Capítulo I

ANÁLISE VETORIAL

1.1 – CONCEITOS GERAIS

- ***Grandeza Escalar*** – Representada por um número real, positivo ou negativo, acompanhado ou não de unidade de medida.
  Ex.: Tensão ou potencial, corrente, carga, tempo, massa, volume, temperatura, pressão, índice de refração, etc.

- ***Grandeza Vetorial*** – Representada por uma magnitude, direção e sentido.
  Ex.: Densidade de corrente, velocidade, aceleração, força, torque, etc.

Atenção: No curso de Eletromagnetismo não será feita distinção entre a magnitude, módulo, intensidade e valor absoluto de um vetor. A magnitude de um vetor é um valor sempre positivo.

- ***Campo Escalar***– Cada ponto da região é representado por um escalar.
  Ex.: Campo de potenciais, campo de temperaturas, campo de pressões, etc.
  Notação: Seja $\phi = x^2 + y^2 + z^2 = 100$ definindo um campo escalar.
  Se ϕ = potencial $\Rightarrow$ temos uma superfície equipotencial esférica.
  Se ϕ = temperatura $\Rightarrow$ temos uma superfície isotérmica esférica.
  Se ϕ = pressão $\Rightarrow$ temos uma superfície isobárica esférica.

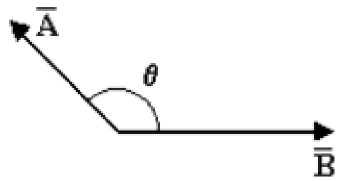
- ***Campo Vetorial***– Cada ponto da região equivale a um vetor.
  Ex.: Campo elétrico, campo magnético, campo gravitacional, etc.
  Notação: Seja $\vec{E} = 3\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 5\vec{a}_z$ definindo um campo vetorial.
  Se $\vec{E}$ = campo elétrico $\Rightarrow$temos uma região onde o campo elétrico é uniforme, possuindo módulo igual a $|\vec{E}| = 5\sqrt{2}$ e direção fixa definida pelos vetores unitários (também chamados de versores): $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ e $\vec{a}_z$.

Atenção: No curso de Eletromagnetismo adota-se a seguinte notação para vetores: $\vec{A}$ ou $\overline{A}$, sendo que seu módulo pode ser representado por $|\vec{A}|$ ou $|\overline{A}|$, ou, simplesmente,A.

1.2 – O PRODUTO ESCALAR (OU PRODUTO INTERNO)

O produto escalar entre 2 vetores $\overline{A}$ e $\overline{B}$ é definido como:

$$\boxed{\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| cos\theta}$$ (θ = menor ângulo entre $\overline{A}$ e $\overline{B}$)



Propriedades do produto escalar:

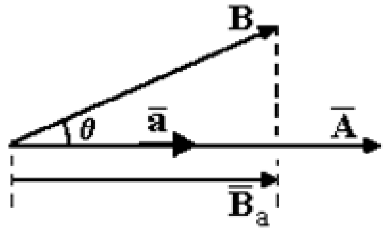
(a) $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$ (propriedade comutativa)
(b) $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \overline{A} \perp \overline{B}$ (o produto escalar entre 2 vetores perpendiculares é nulo)
(c) $\vec{A} \bullet \vec{A} = |\vec{A}|^2 = A^2$

(i) <u>Aplicação do produto escalar</u>: obtenção da <u>componente</u> ou <u>projeção</u> de um vetor (ex.: $\overline{B}$) numa dada direção (ex.: o vetor $\overline{A}$ ou o eixo x→ ver figuras).

A <u>projeção</u> (ou componente) <u>escalar</u> do vetor $\overline{B}$ sobre o vetor $\overline{A}$ é:

$$\boxed{B_a = \overline{B} \bullet \overline{a} = \overline{B} \bullet \left(\frac{\overline{A}}{\left|\overline{A}\right|} \right)}$$

($\overline{a}$ = vetor unitário na direção de $\overline{A}$)



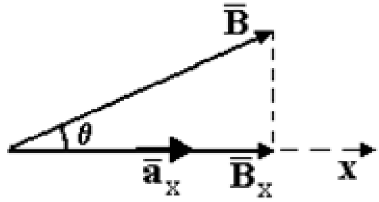
A <u>projeção</u> (ou componente) <u>vetorial</u> do vetor $\overline{B}$ sobre $\overline{A}$ é:

$$\boxed{\overline{B}_a = \left(\overline{B} \bullet \overline{a}\right)\overline{a}} \Rightarrow \overline{B}_a = \left(B \bullet \frac{\overline{A}}{\left|\overline{A}\right|} \right) \frac{\overline{A}}{\left|\overline{A}\right|}$$

