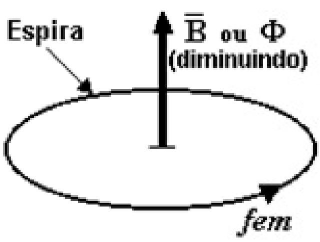
CapítuloIX

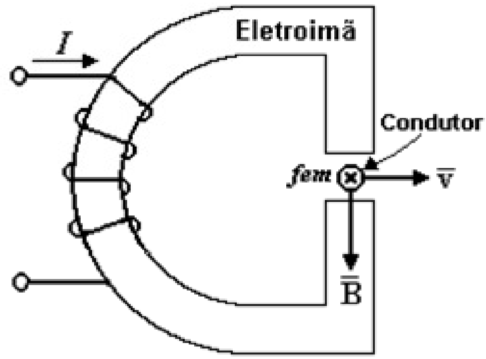
CAMPOS VARIÁVEIS NO TEMPO E AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

9.1 – A LEI DE FARADAY

Haverá uma força eletromotriz, *fem*, ou tensão induzida, em qualquer uma das seguintes situações:

1. Um caminho fechado estacionário é enlaçado por um fluxo magnético variável no tempo;
2. Um caminho (fechado) se movimenta com relação a um fluxo magnético estacionário;
3. Um caminho (fechado) móvel enlaçado por um fluxo magnético variável no tempo (1 + 2).





A ***lei de Faraday*** quantifica esta *fem* estabelecendo que ela é proporcional a taxa de variação de fluxo que atravessa o caminho fechado (que não precisa ser condutor), sendo expressa por:

$$\boxed{fem = -\frac{d\Phi}{dt}} \quad [V] \quad \text{(para um caminho fechado)} \qquad (01)$$

ou,

$$\boxed{fem = -N\frac{d\Phi}{dt}} \quad [V] \quad \text{(para um caminho fechado com N espiras - bobina)} \qquad (02)$$

<u>**Nota:**</u> O sinal menos das equações acima provém da ***lei de Lenz*** a qual indica que a *fem* está numa direção (ou possui uma polaridade) tal a produzir um fluxo magnético de <u>oposição à variação</u> do fluxo original.

A *fem induzida* é definida como uma tensão induzida num caminho fechado, sendo expressa por:

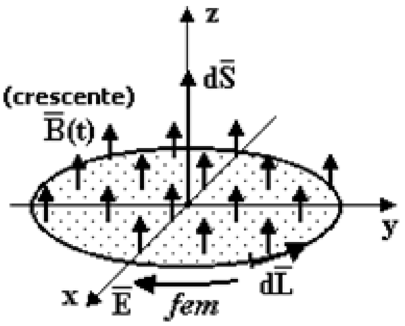
$$fem = \oint \vec{E} \bullet d\vec{L} \qquad (03)$$

Substituindo $\Phi = \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S}$ em (01) e igualando com (03):

$$\boxed{fem = \oint_C \vec{E} \bullet d\vec{L} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \bullet d\vec{S}} \qquad (04)$$

onde

C = contorno da área S ao redor do qual a integral de linha é calculada,
S = área limitada pelo contorno C onde a integral de superfície é calculada.
(Nota: a área S não precisa ser plana)



Nota: Na equação (04), o sentido de $d\vec{L}$ deve sempre concordar com o sentido de $d\vec{S}$ de acordo com a regra da mão direita ou do saca-rolhas (ver figura ao lado). Os dedos indicam a direção do caminho fechado, ou de $d\vec{L}$, e o polegar indica a direção de $d\vec{S}$. Adota-se para a *fem* o mesmo sentido de $d\vec{L}$. Se o valor da *fem* for negativo, então seu sentido real(ver figura) é o contrário daquele de $d\vec{L}$.

Vamos agora separar a análise da *fem* em 3 partes, calculando:

(1) a contribuição para a *fem* total por um campo magnético que varia dentro de um caminho fechado estacionário - *fem* variacional ou de transformador,

(2) a contribuição para a *fem* total por um caminho ou contorno que se move sob a ação de um campo magnético constante - *fem* de velocidade ou de gerador,

(3) a *fem* total, correspondendo a soma de (1) e (2).

9.1.1 – Fem devido a um campo que varia dentro de um caminho fechado estacionário

Passando a derivada para dentro da integral de superfície do lado direito de (04), obtemos:

$$\boxed{fem = \oint \vec{E} \bullet d\vec{L} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S}} \quad \text{(Equação de Maxwell, forma integral)} \qquad (05)$$

Usando o teorema de Stokes e transformando a integral de linha fechada em integral da superfície envolvida pela linha,

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \bullet d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

Igualando os integrandos, chegamos a:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{(Equação de Maxwell, forma pontual)} \qquad (06)$$

Notas:

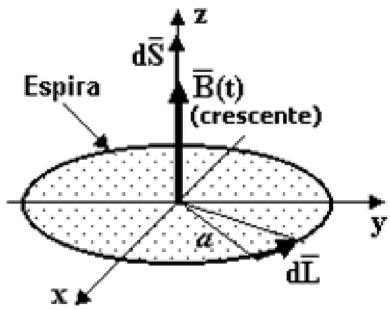
(a) As equações (05) e (06), chamadas de equações de Maxwell nas formas integral e pontual, respectivamente, são obtidas da lei de Faraday aplicada a um caminho ou circuito fechado.

(b) Se $\vec{B}$ não é função do tempo, as equações (05) e (06) reduzem às equações eletrostáticas:

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{L} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Exemplo: Seja um campo magnético simples o qual aumenta exponencialmente com o tempo dentro de uma região cilíndrica ρ<*b* e expresso por $\vec{B} = B_o e^{kt} \vec{a}_z$, sendo B_o uma constante. Determinar a *fem* e o campo elétrico $\vec{E}$ induzidos num contorno circular (espira) de raio ρ = *a*, *a*<*b* (ver figura abaixo), situado no plano z = 0.



