TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS 2D

Gilda Aparecida de Assis

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

- Não alteram o número de vértices e de arestas do objeto
- Devem ser aplicadas a todos os pontos do objeto
- São utilizadas para:
  - Transformação de um sistema de referência para outro (SRO → SRU, SRU → SRN, ...)
  - Instanciamento de objetos
  - Descrição hierárquica de um objeto complexo que é constituído de várias partes
  - Animação

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

- Três tipos básicos:
  - Translação
  - Escala
  - Rotação
  - São representadas na forma matricial, em coordenadas homogêneas (n+1 x n +1)
    - Em 2D é (x, y, w), 3D é (x,y,z,w)
  - Por que?
  - Para que a translação (Ponto + deslocamento) também possa ser representada como multiplicação de matrizes como a Escala (Ponto*fator_escala) e a Rotação (Ponto* (Cosseno, Seno))

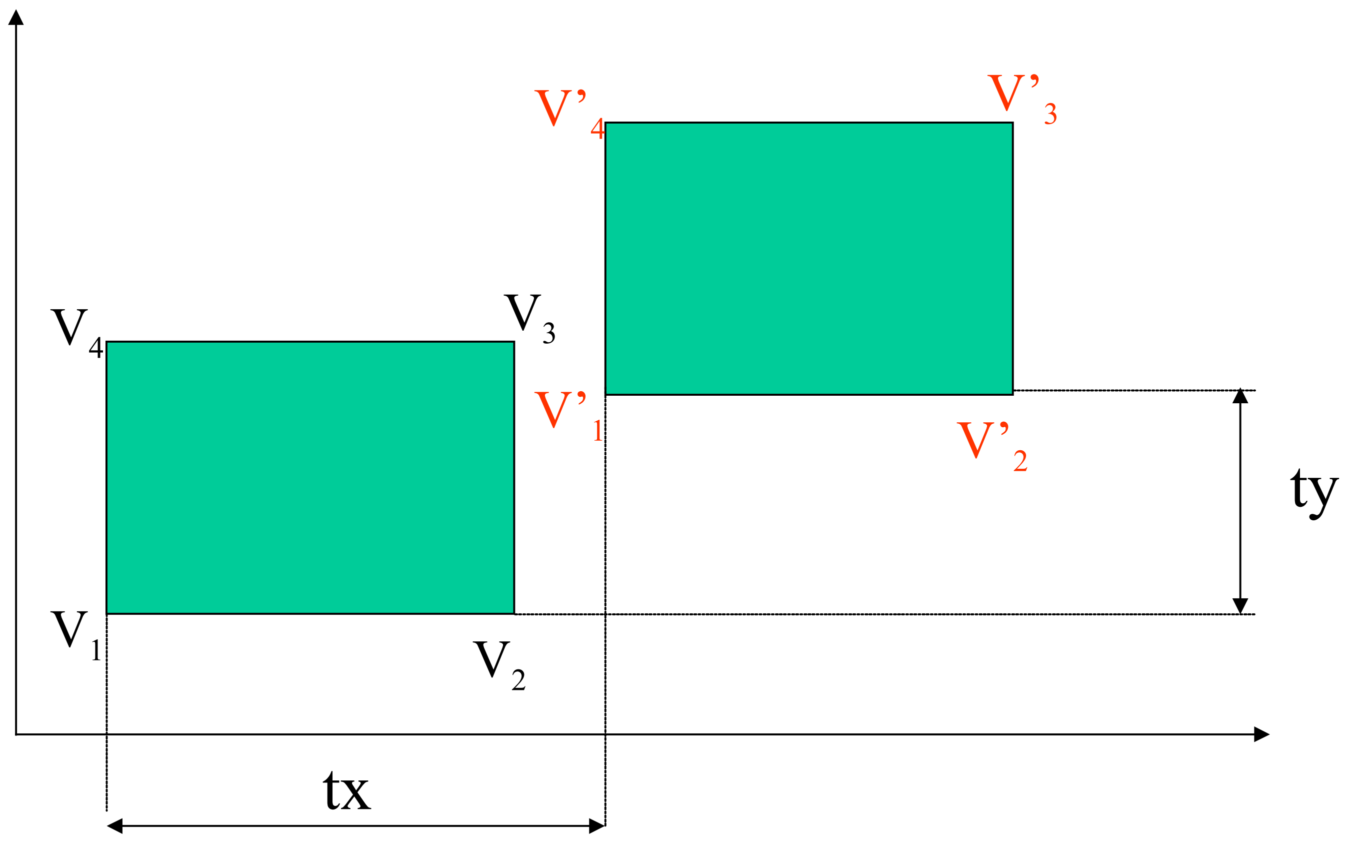
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

