CapítuloIII

DENSIDADE DE FLUXO ELÉTRICO, LEI DE GAUSS E DIVERGÊNCIA

3.1 – DENSIDADE DE FLUXO ELÉTRICO ($\overline{D}$)

É o fluxo por área produzido por cargas livres e é independente do meio onde estas estão situadas.

Fórmula geral: $\boxed{\overline{D} = \varepsilon_o \overline{E} = \int \frac{dQ}{4\pi R^2} \overline{a}_R}$ (Unidade: C/m^2)

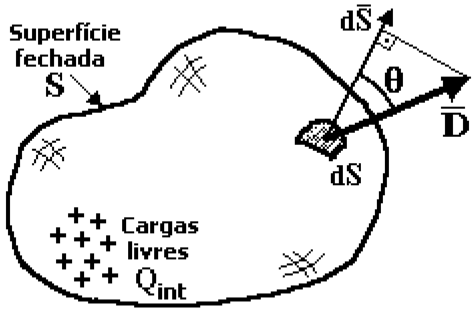
ondedQ = ρ_LdL= $\rho_s$ds = $\rho_v$dv, dependendo da configuração de cargas.

3.2 – A LEI DE GAUSS

"O fluxo elétrico (líquido) que atravessa qualquer superfície fechada é igual a carga total interna envolvida por esta superfície".

A expressão matemática é dada por:

$$\boxed{\Psi_{total} = \oint_S \overline{D} \bullet d\overline{S} = Q_{interna}}$$ (Unidade: C)



onde,

$Q_{interna} = \int_{vol.} \rho_v dv$ (Nota: No SI: $\boxed{\Psi_{total} = Q_{int}}$)

3.3 – APLICAÇÃO DA LEI DE GAUSS – GAUSSIANA

Gaussiana (def.): É uma superfície especial com as seguintes propriedades:

(i) É uma superfície fechada;

(ii) Em cada um de seus pontos $\overline{D}$ é tangencial ou $\overline{D}$ é normal. Assim,
se $\overline{D} \perp d\overline{S} \Rightarrow \overline{D} \bullet d\overline{S} = 0$; (Neste caso $\overline{D}$ é tangencial à gaussiana)
se $\overline{D} // d\overline{S} \Rightarrow \overline{D} \bullet d\overline{S} = D\, dS$ (Neste caso $\overline{D}$ é normal à gaussiana)

(iii) Em todos os pontos onde $\overline{D} // d\overline{S}$, a magnitude de $\overline{D}$ é constante.

Cálculo de $\overline{D}$, aplicando a lei de Gauss (e gaussiana), para os seguintes casos especiais:

a) Carga pontual Q

Para uma gaussiana esférica de raio R

$$\oint_{S_{gaussiana}} \overline{D} \bullet d\overline{S} = Q_{int} \quad \text{(Lei de Gauss)}$$

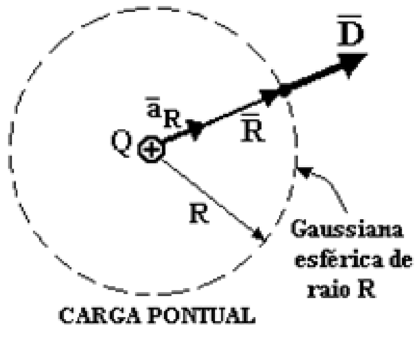
Como $\overline{D} // d\overline{S}$ e $|\overline{D}| =$ cte. em todos pontos da gaussiana

D (área da esfera)= Q

D $4\pi R^2$ = Q

Logo:

$$\boxed{D = \frac{Q}{4\pi R^2}}$$



Em forma vetorial:

$$\boxed{\overline{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\overline{a}_R}$$ ($\overline{D}$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância)

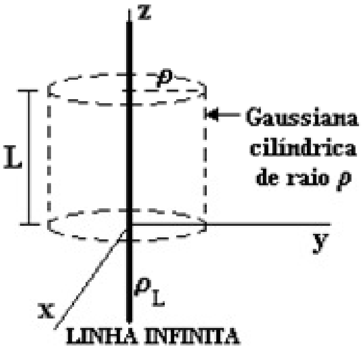
b) Filamento retilíneo ∞ com $\rho_L = dQ/dL$ ***= constante***

