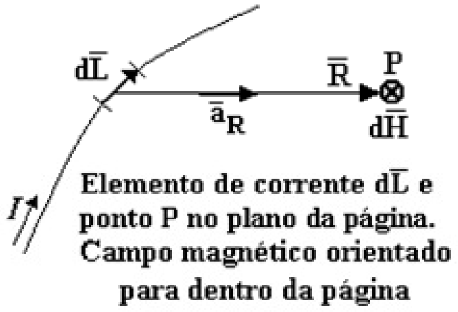
CapítuloVII

CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

7.1 – LEI DE BIOT-SAVART



O campo magnético $d\vec{H}$ produzido pelo elemento de corrente contínua $I d\vec{L}$ no ponto P (ver figura) é:

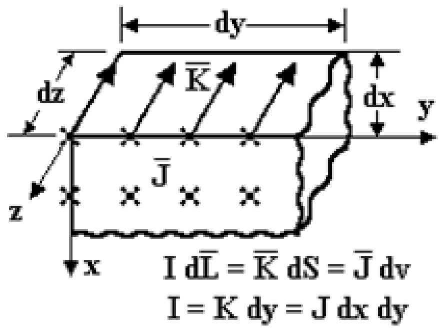
$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{L} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2} \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \oint \frac{I\, d\vec{L} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}} \qquad \text{(A/m)}$$

onde

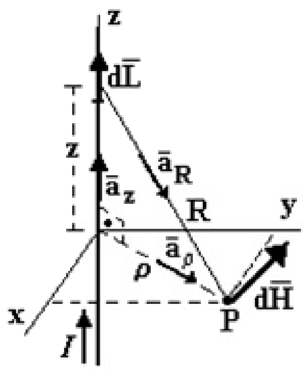
$$I\, d\vec{L} = \vec{K}\, dS = \vec{J}\, dv \qquad \text{(ver figura)}$$

$$K = \frac{dI}{dL} = \text{densidade superficial de corrente (A/m)}$$

$$J = \frac{dI}{dS} = \text{densidade (volumétrica) de corrente (A/m}^2\text{)}$$



<u>Exemplo</u>: Calcular o campo magnético $\vec{H}$ num ponto P devido a um filamento retilíneo infinito com corrente *I*.



<u>Solução</u>: $$d\vec{H} = \frac{I dz\, \vec{a}_z \times (\rho \vec{a}_\rho - z\vec{a}_z)}{4\pi\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{I dz\, \rho \vec{a}_\phi}{4\pi\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{H} = \frac{I\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz\, \vec{a}_\phi}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{I\rho}{4\pi} \left[\frac{z\vec{a}_\phi}{\rho^2\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi}$$

7.2 – LEI CIRCUITAL DE AMPÈRE (CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO)

"A integral de linha de H ao longo de qualquer percurso fechado é exatamente igual à corrente enlaçada pelo percurso". A expressão matemática é dada por:

$$\boxed{\oint \vec{H} \bullet d\vec{L} = I} \qquad \textit{(I = corrente total enlaçada, sentido convencional)}$$

<u>Amperiana (def.)</u>: É um percurso (caminho) especial com as seguintes propriedades:

(i) É um percurso <u>fechado</u>;

(ii) Em cada um de seus pontos $\vec{H}$ é <u>tangencial</u> ou $\vec{H}$ é <u>normal</u> ao percurso. Assim,
se $\overline{H} \perp d\overline{L} \Rightarrow \overline{H} \bullet d\overline{L} = 0$; (Neste caso $\vec{H}$ é <u>normal</u> à amperiana)
se $\overline{H} \,//\, d\overline{L} \Rightarrow \overline{H} \bullet d\overline{L} = H\, dL$ (Neste caso $\vec{H}$ é <u>tangencial</u> à amperiana)

(iii) Em todos os pontos onde $\overline{H} \,//\, d\overline{L}$, a magnitude de $\vec{H}$ é <u>constante</u>.

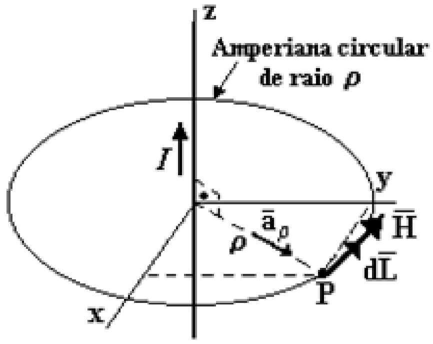
Cálculo de $\vec{H}$, aplicando a lei circuital de Ampère (e amperiana), para alguns casos especiais:

a) Condutor retilíneo ∞ com corrente I

$$\oint \vec{H} \bullet d\vec{L} = I_{enlaçada}$$

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} H_\phi \vec{a}_\phi \cdot \rho d\phi \vec{a}_\phi = I \Rightarrow H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = I$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi}$$

