Capítulo V

CONDUTORES, DIELÉTRICOS E CAPACITÂNCIA

5.1 – CORRENTE (I) E DENSIDADE DE CORRENTE ($\bar{J}$)

A ***corrente elétrica*** (convencional) representa o movimento de cargas positivas e é expressa por:

$\boxed{I = \frac{dQ}{dt} > 0}$ (Unidade de corrente: C/s ou A)

A ***densidade de corrente de convecção*** $\bar{J}$ (uma grandeza vetorial) representa o movimento de um volume (nuvem) de cargas com densidade volumétrica ρ_v (em C/m^3) numa velocidade $\bar{v}$ (em m/s).

$\boxed{\bar{J} = \rho_v \bar{v}}$ (Unidade de densidade de corrente: A/m^2)

Para um condutor com densidade de carga dos elétrons $\rho_v = \rho_e$, onde os elétrons se deslocam com velocidade de arrastamento ("driftspeed") $\bar{v} = \bar{v}_d = -\mu_e \bar{E}$ (μ_e = mobilidade dos elétrons), tem-se:

$$\bar{J} = \rho_e \bar{v}_d = \rho_e\left(-\mu_e \bar{E}\right) = \left(-\rho_e \mu_e\right)\bar{E}$$

Definindo $\boxed{\sigma = -\rho_e \mu_e}$ como condutividade do condutor (em S/m), obtemos finalmente:

$\boxed{\bar{J} = \sigma \bar{E}}$ $\rightarrow$ ***densidade de corrente de condução*** (Forma pontual da Lei de Ohm)

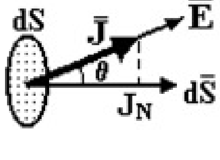
A tabela a seguir mostra as expressões para cálculo da condutividade σ de vários meios. Observe que o sinal menos é compensado pelo valor negativo da densidade volumétrica de carga negativa.

Meio	**Condutividade σ [S/m]**
Líquido ou gás	$\sigma = -\rho_- \mu_- + \rho_+ \mu_+$
Condutor	$\sigma = -\rho_e \mu_e$
Semicondutor	$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h$

μ = mobilidade da carga (sempre +) [m^2/(V s)]
ρ = densidade volumétrica de carga ($\pm$) [C/m^3]
h $\rightarrow$ lacuna ou buraco (do inglês "hole")
e $\rightarrow$ elétron

Relação entre corrente e densidade de corrente (ver figura):

A corrente dI que atravessa uma área dS é dada por (ver figura):



$dI = J_N dS$ (de onde tem-se: $J_N = \frac{dI}{dS}$)

$dI = J\,cos\theta\, dS = J\, dS\, cos\theta$

$dI = \bar{J} \bullet d\bar{S}$

Daí, $\boxed{I = \int_S \bar{J} \bullet d\bar{S}}$

5.2 – CONTINUIDADE DA CORRENTE

A corrente através de uma superfície fechada (fluxo de cargas positivas para fora da superfície) é igual a razão do decréscimo de cargas positivas (ou acréscimo de cargas negativas) no interior da região – ***princípio da continuidade***. Matematicamente, expressamos como:

$$\boxed{I = \oint_S \bar{J} \bullet d\bar{S} = -\frac{dQ_i}{dt}}$$ (Forma integral da equação da continuidade)

onde $+\dfrac{dQ_i}{dt}$ = razão (taxa) de acréscimo (incremento) de cargas no tempo dentro da superfície.

Aplicando o teorema da divergência à expressão acima, obtemos:

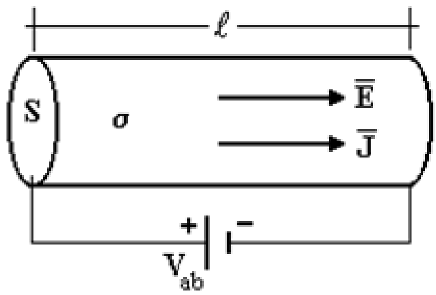
$$\boxed{\bar{\nabla} \bullet \bar{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}}$$ (Forma pontual da equação da continuidade)

"A corrente ou carga por segundo que sai (diverge) de um pequeno volume é igual a razão de decréscimo de carga por unidade de volume em cada ponto."

5.3 – CONDUTORES METÁLICOS – RESISTÊNCIA (R)

Definição de ***resistência*** de um condutor qualquer:

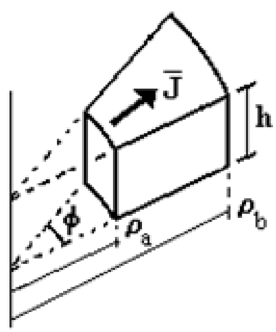
$$\boxed{R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \bar{E} \bullet d\bar{L}}{\int_S \sigma \bar{E} \bullet d\bar{S}}}$$ [Ω](parâmetro positivo)



Para um condutor que possui *seção reta uniforme* (condutor cilíndrico da figura, com área S e comprimento ℓ):

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_\ell^0 \bar{E} \bullet d\bar{L}}{\int_S \sigma \bar{E} \bullet d\bar{S}} = \frac{E\ell}{\sigma E S} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\ell}{\sigma S}}$$

Exemplo: Calcular R para o condutor em forma de cunha truncada, para $\bar{J}$ (ou I) no sentido radial.



$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\rho \phi h} = \frac{k}{\rho} \Rightarrow \bar{E} = \frac{\bar{J}}{\sigma} = \frac{k}{\sigma \rho} \bar{a}_\rho$$

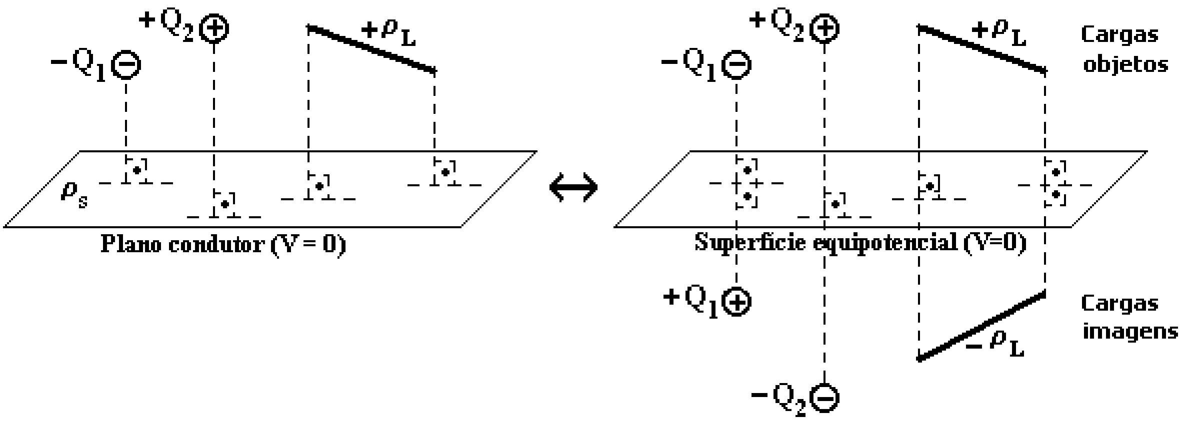
$$R = \frac{\int_{\rho_a}^{\rho_b} \frac{k}{\sigma \rho} d\rho}{\int_0^h \int_0^\phi \frac{k}{\rho} \rho \, d\phi \, dz} = \frac{\left[\frac{k}{\sigma} \ln \rho\right]_{\rho_a}^{\rho_b}}{k \phi h} = \frac{\ln(\rho_b / \rho_a)}{\sigma \phi h}$$

