ICEA

Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas - Campus João Monlevade

UFOP

Universidade Federal de Ouro Preto

Circuitos de Segunda Ordem

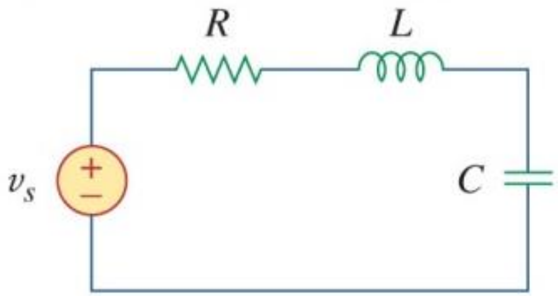
JOÃO PAULO ASSUNÇÃO DE SOUZA

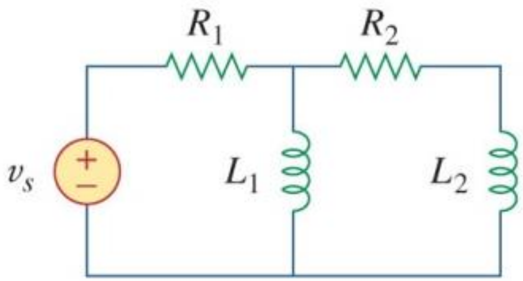
Introdução

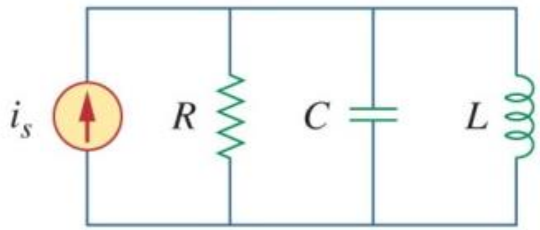
Até agora vimos os conceitos de circuitos de primeira ordem.

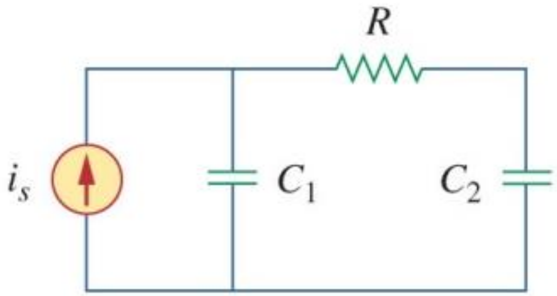
Esta aula tem o objetivo de expandir estes conceitos para circuitos de segunda ordem.

Um circuito de segunda ordem é caracterizado por uma equação diferencial de segunda ordem. Ele é formado por resistores e o equivalente de dois elementos armazenadores de energia.









Determinação dos valores inicial e final

Trabalhar com circuitos de segunda ordem é mais difícil do que os de primeira ordem pois as condições inicial e final do circuito precisam ser achadas.

É necessário saber as derivadas dv/dt e di/dt também.

Saber a polaridade do capacitor e do indutor é de crítica importância.

Corrente no indutor e tensão no capacitor são sempre contínuas.

Existem dois princípios fundamentais para se ter em mente na determinação das condições iniciais:

- A tensão e a corrente nos elementos armazenadores de energia são definidos de acordo com a regra do sinal passivo (vista na primeira aula).
- A tensão no capacitor e a corrente no indutor são contínuas, de modo que:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) \qquad v_c(0^-) = v_c(0^+)$$

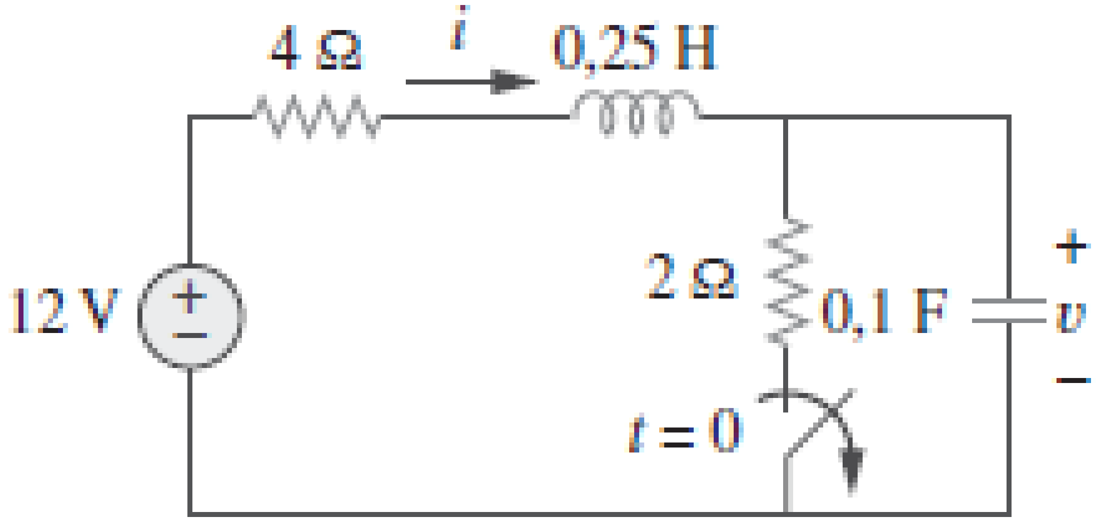
Exemplo

A chave no circuito mostrado abaixo foi fechada por um longo tempo. Ela é aberta em t=0. Determine:

a) $i(0^+), v(0^+)$.

b) $\frac{di(0^+)}{dt}, \frac{dv(0^+)}{dt}$

c) $i(\infty), v(\infty)$.