Solução: Tomando $\vec{E} = E_\phi \vec{a}_\phi$ (adotando o sentido anti-horário) na espira, e aplicando a equação (05) obtemos:

$$fem = 2\pi a E_\phi = -kB_o e^{kt} \pi a^2$$

Logo, obtemos na espira de raio $\rho = a$

$$fem = -kB_o e^{kt} \pi a^2 \qquad \text{(sentido real é horário)}$$

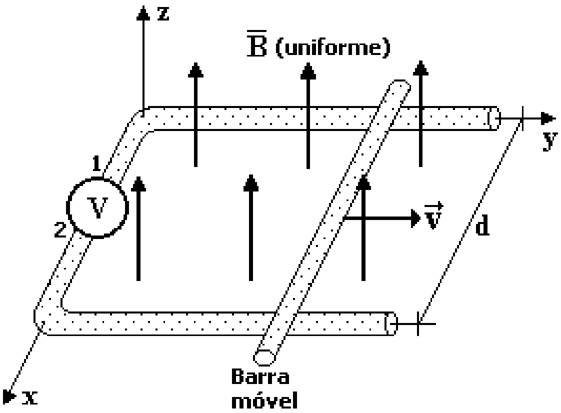
$$E_\phi = -\frac{1}{2} kB_o e^{kt} a \qquad \text{(sentido real é horário)}$$

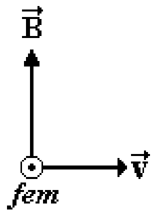
Genericamente, as expressões de *fem* e $\vec{E}$ para qualquer ρ, $\rho<b$, são dadas por:

$$fem = -kB_o e^{kt} \pi \rho^2 \qquad \vec{E} = -\frac{1}{2} kB_o e^{kt} \rho \vec{a}_\phi$$

Nota: Refaça este exercício usando a equação de Maxwell na forma pontual (06).

9.1.2 – Fem devido a um campo estacionário e um caminho móvel





O fluxo que atravessa a superfície contida pelo caminho fechado em um tempo t é:

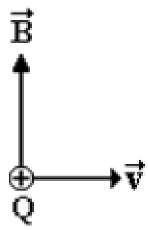
$$\Phi = BS = Byd$$

A partir da *lei de Faraday* (*fem* adotada no sentido anti-horário), obtemos :

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dy}{dt} d \Rightarrow \boxed{fem = -Bvd} \tag{07}$$

Para uma carga Q movendo-se a uma velocidade $\vec{v}$ em um campo magnético $\vec{B}$, tem-se:

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \frac{\vec{F}}{Q} = \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_m = \vec{v} \times \vec{B}} \tag{08}$$



onde $\vec{E}_m$ representa um campo elétrico de movimento (que gera *fem*)

Assim, temos:

$$\boxed{fem = \oint \vec{E}_m \bullet d\vec{L} = \oint \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \bullet d\vec{L}} \tag{09}$$

No caso do condutor que se move sob a ação do campo magnético (figura acima), obtemos:

$$fem = \oint \vec{E}_m \bullet d\vec{L} = \oint \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \bullet \left(-dx\,\vec{a}_x\right) = -\int_0^d vB\,dx \Rightarrow \boxed{fem = -Bvd} \quad \text{(= equação (07) acima)}$$

9.1.3 – Fem total devido a um campo variável e um caminho móvel

Se a densidade de fluxo magnético está também variando com o tempo, então nós devemos incluir ambas as contribuições, a *fem* de transformador (05) e a *fem* de movimento (09), resultando em:

$$\boxed{fem = \oint \vec{E} \bullet d\vec{L} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S} + \oint \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \bullet d\vec{L}} \qquad (10)$$

Nota: Tanto a expressão (10) acima pode ser usada em qualquer situação para calcular a *fem*, como também pode-se usar a expressão (01). Se o circuito envolver N espiras, sob a ação do fluxo Φ, o valor final da *fem* deve ser multiplicado por N.

9.2 – CORRENTE DE DESLOCAMENTO

A forma pontual da lei circuital de Ampère,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \qquad (11)$$

apesar de adequada para aplicação em situações com campos magnéticos estacionários *é inadequada para aplicação em condições variáveis no tempo*.

Demonstração da validade desta afirmativa:

Tomando a divergência de ambos os lados de (11):

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \bullet \vec{J}$$

Mas sabemos que $\text{div}(\text{rot}\vec{H}) = 0$, resultando:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{J} = 0 \qquad (12)$$

Porém, a equação da continuidade (seção 5.2) afirma que:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \qquad (13)$$

Para que haja igualdade entre (12) e (13) é necessário que:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

o qual representa uma limitação irreal para campos variáveis no tempo.

Tornando a expressão (11) compatível para qualquer situação:

Adicionando um termo desconhecido $\vec{G}$ a (11), temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{G} \qquad (14)$$

Tomando novamente a divergência de ambos os lados:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \bullet \vec{J} + \vec{\nabla} \bullet \vec{G}$$

Fazendo $\text{div}(\text{rot}\vec{H}) = 0$, resulta em:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{J} + \vec{\nabla} \bullet \vec{G} = 0$$

Da equação da continuidade (13),

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{G} = -\left(-\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\right) = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

De $\rho_v = \vec{\nabla} \bullet \vec{D}$, temos:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{G} = \frac{\partial\left(\vec{\nabla} \bullet \vec{D}\right)}{\partial t} = \vec{\nabla} \bullet \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Daí, chegamos a:

$$\vec{G} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (15)$$

Substituindo (15) em (14), chegamos finalmente a:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \qquad \text{(Lei circuital de Ampère, forma pontual)} \qquad (16)$$

Fazendo

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (17)$$

sendo $\vec{J}_d$ chamada de densidade de corrente de deslocamento.

Substituindo (17) em (16):

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_d \qquad (18)$$

Semelhantemente a corrente de condução, pode-se determinar a corrente de deslocamento por:

$$I_d = \int_S \vec{J}_d \bullet d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{S} \qquad (19)$$

Integrando (16) sobre uma superfície S, para obtenção da forma integral da lei circuital de Ampère:

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{H} \bullet d\vec{S} = \int_S \vec{J} \bullet d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

Aplicando o teorema de Stokes ao primeiro membro da expressão acima, chegamos a:

$$\boxed{\oint \vec{H} \bullet d\vec{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{S}} \qquad \text{(Lei circuital de Ampère, forma integral)} \qquad (20)$$

9.3 – EQUAÇÕES DE MAXWELL EM FORMA PONTUAL OU DIFERENCIAL

As quatro equações básicas de Maxwell são as seguintes:

(1) $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (Lei de Faraday, forma pontual) (21)

(2) $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{J}+\vec{J}_d$ (Lei de Ampère, forma pontual) (22)

(3) $\vec{\nabla}\bullet\vec{D}=\rho_v$ (Lei de Gauss do cpo. elétrico, forma pontual) (23)

(4) $\vec{\nabla}\bullet\vec{B}=0$ (Lei de Gauss do cpo. magnético, forma pontual) (24)

Equações auxiliares:

(5) $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ (25)

(6) $\vec{B}=\mu\vec{H}$ (26)

(7) $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ (27)

(8) $\vec{J}=\rho\vec{v}$ (28)

Equações envolvendo campos de polarização e magnetização:

(9) $\vec{D}=\varepsilon_o\vec{E}+\vec{P}$ (29)