Outro modo – usando $R = \int dR$ onde $dR = \dfrac{d\ell}{\sigma S} = \dfrac{d\rho}{\sigma \rho \phi h}$

$$R = \int_{\rho_a}^{\rho_b} \frac{d\rho}{\sigma \rho \phi h} = \frac{1}{\sigma \phi h} \int_{\rho_a}^{\rho_b} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\sigma \phi h} [\ln \rho] \Big|_{\rho_a}^{\rho_b} = \frac{\ln(\rho_b / \rho_a)}{\sigma \phi h}$$

5.4 – O MÉTODO DAS IMAGENS

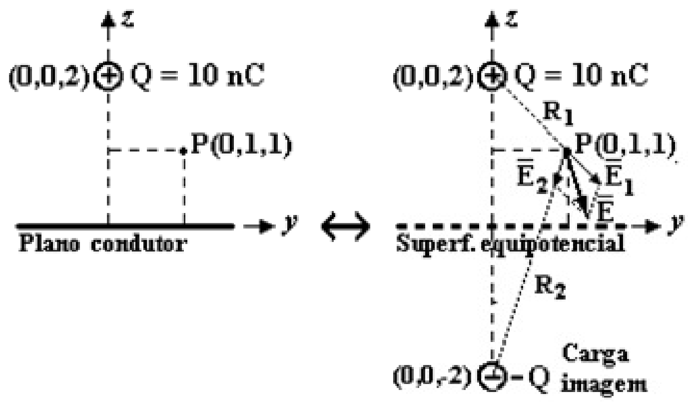
Aplicação: Na solução de problemas envolvendo um plano condutor aterrado pela substituição deste por uma superfície equipotencial mais as cargas imagens, como ilustra a figura.



Exemplo: Calcular o campo elétrico $\overline{E}$ no ponto P(0,1,1) m, para a configuração mostrada abaixo.

Aplicando o método das imagens, temos:
$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$

onde $\overline{E}_1$ e $\overline{E}_2$ são os campos no ponto P devido, respectivamente, a carga objeto (carga original) e a carga imagem.
Assim,



$$\overline{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_1^2}\overline{a}_{R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_2^2}\overline{a}_{R_2}$$

onde:

$\overline{a}_{R_1} = \overline{R}_1 / |\overline{R}_1|$, sendo $\overline{R}_1 = \overline{a}_y - \overline{a}_z$ o vetor distância orientado de $Q_1 = Q$ a P,

$\overline{a}_{R_2} = \overline{R}_2 / |\overline{R}_2|$, sendo $\overline{R}_2 = \overline{a}_y + 3\overline{a}_z$ o vetor distância orientado de $Q_2 = -Q$ a P.

Substituindo os valores, temos:

$$\overline{E} = \frac{10\times10^{-9}}{4\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}2}\frac{\overline{a}_y - \overline{a}_z}{\sqrt{2}} + \frac{-10\times10^{-9}}{4\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}10}\frac{\overline{a}_y + 3\overline{a}_z}{\sqrt{10}}$$

$$\overline{E} = \frac{90}{2\sqrt{2}}\left(\overline{a}_y - \overline{a}_z\right) - \frac{90}{10\sqrt{10}}\left(\overline{a}_y + 3\overline{a}_z\right) = 31{,}82\left(\overline{a}_y - \overline{a}_z\right) - 2{,}85\left(\overline{a}_y + 3\overline{a}_z\right)$$

Daí: $\boxed{\overline{E} = 28{,}97\overline{a}_y - 40{,}35\overline{a}_z}$ [V/m] (<u>Nota</u>: Conferir o sentido de $\overline{E}$ na figura)

5.5 – A NATUREZA DOS MATERIAIS DIELÉTRICOS – POLARIZAÇÃO (P)

Polarização $\overline{P}$ é definido como sendo o momento elétrico total por unidade de volume, isto é:

$$\boxed{\overline{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \overline{p}_i = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\overline{p}_{total}}{\Delta v}}$$

(Unidade:C/m^2 – mesma unidade de $\overline{D}$)

onde n é o número de dipolos elétricos por unidade de volume Δv

A lei de Gauss relaciona a densidade de fluxo elétrico $\overline{D}$ com a *carga elétrica livre*, Q, isto é:

$$Q = \oint \overline{D} \bullet d\overline{S}$$

(Nota: $\overline{D}$ sai ou diverge da *carga livre* positiva)

Por analogia, pode-se também relacionar o campo $\overline{P}$ com uma carga, Q_P, que produz este campo, sendo esta carga chamada de *carga de polarização*.

$$Q_P = -\oint \overline{P} \bullet d\overline{S}$$

(Nota: $\overline{P}$ sai ou diverge da *carga de polarização* negativa)

A lei Gauss em termos da *carga total*, Q_T, (lei de Gauss generalizada) é expressa por:

$$Q_T = \oint \varepsilon_o \overline{E} \bullet d\overline{S}$$

onde:

$Q_T = Q + Q_P$= soma da carga livre com a carga de polarização

$\varepsilon_o = 8{,}854 \times 10^{-12}$ = *permissividade elétrica do vácuo* (unidade: F/m)

Substituindo as cargas pelas suas expressões com integrais, obtemos a seguinte expressão geral que relaciona os 3 campos $\overline{D}, \overline{E}$ e $\overline{P}$, para qualquer tipo de meio:

$$\boxed{\overline{D} = \varepsilon_o \overline{E} + \overline{P}}$$

(Nota:No vácuo $\overline{P} = 0$)

Para um material linear, homogêneo e isotrópico (mesma propriedade em todas as direções) tem-se:

$$\boxed{\overline{P} = \chi_e \varepsilon_o \overline{E}} \quad [C/m^2]$$

sendo χ_e é a *suscetibilidade elétrica do material* (constante adimensional, χ lê-se "csi"). Esta constante é relacionada com a *permissividade elétrica relativa* (ou constante dielétrica) do material, ε_R, (grandeza também adimensional) através da expressão:

$$\chi_e = \varepsilon_R - 1$$

Combinando estas 3 últimas equações obtém-se:

$$\boxed{\overline{D} = \varepsilon \overline{E}}$$

onde:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_R \varepsilon_o}$$

sendo ε a *permissividade elétrica absoluta* do material, dada em F/m.

