b > a)$$

Daí, obtém-se A e B e substituindo acima:

$$\boxed{V = V_o \frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)}} \qquad (a < \rho < b)$$



Etapas de cálculo da capacitânciaC do capacitor coaxial formado:

(i) $\overline{E} = -\overline{\nabla} V = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho}\overline{a}_\rho = \dfrac{-V_o \overline{a}_\rho}{\ln(b/a)} \dfrac{-b/\rho^2}{b/\rho} = \dfrac{V_o}{\ln(b/a)}\dfrac{1}{\rho}\overline{a}_\rho$

(ii) $\overline{D} = \varepsilon \overline{E} = \dfrac{\varepsilon V_o}{\ln(b/a)}\dfrac{1}{\rho}\overline{a}_\rho$

(iii) $\rho_s = D_n\big|_{\rho=a} = \dfrac{\varepsilon V_o}{a \ln(b/a)}$ (= densidade superficial no condutor interno c/ carga +Q)

(iv) $Q = \int_s \rho_s dS = \rho_s \, S = \dfrac{\varepsilon V_o}{a \ln(b/a)} 2\pi a L$

(v) $\boxed{C = \dfrac{Q}{V_o} = \dfrac{2\pi\varepsilon L}{\ln(b/a)}}$ (Mesmo resultado obtido na seção 5.8, Ex. 2)

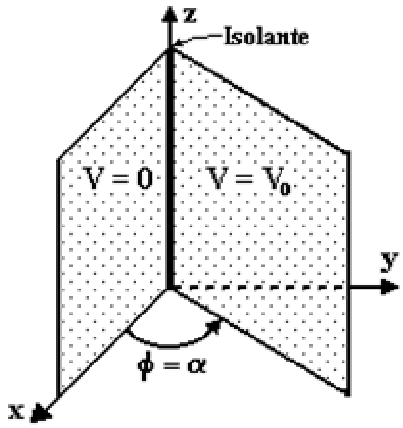
***Ex. 3*: Cálculo de $V = f(\phi)$, sendo ϕ coordenada cilíndrica**

$$\overline{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0 \qquad (\rho \neq 0)$$

Fazendo $\rho \neq 0$ $\Rightarrow \dfrac{d^2V}{d\phi^2} = 0$

Integrando 1ª vez: $\dfrac{dV}{d\phi} = A$

Rearranjando e integrando 2ª vez: $\boxed{V = A\phi + B}$



Capacitor formado por dois planos condutores radiais

Condições de contorno: ϕ = constante $\Rightarrow$ superfície semi-plana radial nascendo em z

$$\begin{cases} V = 0 & \text{em} \quad \phi = 0 \\ V = V_o & \text{em} \quad \phi = \alpha \end{cases}$$

Daí, obtém-se A e B e substituindo acima:

$$\boxed{V = \frac{V_o}{\alpha}\phi}$$

Nota: Calcular a capacitância do capacitor formado por dois planos finitos definidos por:
$\phi = 0, a<\rho<b,\ 0 < z < h$ (Adotar $V = 0$)
$\phi = \alpha, a<\rho<b,\ 0 < z < h$ (Adotar $V = V_o$)
Desprezar os efeitos das bordas. (**Resposta:** $\boxed{C = \dfrac{\varepsilon h}{\alpha} ln\dfrac{b}{a}}$)

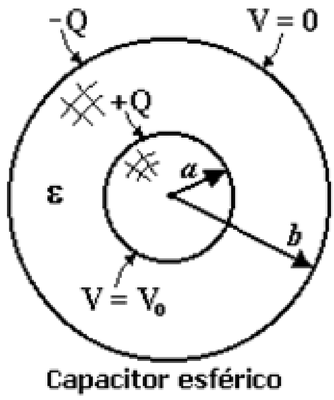
***Ex. 4*: Cálculo de $V = f(r)$, sendo r coordenada esférica**

$$\overline{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0 \quad (r \neq 0)$$

