



Anexo I

SOLUÇÃO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL POR SÉRIE INFINITA DE POTÊNCIAS

Este anexo pretende mostrar que a solução da equação diferencial (01) abaixo, ou da equação (07) da seção 6.5 (resolvida naquele lugar pelo Método da Dedução Lógica), pode ser feita por um método mais longo, porém mais potente e abrangente: a Substituição por Série Infinita de Potências.

$$\boxed{\frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 X} \quad (01)$$

Supondo que a solução procurada X seja representada por uma série infinita de potências de x :

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (02)$$

Substituindo (02) em (01), efetuando as derivações, obtém-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (03)$$

Se as duas séries infinitas de potências são iguais, estão os coeficientes correspondentes de mesma potência de x das duas séries devem ser iguais, termo a termo. Assim,

$$2 \times 1 \times a_2 = \alpha^2 a_0; \quad 3 \times 2 \times a_3 = \alpha^2 a_1; \quad \dots, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = \alpha^2 a_n \quad (04)$$

Os coeficientes pares podem ser expressos em função do coeficiente a_0 , enquanto que os coeficientes ímpares podem ser escritos em função de a_1 , conforme mostra o quadro:

Coeficientes pares	Coeficientes ímpares
$a_2 = \frac{\alpha^2}{2 \times 1} a_0 = \frac{\alpha^2}{2!} a_0$	$a_3 = \frac{\alpha^2}{3 \times 2} a_1 = \frac{\alpha^3}{3!} \frac{a_1}{\alpha}$
$a_4 = \frac{\alpha^2}{4 \times 3} a_2 = \frac{\alpha^4}{4!} a_0$	$a_5 = \frac{\alpha^2}{5 \times 4} a_3 = \frac{\alpha^5}{5!} \frac{a_1}{\alpha}$
$a_6 = \frac{\alpha^2}{6 \times 5} a_4 = \frac{\alpha^6}{6!} a_0$	$a_7 = \frac{\alpha^2}{7 \times 6} a_5 = \frac{\alpha^7}{7!} \frac{a_1}{\alpha}$
...	...
$a_n = \frac{\alpha^n}{n!} a_0 \quad (n \text{ par})$	$a_n = \frac{\alpha^n}{n!} \frac{a_1}{\alpha} \quad (n \text{ ímpar})$

Substituindo estes coeficientes de volta na série de potências original (02), obtém-se:



$$X = a_0 \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^n + \frac{a_1}{\alpha} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^n$$

ou,

$$X = a_0 \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} + \frac{a_1}{\alpha} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} \quad (05)$$

Reconhecendo que a primeira e a segunda série do segundo membro de (05) são, respectivamente, o *co-seno hiperbólico* e o *seno hiperbólico*, expressos por (06) e (07),

$$\cosh \alpha x = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = 1 + \frac{(\alpha x)^2}{2!} + \frac{(\alpha x)^4}{4!} + \dots \quad (06)$$

$$\sinh \alpha x = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = \alpha x + \frac{(\alpha x)^3}{3!} + \frac{(\alpha x)^5}{5!} + \dots \quad (07)$$

chega-se a equação (08):

$$X = a_0 \cosh \alpha x + \frac{a_1}{\alpha} \sinh \alpha x \quad (08)$$

Fazendo $A = a_0$ e $B = a_1 / \alpha$, chega-se a solução final (09) mostrada abaixo.

$$\boxed{X = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x} \quad (09)$$

Deve-se observar que as constantes A e B são calculadas em termos das condições de contorno estabelecidas para o problema.

As funções hiperbólicas de (09) podem ser escritas em termos de *exponenciais*, ou seja,

$$\cosh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} \quad (10)$$

$$\sinh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} \quad (11)$$

Assim, substituindo (10) e (11) em (09), obtém-se a expressão final (12) em termos de exponenciais, onde foram selecionadas novas constantes arbitrárias A' e B'.

$$\boxed{X = A' e^{\alpha x} + B' e^{-\alpha x}} \quad (12)$$

Atenção: O aluno deve exercitar a utilização do método aqui apresentado (Substituição por Série Infinita de Potências), resolvendo agora a equação diferencial (08) da seção 6.5, mostrada novamente em (13).

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = -\alpha^2 Y \quad (13)$$