Analisi matematica 1

Appunti & esercizi

Marco Cetica

Dipartimento di Informatica

30 settembre 2020

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti rappresentano una sintesi del programma di analisi matematica 1 svolto al dipartimento di Informatica presso l'Università di Firenze nell'anno accademico 2019/2020. Lo scopo di questo testo è quello di riassumere gli appunti presi durante le lezioni in modo leggermente più ordinato rispetto alle pagine di quaderno scritte a penna; per tale motivo, questi appunti non sono da considerarsi come un'alternativa ad un qualsiasi testo di tale disciplina, bensì come un tentativo di rendere meno tediosi certi concetti particolarmente teorici. Nei 10 capitoli in cui è suddiviso questo libro è possibile trovare teoria ed esercizi dei seguenti argomenti:

- **Insiemi numerici**: introduzione alle caratteristiche principali degli insiemi numerici utilizzati durante il corso e alle loro applicazioni;
- **Funzioni reali**: richiamo sintetico al concetto di funzione in una sola variabile reale, alle varie tipologie di funzioni e alle operazioni trigonometriche di base;
- **Successione numeriche**: argomento cardine del corso, tale capitolo comprende numerosi teoremi al concetto di successione numerica e ai relativi limiti;
- **Limiti di funzione**: introduzione agli elementi di base dello studio di funzione, in particolare alla risoluzione del limite di una funzione, del concetto di continuità e di discontinuità e dei teoremi relativi all'esistenza dei punti di massimo o minimo locali;
- **Funzioni derivabili**: introduzione al calcolo differenziale di una funzione, definizione del significato geometrico e fisico di derivata, regole di derivazione e di tutti i teoremi sulle derivate;
- **Polinomio di Taylor**: concetto di derivata successiva, sviluppi in serie di Taylor (sia con il resto di Peano, sia con il resto di Lagrange) ed algebra degli o piccoli;
- **Calcolo integrale**: introduzione al calcolo integrale, definizione di concetto di antiderivata, risoluzione e teoremi relativi agli integrali indefiniti, risoluzione e teoremi relativi agli integrali definiti di Riemann, introduzione al concetto di integrale improprio e di impropriet à di un intervallo;
- **Serie numeriche**: introduzione alle serie numeriche, elenco delle principali serie numeriche e alle loro proprietà, descrizione dei vari metodi per studiare il carattere di una serie;
- **Numeri complessi**[1]: accenno ai numeri complessi, descrizione dei vari metodi con cui si può rappresentare un numero complesso.

Questo testo presuppone la conoscenze dell'algebra di base che ogni studente dovrebbe avere una volta uscito dalle scuole superiori; ad ogni modo, il capitolo sugli insiemi numerici e il capitolo sulle funzioni reali rappresentano un ripasso dei prerequisiti considerati più scabrosi e per i quali, molto spesso, è stata fatta solo una rapida introduzione; tuttavia i due capitoli citati espandono considerevolmente il bagaglio teorico necessario per una corretta fruizione del corso. Il contenuto di questo testo, seppur presentato in modo conciso ed essenziale, non rinuncia mai al rigore e alla generalità di certi concetti. Sarà compito del lettore, ampliare a livello discorsivo teoremi e considerazioni in modo tale da organizzare un'esposizione continua e fluente della materia.
A fine di ogni capitolo è presente una sezione dedicata agli esercizi, tali quesiti non sono in alcun modo ordinati; ciò significa che è possibile incombere in problemi di difficoltà elevata già dalle primissime righe. Gli esercizi provengono

[1] questa argomento viene solo accennato in quanto non presente nel programma del corso di Analisi 1 che ho svolto.

da molteplici fonti, nell'ultimo capitolo è presente un elenco analitico della letteratura utilizzata per studiare e per preparare questo testo. Tutti gli esercizi presenti sono svolti, passo per passo, fino ad arrivare alla soluzione finale; questo sistema è stato adottato per scongiurare eventuali divari che potrebbero incombere tra lo studio dell'apparato teorico della disciplina e l'effettiva risoluzione degli esercizi. Saper risolvere gli esercizi proposti è una condizione necessaria(ma non sufficiente) affinché si possa superare l'esame e affinché sia possibile proseguire in modo proficiente.

1.1 Prerequisiti

Come già accennato in precedenza, qualsiasi corso di Analisi 1 richiede alcune conoscenze matematiche di base; più propriamente è richiesta la conoscenza di:

- **Operazioni polinomiali**: in particolare come si effettuano le operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione e differenza tra i termini di polinomio. È inoltre richiesto saper scomporre un polinomio.
- **Logaritmi**: regole delle operazioni tra logaritmi(ad esempio: somma , differenza);
- **Radicali**;
- **Reciproco di un numero**;
- **Notazione scientifica**;
- **Equazioni/disequazioni di primo grado e quadratiche**: Risoluzione delle equazione e delle disequazioni di primo e di secondo grado;
- **Rappresentazione sul piano cartesiano**;
- **Funzioni goniometriche di base**: in particolare la conoscenza della circonferenza goniometrica e degli angoli notevoli espressi sia in gradi sia in radianti.

1.2 Avvertenze

Come già anticipato questo testo è la trascrizione degli appunti presi a lezione, ho scritto questi appunti da studente senza alcuna competenza nella stesura di qualcosa di simile, perciò non mi assumo la responsabilità di eventuali errori di battitura, errori di calcolo o abuso di notazioni. In particolare è possibile notare una certa inconsistenza nell'uso dei simboli di funzione; ad esempio, i simboli log e ln, sin e *sen*, tan e *tg* vengono usati intercambiabilmente nel corso della teoria e degli esercizi ed assumono il medesimo significato. In linea di massima, dunque, il simbolo $\log(x)$ sta a significare il *logaritmo naturale* cioè in base e, perciò vale che $\log(x) = \ln(x)$.

1.3 Lato tecnico e licenza

Questo documento è stato redatto utilizzando LaTeX e Visual Studio Code come editor di testo. Le illustrazioni, invece, sono state realizzate in parte con https://www.mathcha.io e in parte in TikZ.

Capitolo 2

Numeri

2.1 Numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali è l'insieme infinito di tutti i numeri(per convenzione si esclude lo zero) necessari per contare, vale a dire:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

Le operazioni principali in questo insieme sono l'**addizione e sottrazione**, il **prodotto e la divisione** e le **potenze e radici**.
Negli insiemi non vuoti formati da numeri $n \in \mathbb{N}$ si può identificare il **minimo**, cioè un numero più piccolo di tutti gli altri. Vale a dire:

$$\forall A \subseteq \mathbb{N}, A \neq 0, \exists! m \in A \ : \ m \leq a \ \forall a \in A$$

2.1.1 Principio di induzione

Nell'insieme dei numeri naturali è possibile effettuare delle dimostrazioni formali utilizzando il principio di induzione matematica:

Definizione 2.1.1. *Sia $P(n)$ una proposizione che dipende da un indice $n \in \mathbb{N}$ e sia $n_0 \in \mathbb{N}$. Se si verifica che:*

1. *$P(n_0)$ è vera*
2. *$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, supposta vera $P(n)$, allora sarà vera anche $P(n+1)$*

In tal caso $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Esercizio 2.1.1. *Dimostrare che la somma di tutti i numeri naturali è pari a:*

$$S(n) = \sum_{i \geq 1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Risposta 2.1.1. *Dimostriamo la base di induzione. verifichiamo la precedente formula per $n = 1$:*

$$S(1) = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Dimostriamo adesso il passo induttivo. Consideriamo dunque vera la tesi e verifichiamo l'enunciato per $n+1$:

$$S(n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} \tag{2.1}$$

Dobbiamo dunque dimostrare la 2.1. Per farlo possiamo dire che: $S(n+1) = S(n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$
Visto che otteniamo la stessa espressione del passo induttivo, la tesi è verificata $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.2 Numeri interi e razionali

Oltre all'insieme dei numeri naturali, possiamo identificare l'insieme dei numeri **interi**:

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

e quello dei numeri **razionali**:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

con la relazione di equivalenza $\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \iff pn = qm$
Una delle particolarità dell'insieme $\mathbb{Q}$ è che esso è dotato di ordinamento totale($\leq$); inoltre in tale insieme **non esiste minimo**. In particolare vale la seguente proprietà:

Definizione 2.2.1. *Per ogni coppia di numeri $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$ esiste $c \in \mathbb{Q}$ tale che:*

$$a < c < b$$

Cioè tra due qualsiasi numeri razionali(non uguali) esiste sempre un altro numero razionale intermedio(dunque ne esisteranno infiniti).

Teorema 2.2.1: $r^2 = 2$

Non esiste alcun numero $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^2 = 2$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un $r \in \mathbb{Q} \ : \ r^2 = 2$, scriviamo $r = \frac{p}{q}$, *con* $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p è primo con q, cioè entrambi i numeri non hanno un divisore comune diverso da 1. $r^2 = 2$ implica che

$$r^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \tag{2.2}$$

dunque anche p^2 e p sono pari. A questo punto possiamo scrivere $p = 2s$ e, utilizzando la (2.2), otteniamo $4s^2 = 2q^2 \Rightarrow 2s^2 = q^2$. Ciò permette di dedurre che anche q^2 e q sono pari, ma visto che sia p sia q sono pari allora non sono primi tra di loro, il che è assurdo. $\square$

2.3 Numeri reali

Estendiamo ulteriormente l'insieme dei numeri razionali in modo da poter misurare qualsiasi grandezza. Questo insieme contiene $\mathbb{Q}$, dunque tutte le operazioni di quest'ultimo sono presenti anche in $\mathbb{R}$. In tal senso, possiamo concludere che $\mathbb{R}$ risulta un campo dotato di ordinamento totale. Di seguito sono elencati alcuni teoremi importanti dei numeri reali.

2.3.1 Teoremi in $\mathbb{R}$

Teorema 2.3.1: Proprietà di Archimede

Per ogni numero $r \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > r$.

Teorema 2.3.2: Assioma di completezza

Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non vuoti ed ordinati(cioè tali che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ sia $a \leq b$) Allora esiste in $\mathbb{R}$ un elemento $c \in \mathbb{R}$ separatore di A e B tale che:

$$a \leq c \leq b, \qquad \forall a \in A, \qquad \forall b \in B$$

Tale assioma è la primaria differenza che esiste tra $\mathbb{Q}$[1] ed $\mathbb{R}$

[1] In $\mathbb{Q}$ tale proprietà non esiste

Teorema 2.3.3: Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

L'insieme dei numeri razionali è denso in quello dei numeri reali. Ossia: comunque presi $a, b \in \mathbb{R} \ : \ a < b \ \exists m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}$ tali che:

$$a < \frac{m}{n} < b$$

Dimostrazione. Supponendo che $0 < a < b$, grazie alla proprietà di Archimede(§2.3.1), esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{1}{b-a}$ cioè esiste:

$$nb - na > 1$$

Sia inoltre m il più piccolo numero naturale tale che $m > na$, si ha dunque che $m - 1 \leq na$, cioè che $m \leq na + 1$. Visto che abbiamo che $na + 1 < nb$, possiamo concludere che:

$$na < m < nb \Rightarrow a < \frac{m}{n} < b$$

Da cui la tesi. □

2.3.2 Notazioni insiemistiche

Di seguito sono elencate alcune notazioni insiemistiche della retta reale. Dati due numeri $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ definiamo:

$$\begin{aligned}
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\} \text{ Intervallo aperto} \\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\} \\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\} \\
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\} \text{ Intervallo chiuso} \\
(-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < a\} \text{ Semiretta aperta} \\
(-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq a\} \text{ Semiretta chiusa} \\
(+\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > a\} \text{ Semiretta aperta} \\
[+\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq a\} \text{ Semiretta chiusa}
\end{aligned}$$

Definizione 2.3.1 (Intorno di un punto)**.** *Il sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ si dice intorno del punto x_0 se contiene un intervallo aperto contenente x_0, vale a dire se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che:*

$$x_0 \in (a, b) \subseteq I$$

*Un particolare intorno prende il nome di **intorno simmetrico**.*

Definizione 2.3.2 (Intorno simmetrico)**.** *Viene detto intorno simmetrico del punto x_0 di raggio $r > 0$ l'intervallo aperto:*

$$(x_0 - r, x_0 + r)$$

Definizione 2.3.3. *Viene detto un "**aperto**" un insieme che è intorno di ogni suo punto.*

Definizione 2.3.4. *Viene detto un "**chiuso**" un insieme il cui complementare è aperto. Dunque l'insieme $\emptyset$ è aperto per definizione.*

2.3.3 Valore assoluto

$\forall x \in \mathbb{R}$ si definisce:

$$|x| = \begin{cases} x & se \ x \geq 0 \\ -x & se \ x < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Il numero $|x|$ rappresenta la distanza del punto x dall'origine della retta reale. La funzione *valore assoluto* ha dunque le seguenti proprietà:

- $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0 \iff x = 0$

- $|-x| = |x| \; \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \; \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$(**Disuguaglianza triangolare**)

2.3.4 Minimo, massimo, estremo superiore ed inferiore di un insieme

Definizione 2.3.5. *Sia A un insieme di numeri reali. Si dice **massimo** di A se esiste un numero M di A che è maggiore o uguale di tutti gli altri elementi di A, cioè:*

$$M = max(A) \iff \begin{cases} M \in A \\ M \geq a, \forall a \in A \end{cases}$$

Analogamente

Definizione 2.3.6. *Si definisce minimo di A un numero m appartenente ad A minore o uguale a tutti gli altri elementi del suddetto insieme, cioè:*

$$m = min(A) \iff \begin{cases} m \in A \\ m \leq a, \forall a \in A \end{cases}$$

Definizione 2.3.7. *Un insieme non vuoto di A di numeri reali si dice **limitato superiormente** se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$L \geq a \qquad \forall a \in A$$

*In tal caso L viene detto **maggiorante** di A.*

Definizione 2.3.8. *A è invece **limitato inferiormente** se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$l \leq a \qquad \forall a \in A$$

*In tal caso l viene detto **minorante** di A.*

Più genericamente, un insieme viene detto **limitato** se esso è contemporaneamente limitato superiormente e inferiormente.

Definizione 2.3.9. *Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, diciamo che $M \in \mathbb{R}$ è l'**estremo superiore** di A se M è il più piccolo dei maggioranti di A, cioè: $M = sup(A)$. In modo analogo l'estremo inferiore sarà il più grande dei minoranti, cioè: $m = inf(A)$.*

Teorema 2.3.4: Esistenza di inf e sup

Ogni insieme non vuoto limitato superiormente ha l'estremo superiore. Ogni insieme non vuoto limitato inferiormente ha l'estremo inferiore.

Dimostrazione. Sia A un insieme non vuoto limitato superiormente. Sia B l'insieme dei maggioranti di A, B non è vuoto in quanto A è limitato superiormente secondo l'enunciato. Inoltre, per la definizione di maggiorante, A e B sono insiemi ordinati; dunque, secondo l'assioma di completezza(§2.3.1), esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che:

$$a \leq M \leq b, \qquad \forall a \in A, \forall b \in B$$

Ciò significa che M è un maggiorante e che quindi esso è il minimo dei maggioranti, dunque $M = sup(A)$. In modo equivalente si arriva alla dimostrazione dell'esistenza dell'estremo inferiore. □

2.4 Esercizi

Esercizio 2.4.1. *Verificare se i seguenti insiemi di $\mathbb{R}$ sono limitati:*

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \qquad B = \left\{ \frac{2n}{n^2+1} \ : \ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Risposta 2.4.1.

$$inf(A) = min(A) = 0, sup(A) = max(A) = 1 \qquad inf(B) = min(B) = -1, sup(A) = max(A) = 1$$

Dunque sia A che B sono limitati.

Esercizio 2.4.2. *Calcolare inf,sup e, eventualmente, max e min dei seguenti insiemi:*

$$A = \left\{ \frac{3n+2}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \qquad B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \qquad C = \left\{ n + \frac{2}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Risposta 2.4.2. *Il massimo di A è 2(infatti $\frac{3(2)+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$), dunque esso è anche l'estremo superiore. Il minimo, invece, è pari a 1(infatti $\frac{3(1)+2}{1} = 5$), dunque esso è pure l'estremo inferiore. B non ha né massimo né minimo, mentre il $sup(B) = 1$ e $inf(B) = -1$. L'insieme C non ha estremo superiore(dunque nemmeno il massimo), mentre il minimo è pari a 3(dunque è pure l'estremo inferiore).*

Esercizio 2.4.3. *Dimostrare mediante il principio di induzione che :*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Risposta 2.4.3. *Dimostriamo innanzitutto l'espressione per $n = 1$:*

$$\sum_{k=0}^{1} 2^k = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = \boxed{3} \Rightarrow 2^{1+1} - 1 = 4 - 1 = \boxed{3}$$

Il caso base è verificato, dunque assumiamo vero l'ipotesi di partenza e dimostriamo l'espressione per $n+1$, cioè:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$$

Sappiamo che:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} 2^k &= 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = \boxed{2^{n+2} - 1} \end{aligned}$$

Visto che è stato verificato il passo induttivo, il principio di induzione ci dice che l'ipotesi è verificata per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2.4.4. *Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^2 + n$ è un numero pari*

Risposta 2.4.4. *Proviamo il caso base per $n = 1$: $(1)^2 + 1 = 1 + 1 = \boxed{2}$ è pari.*
Visto che il caso base è dimostrato, assumiamo vera l'ipotesi iniziale e dimostriamo il passo induttivo, cioè che $(n+2)^2 + (n+1)$ è un numero pari: sviluppando il quadrato del binomio si ottiene: $n^2 + 2n + 1 + n + 1 = \boxed{n^2 + 3n + 2}$, il quale è numero pari. Visto che il passo induttivo è dimostrato, l'ipotesi iniziale vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2.4.5. *Dimostrare mediante il principio di induzione che:*

$$n^2 < 2^n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq 5$$

Risposta 2.4.5. *Verifichiamo innanzitutto il caso base:* $2^5 = \boxed{32 < 25} = 5^2$. *Esso è dunque verificato. Assumiamo sia vera l'ipotesi induttiva per cui* $2^k > k^2$ *con* $k \geq 5$. *A questo punto dimostriamo il caso induttivo:*

$$\begin{aligned}
Sia\ 2^{k+1} &> (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \\
2^{k+1} &= 2^1 \cdot 2^k \\
&= 2^k + 2^k \\
&> k^2 + k^2 \qquad \textit{visto che } k^2 \geq 2k \\
&> k^2 + k \cdot k \\
&> k^2 + 5k \qquad \textit{si sostituisce } k = 5 \\
&= k^2 + 3k + 2k \\
&> k^2 + 2k + 15 \qquad \textit{si sostituisce } 3k = 5 \\
&> k^2 + 2k + 1 \qquad \textit{visto che vale anche con } 15 > 1 \\
&= (k+1)^2 \\
2^{k+1} &> (k+1)^2
\end{aligned}$$

Grazie al principio di induzione matematica, visto che vale il caso induttivo (cioè visto che siamo riusciti a dimostrare il caso induttivo), allora anche l'ipotesi induttiva per cui $2^n < n^2 \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq 5$.
Un altro modo per risolvere questo esercizio è il seguente: Per il caso base supponiamo che $n = 5$, *dunque* $25 = 5^2 < 2^5 = 32$. *L'ipotesi induttiva ci permette di assumere vero che* $n^2 < 2^n \ \forall n \geq 5$. *Applichiamo dunque il passo induttivo per cui:*

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\
&< n^2 + 2n + n = n^2 + n \ \textit{visto che } 1 < 5 \geq n \\
&= n^2 + 3n \\
&< n^2 + n^2 \ \textit{visto che } 3n < 5n \geq n^2 \\
&= 2n^2
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque concluso che $(n+1)^2 < 2n^2$. *Grazie all'ipotesi induttiva sappiamo che* $n^2 < 2^n$; *possiamo dunque concludere che*

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &< 2n^2 \\
&< 2(2^n) \ \textit{possiamo sostituire in quanto } n^2 < 2^n \\
&= 2^{n+1} \\
(n+1)^2 &< 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Anche in questo caso siamo riusciti a dimostrare il caso induttivo, il quale implica la veridicità dell'implicazione all'ipotesi induttiva.