Tarefa: fazer o problema prático 8.1 da referência [1]

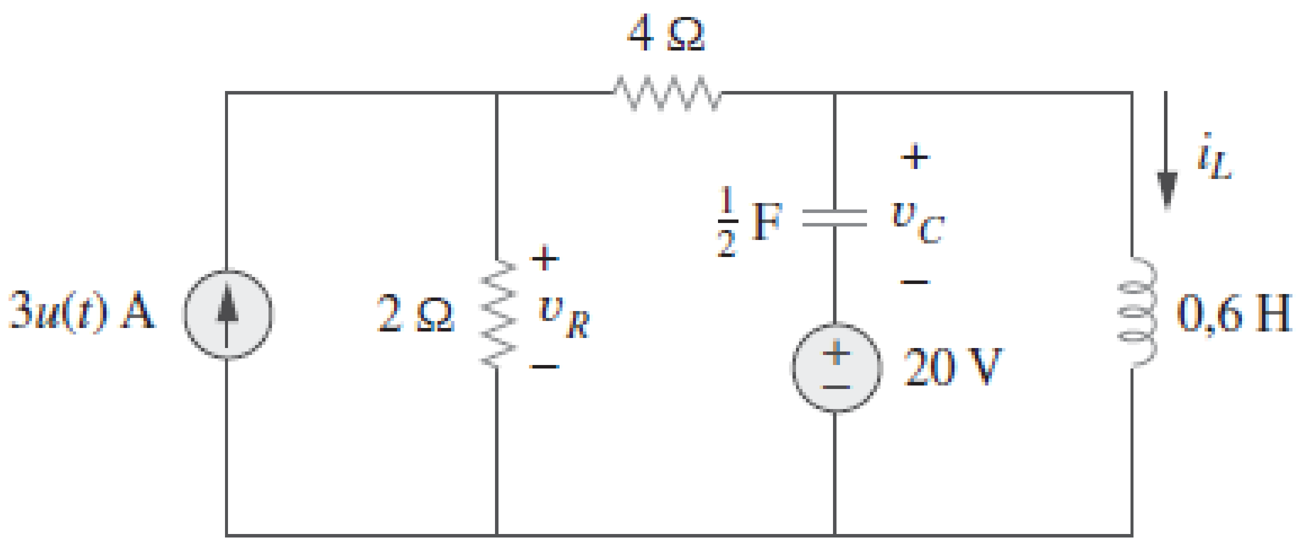
Exemplo

No circuito mostrado abaixo, calcule:

a) $i_L(0^+), v_c(0^+), v_R(0^+)$

b) $\frac{di_L(0^+)}{dt}, \frac{dv_c(0^+)}{dt}, \frac{dv_R(0^+)}{dt}$

c) $i_L(\infty), v_c(\infty), v_R(\infty)$



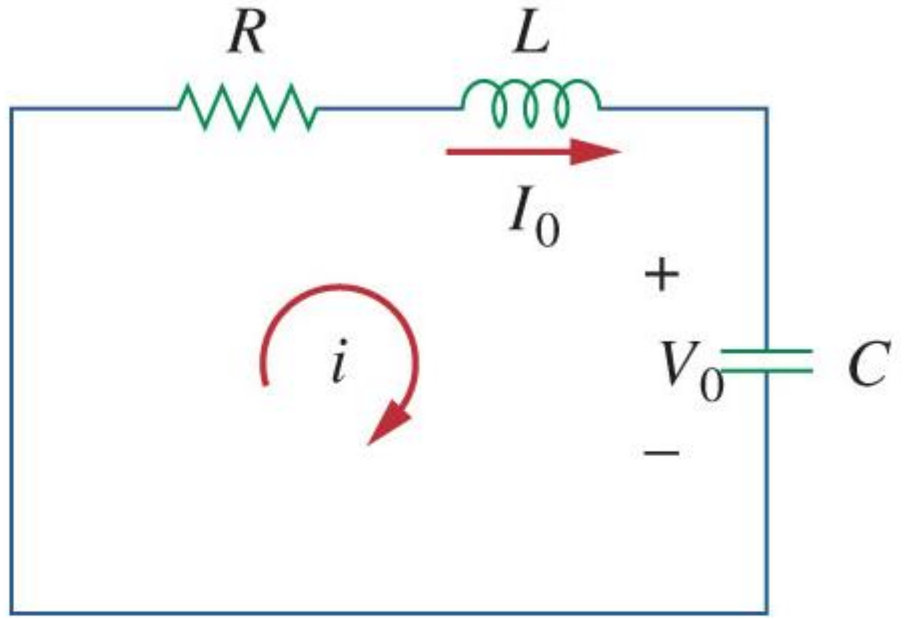
Tarefa: fazer o problema prático 8.2 da referência [1]

Circuito RLC em série sem fonte

$$v(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i\,dt = V_0$$

$$i(0) = I_0$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0}$$



Circuito RLC em série sem fonte

Duas condições iniciais são requeridas para resolver este problema:

- A corrente inicial é conhecida, que é I_0
- A primeira derivada da corrente, que é achada da seguinte forma:

$$Ri(0) + L\frac{di(0)}{dt} + V_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di(0)}{dt} = -\frac{1}{L}(RI_0 + V_0)$$

- Resolvendo a EDO:

$$Ae^{st}\underbrace{\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right)}_{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0} = 0$$

Frequências naturais

$$\overbrace{s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} \qquad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Frequência de ressonância ou frequência natural não amortecida.

