/ /

Roteiro 1
Modelagem

Ícaro Bicalho Quintão
EC-14.1.8083

(1) $\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix}$ vetor de estados $\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/R_1C & 0 \\ 1/R_2/C & -1/R_2C \end{bmatrix}$

Vetor de saída   Matriz de estados

$\begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix} \cdot q_e$ $\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$

Matriz de entrada   Vetor de estados   matriz de saída

(2) Sendo C.I. ≠ 0

$$\dot{h}_1 = -\frac{h_1(t)}{R_1C} + \frac{q_e(t)}{C}$$

Aplicando T.L

$$s H_1(s) - H_1(0) = -\frac{1}{R_1C} \cdot H_1(s) + \frac{1}{C} \cdot Q_e(s)$$

$$H_1(s)\left(s + \frac{1}{R_1C}\right) = \frac{1}{C} Q_e(s) + H_1(0)$$

$$H_1(s)\left(\frac{R_1Cs + 1}{R_1C}\right) = \frac{1}{C} Q_e(s) + H_1(0)$$

$$H_1(s)(R_1Cs + 1) = R_1 \cdot Q_e(s) + R_1 C H_1(0)$$

$$H_1(s) = \left(\frac{R_1}{R_1Cs + 1}\right) Q_e(s) + \left(\frac{R_1C}{R_1Cs + 1}\right) \cdot H_1(0)$$

$\div 1/R_1C$

$$H_1(s) = \left(\frac{1/C}{s + \frac{1}{R_1C}}\right) Qe(s) + \left(\frac{1}{s + 1/R_1C}\right) H_1(0) \quad \text{I}$$

T.L. em I

$$h_1(t) = \frac{1}{C} e^{-t/R_1C} + h_1(0)\, e^{-t/R_1C}$$

$$h_1(t) = e^{-t/R_1C}\left(\frac{1}{C} + h_1(0)\right) \quad 1$$

Em h_2:

$$\dot{h}_2 = \frac{h_1}{R_1C} - \frac{h_2}{R_2C}$$

$$sH_2(s) - H_2(0) = H_1(s)\frac{1}{R_1C} - H_2(s)\frac{1}{R_2C}$$

$$H_2(s)\left(s + \frac{1}{R_2C}\right) = H_1(s)\frac{1}{R_1C} + H_2(0) \quad 2$$

$H_1(s)$ de I

$$H_2(s)\cdot\left(s + \frac{1}{R_2C}\right) = \left[\frac{1/C}{s + \frac{1}{R_1C}} Qe(s) + \frac{1}{s + 1/R_1C} H_1(0)\right]\frac{1}{R_1C} + H_2(0)$$

$$H_2(s) = \underbrace{\frac{1/R_1C^2}{\left(s + \frac{1}{R_1C}\right)\left(s + \frac{1}{R_2C}\right)}}_{\text{II}} Qe(s) + \underbrace{\frac{1/R_1C}{\left(s + \frac{1}{R_1C}\right)\left(s + \frac{1}{R_2C}\right)}}_{\text{III}} H_1(0) + \frac{1}{(s + 1/R_2C)} H_2(0)$$

F. P.

$$\text{II} \quad \frac{1/R_1C^2}{\left(s + 1/R_1C\right)\left(s + \frac{1}{R_2C}\right)} = \frac{A}{s + 1/R_1C} + \frac{B}{s + 1/R_2C}$$

tilibra

$$A = \frac{(1/R_1C^2)\,(a + 1/R_1C)}{(a + \frac{1}{R_1C})(a + \frac{1}{R_2C})} \quad \text{com } a = -\frac{1}{R_1C}$$

$$A = \frac{1/R_1C^2}{\frac{-1}{R_1C} + \frac{1}{R_2C}} \rightsquigarrow \frac{1}{R_1C^2} \cdot \frac{R_1R_2C^2}{C(-R_2+R_1)} = \frac{R_2}{C(-R_2+R_1)}$$

$$B = \frac{(1/R_1C^2)\,(a + 1/R_2C)}{(a + 1/R_1C)(a + 1/R_2C)} \quad \text{com } a = -\frac{1}{R_2C}$$

$$B = \frac{1/R_1C^2}{\frac{-R_1C + R_2C}{(R_1C)(R_2C)}} = \frac{1}{R_1C^2} \cdot \frac{R_1R_2C^2}{C(-R_1+R_2)} = \frac{R_2}{C(R_1+R_2)}$$