Capitolo 3

Funzioni reali

Una funzione reale in una variabile(anch'essa reale) può essere definita nel seguente modo:

Definizione 3.0.1. *Siano A e B due insiemi reali. Una* ***funzione*** *è una legge che associa ad ogni elemento di A un unico elemento di B, cioè:*

$$\forall a \in A \quad \exists! b \in B \text{ tale che } f \; : \; a \to b$$

o, in maniera più compatta: $y = f(x)$

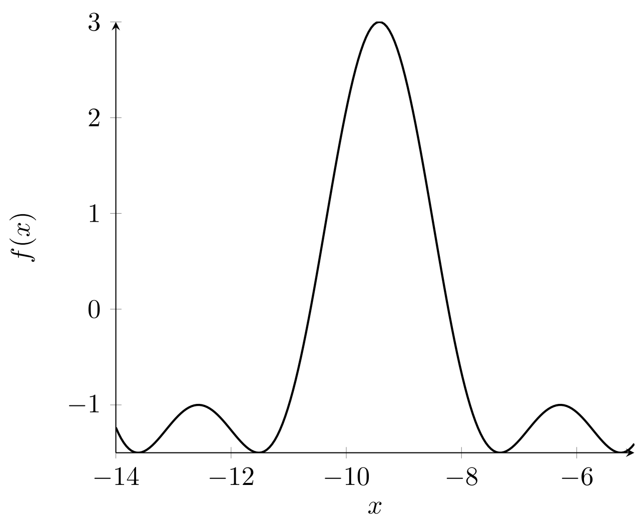


Figura 3.1: Esempio del grafico della funzione $y = \cos(2x) - 2\cos(x)$

Per definire la funzione sono dunque necessari:

- L'insieme dei valori della variabile indipendente per cui la funzione f viene considerata(A)
- In quale insieme vive la variabile indipendente(B)
- La regola definita dalla funzione f

I vari elementi di una funzione sono:

- x: variabile indipendente
- y: variabile dipendente
- A: dominio di definizione
- B: codominio
- $f(x)$: immagine di x

3.0.1 Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche

Definizione 3.0.2 (Funzione iniettiva)**.** *Una funzione* $f : A \to B$ *si dice* ***iniettiva*** *se non ci sono due elementi distinti di* A *con la stessa immagine, cioé* $\forall a_1, a_2 \; : \; a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

Definizione 3.0.3 (Funzione suriettiva)**.** *Una funzione* $f : A \to B$ *si dice* ***suriettiva*** *su* B *se:*
$\forall y \in B, \; \exists x \in A \; : \; y = f(x)$ *Ossia se ogni elemento del codominio della funzione è raggiunto da almeno un elemento del dominio in cui la funzione è definita.*

Definizione 3.0.4 (Funzione biunivoca)**.** *Una funzione* $f : A \to B$ *contemporaneamente iniettiva e suriettiva si dice* ***biunivoca****.*

3.0.2 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione 3.0.5. *Una funzione* f *è* ***crescente*** *in* A *se per ogni coppia di punti* $x_1, x_2 \in A$ *con* $x_1 < x_2$ *vale*

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

Definizione 3.0.6. *Una funzione* f *è* ***strettamente crescente*** *in* A *se per ogni coppia di punti* $x_1, x_2 \in A$ *con* $x_1 < x_2$ *vale*

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Definizione 3.0.7. *Una funzione* f *è* ***decrescente*** *in* A *se per ogni coppia di punti* $x_1, x_2 \in A$ *con* $x_1 < x_2$ *vale*

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Definizione 3.0.8. *Una funzione* f *è* ***strettamente decrescente*** *in* A *se per ogni coppia di punti* $x_1, x_2 \in A$ *con* $x_1 < x_2$ *vale*

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Definizione 3.0.9 (Monotonia)**.** *Una funzione* f *si dice* ***monotona*** *in* A *se è crescente oppure decrescente in* A*.*

Teorema 3.0.1: invertibilità funzioni iniettive

Ogni funzione strettamente monotona è iniettiva e dunque invertibile.

Dimostrazione. Per dimostrare tale teorema è sufficiente osservare che dati due punti x_1 e x_2 in A tali che $f(x_1) = f(x_2)$ non può essere che né $x_1 > x_2$ perché altrimenti sarebbe $f(x_1) > f(x_2)$, né $x_2 > x_1$ perché altrimenti sarebbe $f(x_2) > f(x_1)$, quindi deve necessariamente essere $x_1 = x_2$. ☐

3.0.3 Funzione pari e dispari

Definizione 3.0.10. *Una funzione* f *definita in un dominio* A *simmetrico rispetto all'origine della retta* $\mathbb{R}$ *si dice* ***pari*** *se:*

$$f(x) = f(-x) \qquad \forall x \in A$$

mentre si dice ***dispari*** *se:*

$$f(x) = -f(-x), \qquad \forall x \in A$$

3.0.4 Funzioni lineari

Le **funzioni lineari** sono tutte quelle funzioni della forma: $f(x) = mx + q$. In tal caso i grafici associati a tali funzioni sono delle normali rette.

3.0.5 Funzioni paraboliche

Le **funzioni paraboliche** sono tutte quelle funzioni della forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

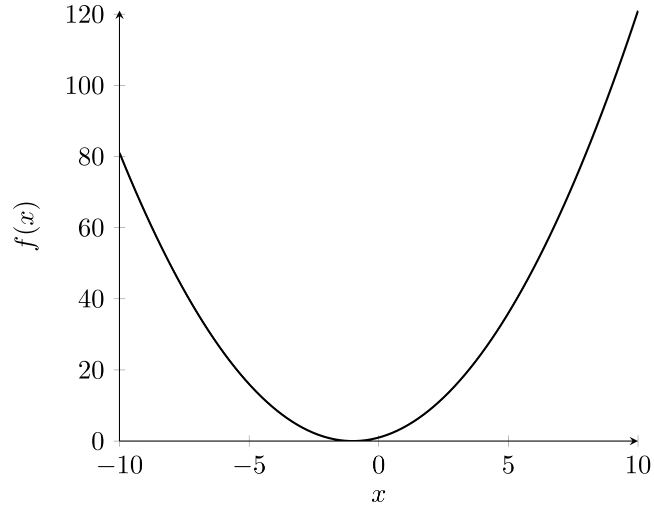


Figura 3.2: $y = x^2 + 2x + 1$

3.0.6 Funzioni in valore assoluto, radicali, logaritmiche ed esponenziali

Di seguito sono riportati i grafici delle funzioni **in valore assoluto**(3.3), **radicali**(3.4), **logaritmiche**(3.5) ed **esponenziali** (3.6)

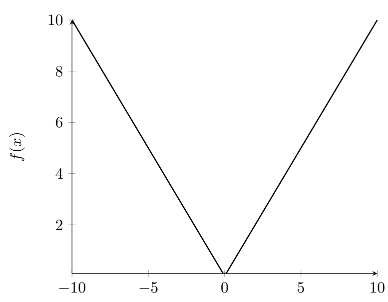


Figura 3.3: $y = |x|$

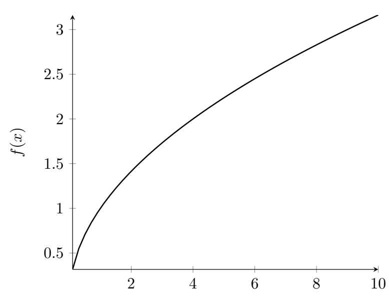


Figura 3.4: $y = \sqrt{x}$

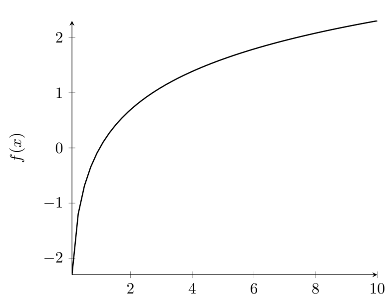


Figura 3.5: $y = \log(x)$

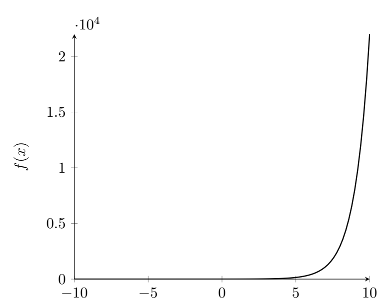


Figura 3.6: $y = e^x$

3.0.7 Funzioni trigonometriche

Le **funzioni trigonometriche** di base sono $cosx : \mathbb{R} \to [-1,1]$ e $sinx : \mathbb{R} \to [-1,1]$. Esse rappresentano, rispettivamente, ascissa ed ordinata del punto della circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine(*circonferenza goniometrica*). Siccome la lunghezza completa della circonferenza[1] è 2π, le due funzioni sono considerate *periodiche*(periodo 2π) La terza funzione trigonometrica di base è la **tangente**, la quale si ottiene dividendo il seno per il coseno:

$$tanx = \frac{sinx}{cosx} \qquad in\ \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

In particolare ricordiamo la **proprietà principale della trigonometria**:

$$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

3.0.7.1 Formule di sommazione

- $sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

3.0.7.2 Formule di duplicazione

- $sin(2\alpha) = 2sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)$
- $cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha)$
- $tan(2\alpha) = \dfrac{2tan(\alpha)}{1 - tan^2(\alpha)}$ dove $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3.0.7.3 Formule di prostaferesi

- $sin(\alpha) + sin(\beta) = 2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $sin(\alpha) - sin(\beta) = 2cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $cos(\alpha) + cos(\beta) = 2cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $cos(\alpha) - cos(\beta) = -2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Infine mostriamo i grafici delle funzioni sinusoide e cosinusoide:

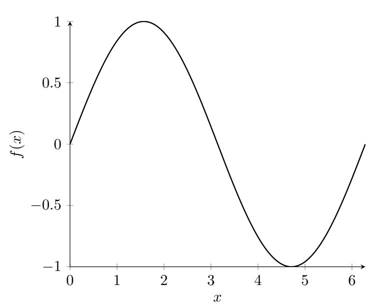


Figura 3.7: $y = sin(x)$

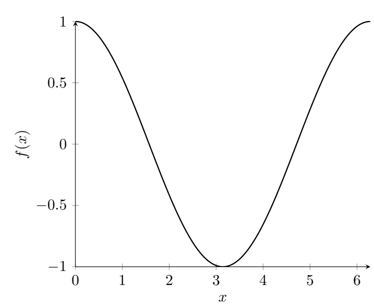


Figura 3.8: $y = cos(x)$

[1] in radianti

3.1 Esercizi

Determinare il dominio delle seguenti funzioni.

Esercizio 3.1.1. $f(x) = \frac{x+3}{4x^4-5x^2+1}$

Esercizio 3.1.2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-3}-1}$

Esercizio 3.1.3. $f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{6-x}}$

Esercizio 3.1.4. $f(x) = log_2(1 - \sqrt{x+1})$

Esercizio 3.1.5. $f(x) = 3^{x^3-2x^2} - 1$

Esercizio 3.1.6. *Utilizzando le appropriate formule trigonometriche, semplificare la seguente espressione fino ad arrivare a* $1 - tan(x)$*.*

$$\frac{2sin(45-x)}{cos(x+45)+cos(x-45)}$$

Risposta 3.1.1. *Il dominio dell'esercizio 3.1.1 equivale a tutti i valori reali tranne quelli che annullano il denominatore, cioè:*

$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq \pm 1, x \neq \pm\frac{1}{2}\}$$

Risposta 3.1.2. *Il dominio dell'esercizio 3.1.2 equivale a tutti i valori tranne quelli che rendono negativo il radicale, cioè:*

$$dom(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, -\sqrt{3}) \cup [\sqrt{3}, 2] \cup (2, +\infty)$$

Risposta 3.1.3. *Il dominio dell'esercizio 3.1.3 equivale a tutti i valori tranne quelli che rendono negativo il radicale, dunque dobbiamo considerare sia il numeratore sia il denominatore della frazione:*

$$dom(f) = [4, 6]$$

Risposta 3.1.4. *Il dominio dell'esercizio 3.1.4 equivale a tutti i valori tranne quelli che annullano il logaritmo, cioè:*

$$dom(f) = [-1, 0)$$

Risposta 3.1.5. *Il dominio dell'esercizio 3.1.5 equivale a tutti i valori dell'insieme dei numeri reali, questo perché la funzione* f *non potrà mai annullarsi, dunque:*

$$dom(f) = \mathbb{R}$$

Risposta 3.1.6. *Per sviluppare l'espressione 3.1.6 si riscrive prima il numeratore, ottenendo:*

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot [cos(x) - sin(x)] = \sqrt{2}[cos(x) - sin(x)]$$

e poi il denominatore, ottenendo:

$$cos(x)cos(45) - sin(x)sin(45) + cos(x)cos(45) + sin(x)sin(45) = 2cos(x)cos(45) = \sqrt{2} \cdot cos(x)$$

cioè:

$$\frac{\sqrt{2}[cos(x) - sin(x)]}{\sqrt{2} \cdot cos(x)} = 1 - \frac{sin(x)}{cos(x)} = 1 - tan(x)$$

Esercizio 3.1.7. *Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado:*

$$a := x^2 - 3x + 2 < 0 \qquad b := 1 - x^2 \leq 0$$

$$c := 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \qquad d := x^2 + 5x > 0$$

Risposta 3.1.7. *Per risolvere la (a) è opportuno utilizzare la formula generica:*

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \left\{+\frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2, \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1\right\}$$

Dunque la soluzione è $1 < x < 2$.

Per risolvere la (b) si può procedere nel seguente modo:

$$1 - x^2 \leq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq \pm 1$$

Dunque la soluzione è $x \leq -1 \vee x \geq 1$
Per risolvere la (c) si utilizza la formula generica:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \left\{\frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1, \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\right\}$$

Dunque la soluzione è $x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 1$
Per risolvere la (d) si raccoglie una x*:*

$$x^2 + 5x > 0 \Rightarrow x(x+5) > 0$$

Ottenendo $x < -5 \vee x > 0$

Capitolo 4

Successioni numeriche

4.1 Definizioni

Una successione non è altro che una sequenza infinita di numeri reali che può essere definita in modo formale nel seguente modo:

Definizione 4.1.1. *Una successione è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$, cioè una legge che ad ogni numero naturale associa uno e un solo numero reale.*

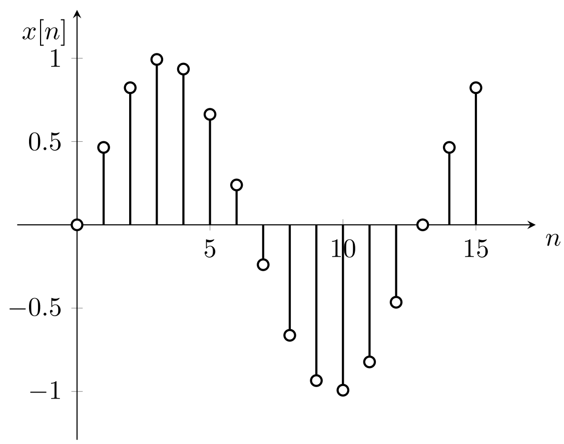


Figura 4.1: Grafico di una successione numerica

La notazione per riferirsi ad una successione è:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

dove a_n rappresenta il numero reale associato all'intero n. La rappresentazione grafica di una successione è costituita da un insieme di punti sul piano cartesiano, le quali corrispondo alle ascisse naturali.
Alcune esempi di successioni possono essere:

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = n^2, \qquad c_n = (-1)^n$$

Definizione 4.1.2. *Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ed è estremamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Analogamente si definiscono le successioni decrescenti e strettamente decrescenti.*

Definizione 4.1.3. *Una $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata se esistono m e M tali che:*

$$m \leq a_n \leq M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

In modo equivalente, se esiste $M > 0$ tale che:

$$|a_n| < M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

4.2 Limiti di successioni

4.2.1 Successioni convergenti

Definizione 4.2.1. *Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** ad un numero reale $L \in \mathbb{R}$ se e solo se comunque preso un numero reale $\varepsilon > 0$ si riesce a determinare un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ della successione tale che tutti i termini della suddetta successione distino da L meno di ε. Cioè:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ :\ |a_n - L| < \varepsilon,\ \forall n > n_\varepsilon$$

In particolare, una successione che ha limite, viene detta **convergente**.

