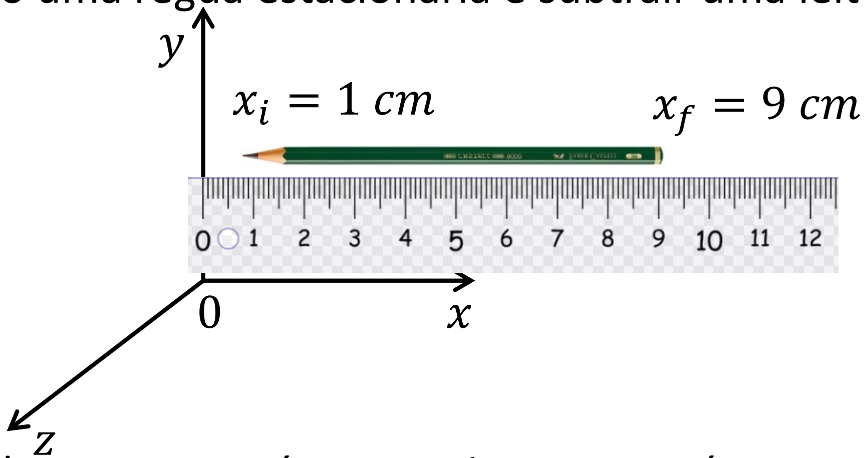
37.6 A Relatividade das Distâncias

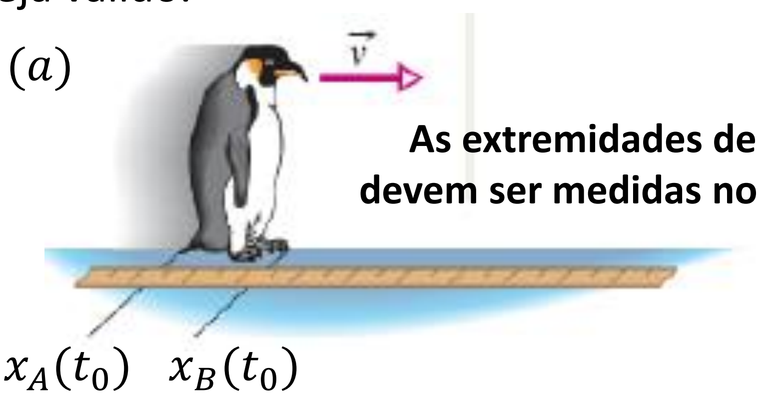
Quando queremos medir o comprimento de um corpo que se encontra em repouso em nosso referencial podemos, com toda calma, medir as coordenadas das extremidades do corpo usando uma régua estacionária e subtrair uma leitura da outra.



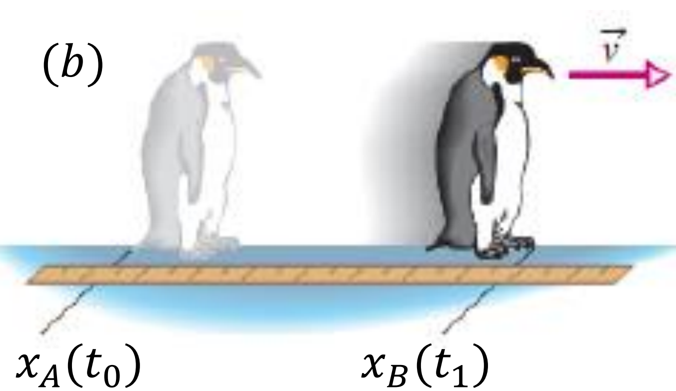
Comprimento próprio do lápis

$$L_0 = \Delta x = x_f - x_i = 8\ cm$$

Quando o corpo está em movimento, porém, precisamos observar **simultaneamente** (em nosso referencial) as coordenadas das extremidades do corpo para que o resultado de nossas medidas seja válido.