A <u>projeção escalar</u> (B_x) do vetor $\overline{B}$ sobre o eixo x é:

$$\boxed{B_x = \overline{B} \bullet \overline{a}_x}$$

($\overline{a}_x$ = vetor unitário na direção do eixo x)

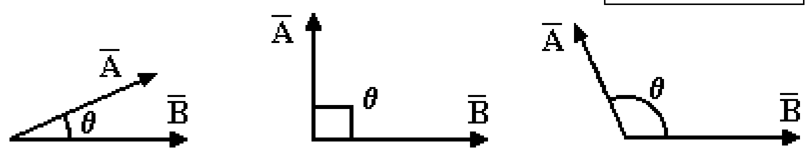


A <u>projeção vetorial</u> ($\overline{B}_x$) do vetor $\overline{B}$ sobre o eixo x é:

$$\boxed{\overline{B}_x = B_x \overline{a}_x = \left(\overline{B} \bullet \overline{a}_x\right)\overline{a}_x}$$

(ii) <u>Aplicação do produto escalar</u>: obtenção do <u>ângulo</u> compreendido entre 2 vetores quaisquer.

O ângulo θ compreendido entre 2 vetores $\overline{A}$ e $\overline{B}$ é obtido por: $\boxed{\cos\theta = \dfrac{\overline{A} \bullet \overline{B}}{\left|\overline{A}\right|\left|\overline{B}\right|}}$



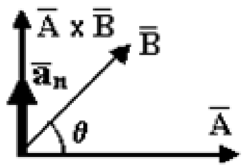
Ângulo agudo se $\cos\theta$ for positivo — **Ângulo reto** se $\cos\theta$ for zero — **Ângulo obtuso** se $\cos\theta$ for negativo

1.3 – O PRODUTO VETORIAL (OU PRODUTO EXTERNO)

O produto vetorial entre 2 vetores $\overline{A}$ e $\overline{B}$ é definido como:

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| sen\theta\, \vec{a}_n}$$

(θ = menor ângulo entre $\overline{A}$ e $\overline{B}$)



onde $\vec{a}_n$ = vetor unitário (versor) normal ao plano formado pelos vetores $\overline{A}$ e $\overline{B}$, cuja direção (e sentido) é obtida pela regra do saca-rolhas (mão direita) indo de $\overline{A}$ para $\overline{B}$.

<u>Propriedades do produto vetorial</u>:

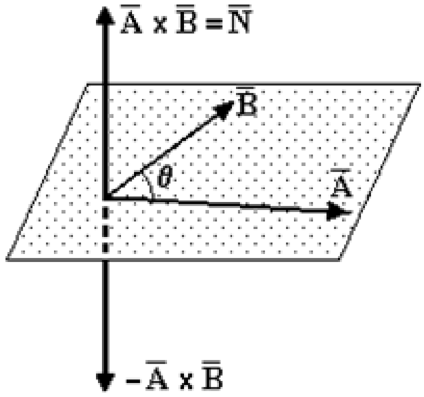
(a) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ (propriedade não-comutativa)

(b) $\vec{A} \times \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \overline{A} \ // \ \overline{B}$ (o produto vetorial entre 2 vetores paralelos é nulo)

(c) $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

(i) Aplicação do produto vetorial:

Obtenção do vetor ou versor normal a um plano formado por 2 vetores $\overline{A}$ e $\overline{B}$.



$$\vec{N} = \vec{A} \times \vec{B} \qquad \text{(vetor normal)}$$

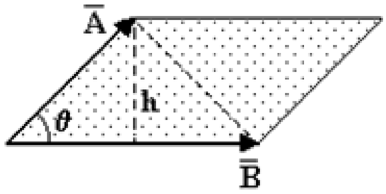
$$\vec{a}_n = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} \qquad \text{(versor normal)}$$

(ii) Aplicação do produto vetorial:

