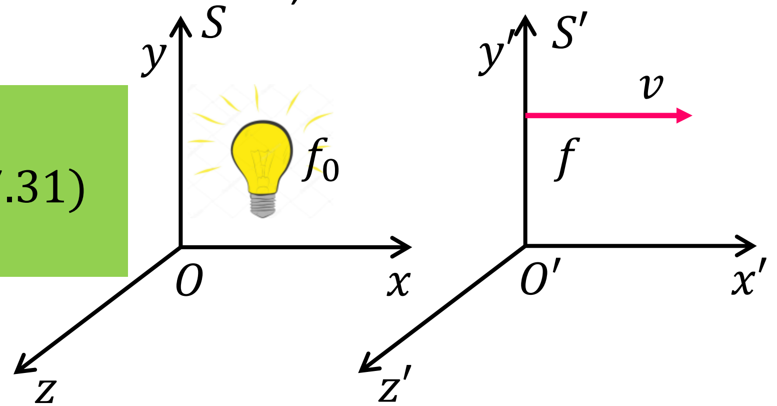
37.10 O Efeito Doppler para a Luz

- O **efeito Doppler** é a mudança na frequência de uma onda causada pelo movimento da fonte e/ou do detector.
- No caso da luz, o **efeito Doppler** depende apenas da velocidade relativa entre a fonte e o detector.

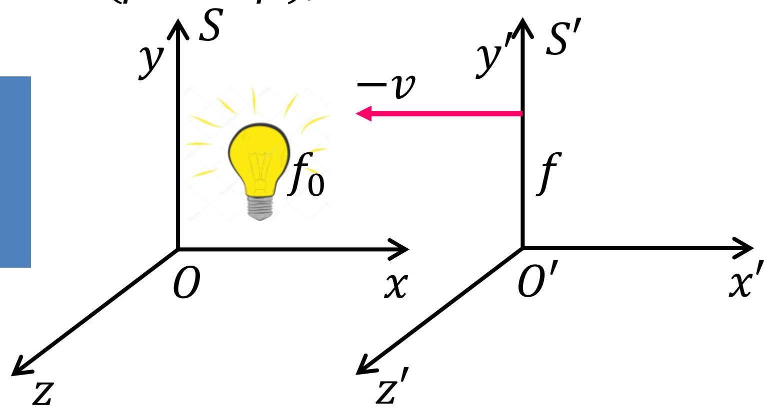
Seja f_0 a **frequência própria** da fonte, isto é, a frequência medida por um observador em relação ao qual a fonte se encontra em repouso e f a frequência medida por um observador que está se movendo com velocidade em relação à fonte. Nesse caso, se o observador está se afastando da fonte, temos:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \quad \text{(fonte e detector se afastando)} \quad (37.31)$$



Por outro lado, se o observador está se aproximando da fonte ($\beta \to -\beta$), ficamos com

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \quad \text{(fonte e detector se aproximando)}$$



LEMBRETE: $\beta = \dfrac{v}{c}$

O Efeito Doppler em baixas velocidades

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \,.\, (37.31)$$

Em baixas velocidades ($\beta \ll 1$), a raiz quadrada da equação (37.31) pode ser expandida em uma série de potências de β e a frequência medida é dada por

$$f = f_0 \left(1 - \beta + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^3}{2} + \frac{3\beta^4}{8} - \frac{3\beta^5}{8} + \frac{5\beta^6}{16} - \frac{5\beta^7}{16} + \cdots\right)$$

$$f \approx f_0 \left(1 - \beta + \frac{\beta^2}{2}\right). \quad (\text{fonte e detector se afastando}, \beta \ll 1) \quad (37.32)$$