Integrando 1ª vez: $r^2\dfrac{dV}{dr} = A$

Re-arranjando e integrando 2ª vez:

$$\boxed{V = -\frac{A}{r} + B}$$



Capacitor esférico

Condições de contorno: r = constante $\Rightarrow$ superfície esférica

$$\begin{cases} V = 0 \ \text{em}\, r = b \quad (\text{refer.}) \\ V = V_o \ \text{em} \ r = a \end{cases} \quad (b > a)$$

Daí, obtém-se A e B e substituindo acima:

$$\boxed{V = V_o \frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}$$

Etapas de cálculo da capacitância C do capacitor esférico formado:

(i) $\overline{E} = -\overline{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\overline{a}_r = \frac{-V_o}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\overline{a}_r$

(ii) $\overline{D} = \varepsilon\overline{E} = \frac{\varepsilon V_o}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\frac{1}{r^2}\overline{a}_r$

(iii) $\rho_s = D_n\Big|_{(r=a)} = \frac{\varepsilon V_o}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\frac{1}{a^2}$ (= densidade superficial no condutor interno c/ carga +Q)

(iv) $Q = \int_s \rho_s ds = \frac{\varepsilon V_o}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\frac{1}{a^2}4\pi a^2$

(v) $\boxed{C = \frac{Q}{V_o} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}$ (Mesmo resultado obtido na seção 5.8, Ex. 3)

<u>Ex. 5</u>: Cálculo de $V = f(\theta)$, sendo θ coordenada esférica

$$\overline{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dV}{d\theta}\right) = 0 \qquad (r \neq 0, \theta \neq 0,\ \theta \neq \pi)$$

Fazendor $\neq 0$, $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dV}{d\theta}\right) = 0$$

Integrando 1ª vez: $\operatorname{sen}\theta\frac{dV}{d\theta} = A$

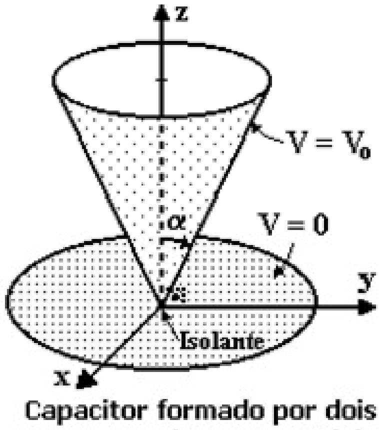
Rearranjando e integrando 2ª vez: $\boxed{V = A\ln[\operatorname{tg}(\theta/2)] + B}$

<u>Condições de contorno</u>: θ = constante $\Rightarrow$ superfície cônica

$$\begin{cases} V = 0 & \text{em } \theta = \pi/2 \\ V = V_o & \text{em } \theta = \alpha \end{cases} \qquad (\alpha < \pi/2)$$

Daí, obtém-se A e B e substituindo acima:

$$\boxed{V = \frac{V_o \ln[\operatorname{tg}(\theta/2)]}{\ln[\operatorname{tg}(\alpha/2)]}}$$



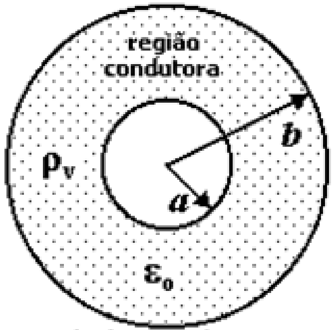
Capacitor formado por dois cones condutores coaxiais

Nota: Calcular a capacitância do capacitor formado por dois cones finitos definidos por:
$\theta = \pi/2, 0 < r < r_1,\ 0 < \phi < 2\pi$ (Adotar $V = 0$)
$\theta = \alpha,\ 0 < r < r_1,\ 0 < \phi < 2\pi$ (Adotar $V = V_o$)

Desprezar os efeitos das bordas. (**Resposta:** $\boxed{C = \dfrac{-2\pi\varepsilon r_1}{ln[\mathrm{tg}(\alpha/2)]}}$)

6.4 – EXEMPLO DE SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE POISSON

Exemplo: A região entre dois cilindros condutores coaxiais com raios *a* e *b*, conforme mostrado na figura abaixo, contém uma densidade volumétrica de carga uniforme ρ_V . Se o campo elétrico $\vec{E}$ e o potencial V são ambos nulos no cilindro interno, determinar a expressão matemática que fornece o potencial V na região, entre os condutores assumindo que sua permissividade seja igual à do vácuo.