Obtenção da área de um paralelogramo (ou triângulo) cujos lados são as magnitudes dos vetores $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

$$S_{paralelogramo} = \text{Base} \times \text{Altura} = |\vec{B}||\vec{A}|\,sen\theta = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$S_{triângulo} = \frac{1}{2} S_{paralelogramo} = \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$$



Exercício: ***Demonstrar que o volume de um paralelepípedo pode ser obtido através do produto misto, expresso por:***

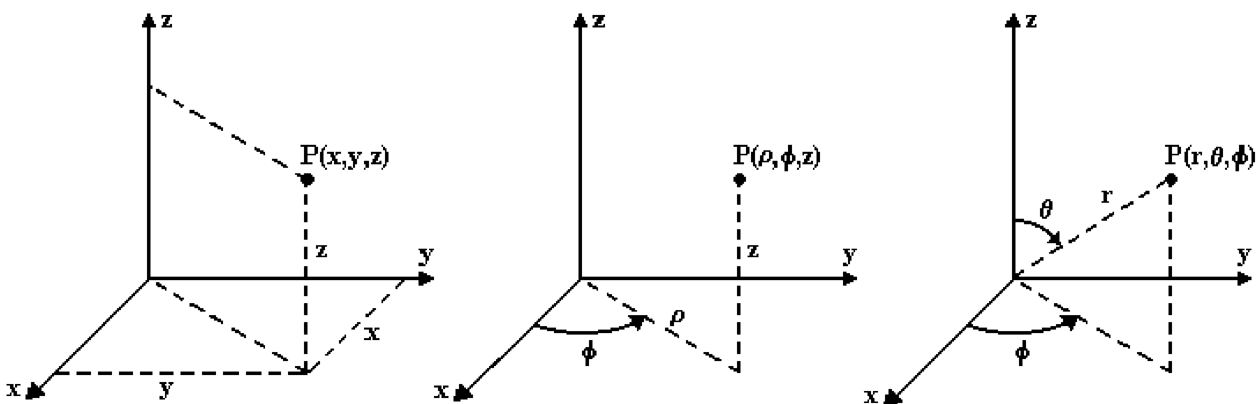
$$\text{vol} = \left|\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \bullet \vec{C}\right|$$

com** $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$ **e** $|\vec{C}|$ **representando, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo.

Solução: $\left|\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \bullet \vec{C}\right| = \left[(|\vec{A}||\vec{B}|\,sen\,\theta\,\vec{a}_n) \bullet \vec{C}\right] = \left[|\vec{A}||\vec{B}|\,sen\,\theta\,(\vec{a}_n \bullet \vec{C})\right] = |(\text{área da base})(\text{altura})| = volume$

1.4 – SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS, CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

1.4.1 – Representação de um ponto nos 3 sistemas de coordenadas



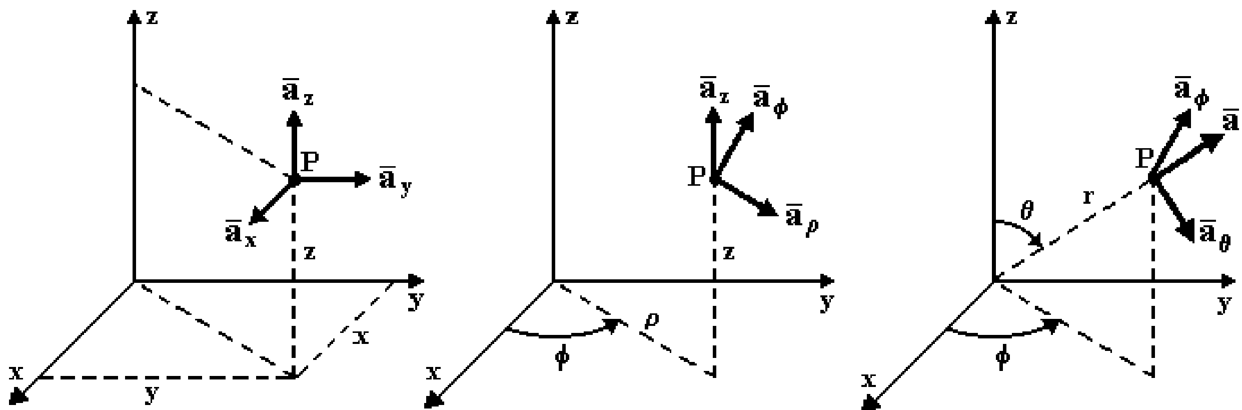
(a) Coordenadas cartesianas **(b) Coordenadas cilíndricas** **(c) Coordenadas esféricas**