(II) $A = \dfrac{R_2}{C(-R_2+R_1)}$ $\qquad B = \dfrac{R_2}{C(-R_1+R_2)}$

(III) $$\frac{1/R_1C}{(a + \frac{1}{R_1C})(a + \frac{1}{R_2C})} = \frac{C}{a + 1/R_1C} + \frac{D}{a + 1/R_2C}$$

$$C = \frac{(1/R_1C)\,(a + 1/R_1C)}{(a + \frac{1}{R_1C})(a + \frac{1}{R_2C})} \quad \text{com } a = \frac{-1}{R_1C}$$

$$C = \frac{1/R_1C}{\frac{-R_2C + R_1C}{(R_1C)(R_2C)}} = \frac{R_2}{(-R_1+R_2)}$$

/ /

$$D = \frac{(1/R_1C)(a + 1/R_2C)}{(a + 1/R_1C)(a + 1/R_2C)} \quad \text{com } a = \frac{-1}{R_1C}$$

$$D = \frac{R_2}{(-R_2 + R_1)}$$

$$\frac{H_2(a)}{Qe(a)} = \frac{A}{a + 1/R_1C} + \frac{B}{a + 1/R_2C} + \frac{C}{a + 1/R_1C} H_1(a) + \frac{D}{a + 1/R_2C} H_1(0) + \frac{1}{(a + R_2C)} H_2(0)$$

Transformada Inversa de Laplace

$$h_2(t) = Ae^{-t/R_1C} + Be^{-t/R_2C} + C\, H_1(0)e^{-t/R_1C} + DH_1(0)e^{-t/R_2C} + H_2(0)e^{-t/R_2C}$$

$$h_2(t) = \frac{R_2}{C(-R_2 + R_1)} e^{-t/R_1C} + \frac{R_2}{C(-R_1 + R_2)} e^{-t/R_2C} + \frac{R_2}{(-R_1 + R_2)} H_1(0)e^{-t/R_1C} + \frac{R_2}{(-R_2 + R_1)} H_1(0)\, e^{-tR_1C} + e^{-t/R_2} H_2(0)$$

$$h_2(t) = e^{-t/R_1C} \cdot \frac{R_2}{(R_1 - R_2)} \cdot \left[\frac{1}{C} + H_1(0)\right] + e^{-t/R_2C} \left[\frac{R_2}{R_2 - R_1}\left(\frac{1}{C} + H_1(0)\right) + H_2(0)\right]$$

Questão 03)