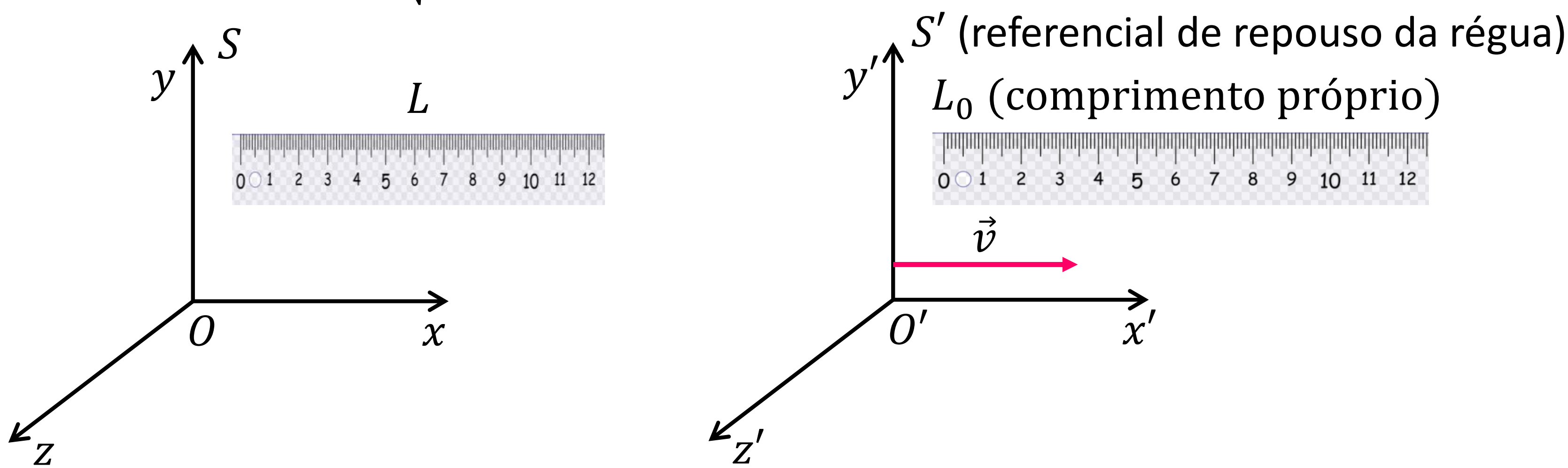
As extremidades de uma distância devem ser medidas no mesmo instante.



Par medir o comprimento de um pinguim em movimento devemos observar as coordenadas da parte dianteira e traseira do corpo do animal simultaneamente (em nosso referencial), como em (a), e não em instantes diferentes, como em (b).

Seja L_0 o comprimento de uma régua medido no referencial de repouso da régua, ou seja, no referencial em que a régua está estacionária. Se o comprimento da régua é medido em outro referencial em relação ao qual a régua está se movendo com velocidade $\vec{v}$ ao longo da maior dimensão, o resultado da medida é um comprimento L dado por

$$L = L_0\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{L_0}{\gamma}. \quad \text{(contração das distâncias)} \qquad (37.13)$$

