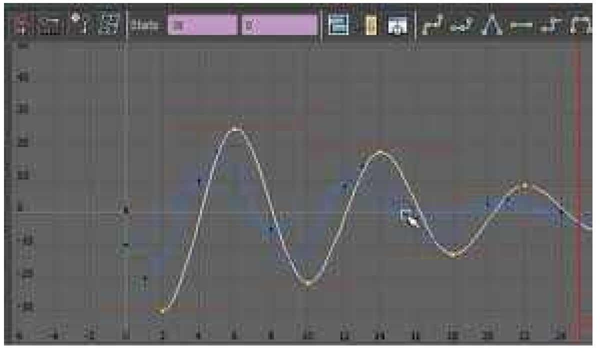
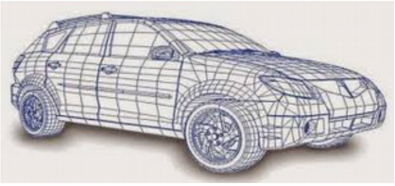
Representação e Modelagem de Objetos 2D
Curvas

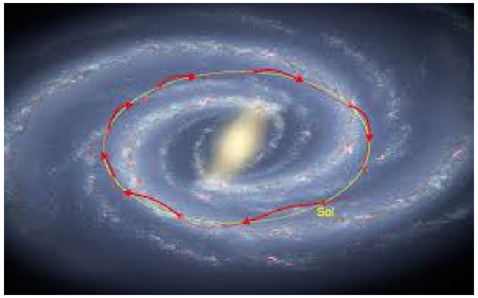
Gilda Aparecida de Assis



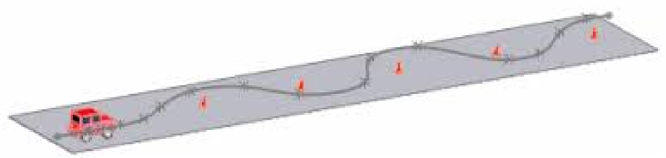
Curvas

- Curvas são utilizadas para:
  - Criação (modelagem) de objetos gráficos
    - Círculos, elipses, automóveis, navios, faces e corpos humanos

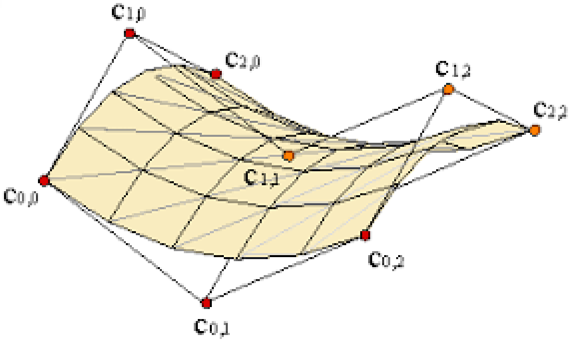




  - Visualização de fenômenos científicos
    - Movimento das galáxias, dinâmica das moléculas
  - Definição do “caminho” da animação

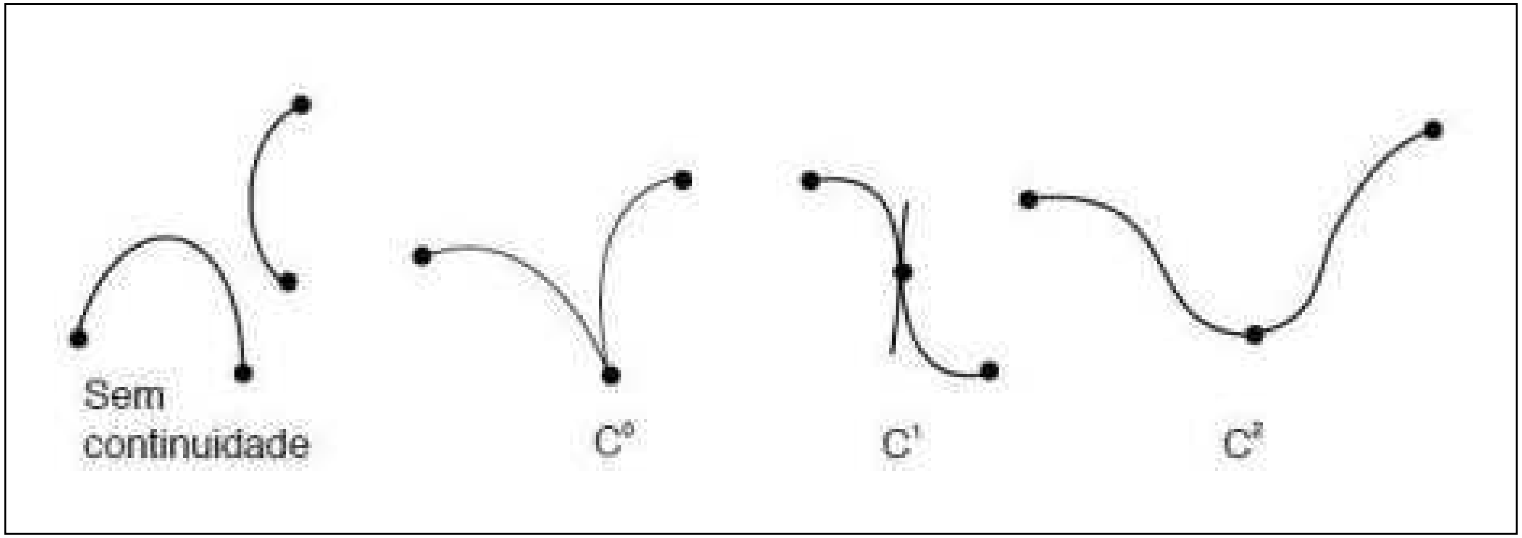


  - Construção de superfícies
    - Superfícies são uma generalização de curvas



Características das Curvas

- Continuidade
  - Ordem 0 : Continuidade de Posição
  - Ordem 1: Continuidade na derivada primeira (tangente)
  - Ordem 2: Continuidade na derivada segunda: curvatura

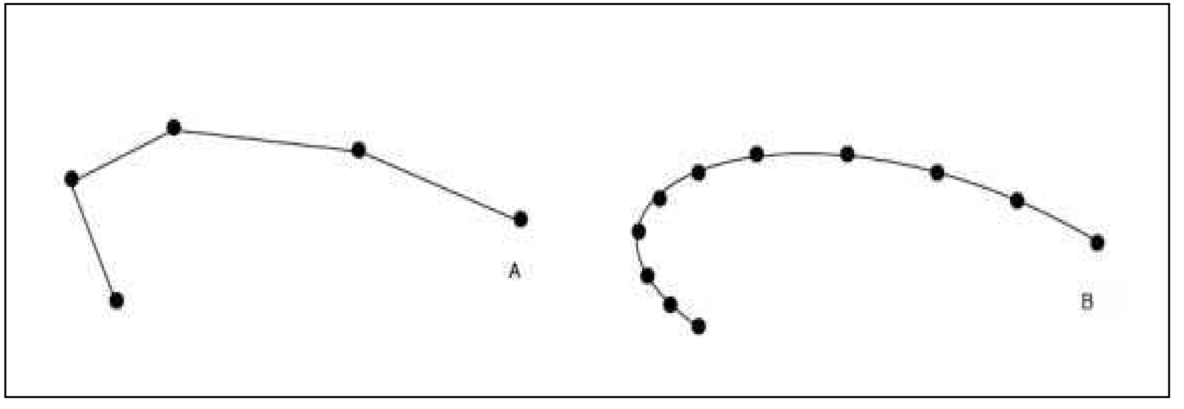


Formas de Representação da Curva

- Conjunto de Pontos
- Analítica
  - Não paramétrica: Explícita ou Implícita
  - Paramétrica

Formas de Representação da Curva

- Conjunto de pontos
  - Encontrar uma curva que passe pelos pontos de amostragem
  - Encontrar a melhor curva que represente os pontos
    - obter mais pontos por amostragem ou por interpolação ou aproximação



Formas de Representação da Curva

- Técnicas para obtenção de mais pontos
  - **Interpolação**
    - Curva passa pelos pontos de controle (amostras originais)
    - Utilizado em digitalização
    - Hermite, Catmull-Rom, polinômio de Lagrange
  - **Aproximação**
    - Curva suave que aproxima os pontos de controle (originais)
    - Utilizado em modelagem de objetos
    - Bézier e B-splines

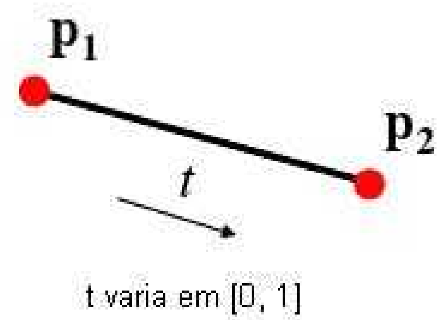
Formas de Representação da Curva

- Interpolação Paramétrica: Novos pontos da curva são obtidos como somatório dos pontos originais multiplicados pelos seus respectivos pesos.

$$\begin{cases} \mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^{N} w_i(t)\mathbf{p}_i \\ \sum_{i=1}^{N} w_i(t) = 1 \end{cases}$$

  - Linear

$$\mathbf{p}(t) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2$$



Formas de Representação da Curva

- Interpolação linear
  - Como interpolar um conjunto de n pontos?