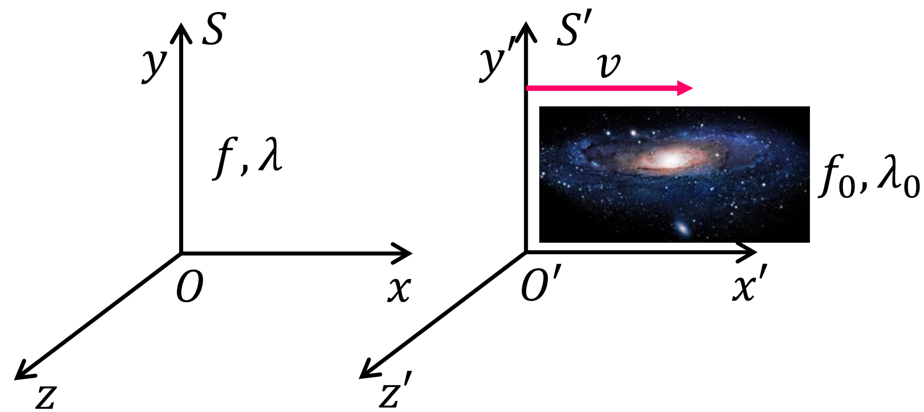
Os radares da polícia utilizam o efeito Doppler para medir a velocidade v dos automóveis. O aparelho de radar emite um feixe de micro-ondas com uma certa frequência (própria) f_0. Um carro que esteja se aproximando reflete o feixe de micro-ondas, que é captado pelo detector do aparelho de radar. Por causa do efeito Doppler a frequência f recebida pelo detector é maior que f_0. O aparelho compara a frequência recebida (f) com f_0 e determina a velocidade v do carro:

$$v = c \frac{(f - f_0)}{2 f_0}$$

O Efeito Doppler na Astronomia

$$f \approx f_0\left(1 - \beta + \frac{\beta^2}{2}\right). \quad (37.32)$$

Suponha que uma galáxia esteja se afastando da Terra com velocidade radial v suficientemente pequena ($\beta \ll 1$), para que o termo β^2 da equação (37.32) possa ser desprezado. Nesse caso,



$$f \approx f_0(1 - \beta). \quad (37.33)$$

Como $\lambda f = c$ e $\lambda_0 f_0 = c$,

$$\Rightarrow \frac{c}{\lambda} \approx \frac{c}{\lambda_0}(1 - \beta) \Rightarrow \lambda \approx \frac{\lambda_0}{(1 - \beta)} \Rightarrow \lambda \approx \lambda_0(1 - \beta)^{-1}. \quad (37.34)$$

Já que estamos supondo que $\beta \ll 1$, podemos expandir $(1 - \beta)^{-1}$ em um série de potências:

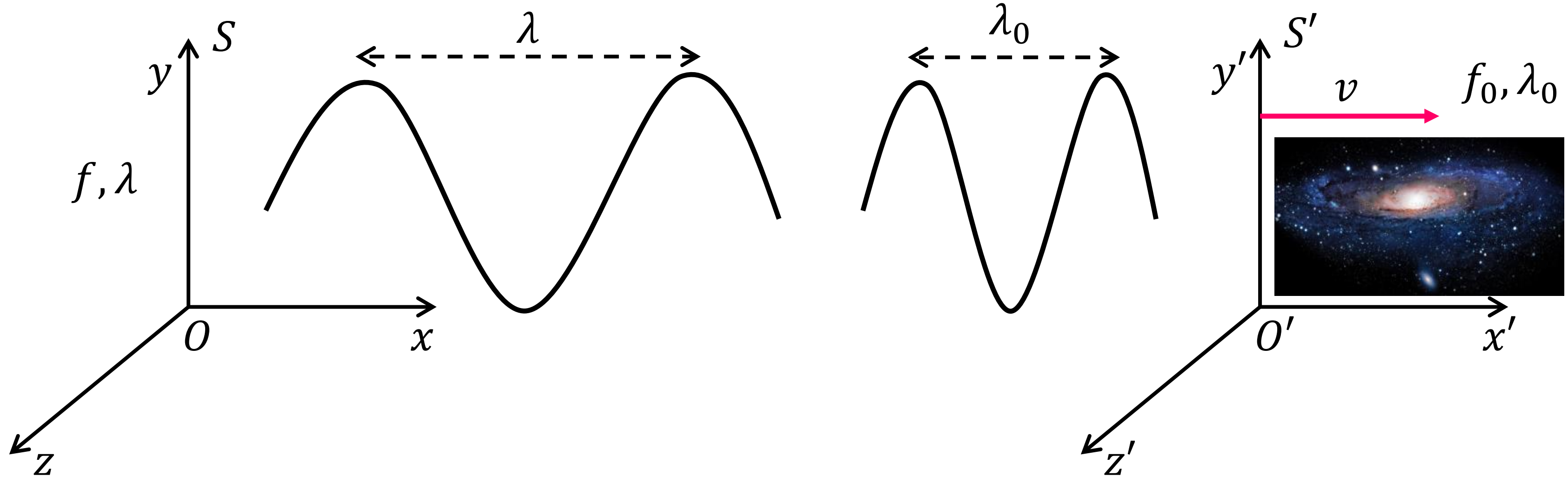
$$(1 - \beta)^{-1} = 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^6 + \beta^7 + \cdots \Rightarrow (1 - \beta)^{-1} \approx 1 + \beta$$