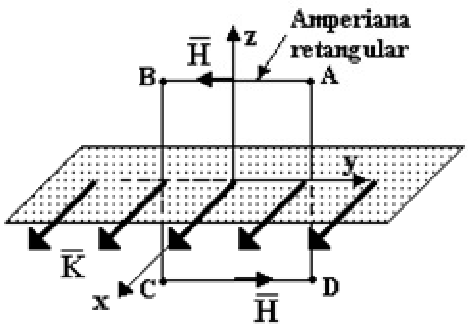


b) Película plana ∞ com corrente com densidade superficial uniforme $\vec{K} = K_x \vec{a}_x$

$$\oint \vec{H} \bullet d\vec{L} = I_{enlaçada}$$

$$\int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_0^L K_x dy$$

$$H_y L + 0 + H_y L + 0 = K_x L \Rightarrow \boxed{H_y = K_x/2}$$



Nota: Forma geral para obtenção do campo $\vec{H}$ devido a uma película plana ∞ com corrente uniforme:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{K} \times \vec{a}_n} \quad (\vec{H} \text{ independe da distância})$$

onde $\vec{a}_n$ é versor normal ao plano orientado para o lado que se deseja obter $\vec{H}$.

Ex.: Acima do plano da figura anterior: $\vec{H} = \frac{1}{2}K_x \vec{a}_x \times \vec{a}_z = \frac{1}{2}K_x\left(-\vec{a}_y\right) = -\frac{1}{2}K_x \vec{a}_y = \vec{H}_y$

Atenção: Provar que o campo magnético $\vec{H}$ na região entre 2 superfícies infinitas condutoras e paralelas com densidades de corrente uniformes iguais e de sentidos opostos é dado por:

$$\boxed{\vec{H} = \vec{K} \times \vec{a}_n} \qquad (\vec{H} = 0 \text{ nas regiões externas às 2 superfícies})$$

c) Linha de transmissão coaxial com corrente total +I uniformemente distribuída no condutor central e –I no condutor externo

$\oint \vec{H} \bullet d\vec{L} = I_{enlaçada}$ onde $\vec{H} = H\vec{a}_\phi$ e $d\vec{L} = \rho d\phi \vec{a}_\phi$

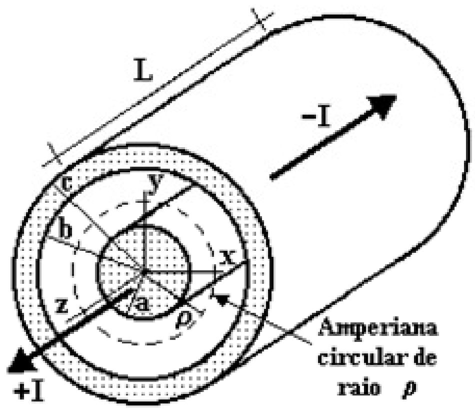
Para uma amperiana circular de raio ρ, tal que:

$\rho < a \Rightarrow H_\phi = I\dfrac{\rho}{2\pi a^2}$ (no condutor central)

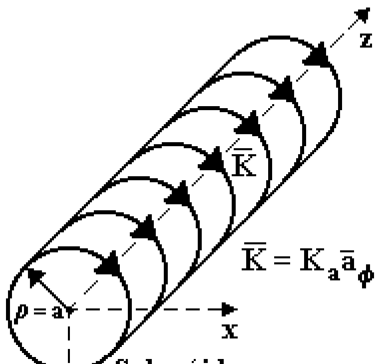
$a < \rho < b \Rightarrow H_\phi = \dfrac{I}{2\pi\rho}$ (no dielétrico)

$b < \rho < c \Rightarrow H_\phi = \dfrac{I}{2\pi\rho}\dfrac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}$ (condutor externo)

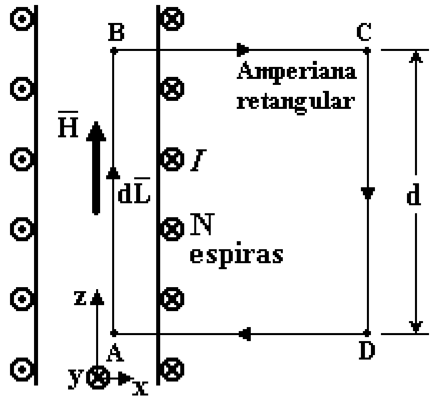
$\rho > c \Rightarrow H_\phi = 0$ (fora: *blindagem magnética*)



d) Solenóide de comprimento ∞ com uma distribuição superficial de corrente $\vec{K} = K_a \vec{a}_\phi$



Solenóide com distribuição superficial circular de corrente



Vista em corte de um solenóide de N espiras com corrente I

Para o solenóide infinitamente longo e a amperiana retangular ABCD temos:

$$\oint \vec{H} \bullet d\vec{L} = I_{enlaçada} \Rightarrow \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \vec{H} \bullet d\vec{L} = \int_0^d K_a dL \Rightarrow \quad H\,d + 0 + 0 + 0 = K_a d$$

Portanto: $H = K_a \Rightarrow \boxed{\vec{H} = K_a \vec{a}_z}$

Se o solenóide for de comprimento finito <u>d</u> com N espiras nas quais flui uma corrente I, temos:

$$K_a = \frac{NI}{d} \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{NI}{d} \vec{a}_z} \qquad \text{(Bem dentro do solenóide)}$$

e) Toróide ideal com distribuição superficial de corrente $\vec{K} = K_a \vec{a}_z$ *em* $\rho = \rho_o - a,\quad z = 0$*, sendo* ρ_o *o raio médio e <u>a</u> o raio da seção transversal do anel toroidal*