(10) $\vec{B}=\mu_o\left(\vec{H}+\vec{M}\right)$ (30)

Para materiais lineares:

(11) $\vec{P}=\chi_e\varepsilon_o\vec{E}$ (31)

(12) $\vec{M}=\chi_m\vec{H}$ (32)

Equação da força de Lorentz

(13) $\vec{f}=\vec{f}_E+\vec{f}_M=\rho_v\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$ (força por unidade de volume) (32)

9.4 – EQUAÇÕES DE MAXWELL EM FORMA INTEGRAL

As quatro equações básicas de Maxwell são as seguintes:

(1) $\oint\vec{E}\bullet d\vec{L}=-\int_S\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{S}$ (Lei de Faraday, forma integral) (33)

(2) $\oint\vec{H}\bullet d\vec{L}=I+\int_S\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{S}$ (Lei de Ampère, forma integral) (34)

(3) $\oint_S\vec{D}\bullet d\vec{S}=\int_{vol}\rho_v dv$ (Lei de Gauss do cpo. elétrico, forma integral) (35)

(4) $\oint_S\vec{B}\bullet d\vec{S}=0$ (Lei de Gauss do cpo. magnético, forma integral) (36)

Condições de contorno entre 2 meios ou regiões quaisquer:

Componentes tangenciais:

(5) $E_{t1} = E_{t2}$ (37)

(6) $H_{t1} - H_{t2} = k$ *(Se k = 0, então: $H_{t1} = H_{t2}$)* (38)

Componentes normais:

(7) $D_{n1} - D_{n2} = \rho_S$ *(Se $\rho_S = 0$, então: $D_{n1} = D_{n2}$)* (39)

(8) $B_{n1} = B_{n2}$ (40)

Condições de contorno entre 2 regiões se a região 2 for condutora perfeita ($\sigma = \infty$):

Componentes tangenciais:

(9) $E_{t1} = 0$ (41)

(10) $H_{t1} = k$ (42)

Componentes normais:

(11) $D_{n1} = \rho_S$ (43)

(12) $B_{n1} = 0$ (44)

9.5 – EXEMPLOS DE CÁLCULO DA INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

Como visto na seção 9.1, quando um circuito se movimenta ($\overline{v} \neq 0$) e $\overline{B}$ varia com o tempo ($\partial\overline{B}/\partial t \neq 0$), a *fem* induzida total (representada nas figuras pelo símbolo ν) no circuito é dada por:

$$\boxed{fem = fem_m + fem_t = \oint \left(\overline{v} \times \overline{B}\right) \bullet d\overline{\ell} - \int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \bullet d\overline{S}} \qquad \text{(caso geral)} \qquad (45)$$

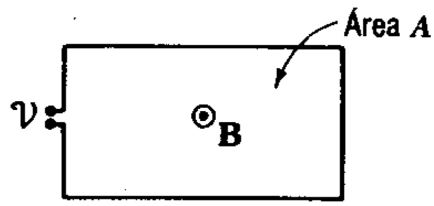
sendo fem_m e fem_t as *fem*(s) de movimento e de transformador, respectivamente.

A equação (45) será usada nos exemplos a seguir que apresentam grau de dificuldade crescente.

<u>Exemplo 1</u>: *Espira – <u>sem</u> movimento e <u>com</u> variação de $\overline{B}$ (ver figura).*

Seja $B = B_0 \cos \omega t$ na espira fixa de área A da figura.
Fazendo $\overline{v} = 0$ em (1), obtemos:

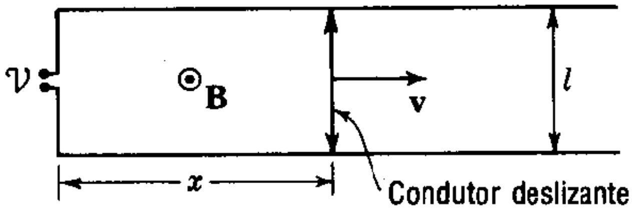
$$\boxed{fem = fem_t = -\int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \bullet d\overline{S} = A\omega B_0 \,\text{sen}\, \omega t} \quad [V]$$



(**<u>Nota:</u>** $d\overline{S}$ tomado no mesmo sentido de $\overline{B}$)

Exemplo 2: ***Espira – com movimento e sem variação de*** $\overline{B}$ ***(ver figura).***

Seja a espira formada com o condutor deslizante conforme figura.



Se $\overline{B} = \text{constante} \Rightarrow \dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0$.

Substituindo em (45), obtemos:

$$\boxed{fem = fem_m = \oint \left(\overline{v} \times \overline{B}\right) \bullet d\overline{\ell} = -vB\ell}\ [V]$$

(Nota: $d\overline{\ell}$ tomado de acordo com $d\overline{S}$ ou $\overline{B}$)

Exemplo 3:***Espira– com movimento e com variação de*** $\overline{B}$ ***(ver figura anterior).***

Na figura anterior, faça $B = B_0 \cos \omega t$.

Assim $\overline{v} \neq 0$ e $\partial \overline{B}/\partial t \neq 0$ na equação (45) acima.

Cálculo da fem_m devido a velocidade do condutor (*fem* de movimento) – 1ª parcela de (45):

$$fem_m = \oint \left(\overline{v} \times \overline{B}\right) \bullet d\overline{\ell} = -vB\ell = -v\ell B_0 \cos \omega t$$ (Nota: $d\overline{\ell}$ de acordo com $d\overline{S}$ ou $\overline{B}$)

Cálculo da fem_t devido a variação temporal de $\overline{B}$ (*fem* de transformador) – 2ª parcela de (45):

$$\boxed{fem_t = -\int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \bullet d\overline{S} = A\omega B_0 \,\text{sen}\, \omega t = \omega \ell x B_0 \,\text{sen}\, \omega t}$$

Cálculo da *fem* total:

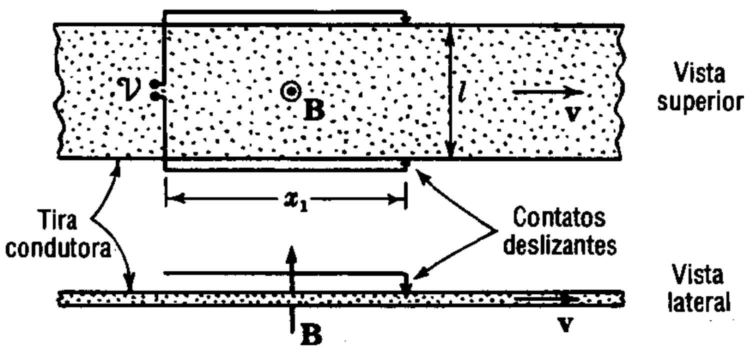
$$fem = fem_m + fem_t = -vB_0\ell \cos \omega t + \omega x B_0 \ell \,\text{sen}\, \omega t$$

$$\boxed{fem = B_0 \ell \sqrt{v^2 + (\omega x)^2}\ \text{sen}(\omega t + \delta)}$$

onde $\delta = \tan^{-1}(-v/\omega x)$ e x = comprimento instantâneo da espira

Exemplo 4: ***Tira condutora móvel – sem variação de*** $\overline{B}$ ***(*** $\partial \overline{B}/\partial t = 0$ ***)*** ***(ver figura)***.