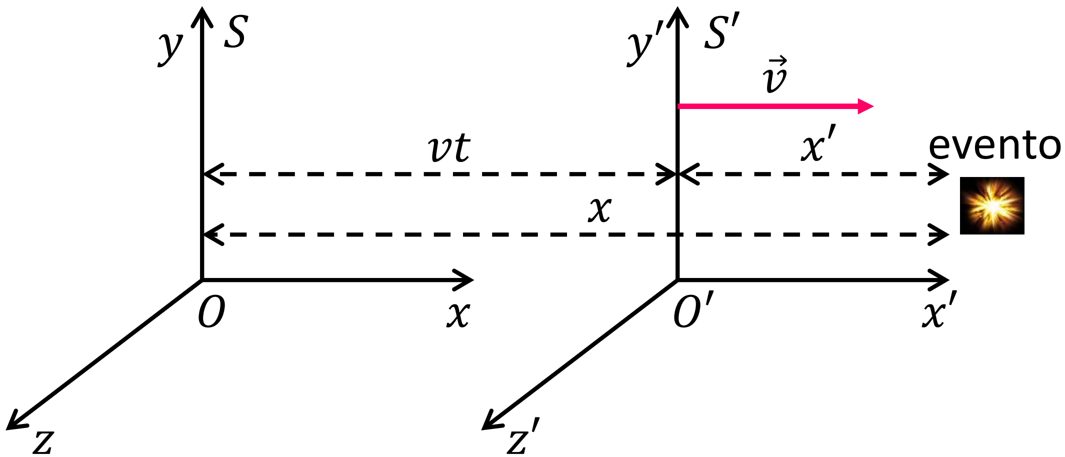


- O comprimento L_0 de um corpo medido no referencial em que o corpo se encontra estacionário é chamado de **comprimento próprio** ou **comprimento de repouso**. O comprimento medido em outro referencial em relação ao qual o corpo está se movendo (na direção da dimensão que está sendo medida) é sempre menor que o comprimento próprio, ou seja, $L < L_0$ (pois $\gamma > 1$ se $|v| > 0$).

❖ **Atenção:** a contração das distâncias ocorre apenas na direção do movimento relativo (no caso acima, na direção x). Além disso, a distância medida não precisa ser o comprimento de uma corpo; pode ser também a distância entre dois corpos no mesmo referencial.

37.7 A Transformação de Lorentz

Para um observador S um evento ocorre nas coordenadas x, y, z, t, enquanto que para um observador em S' o mesmo evento ocorre nas coordenadas x', y', z', t$'$. Quais as relações entre as coordenadas x', y', z', t$'$ e x, y, z, t dos dois referenciais inerciais?



As Equações da Transformação de Galileu

Antes que Einstein formulasse a Teoria da Relatividade Restrita os físicos supunham que as 4 coordenadas de interesse estavam relacionadas pelas **equações da transformação de Galileu:**

Equações válidas no limite em que $v \ll c$.

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad (37.20)$$

Essas equações foram escritas supondo que $t = t' = 0$ quando as origens de S e S' coincidem.

As Equações da Transformação de Lorentz

As relações corretas entre as 4 coordenadas de interesse são conhecidas como **equações da transformação de Lorentz:**

Equações válidas para qualquer velocidade fisicamente possível.

Essas equações foram escritas supondo que $t = t' = 0$ quando as origens de S e S' coincidem.

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \qquad (37.21)$$

É preciso ter uma mente muito fora do comum para analisar o óbvio." **Alfred Whitehead**

"De agora em diante, o espaço por si só e o tempo por si só estão condenados a desvanecer gradualmente até se reduzirem a meras sombras e apenas alguma espécie de união dos dois preservará uma realidade independente." **Hermann Minkowski**

❖ **Note que:**

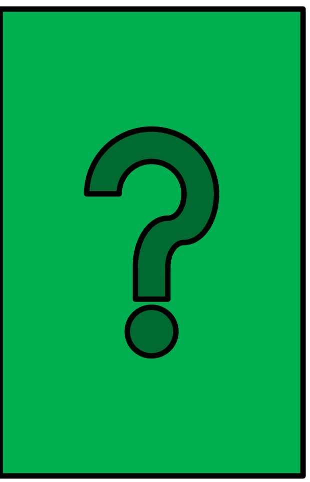
$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \xrightarrow{v \ll c} \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

As Equações da Transformação Inversa de Lorentz

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \end{cases}$$

Transformação inversa

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{vx'}{c^2}\right) \end{cases} \qquad (37.22)$$



E se quisermos relacionar não as coordenadas de um único evento, mas sim as diferenças entre as coordenadas de um par de eventos? Em outras palavras, chamando os eventos de 1 e 2, estamos interessados em relacionar

$$\Delta x = x_2 - x_1 \text{ e } \Delta t = t_2 - t_1$$

medidos por um observador no referencial S, a

$$\Delta x' = x_2' - x_1' \text{ e } \Delta t' = t_2' - t_1',$$

medidos por um observador no referencial S'.

$$\begin{cases} \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \dfrac{v\Delta x}{c^2}\right) \end{cases}$$