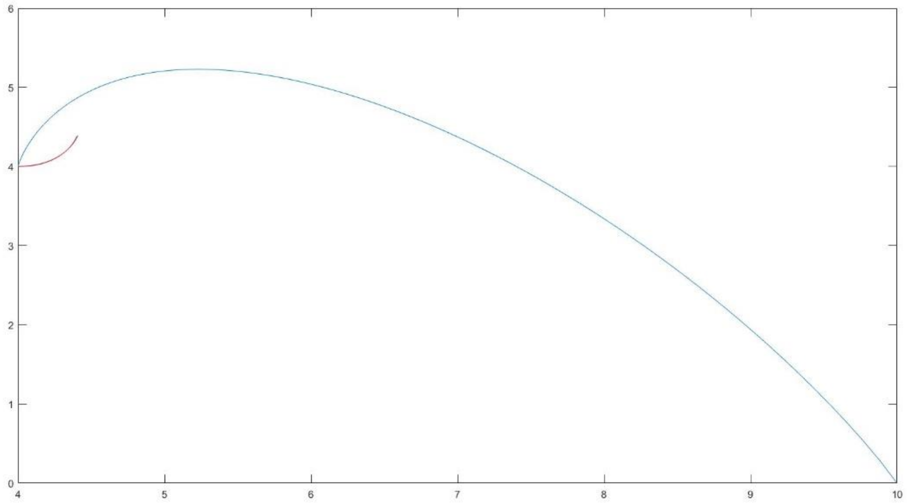


Gráfico 01 – Curvas temporais das saídas do problema.

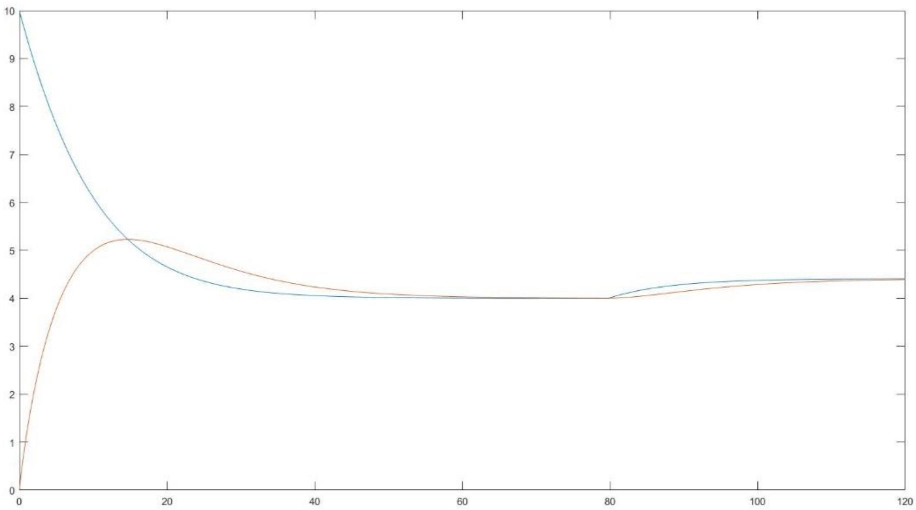


Gráfico 02 – Altura dos tanques em função do tempo.

O Gráfico 01 a resposta do sistema é referente ao tanque 01 x tanque 02. A curvatura azul representa os níveis referenciais do tanque 01 ao tanque 02, de modo que os dois se estabilizam em uma determinada altura (aproximadamente 4m). Essa estabilização é verificada na curvatura vermelha, de modo que após um determinado tempo, os níveis do tanque 01 e 02 são aproximadamente iguais e se mantêm desse modo caso a entrada do tanque 01 se mantenha constante.

No Gráfico 02, vemos que essa informação é verídica, ao plotar os níveis de cada tanque em função do tempo. A curvatura azul representa o tanque 01, assim como a curva vermelha, o tanque 02. Vemos que após um determinado tempo, os níveis de cada tanque se mantêm constantes e aproximadamente iguais.

Questão 04)