2 cilindros condutores coaxiais (vista frontal)

Solução:

Equação de Poisson: $\vec{\nabla}^2 V = \dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial V}{\partial\rho}\right) = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon_o}$

Integrando pela 1ª vez:

$$\rho\frac{\partial V}{\partial\rho} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_o}\cdot\frac{\rho^2}{2} + A \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial\rho} = -\frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot\rho + \frac{A}{\rho} \tag{01}$$

Porém, sabe-se que: $\vec{E} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{E} = -\dfrac{\partial V}{\partial\rho}\,\vec{a}_\rho \Rightarrow \left|\vec{E}\right| = E = -\dfrac{\partial V}{\partial\rho} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial V}{\partial\rho} = -E$ (02)

Substituindo (02) em (01), temos:

$$\frac{\partial V}{\partial\rho} = -E = -\frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot\rho + \frac{A}{\rho} \tag{03}$$

<u>1ª Condição de Contorno (Obtenção de A)</u>: $E = 0$ para $\rho = a$. (04)

Substituindo (04) em (03), temos:

$$0 = \frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot a - \frac{A}{a} \Rightarrow \quad A = \frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot a^2 \tag{05}$$

Substituindo (05) em (01), temos:

$$\frac{\partial V}{\partial\rho} = -\frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot\rho + \frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot\frac{a^2}{\rho} \tag{06}$$

Integrando pela 2ª vez:

$$V = -\frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot a^2 \ln\rho + B \tag{07}$$

2ª Condição de Contorno (Obtenção de B): $V = 0$ para $\rho = a$. (08)

Substituindo (08) em (07), temos:

$$0=-\frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot\frac{a^2}{2}+\frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot a^2\ln a+B \Rightarrow \quad B=\frac{\rho_v}{4\varepsilon_o}\cdot a^2-\frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot a^2\ln a \tag{09}$$

Substituindo (09) em (07), temos:

$$V=-\frac{\rho_v}{4\varepsilon_o}\cdot\rho^2+\frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot a^2\ln\rho+\frac{\rho_v}{4\varepsilon_o}\cdot a^2-\frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot a^2\ln a$$

$$\boxed{V=\frac{\rho_v}{4\varepsilon_o}\cdot\left(a^2-\rho^2\right)+\frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot a^2\ln\left(\frac{\rho}{a}\right)\quad [V]} \tag{10}$$

6.5 – SOLUÇÃO PRODUTO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE

Suponha o potencial seja função das variáveis *x* e *y*de acordo com a seguinte expressão:

$$V = f(x)f(y) = XY \text{ onde } X = f(x) \quad \text{e} \quad Y = f(y) \tag{01}$$

Aplicando a equação de Laplace, obtemos:

$$\overline{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \tag{02}$$

(01) $\to$ (02):

$$Y\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=0 \tag{03}$$

Dividindo (03) por XY:

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=0$$

Separando os termos somente dependentes de *x* dos termos somente dependentes de *y*, escrevemos:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} \tag{04}$$

Como $X = f(x)$ e $Y = f(y)$,então para que a equação (04) seja verdadeira, cada um dos membros de (04) deve resultar em uma mesma constante. Chamando esta constante de α^2, temos:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2}=\alpha^2 \tag{05}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2}=-\alpha^2 \tag{06}$$

Re-escrevendo (05) e (06) temos:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2 X \tag{07}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = -\alpha^2 Y \tag{08}$$

<u>Solução da equação (07) pelo Método de Dedução Lógica</u>:Basta responder a seguinte pergunta:
"Qual é a função cuja segunda derivada é igual a própria função multiplicada por uma constante positiva?"