Para cada par de pontos (P_i, P_{i+1})

faça

$t = 0.0$

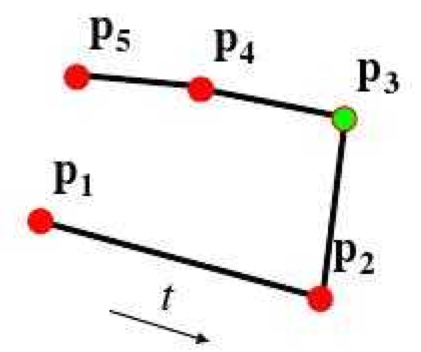
$P_k = (1-t)P_i + tP_{i+1}$

$t = t + \text{incremento}$

enquanto $t <= 1$

$P_i = P_{i+1}$

P_{i+1} = próximo P



Formas de Representação da Curva

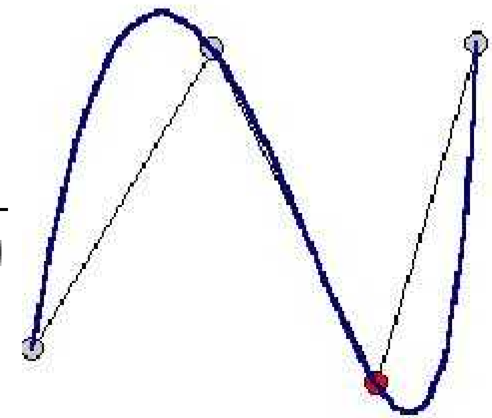
- **Interpolação Paramétrica**
  - Polinômio de Lagrange
    - Para cada n pontos, obtém-se um polinômio de grau n-1
    - Derivado do polinômio da diferença dividida de Newton

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, i = 0,1,\ldots,n$$

Formas de Representação da Curva

- Interpolação Paramétrica
  - Polinômio de Lagrange



$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)^{*}...^{*}(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)^{*}...^{*}(x_1 - x_n)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)^{*}...^{*}(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_0 - x_3)^{*}...^{*}(x_2 - x_n)}$$

$$L_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)^{*}...^{*}(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_3)^{*}...^{*}(x_n - x_{n-1})}$$

Formas de Representação da Curva

- Exercício: Interpolação de Lagrange
- Qual é o polinômio que passa pelos 3 pontos (forma paramétrica)?
- $L_1(x) = ?$
- $L_2(x) = ?$
- $L_3(x) = ?$
- $P = L_1(x) * y_1 + L_2(x)*y_2 + L_3(x)*y_3$

i	x	y
1	0	-5
2	1	1
3	3	25

Formas de Representação da Curva

- Analítica
  - Algumas curvas não podem ser facilmente descritas por expressões analíticas em toda a sua extensão. Neste caso, utilizam-se segmentos de curva, unidos pelas suas extremidades.
  - Uma ou mais equações para representar a curva
    - $y = f(x)$
    - $f(x, y) = 0$
  - Vantagens:
    - Mais compacta, não armazena pontos
    - Mais precisa, posição exata por onde a curva vai passar

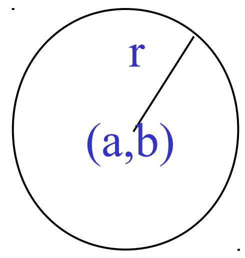
Formas de Representação da Curva

- Analítica
  - Não paramétrica
    - y é dado em função de x e vice-versa
    - $y = f(x)$
    - $f(x, y) = 0$
  - Paramétrica
    - x e y são funções de um parâmetro
    - $x(t)$
    - $y(t)$

Formas de Representação da Curva

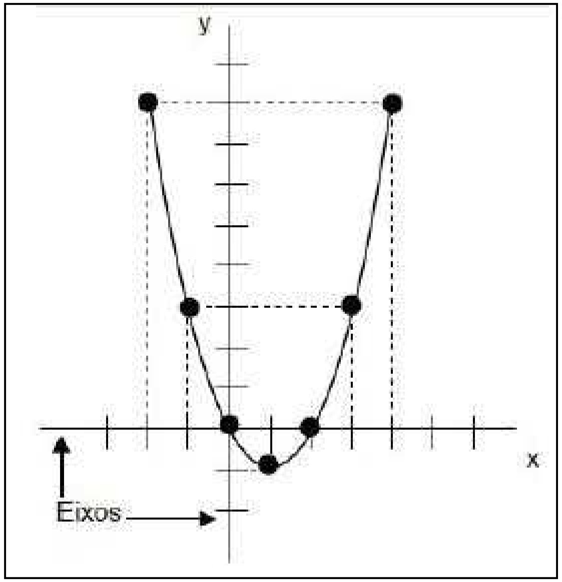
- Analítica não paramétrica
  - Explícita
    - $y = f(x)$
    - Dada uma das coordenadas, se obtém um único valor para a outra
    - Problemas para representar laços e tangentes verticais
  - Implícita
    - $f(x, y) = 0$
    - Cada x pode corresponder a mais de um y
    - Úteis para determinar exterior e interior
    - $f(x,y)>0$: exterior
    - $f(x,y) < 0$: interior
    - Não permitem cálculo direto das coordenadas dos pontos

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



Formas de Representação da Curva

- Analítica não paramétrica – Desvantagens
  - Pontos distribuídos de forma não uniforme na curva quando uma das coordenadas é incrementada
    - x = x + incremento;
  - Dependência do sistema de coordenadas
    - A escolha do número de dimensões (2,3,n) afeta a facilidade de uso.
  - Difícil definir a equação da curva a partir de um conjunto de pontos de forma interativa
  - Difícil definir a equação da curva que passe por um conjunto de pontos pré-definidos

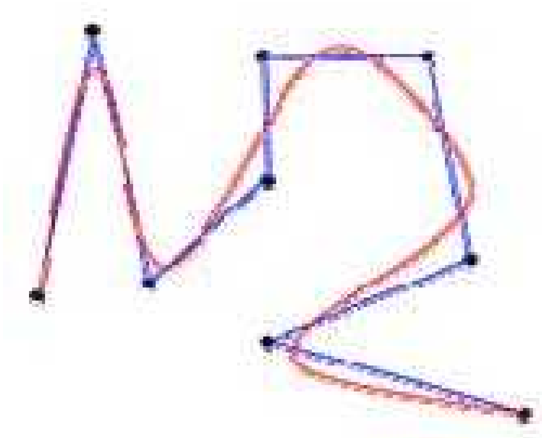


Formas de Representação da Curva

- Analítica Paramétrica
  - Coordenadas são obtidas em função de um parâmetro
  - $x = f(t)$, $y = g(t)$
  - O espaçamento entre os pontos é definido pela variação do parâmetro no intervalo [0,1]
  - Independente do sistema de coordenadas. Aumenta o número de dimensões adicionando uma função para a nova coordenada