$\oint \vec{H} \bullet d\vec{L} = I_{enlaçada}$ (Lei circuital de Ampère)

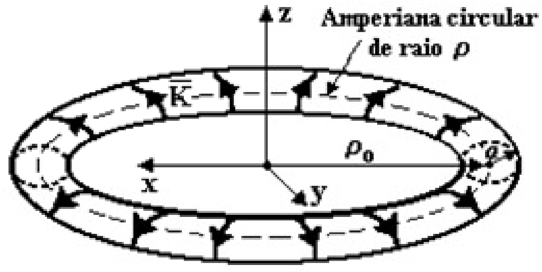
Para uma amperiana circular de raio ρ, tal que:

$\rho < \rho_o - a \Rightarrow H_\phi = 0$ (fora do anel)

$\rho_o - a < \rho < \rho_o + a \Rightarrow H_\phi = K_a \dfrac{\rho_o - a}{\rho}$

Vetorialmente: $\boxed{\vec{H}_\phi = K_a \dfrac{\rho_o - a}{\rho} \vec{a}_\phi}$

$\rho > \rho_o + a \Rightarrow H_\phi = 0$ (fora do anel)



Anel toroidal de raio médio ρ_o e raio de seção reta a e corrente uniformemente distribuída com densidade superfical K_a

Se este toróide possuir N espiras nos quais flui uma corrente I, temos:

$$K_a = \frac{NI}{2\pi(\rho_o - a)} \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{NI}{2\pi\rho} \vec{a}_\phi} \qquad \text{(Bem dentro do toróide)}$$

7.3 – ROTACIONAL

Seja um vetor (ou campo vetorial) qualquer expresso por: $\vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$

Definição: A componente do rotacional de $\vec{A}$ na direção da normal (versor $\vec{a}_n$) de uma área ΔS é expressa por:

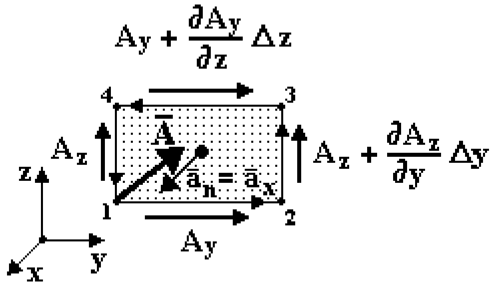
$$\boxed{\left(\text{rot}.\vec{A}\right)\bullet\vec{a}_n = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \vec{A}\bullet d\vec{L}}{\Delta S}}$$

$d\vec{L}$ = vetor diferencial de comprimento integrado ao longo do perímetro da área ΔS

Para determinar uma expressão matemática para o rotacional no sistema de coordenadas cartesianas, seja o vetor $\vec{A}$ aplicado no vértice da área $\Delta S = \Delta y\Delta z$ que se situa mais próximo da origem, ou vértice 1 da figura mostrada ao lado.

Neste caso, pela definição acima, temos:

$$\left(\text{rot}.\vec{A}\right)\bullet\vec{a}_x = \lim_{\Delta y\Delta z\to 0}\frac{\int_{12341}\vec{A}\bullet d\vec{L}}{\Delta y\Delta z}$$



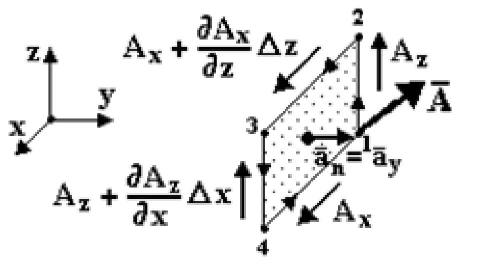
Cálculo da componente do rotacional de $\bar{A}$ na direção do versor $\bar{a}_n = \bar{a}_x$

Desenvolvendo separadamente $\int_{12341}\vec{A}\bullet d\vec{L}$,temos:

$$\int_{12341}\vec{A}\bullet d\vec{L} = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \vec{A}\bullet d\vec{L}$$

$$\int_{12341}\vec{A}\bullet d\vec{L} \cong A_y\Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\Delta y\right)\Delta z - \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\Delta z\right)\Delta y - A_z\Delta z$$

$$\int_{12341}\vec{A}\bullet d\vec{L} \cong \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z$$



Cálculo da componente do rotacional de $\bar{A}$ na direção do versor $\bar{a}_n = \bar{a}_y$

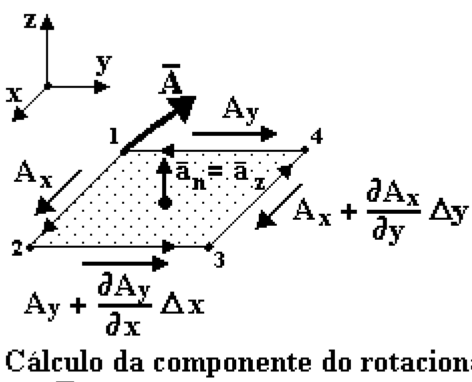
Substituindo acima, obtemos, no limite, a componente do rotacional de $\vec{A}$ na direção do eixo x:

$$\left(\text{rot}.\vec{A}\right)\bullet\vec{a}_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)$$