Transformação inversa

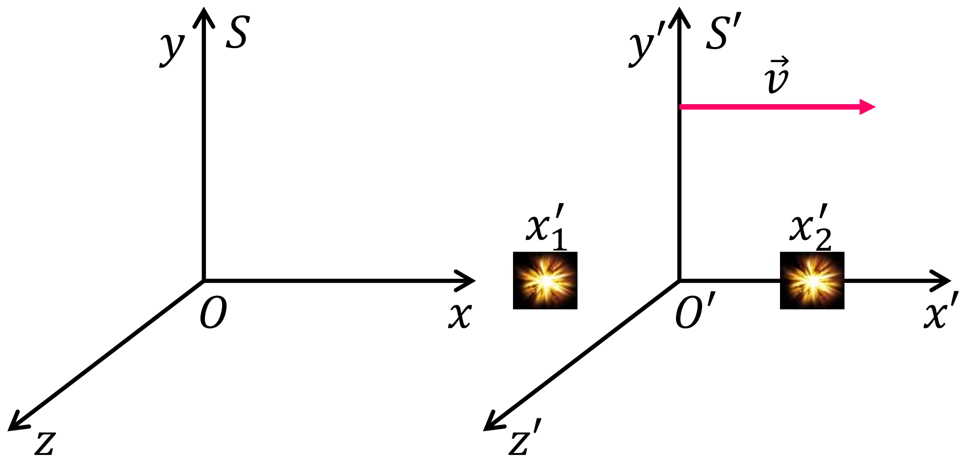
$$\begin{cases} \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \dfrac{v\Delta x'}{c^2}\right) \end{cases}$$

37.8 Algumas Consequências das Equações de Lorentz

Simultaneidade

Considere a equação

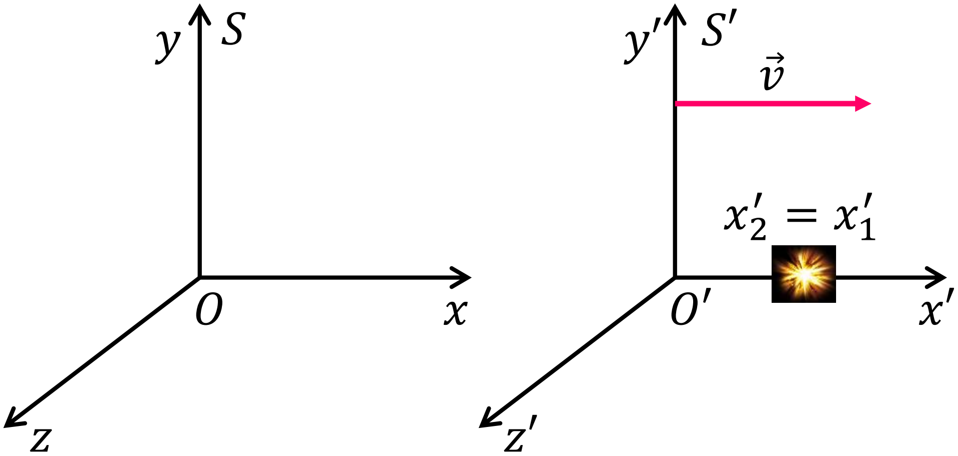
$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right). \quad (37.23)$$



Se dois ventos ocorrem em locais diferentes ($x_2' \neq x_1'$) no referencial $S' \Rightarrow \Delta x' \neq 0$. Assim, dois eventos simultâneos ($t_2' = t_1'$) em S' (tais que $\Delta t' = 0$) não são simultâneos em S, pois

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right) \Rightarrow \Delta t = \gamma\frac{v\Delta x'}{c^2}. \quad \text{(eventos simultâneos em } S'\text{)}$$