1.4.2 – Transformações entre os 3 sistemas de coordenadas

Quadro das transformações entre os três sistemas de coordenadas

SISTEMA	Cartesiano	Cilíndrico	Esférico
Cartesiano	$x = x$ $y = y$ $z = z$	$x = \rho \cos\phi$ $y = \rho \operatorname{sen}\phi$ $z = z$	$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi$ $y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$ $z = r\cos\theta$
Cilíndrico	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rho \geq 0$ $\phi = \tan^{-1}(y/x) \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$ $z = z$	$\rho = \rho$ $\phi = \phi$ $z = z$	$\rho = r \operatorname{sen}\theta$ $\phi = \phi$ $z = r\cos\theta$
Esférico	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad r \geq 0$ $\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{x^2 + y^2}/z\right) \quad 0 \leq \theta \leq \pi$ $\phi = \tan^{-1}(y/x) \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$	$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad r \geq 0$ $\theta = \tan^{-1}(\rho/z) \quad 0 \leq \theta \leq \pi$ $\phi = \phi \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$	$r = r$ $\theta = \theta$ $\phi = \phi$

1.4.3 – Vetores unitários nos 3 sistemas de coordenadas



(a) Coordenadas cartesianas (b) Coordenadas cilíndricas (e) Coordenadas esféricas

1.4.4 – Produtos escalares entre vetores unitários nos 3 sistemas de coordenadas

Coordenadas cartesianas e cilíndricas

	$\vec{a}_\rho$	$\vec{a}_\phi$	$\vec{a}_z$
$\vec{a}_x \bullet$	$\cos\phi$	$-\operatorname{sen}\phi$	**0**
$\vec{a}_y \bullet$	$\operatorname{sen}\phi$	$\cos\phi$	**0**
$\vec{a}_z \bullet$	**0**	**0**	**1**

Coordenadas cartesianas e esféricas

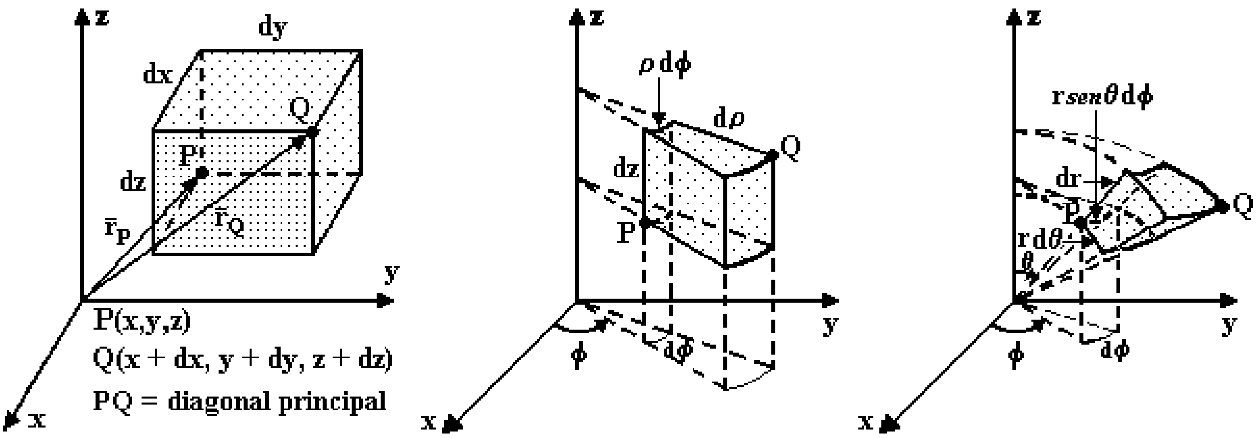
	$\vec{a}_r$	$\vec{a}_\theta$	$\vec{a}_\phi$
$\vec{a}_x \bullet$	$\operatorname{sen}\theta \cos\phi$	$\cos\theta \cos\phi$	$-\operatorname{sen}\phi$
$\vec{a}_y \bullet$	$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$	$\cos\theta \operatorname{sen}\phi$	$\cos\phi$
$\vec{a}_z \bullet$	$\cos\theta$	$-\operatorname{sen}\theta$	**0**

<u>**Nota:**</u> O produto escalar entre o vetor unitário $\vec{a}_x$ (ou $\vec{a}_y$) e o vetor unitário $\vec{a}_r$ (ou $\vec{a}_\theta$) do sistema de coordenadas esféricas,é dado pelo cosseno do ângulo formado entre o vetor unitário esférico $\vec{a}_r$ (ou $\vec{a}_\theta$) e sua projeção no plano *xy*, multiplicado pelo cosseno do ângulo formado por esta projeção e o vetor unitário $\vec{a}_x$ (ou $\vec{a}_y$).