Para uma gaussiana cilíndrica de raio ρ

$$\oint_{S_{gaussiana}} \overline{D} \bullet d\overline{S} = Q_{int} \quad \text{(Lei de Gauss)}$$

D (área lateral do cilindro) = $\rho_L L$

D $2\pi\rho L = \rho_L L$



Logo:

$$\boxed{D = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}}$$

Em forma vetorial:

$$\boxed{\overline{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\overline{a}_\rho}$$ ($\overline{D}$ é inversamente proporcional à distância)

c) Cabo coaxial∞ com os condutores central (+Q) e externo (–Q) com ρ_s ***constante***

Aplicando a lei de Gauss para uma gaussiana cilíndrica de raio ρ (ver figura),

$$\oint_{S_{gaussiana}} \overline{D} \bullet d\overline{S} = Q_{int}$$

temos as seguintes situações:

i) Se $\rho < a \Rightarrow D = 0$, pois a carga interna é nula

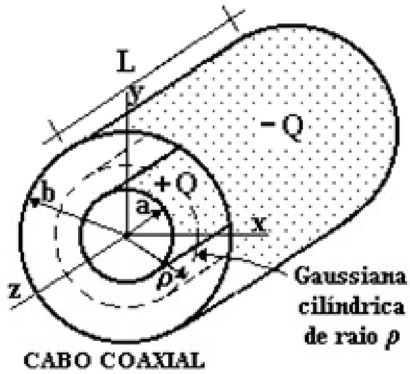
ii) Se $\rho > b \Rightarrow D = 0$, pois a carga interna líquida é nula (blindagem eletrostática)

iii) Se $a < \rho < b$ (gaussiana tracejada) $\Rightarrow D\, 2\pi\rho\, L = +Q$

Daí obtemos: $\boxed{D = \frac{Q}{2\pi\rho L}}$

Sendo a carga uniformemente distribuída, com densidade superficial de carga ρ_S no condutor central, podemos re-aplicar a lei de Gauss, obtendo-se:

$D\, 2\pi\rho\, L = \rho_S\, 2\pi a\, L$



$$\boxed{D = \frac{\rho_s a}{\rho} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}}$$ onde $\rho_s = \frac{dQ}{dS} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{2\pi a L} = \frac{\rho_L}{2\pi a}$

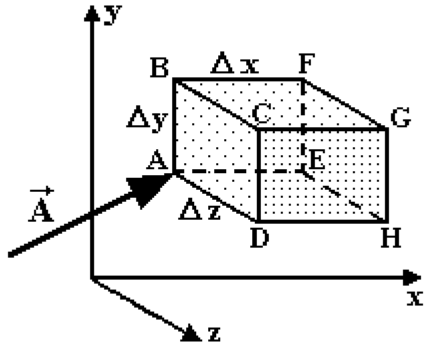
sendo ρ_L a densidade linear de carga no condutor central.

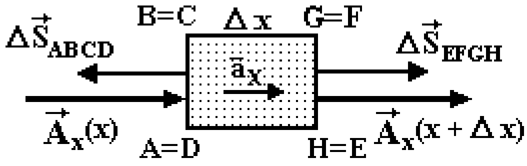
Em forma vetorial:

$$\boxed{\overline{D} = \frac{\rho_s a}{\rho}\overline{a}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\overline{a}_\rho}$$ ($\overline{D}$ é inversamente proporcional à distância)

Nota: Observar a semelhança com a fórmula de $\overline{D}$ para a linha ∞, obtida acima.

3.4 – DIVERGÊNCIA





Vista frontal

Seja $\overline{A}$ um vetor qualquer expresso por:

$$\overline{A} = A_x \overline{a}_x + A_y \overline{a}_y + A_z \overline{a}_z$$

aplicado ao vértice A(x,y,z) do pequeno volume retangular da figura acima dado por:

$$\Delta v = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

Definindo divergência de um vetor $\overline{A}$, ou div $\overline{A}$, com notação matemática $\overline{\nabla} \bullet \overline{A}$, como:

$$\boxed{\overline{\nabla} \bullet \overline{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \overline{A} \bullet d\overline{S}}{\Delta v}}$$

(Nota: O resultado desta operação é um escalar.)

onde $\overline{\nabla}$ representa o operador vetorial "nabla" ou "del".