Seja a espira fixa formada com a tira deslizante da figura.



Se $\overline{B} = \text{constante} \Rightarrow \dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0$

Substituindo em (45), obtemos:

$$\boxed{fem_m = \oint \left(\overline{v} \times \overline{B}\right) \bullet d\overline{\ell} = -vB\ell}$$

(Nota: $d\overline{\ell}$ tomado de acordo com $d\overline{S}$ ou $\overline{B}$)(Aplicação: Gerador de disco de Faraday)

<u>Exemplo 5</u>: *Tira móvel – <u>com</u> variação de* $\overline{\mathrm{B}}$.

Na figura anterior faça $\mathrm{B} = \mathrm{B}_0 \cos \omega t$

Cálculo da fem_m devido ao movimento da tira – 1ª parcela de (45):

$$fem_m = \oint \left(\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{B}}\right) \bullet d\overline{\ell} = -\mathrm{vB}\ell = -\mathrm{vB}_0 \ell \cos \omega t$$

Cálculo da fem_t devido a variação temporal de $\overline{\mathrm{B}}$ – 2ª parcela de (45):

$$fem_t = -\int_S \frac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} \bullet d\overline{\mathrm{S}} = \mathrm{B}_0 \omega \operatorname{sen} \omega t \; \mathrm{A} = \omega x_1 \mathrm{B}_0 \ell \operatorname{sen} \omega t$$

Cálculo da *fem* total:

$$fem = fem_m + fem_t = -\mathrm{vB}_0 \ell \cos \omega t + \omega x_1 \mathrm{B}_0 \ell \operatorname{sen} \omega t$$

$$\boxed{fem = \mathrm{B}_0 \ell \sqrt{\mathrm{v}^2 + (\omega x_1)^2} \operatorname{sen}(\omega t + \delta)}$$

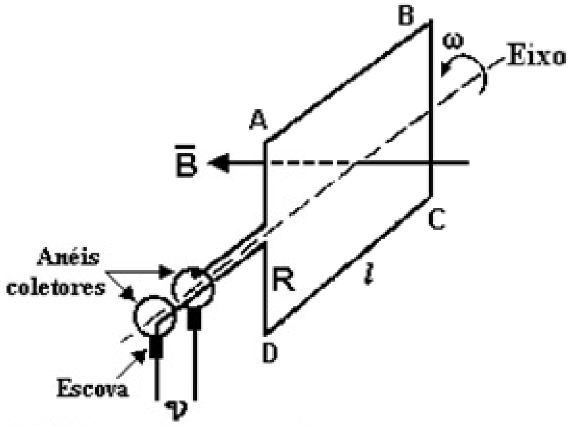
onde $\delta = \tan^{-1}\left(-\mathrm{v}/(\omega x_1)\right)$

<u>Exemplo 6</u>: *Espira rotativa – <u>sem</u> variação de* $\overline{\mathrm{B}}$ *(gerador CA) – (ver figura).*

Seja a figura representativa de um gerador CA elementar (com uma única espira), onde temos:

(a) vista em perspectiva, com a espira em posição vertical,

(b) vista da seção transversal perpendicular ao eixo, com a espira numa posição qualquer.



(a) Vista em perspectiva, no instante t = 0

Seja θ o ângulo entre $\overline{\mathrm{v}}$ e $\overline{\mathrm{B}}$ medido no sentido anti-horário, sendo θ = 0 para a espira na posição vertical (considerar como instante t = 0).

Se $\overline{\mathrm{B}} = \text{constante} \Rightarrow \dfrac{\partial \overline{\mathrm{B}}}{\partial t} = 0$

De (45) e $d\overline{\ell}$ tomado de acordo com $d\overline{\mathrm{S}}$ (regra do saca-rolhas):

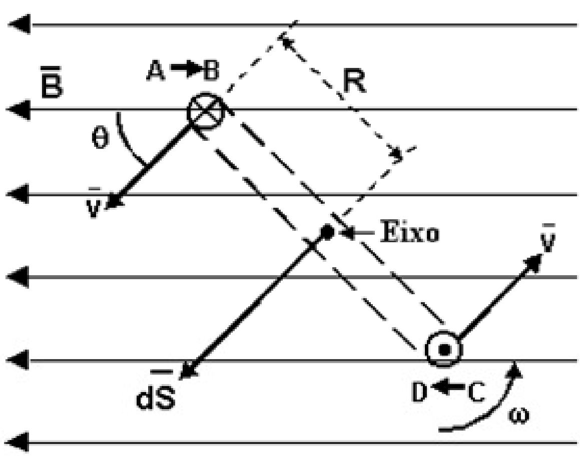
$$fem_m = \oint \left(\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{B}}\right) \bullet d\overline{\ell} = 2\mathrm{vB}\ell \operatorname{sen} \theta$$

Como θ = ωt e v = ωR

$$fem_m = 2\omega \mathrm{R}\ell \mathrm{B} \operatorname{sen} \omega t$$

Como $2\mathrm{R}\ell$ = A = área da espira

$$\boxed{fem_m = \omega \mathrm{BA} \operatorname{sen} \omega t}$$



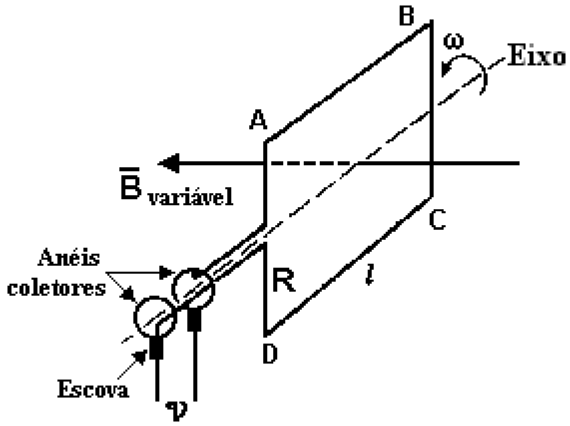
(b) Vista frontal no instante t (θ = ωt)

Exemplo 7: ***Espira rotativa – com variação de $\overline{B}$ (ver figura).***

Seja $B = B_0 \operatorname{sen} \omega t$ na figura (sendo a frequência ω de oscilação deste campo igual a velocidade angular ω de rotação da espira).

