Capítulo IV

ENERGIA E POTENCIAL

4.1 – ENERGIA (TRABALHO) PARA MOVER UMA CARGA PONTUAL EM UM CAMPO ELÉTRICO

Observando a figura, e adotando $\bar{a}_L$ como um vetor unitário na direção de $d\bar{L}$, tem-se:

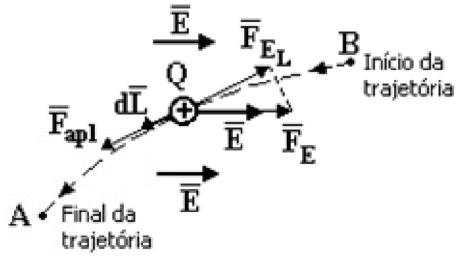
$$dW = \bar{F}_{aplicada} \bullet d\bar{L} = -\bar{F}_{E_L} \bullet d\bar{L} = -\left(\bar{F}_E \cdot \bar{a}_L\right)\bar{a}_L \bullet d\bar{L} = -\left(\bar{F}_E \cdot \bar{a}_L\right)dL = -\bar{F}_E \bullet d\bar{L}$$

Substituindo $\bar{F}_E = Q\bar{E}$,chega-se a:

$$dW = -Q\bar{E} \bullet d\bar{L}$$

Integrando, obtém-se o *trabalho* (*energia*) necessário para mover uma carga Q desde o <u>início</u> (ponto B) até o <u>final</u> (ponto A) de uma trajetória, sob a ação do campo elétrico $\bar{E}$, dado por:

$$\boxed{W = -Q \int_{\text{Início (B)}}^{\text{Final (A)}} \bar{E} \bullet d\bar{L}}$$



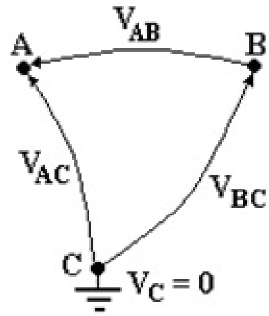
onde $\oint \bar{E} \bullet d\bar{L} = 0$, pois o trabalho do campo eletrostático depende apenas das posições inicial e final da trajetória.

<u>Nota</u>: Na eletrostática, o campo elétrico é <u>conservativo</u>.

4.2 – DEFINIÇÃO DE DIFERENÇA DE POTENCIAL (V_{AB}) E POTENCIAL (V)

A *diferença de potencial* V_{AB} entre 2 pontos A e B é definida como sendo o trabalho necessário para movimentar uma carga pontual unitária positiva desde B (tomado como referência) até A.

$$V_{AB} = \frac{W}{Q} \Rightarrow \boxed{V_{AB} = -\int_B^A \bar{E} \bullet d\bar{L}} \qquad \text{(FÓRMULA GERAL)}$$



Como o campo elétrico $\bar{E}$ é conservativo (na eletrostática), tem-se, para 3 pontos A, B e C:

$$V_{AB} = V_{AC} - V_{BC}$$

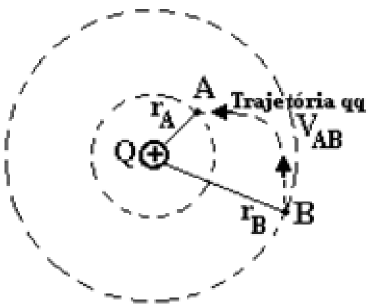
Os *potenciais "absolutos"* V_A e V_B são obtidos adotando-se uma mesma referência zero de potencial. Se, por exemplo, $V_C = 0$, pode-se escrever $V_{AB} = V_A - V_B$