$$\Rightarrow \lambda \approx \lambda_0(1 + \beta) \Rightarrow \beta \approx \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \Rightarrow \beta \approx \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}. \quad (37.35)$$

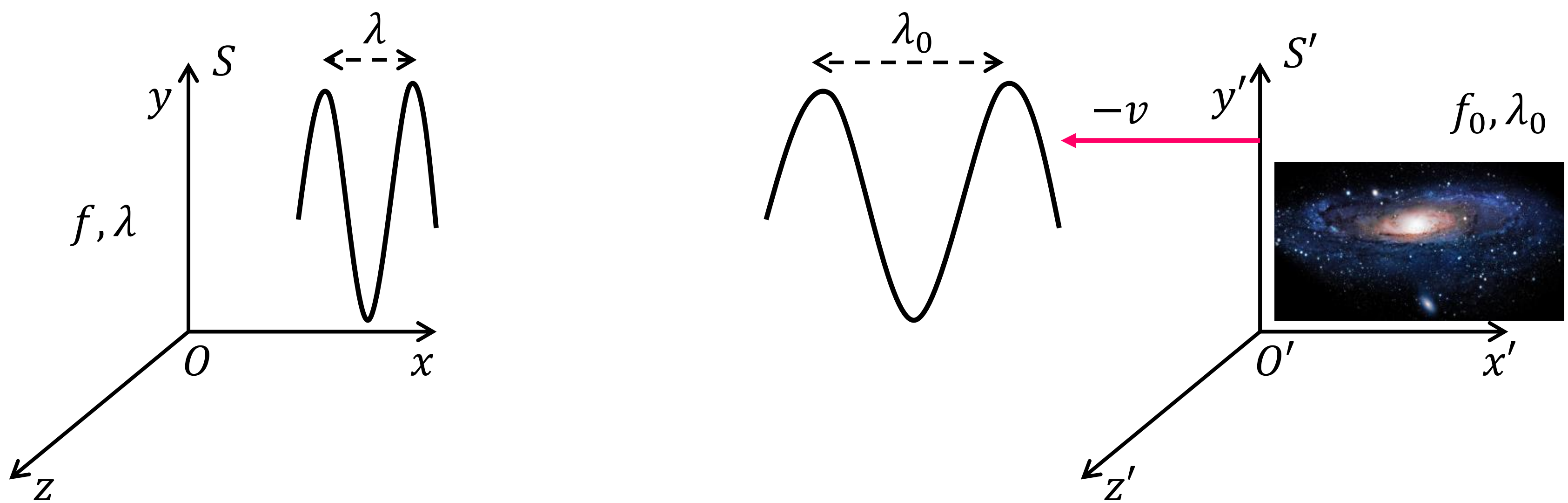
$\Delta\lambda \equiv |\lambda - \lambda_0|$ é conhecido como **Deslocamento Doppler**

$$\Rightarrow \frac{v}{c} \approx \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \Rightarrow v \approx \frac{\overbrace{(\lambda - \lambda_0)}}{\lambda_0} c. \text{ (equação válida se } \beta \ll 1) \quad (37.36)$$

Deslocamento Doppler para o vermelho ($\lambda > \lambda_0$ e $f < f_0$)