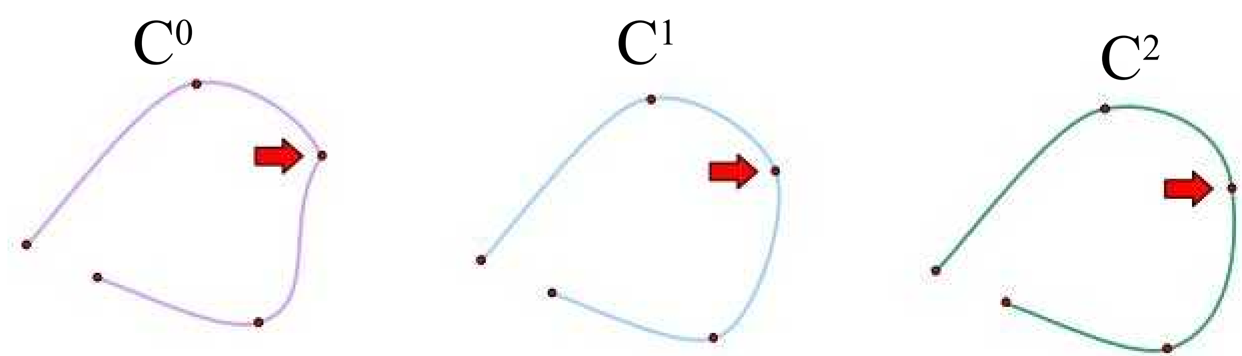
Formas de Representação da Curva

- Analítica Paramétrica
  - Permite representar curvas fechadas (laços) e valores múltiplos
  - A curva pode ser definida a partir de um conjunto de pontos de controle (fácil de manipular interativamente)
  - A curva pode ou não passar pelos pontos
  - A curva é aproximada por polígonos que definem suas partes



Formas de Representação da Curva

- Curvas Paramétricas
  - Muitas vezes é necessário representar a curva por um conjunto de curvas menores conectadas e garantir a continuidade das curvas
  - Para garantir C^1(derivada), as curvas são aproximadas por polinômios grau 3 pois grau menor que 3 tem pouca flexibilidade e maior tem alto custo sem vantagem na prática: $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$



Formas de Representação da Curva

- Curvas Paramétricas Cúbicas
  - $x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$
  - $y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$
  - $t \in [0,1]$
  - Forma matricial

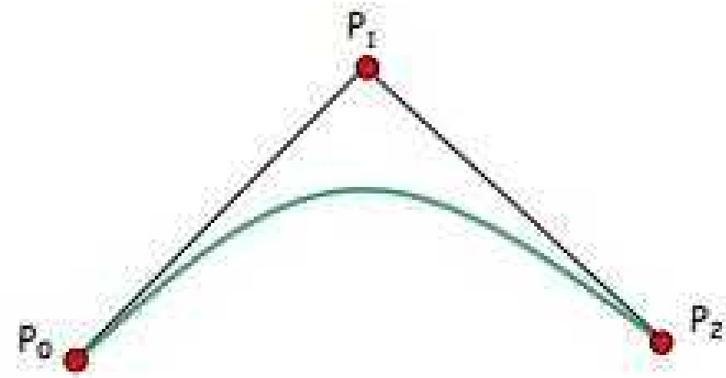
$$[x \;\; y] = [t^3 \;\; t^2 \;\; t \;\; 1] \begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ d_x & d_y \end{bmatrix}$$

Formas de Representação da Curva

- Curvas Paramétricas Cúbicas definidas por pontos de controle
  - Bézier
  - Hermite
  - B-Spline
  - Catmull Rom

Bézier

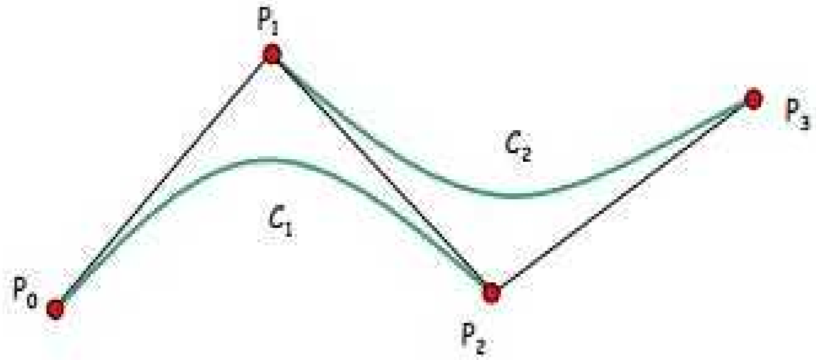
- Curva Bézier: interpolação de 3 pontos
  - Ponderar 3 pontos (P_0, P_1 e P_2) gerando uma curva
  - Considerar duas retas R_1 (P_0-P_1)e R_2 (P_1-P_2) na forma paramétrica
  - A curva P_0-P_1-P_2 é a ponderação entre R_1 e R_2 usando para isto os pesos t e 1 – t
  - $R_1(t) = (1-t)P_0 + tP_1$
  - $R_2(t) = (1-t)P_1 + tP_2$
  - $C(t) = (1-t)R_1 + tR_2$
  - $C(t) = (1-t)^2P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2P_2$



Curva de Pierre Bézier (1962), funcionário da Renault, usada no design de automóveis

Bézier

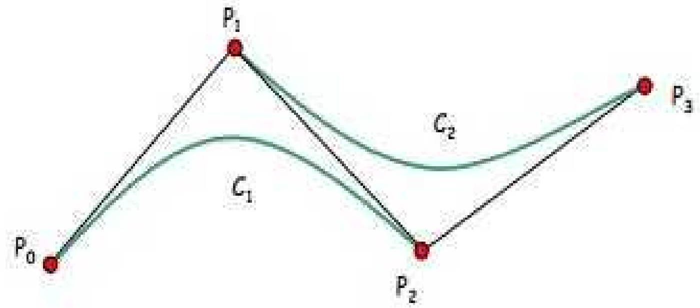
- Curva Bézier de 4 pontos
  - Ponderar 4 pontos (P_0, P_1, P_2 e P_3) com polinômios de Bernstein
  - Considerar duas curvas C_1 (R_1-R_2)e C_2 (R_2-R_3) na forma paramétrica
  - A curva P_0-P_1-P_2-P_3 é a ponderação entre C_1 e C_2 com os pesos t e 1 – t
  - $C_1(t) = (1-t)R_1 + tR_2$
  - $C_2(t) = (1-t)R_2 + tR_3$
  - $C(t) = (1-t)C_1 + tC_2$
  - $C(t) = (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3$



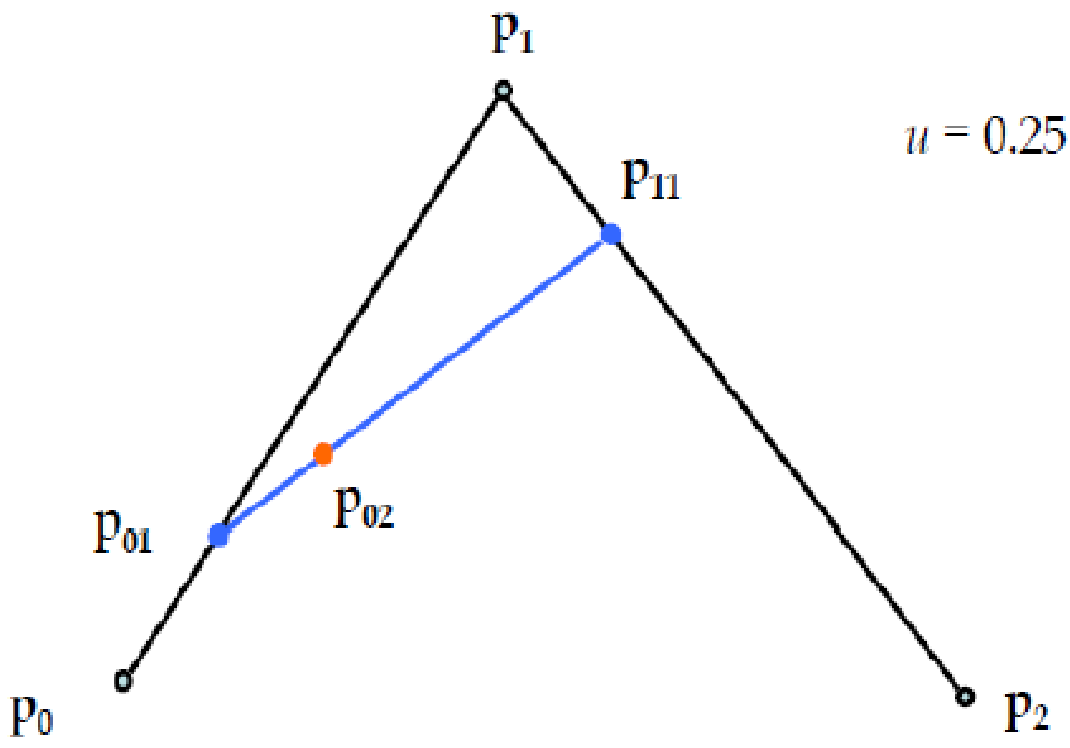
Bézier

- Vantagens
  - Fácil de construir
  - Vetores tangentes são definidos de forma automática pelos segmentos de reta
  - Curva contida no convex hull