- Os pontos em coordenadas homogêneas (x, y,W) e (x_0, y_0,W_0) representam o mesmo ponto se e somente um é múltiplo do outro.

- Pelo menos uma das coordenadas homogêneas precisa ser diferente de zero, assim (0, 0, 0) não é permitido.

- Se a coordenada W é diferente de zero, podemos dividir (x, y, W) por W, (x/W, y/W, 1). Os números x/W e y/W são as Coordenadas Cartesianas do ponto homogêneo.

TRANSLAÇÃO



Estamos movendo cada ponto em uma linha reta para uma nova localização

TRANSLAÇÃO

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

$$P' = P + T$$

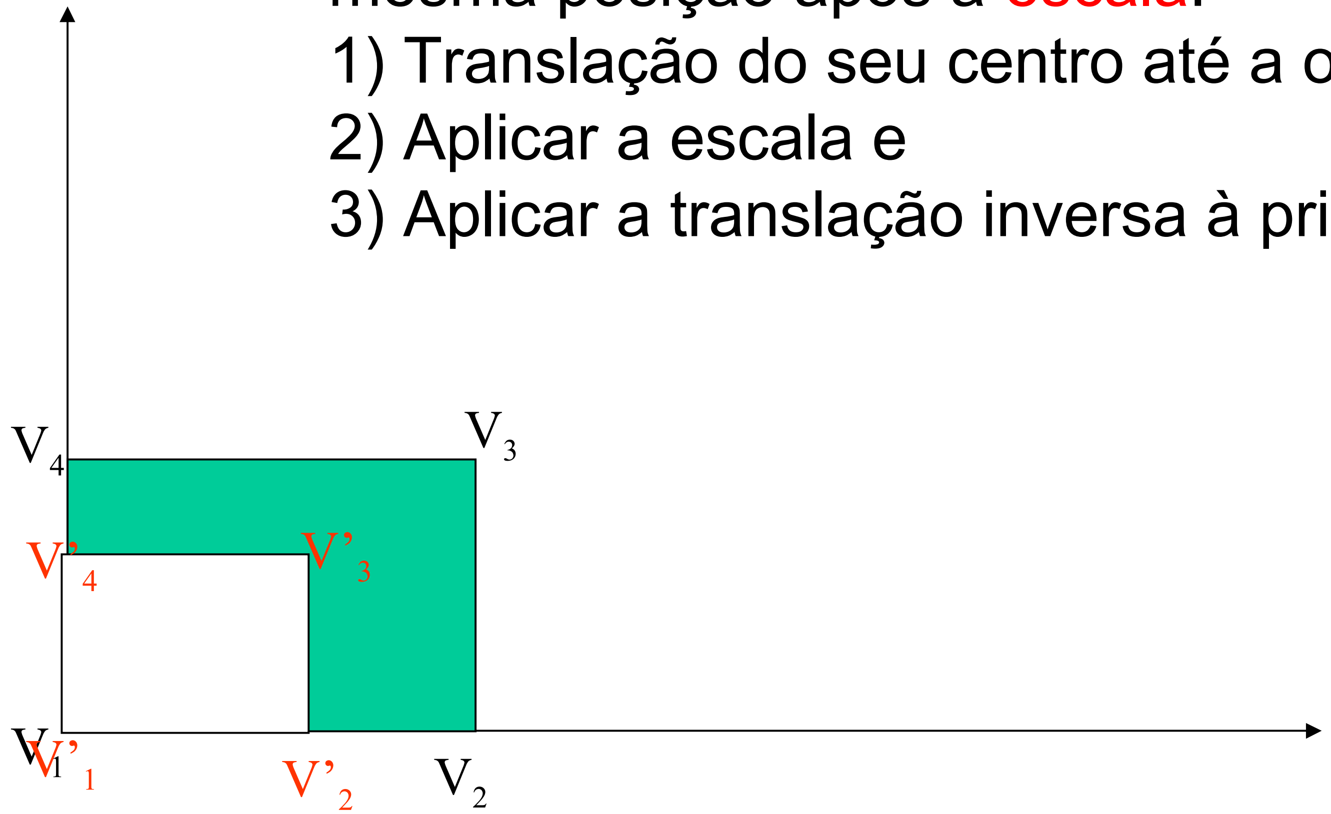
TRANSLAÇÃO

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ESCALA

Para garantir que um objeto esteja na mesma posição após a escala:

1) Translação do seu centro até a origem
2) Aplicar a escala e
3) Aplicar a translação inversa à primeira.



Alterar o tamanho do objeto

ESCALA

$$x' = x.s_x$$

$$y' = y.s_y$$

$$P' = SP$$

$$S = \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix}$$

ESCALA

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ESCALA

O ponto fixo (xf, yf) normalmente é escolhido como um ponto do objeto, tal como o ponto no centro do objeto