Exercício: ***Completar o quadro abaixo relativo ao produto escalar entre vetores unitários dos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas***

	$\vec{a}_r$	$\vec{a}_\theta$	$\vec{a}_\phi$
$\vec{a}_\rho \bullet$			
$\vec{a}_\phi \bullet$			
$\vec{a}_z \bullet$			

1.4.5 – Elementos diferenciais de linha, área e volume nos 3 sistemas de coordenadas



(a) Coordenadas cartesianas **(b) Coordenadas cilíndricas** **(e) Coordenadas esféricas**

Quadro dos elementos diferenciais nos 3 sistemas de coordenadas

Sistema	Linha ($d\bar{L}$)	Área ($d\bar{S}$)	Volume(dv)
Cartesiano	$d\bar{L} = dx\,\bar{a}_x + dy\,\bar{a}_y + dz\,\bar{a}_z$	$d\bar{S}_x = dydz\,\bar{a}_x$ $d\bar{S}_y = dxdz\,\bar{a}_y$ $d\bar{S}_z = dxdy\,\bar{a}_z$	$dv = dx\,dy\,dz$
Cilíndrico	$d\bar{L} = d\rho\,\bar{a}_\rho + \rho d\phi\,\bar{a}_\phi + dz\,\bar{a}_z$	$d\bar{S}_\rho = \rho d\phi dz\,\bar{a}_\rho$ $d\bar{S}_\phi = d\rho dz\,\bar{a}_\phi$ $d\bar{S}_z = \rho d\rho d\phi\,\bar{a}_z$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$
Esférico	$d\bar{L} = dr\,\bar{a}_r + rd\theta\bar{a}_\theta + r\,sen\,\theta d\phi\bar{a}_\phi$	$d\bar{S}_r = r^2\,sen\,\theta d\theta d\phi\,\bar{a}_r$ $d\bar{S}_\theta = r\,sen\,\theta dr d\phi\,\bar{a}_\theta$ $d\bar{S}_\phi = rdrd\theta\,\bar{a}_\phi$	$dv = r^2\,sen\,\theta dr d\theta d\phi$

1.5 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1.1) As superfícies que delimitam um volume são definidas por: $\rho = 5$ e $\rho = 10$, $\phi = 2\pi/9$ e $\phi = 7\pi/9$, z = 2 e z = 20. Determinar:

a) O volume determinado pelas superfícies em questão, utilizando integração;
b) O comprimento de um segmento linear que une dois vértices opostos do volume.

Respostas: a) Volume = 375π; b) PQ = 21,59 .

1.2) Um vetor $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{a}}_\rho + \vec{\mathbf{a}}_\phi + \vec{\mathbf{a}}_z$ está aplicado no ponto P(x = 0, y = 1, z = 1) da superfície plana $x + y + z = 2$. Determinar:

a) o vetor $\vec{\mathbf{E}}$ no sistema de coordenadas cartesianas;
b) o ângulo θ que o vetor $\vec{\mathbf{E}}$ faz com o vetor normal à superfície plana;
c) as duas componentes vetoriais de $\vec{\mathbf{E}}$ normal e tangencial à superfície plana.

Respostas: a) $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{a}}_x + \vec{\mathbf{a}}_y + \vec{\mathbf{a}}_z$;b) θ =70,53°;

c) $\vec{\mathbf{E}}_N = \frac{1}{3}\left(\vec{\mathbf{a}}_x + \vec{\mathbf{a}}_y + \vec{\mathbf{a}}_z\right)$e $\vec{\mathbf{E}}_T = \frac{1}{3}\left(-4\vec{\mathbf{a}}_x + 2\vec{\mathbf{a}}_y + 2\vec{\mathbf{a}}_z\right)$.