Teorema 4.2.1: Unicità del limite

Una successione convergente non può avere due limiti distinti.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga sia a L_1 sia a L_2 con $L_1 > L_2$. Allora $\forall\varepsilon > 0$ si ha che:

$$\exists n_1\ :\ a_n \in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)\ \forall n > n_1$$

ma anche che:

$$\exists n_2\ :\ a_n \in (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)\ \forall n > n_2$$

Quindi, per $n > max\{n_1, n_2\}$ si ha che:

$$a_n \in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon) \cap (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$$

ma per valori di ε molto piccoli($\varepsilon < \frac{L_1 - L_2}{2}$) ciò è impossibile in quanto $a_n \in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon) \cap (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon) = \emptyset$ □

Teorema 4.2.2: convergenza successioni limitate

Ogni successione convergente è anche limitata.

Dimostrazione. Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$; dalla definizione di limite, scegliendo $\varepsilon = 1$, consegue che:

$$\exists n_1\ :\ L - 1 < a_n < L + 1\ \forall n > n_1$$

Consideriamo inoltre che:

$$m = min\{a_1, ..., a_{n1}\}, \qquad M = max\{a_1, ..., a_{n1}\}$$

i quali esistono in quanto minimo e massimo di insiemi finiti. Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che:

$$min\{m, L - 1\} \le a_n \le max\{M, L + 1\}$$

dunque la successione è limitata. □

4.2.2 Successioni divergenti e indeterminate

Tutte quelle successioni il cui limite va ad infinito sono dette **divergenti**.

Definizione 4.2.2. *Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$, cioè:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste n_M tale che $a_n > M\ \forall n > n_M$.
Una successione è invece divergente a $-\infty$, cioè:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste n_M tale che $a_n < -M\ \forall n > n_M$.

Quando una successione non ha limite è detta **indeterminata**.

4.2.3 Proprietà limiti

I limiti di successioni presentono molteplici proprietà, le quali possono tornare utili per semplificare casi complessi. In particolare ricordiamo:

- **Linearità**: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a_n + \beta b_n$
- **Prodotto**: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
- **Rapporto**: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ *con* $b \neq 0$

Teorema 4.2.3: Permanenza del segno

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$ la successione a_n è definitivamente positiva.

Dimostrazione. Utilizzando la definizione di limite per $\varepsilon = a > 0$ si ha che esiste a_n tale che per ogni $n > n_a$ vale $|a_n - a| < a$ cioè $0 < a_n < 2n$. Tale teorema si applica anche nel caso negativo. ☐

Corollario 4.2.1. *Se* $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ *e* $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, *allora* $a \leq b$.

Dimostrazione. La successione $b_n - a_n$ è una successione a termini positivi che converge a $b-a$, quindi $b - a \geq 0$. ☐

Teorema 4.2.4: Teorema dei due carabinieri

Siano a_n b_n c_n tre successioni tali che:

$$a_n \leq b_n \leq c_n\ \forall n \in \mathbb{N}$$

se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = P \in \mathbb{R}$$

allora anche la successione b_n converge e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = P$$

Dimostrazione. Fissato un $\varepsilon > 0$, esistono due numeri n_1 e n_2 tali che:

$$\forall n > n_1 \qquad |a_n - P| < \varepsilon \iff P - \varepsilon < a_n < P + \varepsilon$$

$$\forall n > n_2 \qquad |c_n - P| < \varepsilon \iff P - \varepsilon < c_n < P + \varepsilon$$

dunque, per $n > max\{n_1, n_2\}$ vale che:

$$P - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < P + \varepsilon$$

☐

4.2.4 Limiti notevoli

Definizione 4.2.3. *Una successione che tende a zero si dice* ***infinitesima***.

Teorema 4.2.5: prodotto successioni infinitesime

Il prodotto tra una successione infinitesima e una limitata è una successione infinitesima

Dimostrazione. Siano a_n limitata e b_n infinitesima. Osserviamo che, se $|a_n| \leq M$, allora:

$$0 \leq |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n|$$

e quindi grazie a 4.2.3 $|a_n \cdot b_n|$ è infinitesima. ☐

Un altro limite notevole molto frequente è il seguente:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & se\ \alpha > 0 \\ 1 & se\ \alpha = 0 \\ 0 & se\ \alpha < 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Per $\alpha > 1$ basta osservare che $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ e che $n^\alpha \geq n$. Per $0 < \alpha < 1$, fissato $M > 0$, per $n > M^{\frac{1}{\alpha}}$ si ha che $n^\alpha > M$, per $\alpha = 0, n^\alpha = 1$ mentre per $\alpha < 0$ basta osservare che $n^\alpha = \frac{1}{n^{-\alpha}}$ □

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & se\ \alpha > 1 \\ 1 & se\ \alpha = 1 \\ 0 & se\ |\alpha| < 1 \\ \nexists & se\ \alpha \leq -1 \end{cases} \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Per $a = 1$ e $a = 0$ si ottiene una successione costante e quindi il limite è evidente. Per $a > 1$, invece, il caso è meno semplice: si deve infatti utilizzare la disuguaglianza di Bernoulli, cioè:

$$a_n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a+1)\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Siccome $a > 1$, allora $a - 1 > 0$ e, quindi, $\lim_{n\to+\infty} 1 + n(a-1) = +\infty$. Per il teorema del confronto delle successioni divergenti si conclude che:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$$

Se invece $0 < a < 1$, possiamo osservare che:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n} = 0$$

visto che il denominatore diverge a $+\infty$ essendo $\frac{1}{n} > 1$. Inoltre fissando $-1 < a < 0$ otteniamo:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n |a|^n$$

Inoltre, visto che

$$-|a|^n \leq (-1)^n |a|^n \leq |a|^n$$

$|a|^n$ e $-|a|^n$ tendono a zero, per il teorema dei Carabinieri(§4.2.3) si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n |a|^n = 0$$

□

Teorema 4.2.6:

Se $b > 0$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, allora:

$$\lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = b^a$$

Se, invece, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, allora:

$$\lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = \begin{cases} +\infty & se\ b > 1 \\ 1 & se\ b = 1 \\ 0 & se\ 0 < b < 1 \end{cases} \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $b > 1$, fissato $\varepsilon > 0$ osserviamo che le seguenti disuguaglianze sono equivalenti:

$$|b^{a_n} - b^a| < \varepsilon \iff b^a - \varepsilon < b^{a_n} < b^a + \varepsilon \iff log_b(b^a - \varepsilon) < a_n < log_b(b^a + \varepsilon)$$

Sempre dalla crescita di $log_b x$ segue che $log_b(b^a - \varepsilon) < a$ e che $log_b(b^a + \varepsilon) < a$, cioè che $(log_b(b^a - \varepsilon), log_b(b^a + \varepsilon))$ è un intorno di a. Esiste allora $\delta > 0$ tale che:

$$(a - \delta, a + \delta) \subset (log_b(b^a - \varepsilon), log_b(b^a + \varepsilon))$$

Inoltre, siccome:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a$$

esiste N tale che:

$$a - \delta < a_n < a + \delta \ \forall n < N$$

Dunque, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$ troviamo un N tale che se $n < N$ otteniamo:

$$a_n \in (a - \delta, a + \delta) \subset (log_b(b^a - \varepsilon), log_b(b^a + \varepsilon))$$

e quindi:

$$|b^{a_n} - b^a| < \varepsilon$$

Analogamente si possono dimostrare il secondo e il terzo caso. □

Teorema 4.2.7:

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e a_n è una successione positiva convergente ad $a > 0$, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n^\alpha = a^\alpha$$

Se, invece, $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ allora:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n^\alpha = \begin{cases} +\infty & se\ \alpha > 0 \\ 1 & se\ \alpha = 0 \\ 0 & se\ \alpha < 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $\alpha > 0$ e $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$. Fissato $\varepsilon > 0$, risolviamo la disequazione:

$$a^\alpha - \varepsilon < a_n^\alpha < a^\alpha + \varepsilon$$

Ricordando che $x^{\frac{1}{\alpha}}$ è crescente è possibile riscrivere la disequazione come:

$$A < a_n < (\alpha + \varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}$$

In questo modo è facile verificare tutti e tre i casi. □

4.2.5 Forme indeterminate

Qualora due successioni divergano entrambe a $\pm\infty$ non è possibile eseguire in maniera elementare le varie operazioni elementari, in particolare si parla di forme indeterminate quando si ha a che fare con successioni del seguente tipo:

$$[\infty - \infty], \qquad [0 \cdot \infty], \qquad \left[\frac{0}{0}\right], \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Di seguito è riportata una tabella con alcune operazioni svolte tra successioni divergenti e convergenti.

$a_n \to a \in \mathbb{R}$	$b_n \to \pm\infty$	$a_n + b_n \to \pm\infty$
$a_n \to \pm\infty$	$b_n \to \pm\infty$	$a_n + b_n \to \pm\infty$
$a_n \to a \neq 0$	$b_n \to \pm\infty$	$a_n b_n \to \pm(sgn(a))\infty$
$a_n \to \infty$	$b_n \to \pm\infty$	$a_n b_n \to +\infty$
$a_n \mp \infty$	$b_n \to \pm\infty$	$a_n b_n \to -\infty$
$a_n \to a \in \mathbb{R}$	$b_n \to \pm\infty$	$\frac{a_n}{b_n} \to 0$
$a_n \to \pm\infty$	$b_n \to b \neq 0$	$\frac{a_n}{b_n} \to \pm(sgn(b))\infty$
$a_n \to \pm a \neq 0$	$b_n \to 0$	$\frac{a_n}{b_n} \to \pm\infty$
$a_n \to \pm\infty$	$b_n \to 0$	$\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$

Per risolvere questi tipi di limiti si può procedere in uno dei seguenti modi:

- Conoscere i limiti notevoli
- Utilizzare passaggi algebrici avanzati(es. raccoglimento)
- Il teorema di De l'Hôpital(§6.6)
- Polinomio di Taylor(§7.2)

Esempio:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n-5}{2n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \underbrace{\frac{\cancel{n^2}(1+\overbrace{\frac{1}{n}}^{tende\ a\ zero} - \overbrace{\frac{5}{n^2}}^{tende\ a\ zero})}{\cancel{n^2}(2+\underbrace{\frac{1}{2n^2}}_{tende\ a\ zero})}}_{\text{Si raccoglie } n^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

4.3 Successioni monotone

Teorema 4.3.1: Successioni monotone

Ogni successione monotona ha limite, cioè se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

se invece a_n è decrescente allora:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = inf\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ crescente, sia dunque $L = sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ con $L \in \mathbb{R}$ e dimostriamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$; fissiamo dunque $\varepsilon > 0$ e osserviamo che siccome L è maggiore vale:

$$a_n \leq L < L + \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Inoltre, visto che L è il più piccolo dei maggioranti, esiste n_ε tale che $a_{n_\varepsilon} > L - \varepsilon$. Siccome la successione è crescente da questo segue che:

$$a_n \geq a_{n_\varepsilon} > L - \varepsilon, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon$$

Per il caso in cui $sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} = +\infty$, essendo la successione illimitata superiormente, per ogni $M > 0$ esiste un indice n_M tale che $a_{n_M} > M$, quindi, per la crescenza della successioni si ha che:

$$a_n \geq a_{n_M} > M \qquad \forall n > n_M$$

□

4.4 Confronto tra infiniti

Teorema 4.4.1: Criterio del rapporto

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a termini positivi tale che esista:

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Allora

$$se\ \lambda < 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

altrimenti

$$se\ \lambda > 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

Dimostrazione. Vediamo il caso con $\lambda < 1$. Dalla definizione di limite sappiamo che vale definitivamente $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, dunque la successione è definitivamente decrescente. Inoltre, essendo anche limitata dal basso, essa è pure convergente. Sia ora $\lim_{n\to-\infty} a_n$, se $a \neq 0$ allora avremo:

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{a} = 1$$

la quale contraddice $\lambda < 1$, dunque l'unica soluzione ammissibile rimane $a = 0$. Nel caso in cui $\lambda > 1$, invece, ci si riconduce al caso precedente per mezzo della successione $b_n = \frac{1}{a_n}$ □

Questo importante criterio ci permette di ordinare le seguenti successioni in ordine crescente:

$$n^\alpha < a^n < n!$$

Teorema 4.4.2: Rapporto successioni

Per $\alpha > 0$ e $a > 1$ vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

4.5 Numero di Nepero

Teorema 4.5.1: Numero di Nepero

La successione $a_n = (a + \frac{1}{n})^n$ per $n \in \mathbb{N}$ è convergente e il suo limite

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è un numero compreso tra 2 e 3.

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo che a_n è una successione strettamente crescente; visto che $a_n > 0$ basta dunque dimostrare che $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$ per ogni $n > 1$:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n}}{\frac{n-1}{n}} = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{\frac{n-1}{n}} \geq \frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{n-1}{n}} = 1$$

Perciò si dimostra che nella disuguaglianza di Bernoulli vale il segno meno se e solo se $x = 0 \vee n = 1$, ma visto che nessuno dei due casi è valido, si ha:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \qquad \forall n > 1$$

L'ultima cosa da fare è dimostrare che a_n è limitata superiormente; per farlo introduciamo la successione

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

si vede che $a_n \le b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; tuttavia la successione è strettamente decrescente, infatti

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} > 1$$

$$\begin{aligned}\frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n}{\frac{n+1}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\ &> \underbrace{\left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} \ge \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1}_{Bernoulli}\end{aligned}$$

Questo implica la limitatezza di a_n, poiché

$$a_n \le b_n \le b_1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Garantendo la monotonia e la limitatezza si assicura anche la convergenza della successione a_n. Possiamo inoltre verificare che anche la successione b_n converge, decrescendo al numero e; questo accade perché $b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ Quindi

$$a_n \le e \le b_n \qquad \forall n \in N$$

Dato che $a_1 = 2$ e $b_2 \cong 2.9$ possiamo finalmente dire che $2 < e < 3$. □

4.6 Esercizi

Esercizio 4.6.1. *Utilizzando la definizione di limite verificare che:*

$$a := \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2} \qquad b := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \qquad c := \lim_{n\to+\infty} \sqrt{4+\frac{1}{n}} = 2$$

Risposta 4.6.1. *(a) :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{n}{2n+5} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

Questo significa che:

$$\frac{\cancel{2n} - (\cancel{2n}+5)}{2(2n+5)} = \left|\frac{5}{4n+10}\right|$$

Per ricavare n si svolge

$$4n+10 > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}}n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{10}{4} \Rightarrow n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}$$

(b) :
Per $n > v = \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$ si ha che $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon$
(c) :
Con $\varepsilon > 0$ si deve risolvere la disequazione $|\sqrt{4+1/n}| - 2 < \varepsilon$ Dunque l'argomento del valore assoluto è positivo e basta risolvere: $\sqrt{4+1/n} - 2 < \varepsilon$. Portando il 2 al secondo membro ed elevando il tutto a quadrato si ottiene:

$$v = [(2+\varepsilon)^2 - 4]^{-1} = \frac{1}{(4\varepsilon + \varepsilon^2)}$$

Esercizio 4.6.2. *Risolvere le seguenti forme indeterminate:*

$$a := \lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{n+1} \qquad b := \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+15n+7}{n^2+5n+2} \qquad c := \lim_{n\to+\infty} 3^{\frac{1-n^2}{n+4}}$$

$$d := \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \qquad e := \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n^2}{(n+2)^2} \qquad f := \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$$

Risposta 4.6.2.

$$a := \lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{\cancel{n}\left(3-\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1-\frac{3}{n}\right)} = 3$$

$$b := \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+15n+7}{n^2+5n+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{\cancel{n^2}\left(3+\frac{15}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = 3$$

$$c := \lim_{n\to+\infty} 3^{\frac{1-n^2}{n+4}} = 3^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} = \frac{\cancel{n}\left(\frac{1}{n}-n\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{4}{n}\right)} = 3^{-\infty} = 0$$

$$d := \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$e := \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n^2}{(n+2)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1-n^2}{n^2+4n+4} = \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}\right)} = -1$$

$$f := \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{\infty} = \left[\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}_{\xi}\right]^2 = \xi^2 = e^2$$

Capitolo 5

Limiti di funzioni

5.1 Definizioni

In questo capitolo daremo un significato più dettagliato alla notazione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad con\ f : A \subset \mathbb{R} \in \mathbb{R}$$

Per farlo dobbiamo determinare per quali x_0, cosa significa $x \to x_0$ e cosa significa $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.
In particolare il limite vale per tutti i punti x_0 che si possono ottenere come limiti di successioni contenute nel dominio della funzione ma diversi da x_0; tali numeri prendono il nome di **punti di accumulazione**.
Formalmente diciamo che, dato un insieme A, x_0 è un punto di accumulazione per A se

$$\exists x_n \in A \backslash \{x_0\}\ :\ \lim_{x \to +\infty} x_n = x_0$$

Si noti, tuttavia, che non è necessario che il punto x_0 appartenga all'insieme A; ad esempio nell'insieme $A = (0, 1)$ l'insieme dei punti di accumulazione è $[0, 1]$ compresi gli estremi(anche se non appartengono all'insieme). È inoltre possibile che ci siano punti che appartengono all'insieme ma che non sono di accumulazione. Da tale concetto è possibile dire che $x \to x_0$ significa prendere le successioni in A che tendono a x_0 ma non valgono mai x_0.