Solução 1: Função trigonométrica hiperbólica em seno ou co-seno. Assim:

$$X = A\,cos\,h\alpha x + B\,sen\,h\alpha x \tag{09}$$

Solução 2: Função exponencial. Assim:

$$X = A' e^{\alpha x} + B' e^{-\alpha x} \tag{10}$$

<u>Solução da equação (08) pelo Método de Dedução Lógica</u>:Basta responder a seguinte pergunta:
"Qual é a função cuja segunda derivada é igual a própria função multiplicada por uma constante negativa?"

Solução 1: Função trigonométrica em seno ou co-seno. Assim:

$$Y = C\,cos\,\alpha y + D\,sen\,\alpha y \tag{11}$$

Solução 2: Função exponencial complexa. Assim:

$$Y = C' e^{j\alpha y} + D' e^{-j\alpha y} \tag{12}$$

<u>Nota</u>: Veja no Anexo I a solução da equação diferencial (07) por série infinita de potências.

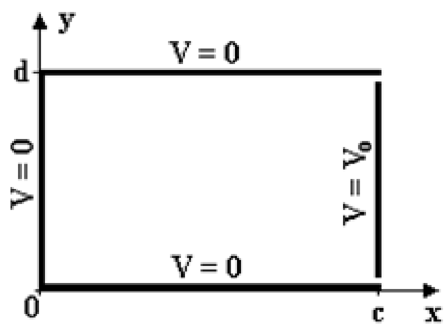
<u>Solução final da equação (01)</u>:

Substituindo (09) e (11) em (01), obtemos finalmente:

$$\boxed{V = XY = (A\,cos\,h\alpha x + B\,sen\,h\alpha x)(C\,cos\,\alpha y + D\,sen\,\alpha y)} \tag{13}$$

sendo que as constantes A, B, C e D são determinadas pelas condições de contorno do problema.

<u>Exemplo</u>: Calcule o potencial na região interna da calha retangular da figura. São conhecidos todos os potenciais nos contornos metálicos da calha. Observe que temos, neste caso, V = f(x) f(y). Partir da expressão (13) obtida acima.



<u>Solução</u>: Pela figura temos as condições de contorno:
(i) V = 0 em x = 0,
(ii) V = 0 em y = 0,
(iii) V = 0 em y = d,0 < x < c
(iv) V = $V_o$em x = c, 0 < y < d

Aplicando as condições (i) e (ii) em (13) obtemos A = C = 0 e chamando BD = V_1, chegamos a:

$$V = XY = BD\,senh\,\alpha x\,sen\,\alpha y = V_1\,senh\,\alpha x\,sen\,\alpha y \tag{14}$$

e aplicando a condição (iii), V = 0 em y = d, temos:

$$0 = V_1\,senh\,\alpha x\,sen\,\alpha d \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{d} \qquad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{15}$$

Substituindo α de (15) em (14):

$$V = V_1\,senh\frac{n\pi x}{d}\,sen\frac{n\pi y}{d} \tag{16}$$

Para a condição (iv) é impossível escolher um n ou V_1 de modo que $V = V_o$ em x = c, para cada 0 < y < d. Portanto, deve-se combinar um número infinito de campos de potenciais com valores diferentes de n e valores correspondentes de V_1, isto é, V_{1n}. Assim, genericamente devemos ter:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_{1n}\,senh\frac{n\pi x}{d}\,sen\frac{n\pi y}{d} \qquad 0 < y < d \tag{17}$$