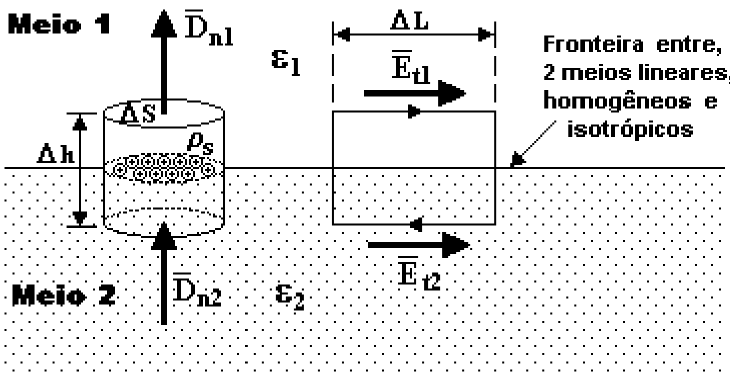
Relações usando as densidades volumétricas de carga livre, ρ_v (ou simplesmente ρ), de carga de polarização, ρ_P, e de carga total, ρ_T:

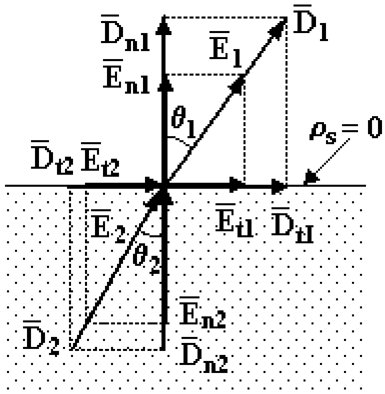
$$Q = \int_v \rho_v dv \qquad \overline{\nabla} \bullet \overline{D} = \rho_v$$

$$Q_P = \int_v \rho_P dv \qquad \overline{\nabla} \bullet \overline{P} = -\rho_P$$

$$Q_T = \int_v \rho_T dv \qquad \overline{\nabla} \bullet \varepsilon_o \overline{E} = \rho_T$$

5.6 – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA MATERIAIS DIELÉTRICOS PERFEITOS





Condição de contorno para as componentes tangenciais:

Para o pequeno percurso fechado retangular da figura, pode-se aplicar:

$$\oint_{\text{retângulo}} \overline{E} \bullet d\overline{L} = 0 \qquad \text{(válida para o campo } \overline{E} \text{ conservativo)}$$

Fazendo $\Delta h \to 0$ (tendendo a fronteira), obtemos:

$$E_{t1}\Delta L - E_{t2}\Delta L = 0 \Rightarrow E_{t1} = E_{t2} \Rightarrow \boxed{\overline{E}_{t1} = \overline{E}_{t2}} \quad (E_t \text{ é contínuo})$$

Condição de contorno para as componentes normais:

Para o pequeno cilindro da figura, pode-se aplicar:

$$\oint_{\text{cilindro}} \overline{D} \bullet d\overline{S} = Q_{interna} \qquad \text{(Lei de Gauss)}$$

Fazendo $\Delta h \to 0$ (tendendo a fronteira), obtemos:

(i) Para a fronteira <u>com</u> carga ($\rho_S \neq 0$):

$$D_{n1}\Delta S - D_{n2}\Delta S = \rho_S \Delta S \Rightarrow \boxed{D_{n1} - D_{n2} = \rho_S}$$ (Neste caso D_n é <u>descontínuo</u>)

(ii) Para a fronteira <u>sem</u> carga ($\rho_S = 0$):

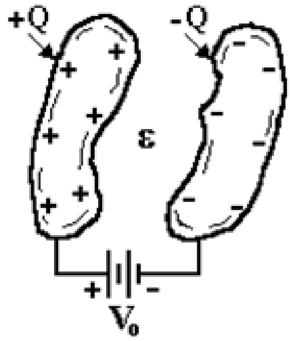
$$\boxed{\overline{D}_{n1} = \overline{D}_{n2}}$$ (Neste caso D_n é <u>contínuo</u>)

Relação de contorno se o meio 2 for um <u>condutor perfeito</u> ($\sigma_2 \to \infty \Rightarrow E_2 = D_2 = 0$):

Componentes tangenciais: $\boxed{E_{t1} = 0} \Rightarrow \boxed{D_{t1} = 0}$ (as comp. tangenciais se anulam)

Componentes normais: $\boxed{D_{n1} = \rho_s} \Rightarrow \boxed{E_{n1} = \rho_s / \varepsilon_1}$ (existem somente comp. normais)

5.7 – CAPACITÂNCIA



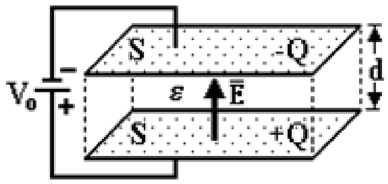
Qualquer dispositivo formado por 2 condutores separados por um dielétrico forma um capacitor (figura) cuja <u>capacitância</u> é definida como:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_o} = \frac{\oint_S \varepsilon \bar{E} \bullet d\bar{S}}{-\int_{-}^{+} \bar{E} \bullet d\bar{L}}} \qquad [F] \qquad \text{(parâmetro positivo)}$$

5.8 – EXEMPLOS DE CÁLCULO DE CAPACITÂNCIA

Análise do capacitor de placas planas paralelas:

$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{\int_0^S \varepsilon E \bar{a}_z \bullet dS \bar{a}_z}{-\int_d^0 E \bar{a}_z \bullet dz \bar{a}_z} = \frac{\varepsilon E S}{-E(0-d)} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon S}{d}}$$



Observe também as seguintes fórmulas para este capacitor:

$$V_o = Ed$$

$$D = \varepsilon E = \frac{Q}{S} = \rho_S$$

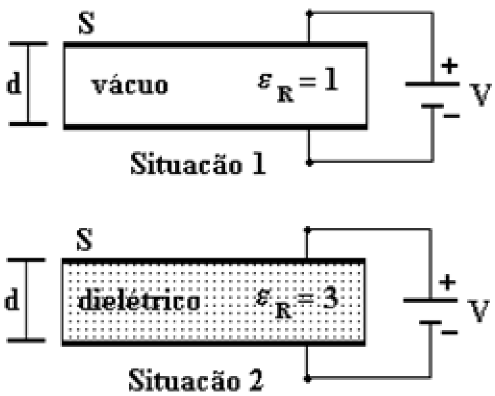
onde os campos E e D são considerados constantes no dielétrico do capacitor ideal.