Definizione 5.1.1. *(Definizione per successioni)*[1] *Sia x_0 un punto di accumulazione per A e sia f definita in A, allora:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se per ogni successione $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ tale che $x_n \in A \backslash x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$$

Utilizzando questa definizione possiamo calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} sinx = 0 \qquad \lim_{x \to 0} cosx = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{log(1 + x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} 2^x = 8$$
$$\lim_{x \to 0} x^2 = x^2 \qquad \lim_{x \to 0} p(x) = p(x_0)$$

[1] Nella definizione di limite interessano i punti che si avvicinano ad x_0 ma mai il valore che f assume in tale punto.

Definizione 5.1.2 (Definizione $\varepsilon - \delta$)**.** *Sia x_0 un punto di accumulazione per A e sia f definita in A. Allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \qquad \forall x \in A \ : \ 0 < |x - x_0| < \delta$$

Dimostrazione. Proviamo innanzitutto che 5.1.2 implica 5.1.1:
Sia x_n una successione convergente a x_0 e sempre diversa da x_0, fissato $\varepsilon > 0$ consideriamo il δ la cui esistenza è garantita dalla definizione 5.1.2.
Siccome x_n converge a x_0, allora esiste N tale che $\forall n > N$ vale $0 < |x_n - x_0| < \delta$ e, quindi, $|f(x_n) - L| < \varepsilon$.
A questo punto verifichiamo che, per assurdo, 5.1.1 implichi la 5.1.2:
se ciò non fosse vero, infatti, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall \delta > 0 \qquad \exists x_\delta \in A \backslash x_0 \ \mathit{con}\ 0 < |x_\delta - x_0| < \delta \ \mathit{e}\ |f(x_\delta - L)| \geq \varepsilon$$

A questo punto ponendo $\delta = \dfrac{1}{n}$ si ottiene una successione che converge a x_0 sulla quale f non converge ad L contraddicendo l'ipotesi. □

Definizione 5.1.3 (Limite destro)**.** *Utilizzando la definizione $\varepsilon - \delta$ è possibile dimostrare che il seguente limite esiste:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Infatti

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ : \ |f(x) - L| < \varepsilon \qquad \forall x \in A \ \mathit{con}\ x_0 < x < x_0 + \delta$$

Definizione 5.1.4 (Limite sinistro)**.** *Utilizzando la definizione $\varepsilon - \delta$ è possibile dimostrare che il seguente limite esiste:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Infatti

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ : \ |f(x) - L| < \varepsilon \qquad \forall x \in A \ \mathit{con}\ x_0 - \delta < x < x_0$$

Lemma 5.1.1. *Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ esistono e sono uguali allora esiste anche $\lim_{x \to x_0} f(x)$*

5.2 Ordine

Come per le successioni, anche nelle funzioni vale il teorema dei due Carabinieri e della permanenza del segno.

Teorema 5.2.1: Teorema dei due Carabinieri

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(n)$ per ogni $A \backslash \{x_0\}$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

Teorema 5.2.2: Teorema della permanenza del segno

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in A$ $0 < |x - x_0| < \delta$.
Se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in A \backslash \{x_0\}$ e se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si ha che $L \geq 0$

5.3 Monotonia

Anche le funzioni monotone hanno delle proprietà particolari:

Definizione 5.3.1. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione crescente*
se $x_0 \in (a, b]$ allora esiste il limite sinistro di f in x_0 e vale:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = sup\{f(x) \ : \ a < x < x_0\} := sup(f(x))$$

se $x_0 \in [a, b)$ allora esiste il limite destro di f in x_0 e vale:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = inf\{f(x) \ : \ x_0 < x < b\} := inf(f(x))$$

5.4 Continuità

Definizione 5.4.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di A che sia di accumulazione per A. La funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 se:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dunque se $A = [a, b]$ e $x_0 \in (a, b)$, la funzione f è continua in x_0 se $f(x_0)$ esiste, esiste finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Definizione 5.4.2. *(Continuità in un intervallo) Una funzione f è continua in un intervallo $[a, b]$ se è continua in x_0 con $\forall x_0 \in [a, b]$, ossia se è continua in ogni punto di tale intervallo.*

Lemma 5.4.1. *La composizione di funzioni continue è una funzione continua*

Dimostrazione. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che f sia continua in $x_0 \in A$ e g sia continua in $f(x_0) \in B$, vogliamo dunque dimostrare che:

$$g \cdot f(x) = g(f(x)) : A \to \mathbb{R}$$

è continua in x_0. Visto che g è continua in $f(x_0)$ si ha che:

$$\lim_{y \to f(x_0)} g(y) = g(f(x_0))$$

cioè, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon \ \forall y \in B \ con \ |y - f(x_0)| < \delta$$

Inoltre, visto che f è continua in x_0, esiste un $\sigma > 0$ tale che:

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta \ \forall x \in A \ con |x - x_0| < \sigma$$

In conclusione, dunque, se $|x - x_0| < \sigma$ si ha che:

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$$

cioè $g \cdot f$ è continua in x_0 □

5.5 Discontinuità

Esistono alcuni tipi di funzioni non continue in un punto $x_0 \in (a,b)$

5.5.1 Discontinuità eliminabili

È il tipo di discontinuità più semplice da risolvere, si verifica quando il limite esiste ed è finito ma non coincide con $f(x_0)$.

Esercizio 5.5.1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} \ se \ x \neq 0 \\ 4 \ se \ x = 0 \end{cases}$$

Si chiama discontinuità eliminabile perché è sufficiente modificare il valore della funzione in x_0 per ottenere una funzione continua.

5.5.2 Discontinuità di salto

In questo caso il limite non esiste in quanto il limite destro e sinistro esistono, sono finiti ma sono diversi. In tal caso si calcola uno dei due limiti parziali e si prende quello continuo; la funzione sarà dunque continua solo nell'intervallo sinistro o in quello destro.

5.5.3 Discontinuità di secondo tipo

Comprende tutte le altre discontinuità; in tal caso il limite destro o quello sinistro non esistono oppure non sono finiti.

Teorema 5.5.1: Esistenza degli zeri

Sia f una funzione continua in $[a,b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste almeno un punto $n_0 \in (a,b)$ tale che:

$$f(x_0) = 0$$

Dimostrazione. Supponiamo che siano $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Calcoliamo $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Ci sono tre possibili casi:

1. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ quindi $x_0 = \frac{a+b}{2}$ è uno zero della funzione
2. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$. In questo caso $a_1 = \frac{a+b}{2}$ e $b_1 = b$
3. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$. In questo caso $a_1 = a$ e $b_1 = b$

□

Teorema 5.5.2: Valori intermedi(primo)

Una funzione f continua in $[a,b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $f(a) < f(b)$. Prendiamo un qualunque y_0 tale che $f(a) < y_0 < f(b)$ e chiamiamo g la funzione $g(x) = f(x) - y_0$. La funzione g è continua in $[a,b]$ e $g(a) < 0$, mentre $g(b) > 0$, quindi esiste un punto x_0 tale che $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = y_0$. □

Corollario 5.5.1 (Valori intermedi(secondo))**.** *Se f è una funzione continua in un intervallo I(aperto o chiuso, limitato o illimitato), essa assume tutti i valori compresi tra $inf_I f$ e $sup_I f$*

Dimostrazione. Se $\inf_I f < y_0 < \sup_I f$, per definizione di inf e sup esistono x_1 e x_2 tali che

$$\inf f \leq f(x_1) < y_0 < f(x_2) \leq \sup f$$

basta allora applicare il primo teorema dei valori intermedi all'intervallo $[x_1, x_2]$ per ottenere la tesi. □

5.6 Limiti notevoli

Logaritmo naturale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{f(x)\to 0} \frac{ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$$

Funzione logaritmica:

$$\lim_{x\to 0} \frac{log_a(a+x)}{x} = \frac{1}{ln(a)} \qquad \lim_{f(x)\to 0} \frac{log_a(1+f(x))}{f(x)} = \frac{1}{ln(a)}$$

Funzione esponenziale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln(a) \qquad \lim_{f(x)\to 0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = ln(a)$$

Numero di Nepero:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{f(x)\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

Funzione seno:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{f(x)\to 0} \frac{sin(f(x))}{f(x)} = 1$$

Funzione coseno:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{f(x)\to 0} \frac{1 - cos(f(x))}{f(x)^2} = \frac{1}{2}$$

Funzione tangente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tan(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{f(x)\to 0} \frac{tan(f(x))}{f(x)} = 1$$

5.7 Teorema di Weierstrass

Teorema 5.7.1: Teorema di Weierstrass

Se f è continua in $[a, b]$ allora ammette massimo e minimo, cioè esistono $x_m, x_M \in [a, b]$ tali che:

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \qquad \forall x \in [a, b]$$

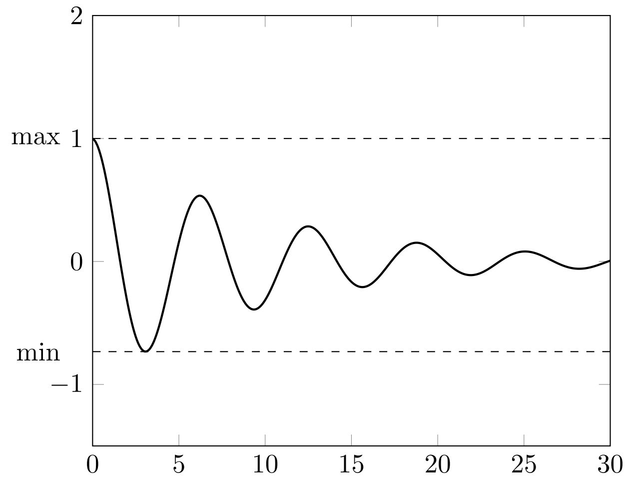


Figura 5.1: Massimo e minimo in un campione chiuso e limitato

Dimostrazione. Nel **primo passo** dimostriamo che f definita in $[a, b]$ è limitata superiormente; cioè $\exists x_m \in [a, b]$: $max(f) = x_m$. Supponiamo dunque che non sia vero che la funzione sia limitata, cioè che $sup\{f\} = +\infty$, allora, utilizzando la bisezione:

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right] & se\ sup\{f\} = +\infty \\ \\ \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] & altrimenti \end{cases}$$

Si ripete infinite volte fino a quando $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ e $sup\{f(x) \ : \ x \in [a_n, b_x]\} = +\infty$. Come per il teorema dell'esistenza degli zero, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = x_0$$

Poiché la funzione f è continua in x_0, cioè:

$$\exists \delta \ : \ f(x_0) - 1 < F(x) < f(x_0) + 1 \qquad \forall x\ con\ |x - x_0| < \delta$$

ma questo significherebbe che $a_n \cdot b_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\ \forall n > n_0$, cioè $sup\{f(x)\} = +\infty$, il che è assurdo.
Nel **secondo passo**, invece, Supponiamo che $sup\{f\} = M \in \mathbb{R}$, cioè:

$$\exists x_M \ : \ f(x_M) = M \Rightarrow M = max\{f\}$$

Definiamo dunque

$$g(x) = \frac{1}{S - f(x)} \leq L$$

con $S := sup\{f(x) \ : \ x \in [a_1, b_1]\}$. g porta dunque a

$$g(x) \leq L \Rightarrow \frac{1}{S - f(x)} \leq L \Rightarrow f(x) \leq S - L$$

il che è assurdo in quanto la differenza tra un maggiorante meno qualsiasi altra cosa lo invaliderebbe. L'assurdo deriva dunque dal fatto di aver supposto la non esistenza del massimo il quale, invece, esiste. $\square$

5.8 Teoria degli infiniti

Come già descritto nel corso del capitolo, esistono varie tecniche per risolvere un limite; tuttavia, qualora non si voglia utilizzare il raccoglimento di una variabile si può utilizzare la **teoria degli infiniti**. Tale principio afferma che il risultato di un limite dipende solamente dal monomio di grado massimo del polinomio; in questo modo è possibile ignorare i monomi di grado inferiore. Questo principio si applica solamente ai limiti della forma

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

5.8.1 $P(x) > Q(x)$

In questo caso il grado del polinomio del numeratore è maggiore del grado del polinomio al numeratore, il risultato è dunque $\pm\infty$. Ad esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\boxed{4x^5} - 3x + 2}{2x^2 + 4} = +\infty$$

5.8.2 $P(x) = Q(x)$

Nel caso in cui i due gradi si equivalgono, il risultato è dato dal rapporto tra i coefficienti dei monomi di grado massimo del polinomio. Ad esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\boxed{3x^2} - x + 2}{4x - \boxed{2x^2} - 1} - \frac{3}{2}$$

5.8.3 $P(x) < Q(x)$

Nel caso in cui il grado del polinomio $P(x)$ è minore di quello del polinomio $Q(x)$, il risultato è allora pari a zero. Ad esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3 - 3x + 1}{\boxed{2x^4} + 4} = 0$$

5.9 Esercizi

Esercizio 5.9.1. *Risolvere i seguenti limiti di funzione:*

$$a := \lim_{x\to+\infty} 2^x - x^2 \qquad b := \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad c := \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{ln(1+x)}\right)$$

Risposta 5.9.1. [2]

$$a := \lim_{x\to+\infty} 2^x - x^2 = [\infty - \infty] = 2^x\left(1 - \frac{x^2}{2^x}\right) = \infty$$

$$b := \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$c := \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{ln(1+x)}\right) = 1$$

Esercizio 5.9.2. *Dimostrare la convergenza del seguente limite di funzione utilizzando la definizione $\varepsilon - \delta$:*

$$\lim_{x\to 4}(5x-7) = 13$$

Risposta 5.9.2. *Ricordiamo che la definizione $\varepsilon - \delta$ ammette la convergenza di un limite se e solo se $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ implica che $\forall x \in A\ :\ 0 < |x - x_0| < \delta$. Dunque il primo passo è quello di determinare un valore per il δ:*

$$\begin{aligned}
&|f(x) - L| < \varepsilon \iff |(5x-7) - 13| < \varepsilon \\
&|5x - 20| < \varepsilon \Rightarrow |5(x-4)| < \varepsilon \\
&|5||x-4| < \varepsilon \Rightarrow \boxed{|x-4| < \frac{\varepsilon}{5}}
\end{aligned}$$

Possiamo concludere che $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$. A questo punto utilizziamo la definizione canonica di limite per dimostrare che $|x-4| < \dfrac{\varepsilon}{5}$:

$$\begin{aligned}
&|x-4| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow |5x-20| < \varepsilon \\
&|(5x-7) - 13| < \varepsilon \textit{ ciò è vero in quanto avevamo scelto } x_0 = 4
\end{aligned}$$

Dunque $\lim_{x\to 4}(5x-7) = 13$

[2] I seguenti limiti sono risolti attraverso i limiti notevoli(§5.6)

Capitolo 6

Calcolo Differenziale

6.1 Introduzione

La **derivata** è un concetto fondamentale dell'analisi matematica e del calcolo infinitesimale. Tale nozione può essere informalmente pensata come al *tasso di cambiamento* di una funzione rispetto ad una variabile, cioè la misura di quanto la crescita di una funzione cambia in base al valore del suo argomento. La derivata può assumere due significati diversi, quello **fisico** e quello **geometrico**.

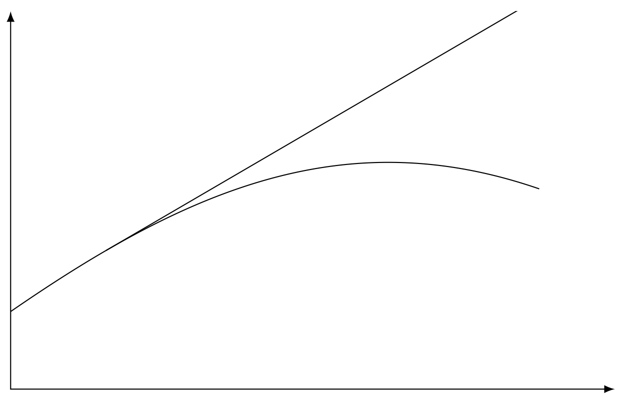


Figura 6.1: Retta tangente ad una funzione

6.1.1 Significato fisico

A livello fisico la derivata può essere intesa come velocità: consideriamo un punto che si muove lungo una traiettoria rettilinea con equazione oraria $s(t)$. Questo significa che all'istante t il punto si trova nella posizione $s(t)$ in un riferimento cartesiano stabilito sulla traiettoria. Se consideriamo due istanti di tempi $t_0 < t_1$ chiameremo velocità media del punto nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ il rapporto tra la distanza percorsa nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ e la durata di questo intervallo:

$$v_m = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Se il moto non è uniforme allora il punto non dovrebbe essersi mosso sempre nella stessa maniera nell'intervallo $[t_0, t_1]$. Per essere più precisi potremmo inoltre calcolare la velocità media in intervalli di tempo più brevi, cioè per t_1 sempre più vicino a t_0. Se permettiamo alla lunghezza di tali intervalli di tendere a zero, il valore del limite della velocità media(se esso esiste) viene detto velocità istantanea del punto all'instante t_0

$$v_i = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

6.1.2 Significato geometrico

A livello geometrico la derivata può essere considerata come il **coefficiente angolare della retta tangente**. Si dice dunque che una retta è secante al grafico di una funzione se passa per due punti del grafico di f. La retta passante per i punti del grafico di ascissa x_0 e x_1 ha coefficiente angolare

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Quando il punto x_1 si avvicina al punto x_0 il coefficiente angolare tende a:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

se tale limite esiste. La retta passante per il punto del grafico di ascissa x_0 e con coefficiente angolare pari a tale limite viene detta retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0.