Aplicando agora a última condição de contorno (iv), $V = V_o$ em x = c, 0 < y < d, obtemos:

$$V_o = \sum_{n=0}^{\infty} V_{1n}\,senh\frac{n\pi c}{d}\,sen\frac{n\pi y}{d} \qquad 0 < y < d \tag{18}$$

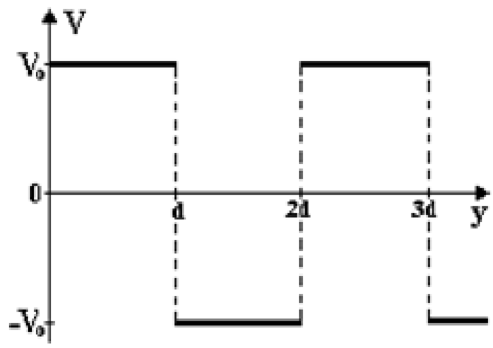
ou

$$V_o = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,sen\frac{n\pi y}{d} \qquad 0 < y < d \tag{19}$$

onde,

$$b_n = V_{1n}\,senh\frac{n\pi c}{d} \tag{20}$$

A equação (19) pode representar uma série de Fourier em seno para f(y) = V(y)= V_o em 0 < y < d (região de interesse) e f(y) = V(y) = $-V_o$ em d < y < 2d, repetindo a cada período T = 2d. O gráfico desta função é mostrado na figura abaixo.



Sendo a função ímpar, o coeficiente b_n é dado por:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{y=0}^{T} f(y)\,sen\frac{n\pi y}{d}dy \qquad n=0,1,2,3,...$$

ou

$$b_n = \frac{1}{d}\int_{y=0}^{d} V_o\,sen\frac{n\pi y}{d}dy + \frac{1}{d}\int_{y=d}^{2d}(-V_o)\,sen\frac{n\pi y}{d}dy$$

Resolvendo as integrais, obtemos:

$$b_n = \frac{4V_o}{n\pi} \quad \text{para} \quad n \text{ ímpar} \tag{21}$$

e

$$b_n = 0 \quad \text{para} \quad n \text{ par}$$

Substituindo b_n de (21) em (20) e isolando V_{1n} chegamos a:

$$V_{1n} = \frac{4V_o}{n\pi \, senh \frac{n\pi c}{d}} \tag{22}$$

Finalmente, substituindo (22) em (17) obtemos a expressão para o potencial como:

$$V = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{ímpar}}}^{\infty} \frac{4V_o}{n\pi \, senh \frac{n\pi c}{d}} \, senh \frac{n\pi x}{d} \, sen \frac{n\pi y}{d} \qquad 0 < x < c,\ 0 < y < d \tag{23}$$

ou,

$$\boxed{V = \frac{4V_o}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{ímpar}}}^{\infty} \frac{senh \frac{n\pi x}{d} \, sen \frac{n\pi y}{d}}{n \, senh \frac{n\pi c}{d}}} \qquad 0 < x < c,\ 0 < y < d \tag{24}$$

6.6 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6.1) Num meio uniforme de permissividade ε existe uma distribuição de cargas com densidade volumétrica $\rho_v(r) = k$, ocupando uma <u>região esférica oca</u> definida, em coordenadas esféricas, por $a \le r \le b$. Assumindo que o potencial seja zero em $r = a$, determinar pela equação de Laplace/Poisson, o <u>campo elétrico</u> $\vec{E}(r)$ e o <u>potencial</u> $V(r)$ dentro das regiões:

a) $0 \le r \le a$; b) $a \le r \le b$; c) $r \ge b$.

<u>Nota</u>: Pode-se usar a Lei de Gauss para obter a segunda condição de contorno para $\vec{E}$.