Fator de amortecimento

Circuito RLC em série sem fonte

- A solução da EDO é da seguinte forma:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

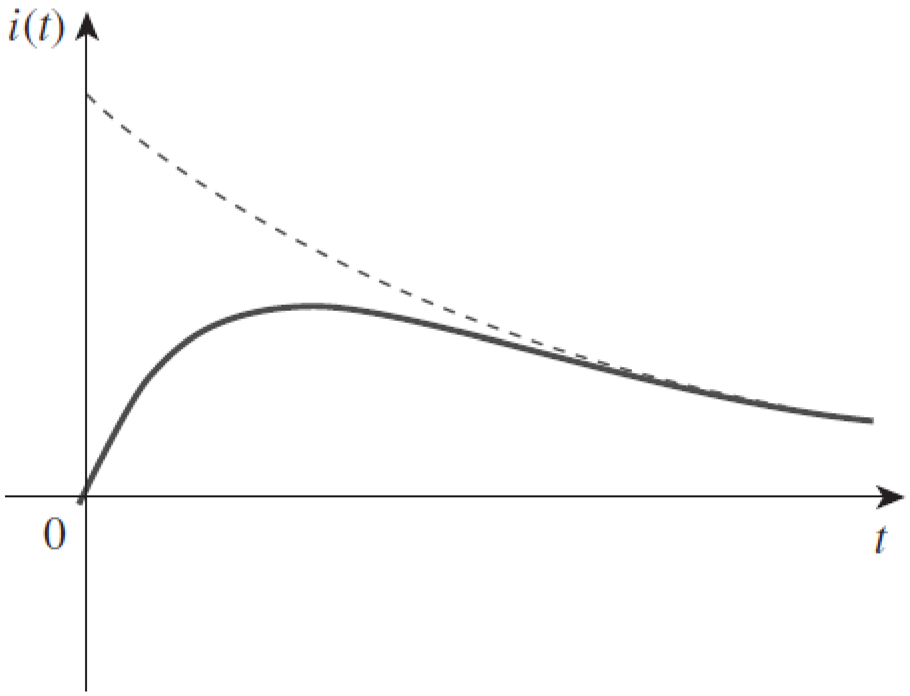
- As constantes A_1 e A_2 são achadas a partir dos valores iniciais $i(0)$ e ${}^{di(0)}/_{dt}$.

- Podemos achar três tipos de solução da equação final:
  1. Se $\alpha > \omega_0$, temos um caso de ***amortecimento supercrítico.***
  2. Se $\alpha = \omega_0$, temos um caso de ***amortecimento crítico.***
  3. Se $\alpha < \omega_0$, temos um caso de ***subamortecimento.***

Circuito RLC em série sem fonte

- Caso de ***amortecimento supercrítico*** $(\alpha > \omega_0)$:
- $C > \frac{4L}{R^2}$
- Ambas as raízes são negativas e reais.
- A solução da EDO é da seguinte forma:

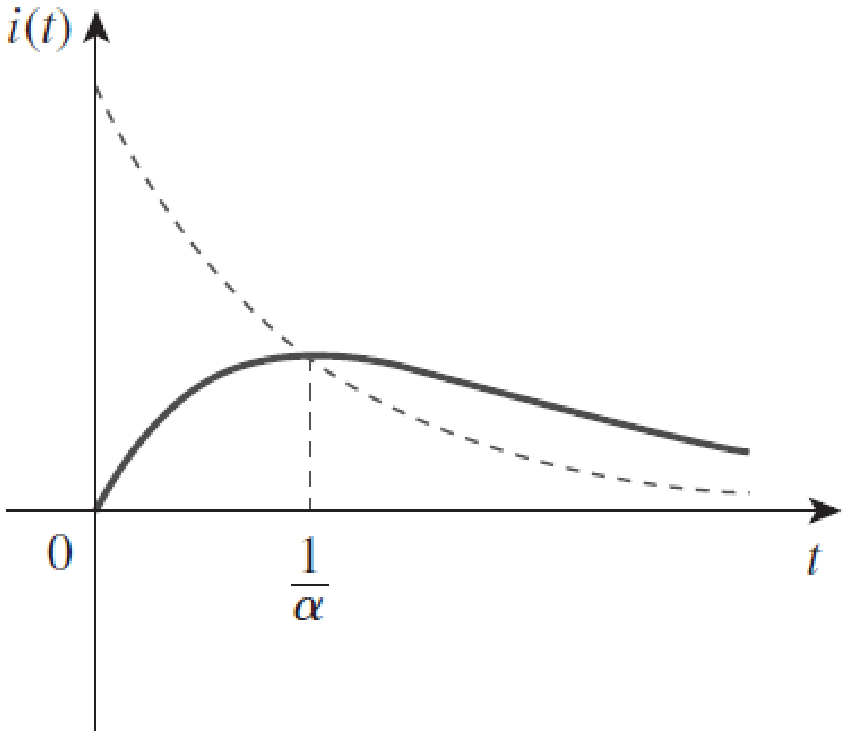
$$\boxed{i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$$



Circuito RLC em série sem fonte

- <u>Caso de ***amortecimento crítico*** $(\boldsymbol{\alpha = \omega_0})$</u>:
- $C = \frac{4L}{R^2}$
- $s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{R}{2L}$
- A solução da EDO é da seguinte forma:

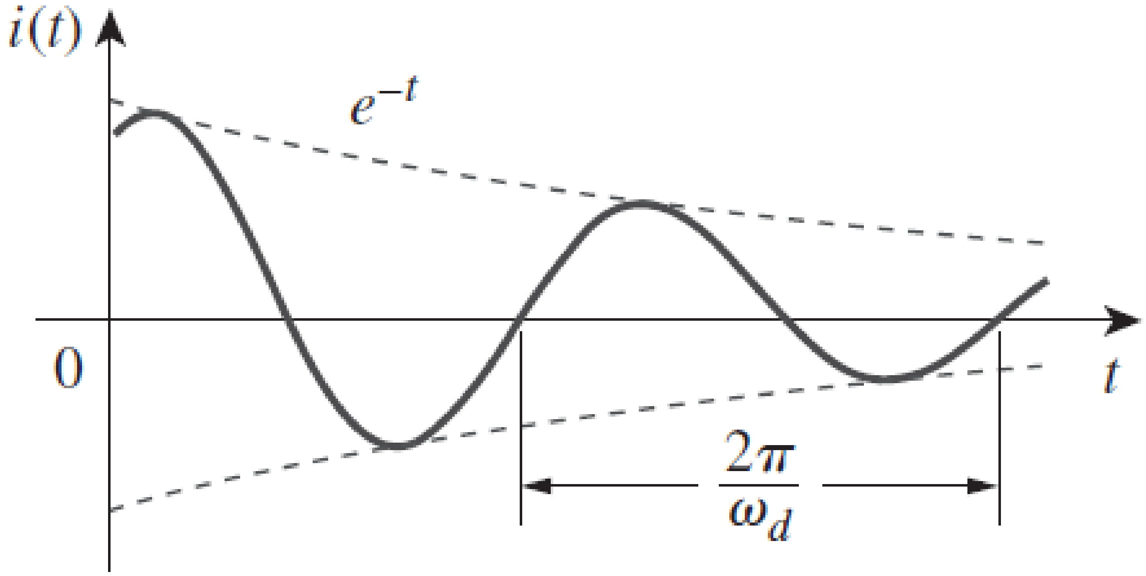
$$\boxed{i(t) = (A_2 + A_1 t)e^{-\alpha t}}$$