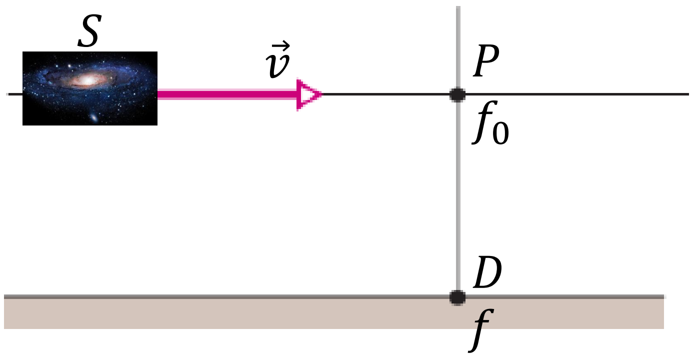


Deslocamento Doppler para o azul ($\lambda < \lambda_0$ e $f > f_0$)



O Efeito Doppler Transversal

Uma fonte (uma galáxia) S, viajando com velocidade $\vec{v}$ passa por um detector D. De acordo com a Teoria da Relatividade Restrita, o efeito Doppler transversal ocorre quando a fonte está passando pelo ponto P, no qual a direção de movimento é perpendicular à reta que liga a fonte ao detector. Esse efeito não é previsto pela teoria clássica.



Se a frequência da luz emitida pela fonte (galáxia) quando ela está passando pelo ponto P é f_0, a frequência f da luz detectada no ponto D é dada por

$$f = f_0\sqrt{1-\beta^2}. \quad \text{(efeito Doppler transversal).} \qquad (37.37)$$

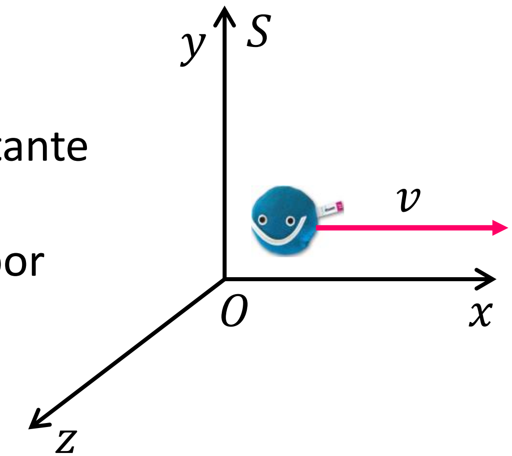
Em baixas velocidades ($\beta \ll 1$), a raiz quadrada da equação (37.37) pode ser expandida em uma série de potências de β e a frequência medida é dada por

$$f = f_0\left(1-\frac{\beta^2}{2}-\frac{\beta^4}{8}-\frac{\beta^6}{16}-\frac{5\beta^8}{128}-\cdots\right) \Rightarrow f \approx f_0\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right). \qquad (37.38)$$

- O **efeito Doppler transversal** é, na verdade, uma manifestação do fenômeno da dilatação dos tempos. Se reescrevermos a equação (37.37) em termos do período $T(=1/f)$ da onda detectada no ponto D e do período próprio $T_0(=1/f_0)$ da onda emitida pela fonte no ponto P, teremos

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0}\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma T_0. \qquad (37.39)$$

37.11 Uma Nova Interpretação do Momento Linear



Considere uma partícula que está se movendo com velocidade constante v no sentido positivo do eixo x.

- Classicamente, o módulo do momento linear da partícula é dado por

$$p = mv = m\frac{\Delta x}{\Delta t}, \qquad \text{(momento linear clássico)} \quad (37.40)$$

onde Δx é a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo Δt.

- Relativisticamente, o módulo do momento linear da partícula é dado por

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0},$$

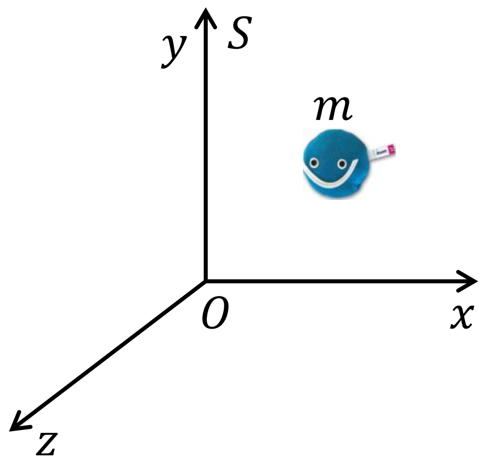
onde, como no caso clássico, Δx é a distância percorrida pela partícula do ponto de vista de um observador externo. Entretanto, Δt_0 é o intervalo de tempo (próprio) necessário para a partícula percorrer a distância Δx, não do ponto de visto de um observador externo, mas sim do ponto de vista de um observador que esteja se movendo com a partícula, ou seja, Δt_0 é o intervalo de tempo próprio.

