Departamento de Computação e Sistemas | DECSI - UFOP
Professor: Gleiph Ghiotto Lima de Menezes | e-mail: gleiphgh@gmail.com
Fundamentos Teóricos da Computação
Lista 1

1. Em que situações L^* é finita?

2. Seja $L = \{\lambda,\ a,\ b,\ c\}$. Quantas palavras possui L^n para um dado $n \geq 0$? Como você descreveria essa linguagem usando o português?

3. Descreva as linguagens a seguir, todas sobre o alfabeto $\{0, 1\}$, usando apenas *conjuntos finitos* e as operações de *união, interseção, complementação, concatenação* e *fecho de kleene*.
   (a) $\{w \mid |w| = 4$ e w não contém a subpalavra 01 $\}$.
   (b) O conjunto das palavras que contém 01.
   (c) O subconjunto das palavras de $\{0\}^*\{1\}^*$ com número ímpar de 0s e par de 1s.
   (d) O conjunto das palavras com três a vinte e sete símbolos.
   (e) O conjunto das palavras que contém 11, mas não contém 00.
   (f) O conjunto das palavras em que todo 1 é seguido por pelo menos dois símbolos.

4. Dê definições recursivas para as linguagens:
   (a) $\{0\}^*\{1\}^*$;
   (b) $\{0^n1^n \mid n \in N\}$;
   (c) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ é palíndromo$\}$;
   (d) $\{x01y \mid x, y \in \{0,1\}^*$ e $|x| = |y|\}$;
   (e) $\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ contém $aa\}$.

5. Faça um diagrama de estados para o problema dos missionários e canibais:

   > Três missionários e três canibais devem atravessar um rio. Para isso dispõem de uma canoa que pode transportar no máximo duas pessoas de cada vez. Durante a travessia, se o número de canibais for maior que o de missionários em qualquer margem, os canibais comem os missionários. Determinar um plano para travessia em que nenhum missionário seja devorado.

6. Faça um diagrama de estados para uma máquina que determina se uma sequência ternária (com dígitos 0, 1 e 2) é divisível por 4.

7. Construa **autômatos finitos determinísticos** para as seguintes linguagens:
   (a) $L_1 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ contém $aac\}$;
   (b) $L_2 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid$ os dois últimos símbolos de w não são $ba\}$;
   (c) $L_3 = \{xy \mid$ os dois últimos símbolos de x são ba e y contém $acc\}$;
   (d) O autômato mínimo que reconheça L_3.

8. Construa um AFN que reconheça $L = \{abc\}\{w \in \{abc\}^* \mid w$ não contém $abc\}\{abc\}$.

9. Seja o AFNλ $M = (\{0,1,2,3\}, \{a,b,c,d\}, \delta, 0, \{3\})$, em que δ é dada por:

δ	a	b	c	d	λ
0	$\{0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$
1	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$
2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$	$\{3\}$
3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3\}$	$\emptyset$

   Usando somente métodos vistos em sala de aula ou do livro-texto, construa um autômato finito que reconheça $\overline{L(M)}$.

Departamento de Computação e Sistemas DECSI - UFOP
Professor: Gleiph Ghiotto Lima de Menezes e-mail: gleiphgh@gmail.com
Fundamentos Teóricos da Computação
Lista 1

10. Para cada uma das linguagens a seguir diga se é regular ou não. Caso a linguagem seja regular, construa um autômato finito, caso contrário prove que não é regular.
    (a) $L = \{b^m a^n b^m a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$
    (b) $L = \{a^n a^n b^m b^m b^m \mid n, m \geq 0\}$

11. Emmanuel, um aluno muito curioso, descobriu que as linguagens regulares são fechadas sob a operação de reverso. Ele verificou que dado um AFD $M = (E, \Sigma, \delta, i, F)$, o AFN $M^{'} = (E, \Sigma, \delta^{'}, F, \{i\})$, em que a função de transição $\delta^{'}$ é

$$\delta^{'}(e, a) = \{e_1 \mid \delta(e_1, a) = e\}$$

, reconhece a linguagem $L(M)^R$, i.e., a linguagem do reverso de $L(M)$. Agora que você compartilha das informações obtidas por Emmanuel, faça:
    (a) Um autômato finito determinístico que reconheça $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ começa com a ou termina com $b\}$;
    (b) A partir do autômato construído no item anterior e das informações obtidas por Emmanuel, construa um AFN que reconheça a linguagem L^R;
    (c) Use a função de transição estendida, definida em sala de aula, para mostrar o processamento da palavra *aabba* no autômato da letra a e da palavra *abbaa* no autômato construído na letra b.

12. Suponha que R é uma linguagem regular e L uma linguagem qualquer. Mostre que:
    (a) LR pode ser regular ou não;
    (b) se $L \cap \overline{R}$ não é regular, então L não é regular;
    (c) se L^* não é regular, então L não é regular.

13. Usando o lema do bombeamento, demonstre que a linguagem $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid$ a quantidade de a's em w é igual a quantidade de b's$\}$ não é regular.

14. Usando propriedades de fechamento, demonstre que a linguagem $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid$ a quantidade de a's em w é diferente da quantidade de b's$\}$ não é regular.