Respostas: a) $\vec{E}(r) = 0$ e $V(r) = 0$;

b) $\vec{E}(r) = \frac{k}{3\varepsilon} \cdot \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \vec{a}_r$ e $V(r) = \frac{-k}{3\varepsilon} \cdot \left(\frac{r^2}{2} + \frac{a^3}{r} - \frac{3a^2}{2} \right)$;

c) $\vec{E}(r) = \frac{k}{3\varepsilon} \cdot \left(\frac{b^3 - a^3}{r^2} \right) \vec{a}_r$ e $V(r) = \frac{k}{3\varepsilon} \cdot \left(\frac{b^3 - a^3}{r} - \frac{3b^2}{2} + \frac{3a^2}{2} \right)$.

6.2) Na região interna entre os planos $z = 0$ e $z = 2a$ foi colocada uma carga uniformemente distribuída com densidade volumétrica ρ_v. Na região externa aos planos, o meio é somente o vácuo. Determinar a distribuição de potenciais para:

a) A região interna entre os planos definida por $0 \le z \le 2a$;
<u>Nota</u>: A primeira condição de contorno é obtida fixando a referência de potencial zero em $z = 0$. A segunda condição de contorno é obtida verificando onde o campo elétrico é nulo, baseando-se na simetria da configuração de cargas.

b) A região externa entre os planos definida por $z \ge 2a$.
<u>Nota</u>: As condições de contorno devem ser obtidas partindo dos resultados do item anterior.

Respostas: a) $V = \frac{-z\rho_v}{\varepsilon_o} \cdot \left(\frac{z}{2} - a \right)$; b) $V = \frac{-a\rho_v}{\varepsilon_o} \cdot (z - 2a)$

6.3) Dados os campos de potencial $V' = 3x - y$ [V] e $V'' = 5(2r^2 - 7)\cos\theta$ [V], pede-se:

a) Verificar se estes campos de potencial satisfazem a Equação de Laplace;

b) Determinar, para cada campo de potencial acima, a <u>densidade volumétrica de carga</u> no ponto P(0,5 ; 1,5 ; 1,0) no espaço livre.

Respostas: a) V' satisfaz (dielétrico perfeito) e V'' não satisfaz a Equação de Laplace;
b) $\rho_v = 0$ (dielétrico perfeito) para V' e $\rho_v = -283{,}97$ [pC/m^3] para V''.

6.4) Seja $V = A\ln[tg(\theta/2)] + B$ a expressão algébrica para o cálculo do potencial elétrico no dielétrico entre dois cones condutores coaxiais, sendo θ o ângulo medido a partir do eixo dos cones e A e B duas constantes. Sejam estes cones condutores definidos por θ = 60° e θ = 120°, separados por um espaço infinitesimal na origem. O potencial em P(r=1, θ = 60°, ϕ = 90°) é 50 V e o campo elétrico em Q(r=2, θ = 90°, ϕ= 120°) é $50\vec{a}_\theta$ [V/m]. Determinar:

a) O valor do potencial V no ponto Q;

b) A diferença de potencial V_o entre os dois cones;

c) O ângulo θ no qual o potencial elétrico é nulo.

Respostas: a) $V_Q = -4{,}93$ [V]; b) $V_o = 109{,}86$ [V]; c) θ = 87,18°.

6.5) Suponha que o espaço livre seja preenchido com uma carga distribuída com densidade volumétrica de carga $\rho_V = k\varepsilon_o x$ [C/m^3]. Sejam os valores do quadro abaixo e $k = 6 \cdot 10^6$.
Pede-se:

a) Determinar as expressões matemáticas de V(x) e E(x);

b) Completar os valores de V(x) e E(x) no quadro.

x[mm]	V(x)[V]	E(x)[V/m]
0	0	
5		
10		– 1200
15		

Respostas: a) $V(x) = \dfrac{-kx^3}{6} + 1500x$ e $E(x) = \dfrac{kx^2}{2} - 1500$;

