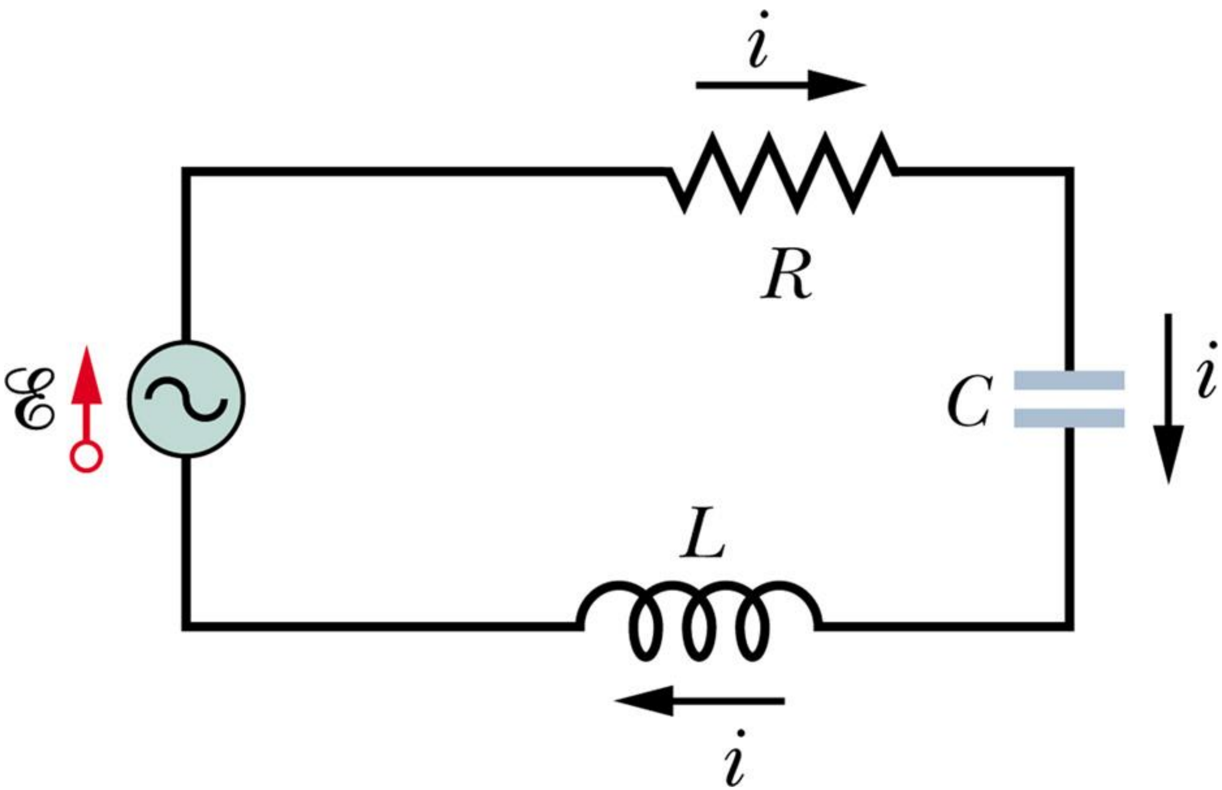
33.9 O Circuito RLC (forçado) em Série

Agora estamos prontos para aplicar a fem alternada da eq. (33.55) ao circuito RLC completo da figura abaixo.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \operatorname{sen} \omega_d t \,. \qquad (33.55)$$

Como R, C e L estão em série, a corrente que percorre todos os três pode ser escrita como

$$i(t) = I \operatorname{sen}(\omega_d t - \phi). \qquad (33.56)$$



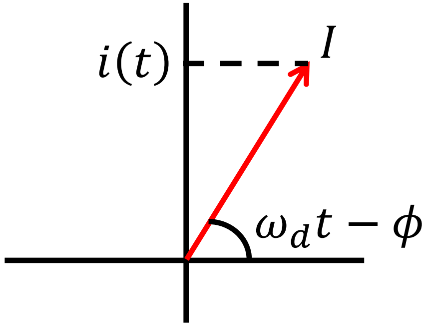
Objetivos:

$I = ?$

$\phi = ?$

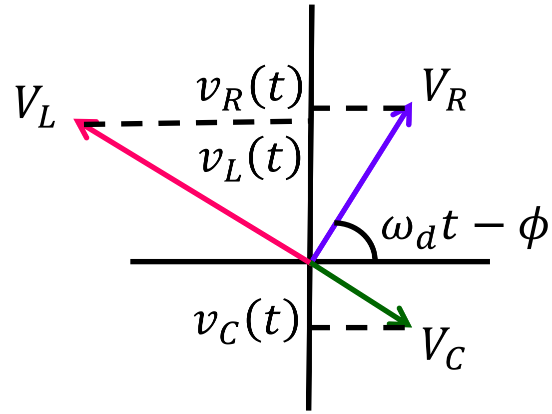
A Amplitude da Corrente

(a) Fasor que representa a corrente alternada $i(t)$ no circuito RLC forçado no instante t.

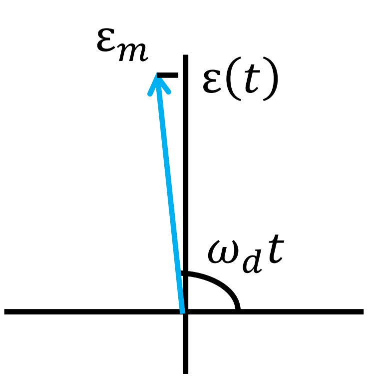


$$i(t) = I\,\mathrm{sen}(\omega_d t - \phi).$$

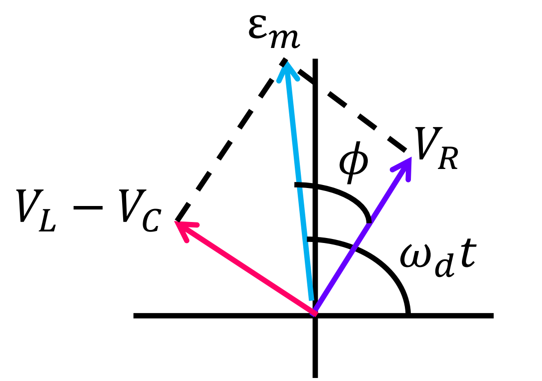
(b) Fasores que representam as tensões entre os terminais do resistor, capacitor e indutor no instante t.

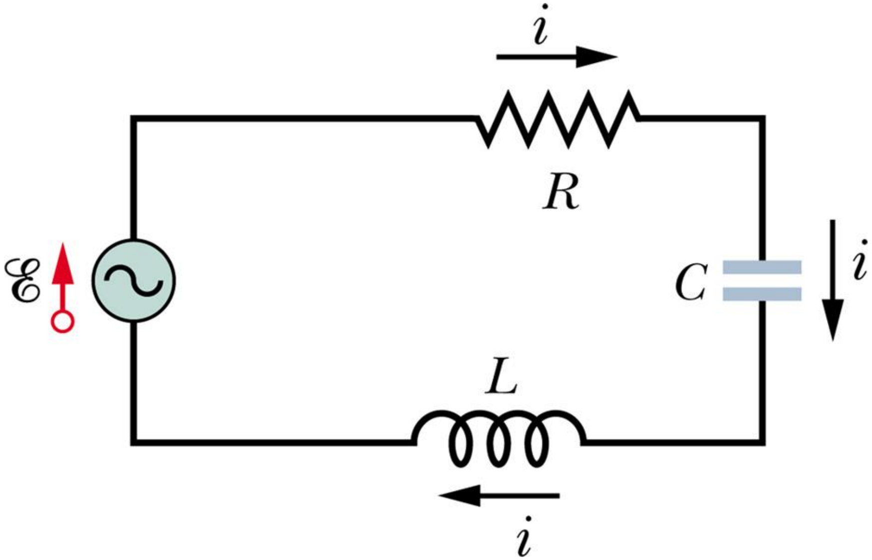


(c) Um fasor que representa a fem $\varepsilon(t)$ no circuito RLC forçado no instante t.



(d) O fasor da fem é igual a soma vetorial dos 3 fasores de tensão de (b).