Como $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ $\Rightarrow$ $$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t/\gamma} = m\gamma\frac{\Delta x}{\Delta t}$$ $\Rightarrow$ $$p = m\gamma v. \quad (37.41)$$

$\Rightarrow$ $$\vec{p} = m\gamma\vec{v}. \quad \text{(momento linear relativístico)} \quad (37.42)$$

37.12 Uma Nova Interpretação da Energia

Energia de Repouso



A massa m de um corpo e a energia equivalente E_0 estão relacionadas através da equação:

$$E_0 = mc^2. \quad \text{(energia de repouso)} \quad (37.43)$$

As massas das partículas geralmente são medidas em **unidades de massa atômica** (u):

$$1\,u = 1{,}660\,538\,86 \times 10^{-27}\,kg. \quad (37.44)$$

As energias das partículas geralmente são medidas em **elétron-volts** (eV):

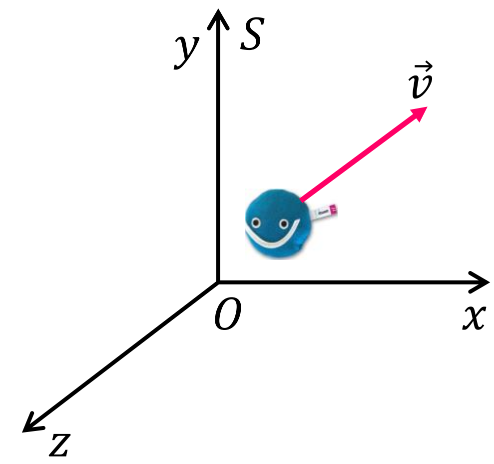
$$1\,eV = 1{,}602\,176\,462 \times 10^{-19}\,J. \quad (37.45)$$

Tabela 37-3

Energia Equivalente de Alguns Objetos

Objeto	Massa (kg)	Energia Equivalente	
Elétron	$\approx 9{,}11 \times 10^{-31}$	$\approx 8{,}19 \times 10^{-14}$ J	($\approx$ 511 keV)
Próton	$\approx 1{,}67 \times 10^{-27}$	$\approx 1{,}50 \times 10^{-10}$ J	($\approx$ 938 MeV)
Átomo de urânio	$\approx 3{,}95 \times 10^{-25}$	$\approx 3{,}55 \times 10^{-8}$ J	($\approx$ 225 GeV)
Partícula de poeira	$\approx 1 \times 10^{-13}$	$\approx 1 \times 10^{4}$ J	($\approx$ 2 kcal)
Moeda pequena	$\approx 3{,}1 \times 10^{-3}$	$\approx 2{,}8 \times 10^{14}$ J	($\approx$ 78 GW·h)

Energia Total



Um corpo de massa m que se move com velocidade $\vec{v}$ (considerando que a energia potencial é nula) possui uma **energia total** E dada por

$$E = E_0 + K = mc^2 + K, \quad (37.47)$$

onde K é a energia cinética do corpo.

É possível demonstrar que a **energia total** também pode ser escrita na forma

fator de Lorentz

$$E = \gamma mc^2. \quad (37.48)$$

❖ A energia total de um sistema isolado não pode mudar.

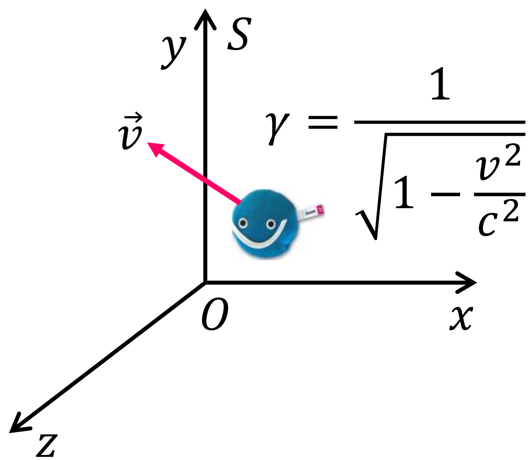
Nas reações químicas e nucleares, a variação da energia de repouso do sistema devido à reação muitas vezes é expressa através do chamado **valor de** Q. O **valor de** Q de uma reação é determinado a partir da equação