4.3 – O POTENCIAL DE UMA CARGA PONTUAL

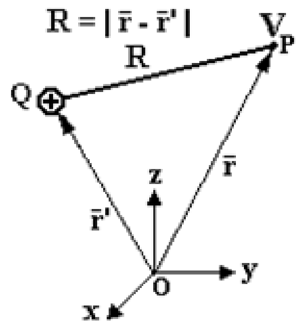
Supondo-se a carga na origem, tem-se, aplicando a fórmula geral:

$$V_{AB} = -\int_B^A \bar{E} \bullet d\bar{L} = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{a}_r \bullet dr\,\bar{a}_r$$

$$\boxed{V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = V_A - V_B}$$



Se B $\rightarrow\infty\Rightarrow$ $V_B \rightarrow 0$ $\Rightarrow V_A = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$ (potencial absoluto)



Escrevendo de forma genérica, o potencial absoluto devido a uma carga pontual Q fora da origem é:

$$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

sendo R a distância da carga pontual Q ao ponto desejado.

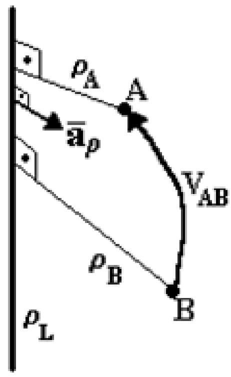
4.4 – O POTENCIAL DE UM SISTEMA DE CARGAS DISTRIBUÍDAS

4.4.1 – V_{AB} de uma reta ∞ com ρ_L constante

Partindo de $V_{AB} = -\int_B^A \bar{E} \bullet d\bar{L}$,obtemos:

$$V_{AB} = -\int_{\rho_B}^{\rho_A} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \bar{a}_\rho \bullet d\rho\, \bar{a}_\rho$$

$$\boxed{V_{AB} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\rho_B}{\rho_A}}$$

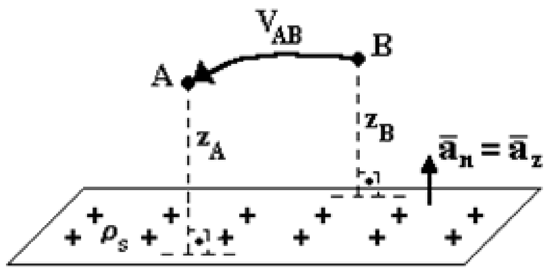


4.4.2 – V_{AB} de um plano ∞ com ρ_s constante

Partindo de $V_{AB} = -\int_B^A \bar{E} \bullet d\bar{L}$,obtemos:

$$V_{AB} = -\int_{z_B}^{z_A} \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \bar{a}_z \bullet dz\, \bar{a}_z$$

$$\boxed{V_{AB} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(z_B - z_A\right)}$$



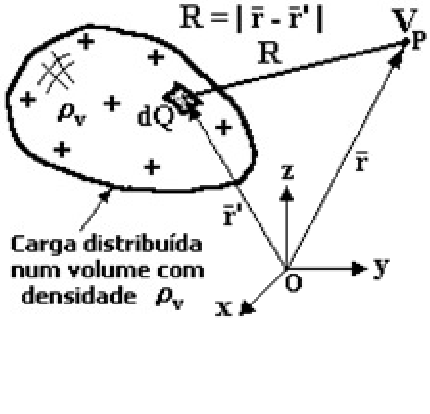
4.4.3 – Potencial V de uma carga distribuída

Para uma carga distribuída, com <u>referência zero no infinito</u>:

$$\boxed{V = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

onde: $dQ = \rho_L dL = \rho_s ds = \rho_v dv$, dependendo da configuração de cargas,