<u>**Ex. 1**</u>**:** Carrega-se um capacitor de placas planas paralelas no espaço livre com uma fonte de tensão constante. Desconsiderando os efeitos de bordas (capacitor ideal), determinar as variações instantâneas sofridas por: W_E, D, E, C, Q, V, e ρ_s, quando:

(a) O espaço livre entre as placas é substituído por um dielétrico com $\varepsilon_R = 3$;

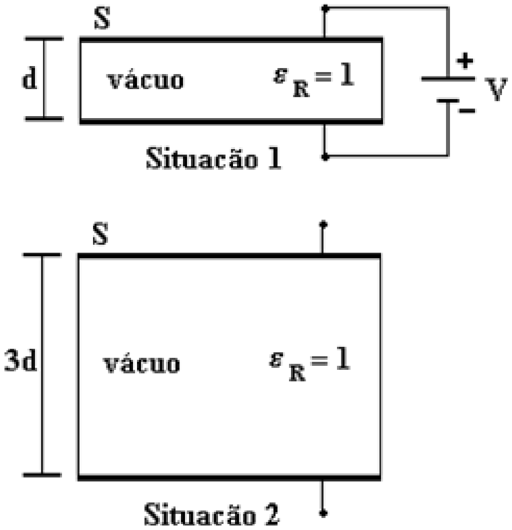
(b) A fonte de tensão é removida com as placas afastadas tal que $d_2 = 3d_1$.

Solução do caso 1(a) – ver figura abaixo:



$V_2 = V_1 = V$	(mesma fonte de tensão)
$E_2 = E_1$	$(E = V/d)$
$D_2 = 3\ D_1$	$(D = \varepsilon_R \varepsilon_0 E)$
$C_2 = 3\ C_1$	$(C = \varepsilon_R \varepsilon_0 S/d)$
$\rho_{S2} = 3\ \rho_{S1}$	$(\rho_S = D_N = D)$
$Q_2 = 3\ Q_1$	$(Q = \rho_S S)$
$W_2 = 3\ W_1$	$(W = (1/2)\ C V^2$ ou $W = (1/2)\ \varepsilon_R \varepsilon_0 E^2 vol)$

Solução do caso 1(b) – ver figura abaixo:



$Q_2 = Q_1$	(fonte de tensão removida)
$\rho_{S2} = \rho_{S1}$	($\rho_S = Q/S$)
$D_2 = D_1$	($D = D_N = \rho_S$)
$E_2 = E_1$	($E = D/\varepsilon_0$)
$C_2 = C_1/3$	($C = \varepsilon_R\varepsilon_0\, S/d$)
$V_2 = 3V_1$	($V = Q/C$ ou $V = E\, d$)
$W_2 = 3\, W_1$	($W = (1/2)\, C\, V^2$ ou $W = (1/2)\, \varepsilon_R\varepsilon_0\, E^2 \mathrm{vol}$)

Ex. 2: Determinar C de um ***capacitor coaxial*** de raios **a** e **b** (a < b).

Para uma Gaussiana cilíndrica de raio a <ρ< b e comprimento L

$$\oint \overline{D} \bullet d\overline{S} = Q_{\text{int erna}}$$

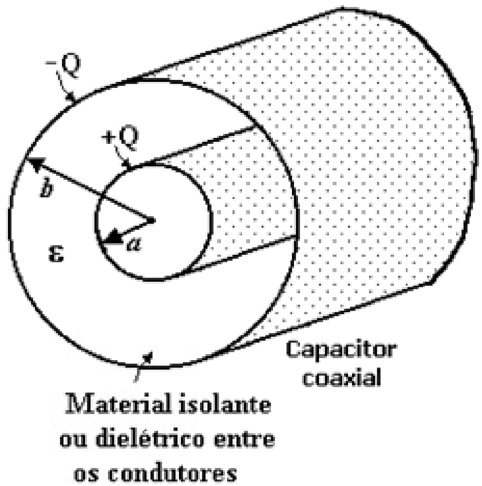
$$D2\pi\rho L = +Q \;\Rightarrow\; D = \frac{Q}{2\pi\rho L}$$

$$\overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\rho L}\overline{a}_\rho$$

$$V_o = V_{ab} = -\int_{\rho=b}^{a} \frac{Q}{2\pi\varepsilon\rho L}\overline{a}_\rho \bullet d\rho\overline{a}_\rho$$

$$V_o = \left[\frac{-Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\rho\right]_b^a \Rightarrow V_o = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{b}{a}$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_o} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(b/a)}}$$



Ex. 3: Determinar C de um ***capacitor esférico*** de raios **a** e **b** (a < b).

Para uma gaussiana esférica de raio a < r < b

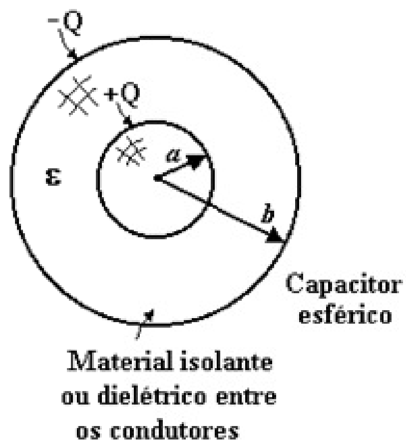
$$\oint \overline{D} \bullet d\overline{S} = Q_{\text{int erna}}$$

$$D4\pi r^2 = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\overline{a}_r$$

$$V_o = V_{ab} = -\int_{r=b}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\overline{a}_r \bullet dr\,\overline{a}_r$$

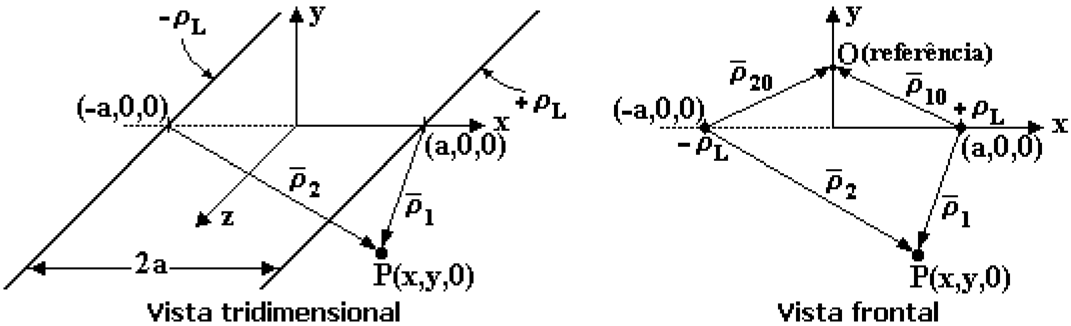
$$V_o = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{-1}{r}\right]_b^a \Rightarrow V_o = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$



$$\boxed{C = \frac{Q}{V_o} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}}$$ (Seb $\rightarrow \infty \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon a$ = capacitância do capacitor esférico isolado)

Ex. 4: Determinar C de uma ***linha de transmissão com dois fios infinitos paralelos***

Seja uma configuração condutora constituída por 2 fios (infinitos) paralelos, situados em um meio de permissividade ε, conforme mostrado na figura abaixo.