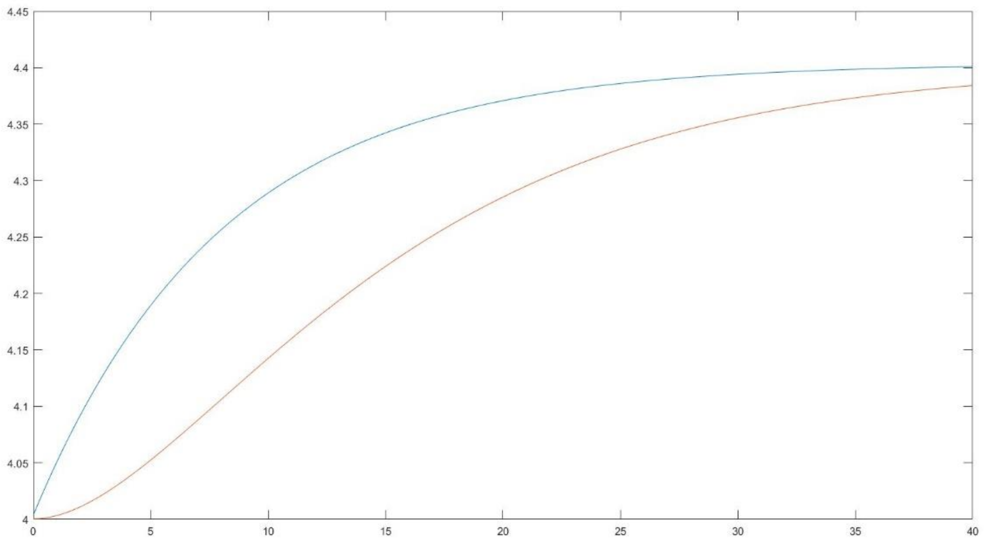
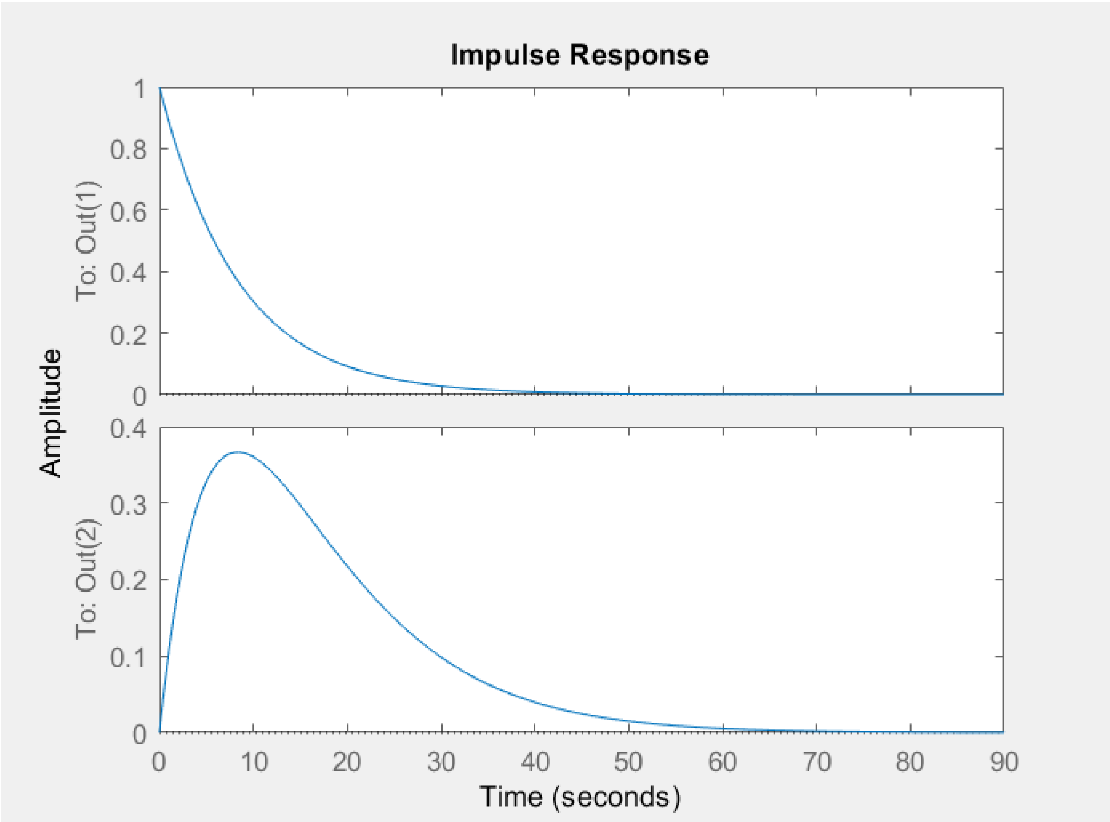