Energia de repouso inicial do sistema = Energia de repouso final do sistema + Q

$$E_{0i} = E_{0f} + Q \quad \Rightarrow \quad M_i c^2 = M_f c^2 + Q$$

$$\Rightarrow \quad Q = M_i c^2 - M_f c^2 \equiv -\Delta M c^2. \quad (37.50)$$

Energia Cinética

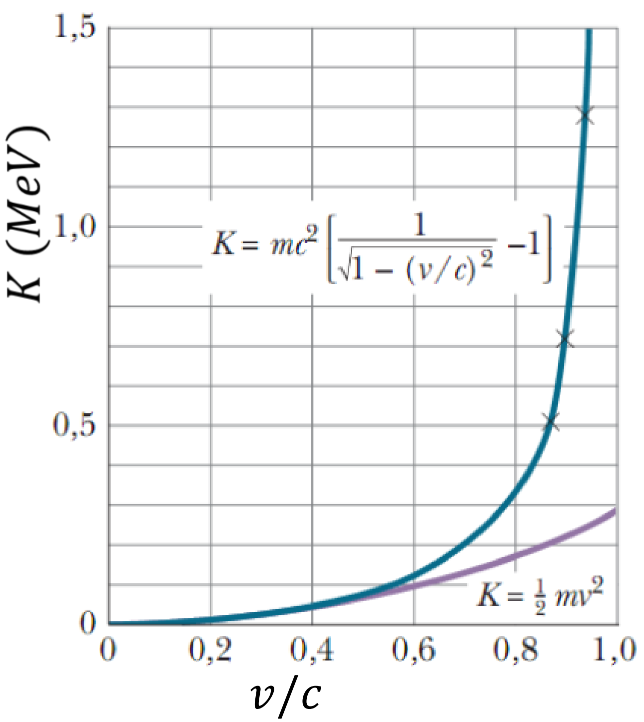


Em Física 1, definimos a energia cinética K de um corpo de massa m que se move com velocidade $\vec{v}$ através da seguinte equação

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (\text{válida para } v \ll c) \quad (37.51)$$

Vamos agora apresentar uma expressão (que é válida para qualquer velocidade $v < c$) para a energia cinética K de um corpo de massa m que se move com velocidade $\vec{v}$

$$K = E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2. \quad (37.52)$$



Note que: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots$

$$(\gamma - 1) = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots$$

$$K = \left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right)mc^2$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \frac{5}{16}m\frac{v^6}{c^4} + \cdots$$

$$K \approx \frac{1}{2}mv^2. \, (\text{válida para } v \ll c)$$

Momento (Linear) e Energia Cinética

Na **Mecânica Clássica**, o momento linear p de uma partícula é igual a mv e a energia cinética K é igual a $\frac{1}{2}mv^2$, ou seja,

$$\begin{aligned} p &= mv \\ K &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned} \Rightarrow v = \frac{p}{m} \Rightarrow K = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 \Rightarrow K = \frac{p^2}{2m}. \quad (37.53)$$

Na **Mecânica Relativística**, o momento linear p de uma partícula é igual a γmv e a energia cinética K é igual a $(\gamma - 1)mc^2$. É possível mostrar que