Foi visto no capítulo IV que a diferença de potencial entre 2 pontos A e B devido a um fio infinito com carga uniformemente distribuída é dada por:

$$V_{AB} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\rho_B}{\rho_A} \qquad (\rho_A \text{ e } \rho_B \text{ são as menores distâncias do fio aos pontos A e B}) \qquad (01)$$

Para os 2 fios infinitos paralelos da figura, com cargas simétricas com densidade linear uniforme, o potencial do ponto P(x, y, 0) em relação a um ponto qualquer O (referência) no plano x = 0, é:

$$V_{PO} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} - \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\rho_0}{\rho_2} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \qquad (02)$$

onde: ρ_1 e $\rho_{10} = \rho_0$ são as menores distâncias do fio 1 (carga +) aos pontos P e O, respectivamente;
ρ_2 e $\rho_{20} = \rho_0$ são as menores distâncias do fio 2 (carga –) aos pontos P e O, respectivamente.

Da figura tem-se:

$$\rho_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \qquad (03)$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \qquad (04)$$

Substituindo (03) e (04) em (02) e fazendo $V_{PO} = V$ (com a referência $V_0 = 0$ implícita), obtém-se:

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \ln \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \qquad (05)$$

Seja $V = V_1$ = constante, uma superfície equipotencial. Então, o lugar geométrico dos pontos no espaço em que $V = V_1$ é obtido fazendo:

$$\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = e^{4\pi\varepsilon V_1/\rho_L} = k_1 \qquad (06)$$

onde k_1 é uma constante arbitrária dependente de V_1 e expressa por:

$$V_1 = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon} \ln k_1 \qquad (07)$$

Desenvolvendo a expressão (06) temos:

$$k_1\left(x^2-2ax+a^2+y^2\right)=x^2+2ax+a^2+y^2$$

$$x^2(k_1-1)-2ax(k_1+1)+\left(a^2+y^2\right)(k_1-1)=0$$

$$x^2-2ax\frac{k_1+1}{k_1-1}+\left(a^2+y^2\right)=0$$

$$\left(x-a\frac{k_1+1}{k_1-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{2a\sqrt{k_1}}{k_1-1}\right)^2 \qquad (08)$$

A equação (08) representa uma circunferência centrada em:

$$\boxed{x=h=a\frac{k_1+1}{k_1-1}}\text{ e }\boxed{y=0} \qquad (09)$$

e raio:

$$\boxed{r=b=\frac{2a\sqrt{k_1}}{k_1-1}} \qquad (10)$$

De (09), pode-se isolar k_1, do seguinte modo:

$$k_1h-h=ak_1+a$$

$$k_1(h-a)=h+a$$

$$k_1=\frac{h+a}{h-a} \qquad (11)$$

Substituindo (11) em (10):

$$b\left(\frac{h+a}{h-a}-1\right)=2a\sqrt{\frac{h+a}{h-a}}$$

$$b\frac{2a}{h-a}=2a\sqrt{\frac{h+a}{h-a}}$$

$$\frac{b^2}{(h-a)^2}=\frac{h+a}{h-a}$$

$$\frac{b^2}{h-a}=h+a$$

$$b^2=h^2-a^2$$

$$a=\sqrt{h^2-b^2} \qquad (12)$$

Substituindo agora (12) em (11) e racionalizando o denominador:

$$k_1=\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{h-\sqrt{h^2-b^2}}=\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{h-\sqrt{h^2-b^2}}\times\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{h+\sqrt{h^2-b^2}}=\frac{\left(h+\sqrt{h^2-b^2}\right)^2}{h^2-\left(h^2-b^2\right)}=\frac{\left(h+\sqrt{h^2-b^2}\right)^2}{b^2}$$

ou

$$k_1=\left(\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}\right)^2 \qquad (13)$$

Substituindo (13) em (07):

$$V_1 = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}\right)^2 = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b} \tag{14}$$

De (14) podemos obter a capacitância de um capacitor formado por um condutor cilíndrico no potencial V = V_1e um plano condutor no potencial V = 0, separados por uma distância h (ver figura abaixo). Esta pode ser obtida pela definição de capacitância por:

$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{\rho_L L}{V_1 - 0} \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\left[\left(h+\sqrt{h^2-b^2}\right)/b\right]}} \tag{15}$$

Parab << h, obtém se a capacitância de um capacitor formado por um fio condutor (de raio muito pequeno e igual a b) e um plano condutor, separados por uma distância h:

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(2h/b)}} \tag{16}$$

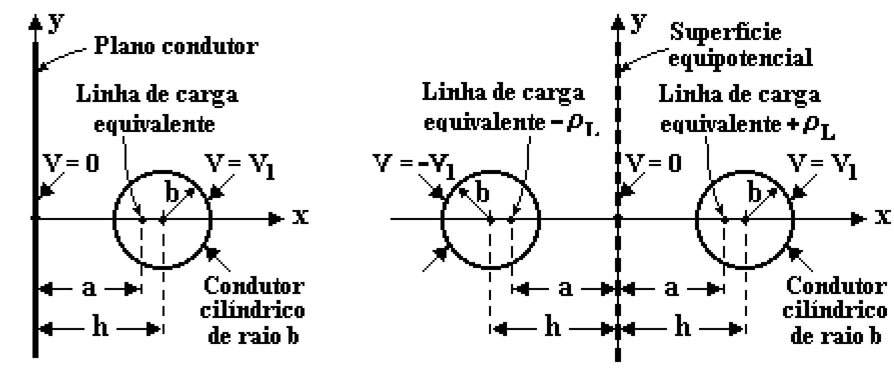
A expressão (15) também permite obter a capacitância do capacitor formado por 2 condutores cilíndricos nos potenciais V_1 e $-V_1$ (cargas simétricas), separados um do outro por uma distância 2h (ver figura abaixo).

Esta capacitância, obtida pela definição e da aplicação do método das imagens, corresponde a metade do valor encontrado em (15), isto é:

$$C' = \frac{Q}{V_o} = \frac{\rho_L L}{V_1-(-V_1)} = \frac{\rho_L L}{2V_1} = \frac{C}{2} \Rightarrow \boxed{C' = \frac{\pi\varepsilon L}{\ln\left[\left(h+\sqrt{h^2-b^2}\right)/b\right]}} \tag{17}$$

Parab << h, obtém se a capacitância de um capacitor formado por 2 fios condutores (de raios muito pequenos e iguais a b), separados por uma distância 2h – configuração de uma linha de transmissão:

$$\boxed{C' = \frac{\pi\varepsilon L}{\ln(2h/b)}} \tag{18}$$



Capacitor formado por um cilindro e um plano condutores

Capacitor formado por dois cilindros condutores

5.9 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5.1) Uma carga está distribuída. com densidade linear de carga $\rho_L = \pi/z$ [ηC/m], ao longo do segmento que se estende do ponto (0,0,*a*) ao ponto (0,0,3*a*), sendo *a*> 0. Sabendo que sobre o plano z = 0 existe um plano condutor bastante grande, pede-se:

a) Determinar a densidade superficial de carga na origem;
b) Se esta carga linearmente distribuída fosse concentrada em um ponto, determinar a posição no eixo z que ela deveria ser colocada para obter a mesma solução de (a).