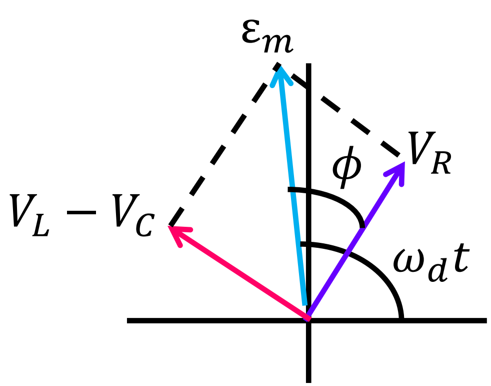




Para as grandezas que variam com o tempo...

Regra das malhas:

$$\varepsilon(t) = v_R(t) + v_C(t) + v_L(t). \qquad (33.57)$$



Para as amplitudes...

Teorema de Pitágoras:

$$\varepsilon_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2. \qquad (33.58)$$

Mas $V_R = IR,\ V_C = IX_C$ e $\mathrm{V_L} = I_L X_L$ ⇒

$$\varepsilon_m^2 = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2. \qquad (33.59)$$

⇒ $\varepsilon_m^2 = I^2(R^2 + (X_L - X_C)^2)$ ⇒

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \qquad (33.60)$$

Definindo a **impedância** Z do circuito como sendo o denominador da eq. (33.60)

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \qquad (33.60)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \qquad (33.61)$$

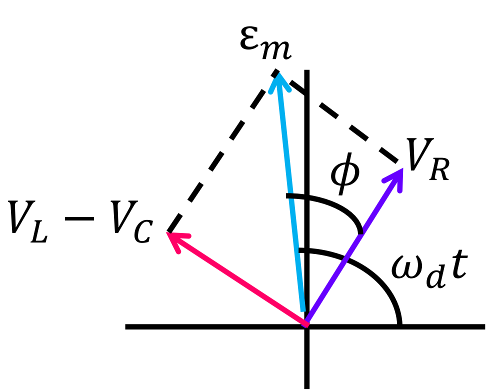
Dessa forma, podemos escrever a eq. (33.60) como

$$I = \frac{\varepsilon_m}{Z}. \qquad (33.62)$$

Finalmente, substituindo X_L por $\omega_d L$ e X_C por $1/\omega_d C$, podemos reescrever a eq. (33.60) como

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega_d L - 1/\omega_d C)^2}}. \qquad (33.63)$$

A Constante de Fase



A partir do triângulo formado no diagrama fasorial da figura ao lado,

$$tg\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR}. \qquad (33.64)$$

$$tg\phi = \frac{X_L - X_C}{R}. \qquad (33.65)$$

$X_L > X_C$:
- Dizemos que o circuito é mais indutivo do que capacitivo.
- $\phi > 0$ implica que o fasor I está girando atrás do fasor ε_m.

$X_L < X_C$:
- Dizemos que o circuito é mais capacitivo do que indutivo.
- $\phi < 0$ implica que o fasor I está gira à frente do fasor ε_m.

$X_L = X_C$:
- Dizemos que o circuito está em **ressonância**.
- $\phi = 0$ implica que os fasores I e ε_m giram juntos.

Ressonância

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega_d L - 1/\omega_d C)^2}}. \qquad (33.63)$$

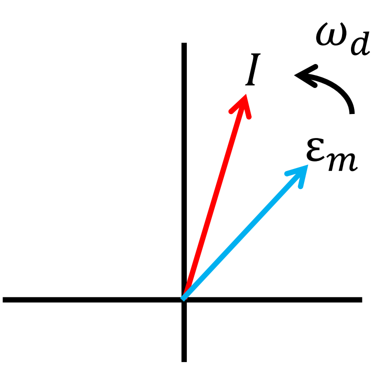
De acordo com a eq. (33.63), para uma determinada resistência R a amplitude da corrente I é máxima quando o termo $(\omega_d L - 1/\omega_d C)$ do denominador é nulo, ou seja,