Semelhantemente, obtemos as componentes do rotacional de $\vec{A}$ nas direções dos eixos y e z, isto é:

$$\left(\text{rot}.\vec{A}\right)\bullet\vec{a}_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \quad \text{(ver figura)}$$

$$\left(\text{rot}.\vec{A}\right)\bullet\vec{a}_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \quad \text{(ver figura)}$$



Cálculo da componente do rotacional de $\bar{A}$ na direção do versor $\bar{a}_n = \bar{a}_z$

Combinando os 3 componentes (na forma vetorial), chegamos ao vetor que representa o rotacional de $\vec{A}$, sendo expresso por:

$$\text{rot}.\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{a}_z$$

Para o vetor campo magnético $\vec{H} = H_x\vec{a}_x + H_y\vec{a}_y + H_z\vec{a}_z$ e usando a notação de rotacional com o vetor nabla, pode-se escrever:

$$\text{rot}.\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{H}$$

Em coordenadas cartesianas, e somente neste sistema de coordenadas, o rotacional de um vetor pode ser obtido através do seguinte determinante:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

Nota: Ver no FORMULÁRIO GERAL as outras expressões do rotacional ($\vec{\nabla}\times\vec{H}$) nos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas.

Aplicando novamente a definição do cálculo da componente do rotacional na direção do eixo x, porém agora para o vetor campo magnético, e considerando a lei circuital de Ampère, obtemos:

$$\left(\text{rot}.\vec{H}\right)\bullet\vec{a}_x = \lim_{\Delta y\Delta z\to 0}\frac{\oint_{12341}\vec{H}\bullet d\vec{L}}{\Delta y\Delta z} = \lim_{\Delta y\Delta z\to 0}\frac{\Delta I_x}{\Delta y\Delta z} = J_x$$

Onde ΔI_x = corrente envolvida pelo percurso 12341, ou corrente que atravessa a área $\Delta S_x = \Delta y\Delta z$.

De maneira análoga, obtém-se:

$$\left(\text{rot}.\vec{H}\right)\bullet\vec{a}_y = J_y$$

$$\left(\text{rot}.\vec{H}\right)\bullet\vec{a}_z = J_z$$

Daí, concluímos que o rotacional do vetor campo magnético resulta (na magnetostática) no vetor densidade de corrente, ou seja:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}}$$ (Forma pontual da lei circuital de Ampère)

Propriedades do operador rotacional:

1) A divergência do rotacional de qualquer função ou campo vetorial é sempre nula.

$$\boxed{\vec{\nabla}\bullet\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = 0}$$

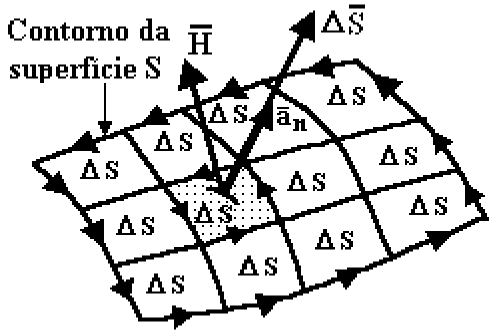
Seja, por exemplo, $\vec{A} = \vec{H}$. Da expressão $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$ chegamos a $\boxed{\vec{\nabla}\bullet\vec{J} = 0}$.

2) O rotacional do gradiente de qualquer função ou campo escalar é sempre nulo.

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0}$$

Seja, por exemplo, f = -V. Da expressão $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ chegamos a $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$.

7.4 – TEOREMA DE STOKES



Pela definição de rotacional, temos:

$$\frac{\oint \vec{H} \bullet d\vec{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \approx \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) \bullet \vec{a}_n$$

$$\oint \vec{H} \bullet d\vec{L}_{\Delta S} \approx \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) \bullet \vec{a}_n \Delta S$$

$$\oint \vec{H} \bullet d\vec{L}_{\Delta S} \approx \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) \bullet \Delta\vec{S}$$

Somando a circulação de todos os ΔS da superfície S, chegamos na expressão matemática do teorema de Stokes:

$$\boxed{\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{L} = \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) \bullet d\vec{S}}$$

Notas: 1 - O contorno C envolve a superfície S. Os vetores $d\vec{L}$(de C) e $d\vec{S}$ devem satisfazer a "regra da mão direita" (com o polegar apontando $d\vec{S}$ e os outros dedos apontando $d\vec{L}$);

2 - O teorema de Stokes é válido para qualquer campo vetorial, e não somente o campo $\vec{H}$.

7.5 – FLUXO MAGNÉTICO (Φ)E DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO ($\vec{B}$)

A densidade de fluxo magnético $\vec{B}$ é definida para o vácuo de permeabilidade magnética μ_o (sendo $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}$ H/m) e o campo magnético $\vec{H}$, como:

$$\boxed{\vec{B} = \mu_o \vec{H}} \qquad \text{(Unidade: Wb/m}^2\text{)}$$

Nota: $\vec{B}$ é definido em outros meios somente a partir da seção 8.6 desta apostila.