15. Bidu estava tentando descobri se a linguagem $L = \{0^n 1^m 0^m \mid n > 0 \text{ e } m \geq 0\} \cup \{1\}^*\{0\}^*$ é regular ou não. Em uma de suas tentativas, ele apresentou a seguinte demonstração de que essa linguagem satisfaz o lema do bombeamento:

    Sejam $k = 1$ e z uma palavra de L tal que $|z| \geq k$.
    caso 1: $z \in L = \{0^n 1^m 0^m \mid n > 0 \text{ e } m \geq 0\}$
    Como z tem tamanho maior ou igual a 1 e toda palavra de L começa com uma sequência de pelo menos um zero, tem-se que $z = 0x$, com $x \in \{0^n 1^m 0^m \mid n, m \geq 0\}$. Sejam $u = \lambda$, $v = 0$, $w = x$ e $i \in \mathbb{N}$. Claramente,

    - $z = uvw$;
    - $|uv| = |0| = 1 \leq k$;
    - $v = 0 \neq \lambda$; e
    - $uv^i w = 0^i x \in L$, se $n > 0$ e $uv^0 w = x \in L$.

    caso 2: $z \in \{1\}^*\{0\}^*$ Trivial, pois $\{1\}^*\{0\}^*$ é uma linguagem regular.

Portanto, L satisfaz o lema do bombeamento.
    (a) Sabendo que a prova acima apresentada pelo Bidu está correta, pode-se afirmar que a linguagem L é regular? Justifique.
    (b) Prove que a linguagem $K = \{0^m 1^m 0^n \mid m \geq 0 \text{ e } n > 0\}$ não é regular. Note que $K \neq L$.
    (c) Sabendo que linguagens regulares são fechadas sob a operação de reverso, pode-se afirma que a linguagem L é regular? Justifique.

16. Determine se os seguintes problemas de decisão são decidíveis ou não. Justifique sua resposta.
    (a) Determinar se, dado um AFD M, $L(M)$ por ser reconhecida por um autômato finito com no máximo n estados.
    (b) Determinar se uma linguagem regular pode ser reconhecida por um AFD de um trilhão de estados.
    (c) Dado um AFD M, determinar se $L(M)$ é finita.
17. Construa autômatos finitos determinísticos (AFDs) mńimos para as seguintes linguagens:
    (a) $\{w \in \{0,1\}^* \mid |w| = 4$ e w não contém a subpalavra 01 $\}$.
    (b) O conjunto das palavras que contém 01.
    (c) O subconjunto das palavras de $\{0\}^*\{1\}^*$ com número ímpar de 0s e par de 1s.
    (d) O conjunto das palavras que contém 11, mas não contém 00.
    (e) O conjunto das palavras em que todo 1 é seguido por pelo menos dois símbolos.
    (f) $\{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \geq 2$ e o penúltimo símbolo de w é 1 $\}$.
    (g) $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ o último símbolo de w é igual ao primeiro $\}$.
    (h) $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ os três últimos símbolos de w não são 000 $\}$.
    (i) $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ em w o símbolo da posição $2i$ é diferente do símbolo da posição $2i+2$ para cada $i \geq 0\}$.
18. Considere as seguintes linguagens sobre $\Sigma = \{0,1\}$:
    (a) $L_1 = \{11\}\{10\}^*\{01\}$
    (b) $L_2 = \{1\}\{0,1\}^*\{0\}$
    (c) $L_3 = \{0,1\}^*\{11\}$
    (d) $L_4 = \{0,1\}^*\{0\}\{0,1\}^*$

    A partir do apresentado, faça o que se pede:
    (a) Descreve usando o português cada uma das linguagens descritas acima.
    (b) Construa AFDs mínimos para cada uma dessas linguagens.
    (c) Construa AFDs que reconheça cada uma das linguagens:
        i. $L_1 \cup L_2$
        ii. $L_3 \cap L_4$
        iii. $\overline{L_3}$
        iv. $L_1 \cap \overline{L_2}$
        v. $L_4 - L_1$
19. Sejam as linguagens:
    - A $= \{w \in \{a,b\}^* \mid$ *o número de* as *em* w *é par*$\}$.
    - B $= \{w \in \{b,c\}^* \mid$ *o número de* bs *em* w *é par*$\}$.
    - C $= \{w \in \{a,c\}^* \mid$ *o número de* cs *em* w *é par*$\}$.

    Construa um AFN M que reconheca $L(M) = ABC$.
20. Para cada uma das linguagens abaixo prove se são linguagens regulares ou não:
    (a) $\{0^n1^{2n} \mid n \geq 0\}$;
    (b) $\{x\#x \mid x \in \{0,1\}^*\}$;
    (c) $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$;

(d) $\{0,1\}^* - \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$;

(e) $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ *o número de* $0s$ *em* w *é igual ao de* $1s\}$;

(f) $\{0^m1^n \mid m < n\} \cup \{0^m1^n \mid m > n\} \cup \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$;

(g) $\{0,1\}^* - \{01, 10\}^*$;

(h) $\{0^n1^n \mid 0 \leq n \leq 10^{1000}\}$.