Quando $t = 0 \Rightarrow \overline{B} = 0$ e $\theta = 0$ (espira na posição vertical)

De (45) e $d\overline{\ell}$ consistente com $d\overline{S}$ (regra da mão direita ou do saca-rolhas), obtemos:



(a) Vista em perspectiva, no instante t = 0

$$fem_m = 2\omega R\,\ell\,B_0 \operatorname{sen}^2 \omega t = \omega R\,\ell\,B_0 (1 - \cos 2\omega t)$$

$$fem_t = -2\omega R\,\ell\,B_0 \cos^2 \omega t = -\omega R\,\ell\,B_0 (1 + \cos 2\omega t)$$

$$\boxed{fem = fem_m + fem_t = -2\omega R\,\ell\,B_0 \cos 2\omega t}$$

Notas sobre o exemplo 7:

a) A componente CC (estacionária ou independente do tempo) da fem, existente tanto em fem_m como em fem_t, desapareceu na fem total (ν);

b) A fem total é função do dobro da freqüência angular ω (expressa em rad/s) que representa tanto a freqüência (ω) de rotação da espira como também a freqüência (ω) de variação temporal do campo magnético.

Exemplo 8: ***Espira retangular em três situações distintas***

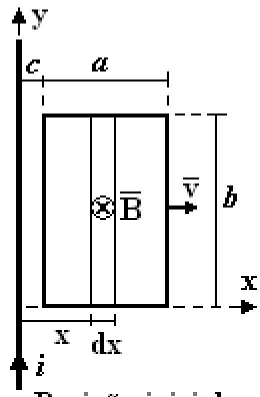
Seja a configuração, no vácuo, constituída por uma espira retangular próxima a um condutor retilíneo infinito no eixo y com corrente no sentido $\vec{a}_y$.

Determinar a ***fem*** induzida na espira considerando as 3 situações seguintes:

(a) A corrente estacionária ($i = I_0$) e a espira móvel ($\vec{v} = v\vec{a}_x$);

(b) A corrente variável ($i = i(t)$) e a espira estacionária ($\vec{v} = 0$);

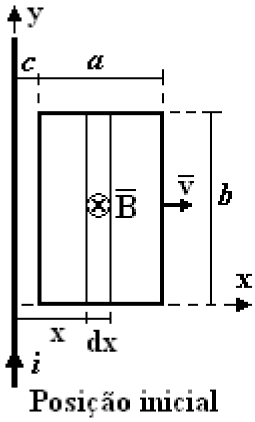
(c) A corrente variável ($i = i(t)$) e a espira móvel ($\vec{v} = v\vec{a}_x$).



Posição inicial

Atenção: Tomar $d\vec{S}$ no mesmo sentido de $\vec{B}$. Assim, $d\vec{L}$ deve ser tomado no sentido horário na espira quadrada (regra do saca-rolhas).

Modo 1: Cálculo da *fem* por $fem = \oint\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\bullet d\vec{L} - \int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{S}$



(a) A corrente estacionária produz um campo magnético também estacionário expresso por $\vec{B} = \mu_0\vec{H} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}(-\vec{a}_z) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x}(-\vec{a}_z)$
que depende da coordenada x

Neste caso: $fem = fem_m = \oint\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\bullet d\vec{L}$ com $d\vec{L}$ obtido apenas nos 2 lados paralelos ao condutor retilíneo

$$fem = \int_{y=0}^{b} v\vec{a}_x \times \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(c+vt)}(-\vec{a}_z)\bullet dy(+\vec{a}_y) + \int_{y=0}^{b} v\vec{a}_x \times \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(c+a+vt)}(-\vec{a}_z)\bullet dy(-\vec{a}_y)$$

$$fem = \frac{\mu_0 I_0 vb}{2\pi(c+vt)} - \frac{\mu_0 I_0 vb}{2\pi(c+a+vt)} = \frac{\mu_0 I_0 vb}{2\pi}\left(\frac{(c+a+vt)-(c+vt)}{(c+vt)(c+a+vt)}\right)$$

Donde obtemos: $\boxed{fem = \frac{\mu_0 v}{2\pi}\frac{ab}{(c+vt)(c+a+vt)}I_0}$

(b) A corrente variável produz um campo magnético também variável expresso por
$\vec{B} = \mu_0\vec{H} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}(-\vec{a}_z) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi x}(-\vec{a}_z)$ que depende da coordenada x e do tempo t

Neste caso: $fem = fem_t = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{S}$ sendo $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2\pi x}\frac{di}{dt}(-\vec{a}_z)$ e $d\vec{S} = bdx(-\vec{a}_z)$

$$fem = -\int_{x=c}^{c+a}\left(\frac{\mu_0}{2\pi x}\frac{di}{dt}\right)(-\vec{a}_z)\bullet bdx(-\vec{a}_z) = -\frac{\mu_0 b}{2\pi}\frac{di}{dt}\int_{x=c}^{c+a}\frac{dx}{x}$$

Donde obtemos: $\boxed{fem = -\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{c+a}{c}\frac{di}{dt}}$

(c) Neste caso tem-se o campo variável e o movimento da espira retangular, resultando em:

$$fem = \oint\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\bullet d\vec{L} - \int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{S} = fem_m + fem_t$$

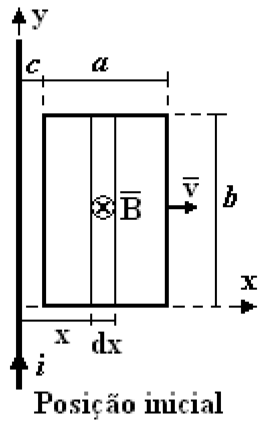
Substitui $i = I_0$ por $i = i(t)$ em (a): $fem_m = \frac{\mu_0 v}{2\pi}\frac{ab}{(c+vt)(c+a+vt)}i(t)$

Acrescenta-se à posição da espira +vt em (b): $fem_t = -\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{c+a+vt}{c+vt}\frac{di}{dt}$

Somando as duas expressões:

$$\boxed{fem = \frac{\mu_0 v}{2\pi}\frac{ab}{(c+vt)(c+a+vt)}i(t) - \frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{c+a+vt}{c+vt}\frac{di}{dt}}$$

Modo 2: Cálculo da *fem* por $fem = -\dfrac{d\Phi}{dt}$



(a) A corrente estacionária produz um campo magnético também estacionário expresso por $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi x}(-\vec{a}_z) = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi x}(-\vec{a}_z)$
que depende da coordenada x.