O fluxo magnético Φ que atravessa uma área S é obtido integrando $\vec{B}$ sobre a área S, isto é:

$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S}} \qquad \text{(Unidade:Wb)}$$

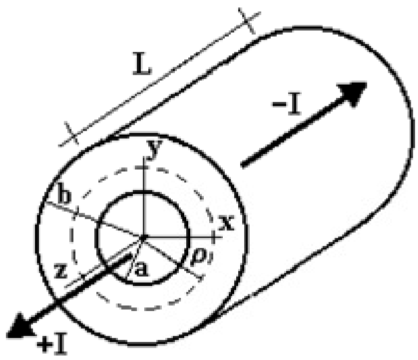
Exemplo: Calcular o fluxo magnético Φ entre o condutor interno (raio ρ = *a*) e o condutor externo (raio ρ = *b*) de uma linha coaxial de comprimento L no vácuo.

Solução: $\vec{H} = \dfrac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi$ na região $a < \rho < b$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S} = \int_0^L \int_a^b \frac{\mu I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi \cdot d\rho\, dz \vec{a}_\phi$$

$$\boxed{\Phi = \frac{\mu I L}{2\pi}\ln\frac{b}{a}} \quad \text{[Wb]}$$



Analogias entre as equações da eletrostática e da magnetostática

ELETROSTÁTICA	MAGNETOSTÁTICA
1) Densidade de fluxo elétrico $\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}$ (no vácuo)	*1) Densidade de fluxo magnético* $\vec{B} = \mu_o \vec{H}$ (no vácuo)
2) Fluxo elétrico $\psi = \int_S \vec{D} \bullet d\vec{S}$	*2) Fluxo magnético* $\Phi = \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S}$
3) Lei de Gauss da eletrostática $\psi_T = \oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = Q_{int}$	*3) Lei de Gauss da magnetostática* $\oint_S \vec{B} \bullet dS = 0$
4) Divergência da densidade de fluxo elétrico $\vec{\nabla} \bullet \vec{D} = \rho_v$	*4) Divergência da densidade de fluxo magnético* $\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$
5) Rotacional do campo elétrico $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$	*5) Rotacional do campo magnético* $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
6) Circulação do campo elétrico $\oint \vec{E} \bullet d\vec{L} = 0$	*6) Circulação do campo magnético* $\oint \vec{H} \bullet d\vec{L} = I = \int_S \vec{J} \bullet d\vec{S}$

7.6 – POTENCIAIS ESCALAR E VETOR MAGNÉTICOS

O <u>potencial escalar magnético</u> V_m é definido, analogamente ao potencial eletrostático, a partir de:

$\boxed{\vec{H} = -\vec{\nabla} V_m}$ (Unidade de V_m: A ou Aespira)

Esta expressão é definida somente na região onde $\vec{J} = 0$. (Por quê?)

Outras expressões (obtidas por analogia com o potencial eletrostático):

$\vec{\nabla}^2 V_m = 0$ em $\vec{J} = 0$ *(Equação de Laplace para materiais homogêneos magnetizáveis)*

$V_{m,ab} = -\int_b^a \vec{H} \bullet d\vec{L}$ *(Depende de percurso específico para ir de "b" até "a")*

O <u>potencial vetor magnético</u> $\vec{A}$ é um campo vetorial tal que:

$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$ que satisfaz $\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$ (Unidade de $\vec{A}$: Wb/m)

Outras expressões (obtidas por analogia com o potencial eletrostático):

$\vec{A} = \int \frac{\mu I\, d\vec{L}}{4\pi R}$ *(Comparar com* $V = \int \frac{\rho_L dL}{4\pi\varepsilon R}$*. Note que a direção de* $\vec{A}$ *é a mesma de* $d\vec{L}$*)*

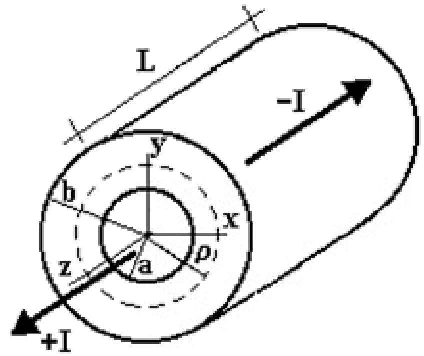
$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$ *(Comparar com a Equação de Poisson* $\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$ *)*

Exemplo: Para a região entre o condutor interno (raio $\rho = a$) e o condutor externo (raio $\rho = b$) da linha (ou cabo) coaxial do exemplo anterior, calcular:

(a) V_m por $\vec{H} = -\vec{\nabla} V_m$

(b) $V_{mP} = -\int_{Ref}^{P} \vec{H} \bullet d\vec{L}$

(c) $\vec{A}$ por $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$



Solução:

(a) $\vec{H} = -\vec{\nabla} V_m \Rightarrow \frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_m}{\partial \phi}\vec{a}_\phi \Rightarrow \frac{dV_m}{d\phi} = -\frac{I}{2\pi} \Rightarrow V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi + C$

Adotando $V_m = 0$ em $\phi = 0$ (referência), obtemos $C = 0 \Rightarrow \boxed{V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi}$

Seja um ponto P(a <ρ<b, $\phi = \pi/4$, z) situado na região entre os condutores (dielétrico) do cabo coaxial. Este pode ser atingido de várias maneiras, partindo da referência, mantendo os mesmos valores de ρ e z, e deslocando-se de um ângulo $\phi = \pm 2n\pi + \pi/4$, isto é, $\phi = \pi/4$, $9\pi/4$, $17\pi/4$, ..., no sentido anti-horário, ou, $\phi = -7\pi/4$, $-15\pi/4$, ... no sentido horário.