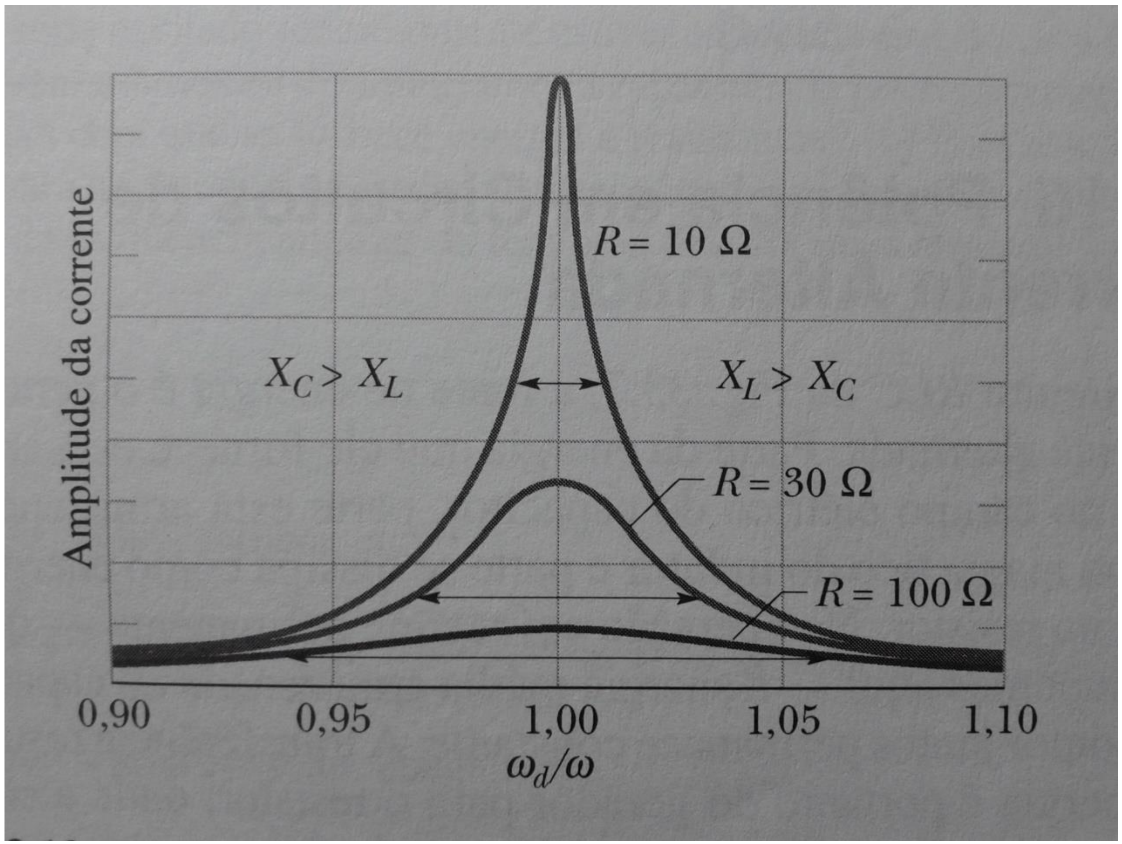
$$\omega_d L = 1/\omega_d C \quad \Rightarrow \quad \omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (33.66)$$

Assim, em um circuito RLC, a ressonância e a amplitude da corrente I máxima ocorrem quando

$$\omega_d = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (33.67)$$

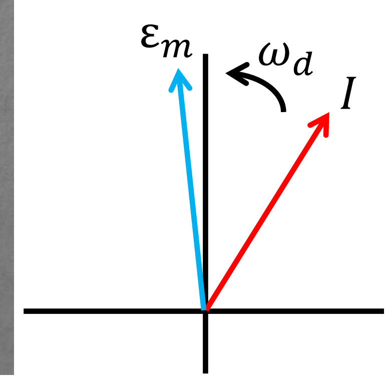
- $\omega_d < \omega$
- $X_C > X_L$;
- Mais capacitivo;
- I adiantada em relação à ε_m;
- $\phi < 0$.





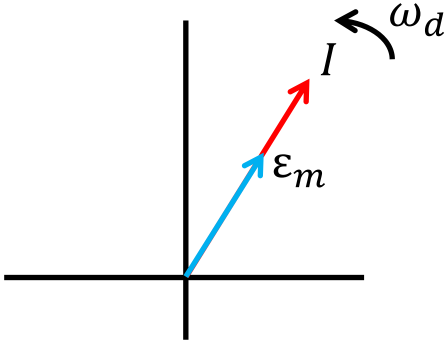
Curvas de ressonância para o circuito RLC com $L = 100\ mH$, $C = 100\ pF$ e três valores de R.