Assim, $\Phi = \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S} = \int_{x=c+vt}^{c+a+vt} \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi x}(-\vec{a}_z) \bullet bdx(-\vec{a}_z) = \dfrac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \ln \dfrac{c+a+vt}{c+vt}$

Neste caso:

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \frac{\dfrac{v(c+vt) - v(c+a+vt)}{(c+vt)^2}}{\dfrac{c+a+vt}{c+vt}} = -\frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \frac{-va}{(c+vt)^2} \frac{c+vt}{c+a+vt}$$

Donde obtemos: $\boxed{fem = \dfrac{\mu_0 v}{2\pi} \dfrac{ab}{(c+vt)(c+a+vt)} I_0}$

(b) A corrente variável produz um campo magnético também variável expresso por
$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi x}(-\vec{a}_z) = \dfrac{\mu_0 i(t)}{2\pi x}(-\vec{a}_z)$ que depende da coordenada x e do tempo t

Assim, $\Phi = \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S} = \int_{x=c}^{c+a} \dfrac{\mu_0 i(t)}{2\pi x}(-\vec{a}_z) bdx(-\vec{a}_z) = \dfrac{\mu_0 b}{2\pi} i(t) \ln \dfrac{c+a}{c}$

Neste caso: $fem = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \dfrac{c+a}{c} \dfrac{di}{dt}$

Donde obtemos: $\boxed{fem = -\dfrac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \dfrac{c+a}{c} \dfrac{di}{dt}}$

(c) Neste caso tem-se o campo variável $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 i(t)}{2\pi x}(-\vec{a}_z)$ e o movimento da espira retangular,

resultando em: $\Phi = \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S} = \int_{x=c+vt}^{c+a+vt} \dfrac{\mu_0 i(t)}{2\pi x}(-\vec{a}_z) bdx(-\vec{a}_z) = \dfrac{\mu_0 b}{2\pi} i(t) \ln \dfrac{c+a+vt}{c+vt}$

Neste caso: $fem = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{\mu_0 b}{2\pi} \left[i(t) \dfrac{\dfrac{v(c+vt) - v(c+a+vt)}{(c+vt)^2}}{\dfrac{c+a+vt}{c+vt}} + \ln \dfrac{c+a+vt}{c+vt} \dfrac{di}{dt} \right]$

Donde chegamos finalmente a:

$$\boxed{fem = \frac{\mu_0 v}{2\pi} \frac{ab}{(c+vt)(c+a+vt)} i(t) - \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{c+a+vt}{c+vt} \frac{di}{dt}}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

9.1) Partindo das equações de Maxwell no espaço livre (vácuo), determinar:

a) O campo magnético $\vec{\mathbf{H}}$ a partir de $\vec{\mathbf{E}} = A\cos(\omega t - ny)\vec{\mathbf{a}}_x$.

b) O campo elétrico $\vec{\mathbf{E}}$ a partir de $\vec{\mathbf{B}} = y\cos(\omega t - nz)\vec{\mathbf{a}}_y + \mathrm{sen}(\omega t - nz)\vec{\mathbf{a}}_z$

Nota:A, ω e n são constantes e $n = \omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}$.

Respostas: a) $\vec{\mathbf{H}} = -\dfrac{An}{\mu_o\omega}[\cos\ (\omega t - ny)]\ \vec{\mathbf{a}}_z$ ou $\vec{\mathbf{H}} = -\dfrac{\varepsilon_o A\omega}{n}[\cos\ (\omega t - ny)]\vec{\mathbf{a}}_z$

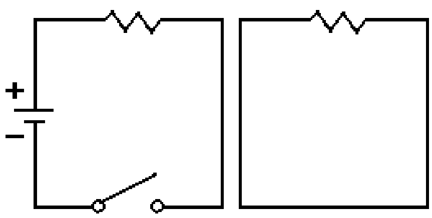
b) $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{ny}{\mu_o\varepsilon_o\omega}[\cos\ (\omega t - nz)]\ \vec{\mathbf{a}}_x$ ou $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{y\omega}{n}[\cos\ (\omega t - nz)]\ \vec{\mathbf{a}}_x$.

9.2) a) Uma espira quadrada de lado $\ell = 1$ [m] tem seu plano normal a um campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$. Determinar a fem máxima induzida na espira nas seguintes condições:

a.1) A espira é mantida estacionária enquanto o campo magnético varia de acordo com $B = B_0\cos 2\pi ft$ sendo $f = 159$ [Hz] e $B_0 = 3$ [mT];

a.2) O campo é mantido fixo em $B = B_0 = 3$ [mT] enquanto a espira gira a uma rotação constante f = 159 [rot./s], cortando o fluxo magnético devido a B.

b) Na figura ao lado, a corrente induzida no circuito II, à direita, será no sentido horário ou anti-horário, quando a chave do circuito I é fechada? Justificar sua resposta com os conceitos já estudados.



Circuito I **Circuito II**

Respostas: a.1) $fem_{max} \approx 3$ [V];

a.2) $fem_{max} \approx 3$ [V];

b) Quando a chave é fechada; uma corrente flui no sentido horário no Circuito I, produzindo um fluxo que entra no laço do Circuito I e sai no laço do Circuito II. Pela Lei de Lenz, a corrente induzida no laço do Circuito II deve produzir um fluxo em oposição ao fluxo indutor, isto é, entrando no laço do Circuito II. Então, a corrente induzida no Circuito II deve fluir no sentido horário.

9.3) a) Junto a uma superfície condutora perfeita temos os campos de uma onda eletromagnética expressos por: E = 8 [V/m] e $H = 2{,}8\cdot 10^{-3}$ [A/m]. Determinar os valores das densidades de carga e de corrente na superfície do condutor.

b) Em uma certa região do espaço livre o campo elétrico vale $\vec{\mathbf{E}}(t) = E_o\,\mathrm{sen}\,\beta z\,\cos\omega t\ \vec{\mathbf{a}}_x$ sendo E_o o valor máximo do campo elétrico, ω a frequência [rad/s], t o tempo [s], β um parâmetro [rad/m] e z a distância [m].

b.1) Determinar 2 expressões para $\vec{\mathbf{H}}(t)$ nesta região partindo das equações de Maxwell;

b.2) A partir destas 2 expressões de $\vec{\mathbf{H}}(t)$ calcular também o valor numérico de ω/β.