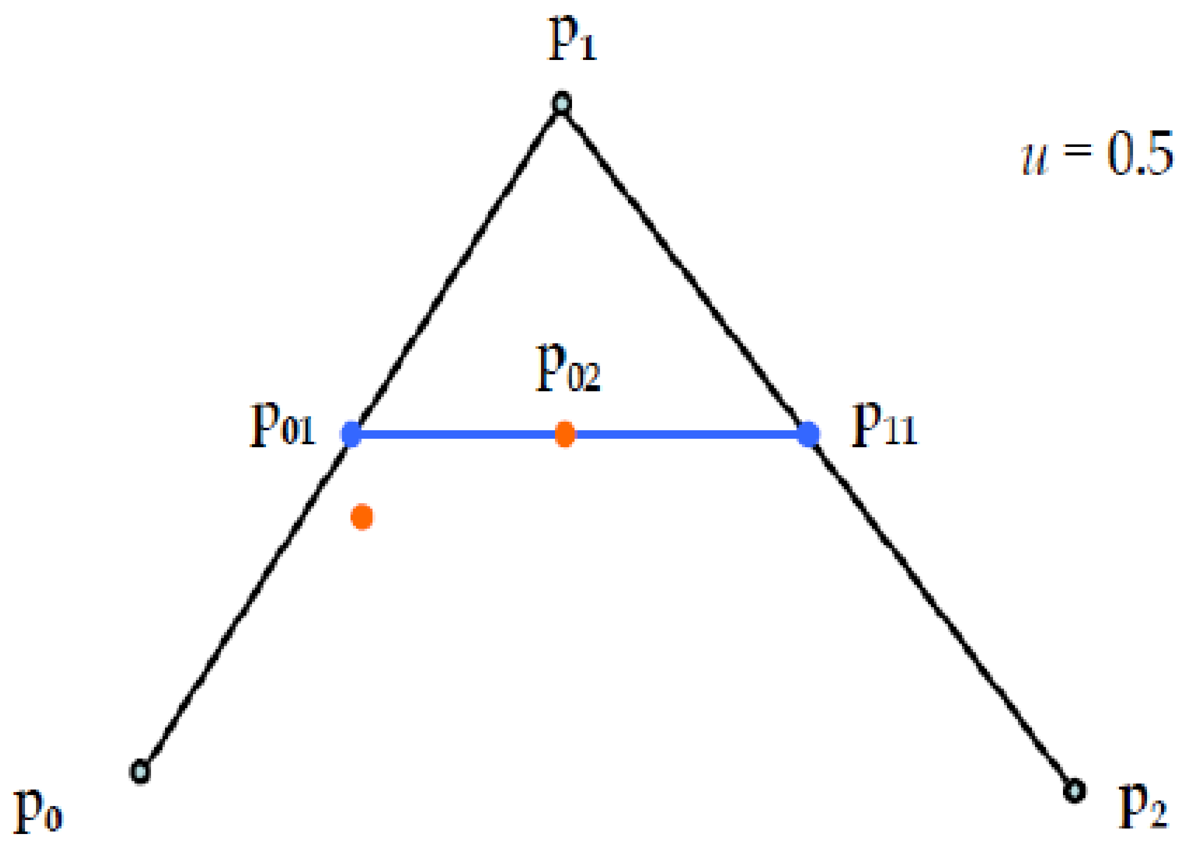
- Desvantagens
  - Não garante de forma automática a continuidade entre as curvas. Os pontos extremos precisam ser colineares.
  - K pontos de controle → Grau k-1 do polígono
  - Não permite controle local. O ajuste de um ponto afeta toda a curva.



