Modelagem
Roteiro 2

Ícaro Bacalho Quintão
EC-14.1.8083

/ /

a) $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau s+1}$ $\quad R(s) = \frac{1}{s}$

$\frac{Y(s)}{1/s} = \frac{K/\tau}{s+\frac{1}{\tau}}$ $\quad Y(s) = \frac{K/\tau}{s+1/\tau} \cdot \frac{1}{s}$

$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/\tau}$

$A\Big|_{s=0} \quad \frac{K/\tau}{1/\tau} \rightarrow A = K$

$B\Big|_{s=-1/\tau} \quad \frac{K/\tau}{-1/\tau} \rightarrow B = -K$

Assim, $Y(s) = \frac{K}{S} - \frac{K}{(S+1/\tau)}$ é a transformada inversa

$y(t) = K - Ke^{-\frac{1}{\tau}t}$

$\rightarrow$ Resposta Natural (Homogênea)

Resposta forçada
(Regime Permanente)

/ /

b) $y(t) = K - Ke^{-t/\tau}$, com $K = 1$ e $t = \tau$

$y(t) = 1 - 1e^{-1}$

$y(t) = 1 - 0,3678$

$y(t) = 0,63$

Quando o ganho é 1, a saída do sistema para o tempo é 63% do valor final.

c) Tempo de subida (t_r)

$y(t) = 1 - e^{-\frac{t_{10\%}}{\tau}} \rightarrow 0,1$

$-e^{\frac{t_{10\%}}{\tau}} = 0,1 - 1$

$\frac{-t_{10\%}}{\tau} = \ln 0,9$

$t_{10\%} = 0,1\tau$

$y(t) = 1 - e^{-\frac{t_{90\%}}{\tau}} \rightarrow 0,9$

$-e^{\frac{-t_{90\%}}{\tau}} = -1 + 0,9$

$-\frac{t_{90\%}}{\tau} = \ln 0,1$

$t_{90\%} = 2,3\tau$

$t_r = t_{90\%} - t_{10\%}$

$t_r = 2,3\tau - 0,1\tau \Rightarrow \boxed{2,2\tau}$

d) Tempo de Acomodação (t_s)

2%

$y(t_s) = 1 - e^{-\frac{t_s}{\tau}} \Rightarrow 0,98$

$t_s = -\tau \ln(0,02)$

$\boxed{t_s = -4\tau}$

e) $K = \frac{y(\infty) - y(0)}{u(\infty) - u(0)} \rightsquigarrow \frac{0,09 - 0,26}{0,4 - 0} \rightsquigarrow \boxed{-0,425}$

$y(\tau) = y(0) + 0,63\ K\ u(\infty)$
$y(\tau) = 0,26 + 0,63(-0,425).(0,4) = \boxed{0,153}$

Assim a Função de Transferência é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{-0,425/4,3}{s+0,23} \rightsquigarrow \boxed{\frac{-0,1}{s+0,23}}$$

f) $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K/\tau}{s + 1/\tau}$ e $R(s) = \frac{1}{s^2}$

$Y(s) = \frac{K/\tau}{s+1/\tau} \cdot \frac{1}{s^2}$ $\quad \frac{A s(s+1/\tau) + B(s+1/\tau) + C s^2}{s^2(s+1/\tau)}$

$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1/\tau}$ $\quad A s^2 + A s \frac{1}{\tau} + B s + B\frac{1}{\tau} + C s^2$

$B\frac{1}{\tau} = K\frac{1}{\tau}$ $\quad B = K$

$A + C = 0$ $\quad A = -C$ $\quad C = K\tau$

$A\frac{1}{\tau} + K = 0$ $\quad A = -K\tau$

$Y(s) = \frac{-K\tau}{s} + \frac{K}{s^2} + \frac{K\tau}{s+1/\tau}$ → Transformada

$y(t) = \underbrace{-K\tau + Kt}_{\text{Resp Natural}} + \underbrace{K\tau e^{-t/\tau}}_{\text{Resp Forçada}}$

/ /

g) Degrau Unitário

$$e(t) = r(t) - y(t) = 1 - 1e^{-t/\tau}$$

$$e_{rp} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{t \to \infty} e^{-t/\tau} \to e^{-\infty} = \boxed{0}$$

T.V.F

$$\lim_{s \to 0} s \cdot G(s) \Rightarrow \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{K/\tau}{s(s+1/\tau)} = \boxed{K}$$

Rampa Unitária

$$e(t) = r(t) - y(t) = t - (t - \tau + \tau e^{-t/\tau}) = \tau(1 - e^{-t/\tau})$$

$$e_{rp} = \lim_{t \to \infty} \tau(1 - e^{-t/\tau}) \to \tau(1-0) = \boxed{\tau}$$

T.V.F.

$$\lim_{s \to 0} s \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} \cdot s + s \frac{\tau}{s + 1/\tau}$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} - \tau + \frac{\tau}{1 + 1/\tau s} \to \boxed{\tau}$$

h) $\updownarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau}$$

T.V.F.

$$e(t) = r(t) - y(t) = \delta(t) - K/\tau e^{-t/\tau}$$

$$e_{rp} = \lim_{t \to \infty} [\delta(t) - K/\tau e^{-t/\tau}] = \boxed{0}$$

i) Degrau Unitário: Quanto maior o τ, o sistema fica mais lento. Ou seja, mais amortecido.

Rampa Unitária: Quanto maior o τ, o tempo para se estabilizar o sistema é maior e gera mais oscilações.

Impulso Unitário: Quanto menor o τ, mais rápido e oscilatório é o sistema.

j) I)

$$0,95 = 1 - e^{-t/\tau}$$
$$-0,05 = -e^{-t/\tau}$$
$$\ln(0,05) = -t/\tau$$
$$t = \ln(0,05)\tau$$
$$t = 3\tau$$

$$0 = 1 - e^{-t/\tau}$$
$$-1 = -e^{-t/\tau}$$
$$t = \ln(1)\tau$$
$$t = 0$$

$$t_R = 3\tau - 0 \qquad \boxed{t_R = 30s}$$
$$t_R = 3\tau$$

II) $\dfrac{G(s)}{R(s)} = \dfrac{30 \cdot 10^{-6}}{10s+1}$ p/ entrada degrau

$$C(s) = \frac{30 \cdot 10^{-6}}{10s+1} \cdot \frac{100}{s} \rightarrow \frac{3000 \cdot 10^{-6}}{s(10s+1)}$$

$$\lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s}\, 3000 \times 10^{-6}}{\cancel{s}\,[10s+1]} \rightarrow \boxed{3000 \times 10^{-6}\ V}$$

/ /

III) P/ uma entrada rampa a saída é:

$y(t) = G \cdot A\left[t - \tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right]$

com $G = 30 \times 10^{-6}$, $\tau = 10\,s$ e $t = 12\,s$

$y(t) = 30 \times 10^{-6} \cdot 5 \cdot \left[12 - 10\left(1 - e^{-12/10}\right)\right]$

$\boxed{y(t) = 7{,}5 \times 10^{-4}\,V}$

IV) $r(t) = G A t$

$r(12) = 30 \times 10^{-6} \cdot 5 \cdot 12 \rightsquigarrow 18 \times 10^{-4}\,V$

$Erro = 1{,}8 \times 10^{-4} - 7{,}5 \times 10^{-4}$

$\boxed{Erro = 10{,}5 \times 10^{-4}\,V}$