Circuito RLC em série sem fonte

- <u>Caso **_subamortecido_** $(\alpha < \omega_0)$</u>:
- $C < \frac{4L}{R^2}$
- $$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha + j\omega_d$$
  $$s_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha - j\omega_d$$
- A solução da EDO é da seguinte forma:

$$\boxed{i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t)}$$



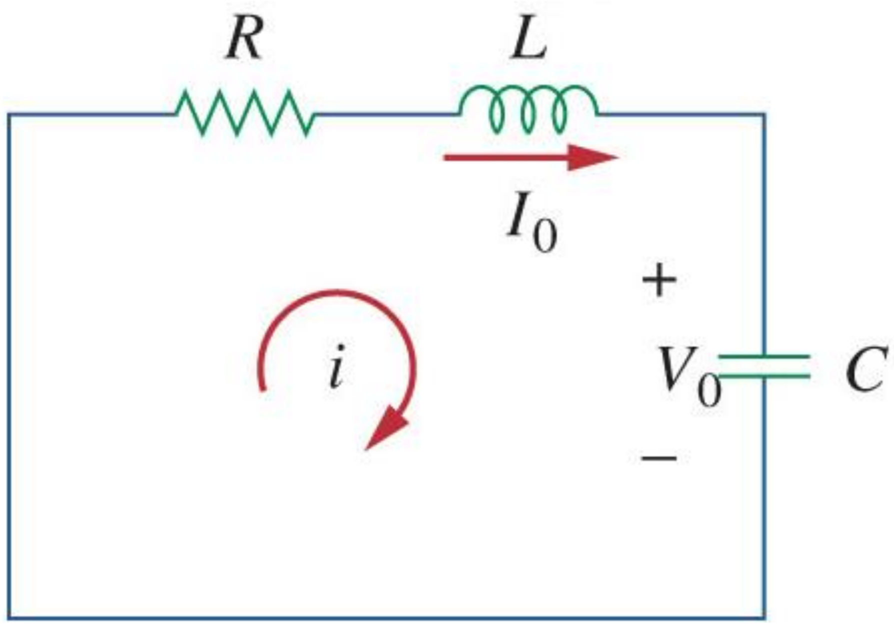
Circuito RLC em série sem fonte

O comportamento de um circuito destes pode ser compreendido pelo conceito de *amortecimento*, que é a perda gradual da energia inicial armazenada, como fica evidenciado pelo decréscimo contínuo na amplitude da resposta. O efeito de amortecimento se deve à presença da resistência R. O fator de amortecimento a determina a taxa na qual a resposta é amortecida. [1]

A resposta oscilatória é possível em razão da presença de dois tipos de elementos de armazenamento. Ter tanto L como C possibilita que o fluxo de energia fique indo e vindo entre os dois elementos. A oscilação amortecida, exibida pela resposta subamortecida, é conhecida como *oscilação circular*. Ela provém da capacidade dos elementos de armazenamento L e C transferirem energia que vai e vem entre eles. [1]

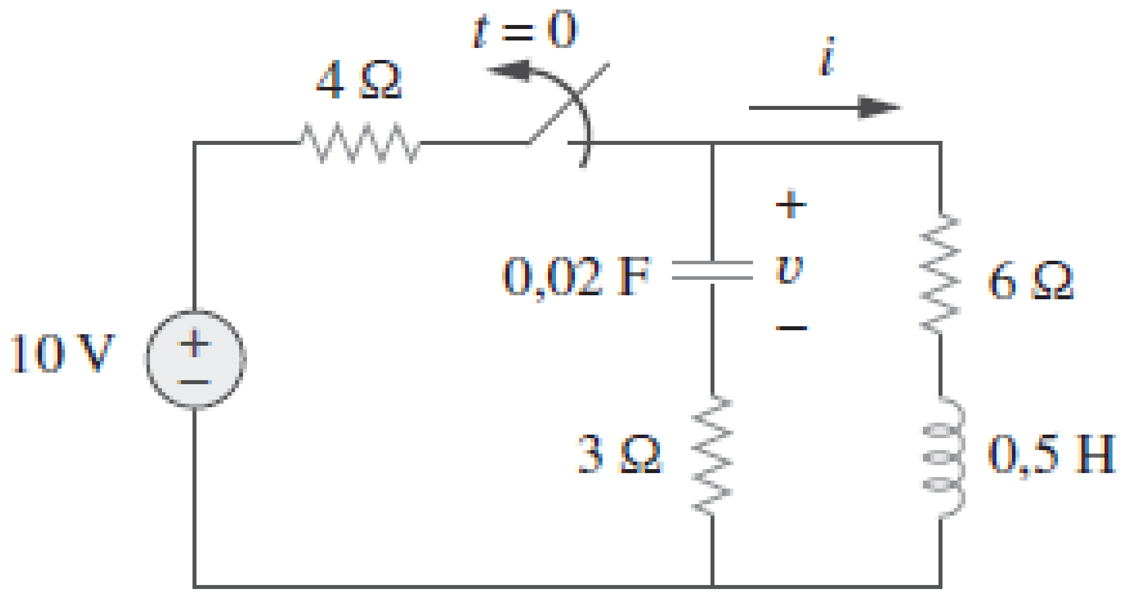
Exemplo

No circuito RLC série, R = 40 Ω, L = 4 H e C = 1/4 F. Calcule as raízes características do circuito. A resposta natural é com amortecimento supercrítico, com subamortecimento ou com amortecimento crítico?