Dilatação dos Tempos



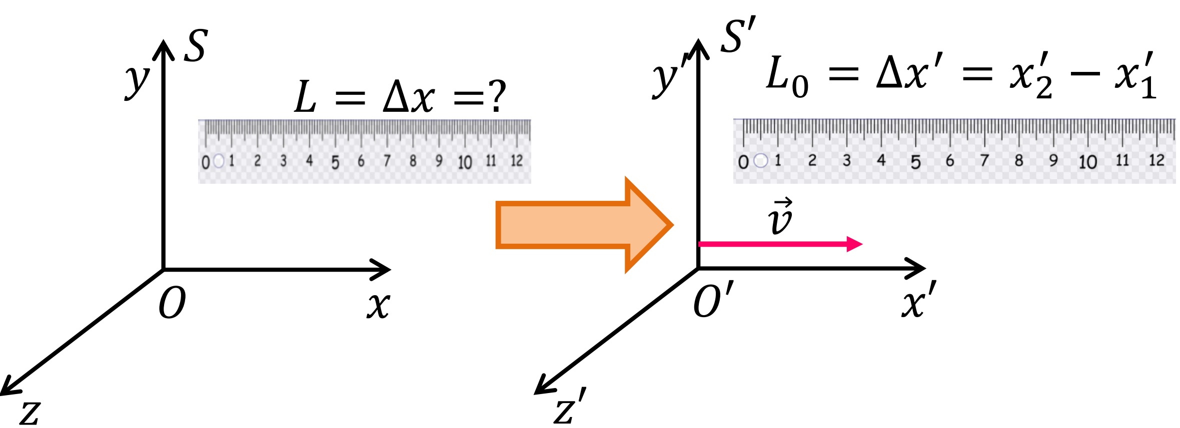
Considere a equação $\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right).$

Se dois ventos ocorrem no mesmo local $(x_2' = x_1')$ no referencial $S' \Rightarrow \Delta x' = 0$. Dessa forma, o intervalo de tempo Δt medido no referencial S para os mesmos dois eventos que não são simultâneos $(t_2' \neq t_1')$ em S' (tais que $\Delta t' \neq 0$) é dado por

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \text{(dilatação dos tempos)} (37.25)$$

Contração das Distâncias

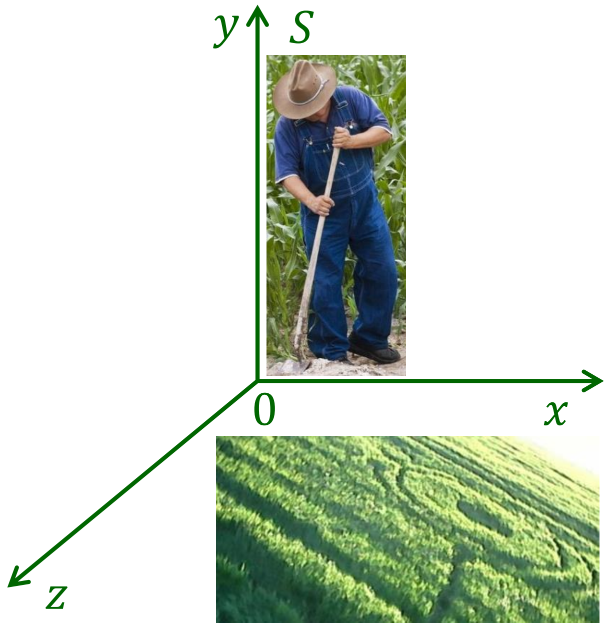
Considere a equação $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t).$ (37.25)