Assim, o potencial V_{mP}, com relação a referência de potencial zero em $\phi = 0$, possui múltiplos valores em P, dependendo do percurso usado para chegar até P. Por exemplo:

$$V_{mP} = -\frac{I}{2\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ ou } V_{mP} = -\frac{I}{2\pi}\left(\frac{9\pi}{4}\right) \text{ ou } V_{mP} = -\frac{I}{2\pi}\left(\frac{-7\pi}{4}\right), \text{ etc...}$$

Pode-se concluir daí que *o potencial escalar magnético representa um campo não-conservativo*. Lembre-se que o potencial eletrostático entre 2 pontos não depende do percurso ou caminho entre estes, representando assim um campo conservativo.

(b) Adotando $V_m = 0$ em $\phi = 0$ (referência), o potencial no ponto P(a <ρ<b, φ, z) é:

$$V_{mP} = -\int_{Ref}^{P} \vec{H} \bullet d\vec{L} \Rightarrow V_{mP} = -\int_{\phi=0}^{\phi} \frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi \bullet \rho d\phi \vec{a}_\phi = -\frac{I}{2\pi}\int_{\phi=0}^{\phi} d\phi \Rightarrow \boxed{V_{mP} = -\frac{I}{2\pi}\phi}$$

(c) $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \Rightarrow \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{a}_\phi = \mu\frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi \Rightarrow -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \mu\frac{I}{2\pi\rho}$

Integrando: $\int \partial A_z = -\mu\frac{I}{2\pi}\int\frac{\partial\rho}{\rho} \Rightarrow A_z = -\frac{\mu I}{2\pi} ln\rho + C$

Tomando $A_z = 0$ em $\rho = b$ (referência), obtemos: $C = \frac{\mu I}{2\pi} ln b \Rightarrow A_z = \frac{\mu I}{2\pi} ln\frac{b}{\rho}$

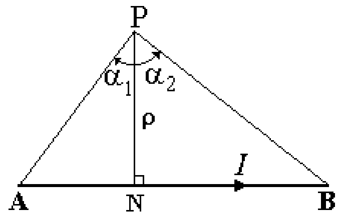
Vetorialmente: $\boxed{\vec{A} = A_z\vec{a}_z = \frac{\mu I}{2\pi} ln\frac{b}{\rho}\vec{a}_z}$

Atenção: Note que $\vec{A}$ tem o mesmo sentido de $\vec{a}_z$ (sentido da corrente no condutor central pois ρ< b). Também $\vec{A}$ decresce com o aumento de ρ desde ρ = a até ρ = b.

7.7 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7.1) a) Demonstrar que o campo magnético $\vec{\mathbf{H}}$ num ponto P devido a um filamento retilíneo de comprimento finito (extremidades A e B), com corrente I no sentido indicado, é dado por:

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{I}{4\pi\rho}\left(\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2\right)\vec{\mathbf{a}}_\phi,$$ sendo:



α_1, α_2 = ângulos positivos medidos conforme indicados,

$\vec{\mathbf{a}}_\phi$ = vetor unitário que define o sentido do campo no pto P,

ρ = menor distância, na perpendicular, do ponto P ao segmento AB ou ao seu prolongamento.

b) A partir da expressão de $\vec{\mathbf{H}}$ acima, determinar seus valores nos pontos C(0, 4, 0), D(3, 4, 0) e E(-3, 4, 0), se o filamento for colocado sobre o eixo x, com suas extremidades A e B posicionadas, respectivamente, em (-3, 0, 0) e (3, 0, 0).

c) A partir da expressão de $\vec{\mathbf{H}}$ acima, determinar seus valores nos mesmos pontos C, D e E, com o filamento sobre o eixo x, porém, agora com sua extremidade A posicionada na origem e sua extremidade B estendendo ao infinito.

Respostas: a) Demonstração;

b) $\vec{\mathbf{H}}_C = \frac{3I}{40\pi}\vec{\mathbf{a}}_Z$ [A/m], $\vec{\mathbf{H}}_D = \frac{3I\sqrt{13}}{208\pi}\vec{\mathbf{a}}_Z$ [A/m], $\vec{\mathbf{H}}_E = \frac{3I\sqrt{13}}{208\pi}\vec{\mathbf{a}}_Z$ [A/m];

c) $\vec{\mathbf{H}}_C = \frac{I}{16\pi}\vec{\mathbf{a}}_Z$ [A/m], $\vec{\mathbf{H}}_D = \frac{I}{10\pi}\vec{\mathbf{a}}_Z$ [A/m], $\vec{\mathbf{H}}_E = \frac{I}{40\pi}\vec{\mathbf{a}}_Z$ [A/m];

7.2) Um filamento de corrente muito longo está situado sobre a reta x = 5 e z = 0, possuindo uma corrente de 20π [A], orientada no sentido positivo do eixo y. Determinar o campo magnético $\vec{\mathbf{H}}$ (na forma vetorial) nos seguintes pontos:

a) O(0,0,0); b) P(0,0,5); c) Q(5,0,5); d) S(5,5,5).