Exemplo

Determine $i(t)$ no circuito do circuito mostrado abaixo. Suponha que o circuito tenha atingido o estado estável em $t = 0^{-}$.

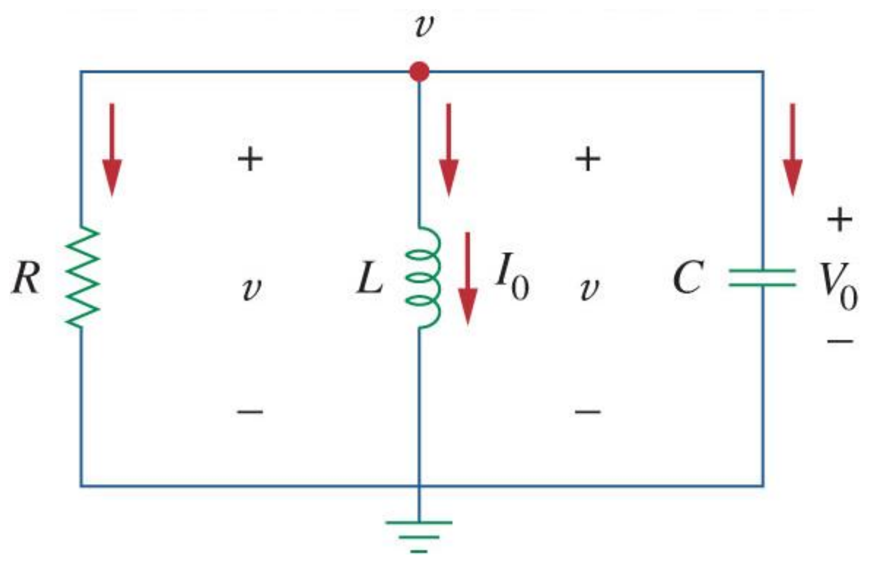


Circuito RLC em paralelo sem fonte

$$i(0) = I_0 = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} v(t)\,dt$$

$$v(0) = V_0$$

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau + C\frac{dv}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0$$



- A tensão inicial é conhecida, que é V_0
- A primeira derivada da tensão é achada da seguinte forma:

$$\frac{V_0}{R} + I_0 + C\frac{dv(0)}{dt} = 0$$

Circuito RLC em paralelo sem fonte

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

Frequências naturais

$$\overbrace{s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}^{\text{Frequências naturais}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Frequência de ressonância ou frequência natural não amortecida.

Fator de amortecimento

Circuito RLC em paralelo sem fonte

- Se $\alpha > \omega_0$, temos um caso de ***amortecimento supercrítico.***

$$\boxed{v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$$

- Se $\alpha = \omega_0$, temos um caso de ***amortecimento crítico.***

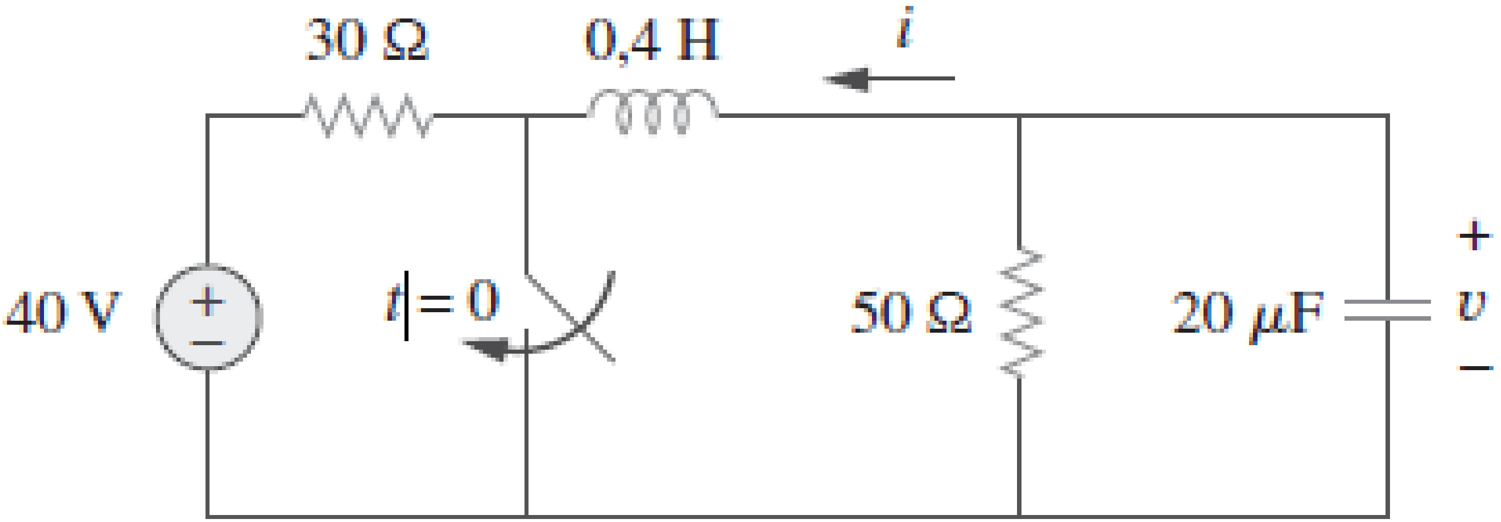
$$\boxed{v(t) = \left(A_2 + A_1 t\right) e^{-\alpha t}}$$