Definizione 6.1.1 (Rapporto incrementale)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Viene detto rapporto incrementale di f in x_0 il rapporto*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Diciamo inoltre che f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite viene detto derivata di f in x_0 e si indica con

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$$

Definizione 6.1.2. *Se f è derivabile in ogni punto di (a, b) si dice derivabile in (a, b) e la funzione $x \to f'(x)$ si chiama funzione derivata di f.*

Esempio:
La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è derivabile in $(0, +\infty)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Teorema 6.1.1:

Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0

Dimostrazione. Ricordando che quando si calcola un limite per $x \to x_0$ si considerano i punti diversi da x_0 possiamo scrivere

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

e poiché per l'ipotesi di derivabilità in x_0 esiste finito il limite del rapporto incrementale, si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

□

6.2 Retta tangente

Definizione 6.2.1. *Se f è derivabile in x_0, si chiama retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ la retta*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La retta tangente è un'approssimazione lineare di f, in x_0, infatti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - L(x) = 0$$

Questa proprietà vale per ogni retta che passa per $(x_0, f(x_0))$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) - m(x - x_0) = 0 \qquad \forall \in \mathbb{R}$$

La retta tangente però tra tutte le altre rette passanti per $(x_0, f(x_0))$ è l'unica ad avere la proprietà:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

6.3 Regole di derivazione

6.3.1 Derivate notevoli

Di seguito è riportata una tabella delle derivate delle funzioni elementari più note.

Funzione	**Derivata**
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^s \ x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = sx^{s-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{xln(a)}$
$f(x) = ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \|x\|$	$f'(x) = \frac{\|x\|}{x}$
$f(x) = sin(x)$	$f'(x) = cos(x)$
$f(x) = cos(x)$	$f'(x) = -sin(x)$
$f(x) = tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$

6.3.2 Operazioni sulle derivate

Teorema 6.3.1: Regole di derivazione

Se f e g sono due funzioni derivabili in x, allora sono derivabili in x anche le combinazioni lineari di f e g, il prodotto $f \cdot g$ e, se $g(x) \neq 0$, il rapporto f/g. Valgono inoltre le seguenti regole:

- **Linearità**: $\frac{d}{dx}(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \frac{df}{dx}(x) + \beta \frac{dh}{dx}(x)$
- **Regola di Leibnitz**: $\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = \frac{df}{dx}(x)g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x)$
- **Rapporto**: $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{df}{dx}(x)g(x) - f(x)\frac{dg}{dx}(x)}{g^2(x)}$

Dimostrazione. La linearità della derivate è conseguenza diretta della linearità del limite. Per la regola di Leibnitz, invece, ricordiamo che le funzioni derivabili in x sono anche continue in x:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \\ &+ \lim_{h \to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= g(x)f'(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

Per dimostrare il rapporto, invece, è sufficiente derivare il reciproco di una funzione g diversa da zero e combinare questa regola con quella di Leibnitz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right)\frac{1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\ &= -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d}{dx}\left(f \cdot \frac{1}{g}\right) = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

□

Teorema 6.3.2:

Sia g derivabile in x e sia f derivabile in $g(x)$. La funzione $f \cdot g$ è derivabile in x e

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Dimostrazione. La spiegazione semplificata di questa regola è la seguente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(g(x))g'(x)$$

Questi passaggi valgono solo se $g(x+h)-g(x) \neq 0$ per h in un intorno di 0. Per gli altri casi occorre invece introdurre la funzione:

$$F(k) = \begin{cases} \frac{f(g(x)+k)-f(g(x))}{k} & se\ k \neq 0 \\ f'(g(x)) & se\ k = 0 \end{cases}$$

Visto che f è per ipotesi derivabile in $g(x)$, F è una funzione continua in 0. Inoltre, riprendendo l'idea della dimostrazione semplificata si ha:

$$\frac{f(g(x+k)) - f(g(x))}{h} = F(g(x+h) - g(x))\frac{g(x+k) - g(x)}{h}$$

che vale anche quando $g(x+h) - g(x) = 0$. □

Teorema 6.3.3: Derivate della funzione inversa

Sia f una funzione continua e strettamente monotona in (a, b). Se f è derivabile in $x \in (a, b)$ e $f'(x) \neq 0$, allora anche la funzione inversa f^{-1} di f è derivabile in $y = f(x)$ e

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Dimostrazione. Siano x e y tali che $x = f^{-1}(y)$ e $f(x) = y$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(y) = \lim_{k\to 0} \frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k}$$

chiamiamo $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = f^{-1}(y+k) - x$ Si ha quindi $x + k = f^{-1}(y+k)$ e $f(x+h) = y+k$ da cui segue $f(x+h) - f(x) = k$. Quando $k \to 0$, si ha che $h \to 0$, dunque

$$\lim_{k\to 0} \frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{k}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

□

6.4 Massimi e minimi relativi

Definizione 6.4.1. *Sia f definita in $[a, b]$, un punto $x_0 \in [a, b]$ è un punto di massimo relativo per f in $[a, b]$ se*

$$\exists \delta > 0\ :\ f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in [a, b]\ con\ |x - x_0| < \delta$$

Un punto $x_0 \in [a, b]$ è un punto di minimo relativo per f in $[a, b]$ se

$$\exists \delta > 0\ :\ f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in [a, b]\ con\ |x - x_0| < \delta$$

Un punto di massimo o minimo locale si chiama un punto di estremo locale.

6.5 Teoremi sulle derivate

6.5.1 Teorema di Fermat

Teorema 6.5.1: Teorema di Fermat

Sia f definita in $[a,b]$ e sia x_0 un punto di massimo(o di minimo) relativo interno ad (a,b). Se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

I punti nei quali la derivate è nulla vengono chiamati **punti stazionari**, ma attenzione:

- Non vale se l'estremo non è interno all'intervallo: ad esempio $f(x) = 3x+1$ nell'intervallo $[1,2]$ ha un massimo relativo in 2 ma $f'(2) = 3 \neq 0$
- Non vale se f non è derivabile: ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ ha un minimo relativo in 0 ma non ha la derivata nulla in 0
- Non vale il viceversa, la funzione $f(x) = x^3$ ha un punto stazionario in 0 che non è estremo.

Dimostrazione. Sia x_0 un punto di massimo relativo in (a,b), cioè $\exists \delta > 0 \; : \; f(x_0) \geq f(x) \; \forall x \in [a,b]$. Visto che f è derivabile in x_0:

$$f'(x_0) = \underbrace{\lim_{h \to 0^+} = \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{>0}}}_{\leq 0} = \underbrace{\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{<0}}}_{\geq 0}$$

Di conseguenza, grazie al teorema della permanenza del segno(§4.2.3), si ha che:

$$f'(x_0) = 0$$

□

6.5.2 Teorema di Rolle

Teorema 6.5.2: Teorema di Rolle

Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se $f(a) = f(b)$ esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Poiché f è continua in $[a,b]$, per il teorema di Weierstrass(§5.7) ha massimo e minimo in $[a,b]$, cioè esistono $x_m, x_M \in [a,b]$ tale che $f(x_m) = min_{[a,b]} f$ e $f(x_M) = max_{[a,b]} f$. Se almeno uno tra x_m e x_M appartiene ad (a,b), per il teorema di Fermat in tale punto la derivata di f è nulla. Se invece entrambi i punti $x_m, x_M \in \{a,b\}$ si ha $f(x_m) = min_{[a,b]} = f(x_m) = max_{[a,b]} f$ e quindi f è costante per cui $f' = 0$ in (a,b). □

6.5.3 Teorema di Lagrange

Teorema 6.5.3: Teorema di Lagrange

Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Dimostrazione. È sufficiente applicare il teorema di Rolle alla funzione continua

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \right]$$

□

6.5.4 Teorema di Cauchy

Teorema 6.5.4: Teorema di Cauchy

Siano f e g continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b) tali che $g(x) \neq 0$. Esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Dimostrazione. Si applica il teorema di Rolle alla funzione

$$h(x) = f(x)[g(b)-g(a)] - g(x)[f(b)-f(a)]$$

□

6.5.5 Monotonia delle derivate

Teorema 6.5.5: Monotonia della derivate

Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), allora

$$f'(x) \geq 0 \qquad \forall x \in (a,b) \iff f \text{ è crescente in } [a,b]$$

$$f'(x) \leq 0 \qquad \forall x \in (a,b) \iff f \text{ è decrescente in } [a,b]$$

Dimostrazione. Se f è una funzione crescente il rapporto incrementale è sempre positivo (per $h \lesseqgtr 0$). Supponiamo dunque che sia $f'(x) \geq 0$ in (a,b) ma che essa non sia crescente. Questo significa che esistono due punti $x_1 < x_2$ tali che $f(x_1) > f(x_2)$. Per il teorema di Lagrange, esiste un punto $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(x_0) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$. □

6.6 Teorema di de l'Hôpital

Teorema 6.6.1: Teorema di de l'Hôpital

Siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e f e g funzioni derivabili in (a,b). Supponiamo che per un certo $c \in (a,b)$ valga

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^+} g(x) = 0$$

e

$$g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b) \backslash c$$

Se esiste

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dimostrazione. Sia $c \in (a,b)$, siccome f e g sono derivabili in (a,b), sono anche continue in ogni punto di quell'insieme. Questo insieme implica che $f(c) = g(c) = 0$. Osserviamo dunque che:

$$\lim_{x\to c^+} = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-f(c)}$$

Adesso, utilizzando il teorema di Cauchy, il quale enuncia che esiste un punto x_0 tra c e x tale che:

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-f(c)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Il punto x_0 dipende da x quindi per essere più corretti dovremmo scrivere $x_0(x)$. Osserviamo inoltre che:

$$c \leq x_0(x) \leq x$$

quindi

$$\lim_{x \to c^+} x_0(x) = c$$

e che

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - f(c)} = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x_0(x))}{g'(x_0(x))} = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Esempio:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{\frac{\pi}{2} - x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 1} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

6.7 Esercizi

Esercizio 6.7.1. *Determinare il rapporto incrementale delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = \frac{7x + 3x^2 + 2}{x - 4} \text{ con } x_0 = 3 \qquad g(x) = \sqrt{6x + 1} \text{ con } x_0 = 1$$

Risposta 6.7.1. *Per risolvere la $f(x)$ è sufficiente valutare la funzione in $f(x_0 + h)$, poi in $f(x_0)$ e infine unire i due risultati:*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = f(3 + h) &= \frac{7(3 + h) + 3(3 + h)^2}{(3 + h) - 4} \\ &= \frac{21 + 7h + 3(9 + 6h + h^2) + 2}{h - 1} = \frac{21 + 7h + 27 + 18h + 3h^2 + 2}{h - 1} = \frac{3h^2 + 25h + 50}{h - 1} \\ f(x_0) = f(3) &= \frac{21 + 27 + 2}{-1} = -50 \\ &\Rightarrow \frac{\frac{3h^2 + 25h + 50}{h - 1} + 50}{h} = \frac{\frac{\cancel{50} + 25h + 3h^2 + 50h - \cancel{50}}{h - 1}}{h} = \frac{3h^2 + 75h}{h(h + 1)} = \frac{\cancel{h}(3h + 75)}{\cancel{h}(h - 1)} = \boxed{\frac{3h + 75}{h - 1}} \end{aligned}$$

Anche nella $g(x)$ si procede per parti:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = f(1 + h) &= \sqrt{6(1 + h) + 1} \Rightarrow \sqrt{6h + 7} \\ f(x_0) = f(1) &= \sqrt{7} \Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{6h + 7} - \sqrt{7}}{h}} \end{aligned}$$

Esercizio 6.7.2. *Utilazzando la definzione, determinare il valore della derivata nel punto $x_0 = 1$:*

$$y = 3x^2 - 2x$$

Risposta 6.7.2.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = f(1 + h) &= 3(1 + h)^2 - 2(1 + h) = 3(1 + 2h + h^2) - 2 - 2h \\ &= 3 + 6h + 3h^2 - 2 - 2h \Rightarrow 3h^2 + 4h + 1 \\ f(x_0) = f(1) &= 3(1) - 2(1) = 3 - 2 = 1 \\ \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 4h}{h} &= \frac{\cancel{h}(3h + 4)}{\cancel{h}} = 3h + 4 \Rightarrow 3(0) + 4 = \boxed{4} \end{aligned}$$

Esercizio 6.7.3. *Calcolare le seguenti derivate utilizzando le regole di derivazione:*

$$y_1 = x^6 + 3x^2 + \frac{1}{4}x^3 - 1 \qquad y_2 = x^4 - 3x^2 \qquad y_3 = x^2 + cosx + 1 \qquad y_4 = x \sin x \qquad y_5 = x \log x - x$$

Risposta 6.7.3.

$$y_1' = 6x^5 + 6x + \frac{3x^2}{4} \qquad y_2' = 4x^3 - 18x \qquad y_3' = 2x - \sin x \qquad y_4' = \sin x + x \cos x$$

$$y_5' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1 - x \Rightarrow \log x + 1 - 1 \Rightarrow \boxed{\ln x}$$

Esercizio 6.7.4. *Calcolare le derivate delle seguenti funzioni razionali:*

$$f(x) = \frac{1}{2x + 1} \qquad g(x) = \frac{-x^4}{x^3 + 2}$$

Risposta 6.7.4.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot 2x + 1 - 2 \cdot 1}{(2x + 1)^2} = \boxed{\frac{-2}{(2x + 1)^2}}$$

$$g'(x) = \frac{4x^3 \cdot (x^3 + 2) - 3x^2(x^4)}{(x^3 + 2)^2} = \boxed{\frac{-4x^6 + 8x^3 - 3x^6}{(x^3 + 2)^2}}$$

Esercizio 6.7.5. *Svolgere lo studio completo della seguente funzione:*

$$f(x) = \frac{1-3x}{x-1}$$

Risposta 6.7.5. .
Dominio:

$$D\ :\ x-1 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D\ :\ \mathbb{R}-\{1\}$$

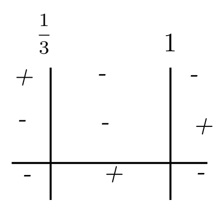
Int. assi:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \cup\ (0,-1) \qquad \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases} \cup\ (\frac{1}{3},0)$$

Segno: $f(x) > 0$

$$N:\ 1-3x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$$

$$D:\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$



Limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1-3x}{x-1}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{x\left(\frac{1}{x}-3\right)}{x(1-\frac{1}{x})} = -3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$x=1$ ***asintoto verticale***, $y=-3$ ***asintoto obliquo***.

Derivate: $f'(x) = \frac{-3(x-1)-1(1-3x)}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{-3x}+3-1+\cancel{3x}}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}$ $\quad f'(x) > 0 \Rightarrow$ *no max/min*

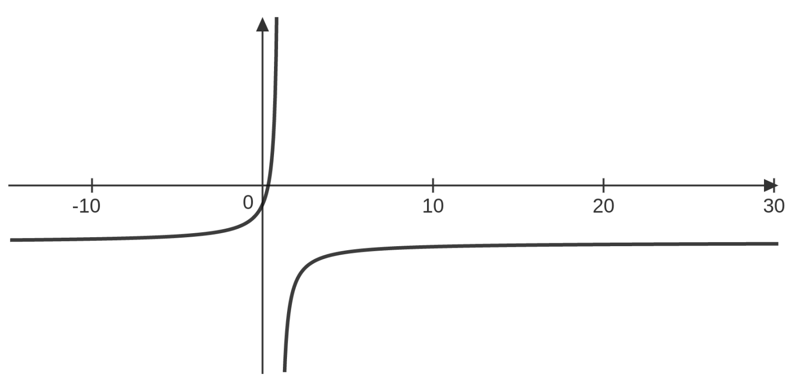


Figura 6.2: Grafico qualitativo

Esercizio 6.7.6. *Svolgere lo studio completo della seguente funzione:*

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2$$

Risposta 6.7.6. .
Dominio:

$$D\ :\ \mathbb{R}$$

Int. assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup\ (0,0) \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 4x^3 + 2x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2(4x+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0;\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \cup\ (-\frac{1}{2}, 0)$$

Segno: $f(x) > 0$

$$4x^3 + 2x^2 > 0 \Rightarrow x^2(4x+2) > 0 \Rightarrow x \neq 0,\ x > -\frac{1}{2}$$

	$-\frac{1}{2}$		0	
+		+		+
-		+		+
-		+		+

Limiti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{4x^3 + 2x^2}{x} = 4x^2 + 2x^2 = x(4x+2) = \pm\infty$$

nessun asintoto presente

Derivate: $f'(x) = 12x^2 + 4x \geq 0 \Rightarrow 4x(3x+1) \geq 0$

	$-\frac{1}{3}$		0	
-		-		+
-		+		+
↗		↘		↗

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{27} \cup \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right) \textbf{ max}$$

$$f(0) = 0 \cup (0,0) \textbf{ min}$$

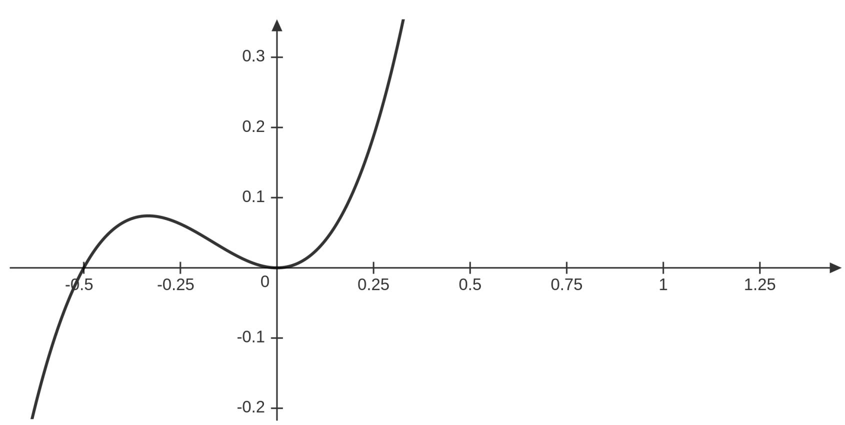


Figura 6.3: Grafico qualitativo

Esercizio 6.7.7. *Svolgere lo studio completo della seguente funzione:*

$$f(x) = x^2 e^{3x+5}$$

Risposta 6.7.7. .
Dominio:

$$D \ : \ \mathbb{R}$$

Int. assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \cup \ (0, 0)$$

Segno: $f(x) > 0$

$$f(x) \geq 0 \ \forall x \in D$$

Limiti:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \cdot e^{\infty} = [-\infty \cdot 0] \\ &\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-3e^{-3x-3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{H}}{=} \frac{2x}{9e^{-3x-5}} \overset{\text{H}}{=} \frac{2}{9e^{-3x-5}} = \frac{2}{e^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = \infty \\ &\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 e^{3x+5}}{x} = \frac{x(xe^{3x+5})}{x} = \pm\infty \end{aligned}$$

$$y = 0 \ \textit{\textbf{asintoto orizzontale}}$$

Derivate:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{3x+5} + 3x^2 3x + 5 \\ &= e^{3x+5}(3x^2 + 2x) \end{aligned}$$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x \geq 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{6} = \boxed{x \leq -\frac{2}{3} \vee x \geq 0}$$