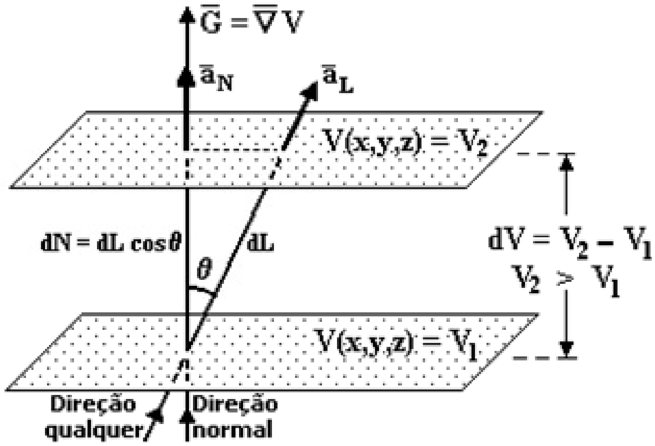
$R = \left|\bar{R}\right| = \left|\bar{r} - \bar{r}'\right|$ = distância (escalar) de dQ ao ponto fixo P onde se quer obter o potencial V



4.5 – GRADIENTE DO POTENCIAL ($\overline{\nabla}V$)

O *gradiente de uma função escalar* (ex. V) é definido matematicamente por:

$$\boxed{\overline{\nabla}V = \frac{dV}{dN}\overline{a}_N} \quad \text{(resultado = vetor)}$$



ondedV, dN e $\vec{a}_N$ são mostrados na figura.

$$\overline{\nabla}V = \frac{dV}{dN}\overline{a}_N = \frac{dV}{dL\cos\theta}\overline{a}_N = G\overline{a}_N = \vec{G}$$

Daí, $GdL\cos\theta = dV \Rightarrow \vec{G} \bullet d\vec{L} = dV$
onde:

$$\vec{G} = G_x\vec{a}_x + G_y\vec{a}_y + G_z\vec{a}_z = G\,\overline{a}_N$$

$$d\overline{L} = dx\,\overline{a}_x + dy\,\overline{a}_y + dz\,\overline{a}_z = dL\,\overline{a}_L$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

sendo:
$d\vec{L}$ =vetor comprimento diferencial medido numa direção qualquer,
dN = dLcosθ = menor distância entre as 2 superfícies equipotenciais V_1 e V_2.

Assim, obtemos a expressão do gradiente *em coordenadas cartesianas*:

$$\boxed{\vec{G} = \vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\overline{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\overline{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\overline{a}_z}$$

Propriedades do gradiente de uma função escalar V:

a) $\overline{\nabla}V$ é***normal*** a V
b) $\overline{\nabla}V$ aponta no ***sentido do crescimento*** de V

Logo $\overline{\nabla}V$ é um vetor que dá a **máxima** variação no espaço de uma quantidade escalar (módulo do vetor) e a **direção** em que este máximo ocorre (sentido do vetor).

Se V = função potencial elétrico, então:

$$\boxed{\overline{E} = -\overline{\nabla}V}$$ ($\overline{E}$ está apontado no sentido decrescente de V).

<u>Exemplo:</u>Utilizando gradiente, determinar a expressão de $\overline{E}$ para uma carga pontual na origem.

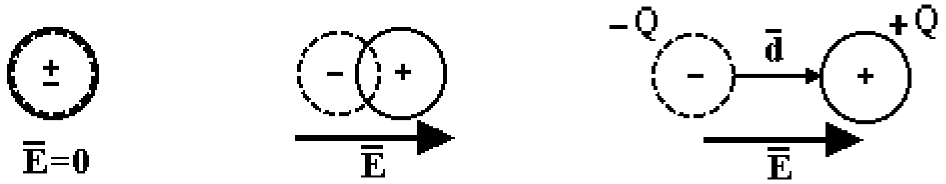
<u>Solução:</u> O potencial de uma carga pontual na origem (no vácuo) é: $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Tomando o gradiente de *V*, em coordenadas esféricas, sabendo-se que *V* = f(r):

e fazendo $\overline{E} = -\overline{\nabla}V \Rightarrow \vec{E} = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{a}_r = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{-1}{r^2}\right)\vec{a}_r \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{a}_r}$

4.6 – O DIPOLO ELÉTRICO

É um sistema com 2 cargas pontuais iguais e simétricas (figura c) bem próximas tal que d << r, sendo d a distância (separação) entre as cargas e r a distância do centro do dipolo a um ponto P desejado.