- Se $\alpha < \omega_0$, temos um caso de ***subamortecimento.***

$$\boxed{v(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t\right)}$$

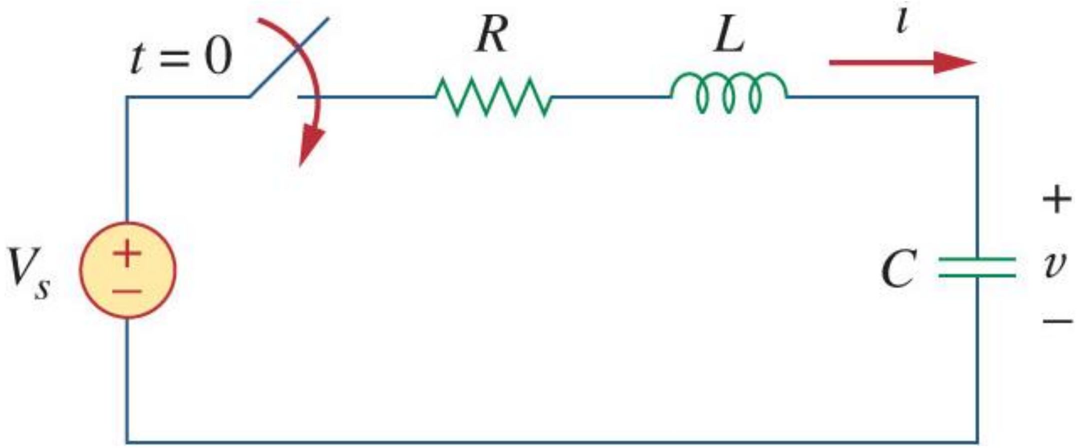
Exemplo

Determine *v*(*t*) para *t* > 0 no circuito *RLC* abaixo:



Resposta a um degrau de um circuito RLC em série

$$\left.\begin{aligned} L\frac{di}{dt} + Ri + v &= V_s \\ i &= C\frac{dv}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_s}{LC}$$



- A EDO encontrada é semelhante a do circuito sem fonte, com exceção da variável em função do tempo.
- A solução desta equação é uma função com uma parte em regime permanente e uma parte em regime transitório.

$$v(t) = v_t(t) + v_{ss}(t)$$

Resposta a um degrau de um circuito RLC em série

A resposta transiente é dividida em três categorias, exatamente como no circuito sem fonte.

$$v_t(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad \text{(Amortecimento supercrítico)}$$

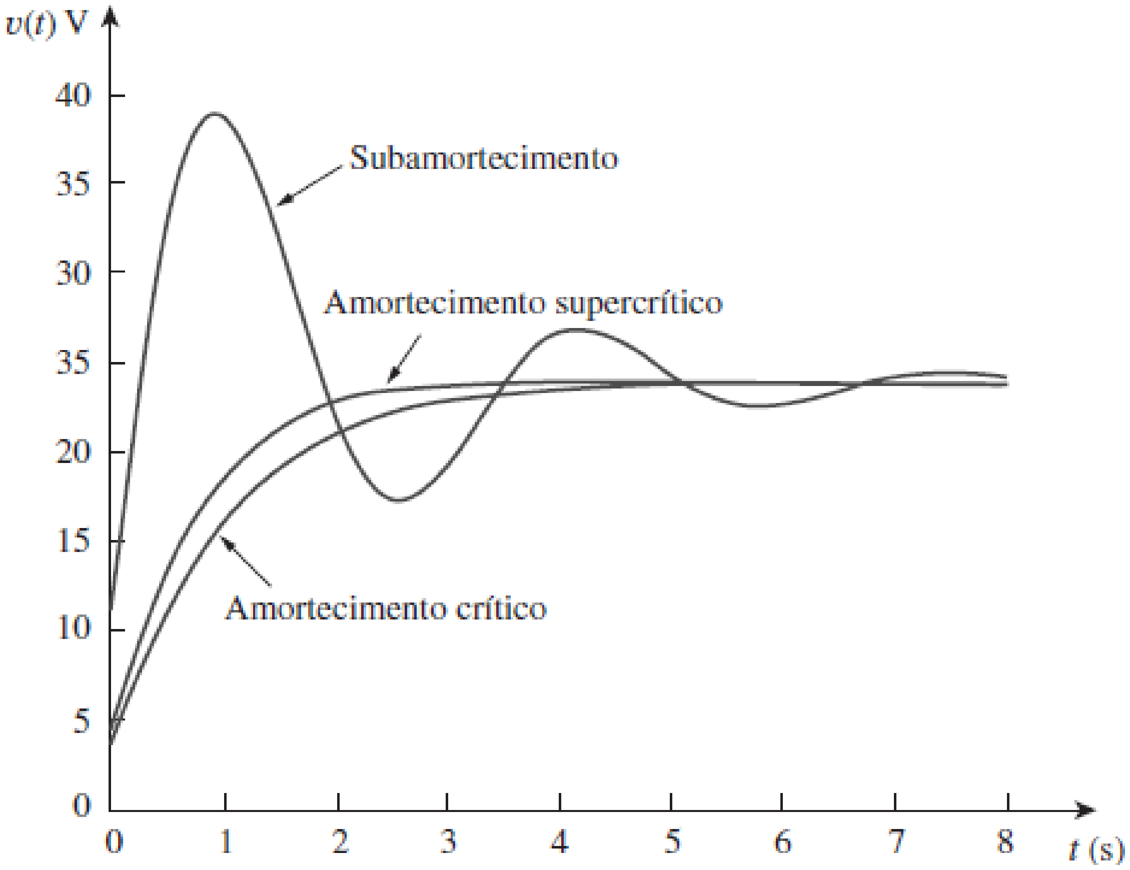
$$v_t(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t} \qquad \text{(Amortecimento crítico)}$$

$$v_t(t) = (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \operatorname{sen} \omega_d t)e^{-\alpha t} \qquad \text{(Subamortecimento)}$$