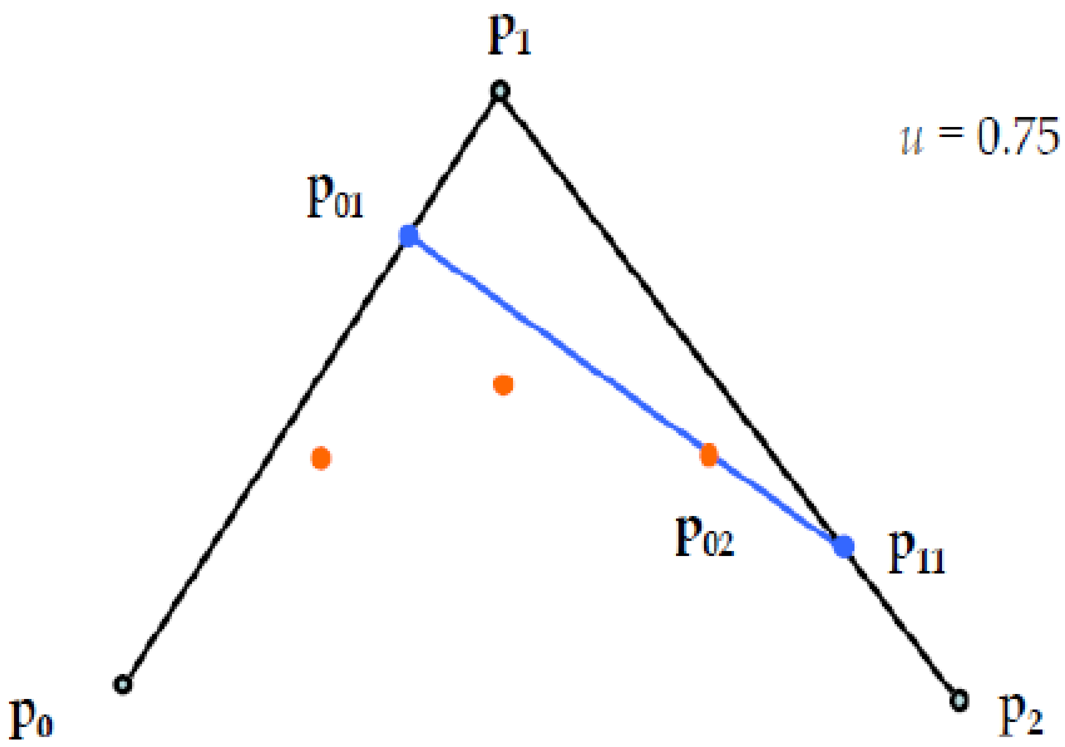
Algoritmo de Casteljau – Bézier 1/4



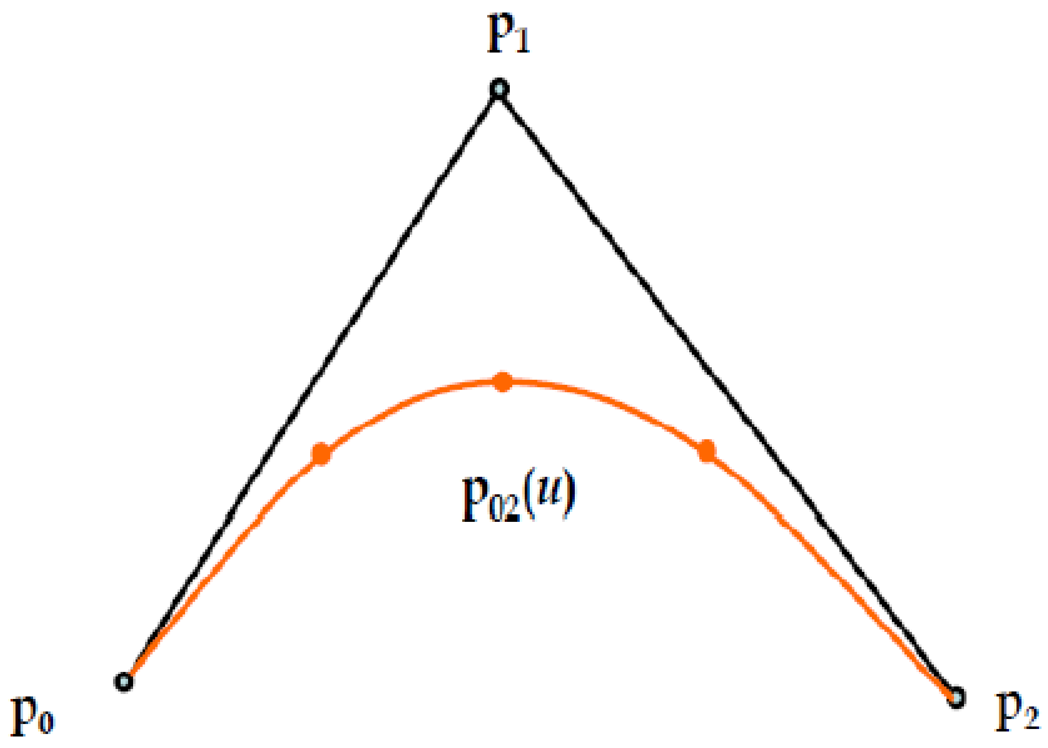
Algoritmo de Casteljau – Bézier 2/4



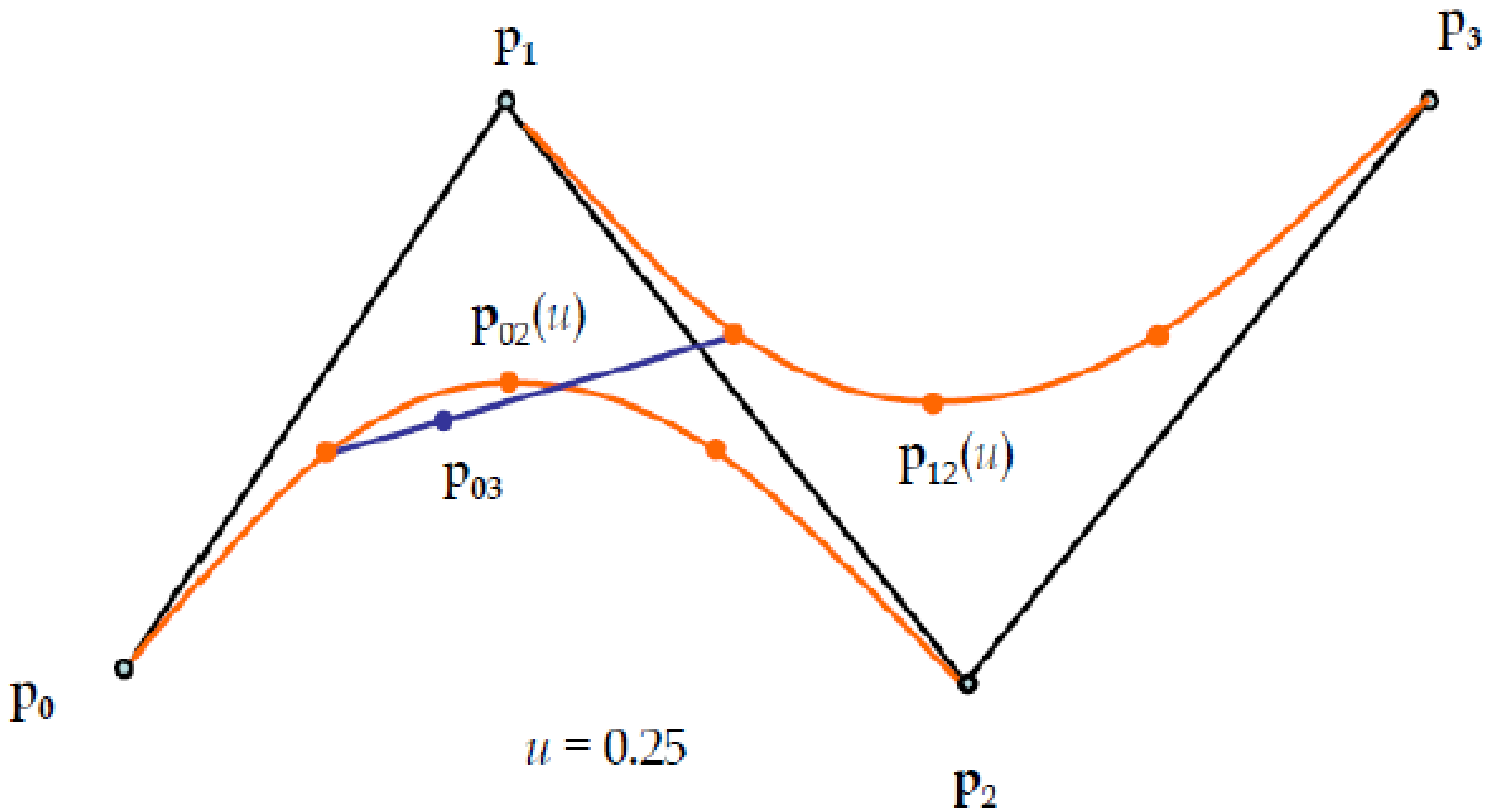
Algoritmo de Casteljau – Bézier 3/4



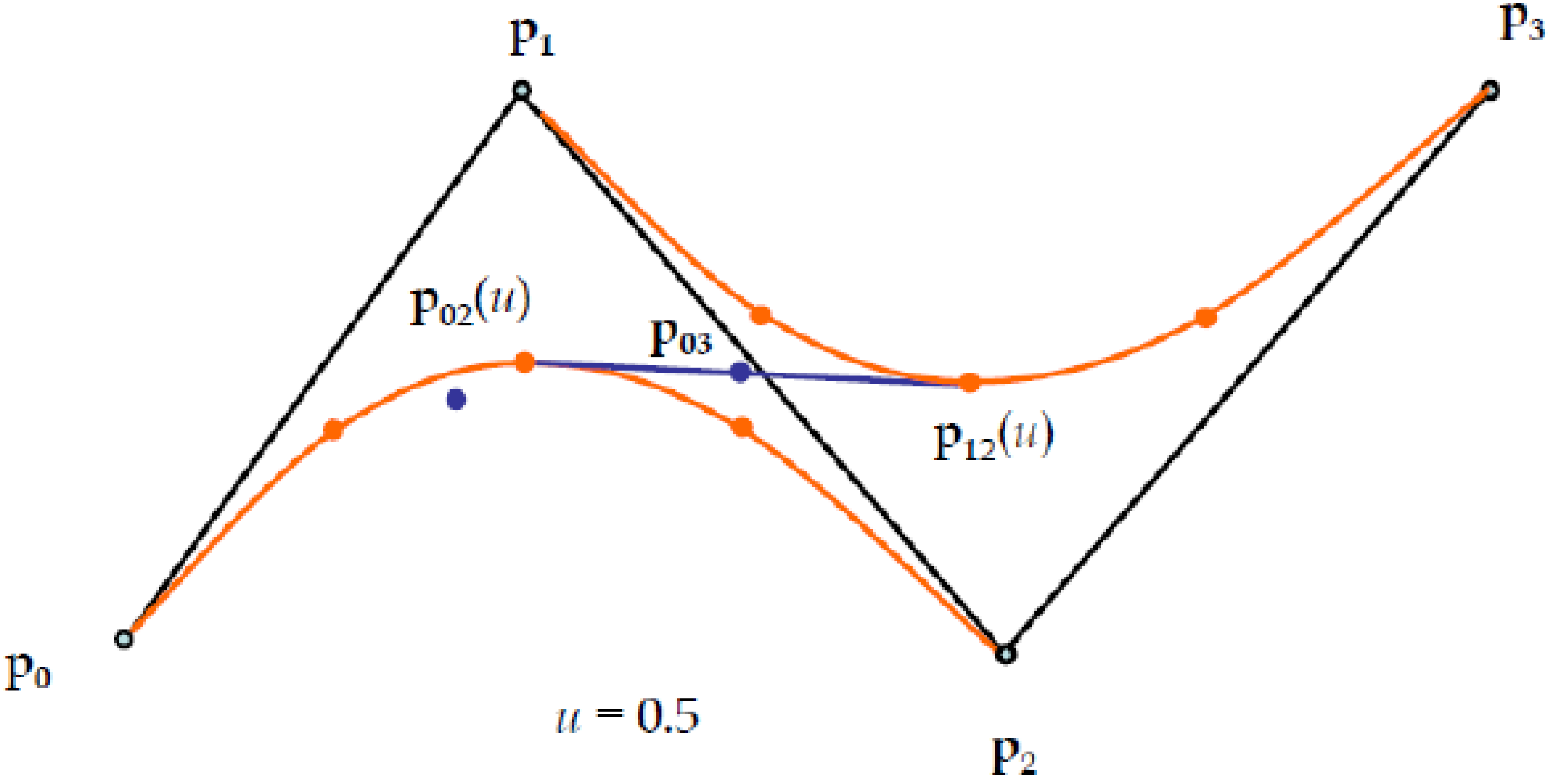
Algoritmo de Casteljau – Bézier 4/4



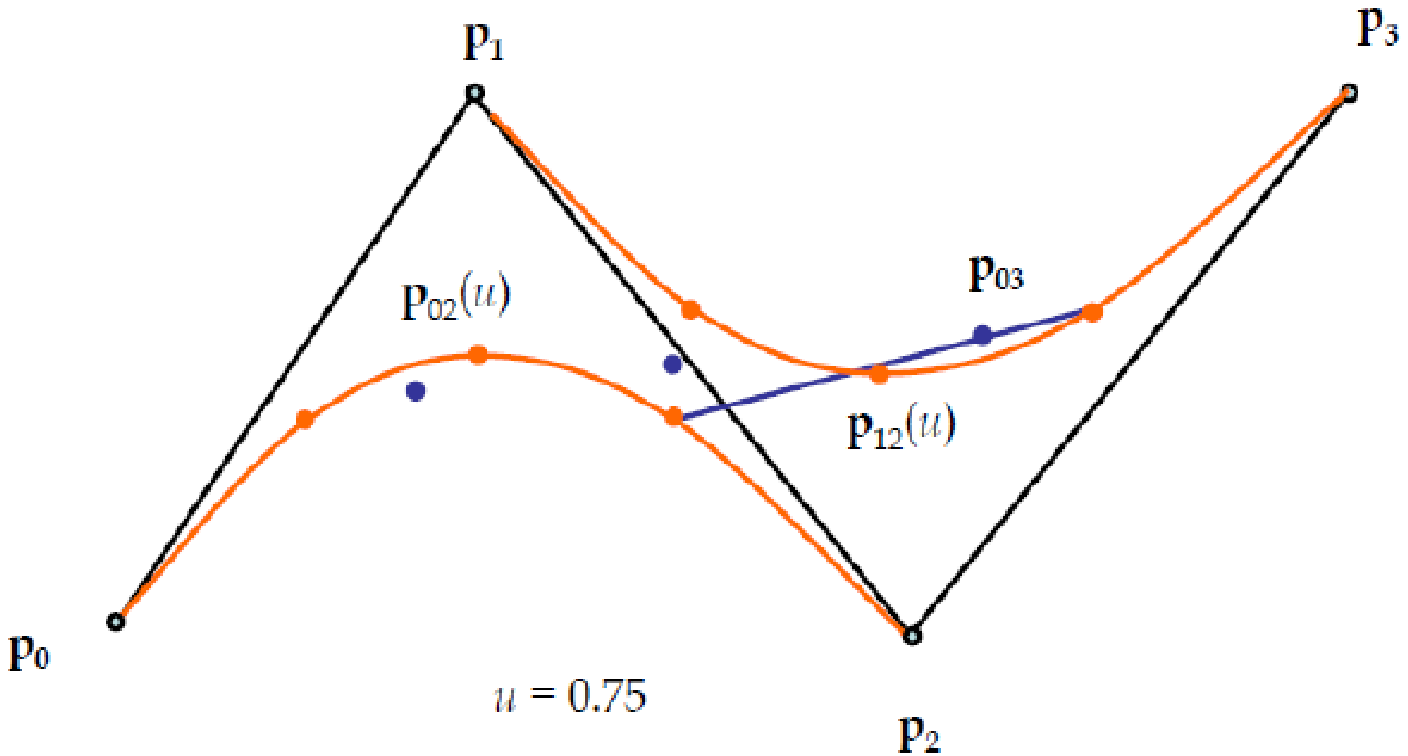
Algoritmo de Casteljau – Bézier 1/4



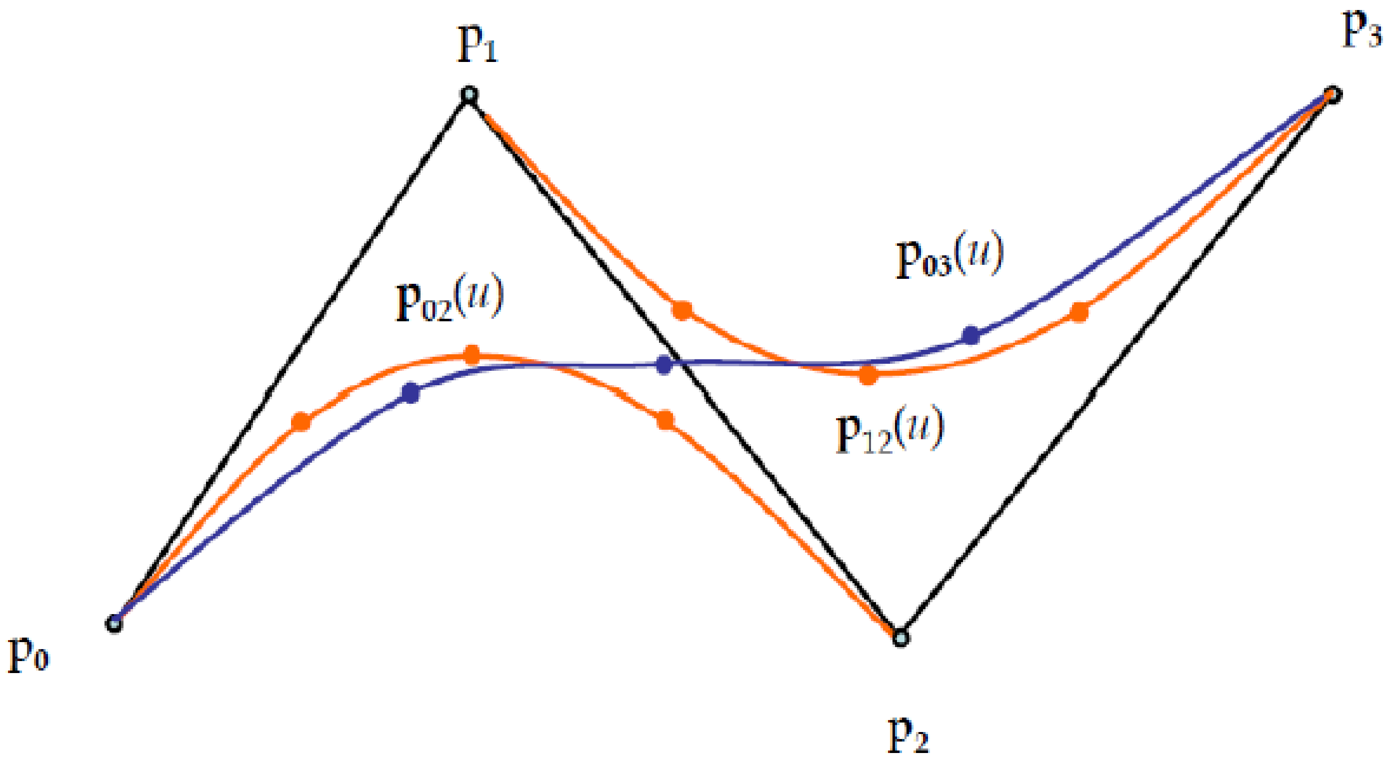
Algoritmo de Casteljau – Bézier 2/4



Algoritmo de Casteljau – Bézier 3/4



Algoritmo de Casteljau – Bézier 4/4



Hermite

- Definição de uma curva dados seus pontos extremos e as derivadas nestes pontos
- Hermite de 4 pontos
  - $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$
  - $P(t = 0) = P_0$ e $P(t = 1) = P_3$
  - $P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$
  - $P'(t = 0) = V_0$ e $P'(t = 1) = V_3$