Para a superfície que envolve o pequeno volume retangular da figura acima temos:

$$\oint_S \overline{A} \bullet d\overline{S} = \int_{S_{ABCD}} + \int_{S_{EFGH}} + \int_{S_{ADHE}} + \int_{S_{BCGF}} + \int_{S_{ABFE}} + \int_{S_{DCGH}} \overline{A} \bullet d\overline{S}$$

Cálculo da 1ª e da 2ª integral do 2º membro (fluxo de $\overline{A}$ na direção *x*):

$$\int_{S_{ABCD}} \overline{A} \bullet d\overline{S} = \int A_x(x)\overline{a}_x \bullet dS_{ABCD}(-\overline{a}_x) = -\int_{y=y}^{y+\Delta y} \int_{z=z}^{z+\Delta z} A_x(x)\, dy\, dz \cong -A_x(x)\ \Delta y\, \Delta z$$

$$\int_{S_{EFGH}} \overline{A} \bullet d\overline{S} = \int_{y=y}^{y+\Delta y} \int_{z=z}^{z+\Delta z} A_x(x + \Delta x)\, dy\, dz \cong A_x(x + \Delta x)\ \Delta y\, \Delta z \cong \left(A_x(x) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y\, \Delta z$$

Somando estas duas integrais, obtemos o fluxo líquido de $\overline{A}$ na direção *x* como:

$$\int_{S_{ABCD}} + \int_{S_{EFGH}} \overline{A} \bullet d\overline{S} \cong \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

Similarmente a estas duas integrais, obtemos os fluxos líquidos de $\overline{A}$ nas direções *y* e *z* como:

$$\int_{S_{ADHE}} + \int_{S_{BCGF}} \overline{A} \bullet d\overline{S} \cong \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

$$\int_{S_{ABFE}} + \int_{S_{DCGH}} \overline{A} \bullet d\overline{S} \cong \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

Somando as 3 expressões anteriores, obtemos o fluxo total líquido que sai do pequeno volume:

$$\oint_S \overline{A} \bullet d\overline{S} \cong \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

Substituindo esta última expressão na equação que define a divergência e simplificando, obtemos:

$$\boxed{\overline{\nabla} \bullet \overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

Se $\overline{A}$ é substituído pelo vetor densidade de fluxo elétrico $\overline{D}$ e aplicado a definição de divergência:

$$\overline{\nabla} \bullet \overline{D} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \overline{D} \bullet d\overline{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} = \frac{dQ}{dv} = \rho_v$$

Assim obtemos uma importante equação da eletrostática:

$$\boxed{\overline{\nabla} \bullet \overline{D} = \rho_v} \qquad \text{(1}^{\text{a}} \text{ equação de Maxwell da eletrostática)}$$

ondeρ_v representa a fonte de fluxo (divergência) de $\overline{D}$.

Notas:

$\overline{\nabla} \bullet \overline{D} > 0 \Rightarrow$ A região é fonte de fluxo ou a carga líquida da região é positiva.
$\overline{\nabla} \bullet \overline{D} < 0 \Rightarrow$ A região é sorvedoura de fluxo ou a carga líquida da região é negativa.
$\overline{\nabla} \bullet \overline{D} = 0 \Rightarrow$ A região não é fonte nem sorvedoura de fluxo ou a carga líquida é nula.

3.5 – TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Da lei de Gauss, temos que: $\oint_S \overline{D} \bullet d\overline{S} = Q_{int}$

Mas, sabemos que: $Q_{int} = \int_{vol} \rho_v \, dv$

E também: $\rho_v = \overline{\nabla} \bullet \overline{D}$

Logo, juntando todas as expressões, obtemos:

$$\boxed{\oint_S \overline{D} \bullet d\overline{S} = \int_{vol} \overline{\nabla} \bullet \overline{D} \, dv} \qquad \text{(Teorema da divergência de Gauss)}$$

sendo$S$ a área que envolve o volume vol, ou vol o volume envolvido pela área S.