1.3) Um vetor $\vec{\mathbf{A}}$, com módulo igual a 10, está orientado do ponto P(r = 5; $\theta = \pi/4$; $\phi = \pi/4$) à origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Expressar este vetor em:

a) coordenadas esféricas no ponto P.
b) coordenadas cartesianas no ponto P.

Respostas:a) $\vec{\mathbf{A}} = -10\vec{\mathbf{a}}_r$; b) $\vec{\mathbf{A}} = -5\vec{\mathbf{a}}_x - 5\vec{\mathbf{a}}_y - 5\sqrt{2}\,\vec{\mathbf{a}}_z$.

1.4) Dado o vetor $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{a}}_x + \vec{\mathbf{a}}_y + \vec{\mathbf{a}}_z$ aplicado ao ponto P(x = $-\sqrt{3}$, y = 1, z = 2), determinar:

a) As coordenadas esféricas r, θ e ϕ do ponto P;
b) O ângulo α que $\vec{\mathbf{A}}$ faz com a superfície esférica, centrada na origem, que passa por P;
c) O ângulo β que $\vec{\mathbf{A}}$ faz com a superfície cônica, coaxial com o eixo z, que passa por P;
d) O ângulo γ que $\vec{\mathbf{A}}$ faz com o semi-plano radial, partindo do eixo z, que passa por P.

Respostas:a) $P(r = 2\sqrt{2}; \theta = 45°; \phi = 150°)$; b) α = 75°; c) β = 123,9°; d) γ = 142,06°.

1.5) Um vetor $\vec{\mathbf{A}}$, de módulo igual 8, está situado sobre a linha reta que passa pelos pontos P(r = 10, θ = 30°, ϕ = 0°) e Q(r = 20, θ = 60°, ϕ = 90°) , e orientado no sentido de P a Q. Determinar:

a) O vetor $\vec{\mathbf{A}}$ expresso em coordenadas cartesianas;
b) O ângulo que o vetor $\vec{\mathbf{A}}$ faz com o vetor normal à superfície plana z = 0;
c) O módulo da projeção do vetor $\vec{\mathbf{A}}$ sobre a superfície plana z = 0.

Respostas:a) $\vec{\mathbf{A}} = -2{,}21\vec{\mathbf{a}}_x + 7{,}67\vec{\mathbf{a}}_y + 0{,}59\vec{\mathbf{a}}_z$; b) α = 85,75°; c) $\left|\text{Proj}\,\vec{\mathbf{A}}\right| = 7{,}98$.

1.6) Transformar o vetor $\vec{\mathbf{E}} = 5x\,\vec{\mathbf{a}}_x$ para coordenadas esféricas nos seguintes pontos:
a) A(r = 4, θ = 30º, φ = 120º);
b) B(x = $-\sqrt{2}$, y = $\sqrt{2}$, z = –2).

Respostas:a) $\vec{\mathbf{E}} = \frac{5}{4}\vec{\mathbf{a}}_r + \frac{5\sqrt{3}}{4}\vec{\mathbf{a}}_\theta + \frac{5\sqrt{3}}{2}\vec{\mathbf{a}}_\phi$; b) $\vec{\mathbf{E}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\vec{\mathbf{a}}_r - \frac{5\sqrt{2}}{2}\vec{\mathbf{a}}_\theta + 5\vec{\mathbf{a}}_\phi$.

1.7) Sejam dados os pontos A(r = 1, θ = π/3, φ = π/6) e B(r = 3, θ = π/2, φ = π/4), os quais representam 2 vértices extremos da porção de um volume esférico formado com estes pontos. Determinar, usando integração quando possível, o seguinte:
a) O volume total (vol) da porção de volume esférico formado;
b) Os vetores normais de área, $\vec{\mathbf{S}}_r$, $\vec{\mathbf{S}}_\theta$ $\vec{\mathbf{S}}_\phi$, que saem da superfície da porção de volume esférico nas direções dos vetores unitários $\vec{\mathbf{a}}_r$, $\vec{\mathbf{a}}_\theta$ e $\vec{\mathbf{a}}_\phi$, respectivamente ;
c) O comprimento do segmento AB (“diagonal principal” da porção de volume esférico);
d) O vetor $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, localizado em A e dirigido de A para B, expresso em coordenadas esféricas.