Matriz Geometria

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_3 \\ V_0 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

Formas de Representação da Curva

- Hermite
  - Forma matricial

$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$	$P'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

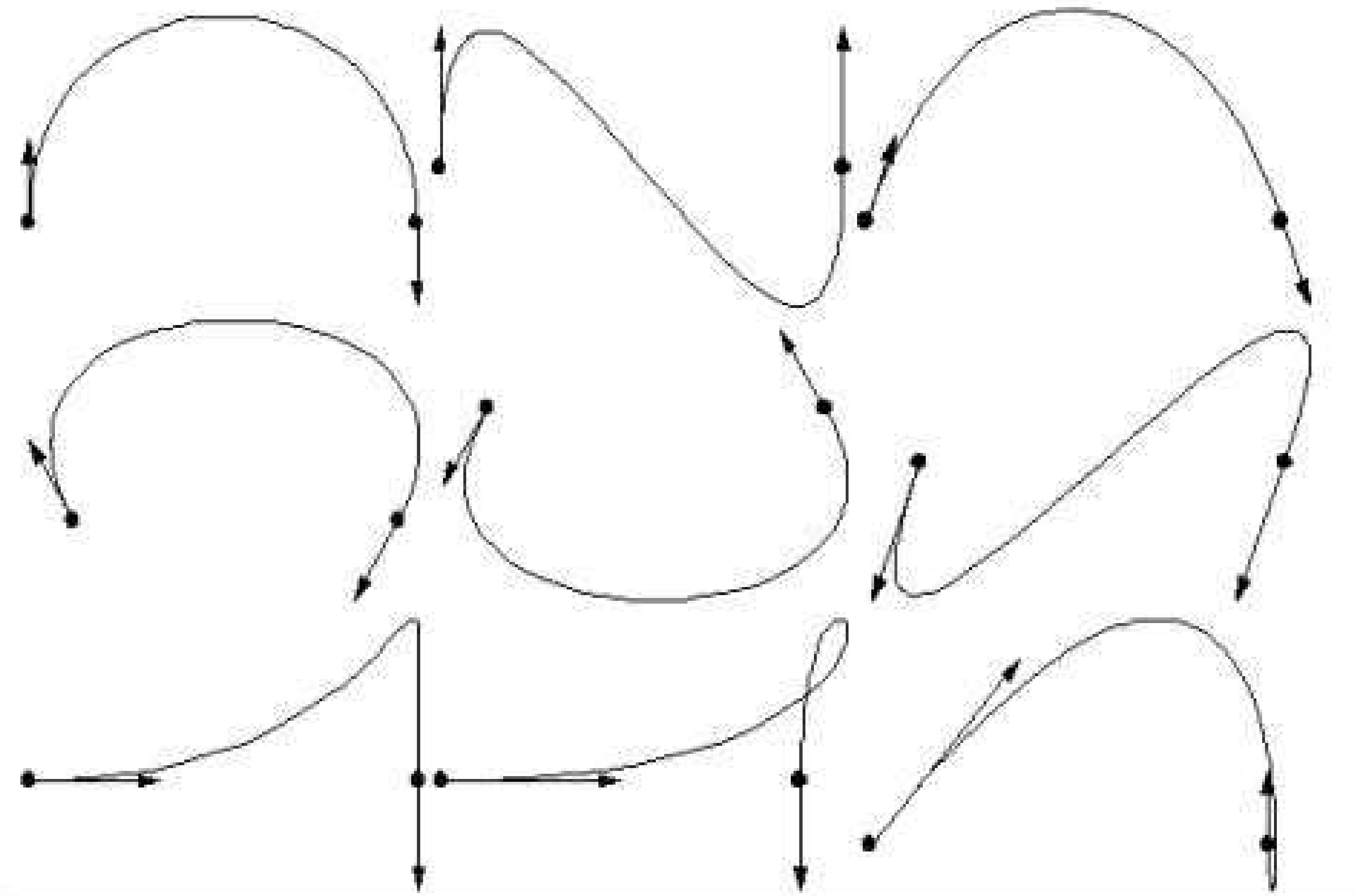
Hermite

- Substituindo P(0), P(1), P'(0) e P´(1) obtem-se Matriz de coeficientes
  - $P(t) = P(0)\,(2t^3 - 3t^2 + 1) +$
    $P(1)\,(-2t^3 + 3t^2) +$
    $P'(0)\,(t^3 - 2t^2 + t) +$
    $P'(1)\,(t^3 - t^2)$

Matriz de coeficientes Hermite

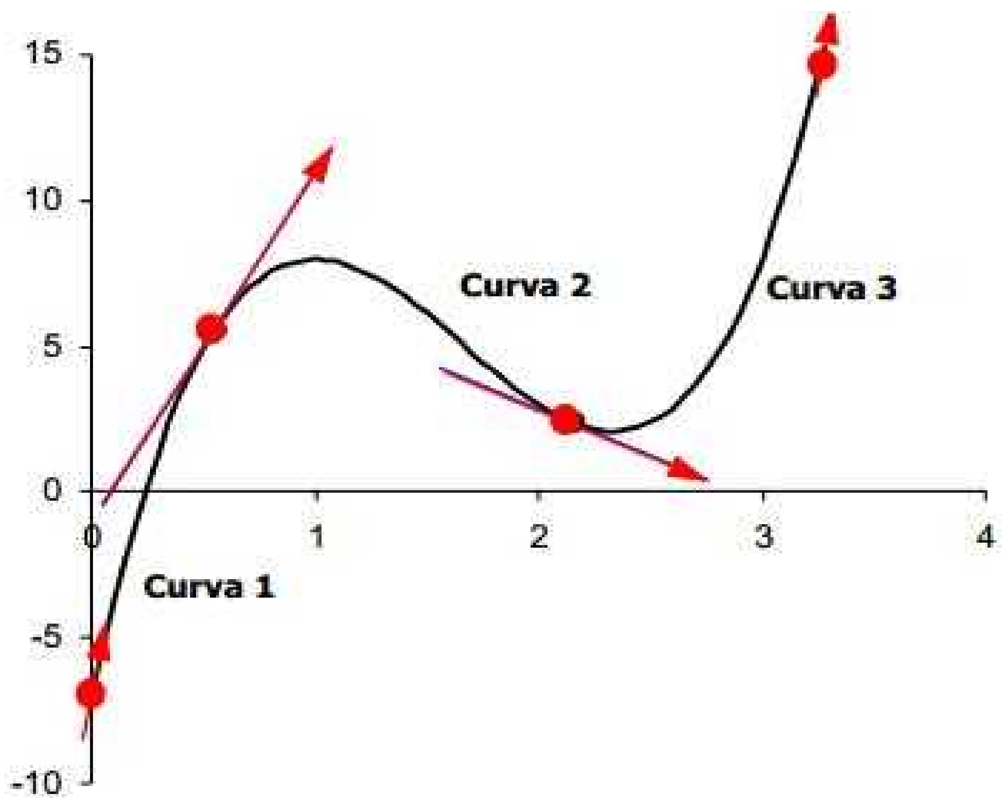
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hermite



Hermite

- A repetição do primeiro ponto de controle e da direção do vetor tangente garante a continuidade de primeira derivada de várias curvas interligadas.