Notas:

1. O teorema da divergência pode ser aplicado a qualquer campo vetorial.
2. O operador vetorial $\overline{\nabla}$ é somente definido em coordenadas cartesianas pela expressão:

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \overline{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \overline{a}_z$$

Logo, não existeuma expressão para $\overline{\nabla}$ em coordenadas cilíndricas, nem em esféricas.

3.6 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

3.1) Seja $\rho_V = \alpha / \sqrt{r}$ [C/m³] de r = 0 a r = R em coordenadas esféricas. Determinar $\vec{\mathbf{D}}$ em todo o espaço.

Resposta: $\vec{\mathbf{D}} = \dfrac{2\alpha\sqrt{r}}{5}\vec{\mathbf{a}}_r$ [C/m²] para 0 < r < R e $\vec{\mathbf{D}} = \dfrac{2\alpha R^2\sqrt{R}}{5r^2}\vec{\mathbf{a}}_r$ [C/m²] para $r \geq R$.

3.2) Uma carga com densidade linear uniforme $\rho_L = k$ [ηC/m] está distribuída sobre o semi-eixo positivo de z. No plano z = 0, uma outra carga com densidade superficial $\rho_S = k/(2\pi\rho)$ [ηC/m²] é distribuída. Determinar o fluxo elétrico total que atravessa o cilindro $\rho = a$[m], cujas bases estão situadas sobre os planos $z = a$ e $z = -a$ $(a > 0)$.

Resposta: $\Psi_T = 2ka$ [ηC].

3.3) O plano z=0 contém uma distribuição superficial uniforme de carga com $\rho_S = 10$ [ηC/m²]. Determinar a quantidade de linhas de fluxo que atravessa o triângulo formado pelos pontos A (0,2,0), B (2,0,2) e C (–2,0,2).

Resposta: $\Psi = 20$ [ηC].

3.4) Determinar o fluxo elétrico líquido total que sai da porção de um cilindro definido por: $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$, $0 \leq z \leq 3$, devido as seguintes condições:

a) uma carga distribuída no interior da porção do cilindro com densidade volumétrica de carga dada por $\rho_v = 4xyz^2$ [C/m³], sendo que $\rho_v = 0$ no exterior da porção de cilindro.
b) a mesma quantidade de carga do item anterior, porém sendo toda ela concentrada na origem.

Respostas:a) 72 [C]; b) 9 [C].

3.5) Seja $\rho_v = 6x^2$ [μC/m³] na região $-1 \leq x \leq 1$ [m] e $\rho_v = 0$ fora desta região. Determinar:

a) A densidade de fluxo elétrico $\vec{\mathbf{D}}$ na região $0 \leq x \leq 1$ [m];
b) A densidade de fluxo elétrico $\vec{\mathbf{D}}$ na região $x > 1$ [m];
c) A densidade de fluxo elétrico $\vec{\mathbf{D}}$ na região $-1 \leq x \leq 0$ [m];
d) A densidade de fluxo elétrico $\vec{\mathbf{D}}$ na região $x < -1$ [m].

Respostas: a) $\vec{\mathbf{D}} = 2x^3\vec{\mathbf{a}}_x$ [μC/m²];b) $\vec{\mathbf{D}} = 2\vec{\mathbf{a}}_x$ [μC/m²]; c) $\vec{\mathbf{D}} = 2x^3\vec{\mathbf{a}}_x$ [μC/m²];
d) $\vec{\mathbf{D}} = -2\vec{\mathbf{a}}_x$ [μC/m²].

3.6) Determinar o <u>fluxo total</u> que atravessa um cubo de lado $a = 1$ [m], centrado na origem e arestas paralelas aos eixos coordenados para cada uma das seguintes situações:

a) Uma carga pontual Q = 20 [ηC] situada na origem;
b) Uma linha infinita de cargas com densidade $\rho_L = 20$ [ηC/m] situada sobre o eixo x.