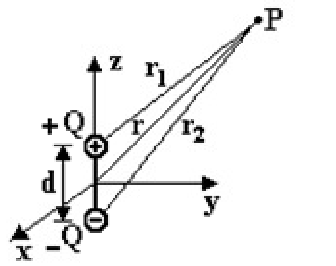
Etapas de polarização de um átomo formando um dipolo elétrico

Cálculo do potencial no ponto P devido ao dipolo na origem:

$$V_P = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

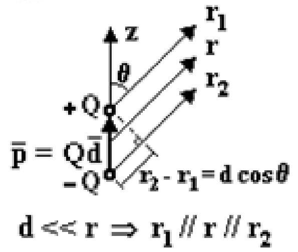
$$V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$



Cargas simétricas com d < r

Sendo d << r, fazemos $r_2 - r_1 \cong d\cos\theta$ e $r_1 r_2 \cong r^2$. Daí,

$$\boxed{V_p = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$



Cargas simétricas com d << r

Campo elétrico no ponto P devido ao dipolo elétrico <u>na origem</u>:

$$\boxed{\overline{E} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\overline{a}_r + \operatorname{sen}\theta\,\overline{a}_\theta\right)}$$ (obtido de $\overline{E} = -\overline{\nabla}V$)

Definindo ***momento de dipolo elétrico*** como $\overline{p} = Q\overline{d}$,onde $\overline{d}$ é o vetor cuja magnitude é a distância entre as cargas do dipolo e cuja direção (e sentido) é de –Q para +Q:

$$\boxed{V_p = \frac{\overline{p}\bullet\overline{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

<u>Notas</u>:

a) Com o aumento da distância, o potencial e o campo elétrico caem mais rápidos para o dipolo elétrico do que para a carga pontual.

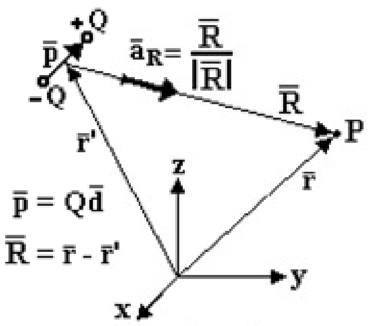
b) Para o dipolo elétrico <u>fora da origem</u>, o potencial é dado por:

$$\boxed{V_p = \frac{\overline{p}\bullet\overline{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}}$$

onde:

$\overline{a}_R$ = versor orientado do centro do dipolo ao ponto desejado;

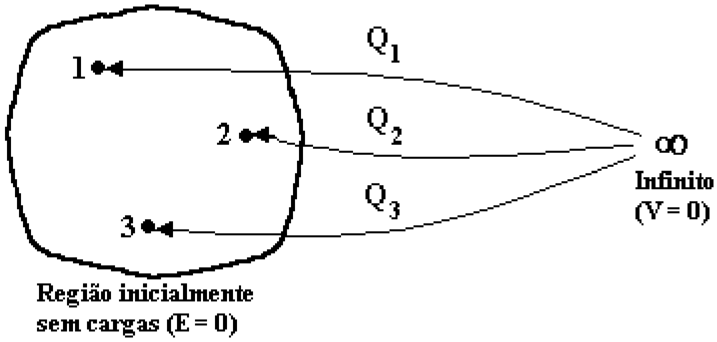
R = distância do centro do dipolo ao ponto desejado.