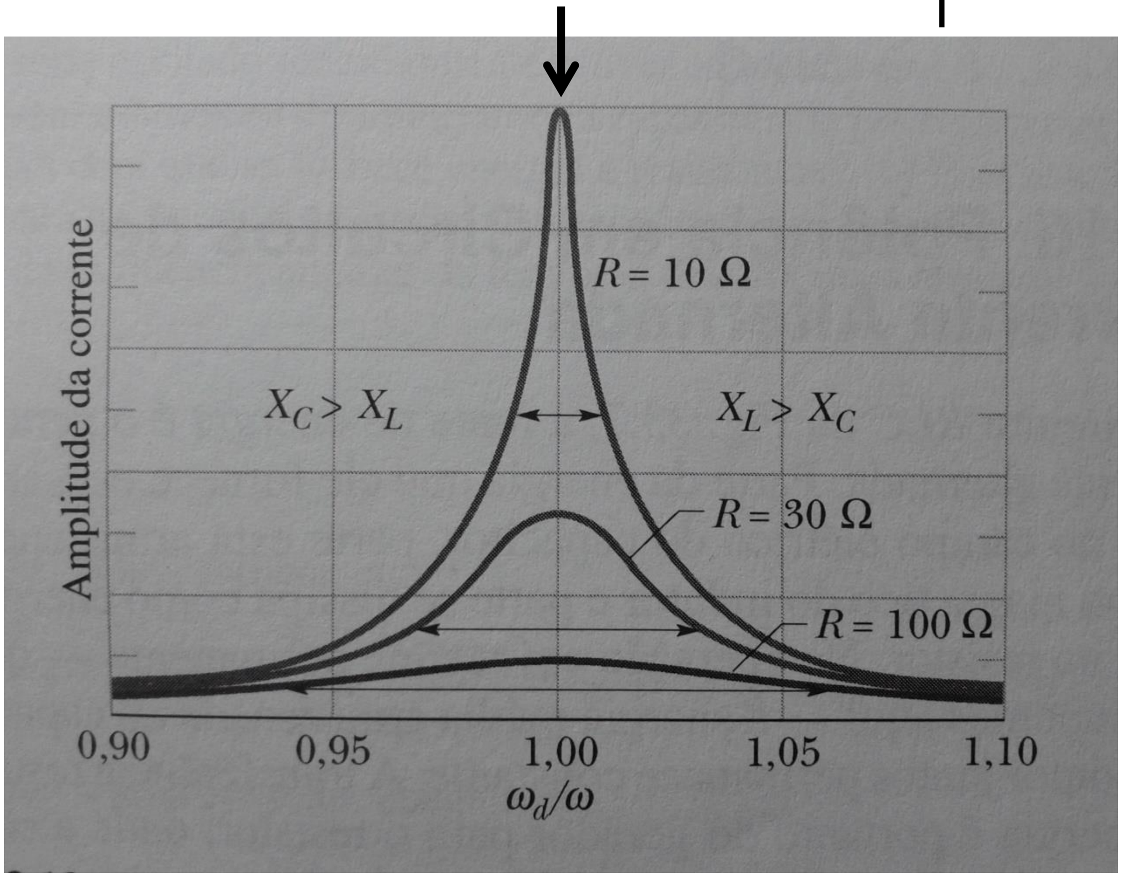
- $\omega_d > \omega$
- $X_L > X_C$;
- Mais indutivo;
- I atrasada em relação à ε_m;
- $\phi > 0$.



Circuito RLC em Ressonância

- ➢ $\omega_d = \omega$
- $X_C = X_L$;
- I e ε_m estão em fase;
- $\phi = 0$.





Curvas de ressonância para o circuito RLC com $L = 100\ mH$, $C = 100\ pF$ e três valores de R.

33.10 Potência em Circuitos de Corrente Alternada

A taxa instantânea com a qual a energia é dissipada em um resistor é dada por

$$P(t) = i^2(t)R = [I\,\mathrm{sen}(\omega_d t - \phi)]^2 R = I^2 R \sin^2(\omega_d t - \phi)\,. \qquad (33.68)$$

A taxa média (em um ciclo completo ou um período) com a qual a energia é dissipada em um resistor é dada por

$$P_{méd} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} i^2(t')R\,dt' = \frac{I^2 R}{2} = \left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2 R, \qquad (33.69)$$

onde $T = 2\pi/\omega_d$ é o período de excitação do circuito.