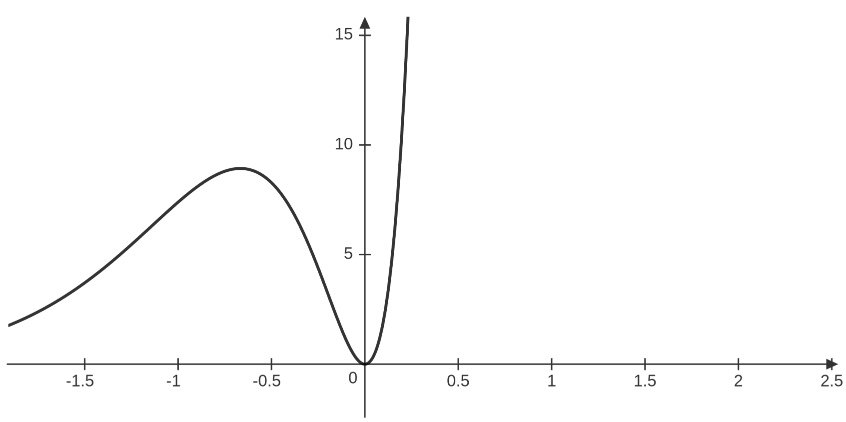


Figura 6.4: Grafico qualitativo

Esercizio 6.7.8. *Svolgere lo studio completo della seguente funzione:*

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

Risposta 6.7.8. .
Dominio:

$$D\ :\ \tfrac{x-1}{x+1}\ \geq 0 \qquad \begin{array}{l} n\ \geq 0\ :\ x\ \geq 1 \\ d\ \geq 0\ :\ x\ > -1 \end{array}$$

$$D\ :\ (-\infty;\ -1)\ \cup\ [1;\ +\infty)$$

	-1		1	
-		-		+
-		+		+
+		-		+

Int. assi:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \quad \cup\ (1,0) \in f(x)$$

Segno: $f(x) > 0$

$$f(x) \geq 0\ \forall x \in D$$

Limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})}} \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \sqrt{\frac{-2}{0^-}} = +\infty \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$y = 1$ ***asintoto orizzontale***, $x = -1$ ***asintoto verticale***

Derivate:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow f'(x) \geq 0\ \forall x \in D \end{aligned}$$

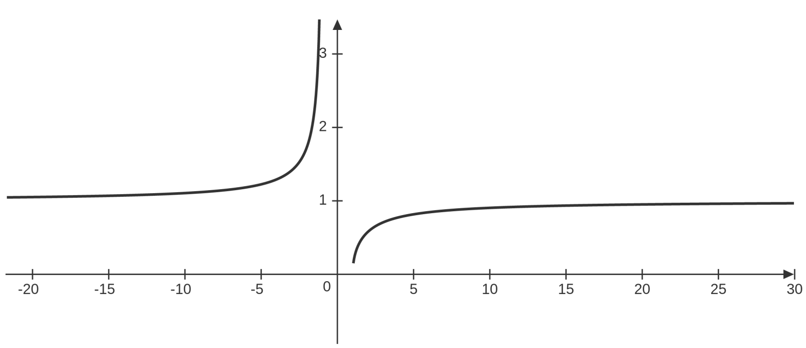


Figura 6.5: Grafico qualitativo

Capitolo 7

Polinomio di Taylor

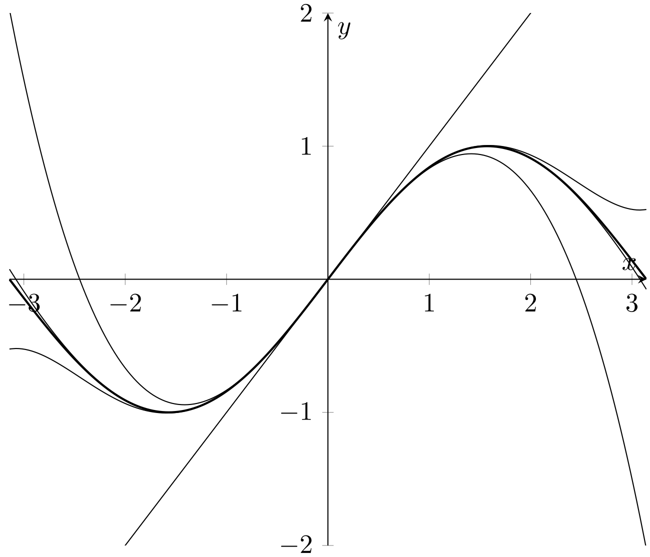


Figura 7.1: Sviluppo in serie di Taylor della funzione $y = sin(x)$

7.1 Derivate successive

Data una funzione f derivabile in (a, b), diciamo che f è derivabile 2 volte se la sua derivata prima $f'(x)$ risulta a sua volta derivabile in (a, b) e chiameremo *derivate seconda*

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$$

Ricorsivamente è possibile definire derivate di qualsiasi ordine:

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x) = \frac{d}{dx} f^{(k-1)}(x)$$

Si indica con $C(I)$ l'insieme delle funzioni continue sull'intervallo I e con $C^k(I)$ l'insieme di funzioni con k derivate tutte continue in I. Con $C^\infty(I)$ si indicano invece le funzioni che possono essere derivate infinite volte su I. Le funzioni elementari sono tutte derivabili in C^∞ nel loro dominio.

- **Polinomio**: Se $o(x)$ è un polinomio di grado N la sua derivata prima è un polinomio di grado $N - 1$ e, per $k \leq N$ la sua derivata $k-$esima è un polinomio di grado $N - k$. Le derivate dalla $N + 1$.esima in poi sono tutte nulle.
- **Esponenziali**: $\frac{d^k}{dx^k} e^x = e^x \; \forall k \in \mathbb{N}$.

- **Logaritmo**: La funzione logaritmo è derivabile infinite volte:

$$\frac{d^k}{dx^k} logx = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}$$

- **Seno e coseno**: Le funzioni seno e coseno appartengono a $C^\infty(R)$, infatti

$$\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} sin(x) - (-1)^k cosx \qquad \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} sin(x) - (-1)^k sinx$$

7.2 Sviluppi in serie di Taylor

Sia f una funzione derivabile infinite volte in un intorno del punto x_0. La retta tangente al grafico della funzione f nel punto x_0 è, tra tutte le rette le rette passanti per $(x_0, f(x_0))$, quella che meglio approssima la funzione. Infatti è l'unica funzione per la quale vale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0 \tag{7.1}$$

Introduciamo ora la seguente notazione:

$$R_1(x_1, x_0) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \tag{7.2}$$

Essa rappresenta l'errore che si commette calcolando il punto sulla retta tangente invece che sul grafico. Il limite 7.1 si può anche esprimere come:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x, x_0)}{x - x_0} = 0$$

vale a dire che per x che tende a x_0, $R_1(x, x_0)$ tende a zero *più velocemente* di $x - x_0$. Per descrivere il concetto di *"più velocemente"* è opportuno introdurre gli **o piccoli di Landau**.

Definizione 7.2.1. *Date due funzioni f e g definite in un intorno di x_0, si dice che:*

$$f = o(g) \qquad per \qquad x \to x_0$$

se f è un infinitesimo di ordine superiore a g, vale a dire se

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Usando questa definizione il limite 7.1 può essere riscritto come

$$R_1(x, x_0) = o((x - x_0)) \; per \; x \to x_0$$

La retta tangente è dunque un'approssimazione al primo ordine di una certa funzione, tuttavia essa non può approssimare nessuna funzione ad un ordine superiore al primo in quanto si tratta di un polinomio di primo grado. Per approssimazioni di grado superiore al primo si deve dunque utilizzare il **polinomio di Taylor**:

Definizione 7.2.2. *Se f è derivabile n volte in x_0, viene detto polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 il polinomio della forma:*

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

7.2.1 Polinomio di Taylor con resto di Peano

Definizione 7.2.3. *Sia f una funzione derivabile n volte in x_0 e con derivata n-esima continua in x_0. Allora*

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n) \; per \; x \to x_0$$

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema è sufficiente applicare n volte il teorema di de l'Hôpital(§6.6) nel limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x, x_0)}{(x - x_0)} \overset{H}{=} ... \overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - \frac{d^n}{dx^n} P(x, x_0)}{n!} = 0$$

□

7.2.2 Polinomio di Taylor con resto di Lagrange

Definizione 7.2.4. *Sia f una funzione derivabile $n+1$ volte in (a,b) e siano $x, x_0 \in (a,b)$, esiste allora un punto ξ tra x e x_0 tale che:*

$$f(x) = P_n(x, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Dimostrazione. Consideriamo le funzioni $F(x) = f(x) - P_n(x, x-0)$ $G(x) = (x - x_0)^{n+1}$. Entrambe le funzioni sono $n+1$ volte derivabili in (a,b), con $F(x) = G(x) = 0$. Applicando il teorema di Cauchy(§6.5.4) all'intervallo (x, x_0) esiste dunque un punto $\xi_1 \in (x, x_0)$ tale che:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}$$

D'altra parte anche $F'(x_0) = G'(x_0) = 0$ quindi, sempre per il teorema di Cauchy, esiste un punto $\xi_2 \in (\xi_1, x_0)$ tale che:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

□

7.3 Algebra degli o piccoli

L'unicità del polinomio di Taylor come approssimazione di ordine n della funzione, permette anche di calcolare il polinomio di Taylor di una combinazione di funzioni elementari utilizzando lo sviluppo di Taylor di tali funzioni. Tuttavia occorre utilizzare le seguenti regole per la gestione dei resti, cioè degli *o piccoli*. Di seguito è riportata una tabella che riassume le proprietà algebriche fondamentali.

Espressione	**Risultato**
$o(x^n) \pm o(x^n)$	$o(x^n)$
$c \cdot o(x^n)$	$o(x^n)$
$x^m \cdot o(x^n)$	$o(x^{m+n})$
$o(x^m) \cdot o(x^n)$	$o(x^{m+n})$
$o(o(x^n))$	$o(x^n)$
$o(x^n + o(x^n))$	$o(x^n)$
$o(x^n) + o(x^n)$	$o(x^n)$

Esempio:

Calcolare il polinomio di McLaurin[1] *di quarto grado sin^2x*

$$\begin{aligned} sin^2x = (sinx)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2 \\ &= x^2 + \frac{x^6}{(3!)^2} + (o(x^4))^2 - \frac{x^4}{3} + 2xo(x^4) - \frac{x^3 o(x^4)}{3} \\ &= \boxed{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)} \end{aligned}$$

7.4 Ordine di infinitesimo

Definizione 7.4.1. *Sia f una funzione derivabile infinite volte nel punto x_0 e tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. Diciamo che f è un infinitesimo di ordine n in x_0 se per qualche $a \neq 0$, $f(x) = a(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$. Vale a dire che f è un infinitesimo di ordine n in x_0 se f e tutte le prime $n-1$ derivate sono nulle in x_0 mentre $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.*

[1] Il polinomio di McLaurin è semplicemente un polinomio di Taylor centrato in zero

7.5 Sviluppi di Taylor notevoli

Di seguito è riportata una lista delle più comuni funzioni sviluppate con il polinomio di Taylor con centro $x_0 = 0$(McLaurin).

Funzione esponenziale:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \iff e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Funzione logaritmica:

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n) \iff ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

Binomio:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + ... + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n) \iff (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad |x| < 1$$

Funzioni razionali:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \forall |n| < 1 \qquad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad \forall |n| < 1$$

Radicale:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128} x^4 + \frac{7}{256} x^5 - \frac{21}{1024} x^6 + o(x^6)$$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81} - \frac{10}{243} x^4 + \frac{22}{729} x^5 - \frac{154}{6561} x^6 + o(x^6)$$

Seno:

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2x+1}) \iff sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Coseno:

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \iff cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tangente:

$$tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6) \qquad per\ |x| < \frac{\pi}{2}$$

7.6 Studio dei punti stazionari

Il polinomio di Taylor può inoltre essere utilizzato per determinare l'esistenza dei **punti di frontiera** di una funzione:

Teorema 7.6.1: Condizione sufficiente per un estremo locale

Se

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \;\; e \; f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

allora

- se k è pari e $f^{(k)(x_0)} > 0$, x_0 è un punto di minimo locale;
- se k è pari e $f^{(k)(x_0)} < 0$, x_0 è un punto di massimo locale;
- se k è dispari x_0 non è un punto di estremo locale.

Dimostrazione. Scrivendo la formula di Taylor in x_0 si ha

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$$

quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Questo significa che, in un intorno di x_0 la frazione $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^k}$ ha segno costante e da questo segue la tesi. □

Teorema 7.6.2: Condizione necessaria per un estremo locale

Sia x_0 un punto di minimo locale interno al dominio di f, allora

$$f'(x_0) = 0 \; e \; f''(x_0) \geq 0$$

Se invece x_0 è un punto di massimo locale interno allora

$$f'(x_0) = 0 \; e \; f''(x_0) \leq 0$$

Teorema 7.6.3: Condizione sufficiente per un estremo locale

Se

$$f'(x_0) = 0 \; e \; f''(x_0) > 0$$

allora x_0 è un punto di minimo locale, se invece

$$f'(x_0) = 0 \; e \; f''(x_0) < 0$$

allora x_0 è un punto di massimo locale.

Dimostrazione. Siccome $f'(x_0) = 0$, si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} > 0,$$

quindi, per il teorema della permanenza del segno(§4.2.3), esiste δ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} \geq 0 \;\; \forall |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0 \;\; \forall |x - x_0| < \delta$$

cioè x_0 è un punto di minimo locale. □

7.7 Esercizi

Esercizio 7.7.1. *Calcolare il polinomio di McLaurin fino al terzo ordine della seguente funzione:*

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

Risposta 7.7.1. *Per eseguire questo sviluppo è sufficiente applicare la seguente formula:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Per prima cosa, dunque, calcoliamo le tre derivate:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \qquad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8\sqrt{(x+1)^5}}$$

Successivamente si valutano le funzioni in $x_0 = 0$:

$$f(0) = 1 \qquad f^{(1)}(0) = \frac{1}{2} \qquad f^{(2)}(0) = -\frac{1}{4} \qquad f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$$

Infine si valutano i fattoriali e i prodotti:

$$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6$$

$$(x-0)^0 = 1 \qquad (x-0)^1 = x \qquad (x-0)^2 = x^2 \qquad (x-0)^3 = x^3$$

Unendo tutte le precedenti informazioni si ottiene:

$$f(x) = \boxed{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}}$$

Esercizio 7.7.2. *Eseguire lo sviluppo in serie di Taylor della seguente funzione composta:*

$$f(x) = \cos\ln(1+x) \; con \; x_0 = 0$$

Risposta 7.7.2. *Per risolvere questo esercizio è sufficiente ricordare lo sviluppo in serie del coseno e del logaritmo:*

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4)$$

Successivamente è sufficiente sostituire tali sviluppi alla funzione iniziale:

$$f(x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)^4}{24} + o(x^4)$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 \underbrace{-\frac{5}{6}x^5 + \frac{13}{36}x^6 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^8}{16}}_{inglobati\ dall'o\ piccolo}$$

$$= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)^4 = x^4 + o(x^4)$$

$$\cos\ln(1+x) = 1 - \frac{x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{11}{24}x^4 + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x^2}{x} + \frac{x^3}{2} - \frac{10}{24}x^4 + o(x^4) \Rightarrow \boxed{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5}{12}x^4 + o(x^4)}$$

Esercizio 7.7.3. *Eseguire lo sviluppo di McLaurin al secondo ordine della seguente funzione:*

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

Risposta 7.7.3. *Anche in questo caso è sufficiente applicare la formula:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

vale a dire trovare

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right)$$

Per farlo, calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda della funzione:

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Successivamente si valutano le due derivate nel punto $x_0 = 0$:

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = -1 \qquad f''(0) = 2$$

Unendo le informazioni ricavate, si ottiene:

$$f(x) = 1 - x + \frac{2x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \boxed{1 - x + x^2 + o(x^2)}$$

Esercizio 7.7.4. *Calcolare lo sviluppo in serie di McLaurin della seguente funzione:*

$$f(x) = e^x \log(1+x)\cos(x)$$

Risposta 7.7.4. *Per determinare lo sviluppo di McLaurin di una funzione composta è sufficiente sostituire le varie parti con il corrispondente sviluppo:*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow 1 + x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^{2n}) \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

sostituiamo dunque questi sviluppi nella funzione iniziale:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1 + x + o(x)) \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= \left(x + x^2 + o(x^2) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) + o(x^2) \\
&= \boxed{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}
\end{aligned}$$

Esercizio 7.7.5. *Risolvere il seguente limite utilizzando gli sviluppi in serie di Taylor:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + 2x^5}{3x^3}$$

Risposta 7.7.5. *Ricordiamo lo sviluppo in serie del seno:*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ } con \text{ } x \to 0$$

Ciò implica che:

$$\sin(x) - x \sim x - \frac{x^3}{6} \Rightarrow -\frac{x^3}{6}$$

dunque

$$\sin(x) - x + 2x^5 \sim x - \frac{x^3}{6} - x + \underbrace{2x^5}_{si\ ignora} = -\frac{x^3}{6} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{3x^3} \Rightarrow -\frac{x^3}{18x^3} = \boxed{-\frac{1}{18}}$$