Respostas: a) $\rho_S = 8\varepsilon_o$ [C/m^2] e $K = 2{,}8\cdot 10^{-3}$ [A/m];

b.1) $\vec{\mathbf{H}} = -\dfrac{\beta E_o}{\mu_o\omega}\cos\beta z\cdot\mathrm{sen}\,\omega t\ \vec{\mathbf{a}}_y$ e $\vec{\mathbf{H}} = -\dfrac{\varepsilon_o\omega E_o}{\beta}\cos\beta z\cdot\mathrm{sen}\,\omega t\ \vec{\mathbf{a}}_y$;

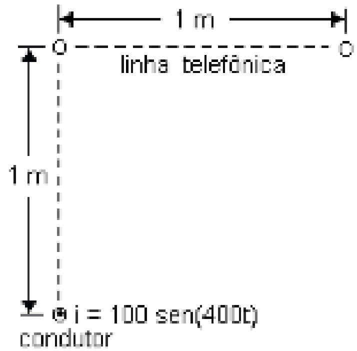
b.2) $\dfrac{\omega}{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}} = c = 3\times 10^8$ [m/s] = velocidade da luz.

9.4) Duas bobinas A e B, de 300 e 600 espiras respectivamente, são colocadas lado a lado. Pela bobina A, faz-se circular uma corrente de 1,5 [A], produzindo um fluxo de 0,12 [mWb] nesta bobina e um fluxo de 0,09 [mWb] na bobina B. Calcular:

a) A auto-indutância da bobina A;
b) A indutância mútua entre as bobinas A e B;
c) O valor médio da fem induzida em B quando se interrompe a corrente de A num tempo de 0,2 [s].

Respostas: a) $L_A = 24$ [mH]; b) M = 36 [mH]; c) $fem_B = 0{,}27$ [V].

9.5) Um condutor retilíneo longo conduz uma corrente expressa por: i = 100 sen(400t), onde t é o tempo.
Determinar a fem (por unidade de comprimento) induzida por este condutor sobre uma linha telefônica próxima, constituída por dois cabos paralelos ao condutor, conforme mostra o esquema.



Resposta: $\dfrac{fem}{\ell} = -2{,}77 \cos 400t \; \left[{}^{mV}\!/_{m}\right]$.

9.6) Uma bobina (primário) de 2000 espiras está enrolada sobre um núcleo de ar de 100 [cm] de comprimento e 2 [cm] de diâmetro. Outra bobina (secundário) está enrolada sobre a bobina primária. Admitindo que a corrente na bobina primária varia de 0 a 10 [A] em 0,01 segundo e que não haja fluxo disperso, determine:

a) O número de espiras que a bobina secundária deve possuir para que a fem induzida nesta seja de 2 [V];
b) O valor médio da fem induzida na bobina secundária, admitindo que ela possui 1100 espiras e o núcleo é de ferro, apresentando uma permeabilidade relativa constante e igual a 115.

Respostas: a) $N_2 = 2533$ espiras; b) $fem_2 = 100$ [V].

9.7) Uma espira quadrada possui os vértices em (0; 0; 0), (0,2; 0; 0), (0,2; 0,2; 0) e (0; 0,2; 0) em t = 0. A espira é um condutor perfeito exceto em um de seus lados, onde existe um pequeno resistor de 100 [Ω] e está se movendo através do campo $\overline{\mathbf{B}} = 5\left[\cos\left(6\cdot 10^8\, t - 2y\right)\right]\vec{\mathbf{a}}_z$ [μT] com uma velocidade constante de $40\,\vec{\mathbf{a}}_x$ [m/s]. Calcular:

a) A tensão induzida (fem) na espira em função do tempo;
b) A potência dissipada (P_R) no resistor em função do tempo;
c) O torque (T) produzido na espira em função do tempo.

Respostas:
a) $fem = -3\cdot 10^8\left[\cos\left(6\cdot 10^8\, t - 0{,}4\right) - \cos\left(6\cdot 10^8\, t\right)\right]$ [μV];
b) $P_R = 142{,}1\cos^2\left(6\cdot 10^8\, t - 78{,}5°\right)$[W]; c) T = 0.

9.8) Num fio infinito, situado sobre o eixo y, circula uma corrente I no sentido $+\vec{\mathbf{a}}_y$. Uma espira quadrada de lado a, situa-se no plano xy, com seu lado paralelo e próximo do fio, mantido inicialmente a uma distância h do fio. Calcular a fem induzida na espira, se:

a) A espira permanece imóvel e a corrente do fio é $I = I_m \text{sen}\omega t$;

b) A espira se afasta do fio com velocidade constante e igual a v e a corrente do fio é $I = I_m = \text{constante}$.

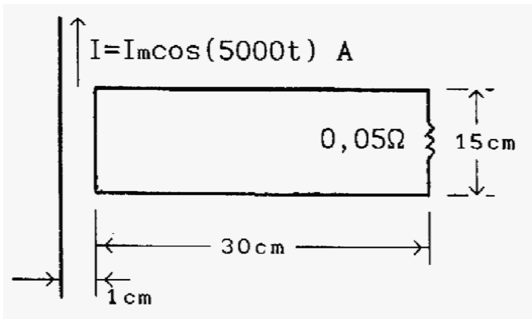
Respostas: a) $\text{fem} = -\dfrac{\mu_o I_m \omega a \cos\omega t}{2\pi} \ln\left(\dfrac{h+a}{h}\right)$;b) $\text{fem} = \dfrac{\mu_o I_m v a^2}{2\pi\, h(h+a)}$.

9.9) Um anel de 3 voltas, com 0,5 [m^2] de área, situado no ar, tem um campo magnético uniforme normal ao plano do anel.

a) Se a densidade de fluxo variar de 5 [mT/s] qual é a fem que aparece nos terminais do anel?

b) Se a fem nos terminais do anel for de 100 [mV], qual será a taxa de variação do campo magnético?

Respostas: a) fem = –7,5 [mV];b) $\dfrac{dB}{dt} = -66{,}6$ [mT/s].



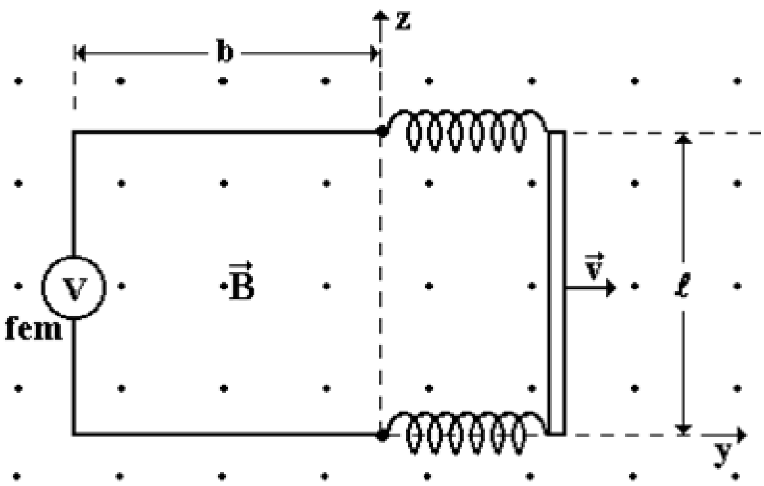
9.10) Calcular o valor máximo da corrente no fio infinito da figura a fim de que o valor eficaz da corrente na resistência de 0,05 [Ω] da espira retangular seja igual a 0,1 [A].

