~~g(x)~~ - 2a) Claim:

$$|g(x)-\ell| \le |h(x)-\ell| + |f(x)-\ell|$$

Proof by contradiction: $|g(x)-\ell| > |h(x)-\ell| + |f(x)-\ell|$

Case 1: $g(x)-\ell > 0$:

$$g(x)-\ell > h(x)-\ell + |f(x)-\ell|$$

$$g(x)-h(x) > |f(x)-\ell|$$

but $g(x)-h(x) \le 0$, and $|f(x)-\ell| \ge 0$, so contradiction.

Case 2: $g(x)-\ell < 0$:

$$-(g(x)-\ell) > |h(x)-\ell| - (f(x)-\ell)$$

$$f(x)-g(x) > |h(x)-\ell|$$

but $f(x)-g(x) \le 0$ and $|h(x)-\ell| \ge 0$, so contradiction.

So, $|g(x)-\ell| \le |h(x)-\ell| + |f(x)-\ell|$.

Since $\lim_{x\to a} h(x) = \ell \iff \forall \varepsilon_h > 0 \ \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |h(x)-\ell| < \varepsilon_h$

and $\lim_{x\to a} g(x) = \ell \iff \forall \varepsilon_g > 0 \ \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon_f$.

So, want to show

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x)-\ell| < \varepsilon$$

Pick δ so that $|h(x)-\ell| < \varepsilon_h$ and $|f(x)-\ell| < \varepsilon_f$, and $\varepsilon_h + \varepsilon_f \le \varepsilon$.

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |g(x)-\ell| < |h(x)-\ell| + |f(x)-\ell| < \varepsilon_h + \varepsilon_f \le \varepsilon.$$

So, $|g(x)-\ell| < \varepsilon$. QED.