Dipolo fora da origem

4.7 – ENERGIA NO CAMPO ELETROSTÁTICO

4.7.1 – Energia (trabalho) para uma distribuição discreta de cargas



W_E = trabalho total para trazer 3 cargas Q_1, Q_2, Q_3 do ∞ e fixá-las nos pontos 1, 2, 3, nesta ordem:

$W_E = W_1 + W_2 + W_3$
$W_E = 0 + Q_2V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$ (i)

Nota: $V_{2,1}$ = potencial no ponto 2 devido à carga Q_1 no ponto 1 ($V_{2,1} \neq V_{21}$)

Se as 3 cargas forem fixadas na ordem inversa, isto é, fixando Q_3, Q_2, Q_1, nos pontos 3, 2, 1, temos:
$W_E = W_3' + W_2' + W_1'$
$W_E = 0 + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3}$ (ii)

(i) + (ii): $2W_E = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3$

$$W_E = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3)$$

Para N cargas: $$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i} \quad [J]$$

4.7.2 – Energia (trabalho) para uma distribuição contínua de carga

Para uma região com distribuição contínua de carga, substituímos Q_i da fórmula acima pela carga diferencial $dQ = \rho_v dv$ e a somatória se transforma numa integral em todo o volume de cargas.

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \rho_v V dv} \quad [J]$$

Pode-se demonstrar que o trabalho pode ser também expresso em função de $\overline{D}$ e/ou $\overline{E}$ como:

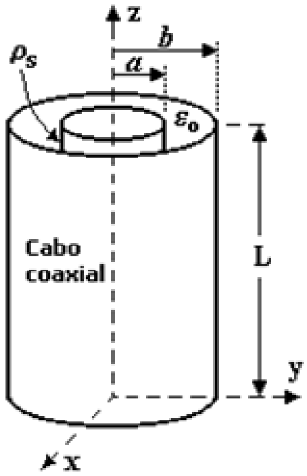
$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \overline{D}\bullet\overline{E}\, dv} \text{ ou } \boxed{W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \varepsilon_0 E^2 dv} \text{ ou } \boxed{W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \frac{D^2}{\varepsilon_0} dv}$$

Nota: A densidade de energia do campo elétrico no vácuo pode ser obtida pelas expressões:

$$\frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2}\overline{D}\bullet\overline{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon_0} \quad [J/m^3]$$

Ex. 1 *Calcular a energia* $\boldsymbol{W_E}$ *armazenada num pedaço de cabo coaxial de comprimento* ***L*** *e condutores interno e externo de raios* ***a*** *e* ***b****, respectivamente, supondo que a densidade superficial de carga uniforme no condutor interno é igual a* ρ_s.

Supondo uma gaussiana cilíndrica no interior do dielétrico (vácuo) de raio $a<\rho<b$,e aplicando a lei de Gauss ($\oint_S \overline{D} \bullet d\overline{S} = Q_{int}$), obtemos:



$$D\, 2\pi\rho L = \rho_s\, 2\pi a L \Rightarrow D = \frac{\rho_s\, a}{\rho}$$

Substituindo na equação de energia obtida acima:

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol}\frac{D^2}{\varepsilon_0}dv = \frac{1}{2}\int_{z=0}^{L}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=a}^{b}\frac{(\rho_s a/\rho)^2}{\varepsilon_0}\rho d\rho d\phi dz$$

$$W_E = \frac{1}{2}\frac{\rho_s^2 a^2}{\varepsilon_0}\left[ln\rho\right]_a^b\, 2\pi L$$

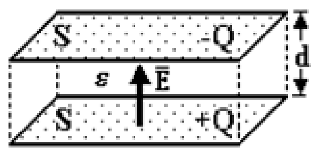
Daí, obtemos finalmente:

$$\boxed{W_E = \frac{\pi a^2 L \rho_s^2}{\varepsilon_0} ln\frac{b}{a}}$$

Ex. 2 *Calcular a energia* $\boldsymbol{W_E}$ *armazenada num capacitor de placas paralelas no vácuo, sendo* ***V*** *a diferença de potencial entre as placas iguais de área* ***S*** *e separadas por uma distância* ***d****. Supor o campo elétrico entre as placas uniforme desprezando os efeitos de bordas.*

Da equação de energia obtida acima, e sabendo que $V = E\, d$, obtemos:

$$W_E = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 E^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V}{d}\right)^2\int dv \Rightarrow \boxed{W_E = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}V^2}$$



Tomando a expressão da capacitância do capacitor de placas paralelas ideal (cap. 5), teremos:

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}CV^2} \text{onde}\, C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

4.8 – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4.1) Três cargas pontuais idênticas de carga Q são colocadas, uma a uma, nos vértices de um quadrado de lado *a*. Determinar a energia armazenada no sistema após todas as cargas serem posicionadas.