$$v_{ss}(t) = v(\infty) = V_s$$

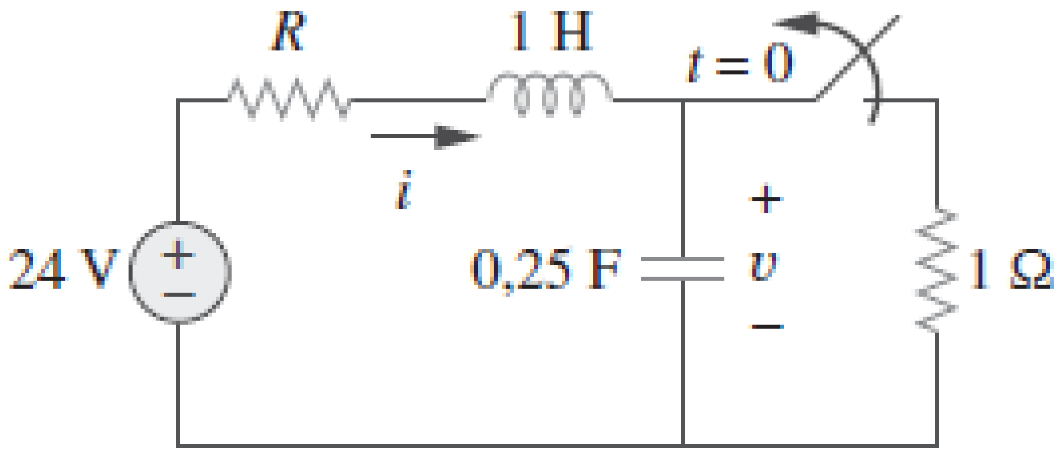
$$\boxed{\begin{array}{ll} v(t) = V_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} & \text{(Amortecimento supercrítico)} \\ v(t) = V_s + (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t} & \text{(Amortecimento crítico)} \\ v(t) = V_s + (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \operatorname{sen} \omega_d t)e^{-\alpha t} & \text{(Subamortecimento)} \end{array}}$$

Resposta a um degrau de um circuito RLC em série



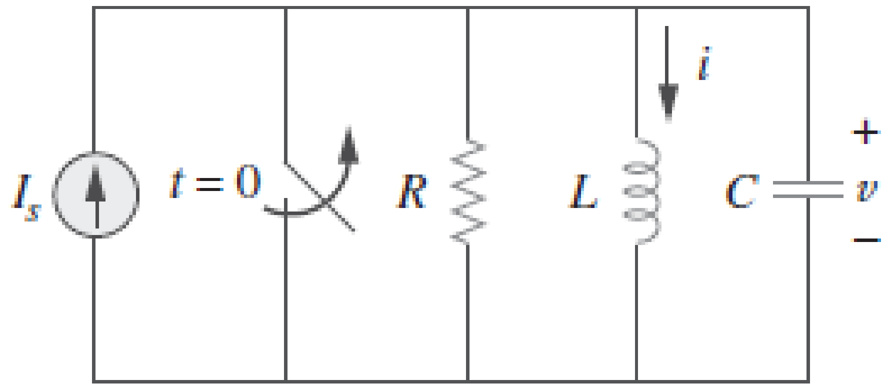
Exemplo

Para o circuito abaixo, encontre $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Considere os seguintes casos: $R = 5\ \Omega$, $R = 4\ \Omega$ e $R = 1\ \Omega$.



Resposta a um degrau de um circuito RLC em paralelo

$$\left.\begin{aligned} &\frac{v}{R} + i + C\frac{dv}{dt} = I_s \\ &v = L\frac{di}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_s}{LC}}$$



- A solução completa para a EDO deste circuito também consiste na resposta transiente $i_t(t)$ e da resposta de estado estável $i_{ss}(t)$

$$i(t) = i_t(t) + i_{ss}(t)$$

Resposta a um degrau de um circuito RLC em paralelo

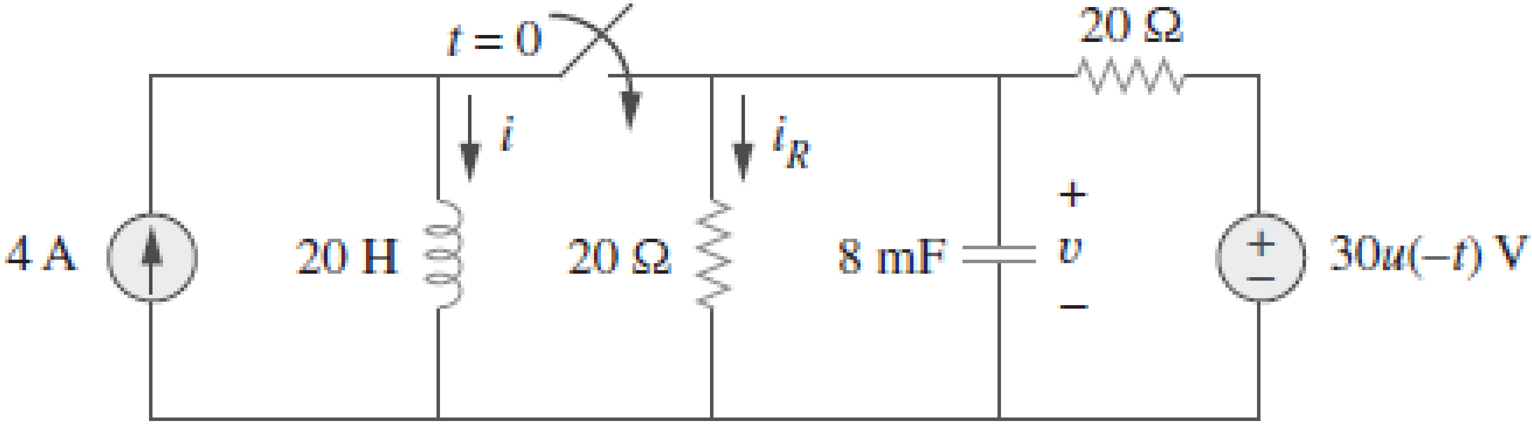
$$i(t) = I_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad \text{(Amortecimento supercrítico)}$$

$$i(t) = I_s + (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t} \quad \text{(Amortecimento crítico)}$$

$$i(t) = I_s + (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \operatorname{sen} \omega_d t)e^{-\alpha t} \quad \text{(Subamortecimento)}$$

Exemplo

No circuito mostrado abaixo, determine $i(t)$ e $i_R(t)$ para $t > 0$.