Respostas:a) $\rho_S = \dfrac{-2}{9a^2}$ [ηC/m²]; b) $z = \dfrac{3}{2}\sqrt{ln3}\,a = 1{,}5722a$ [m].

5.2) Suponha que o plano z = 1 m separa o espaço em duas regiões com dielétricos de permeabilidades relativas $\varepsilon_{R1} = 2$ e $\varepsilon_{R2} = 4$. A região 1 contém uma carga pontual de 10 [ηC] situada na origem. Determinar, a partir das condições de contorno para materiais dielétricos perfeitos ($D_{n1} = D_{n2}$e $E_{t1} = E_{t2}$), o seguinte:

a) O campo elétrico na região 1, aplicado ao ponto (0, 2, 1);
b) O campo elétrico na região 2, aplicado ao ponto (0, 2, 1);
c) O ângulos formados pelos dois campos com a direção normal ao plano z = 1.

Respostas: a) $\vec{E}_1 = \dfrac{9\sqrt{5}}{5}\cdot(2\vec{a}_y + \vec{a}_z)$ [V/m];b) $\vec{E}_2 = \dfrac{9\sqrt{5}}{10}\cdot(4\vec{a}_y + \vec{a}_z)$ [V/m];

c) $\theta_1 = 63{,}44^o$ e $\theta_2 = 75{,}96^o$.

5.3) A região 1, definida por $0 < \phi < \pi/4$ rad, contém um material dielétrico de permissividade relativa $\varepsilon_{R1} = 2$, enquanto que a região 2, definida por $\pi/4 < \phi < \pi/2$ rad, contém outro material dielétrico de permissividade relativa $\varepsilon_{R2} = 4$. Sabendo-se que a densidade de fluxo elétrico na região 1 é dada por $\vec{D}_1 = 3\vec{a}_\rho + 4\vec{a}_\phi + 5\vec{a}_z$ [ηC/m²], determinar, na região 2:

a) $\vec{D}_{n2}$; b) $\vec{D}_{t2}$; c) $\vec{D}_2$; d) $\vec{P}_2$;

Respostas: a) $\vec{D}_{n2} = 4\vec{a}_\phi$;b) $\vec{D}_{t2} = 6\vec{a}_\rho + 10\vec{a}_z$; c) $\vec{D}_2 = 6\vec{a}_\rho + 4\vec{a}_\phi + 10\vec{a}_z$;

d) $\vec{P}_2 = 4{,}5\vec{a}_\rho + 3\vec{a}_\phi + 7{,}5\vec{a}_z$.

5.4) A superfície de separação entre dois dielétricos é expressa pela equação do plano dada por: $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + z = 1$. O dielétrico 1 contém a origem e possui permissividade relativa $\varepsilon_{R1} = 2$ e o dielétrico 2 possui pemissividade relativa $\varepsilon_{R2} = 4$. Na região do dielétrico 2 existe um campo elétrico uniforme expresso por $\vec{\mathbf{E}}_2 = \vec{\mathbf{a}}_x + 3\vec{\mathbf{a}}_y$. Determinar os seguintes parâmetros (usando as condições de contorno, quando necessário):

a) $\vec{\mathbf{a}}_{n2}$ (versor normal ao plano do lado da região 2); b) $\vec{\mathbf{E}}_{2n}$; c) $\vec{\mathbf{E}}_{2t}$; d) $\vec{\mathbf{E}}_{1n}$; e) $\vec{\mathbf{E}}_{1t}$.

Respostas: a) $\vec{\mathbf{a}}_{n2} = \dfrac{1}{13}\cdot(4\vec{\mathbf{a}}_x + 3\vec{\mathbf{a}}_y + 12\vec{\mathbf{a}}_z)$;b) $\vec{\mathbf{E}}_{2n} = \dfrac{1}{13}\cdot(4\vec{\mathbf{a}}_x + 3\vec{\mathbf{a}}_y + 12\vec{\mathbf{a}}_z)$;

c) $\vec{\mathbf{E}}_{2t} = \dfrac{1}{13}\cdot(9\vec{\mathbf{a}}_x + 36\vec{\mathbf{a}}_y - 12\vec{\mathbf{a}}_z)$;d) $\vec{\mathbf{E}}_{1n} = \dfrac{2}{13}\cdot(4\vec{\mathbf{a}}_x + 3\vec{\mathbf{a}}_y + 12\vec{\mathbf{a}}_z)$;

e) $\vec{\mathbf{E}}_{1t} = \dfrac{1}{13}\cdot(9\vec{\mathbf{a}}_x + 36\vec{\mathbf{a}}_y - 12\vec{\mathbf{a}}_z)$.

5.5) Seja um condutor plano no potencial zero situado uma distância h do eixo de um condutor cilíndrico, de raio b, no potencial V_1, expresso por: $V_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}$ [V], sendo ρ_L o módulo da densidade de carga (em C/m) no cilindro, no plano, ou na linha equivalente de cargas (supondo uniforme) e ε a permissividade elétrica do meio. Determinar:

a) A capacitância (a partir da definição) entre o condutor plano e o condutor cilíndrico acima;
b) A capacitância entre dois condutores cilíndricos paralelos, mesmo raio b e potenciais simétricos $\pm V_1$, com seus eixos separados por uma distância $2h$;
c) Repetir os itens (a) e (b) supondo $b << h$.

Respostas:a) $C_1 = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\left[\left(h+\sqrt{h^2-b^2}\right)/b\right]}$; b) $C_2 = \frac{\pi\varepsilon L}{\ln\left[\left(h+\sqrt{h^2-b^2}\right)/b\right]}$;

c) $C_1 = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(2h/b)}$ e $C_2 = \frac{\pi\varepsilon L}{\ln(2h/b)}$.

5.6) a) Determinar a expressão que fornece a diferença de potencial V_{AB} entre 2 pontos A e B no espaço livre devido a uma linha infinita de carga com densidade linear constante ρ_L.
b) Uma linha infinita de carga está paralela a um plano condutor. Determinar o potencial V no ponto P eqüidistante entre o plano condutor (com V = 0) e a linha com $\rho_L = 100\pi\varepsilon_o$ [C/m].
c) Para a mesma configuração do item (b) determinar a magnitude do campo elétrico resultante E neste mesmo ponto P.

Respostas:a) $V_{AB} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{\rho_B}{\rho_A}\right)$; b) $V_P = 50\ ln3 = 54{,}93$ [V]; c) $E = \frac{400}{3h}$ [V/m].

(Nota: h = distância da linha infinita ao plano condutor.)

5.7) Uma configuração de carga é constituída por duas cargas pontuais $Q_1 = +Q$ e $Q_2 = -Q$, situadas em (0, a, 0) e (2a, a, 0), respectivamente, e um plano condutor aterrado (V = 0) em y = 0. Determinar (em função de Q, a e ε_o):

a) O potencial elétrico no ponto P(a, a, 0);
b) O vetor campo elétrico no ponto P(a, a, 0);
c) O vetor força resultante sobre a carga Q_2.