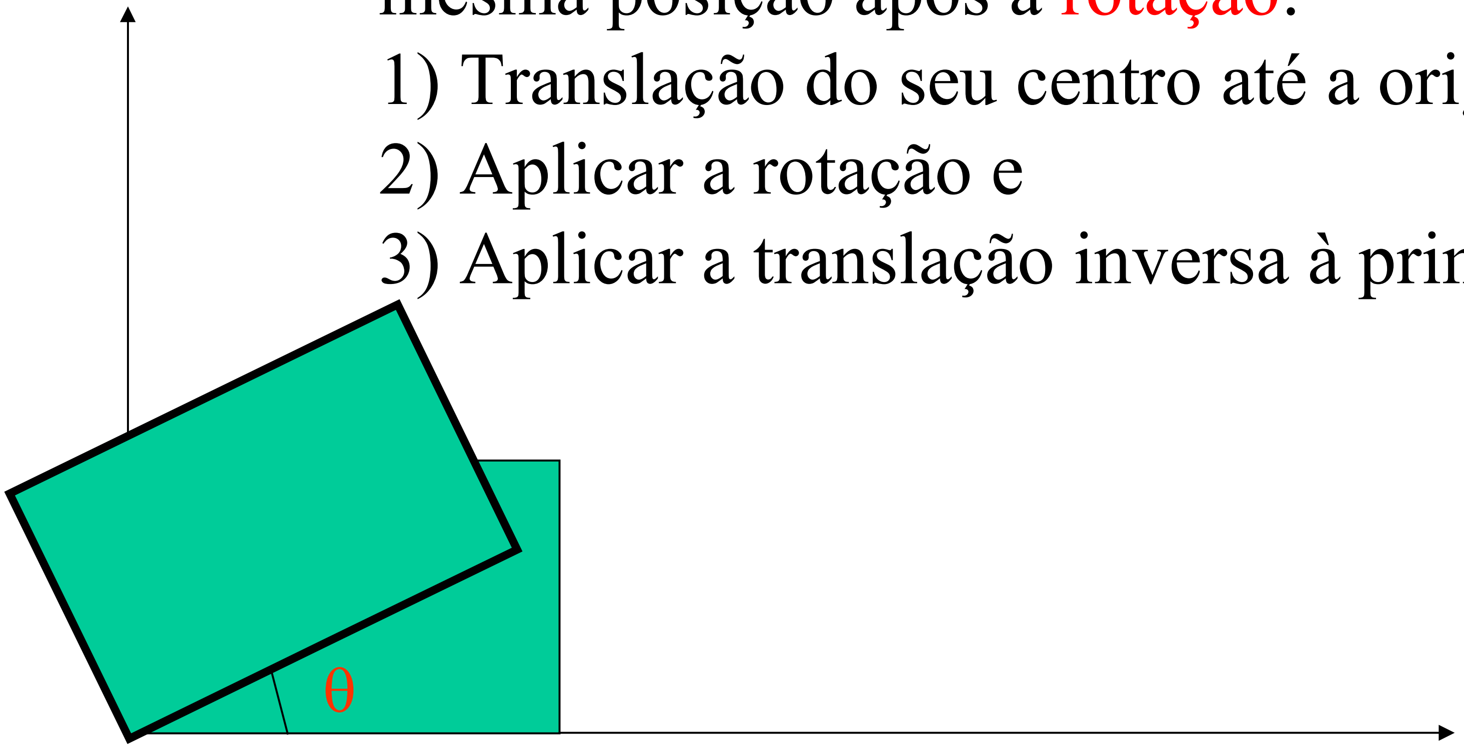
$$x' - x_f = (x - x_f).S_x$$

$$y' - y_f = (y - y_f).S_y$$

ROTAÇÃO

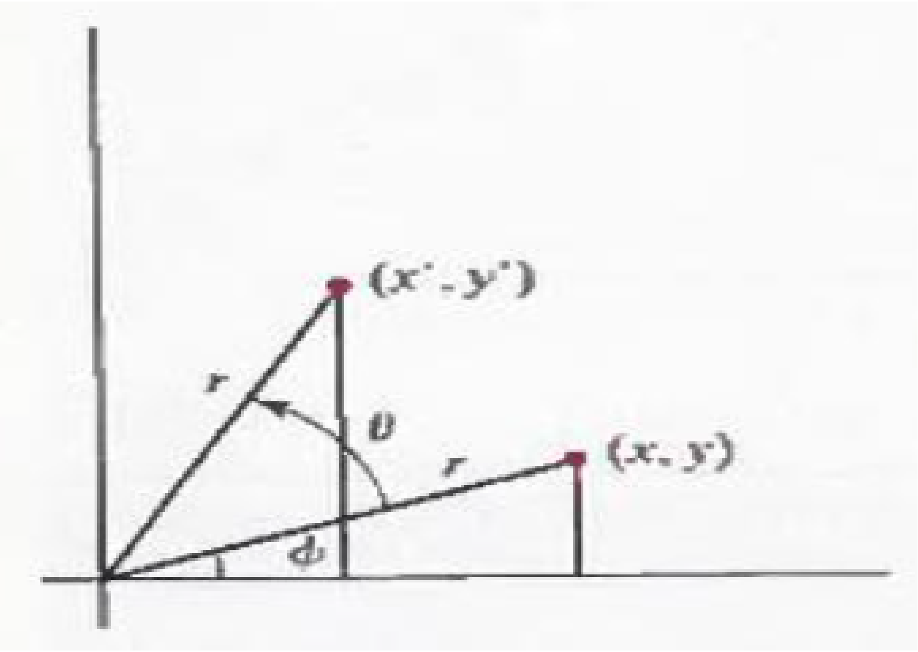
Para garantir que um objeto esteja na mesma posição após a rotação:

1) Translação do seu centro até a origem
2) Aplicar a rotação e
3) Aplicar a translação inversa à primeira.