Resposta: $I_m = 13{,}73$ [A].

9.11) A figura abaixo mostra um condutor retilíneo, longo e estreito, de comprimento ℓ, conectado através de fios condutores flexíveis a um voltímetro e executando um movimento harmônico simples no plano yz, sendo submetido a um campo magnético variável dado por $\vec{B} = B_{max} \cos\omega t\ \vec{a}_x$. O eixo z é uma posição de equilíbrio do condutor o qual vibra no plano yz (entre y = –b e y = +b), com uma velocidade dada por $\vec{v} = v_{max} \cos\omega t\ \vec{a}_y$.

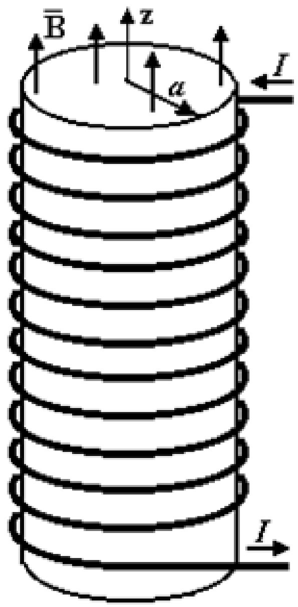
a) Determinar a <u>fem induzida</u> no condutor, desprezando a contribuição dos fios flexíveis.

b) Indicar, na figura, o <u>sentido da corrente resultante</u> no instante $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ segundos.



Respostas: a) $fem = -v_{max} B_{max} \ell cos 2\omega t + \omega B_{max} \ell b sen \omega t$;b) Sentido anti-horário.

9.12) Considere uma região cilíndrica infinitamente longa contendo um campo alternado dado em coordenadas cilíndricas como $\vec{B} = B_o \cos(\omega t + \alpha)\,\vec{a}_z$ em $\rho \leq a$ e $\vec{B} = 0$ em $\rho > a$, sendo B_o e α constantes, e ω a freqüência angular. Isto significa que $\vec{B}$ é espacialmente constante sobre a área do círculo de raio ρ e oscila harmonicamente no tempo, como acontece com um solenóide infinito ideal onde circula corrente alternada. Determinar o campo elétrico induzido $\vec{E}$, devido a este campo magnético alternado $\vec{B}$, na região:



a) $\rho \leq a$, isto é, internamente a região cilíndrica ou ao solenóide infinito ideal de raio a;

b) $\rho > a$, isto é, externamente a região cilíndrica ou ao solenóide infinito ideal de raio a;

Respostas: a) $E_\phi = \frac{1}{2} B_o \omega \rho \,\text{sen}(\omega t + \alpha)$ para $\rho \leq a$;

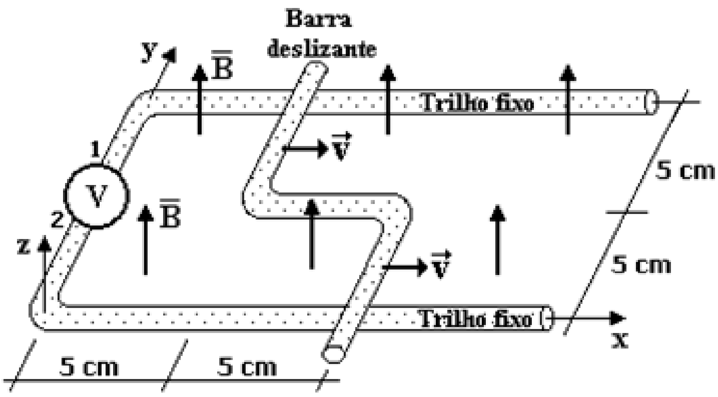
b) $E_\phi = \frac{1}{2} B_o \omega \frac{a^2}{\rho} \,\text{sen}(\omega t + \alpha)$ para $\rho > a$.

9.13) A figura abaixo mostra uma barra condutora (formada por três segmentos) situada sobre dois trilhos condutores paralelos conectados a um voltímetro. Toda a configuração está submetida a uma densidade de fluxo magnético $\vec{B}$ .Calcular a fem induzida em cada uma das seguintes situações:

a) $\vec{B} = 2\vec{a}_z \,\mu T$, $\vec{v} = 6\vec{a}_x$ m/s;

b) $\vec{B} = 2e^{-60t}\,\vec{a}_z \,\mu T$, $\vec{v} = 0$ m/s;

c) $\vec{B} = 2e^{-60t}\,\vec{a}_z \,\mu T$, $\vec{v} = 6\vec{a}_x$ m/s.



Para cada situação acima dizer também qual é o <u>sentido da corrente</u> induzida, <u>justificando a sua resposta</u>.

Respostas: Para concordar com o vetor $\vec{B}$, adota-se para a *fem* o sentido anti-horário. Após o cálculo da *fem* (adotada), chega-se então aos seguintes valores:

a) $fem = -1{,}2\,\mu V$. Logo a corrente será no sentido horário.

b) $fem = 0{,}9\,e^{-60t}\,\mu V$. Logo a corrente será no sentido anti-horário.

c) $fem = -0{,}3\,e^{-60t}\,\mu V$. Logo a corrente será no sentido horário.

<u>Justificativa para o sentido da corrente</u>: ela tem sempre o mesmo sentido da *fem* real. Esta, por sua vez, tem o mesmo sentido da *fem* adotada se o sinal obtido for positivo. Caso contrário, a *fem* real tem sentido oposto ao da *fem* adotada.

9.14) De acordo com a definição de corrente de deslocamento (I_d), mostrar que:

a) ela é igual à corrente de condução (I) que chega a um capacitor ideal (sem corrente de fuga) de placas planas paralelas;

b) ela é praticamente desprezível no interior de um fio condutor (por exemplo, o fio de cobre com condutividade elétrica $\sigma = 5\times10^7$ S/m e permissividade elétrica $\varepsilon \approx \varepsilon_0$) quando esse está sujeito a uma corrente alternada senoidal $I = I_{máx}\,\mathrm{sen}\,\omega t$ (ω = velocidade angular expressa em rad/s).

Respostas: a) Demonstração;

b) $\dfrac{I_{d_{máx}}}{I_{máx}} = \dfrac{\varepsilon\omega}{\sigma} \approx 10^{-18} f \approx 0$ para baixos valores da frequência f (ex.: f = 60 Hz)

Anotações