Resposta: $W_E = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o a}\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)$ [J].

4.2) Seja uma carga distribuída ao longo da porção $|z| < 1$ m do eixo z, com densidade linear de carga $\rho_L = kz$ [ηC/m]. Determinar:
a) O potencial em um ponto qualquer sobre o plano z = 0;
b) O potencial em um ponto do eixo z situado a uma altura h = 2 m do plano z = 0.

Respostas: a) $V_A = 0$; b) $V_B = 1{,}775$ [kV].

4.3) Um quadrado de vértices A(0,0,0), B(0,1,0), C(1,1,0) e D(1,0,0), possui uma distribuição linear uniforme de carga com densidade $\rho_L = 10$ [*p*C/m] ao longo do lado AB, uma carga pontual $Q_1 = 1$ [*p*C] no vértice C, uma carga pontual $Q_2 = -10$ [*p*C] no vértice D. Determinar, no centro P do quadrado:
a) O potencial elétrico devido a cada uma das três cargas;
b) O potencial elétrico total devido às três cargas.

Respostas: a) $V_{P1} = 0{,}0127$ [V], $V_{P2} = -0{,}127$ [V], $V_L = 0{,}1584$ [V]; b) $V_{PT} = 0{,}044$ [V].

4.4) Um campo elétrico é dado em coordenadas cilíndricas por: $\vec{E} = \dfrac{100}{\rho^2}\vec{a}_\rho \left[\dfrac{V}{m}\right]$

Conhecidos os pontos A(3,0,4), B(5,13,0) e C(15,6,8), expressos em coordenadas cartesianas, determinar:
a) A diferença de potencial V_{AB};
b) O potencial V_A se a referência zero de potencial está no ponto B;
c) O potencial V_A se a referência zero de potencial está no ponto C;
d) O potencial V_A se a referência zero de potencial está no infinito.

Respostas: a) $V_{AB} = 26{,}15$ [V]; b) $V_A = 26{,}15$ [V]; c) $V_A = 27{,}14$ [V]; d) $V_A = 33{,}33$ [V].

4.5) Uma superfície esférica no espaço livre, definida por r = 4 cm, contém uma densidade superficial de carga de 20 [μC/m²]. Determinar o valor do raio r_A,, em centímetros, se a região compreendida entre as esferas de raios r = 6 cm e r = r_A contém exatamente 1 mJ de energia.

Resposta: $r_A = 6{,}54$ [cm].

4.6) O campo potencial no vácuo é expresso por $V = k/\rho$.
a) Determinar a quantidade de carga na região cilíndrica $a<\rho<b$ e $0 < z < 1$.
b) Determinar a energia armazenada na região cilíndrica $a<\rho<b$ e $0 < z < 1$.

Respostas:a) $Q = 2\pi\varepsilon_o k\cdot\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)$; b) $W_E = \dfrac{1}{2}\pi\varepsilon_o k^2\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)$.

4.7) Uma linha de cargas uniforme de 2 m de comprimento com carga total de 3 nC está situada sobre o eixo z com o ponto central da linha localizado a +2 m da origem. Num ponto P sobre o eixo x, distante +2 m da origem, pede-se:

a) Determinar o potencial elétrico devido a linha de cargas;

b) Determinar o potencial elétrico se a carga total for agora concentrada no ponto central da linha;

c) Calcular e comentar sobre a diferença percentual entre os dois valores de potencial obtidos.