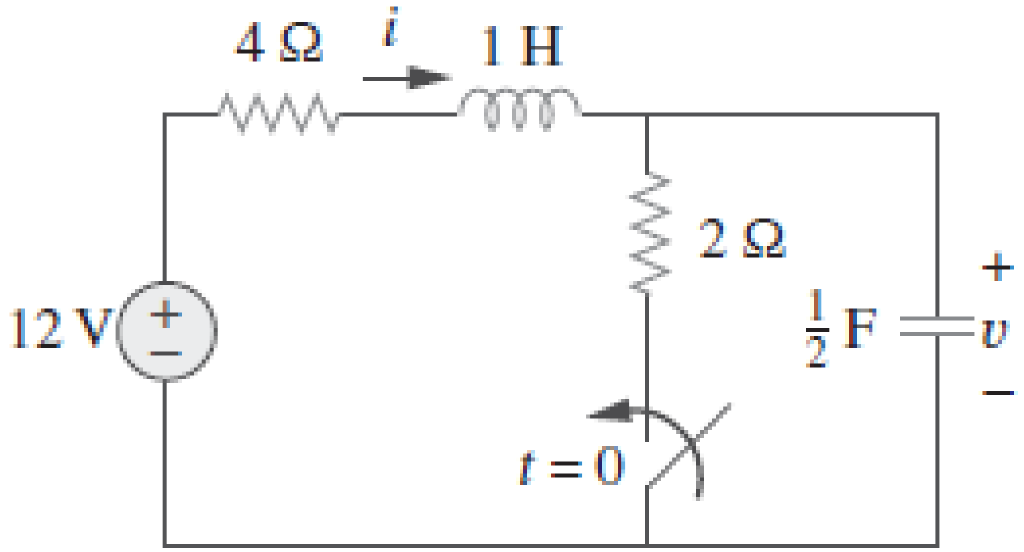
Circuitos de segunda ordem gerais

- Os princípios para se resolver um circuito de segunda ordem em geral são os seguintes:

1. Determinar as condições iniciais *x(0)* e *dx(0)/dt*.
2. Desconectar todas as fontes independentes e achar a resposta transiente através da aplicação da LKT e LKC.
3. Achar a resposta de regime permanente $x_{ss}(t) = x(\infty)$
4. Achar a resposta total somando a resposta transiente e a de regime permanente.

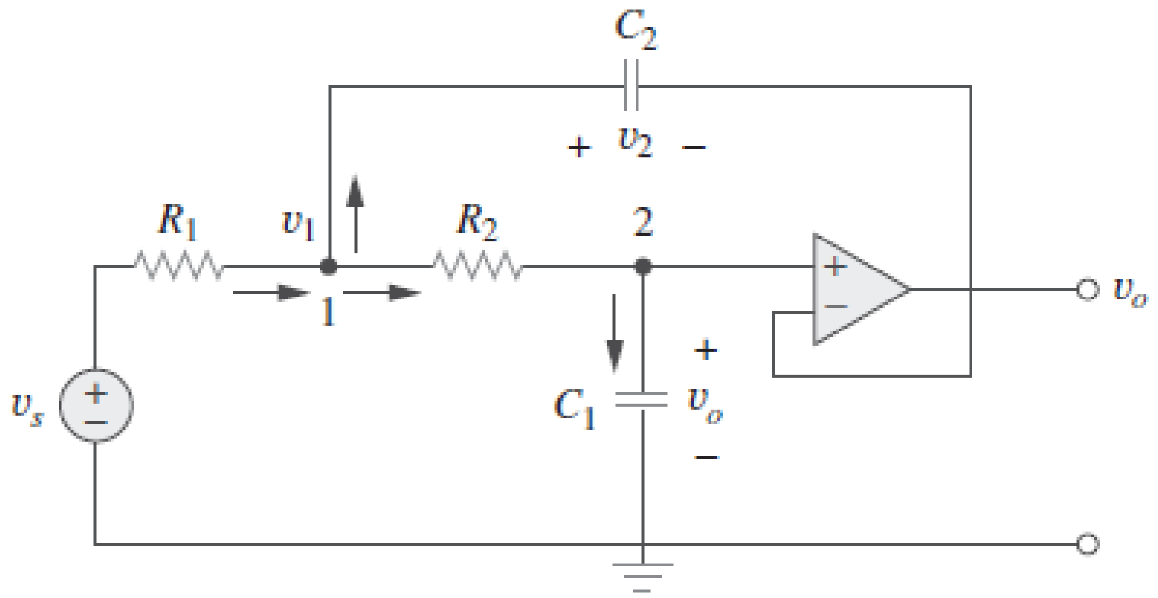
Exemplo

Determine a resposta completa *v* e, em seguida, *i* para *t* > 0 no circuito abaixo.



Exemplo

No circuito com amplificadores operacionais abaixo, encontre $v_o(t)$ para t > 0 quando $v_s(t) = 10u(t)\ mV$. Seja $R1$ = $R2$ = 10 kΩ, $C1$ = 20 μF e $C2$ = 100 μF.



Exercícios

Problemas 8.1, 8.3, 8.16, 8.23, 8.27, 8.34, 8.45 8.51, 8.57, 8.63, 8.65 da referência [1].

Bibliografia

- [1] SADIKU, M.N.O; ALEXANDER, A, K. Fundamentos de Circuitos Elétricos. 5ª edição, AMGH Editora LTDA, 2013. 840 p.