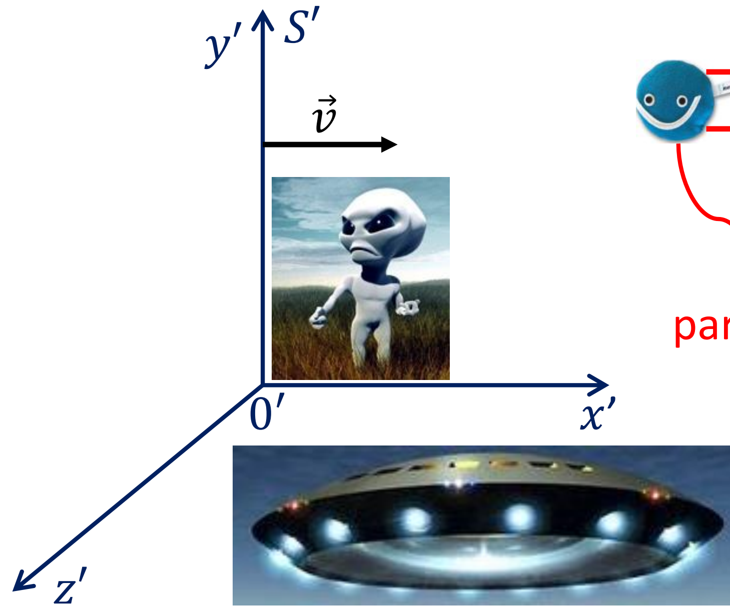


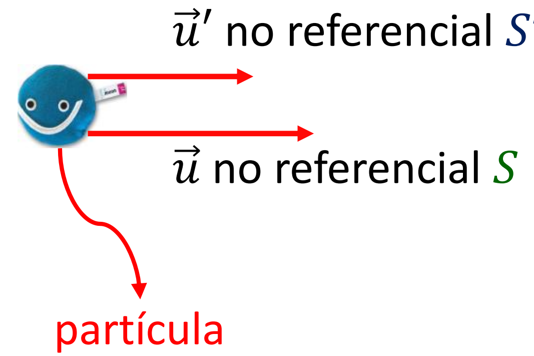
Δx é o comprimento da régua medido no referencial S apenas se as coordenadas das extremidades da régua (x_1 e x_2) forem medidas simultaneamente, isto é, se $\Delta t = 0$. Fazendo $\Delta x' = L_0$, $\Delta x = L$ e $\Delta t = 0$ eq. (37.25), obtemos

$$L_0 = \gamma L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{L_0}{\gamma}. (37.26)$$

37.9 A Relatividade das Velocidades







$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Imagine que uma partícula, que está se movendo com velocidade constante paralelamente aos eixos x e x', emite um sinal e, algum tempo depois, emite um segundo sinal. Observadores situados nos referenciais S e S' medem a distância e o intervalo de tempo entre os dois eventos. As 4 medidas estão relacionadas pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \dfrac{v\Delta x'}{c^2}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + \dfrac{v\Delta x'}{c^2}} \Rightarrow \frac{\Delta x/\Delta t}{\Delta t/\Delta t} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v\,\Delta t'/\Delta t'}{\Delta t'/\Delta t' + \dfrac{v\,\Delta x'/\Delta t'}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v}{1 + \dfrac{v\,\Delta x'/\Delta t'}{c^2}} \Rightarrow \boxed{u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{v\,u'}{c^2}}.\ (37.29)} \xrightarrow{v \ll c} u = u' + v$$

Exercícios sugeridos das Seções 37.6, 37.8 e 37.9: 8, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30 e 31.

18) Para um certo observador S um evento aconteceu no eixo x do seu referencial nas coordenadas $x_1 = 3{,}00 \times 10^8\ m$ e $t_1 = 2{,}5\ s$. O observador S' está se movendo no sentido positivo do eixo x com uma velocidade de $0{,}400\ c$. Além disso, $x = x' = 0$ no instante $t = t' = 0$. Determine as coordenadas **(a)** espacial e **(b)** temporal do evento no referencial S'. Quais seriam as coordenadas **(c)** espacial e **(d)** temporal do evento no referencial S' se o observador de S' estivesse se movendo com a mesma velocidade no sentido *negativo* do eixo x?

Dicas: **(a)** $x' = \gamma(x - vt)$, **(b)** $t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$, **(c)** $x' = \gamma(x + vt)$ e **(d)** $t' = \gamma\left(t + \frac{vx}{c^2}\right)$, onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$. Considere que $c = 2{,}998 \times 10^8\ m/s$.

Respostas: **(a)** $x_1' = 2{,}18 \times 10^5\ m$. **(b)** $t_1' = 2{,}29\ s$. **(c)** $x_1' = 6{,}54 \times 10^8\ m$. **(d)** $t_1' = 3{,}16\ s$.