Repetir a questão e calcular o <u>fluxo que atravessa a face superior</u> do cubo nas duas situações.

Respostas: a) $\Psi_T = 20$ [ηC]; b) $\Psi_T = 20$ [ηC] e a) $\Psi_T = \dfrac{10}{3}$ [ηC]; b) $\Psi_T = 5$ [ηC].

3.7) Seja $\rho_V = 8z(1-z)$ [C/m³] para $0 < z < 1$, $\rho_V = 8z(1+z)$ [C/m³] para $-1 < z < 0$ e $\rho_V = 0$ para o restante do espaço. Determinar $\vec{\mathbf{D}}$ em todo o espaço usando a Lei de Gauss.

Respostas: $\vec{\mathbf{D}} = 0$ para $z \leq -1$, $\vec{\mathbf{D}} = \frac{4}{3} \cdot \left(2z^3 + 3z^2 - 1\right)\vec{\mathbf{a}}_Z$ [C/m³] para $-1 < z < 0$,

$\vec{\mathbf{D}} = \frac{4}{3} \cdot \left(-2z^3 + 3z^2 - 1\right)\vec{\mathbf{a}}_Z$ [C/m³] para $0 < z < 1$, $\vec{\mathbf{D}} = 0$ para $z \geq 1$.

3.8) Determinar o quantidade de fluxo elétrico devido a uma carga pontual Q na origem que passa através das superfícies esféricas definidas por:
a) raio = r, estendendo de $\theta = 30^o$ a $\theta = 60^o$, e de $\phi = 0^o$ a $\phi = 360^o$;
b) raio = 2r, estendendo de $\theta = 0^o$ a $\theta = 90^o$, e de $\phi = 0^o$ a $\phi = 90^o$.

Respostas:a) $\psi = \left[\left(\sqrt{3}-1\right)/4\right]Q = 0{,}183Q$; b) $\psi = Q/8$

3.9) Seja uma distribuição de carga no espaço onde $\rho_V = K/r$ C/m³ para $r < 2R$ e $\rho_V = 0$ para $r > 2R$, sendo K uma constante positiva.
a) Determinar a carga total contida dentro da esfera de raio r = R;
b) Determinar a densidade de fluxo elétrico que sai da superfície esférica r = R.

Respostas:a) $Q_{int.} = 2\pi KR^2$; b) $\overline{D} = \frac{K}{2}\overline{a}_r$

3.10) Uma carga pontual Q =24πμC está localizada na origem, uma carga de densidade $\rho_{s1} = -24$ μC/m² está distribuída na superfície esférica r = *a* = 0,5 m, e uma carga de densidade $\rho_{s2} = 24$ μC/m² está distribuída na superfície esférica r = *b* = 1 m.

Determinar $\overline{D}$ em todas as regiões.

Resposta: $\overline{D} = \frac{6}{r^2}\overline{a}_r$ μC/m² para r < 0,5 m; $\overline{D} = 0$ para $0{,}5 \leq r < 1$ m;

$\overline{D} = \frac{24}{r^2}\overline{a}_r$ μC/m² para $r \geq 1$ m

3.11) Uma linha infinita de carga uniformemente distribuída com densidade $\rho_L = 1\ \ C/m$ está colocada sobre o eixo *y*. Determinar o fluxo elétrico total que atravessa as seguintes superfícies:
(a) a porção do plano *z* = 1 m, limitada por $-1 < x < 1$ m e $-1 < y < 1$ m;
(b) a esfera de raio r = 1 m, centrada na origem.

Respostas:a) $\psi = 0{,}5$ C; b) $\psi = 2$ C.

3.12) a) Calcular a carga total em todo o espaço se a densidade volumétrica de carga é expressa em coordenadas esféricas como $\rho_V = 1/(r^3 + a^3)^2$, sendo *a* uma constante.
b) Qual é o raio da esfera, centrada na origem, com densidade volumétrica de carga constante, $\rho_V = 8$, que contém a mesma carga total do item anterior.

Respostas:a) $Q_T = \frac{4\pi}{3a^3}$; b) $r = \frac{1}{2a}$.