ROTAÇÃO

r é a distância constante em relação a origem
φ é a posição angular original do ponto
θ é o ângulo de rotação

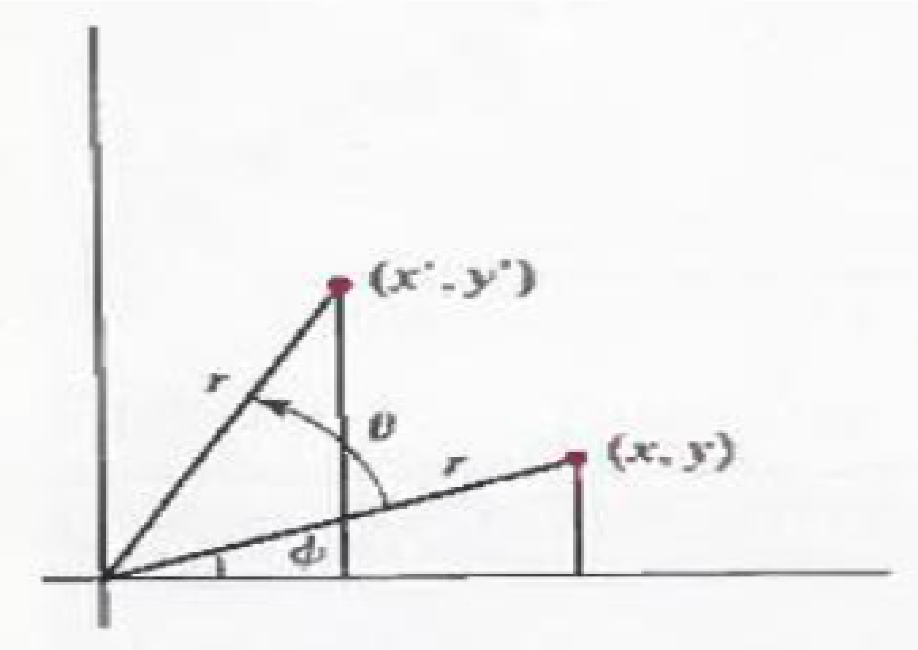


ROTAÇÃO

Pela semelhança dos triângulos:

$x' = r.\cos(\varphi + \theta) = r.\cos(\varphi).\cos(\theta) - r.\mathrm{sen}(\varphi).\mathrm{sen}(\theta)$

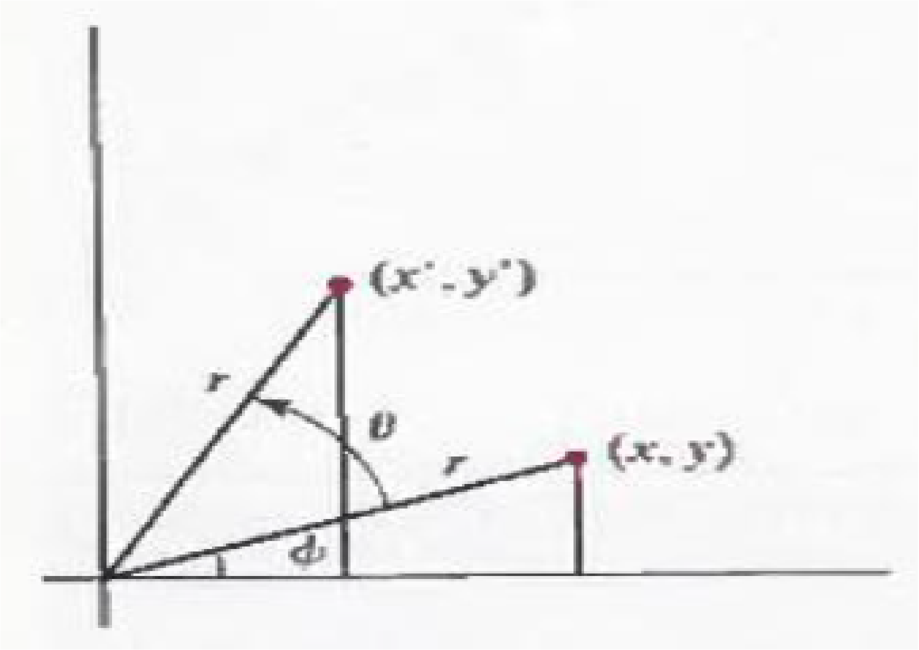
$y' = r.\mathrm{sen}(\varphi + \theta) = r.\cos(\varphi).\mathrm{sen}(\theta) + r.\mathrm{sen}(\varphi).\cos(\theta)$