Respostas: a) $\vec{\mathbf{H}}_O = 2\vec{\mathbf{a}}_Z$ [A/m];b) $\vec{\mathbf{H}}_P = \vec{\mathbf{a}}_X + \vec{\mathbf{a}}_Z$ [A/m];

c) $\vec{\mathbf{H}}_Q = 2\vec{\mathbf{a}}_X$ [A/m];d) $\vec{\mathbf{H}}_S = 2\vec{\mathbf{a}}_X$ [A/m].

7.3) Uma corrente filamentar I, no vácuo, sobre o eixo z, flui no sentido positivo do eixo. Seja um percurso retangular ABCDA sobre o plano z = 0, com vértices nos pontos A(a,a,0), B(-a,a,0), C(-a,-a,0) e D(a,-a,0). Determinar, para este percurso e utilizando o menor caminho, os seguintes valores:

a) V_{mAB} ; b) V_{mBC} ; c) V_{mCD} ; d) V_{mDA} ;

e) $V_{mAB} + V_{mBC} + V_{mCD} + V_{mDA} \rightarrow$ Concluir a respeito do valor obtido;

f) V_{mAC} por 2 caminhos (via B e depois via D) $\rightarrow$ Comparar os valores e concluir a respeito.

Respostas: a) $V_{mAB} = \frac{I}{4}$;b) $V_{mBC} = \frac{I}{4}$; c) $V_{mCD} = \frac{I}{4}$; d) $V_{mDA} = \frac{I}{4}$;

e) $V_{mAB} + V_{mBC} + V_{mCD} + V_{mDA} = I$ = corrente enlaçada;

f) $V_{mAC_1} = \frac{I}{2} \neq V_{mAC_2} = -\frac{I}{2} \Rightarrow$ Logo o sistema não é conservativo.

7.4) Encontre a indução magnética no centro de um triângulo equilátero de lado a, conduzindo uma corrente I.

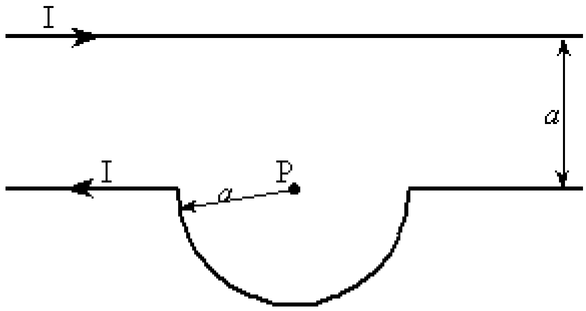
Resposta: $B = \frac{9I\mu_o}{2\pi a}$.

7.5) Um toróide no espaço livre com seção transversal retangular é formado pela interseção dos planos z = 0 e z = 3 [cm] e os cilindros ρ = 5 [cm] e ρ = 7,5 [cm]. Uma densidade superficial de corrente flui na superfície interna do toróide sendo dada por $\vec{\mathbf{K}}_{int} = 300\vec{\mathbf{a}}_z$ [A/m]. Determinar:

a) O valor total da corrente I_{total} na superfície interna do toróide;
b) As densidades superficiais de corrente (forma vetorial) nas outras 3 superfícies do toróide, identificando-as por $\vec{\mathbf{K}}_{ext}$, $\vec{\mathbf{K}}_{topo}$ e $\vec{\mathbf{K}}_{base}$;
c) O campo magnético $\vec{\mathbf{H}}$ dentro do toróide;
d) O fluxo magnético total Φ_{total} que circula dentro do toróide.

Respostas: a) $I_{total} = 30\pi$ [A];b) $\vec{\mathbf{K}}_{ext} = -200\vec{\mathbf{a}}_z$ [A/m], $\vec{\mathbf{K}}_{topo} = \frac{15}{\rho}\vec{\mathbf{a}}_\rho$ [A/m], $\vec{\mathbf{K}}_{base} = -\frac{15}{\rho}\vec{\mathbf{a}}_\rho$ [A/m]; c) $\vec{\mathbf{H}} = \frac{15}{\rho}\vec{\mathbf{a}}_\phi$ [A/m]; d) $\Phi_{total} = 0,23$ [μWb].

7.6) Calcular o campo magnético $\vec{\mathbf{H}}$ no ponto P da figura, admitindo que os fios são muito longos.



Resposta: $\vec{\mathbf{H}} = \frac{I}{2a}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)\vec{\mathbf{a}}_z$

7.7) Dado $\vec{\mathbf{H}} = yz^2\vec{\mathbf{a}}_x + 2(x+1)y^2z\vec{\mathbf{a}}_y - (x+1)z^2\vec{\mathbf{a}}_z$

a) Determinar $\oint \vec{\mathbf{H}} \bullet \vec{\mathbf{dL}}$ ao longo do contorno quadrado indo de P(0, 2, 0) a A(0, 2+*b*, 0) a B(0, 2+*b*, *b*) a C(0, 2, *b*) a P(0, 2, 0);
b) Determinar $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{H}}$;
c) Mostrar que $\left|\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{H}}\right)_x\right| = \lim_{\Delta S\to 0}\left[\frac{\oint \vec{\mathbf{H}}\bullet\vec{\mathbf{dL}}}{\Delta S}\right]$ em P.