Respostas:a) $V_P = 0$; b) $\vec{\mathbf{E}}_P = \frac{Q\cdot(25-\sqrt{5})}{50\pi\varepsilon_o a^2}\vec{\mathbf{a}}_x$; c) $\vec{\mathbf{F}}_2 = \frac{Q^2\cdot(\sqrt{2}-4)}{64\pi\varepsilon_o a^2}(\vec{\mathbf{a}}_x + \vec{\mathbf{a}}_y)$.

5.8) Um condutor de cobre (condutividade $\sigma = 5{,}8\cdot 10^7$ [S/m]) tem a forma de uma cunha truncada, de dimensões 2 <ρ< 12 [cm], 0 <φ< 30°, 0 < z < 4 [cm].

Se $\vec{\mathbf{E}} = \frac{10^{-4}}{\rho}\vec{\mathbf{a}}_\rho$ [V/m], no interior do condutor, determinar:

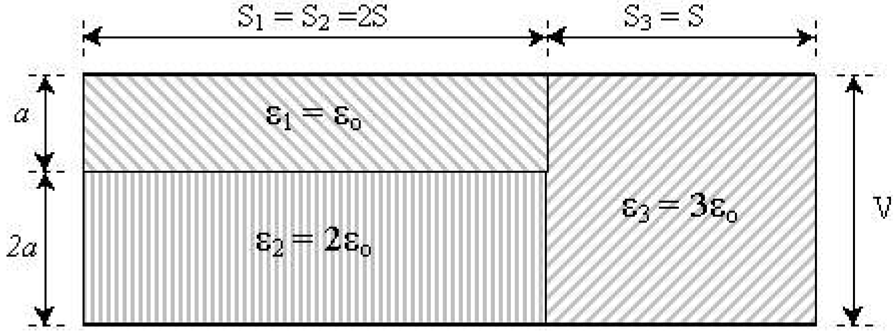
a) A corrente total que atravessa o condutor;
b) A resistência do condutor,
c) O valor do potencial no centro do condutor em relação a uma de suas extremidades.

Respostas:a) I = 121,47 [A]; b) R = 1,475 [μΩ];

c) $V_{Pb} = 0{,}54\cdot 10^{-4}$ [V]ou $V_{Pa} = -1{,}25\cdot 10^{-4}$ [V].

5.9) A região entre as placas planas de um capacitor de placas paralelas é constituída por 3 camadas diferentes de dielétricos, dispostas como na figura abaixo (ε = permissividade do dielétrico, S = área, *a* = comprimento). Determinar:

a) As capacitâncias individuais dos três capacitores formados (C_1, C_2 e C_3) e a capacitância total resultante (C_T);
b) As diferenças de potencial existentes nos dielétricos 1 e 2, isto é V_1 e V_2;
c) As magnitudes dos campos elétricos nos três dielétricos, isto é E_1, E_2 e E_3;
d) As magnitudes das densidades de fluxonos três dielétricos, isto é D_1, D_2 e D_3.



Respostas:a) $C_1 = C_2 = 2\dfrac{\varepsilon_o S}{a}$, $C_3 = \dfrac{\varepsilon_o S}{a}$ e $C_T = 2\dfrac{\varepsilon_o S}{a}$;

b) $V_1 = V_2 = \dfrac{V}{2}$;c) $E_1 = \dfrac{V}{2a}$, $E_2 = \dfrac{V}{4a}$ e $E_3 = \dfrac{V}{3a}$;

d) $D_1 = D_2 = \dfrac{\varepsilon_o V}{2a}$ e $D_3 = \dfrac{\varepsilon_o V}{a}$.

5.10) Um arco, carregado com carga distribuída com densidade constante ρ_L representa a metade de um círculo de raio *a*. Sabendo-se que este arco está em pé, com apenas suas extremidades apoiadas sobre um plano condutor, porém isoladas deste, determinar o campo elétrico ($\vec{\mathbf{E}}$) obtido no centro do círculo formado pelo arco.

Resposta: $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{-\rho_L}{\pi\varepsilon_o a}\vec{\mathbf{a}}_y$. (Nota: Adotou-se o plano condutor situado sobre y = 0)

5.11) A capacitância de um capacitor coaxial de comprimento L e condutores interno e externo de raios *a* e *b*, respectivamente, é dada pela expressão:

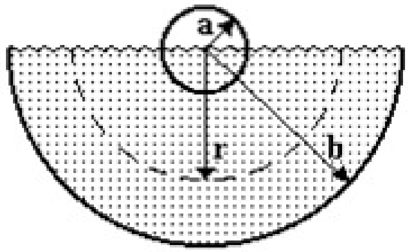
$C = \dfrac{2\pi\varepsilon L}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$, onde ε representa a permissividade elétrica do meio entre os condutores.

Seja agora a configuração obtida com três cilindros condutores coaxiais, todos de espessura desprezível, comprimento L e raios *a*, 2*a* e 4*a*. Entre os condutores interno e central existe um dielétrico de permissividade $\varepsilon_1 = \varepsilon_o$, e entre os condutores central e externo existe um dielétrico de permissividade $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_o$.

a) Determinar os valores das três capacitâncias obtidas com esta configuração;
b) Se uma tensão V é aplicada entre os condutores interno e externo, determinar as tensões que surgirão entre os condutores interno e central (V_1) e entre os condutores central e externo (V_2), ambas tomadas em porcentagem de V.

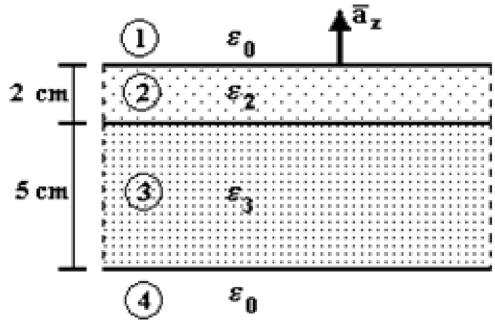
Respostas: a) $C_1 = \dfrac{2\pi\varepsilon_o L}{\ln 2}$, $C_2 = \dfrac{4\pi\varepsilon_o L}{\ln 2}$, $C_3 = \dfrac{4\pi\varepsilon_o L}{3\ln 2}$;
b) V_1 = 66,67% de V e V_2 = 33,33% de V.

5.12) A figura mostra uma concha de metal semi-esférica de raio b = 1 m cheia de água do mar (condutividade σ = 4 S/m). Uma bola de metal de raio a = 0,1 m flutua no centro da concha, ficando a metade mergulhada na água. Pede-se:
a) Determinar a resistência total entre a bola e a concha.
b) Se uma voltagem V_0 = 1 volt for aplicada entre os dois condutores, calcular:
- a corrente resultante,
- a densidade de corrente na região entre a bola e a concha, supondo função somente de r,
- campo elétrico na região entre a bola e a concha.