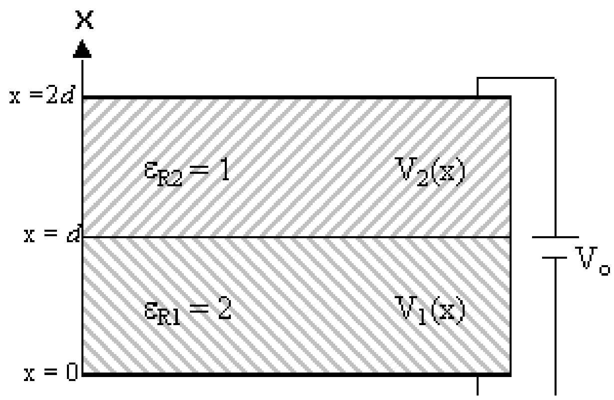
b)

x[mm]	V(x)[V]	E(x)[V/m]
0	0	–1500
5	7,375	–1425
10	14,0	–1200
15	19,125	–825

6.6) A figura mostra um capacitor de placas paralelas, com dois dielétricos (regiões) de permissividades relativas ε_{R1} e ε_{R2}.
Pede-se:

a) Os valores das diferenças de potenciais V_{10} e V_{20}, nas 2 regiões, em função da tensão da bateria V_o;

b) As expressões matemáticas de $V_1(x)$ e $V_2(x)$ nas 2 regiões, determinadas a partir da equação de Laplace e condições de contorno apropriadas.



Respostas: a) $V_{10} = \dfrac{V_o}{3}$ e $V_{20} = \dfrac{2V_o}{3}$; b) $V_1(x) = \dfrac{V_o}{3d}x$ e $V_2(x) = \dfrac{V_o}{3d}(2x - d)$

6.7) Um capacitor é constituído de duas placas planas condutoras situadas em $\phi = 0$ e $\phi = \alpha$. As placas são limitadas pelos cilindros $\rho = a$ e $\rho = b$ e pelos planos $z = 0$ e $z = h$. Se a diferença de potencial entre as placas condutoras for V_o, pede-se:

a) Determinar a expressão matemática do potencial V na região, partindo da equaçao de Laplace;
b) Determinar a expressão matemática da capacitância;
c) Dizer se é possível obter a mesma expressão da capacitância do item anterior, partindo da Lei de Gauss empregando uma superfície gaussiana. Justificar sua resposta;
d) Determinar a separação que conduz a mesma capacitância do item (b) quando as placas são colocadas numa posição paralela, com o mesmo dielétrico entre elas.

Nota: Assumir a permissividade do dielétrico como sendo a do vácuo.

Respostas:a) $V = \dfrac{V_o}{\alpha}\phi$;

b) $C = \dfrac{\varepsilon_o h}{\alpha} \cdot \ln\dfrac{b}{a}$;

c) Não é possível obter uma superfície gaussiana para a solução pela Lei de Gauss, pois em qualquer plano radial (ϕ = cte), D não é constante (D = f (ρ)), apesar de ser normal à estes planos;

d) $d = (b-a)\alpha/[ln(b/a)]$

6.8) Num dispositivo o potencial elétrico é função somente da variável z, possuindo uma região com densidade volumétrica de carga $\rho_v = \rho_o(z/z_1)$ e condições de fronteira dadas por $E = 0$ em $z = 0$ e $V = 0$ em $z = z_1$. Determinar para qualquer ponto nesta região:

a) O potencial elétrico V,
b) O campo elétrico $\vec{E}$.

Respostas:a) $V = \dfrac{-\rho_o}{6\varepsilon z_1}\left(z^3 - z_1^3\right)$;

b) $\overline{E} = \dfrac{\rho_o}{2\varepsilon z_1} z^2\ \overline{a}_z$

6.9) a) Desenvolver as equações de Poisson e Laplace para um meio linear, homogêneo e isotrópico.

b) Sendo $\overline{v}$ = campo vetorial qualquer e f = campo escalar qualquer, demostrar a seguinte identidade vetorial: $\boxed{\overline{\nabla} \bullet (f\,\overline{v}) = (\overline{\nabla} f) \bullet \overline{v} + (\overline{\nabla} \bullet \overline{v}) f}$

Sugestão: Usar o sistema de coordenadas cartesianas para facilitar sua demonstração.

c) De que maneira deve a permissividade elétrica (ε) variar em um meio não-homogêneo sem carga, de modo que a equação de Laplace continue válida?