Respostas:a) $\oint \vec{\mathbf{H}}\bullet\vec{\mathbf{dL}} = -8b^2 - 4b^3 - \frac{2b^4}{3}$;

b) $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{H}} = (-2(x+1)y^2)\vec{\mathbf{a}}_x + (2yz+z^2)\vec{\mathbf{a}}_y + (2y^2z - z^2)\vec{\mathbf{a}}_z$;

c) Demonstração (Notar que ΔS = b^2 e que em P, x = 0, y = 2, z = 0).

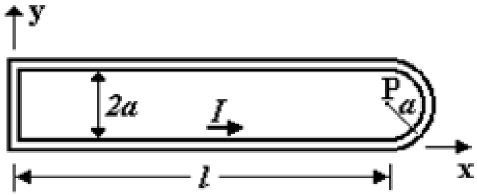
7.8) Seja uma espira circular de raio ρ = *a*, situada no plano *z* = 0, na qual circula uma corrente *I* no sentido anti-horário. Determinar no ponto P(0,0,*h*):

a) O campo magnético $\vec{H}$;
b) O potencial magnético V_m, supondo a referência de potencial zero no infinito.

Respostas: a) $\vec{H} = \frac{I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}\vec{a}_z = \frac{I a^2}{2(h^2+a^2)^{3/2}}\vec{a}_z$;b) $V_m = \frac{I}{2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right)$

7.9) Determinar no ponto P da figura abaixo, as contribuições para a intensidade do campo magnético $\vec{H}$ causadas por I (sentido anti-horário) para:

a) A seção semi-circular de raio *a*;
b) Os 2 condutores horizontais de comprimento *l*,
c) O condutor vertical de comprimento 2*a*,
d) Repetir o item (b) supondo *l* >> *a*,
e) Repetir o item (c) supondo *l* >> *a*.

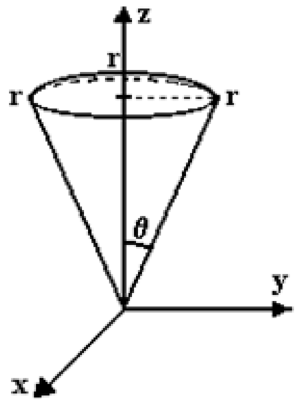


Respostas: a) $\vec{H} = \dfrac{I}{4a}\vec{a}_z$;b) $\vec{H} = \dfrac{Il}{2\pi a\sqrt{l^2 + a^2}}\vec{a}_z$; c) $\vec{H} = \dfrac{Ia}{2\pi l\sqrt{l^2 + a^2}}\vec{a}_z$;

d) $\vec{H} = \dfrac{I}{2\pi a}\vec{a}_z$;e) $\vec{H} = \dfrac{Ia}{2\pi l^2}\vec{a}_z$

7.10) Dado $\vec{H} = \dfrac{10r^2}{sen\theta}\vec{a}_\theta + 180r\,cos\theta\,\vec{a}_\phi$, no espaço livre, determinar:

a) $\vec{\nabla}\times\vec{H}$;
b) a corrente que sai da superfície cônica $\theta = 30^o$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$, usando um dos lados do teorema de Stokes;
c) usando o outro lado do teorema de Stokes, verificar o resultado anterior.



Respostas: a) $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \dfrac{180cos2\theta}{sen\theta}\vec{a}_r - 360cos\theta\,\vec{a}_\theta + \dfrac{30r}{sen\theta}\vec{a}_\phi$;

b) 1º lado: $\int_S \vec{\nabla}\times\vec{H}\bullet d\vec{S} = I = -360\sqrt{3}\pi = -1959$ A;

c) 2º lado: $\oint \vec{H}\bullet d\vec{L} = I = -360\sqrt{3}\pi = -1959$ A

7.11) Três superfícies infinitas de corrente localizam-se, no vácuo, da seguinte maneira: $100\bar{a}_x$ A/m em $z = 0$, $-50\bar{a}_x$ A/m em $z = 4$ m, e $-50\bar{a}_x$ A/m em $z = -4$ m.

a) Sendo $V_m = 0$ em P(1, 2, 3), ache V_m em Q(1,5; 2,6; 3,7).
b) Sendo $\bar{A} = 0$ em P(1, 2, 3), ache $\bar{A}$ em Q(1,5; 2,6; 3,7).
<u>Sugestão</u>: Use a componente apropriada de $\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$ e o seu conhecimento acerca da direção do vetor $\bar{A}$.

Respostas: a) $V_m = 50y - 100 \Rightarrow V_{mQ} = 30$ A;

b) $\bar{A} = (-50\mu_o z + 150\mu_o)\bar{a}_x \Rightarrow \bar{A}_Q = -44{,}0\bar{a}_x$ μWb/m

7.12) Demonstre que o potencial vetor magnético para dois fios compridos, retos e paralelos, que conduzem a mesma corrente I, em sentidos opostos, é: $\vec{\mathbf{A}} = \dfrac{\mu_o I}{2\pi}\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)\vec{\mathbf{a}}_L$, onde r_2 e r_1 são as distâncias dos fios ao ponto desejado e $\vec{\mathbf{a}}_L$ é o vetor unitário paralelo aos fios.

Resposta: Demonstração.

Anotações