ROTAÇÃO

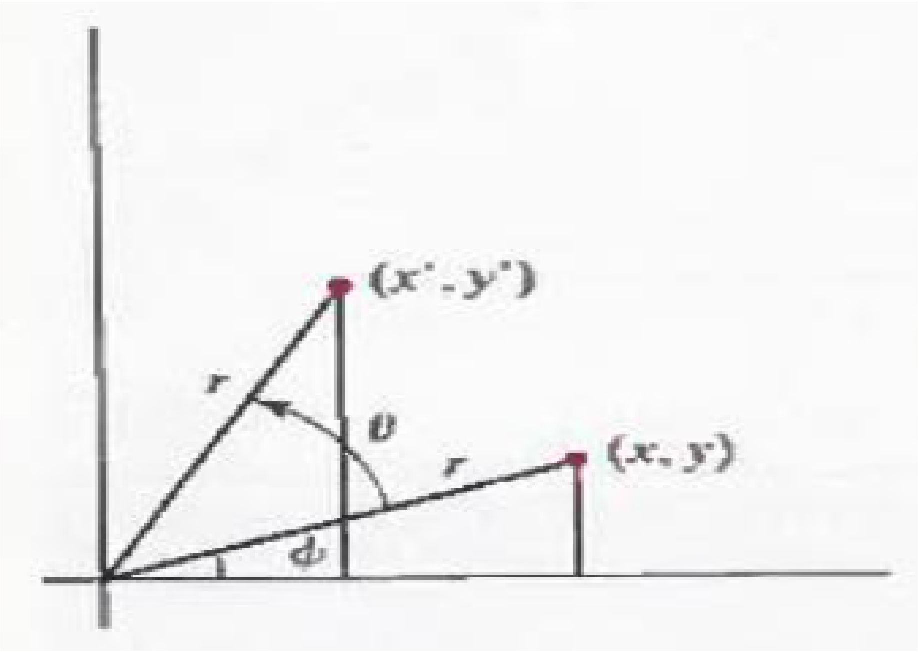
$x' = r.\cos(\varphi + \theta) = r.\cos(\varphi).\cos(\theta) - r.\text{sen}(\varphi).\text{sen}(\theta)$
$y' = r.\text{sen}(\varphi + \theta) = r.\cos(\varphi).\text{sen}(\theta) + r.\text{sen}(\varphi).\cos(\theta)$

Usando: $x = r.\cos(\varphi)$ e $y = r.\text{sen}(\varphi)$



ROTAÇÃO

$x' = x.\cos(\theta) - y.\,\mathrm{sen}(\theta)$
$y' = x.\mathrm{sen}(\theta) + y.\cos(\theta)$