A grandeza $I/\sqrt{2}$ é chamada de **valor médio quadrático**, ou rms (root mean square) da corrente

$$I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}}. \qquad (33.70) \qquad \Rightarrow \qquad P_{méd} = I_{rms}^2 R. \qquad (33.71)$$

Também podemos definir: $$V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}} \quad e \quad \varepsilon_{rms} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} \qquad (33.72)$$

$$\Rightarrow \quad I_{rms} = \frac{\varepsilon_{rms}}{Z} = \frac{\varepsilon_{rms}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \qquad (33.73)$$

$$\Rightarrow \quad P_{méd} = \frac{\varepsilon_{rms}}{Z} I_{rms} R = \varepsilon_{rms} I_{rms} \frac{R}{Z}. \qquad (33.74)$$

Mas $$\cos\phi = \frac{V_R}{\varepsilon_m} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z}. \qquad (33.75)$$

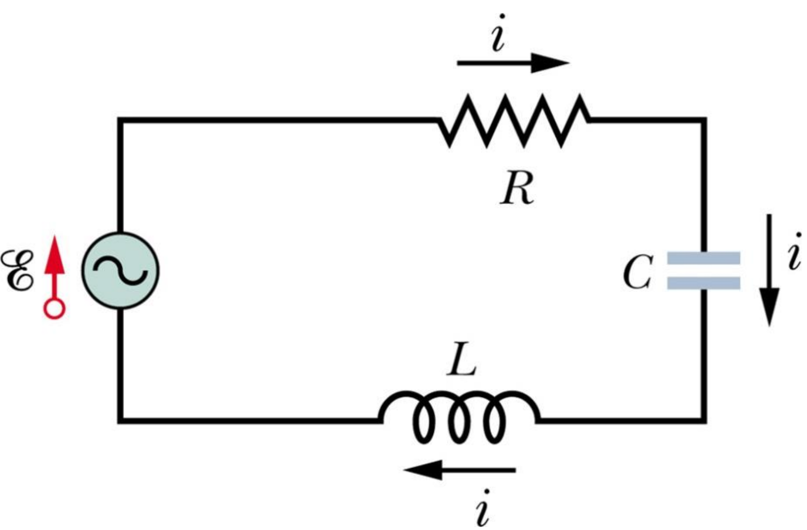
Fator de potência

$$\Rightarrow \quad P_{méd} = \varepsilon_{rms} I_{rms} \boxed{\cos\phi}. \qquad (33.76)$$

Exercícios sugeridos: 40P, 41P, 43P, 44P, 45P, 46P,47P, 48P, 49E, 50E, 51E, 54E, 55E, 56P, 57P, 58P, 59P, 60P e 61P.

43P) Uma bobina com uma resistência desconhecida e uma indutância de $88\ mH$ está ligada em série a um capacitor de $0{,}94\ \mu F$ e a uma fem alternada com frequência de $930\ Hz$. Se a constante de fase entre a tensão aplicada e a corrente for de $75°$, qual a **resistência da bobina**? [use as equações (33.39), (33.49) e (33.65)]

45P) Um circuito RLC como o da figura abaixo possui $R = 5{,}00\ \Omega$, $C = 20{,}0\ \mu F$, $L = 1{,}00\ H$ e $\varepsilon_m = 30{,}0\ V$.



(a) Para qual frequência angular ω_d a amplitude de corrente terá seu valor máximo? [use a equação (33.67)]

(b) Qual é este valor máximo? [use a equação (33.63)]

(c) Para que duas frequências ω_{d1} e ω_{d2} a amplitude da corrente será metade deste valor máximo? [use a equação (33.63)]

(d) Qual a meia-largura fracional [$\equiv (\omega_{d1} - \omega_{d2})/\omega$] da curva de ressonância para este circuito?

$$X_C = \frac{1}{\omega_d C} \qquad (33.39)$$

$$X_L = \omega_d L \qquad (33.49)$$

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega_d L - 1/\omega_d C)^2}} \qquad (33.63)$$

$$tg\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad (33.65)$$

$$\omega_d = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (33.67)$$