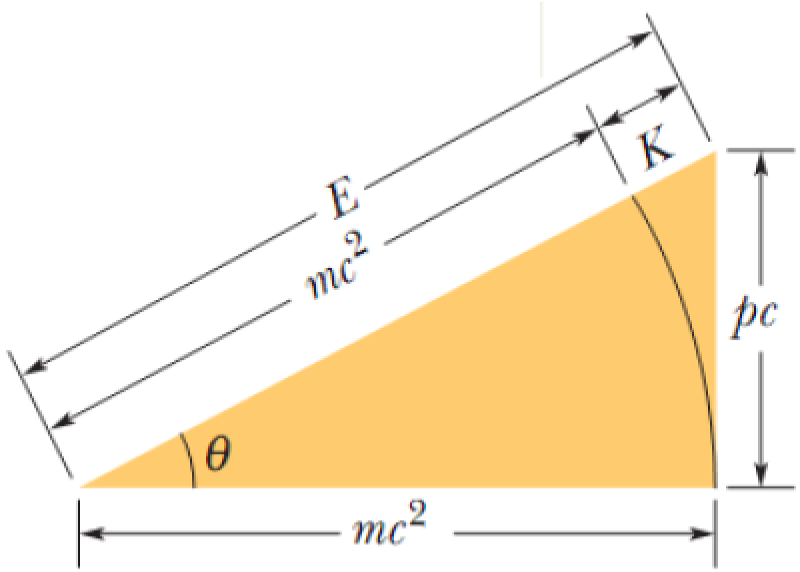
$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2. \quad (37.54)$$

e

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \quad (37.55)$$

O triângulo retângulo da figura ao lado pode ser útil para memorizar as relações entre a energia total, a energia de repouso, a energia cinética e o momento linear.

Note que: $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \beta \\ \cos\theta = \dfrac{1}{\gamma} \end{cases}$

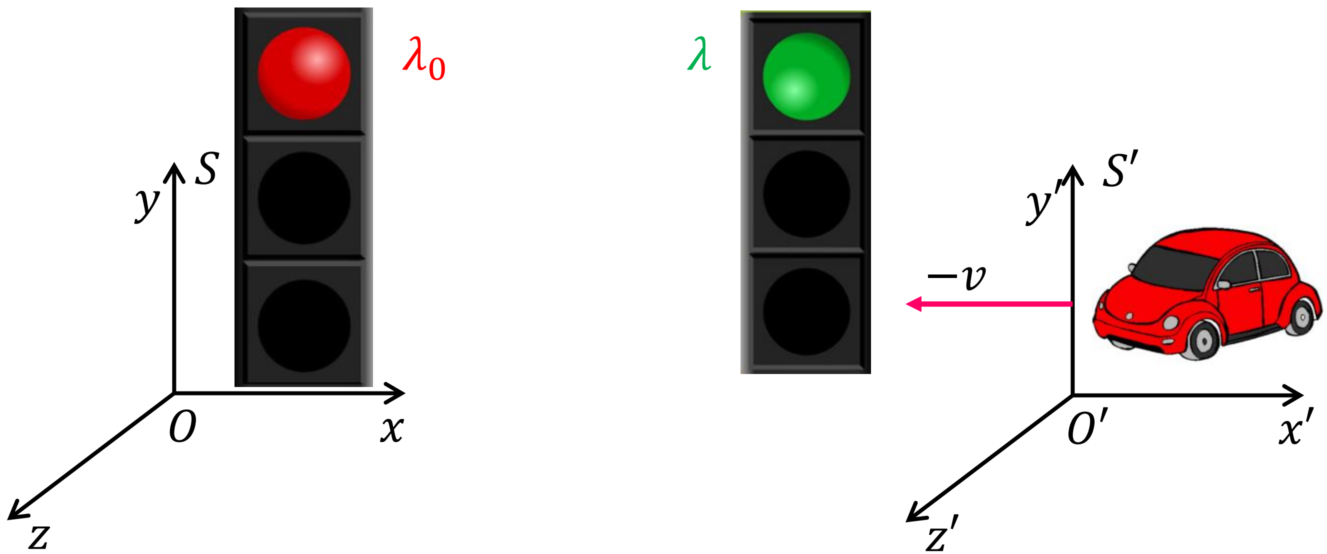


Exercícios sugeridos das Seções 37.10 e 37.12: 34, 35, 36, 37, 39, 40, 42, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 55, 56, 57, 58 e 59.

35) Supondo que a equação (37.36) possa ser aplicada, determine com que velocidade um motorista teria que passar por um sinal vermelho para que ele parecesse verde. Tome $620\ nm$ como o comprimento de onda da luz vermelha e $540\ nm$ como o comprimento de onda da luz verde.

Dica: $v \approx \dfrac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} c.$

Resposta: $v = 0{,}13\ c \approx 140$ milhões km/h.



$$v \approx \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} c. \text{ (equação válida se } \beta \ll 1) \quad (37.36)$$