Sugestão: Iniciar pelo desenvolvimento do item (a), supondo ε variando espacialmente (com a distância). Usar também a identidade vetorial do item (b).

Respostas:a) Equação de Poisson: $\overline{\nabla}^2 V = -\rho_v/\varepsilon$, Equação de Laplace ($\rho_v = 0$): $\overline{\nabla}^2 V = 0$;

b) Demonstração;

c) Fazendo na identidade vetorial acima f = εe $\overline{v} = \overline{\nabla} V$ e tomando $\overline{\nabla}^2 V = 0$ (Laplace), obtém-se $(\overline{\nabla}\varepsilon) \bullet \overline{E} = 0$, logo $\overline{\nabla}\varepsilon \perp \overline{E}$ e a permissividade elétrica (ε) deve variar somente numa direção perpendicular ao campo elétrico $(\overline{E})$.

6.10) a) Demonstrar, partindo da equação de Laplace, que a capacitância C de um capacitor esférico formado por 2 superfícies condutoras esféricas de raios *a* e *b* (*b*>*a*), separadas por um dielétrico de permissividade elétrica ε, é dada por: $\boxed{C = \dfrac{4\pi\varepsilon}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}}$

b) Determinar a capacitância, C_{ESFERA}, de um capacitor esférico isolado formado por uma esfera de cobre de raio 9 cm, no vácuo.

c) Se uma camada de um dielétrico uniforme (com $\varepsilon_R = 3$) de espessura *d* é colocada envolvendo a esfera de raio 9 cm do item (b), determinar *d* tal que a nova capacitância total equivalente seja $2 \times C_{ESFERA}$.

Atenção: Note que a configuração final é de 2 capacitores esféricos dispostos em série.

Respostas:a) Demonstração; b) $C_{ESFERA} = 4\pi\varepsilon_o a = 10$ pF ($b \to \infty$); c) d = 27 cm.

6.11) Dada a equação diferencial de segunda ordem $X'' + 2xX' - X = 0$, considere uma solução na forma de série infinita de potências, e calcule os valores numéricos dos coeficientes a_2 até a_6 desta série, sendo $a_0 = 1$ e $a_1 = -2$.

Atenção: Como X é função somente de x, fazer $X = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Respostas:$a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, $a_4 = -1/8$, $a_5 = -1/12$, $a_6 = 7/240$.

6.12) Sabendo-se que uma solução produto para a Equação de Laplace em duas dimensões é dada por $V_1 = X_1Y_1$, onde X_1 e Y_1 são funções somente de x e y, respectivamente, verificar se cada uma das 5 funções dadas a seguir satisfaz ou não à equação de Laplace, justificando sua resposta.

a) $V_a = X_1 - Y_1$;
b) $V_b = Y_1$;
c) $V_c = X_1Y_1 + y$;
d) $V_d = 2X_1Y_1$;
e) $V_e = X_1Y_1 + x^2 - y^2$

Respostas: (a) e (b) não satisfazem a Equação de Laplace. Observe que $\overline{\nabla}^2 X_1$ e $\overline{\nabla}^2 Y_1$ não são solucionáveis, já que não se sabe suas expressões matemáticas. Assim, não se pode afirmar que $\overline{\nabla}^2(X_1 - Y_1) = 0$ para (a), e nem que $\overline{\nabla}^2 Y_1 = 0$ para (b);
(c), (d)e (e) satisfazem a Equação de Laplace, já que $\overline{\nabla}^2(X_1Y_1) = 0$ (dado) e também $\overline{\nabla}^2(y) = 0$ e $\overline{\nabla}^2(x^2 - y^2) = 2 - 2 = 0$.

Anotações