Gráfico 03 – Resposta gráfica linearizada do estado 1 *versus* o estado 2

Como temos funções não lineares dadas pelas válvulas de saída de cada tanque, ao linearizarmos as mesmas, obtemos as curvaturas do Gráfico 03, onde a curva azul representa a linearização da saída do tanque 01, e a vermelha, do tanque 02. Dessa forma, para um ponto de operação de aproximadamente 4m, que é o especificado pela questão, teremos as variações de altura de cada tanque.

Questão 05)

Resposta temporal do modelo de estados obtida pelo Matlab.



6) Aplicando uma entrada degrau de amplitude 0,05.

$$H_1(s) = \left(\frac{1/C}{s + 1/R_1C}\right)\frac{0,05}{s} \qquad H_2(s) = \left(\frac{1/R_1C^2}{(s+1/R_1C)(s+1/R_2C)}\right)\frac{0,05}{s}$$

$$H_1(s) = \left(\frac{1/C}{s+1/R_1C}\right)\cdot\frac{0,05}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/R_1C}$$

$$A = \left(\frac{1/C}{s+1/R_1C}\right)\cdot\left(\frac{0,05}{s}\right)s \quad \text{com } s = 0$$

$$A = \frac{\frac{1}{C}\cdot 0,05}{\frac{1}{R_1C}} = \frac{0,05}{\cancel{C}}R_1\cancel{C} \rightarrow 0,05R_1$$

$$B = \left(\frac{1/C}{s+1/R_1C}\right)\left(\frac{0,05}{s}\right)\left(s+\frac{1}{R_1C}\right) \quad \text{com } s = -\frac{1}{R_1C}$$

$$B = \frac{0,05}{C}(-R_1C) = -0,05R_1$$

$$H_1(s) = \frac{0,05R_1}{s} - \frac{0,05R_1}{s+1/R_1C}$$

Transformada inversa de laplace:

$$h_1(t) = 0,05R_1 - 0,05R_1\left(e^{-t/R_1C}\right)$$

$$H_2(s) = \left(\frac{1/R_1C^2}{\left(s+1/R_1C\right)\left(s+1/R_2C\right)}\right)\frac{0,05}{s} = \frac{A}{s+1/R_1C} + \frac{B}{s+1/R_2C} + \frac{C}{s}$$

$$\frac{0,05}{R_1C^2} = As\left(s+\frac{1}{R_2C}\right) + Bs\left(s+\frac{1}{R_1C}\right) + C\left(s+\frac{1}{R_1C}\right)\left(s+\frac{1}{R_2C}\right)$$

$$B = \frac{0,05R_1R_2^2C^{\cancel{3}}}{\cancel{R_1}\cancel{C^2}(R_1C-R_2C)} \rightsquigarrow \frac{0,05R_2^2}{(R_1-R_2)}$$

$$A = \frac{0,05(R_1^{\cancel{2}}R_2\cancel{C^3})}{\cancel{R_1}\cancel{C^2}(-R_1C+R_2\cancel{C})} \rightsquigarrow \frac{0,05R_1R_2}{(-R_1+R_2)}$$

$$C = \frac{0,05(R_1R_2\cancel{C^3})}{\cancel{R_1}\cancel{C^2}(R_2C^2+R_1C^2)} \rightsquigarrow \frac{0,05R_2}{C(R_1+R_2)}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace

$$h_2(t) = \frac{0,05R_1R_2}{(-R_1+R_2)}e^{-t/R_1C} + \frac{0,05R_2^2}{(R_1-R_2)}e^{-t/R_2C} + \frac{0,05R_2}{C(R_1+R_2)}$$

Questão 06) (Parte Gráfica)