Esercizio 7.7.6. *Risolvere il seguente limite con gli sviluppi in serie di McLaurin:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) - \sin(x^2)}{x^2(\cos^2(x) - \cos(x^2))}$$

Risposta 7.7.6. *Per risolvere questo limite ricordiamo lo sviluppo in serie del seno e del coseno:*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

e sostituiamoli nelle occorrenze del limite iniziale:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \\
&= x^2 + \frac{x^6}{36} + \left(o(x^3)\right)^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{3}o(x^3) + 2xo(x^3) \\
&= x^2 + \frac{x^6}{36} + o(x^6) - \frac{x^4}{3} - o(x^6) + o(x^4) \\
&= x^2 + \frac{x^6}{36} - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \Rightarrow \boxed{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}
\end{aligned}$$

$$\sin(x^2) = \boxed{x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)} \qquad \cos(x^2) = \boxed{1 - \frac{x^4}{2} + o(x^2)}$$

$$\cos^2(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 \Rightarrow 1 - x^2 + \frac{x^4}{4} + 2o(x^2) - x^2 o(x^2) + o(x^2) \Rightarrow \boxed{1 - x^2 + o(x^2)}$$

Una volta calcolati, è sufficiente sostituirli nel limiti iniziale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right)}{x^2\left[(1 - x^2 + o(x^2)) - \left(1 - \frac{x^4}{2} + o(x^2)\right)\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - x^2 + \frac{x^6}{6} - o(x^6)}{x^2\left(1 - x^2 + o(x^2) - 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4) + \frac{x^6}{6} - o(x^6)}{x^2\left(-x^2 + o(x^2) + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^2\left(-x^2 + o(x^2)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{-x^4 + o(x^4)} = \boxed{+\frac{1}{3}}$$

Esercizio 7.7.7. *Risolvere il seguente limite utilizzando gli sviluppi in serie di McLaurin:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}}-1\right]$$

Risposta 7.7.7. *Iniziamo riportando gli sviluppi in serie delle funzioni irrazionali:*

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\Rightarrow\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\Rightarrow\frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}+o(x^2)$$

A questo punto si sostituiscono all'espressione iniziale:

$$\Rightarrow\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}=\frac{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)}{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}$$

$$\Rightarrow\frac{x\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+o(x)\right)}{x\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{8}+o(x)\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+o(x)}{\frac{1}{2}-\frac{x}{8}+o(x)}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+o(x)\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{x}{8}+o(x)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{4}+o(x)\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}+o(x)\right)}=\left(1+\frac{x}{4}+o(x)\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}+o(x)}$$

A questo punto, visto che da $\frac{1}{1-t}=1+t+o(t)$ *si ricava* $\frac{1}{1-\frac{x}{4}+o(x)}$*, si rimpiazza* t *con* $\frac{x}{4}+o(x)$*. Dunque si ottiene:*

$$\Rightarrow\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}=\left(1+\frac{x}{4}+o(x)\right)\cdot\left(1+\frac{x}{4}+o(x)\right)=1+\frac{x}{2}+o(x)$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}}-1\sim_{x\to 0}\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}-1\sim_{x\to 0}\frac{1}{6}x$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}}-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x}{x}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

Esercizio 7.7.8. *Risolvere il seguente limite utilizzando gli sviluppi in serie di McLaurin:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{cos^2(x) + x^2 - 1}{x^4}$$

Risposta 7.7.8. *Questo limite, grazie alla relazione fondamentale della trigonometria per cui* $cos^2(x) = -sin^2(x)$, *può essere riscritto come*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^4}$$

A questo punto è sufficiente sostituire lo sviluppo del seno$(sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))$ *nell'espressione iniziale:*

$$\Rightarrow sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} + 2xo(x^3) - \frac{x^3}{3}o(x^3) + (o(x^3))^2$$
$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} + o(x^4) + o(x^6) + o(x^6) \Rightarrow \boxed{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}$$

A questo punto è sufficiente sostituire il precedente risultato al limite iniziale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - sin^2(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} + \underbrace{\frac{o(x^4)}{x^4}}_{=0}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Esercizio 7.7.9. *Data la funzione* $f(x) = \cos(2x)\log(1 + 2x^3) - x^2 \sin(2x)$

1. *Calcolare il polinomio di McLaurin di sesto grado;*
2. *Calcolare* $f^{(5)}(0)$*;*
3. *Calcolare l'ordine di infinitesimo di* f *in 0;*
4. *Determinare se in 0 la funzione* f *ha un punto di massimo o di minimo relativo;*
5. *Trovare* α *tale che* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \alpha x^5}{x^6}$ *sia finito.*

Risposta 7.7.9. *Determiniamo le formule di McLaurin:*

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \frac{(2x)^6}{720} + o(x^7)$$
$$\log(1 + 3x^3) = 2x^3 - \frac{(2x^3)^2}{2} + \frac{(2x^3)^3}{3} + o(x^3)$$
$$\sin(2x) = 2x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + o(x^6)$$

$$f(x) = \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \frac{(2x)^6}{720} + o(x^7)\right) \cdot \left(2x^3 - \frac{(2x^3)^2}{2} + \frac{(2x^2)^3}{3} + o(x^3)\right)$$
$$-x^2\left(2x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + o(x^6)\right)$$
$$\Rightarrow 2x^3 - \frac{2^2x^6}{2} - \frac{2^2}{2} \cdot 2x^5 + \frac{2^2}{2} \cdot \frac{2^2}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} \cdot 2x^7 - x^3 + \frac{2^3}{3!}x^5 - \frac{2^5}{5!}x^7 + o(x^8)$$
$$= \left(-4 + \frac{4}{3}\right)x^5 - 2x^6 + \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{15}\right)x^7 + 4x^8 - o(x^8)$$
$$= -\frac{8}{3}x^5 - 2x^6 + \frac{16}{15}x^7 + 4x^8 + o(x^8)$$
$$P_6(x, 0) = \boxed{-\frac{8}{3}x^5 - 2x^6}$$

Il secondo quesito ci chiede di determinare la derivata quinta in 0, per farlo è sufficiente applicare la formula $\frac{f^{(5)}(0)}{5!}$*:*

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = -\frac{8}{3} \Rightarrow f^{(5)}(0) = -\frac{8 \cdot 5!}{3} = -\frac{8 \cdot 120}{3} = \boxed{-320}$$

Visto che la prima potenza con coefficiente non nullo è quella x^5*, allora l'ordine di infinitesimo di* f *in zero è 5.*
Poiché la prima derivata non nulla di f *è dispari(*$f^{(5)}$*) allora* f *non ha né massimo né minimo.*
Per trovare α *tale che* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \alpha x^5}{x^6}$ *sia finito è sufficiente utilizzare il polinomio di McLaurin di grado 6:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \alpha x^5}{x^6} &= \frac{-\frac{8}{3}x^5 - 2x^6 + o(x^6) - \alpha x^5}{x^6} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{8}{3} - \alpha\right) x^5 - 2x^6 + o(x^6)}{x^6} \Rightarrow \begin{cases} Se \ \ -\frac{8}{3} - \alpha \neq 0 & \textit{diverge a } +\infty \\ Se \ \ -\frac{8}{3} - \alpha = 0 & \textit{converge a } 2 \end{cases}\end{aligned}$$

Dunque ciò significa che, per ottenere un limite finito, $\alpha = -\frac{8}{3}$*.*

Capitolo 8

Calcolo integrale

8.1 Primitive

Definizione 8.1.1. *Sia* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. *La funzione* F *è una primitiva di* f *in* (a,b) *se è derivabile in* (a,b) *e se* $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$

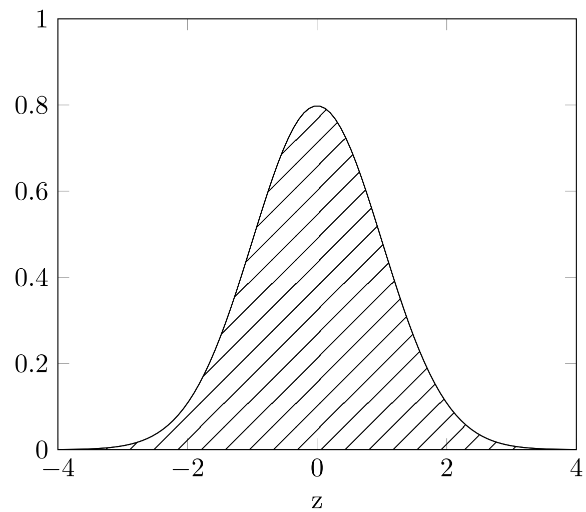


Figura 8.1: L'integrazione, geometricamente parlando, permette di calcolare l'area sottostante ad una curva

Una primitiva è dunque il risultato del processo inverso della derivazione. In genere una funzione, se essa ha una primitiva, ne ha infinite. Di seguito è riportata una lista delle primitive notevoli.

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \qquad \int \frac{1}{x} dx = log|x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{loga} + c \qquad \int cosx\ dx = sinx + c$$

$$\int sinx\ dx = -cosx + c \qquad \int \frac{1}{cos^2 x} dx = tanx + c$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -cotanx + c \qquad \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctan\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = arcsinx + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = arcosinhx + c = log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

8.2 Integrali indefiniti

Definizione 8.2.1. *L'integrale indefinito è rappresentato con il seguente simbolo*

$$\int f(x)dx$$

il quale si legge "integrale indefinito di $f(x)$ su dx". Esso rappresenta l'insieme di tutte le primitive di f.

In particolare se F è una qualsiasi primitiva di f si ha che:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

La funzione $f(x)$ viene detta *funzione integranda*, mentre x si chiama *variabile di integrazione*. In questa notazione scompare l'intervallo (a, b) sottintendendo che si cercano le primitive definite nel dominio della funzione integranda.

8.2.1 Linearità dell'integrale

La **linearità** è una delle proprietà fondamentali dell'integrale; essa descrive il comportamento dell'integrale definito rispetto alla somma di funzioni e al prodotto di una funzione per una costante. Per ricavare questa proprietà è sufficiente ricordare la formula di derivazione di una combinazione lineare di funzioni:

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x)$$

dalla quale si ricava

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Si consideri, a titolo d'esempio, il seguente integrale:

$$\int (3cosx - e^x + 4x^2)dx = 3 \int cosx\ dx - \int e^x\ dx + 4 \int x^2\ dx = 3sinx - e^x + \frac{4}{3}x^3 + c$$

8.2.2 Integrazione per parti

Un altro modo per risolvere un integrale è risolvendolo *per parti*. La formula di questo procedimento è la seguente:

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx + c$$

Ad esempio, il seguente integrale si può risolvere con l'integrazione per parti

$$\int x^2 ln(x)\ dx = \frac{x^3}{3}ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}dx + c = \frac{x^3}{3}ln(x) - \int \frac{x^2}{3}dx + c$$

con $g'(x) = x^2 \to g(x) = \frac{x^3}{3}$ e $f(x) = ln(x) \to f'(x) = \frac{1}{x}$

8.2.3 Integrazione per sostituzione

Un altro metodo per integrare una funzione è quello *per sostituzione*; per definirlo ricordiamo, dapprima, la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = F'(g(t)) \cdot g'(t)$$

la quale può essere letta nel seguente modo:
per costruire una primitiva di $f(g(t)) \cdot g'(t)$ basta prendere una primitiva F di f e calcolare $F(g(t))$, ovvero:

$$\int f(g(t))g'(t)\ dt = \int f(x)dx\ con\ x = g(t)$$

A titolo d'esempio si consideri il seguente integrale:

$$\int 2xe^{x^2}dx$$

Scegliamo dunque $t = x^2$ e $dt = 2xdx$. Studiando più attentamente il precedente integrale, notiamo che il differenziale dt è già presente, infatti:

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{\overbrace{x^2}^{t}} \cdot \overbrace{2xdx}^{dt}$$

Dunque otteniamo il seguente integrale elementare:

$$\int e^t dt = e^t + c$$

Ritornando alla variabile iniziale si ottiene

$$\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + c$$

8.3 Integrazioni di funzioni razionali

Per integrare una funzione razionale si deve andare a confrontare il grado del numeratore con quello del denominatore: una volta determinata questa informazione è possibile scegliere un metodo al posto di un altro. È comunque possibile identificare due metodi risolutivi differenti: il primo che si applica quando $\Delta \geq 0$ e l'altro che si applica quando $\Delta < 0$.

8.3.1 $\Delta > 0$

8.3.1.1 $D(x) < N(X)$

In questo caso si vuole risolvere un integrale della forma

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} \qquad con\ deg(N) \geq deg(D)$$

Per risolvere questa tipologia di integrali si deve seguire il seguente algoritmo:

1. Dividere il polinomio più grande(cioè il numeratore) con quello più piccolo(cioè il denominatore);

2. Riscrivere l'integrale di partenza come

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} = \int Q(x) + \int \frac{R(x)}{D(x)}$$

3. Utilizzare la linearità dell'integrale per risolvere ogni termine dell'integrale separatamente.

Consideriamo a titolo d'esempio il seguente integrale:

$$\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

Per prima cosa(visto che $N(x) > D(x)$) eseguiamo la divisione tra polinomi:

$$(x^2 + 1)/(x + 1) = x - 1\ r = 2$$

A questo punto possiamo riscrivere l'integrale di partenza come:

$$\int \frac{x^2}{x+1} = \int \left(x - 1 + \frac{2}{x+1}\right)\,dx \Rightarrow \int x\,dx - \int 1\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx \Rightarrow \frac{x^2}{2} - x + 2ln|x+1| + c$$

8.3.1.2 $D(x) > N(x)$

In questo caso si vuole invece risolvere un integrale della forma

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} \qquad con\ deg(N) < deg(D)$$

Per risolvere questa tipologia di integrali si utilizza un metodo chiamato **fratti semplici**; esso permette di esprimere un integrale come somma di funzioni razionali i cui integrali sono notevoli(dunque facilmente risolvibili). Anche in questo caso, esiste un vero e proprio algoritmo risolutivo:

1. Si fattorizza il polinomio
2. Si associa a ciascun fattore un *fratto semplice*
3. Si determinano le costanti A, B e C dell'espressione risolvendo un sistema lineare
4. Si calcola l'integrale costituito da oggetti elementari.

si consideri a titolo d'esempio il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\ dx$$

Visto che il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore, allora non è necessario eseguire la divisione tra polinomi. Passiamo dunque ad eseguire la fattorizzazione:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

A questo punto possiamo esprimere l'integrale di partenza come somma di fratti semplici:

$$\int \frac{1}{x^2-1}\ dx = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx - B}{(x+1)(x-1)}$$

Per determinare il valore delle due variabili si deve risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B - A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ B + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

È dunque possibile riscrivere l'integrale di partenza come:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-1} &= \int \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} \right]\ dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1}\ dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1}\ dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot ln|x+1| + \frac{1}{2} \cdot ln|x-1| \\ &= \boxed{-\frac{1}{2} \cdot ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c} \end{aligned}$$

8.3.2 $\Delta < 0$

Nel caso in cui il polinomio $D(X)$ abbia delta negativo, esso non può essere scomposto con il metodo tradizionale dei fratti semplici; si deve dunque procedere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \int \frac{p(x)}{x^2+bx+c} &= A \int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\ dx + B \int \frac{1}{x^2+bx+c}\ dx \\ &= A\ ln(x^2+bx+c) + \frac{2B}{\sqrt{-\Delta}} arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C \end{aligned}$$

Si consideri il seguente esempio:

$$\int \frac{4x-2}{x^2+x+1}\,dx$$

Cerchiamo, innanzitutto, A e B tali che:

$$\frac{4x-2}{x^2+x+1} = \frac{A(2x+1)}{x^2+x+1} + \frac{B}{x^2+x+1} = \frac{2Ax+(A+B)}{x^2+x+1}$$

Da cui si ottiene

$$\begin{cases} 2A = 4 \\ A+B = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -4 \end{cases}$$

Infine, sostituendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x-2}{x^2+x+1} &= 2\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - 4\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= 2\,ln(x^2+x+1) + \frac{8}{\sqrt{3}} arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

8.4 Integrale di Riemann

L'**integrale di Riemann**(o *integrale definito*) è un operatore dell'analisi matematica che associa alle funzioni reali di variabile reale l'area sottostante al grafico in un dato intervallo secondo opportune ipotesi. Prima di introdurre questa nuova tipologia di integrale introduciamo la nozione di **partizione di un intervallo**.

8.4.1 Partizione di un intervallo

La **partizione di un intervallo** è un insieme i cui elementi sono sottoinsiemi dell'intervallo dato. Formalmente è possibile definire una partizione nel seguente modo:

Definizione 8.4.1. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata in $[a,b]$, cioè supponiamo che esista una costante $L > 0$ tale che:*

$$-L \le f(x) \le L \qquad \forall x \in [a,b]$$

Chiamiamo partizione di $[a,b]$ una collezione finita P di punti ordinati di $[a,b]$, cioè:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$$

La partizione divide l'intervallo $[a,b]$ in un numero finito di intervalli $[x_k, x_{k+1}]$ per $k = 0,...,n-1$, chiamiamo:

$$m_k = inf(f), \qquad M_k = sup(f)$$

*che sono numeri finiti per ogni $k = 0,...,n-1$ e definiamo la **somma di Riemann** inferiore e la **somma di Riemann** superiore:*

$$s(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) \qquad S(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)$$

Se f è una funzione positiva, $s(f,P)$ è l'area di plurirettangoli contenuti nel sottografico di f e $S(f,P)$ è l'area di plurirettangoli contenuti nel sottografico f.

Definizione 8.4.2 (Funzioni integrabili secondo Riemann)**.** *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ se*

$$sup(s(f,P)) = inf(S(f,P))$$

in tal caso il numero

$$\int_a^b f(x)\,dx = sup(s(f,P)) = inf(S(f,P))$$

si dice integrale di Riemann di f in $[a,b]$.