Respostas: a) $R = \dfrac{1}{2\pi\sigma}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) = 0{,}358\ \Omega$;
b) I = 2,79A, $\bar{J} = \dfrac{0{,}444}{r^2}\bar{a}_r$ [A/m²], $\bar{E} = \dfrac{0{,}111}{r^2}\bar{a}_r$ [V/m]

5.13) A figura mostra dois blocos infinitos de dielétricos perfeitos e paralelos, rodeados pelo espaço livre, onde na região 3, $\vec{E}_3 = 6\vec{a}_z$ V/m e $\vec{P}_3 = 18\vec{a}_z$ pC/m². Se $\vec{P}_2 = 24\vec{a}_z$ pC/m². Determinar:
a) ε_{R3}
b) ε_{R2}
c) $\vec{E}_1$
d) a diferença de potencial através das regiões 2 e 3.



Respostas: a) ε_{R3} = 1,339; b) ε_{R2} = 1,512;
c) $\bar{E}_1 = 8{,}004\bar{a}_z$ [V/m];
d) $V = V_2 + V_3$ = 0,106 + 0,300 = 0,406[V]

5.14) Uma esfera de raio a é feita de um dielétrico homogêneo com permissividade elétrica $\varepsilon_R$constante. A esfera está centrada na origem no espaço livre. Os campos de potencial no interior e exterior da esfera são expressos, respectivamente, por:

$$V_{int} = -\frac{3rE_o\cos\theta}{\varepsilon_R + 2} \quad \text{e} \quad V_{ext} = -rE_o\cos\theta + \frac{a^3 E_o}{r^2}\frac{\varepsilon_R - 1}{\varepsilon_R + 2}\cos\theta \qquad (E_o = \text{constante})$$

a) Mostrar que $\bar{E}_{int}$ é uniforme (isto é, possui módulo constante).
b) Mostrar que $\bar{E}_{ext} = E_o\bar{a}_z$ para $r >> a$.
c) Mostrar que estes campos obedecem a<u>todas</u> as condições de fronteira do dielétrico em r = a.
<u>Atenção</u>: Cuidado para não esquecer o sinal negativo das expressões acima.

Respostas: a) $\overline{E}_{int} = \dfrac{3E_o}{\varepsilon_R + 2}\left(\cos\theta\,\overline{a}_r - \operatorname{sen}\theta\,\overline{a}_\theta\right)$, portanto $E_{int} = \dfrac{3E_o}{\varepsilon_R + 2} = \text{constante}$;

b) $\overline{E}_{ext} = E_o\left(\cos\theta\,\overline{a}_r - \operatorname{sen}\theta\,\overline{a}_\theta\right) = E_o\overline{a}_z$, pois $\overline{a}_z \bullet \overline{a}_r = \cos\theta$ e $\overline{a}_z \bullet \overline{a}_\theta = -\operatorname{sen}\theta$;

c) De $\overline{E}_{ext} = -\overline{\nabla}V_{ext}$ e r=*a*, $\overline{E}_{ext} = \dfrac{3E_o}{\varepsilon_R + 2}\left(\varepsilon_R\cos\theta\,\overline{a}_r - \operatorname{sen}\theta\,\overline{a}_\theta\right) = \overline{E}_{ext_N} + \overline{E}_{ext_T}$

De $\overline{E}_{int} = -\overline{\nabla}V_{int}$ e r=*a*, $\overline{E}_{int} = \dfrac{3E_o}{\varepsilon_R + 2}\left(\cos\theta\,\overline{a}_r - \operatorname{sen}\theta\,\overline{a}_\theta\right) = \overline{E}_{int_N} + \overline{E}_{int_T}$

Logo, de $\overline{D}_{N1} = \overline{D}_{N2} \Rightarrow \overline{E}_{ext_N} = \varepsilon_R\overline{E}_{int_N}$ e de $\overline{E}_{T1} = \overline{E}_{T2} \Rightarrow \overline{E}_{ext_T} = \overline{E}_{int_T}$

5.15) Um capacitor coaxial de raio interno a = 2 cm, raio externo b = 4 cm e comprimento L = 1 m, contém duas camadas dielétricas, sendo uma na região 1 definida por $a<\rho<c$ com $\varepsilon_{R1} = 2$, e outra na região 2 definida por $c<\rho<b$ com $\varepsilon_{R2} = 4$. Sendo c = 3 cm, pede-se:

a) Determinar a capacitância do capacitor coaxial.
b) Determinar D_ρ e E_ρ em $\rho = c^-$ (na região 1 próximo a fronteira com a região 2) e em $\rho = c^+$ (na região 2 próximo a fronteira com a região 1), sabendo-se que V = 0 em $\rho = b$ (referência) e V = 100 volts em $\rho = a$.

Respostas: a) $C = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{274{,}41 \times 773{,}51}{274{,}41 + 773{,}51}\text{pF} = 202{,}55\text{ pF}$

b) D_1 = 107,46 nC/m^2, E_1 = 6,068 kV/m, D_2 = 107,46 nC/m^2, E_2 = 3,034 kV/m

5.16) Dado a $\overline{J} = -10^4\rho\left(sen2\phi\,\overline{a}_\rho + cos2\phi\,\overline{a}_\phi\right)$ [A/m^2], determinar a corrente que cruza:

(a) a região do plano x = 0, limitada por $0 < y < 2$ cm e $0 < z < 1$ cm, na direção $-\overline{a}_x$;
(b) a região do plano y = 0, limitada por $0 < x < 2$ cm e $0 < z < 1$ cm, na direção $-\overline{a}_y$.

Atenção: O problema é mais fácil de resolver em coordenadas cilíndricas.
Fazer uma figura ilustrativa para facilitar a visualização.

Respostas: a) I = 20 mA; b) I = 20 mA.

5.17) Sabendo as equações $\overline{D} = \varepsilon_o\overline{E} + \overline{P}$ e $\overline{D} = \varepsilon\overline{E}$ (para um dielétrico linear, homogêneo e isotrópico)

a) Demonstrar as seguintes relações para a polarização na fronteira entre 2 dielétricos perfeitos: $\dfrac{P_{t2}}{P_{t1}} = \dfrac{\varepsilon_{R2} - 1}{\varepsilon_{R1} - 1}$ e $\dfrac{P_{n2}}{P_{n1}} = \dfrac{\varepsilon_{R1}(\varepsilon_{R2} - 1)}{\varepsilon_{R2}(\varepsilon_{R1} - 1)}$,
partindo das condições de contorno normal $\overline{D}_{n1} = \overline{D}_{n2}$ e tangencial $\overline{E}_{t1} = \overline{E}_{t2}$.

b) Determinar a constante dielétrica (ou permissividade elétrica relativa) ε_R do material no qual a densidade de fluxo elétrico é quatro vezes a polarização.

Atenção: Empregar somente as fórmulas dadas acima para resolver os dois itens.

Respostas: a) Demonstração; b) $\varepsilon_R = 4/3$

Anotações