ROTAÇÃO

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

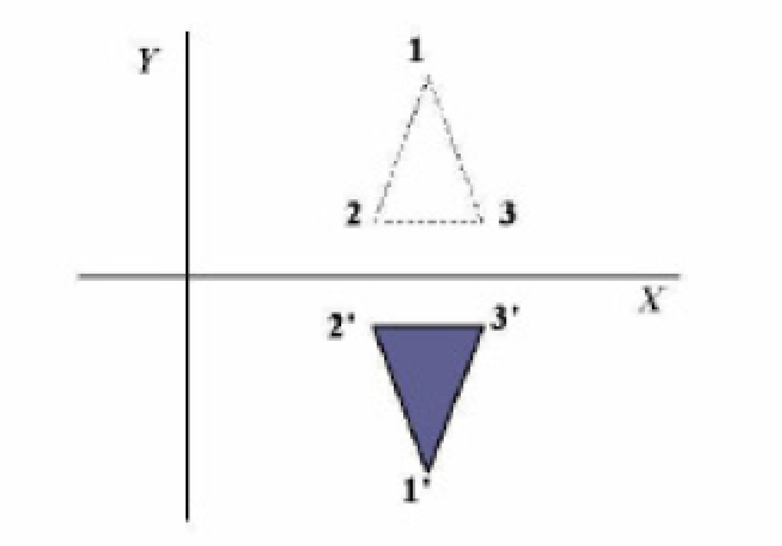
ROTAÇÃO

Aplicar transformações de translação para levar o pivô para origem e depois a origem para o pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_r(1-\cos\theta) + y_r \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_r(1-\cos\theta) - x_r \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESPELHAMENTO NO EIXO X

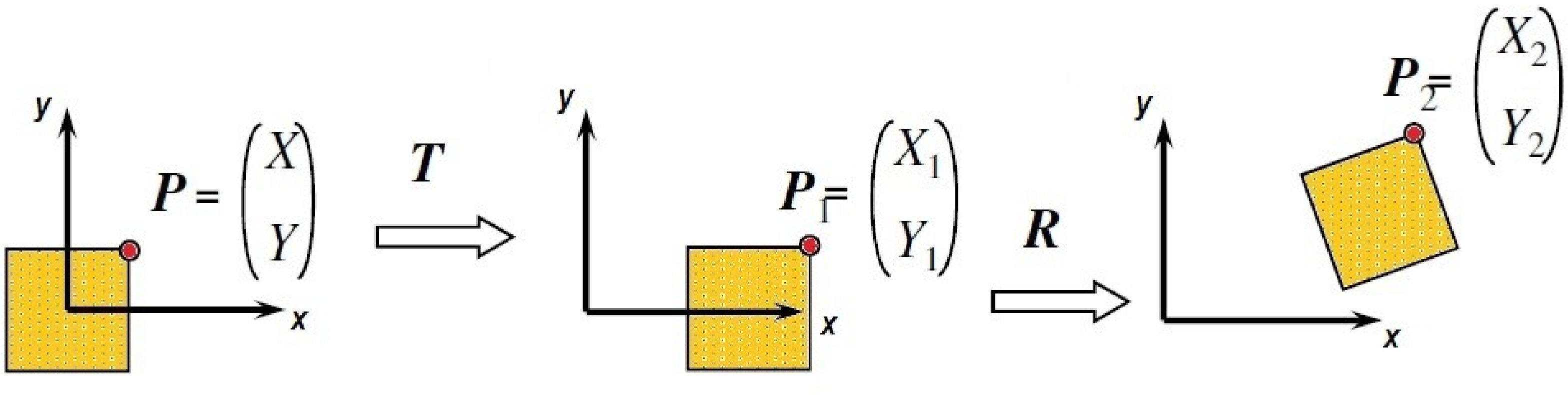


ESPELHAMENTO NO EIXO ARBITRÁRIO (MIRROR)

Sequência de matrizes de reflexão e de rotação.
Por exemplo, se a reflexão for em torno da diagonal
y = x :

1. Rotação de 45º na direção horária para que a linha y = x coincida com o eixo x.
2. Reflexão em torno do eixo x.
3. Rotação de 45º na direção anti-horária para retomar a orientação original da linha y = x.

COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES



T = Translação

R=rotação

$\boxed{P_1 = T\,P \text{ e } P_2 = R\,P_1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{P_2 = R\,T\,P}$

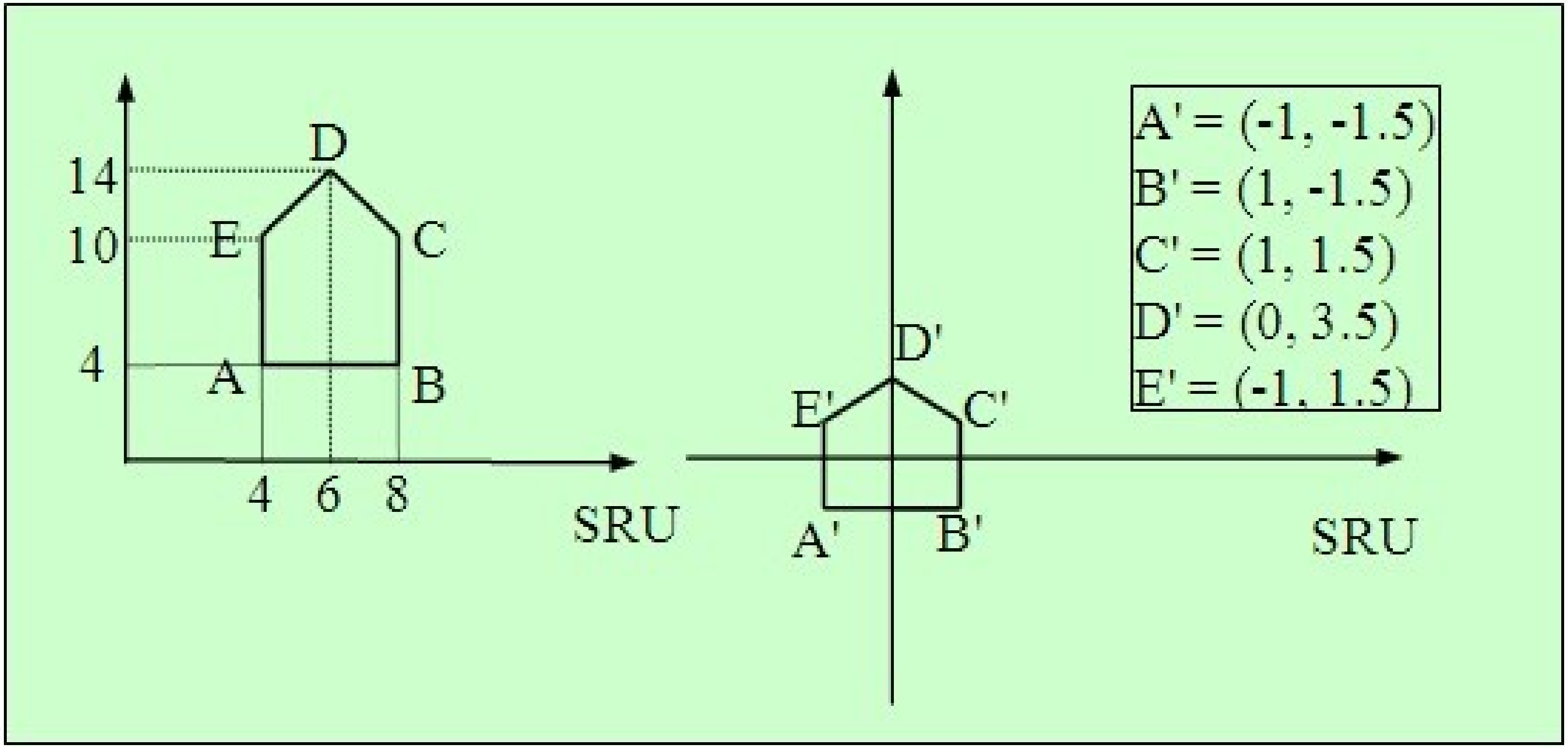
Para compor uma matriz de transformação única:

- As transformações devem ser multiplicadas na ordem inversa da sequencia em que foram aplicadas

EXERCÍCIOS

- Quais as matrizes de transformações geométricas 2D (em coordenadas homogêneas) e em que ordem devem ser aplicadas ao objeto CASA (A,B,C,D,E, A) cujas dimensões são dadas em metros, para produzir o objeto CASA' (A', B',C',D',E', A')?

(a)



EXERCÍCIOS

(b)