Respostas: a) $V_{PL} = 9{,}63$ V;

b) $V_{PQ} = 9{,}55$ V;

c) $(V_{PQ} - V_{PL})\text{x}100\%/V_{PQ} = -0{,}83\ \%$

Uma carga concentrada produz um potencial menor do que esta mesma carga distribuída, caso sejam iguais as distâncias dos centros destas cargas ao ponto desejado.

4.8) Uma carga $Q_0 = +10\ \mu C$ está colocada no centro de um quadrado de lado 1 m e vértices A, B, C, D. Supondo o meio o vácuo, determinar o trabalho necessário para:

a) Mover a carga $Q_A = +10\ \mu C$ do infinito até fixá-la no vértice A do quadrado;

b) Mover também a carga $Q_B = -20\ \mu C$ do infinito até fixá-la no vértice B do quadrado;

c) Finalmente mover também a carga $Q_C = +30\ \mu C$ do infinito até fixá-la no vértice C do quadrado.

Respostas: a) $W_A = 1{,}271$ J; b) $W_B = -4{,}340$ J; c) $W_C = 0{,}327$ J.

4.9) a) Determinar o potencial V_P no ponto P(2, 0, 0) devido a uma carga total Q = 2 nC distribuída uniformemente ao longo do eixo y, de $y = 0$ até $y = 2$ m.

b) Supondo que a mesma carga total Q = 2 nC seja agora concentrada num ponto, determinar em que posição esta deverá ser colocada ao longo do eixo y para produzir o mesmo potencial V_P no ponto P(2, 0, 0) obtido no item (a).

Respostas: a) $V_P = 7{,}9324$ V;

b) $y = \pm\ 1{,}072$ m.

4.10) a) Determinar a fórmula para o cálculo da diferença de potencial entre 2 pontos quaisquer A e B devido a uma carga pontual Q, no vácuo. (Supor a carga na origem.)

b) Determinar a fórmula para o cálculo da diferença de potencial entre 2 pontos quaisquer A e B devido a uma carga distribuída uniformemente numa linha infinita com densidade ρ_L, no vácuo.

c) Uma carga com densidade linear constante ρ_L está distribuída sobre todo o eixo z e uma carga pontual Q está localizada no ponto (1, 0, 0). Sejam os pontos A(4, 0, 0), B(5, 0, 0) e C(8, 0, 0). Se $V_{AB} = V_{BC} = 1$ volt, determinar os valores numérico de ρ_L e de Q. O meio é o vácuo.

Respostas: a) $V_{AB} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_B}\right)$;

b) $V_{AB} = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\dfrac{\rho_B}{\rho_A}$;

c) $\rho_L = -86{,}81\,\text{pC/m}$; $Q = 1800{,}04$ pC

4.11) Sabendo-se que $V = 2x^2y + 20z - 4\ln\left(x^2 + y^2\right)$ V, no vácuo, determine o valor das seguintes grandezas no ponto P(6; -2,5; 3):

a) V; b) $\overline{E}$; c) $\overline{D}$; d) ρ_v.

Respostas: a) $V_P = -135$ [V]; b) $\overline{E}_P = 61{,}1\overline{a}_x - 72{,}5\overline{a}_y - 20\overline{a}_z$ [V/m];
c) $\overline{D}_P = 541\overline{a}_x - 642\overline{a}_y - 177\overline{a}_z$ [pC/m^2]; d) $\rho_v = 88{,}5$ [pC/m^3].

4.12) Um dipolo $\overline{p}_1 = 20\overline{a}_z$ nC.m, localiza-se na origem, no vácuo, e um segundo dipolo $\overline{p}_2 = -50\overline{a}_z$ nC.m localiza-se em (0, 0, 10).

Determine V e $\overline{E}$ no ponto médio entre os dipolos.

Resposta: $V_M = 25{,}2$ [V]; $\overline{E}_M = -4{,}32\overline{a}_z$ [V/m].

<u>Anotações</u>

Anotações