Respostas: a) vol. = $\frac{13\pi}{36}$;b) $\vec{\mathbf{S}}_r = \frac{3\pi}{8}\vec{\mathbf{a}}_r$, $\vec{\mathbf{S}}_\theta = \frac{\pi}{3}\vec{\mathbf{a}}_\theta$, $\vec{\mathbf{S}}_\phi = \frac{2\pi}{3}\vec{\mathbf{a}}_\phi$; c) AB = 2,2318
d) $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = 1{,}3713\,\vec{\mathbf{a}}_x + 1{,}6883\,\vec{\mathbf{a}}_y - 0{,}5\,\vec{\mathbf{a}}_z = 1{,}5093\,\vec{\mathbf{a}}_r + 1{,}4487\,\vec{\mathbf{a}}_\theta + 0{,}7786\,\vec{\mathbf{a}}_\phi$.

1.8) Sejam dados os dois pontos A(r = 10, θ = 45º, φ = 0º) e B(r = 10, θ = 60º, φ = 90º).
Determinar:
a) A distância d entre os dois pontos medida em linha reta;
b) A distância d’ entre os dois pontos medida ao longo da superfície esférica r = 10.

Respostas: a) d = 11,37 unidades de comprimento.
b) d’ = 12,09 unidades de comprimento.

1.9) a) Se os vetores $\overline{A} = x\bar{a}_x + 3\bar{a}_y + 3\bar{a}_z$, $\overline{B} = 2\bar{a}_x + y\bar{a}_y + 2\bar{a}_z$, e $\overline{C} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + z\bar{a}_z$, representam os lados de um paralelepípedo retângulo, quais os valores de x, y e z?
b) Determinar o volume do paralelepípedo retângulo formado acima.

Respostas: a) x = –1,5, y = –1,0, z = –0,5 unidades de comprimento;
b) vol. = 20,25 unidades de volume

1.10) Sejam 2 pontos em coordenadas esféricas $(r = 5, \theta = 60^o, \phi = 30^o)$ e $(r = 5, \theta = 30^o, \phi = 120^o)$.
Determinar:
a) A distância entre os 2 pontos medida em linha reta;
b) A distância entre os 2 pontos medida ao longo da superfície esférica r = 5;
c) O ângulo entre as 2 linhas que se estendem da origem até os 2 pontos;
d) A área compreendida entre estas 2 linhas e o círculo de raio r = 5.

Respostas: a) AB = 5,32 unidades de comprimento; b) AB = 5,61 unidades de comprimento;
c) 64,34º = 1,123 rad, d) área = 14,04 unidades de área.

1.11) Um círculo, centrado na origem, com raio de 2 unidades, situa-se sobre o plano *xy*. Determinar o vetor unitário, situado sobre o plano *xy*, que é tangente ao círculo no pontoP $\left(\sqrt{3}, 1, 0\right)$ e está apontado no sentido de crescimento do eixo *y*:

(a) Em coordenadas cartesianas; (b) Em coordenadas esféricas.

Respostas:a) $\bar{a} = -\frac{1}{2}\bar{a}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{a}_y$; b) $\bar{a} = \bar{a}_\phi$

1.12) Determinar uma expressão para calcular a distância entre dois pontos $P(\rho_1, \phi_1, z_1)$ e $Q(\rho_2, \phi_2, z_2)$ em função das coordenadas cilíndricas dos pontos.

Resposta: $d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + (z_2 - z_1)^2}$

1.13) Demonstrar que $\cos\alpha = \operatorname{sen}\theta\cos\phi$, usando produtos escalares, sendo:

α = ângulo entre o versor $\vec{a}_r$ (coord. esférica) e o versor $\vec{a}_x$ (coord. cartesiana)

θ = ângulo entre o versor $\vec{a}_z$ (coord. cartesiana) e o versor $\vec{a}_r$ (coord. esférica)

ϕ = ângulo entre o versor $\vec{a}_x$ (coord. cartesiana) e o versor $\vec{a}_\rho$ (coord. cilíndrica).

Resposta: Sugestão: Observar que $\vec{a}_r = \vec{a}_\rho \operatorname{sen}\theta + \vec{a}_z \cos\theta$ e que $\vec{a}_r \bullet \vec{a}_x = \cos\alpha$, $\vec{a}_\rho \bullet \vec{a}_x = \cos\phi$ e $\vec{a}_z \bullet \vec{a}_x = 0$

Anotações