B-Spline

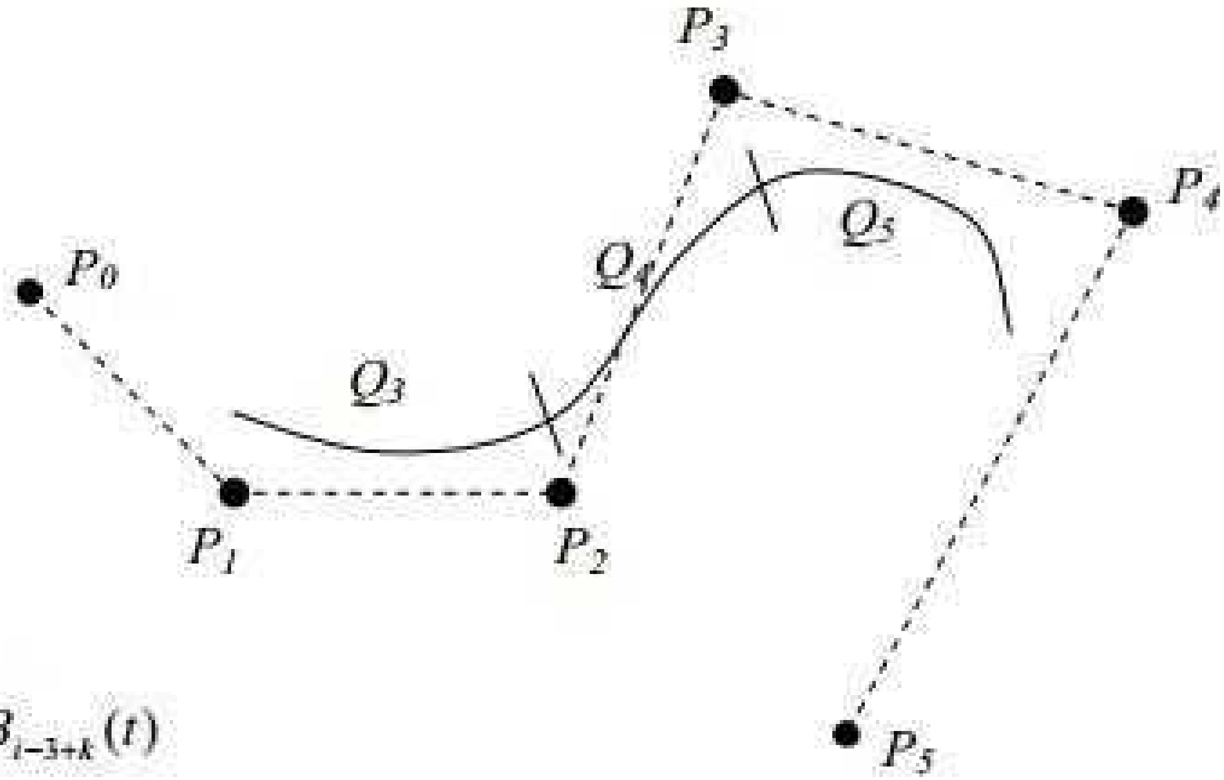
- Bezier e Hermite não são próprias para modelar curvas longas (solução é dividir em vários segmentos de curva)
- Nome vem de um instrumento usado por desenhistas.
- É uma curva de aproximação dos pontos, não passa por nenhum ponto de controle
- É definida como uma série de n-2 segmentos de curva onde existem n+1 pontos de controle
  - B-spline uniforme: t de [0,1] em cada segmento de curva
- O número de *blending functions* é igual ao de pontos de controle
- B-spline é versão da spline com controle local
  - Alteração em um ponto afeta apenas os pontos vizinhos

B-Spline

- Curva é gerada por um polinômio de qualquer grau independente do número de pontos de controle
- Polinômio de grau k implica em continuidade k - 1
  - grau 1: continuidade 0
  - grau 2: continuidade 1
  - grau 3: continuidade 2
- Geralmente utiliza-se polinômios de grau 3, com continuidade C^2

  Cada segmento de curva é definido por 4 pontos de controle

B-Spline



$$Q_i(t) = \sum_{k=0}^{3} P_{i-3+k} B_{i-3+k}(t)$$

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{m} P_i B_i(t), \quad \sum_{i=0}^{m} B_i(t) = 1$$

B-Spline

Blending Functions

$$B_i = 1/6t^3$$

$$B_{i-1} = 1/6(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)$$

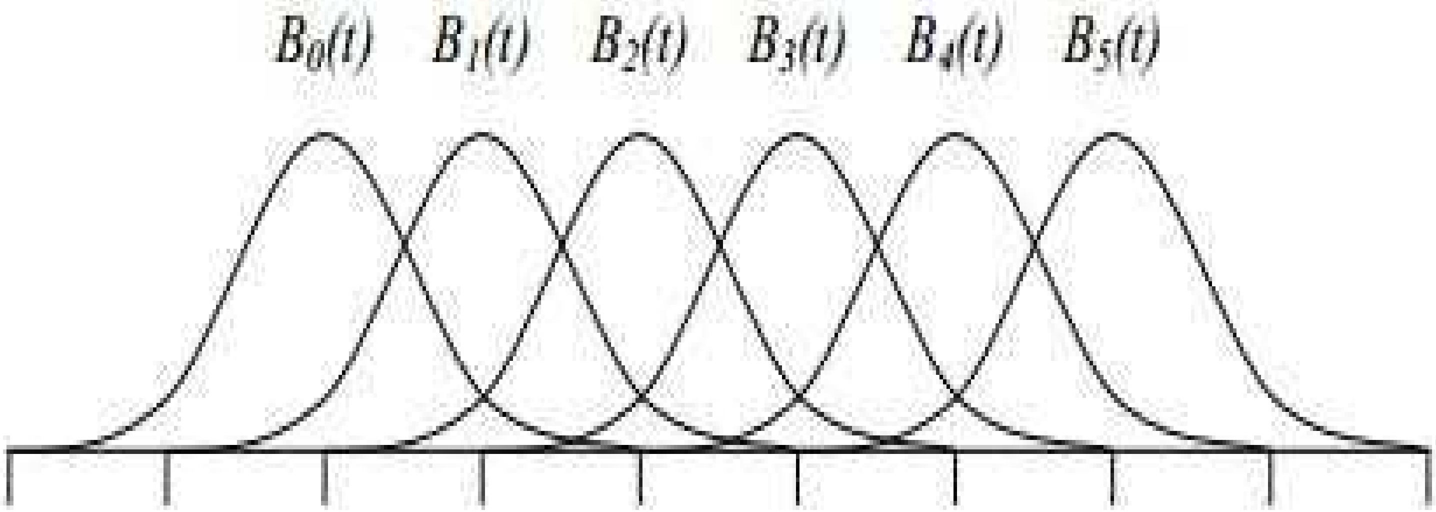
$$B_{i-2} = 1/6(3t^3 - 6t^2 + 4)$$

$$B_{i-3} = 1/6(1-t)^3$$

$i >= 3$

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

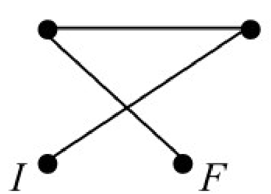
B-Spline

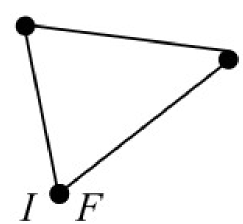


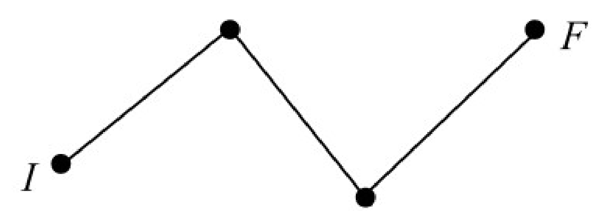
As funções de blending têm a mesma forma mas são deslocadas entre si em intervalos, de forma que, num determinado intervalo, somente algumas funções de blending são não nulas

Exercício 1:

- Desenhe as curvas de Bezier geradas pelos pontos de controle (não precisa “calcular” os pontos da curva, basta fazer um esboço desta curva). Suponha que os pontos iniciais e finais estão indicados com I e F respectivamente.







Tarefa em dupla:

- Pesquisar e apresentar uma das seguintes curvas paramétricas no Moodle

Catmull Rom

Ed Catmull - inventou z-buffer e técnicas para visualização de superfícies curvas (1978), inventou o mapeamento de textura. Desenvolveu o programa de animação TWEEN. Primeiro presidente da Pixar (depois de sair da Lucasfilm em 1986).

NURBS

Non-uniform rational B-splines

B-spline não-uniforme racional