Si noti, tuttavia, che l'integrale definito non dipende dalla variabile x (la quale viene detta muta), infatti:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f(s)\ ds$$

mentre invece nell'integrale indefinito la variabile di integrazione è importante, infatti:

$$\int f(x)\ dx$$

è un insieme di funzioni nella variabile indipendente x.

Definizione 8.4.3 (Criterio di integrabilità)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora, f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due partizioni di P e Q tali che:*

$$S(f,P) - s(f,Q) < \varepsilon$$

8.4.2 Funzioni costanti

Consideriamo nell'intervallo $[a,b]$ la funzione costante $f(x) = c$. Nella costruzione delle somme inferiori e superiori notiamo che qualunque sia la partizione, vale che

$$m_k = M_k = c \qquad \forall k$$

dunque

$$s(f,P) = c\sum_{k=0}^{n-1} = (n_{k+1} - x_k) = c(b-a) \qquad \text{e} \qquad S(f,P) = c\sum_{k=0}^{n-1} = (n_{k+1} - x_k)$$

dunque la funzione è integrabile e viene descritta dalla seguente notazione:

$$\int_a^b c\ dx = c(b-a)$$

8.4.3 Funzioni a scala

Le funzioni a scala sono tutte quelle funzioni che possono essere rappresentate con la seguente sommatoria:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi I_k$$

Dove N è un numero naturale, c_k è una costante, I_k è un intervallo disgiunto e χI_k è la funzione caratteristica di I_k che vale 1 in I_k e 0 altrove.

8.5 Integrale definito

Definizione 8.5.1. *Siano a e b due numeri reali e sia f una funzione limitata nell'intervallo $i = [min\{a,b\}, max\{a,b\}]$ e integrabile secondo Riemann su i. Si definisce integrale definito tra a e b nel seguente modo:*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \begin{cases} \textit{Integrale di Riemann} & \textit{se } a < b \\ 0 & \textit{se } a = b \\ -\displaystyle\int_b^a f(x)\ dx & \textit{se } a > b \end{cases}$$

Anche in questo integrale valgono alcune proprietà.

8.5.1 Linearità dell'integrale definito

Se f e g sono integrabili secondo Riemann in $[a,b]$, allora anche $f(x) + g(x)$ e $cf(x)$ lo sono e

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$
$$\int_a^b cf(x)\ dx = c\int_a^b f(x)\ dx$$

8.5.2 Additività rispetto all'intervallo

Siano a, b e $c \in \mathbb{R}$ e sia f una funzione integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[min\{a,b,c\}, max\{a,b,c\}]$. Allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

8.5.3 Monotonia dell'integrale

Siano f e g due funzioni integrabili in $[a,b]$ tali che:

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

8.5.4 Proprietà della media integrale

Teorema 8.5.1: Media integrale

Siano $a < b$ e f una funzione integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ indicati con $m = inf_{[a,b]}f$ e $M = sup_{[a,b]}f$ vale che

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Inoltre se f è una funzione continua esiste un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \text{media integrale} = f(x_0)$$

8.6 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il **teorema fondamentale del calcolo integrale**(o *teorema di Torricelli-Barrow*) è un teorema che stabilisce la continuità e la derivabilità della funzione integrale

Teorema 8.6.1: Teorema fondamentale del calcolo Integrale

Sia f una funzione continua su $[a,b]$, definiamo la funzione integrale

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad x \in [a,b]$$

Allora

1. La funzione Φ è derivabile in $[a,b]$ e $\Phi(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$
2. Data F primitiva qualunque di f in $[a,b]$ esiste una costante c tale che $F(x) = \Phi(x) + c$ per ogni $x \in [a,b]$.
3. Vale la formula fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dove F è una qualunque primitiva di f in $[a,b]$.

Dim. 1. Utilizziamo il rapporto incrementale per dimostrare che Φ è derivabile.

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{h}\int_x^{x+1} f(t)\,dt$$

Applicando la proprietà della media alla funzione F nell'intervallo tra x e $x+h$ si ha che esiste un punto x_h tra x e $x+h$ tale che:

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x_h)$$

Quando h tende a zero per il Teorema dei Carabinieri(§4.2.3) $x_h \to x$ e, per la continuità di f, $f(x_h) \to f(x)$, quindi:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = f(x)$$

□

Dim. 2. Sappiamo già dimostrare che due primitive qualunque della stessa funzione in un intervallo differiscono per una costante. □

Dim. 3. Sia F una qualunque primitiva dei f e calcoliamo, usando la precedente dimostrazione, che:

$$F(b)-F(a) = \Phi(b) + \cancel{c} - \Phi(a) - \cancel{c} = \int_a^b f(x)\,dx - 0 = \int_a^b f(x)\,dx$$

□

8.6.1 Derivazione di una funzione definita tramite integrale

Il teorema 8.6 permette di determinare le derivate di funzioni definite tramite integrali. Sia

$$L(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

dove g e h sono funzioni derivabili e f è una funzione continua. Allora

$$L'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

Dimostrazione. Per il teorema 8.6, presa una qualunque primitiva F di f si ha che

$$L(x) = F(h(x)) - F(g(x))$$

quindi si ha la tesi applicando la regola di derivazione di funzioni composte e ricordando che, per definizione di primitiva, $F'(t) = f(t)$. Osserviamo che mentre per calcolare la funzione L occorre trovare una primitiva per f, per calcolare L' questo non è necessario. □

8.6.2 Integrazione per parti

La formula di integrazione per parti per integrali indefiniti dice che

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Dunque, sempre applicando il teorema 8.6 si ha:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = U(b) - U(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - V(b) + V(a) =$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Si ottiene dunque la formula di integrazione per parti per integrali definiti:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

A titolo d'esempio si consideri il seguente integrale:

$$\int_0^1 xe^x\,dx \qquad g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x \qquad f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

Dunque otteniamo

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx = 1\cdot e - 0\cdot e^0 - [e^x]_0^1 = e - [e^1 - e^0] = 1$$

8.6.3 Integrazione per sostituzione

Riprendiamo la formula di integrazione per sostituzione per integrali indefiniti:

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx \qquad \textit{con } x = g(t)$$

cioè, se F è una primitiva di f, allora $F(g(t))$ è una primitiva di $f(g(t))g'(t)$, quindi:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt &= F(g(t))|_{t=a}^{t=b} = F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F|_{x=g(a)}^{x=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx\end{aligned}$$

8.7 Integrale improprio

Per poter definire l'integrale di Riemann di una funzione il requisito fondamentale è che essa sia limitata e che l'intervallo di integrazione sia limitato, tuttavia, qualora non fosse possibile definire le somme superiori e le somme inferiori della funzione, tale tipo di integrale non ha senso. In certi casi si parla dunque di **integrale improprio**.

8.7.1 Intervalli illimitati

Definizione 8.7.1. *Sia $f : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ tale che f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ per ogni $b > a$; si dice che la funzione f ha integrale improprio **convergente** in $[a, +\infty]$ se esiste finito*

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

in tal caso si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

*e si dice che f ha integrale improprio **divergente** se*

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \pm\infty$$

Esempio 1:
Determinare il carattere del seguente integrale:

$$\int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[\sqrt{x}\right]_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon\to0^+} = \left[\sqrt{4} - \cancel{\sqrt{\varepsilon}}\right] = 2 \textbf{ converge}$$

Esempio 2:
Determinare il carattere del seguente integrale:

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_4^M \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_4^M = \lim_{M\to+\infty} \left[-\cancel{\frac{1}{M}} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4} \textbf{ converge}$$

I precedenti esempi, tuttavia, riguardano integrali la cui illimitatezza riguardava un solo estremo dell'integrale. Ciò nonostante, esistono alcuni integrali la cui illimitatezza riguarda entrambi gli estremi; in tali circostanze si procede *spezzando* l'integrale in due parti e risolvendole entrambe con il metodo utilizzato per i precedenti esempi.

Esempio 3:
Determinare il carattere del seguente integrale:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{3}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \lim_{M\to-\infty}\int_M^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{M\to+\infty}\int_3^M \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \lim_{M\to-\infty}\left[\arctan x\right]_M^3 + \lim_{M\to+\infty}\left[\arctan x\right]_3^M \\ &= \lim_{M\to-\infty}\left[\arctan(3) - \underbrace{\arctan(M)}_{-\frac{\pi}{2}}\right] + \lim_{M\to+\infty}\left[\underbrace{\arctan(M)}_{\frac{\pi}{2}} - \arctan(3)\right] = \pi \ \textbf{converge}\end{aligned}$$

8.7.2 Teoremi di confronto

Nello studio degli integrali impropri l'obiettivo primario è quello di studiare il **carattere**, vale a dire distinguere gli integrali convergenti da quelli divergenti. Per questo motivo non è necessario calcolare esplicitamente la primitiva di un integrale(come visto negli esempi precedenti) per poi determinare il limite per $b \to \pm\infty$, bensì è sufficiente applicare uno dei seguenti metodi di confronto.

Teorema 8.7.1: Criterio del confronto diretto

Siano $f, g\ :\ [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni continue tali che

$$0 \le f(x) \le g(x) \qquad \forall x \in [a, +\infty)$$

Allora:

1. Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge;
2. Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge a $+\infty$ allora anche $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge a $+\infty$.

Dimostrazione. Consideriamo le funzioni

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad G(b) = \int_a^b g(x)\,dx$$

sono funzioni crescenti e positive tali che

$$F(b) \le G(b) \qquad \forall b > a$$

grazie alla proprietà di monotonia dell'integrale(8.5.3). Da questa disuguaglianza segue la tesi, infatti:

1. se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, allora esiste finito $\lim_{b\to+\infty} G(b)$, quindi anche $\lim_{b\to+\infty} F(b)$ è finito, cioè $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge;
2. Se $\lim_{b\to+\infty} F(b) = +\infty$, allora anche $\lim_{b\to+\infty} G(b) = +\infty$

□

Esempio:
Studiare il carattere del seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

è convergente, infatti $0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$ *con* $x \ge 1$ e

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M e^{-x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^M = \lim_{M\to+\infty}\left[-e^{-M} + e^{-1}\right] = \frac{1}{e}$$

Teorema 8.7.2: Confronto asintotico

Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e positive se $f \sim_{+\infty} g$ per $x \to +\infty$ allora:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge/diverge a} + \infty \iff \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ converge/diverge a} + \infty$$

Ciò significa che se esiste l tale che

$$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Allora:

1. Se $0 < l < +\infty$, allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere;
2. Se $l = 0$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge;
3. Se $l = +\infty$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Dimostrazione. (caso 1) Supponiamo che $0 < l < 1$, per definizione del limite esiste $k > 0$ tale che:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \frac{1}{2} \qquad \forall x > k$$

cioè, data la positività di g

$$\frac{1}{2} g(x) < f(x) < \frac{3l}{2} g(x) \qquad \forall x > k$$

Si può usare allora il teorema di confronto diretto per concludere che se $\int_k^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, allora per la prima disuguaglianza, anche $\int_k^{+\infty} \frac{1}{2} g(x)\,dx$ e $\int_k^{+\infty} g(x)\,dx$ convergono. D'altra parte, per la seconda disuguaglianza, se $\int_k^{+\infty} f(x)$ diverge anche $\int_k^{+\infty} \frac{3l}{2} g(x)\,dx$ e $\int_k^{+\infty} g(x)\,dx$ divergono. In pratica $\int_k^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_k^{+\infty} g(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere. □

Dimostrazione. (caso 2 e caso 3) Supponiamo che $l = 0$, sempre per la definizione di limite, esiste $k > 0$ tale che $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$ per ogni $x > k$, quindi, per la positività di g $f(x) < g(x) \quad \forall x > k$. In modo analogo si può dimostrare il terzo caso. □

Esempio:
Determinare il carattere del seguente integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+5}{x^3+x^2+1}\,dx \Rightarrow \frac{x+5}{x^3+x^2+1} \sim \frac{1}{x^2} \textit{ per } x \to +\infty$$

Allora visto che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

converge, il criterio del confronto asintotico ci permette di concludere che converge anche l'integrale di partenza.

8.7.3 Funzioni illimitate

Definizione 8.7.2. *Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ tale che f è integrabile secondo Riemann in $[a+\varepsilon, b]$ per ogni $0 < \varepsilon < b - a$, ma f è illimitata quando $x \to a^+$. Poniamo allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

si dice che l'integrale improprio è ***convergente*** *se tale limite esiste finito; mentre si dice che è* ***divergente*** *se tende a $\pm\infty$, infine si dice che è* ***indeterminato*** *se tale limite non esiste. In modo analogo si può definire l'integrale improprio di una funzione illimitata nell'estremo destro dell'intervallo (a, b).*

Esempio:
Sia $a > 0$ e consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \ in \ (0,1]$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si vuole determinare per quali valore di α l'integrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge. Osserviamo, innanzitutto, che f è continua in $(0,1]$, quindi è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo della forma $[\varepsilon, 1]$ con $0 < \varepsilon < 1$. Calcoliamo, dunque

$$\int_\varepsilon^1 f(x)\ dx = \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ se \ \alpha \neq 1 \\ -\ln\varepsilon \ se \ \alpha = 1 \end{cases}$$

quindi $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge a $\frac{1}{1-\alpha}$ per $0 < \alpha < 1$ e diverge a $+\infty$ per $\alpha \geq 1$.
A tal proposito è possibile ridefinire i teoremi del confronto diretto già ampiamente descritti nelle precedenti sezioni:

Teorema 8.7.3: Confronto diretto

Siano $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili secondo Riemann in $[a+\varepsilon, b]$ per ogni $0 < \varepsilon < b-a$, illimitate per $x \to a$ e tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \ \forall x \in (a,b]$$

Allora:

(I) se $\int_a^b g(x)\ dx$ converge, allora $\int_a^b f(x)\ dx$ converge;

(II) se $\int_a^b f(x)\ dx$ diverge, allora $\int_a^b g(x)\ dx$ diverge.

Teorema 8.7.4: Confronto asintotico

Siano $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}^+$ positive e integrabili in $[\varepsilon, b]$ per ogni $0 < \varepsilon < b-a$, illimitate per $x \to a$ e tali che

$$\exists l = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Allora:

(I) se $0 < l < +\infty$, allora $\int_a^b f(x)\ dx$ e $\int_a^b g(x)\ dx$ hanno lo stesso carattere;

(II) se $l = 0$ e $\int_a^b g(x)\ dx$ converge, allora anche $\int_a^b f(x)\ dx$ converge;

(III) se $l = +\infty$ e $\int_a^b g(x)\ dx$ diverge, allora anche $\int_a^b f(x)\ dx$ diverge.

8.7.4 Convergenza assoluta

I criteri di confronto delle sezioni precedenti, valgono per le funzioni positive. Tuttavia, tali criteri, possono essere applicati anche alle funzioni negative semplicemente cambiando il segno dentro e fuori all'integrale. Non è però possibile applicare i criteri di confronto alle funzioni che cambiano infinite volte segno vicino al punto di improprietà. In tali casi è dunque possibile forzare la funzione ad essere positiva con l'ausilio del valore assoluto.

Definizione 8.7.3. *Si dice che l'integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$$

converge assolutamente se converge

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\ dx$$

Teorema 8.7.5:

Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\ dx$ converge, allora anche $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ converge.

Dimostrazione. Introduciamo le funzioni *parte positiva* e *parte negativa* così definite:

$$t^+ = \begin{cases} t\ se\ t > 0 \\ 0\ se\ t \leq 0 \end{cases} \qquad e \qquad t^- = \begin{cases} 0\ se\ t \geq 0 \\ -t\ se\ t < 0 \end{cases}$$

Sono entrambe funzioni a valori positivi e si ha, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$t = t^+ - t^-, \qquad |t| = t^+ + t^-$$

Possiamo quindi, per $x \in [a, +\infty)$ osservare che

$$|f(x)| = f(x)^+ + f(x)^-$$

quindi

$$0 \leq f(x)^+ \leq |f(x)|\ e\ 0 \leq f(x)^- \leq |f(x)|$$

per il teorema del confronto diretto quindi anche $f(x)^+$ e $f(x)^-$ hanno integrali impropri convergenti. Allora

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\ dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_a^b (f(x)^+ - f(x)^-)\ dx \\ &= \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)^+\ dx - \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)^-\ dx \\ &= \int_a^{+\infty} f(x)^+\ dx - \int_a^{+\infty} f(x)^-\ dx\end{aligned}$$

□

8.8 Esercizi

Esercizio 8.8.1.

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}\, dx$$

Risposta 8.8.1. *Si effettua una sostituzione, per cui:*

$$e^x = t \qquad x = \log t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\, dt$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{t}{t^2 - 3t + 2}\,\frac{1}{t}\, dt = \int \frac{1}{t^2 - 3t + 2}\, dt = \int \frac{1}{(t-1)(t-2)}\, dt \\
&\frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t-2)}{(t-2)(t-1)} = \frac{(A+B)t - A - 2B}{(t-2)(t-1)} \\
&\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ B - 2B - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} \right) dt = log(t-2) - log(t-1) + c \\
&\qquad \Rightarrow \boxed{log(e^x - 2) - log(e^x - 1) + c} = log \left| \frac{e^x - 2}{e^x - 1} \right| + c
\end{aligned}$$

Esercizio 8.8.2.

$$\int \frac{3x - 4}{x^2 - 6x + 8}\, dx$$

Risposta 8.8.2. *Essendo il denominatore riducibile si utilizza il metodo dei fratti semplici:*

$$\begin{aligned}
&\int \frac{3x-4}{(x-4)(x-2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-4)}{(x-4)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - 4B}{(x-4)(x-2)} \\
&\begin{cases} A + B = 3 \\ -2A - 4B = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 - B \\ -2(3 - B) - 4B + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 - B \\ -6 + 2B - 4B + 4 = 0 \end{cases} \\
&\qquad \Rightarrow \begin{cases} A = 3 + 1 \\ +\frac{\cancel{2}B}{\cancel{2}} = -\frac{\cancel{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -1 \end{cases} \\
&\qquad \Rightarrow \frac{3x-4}{(x-4)(x-2)} = \frac{4}{x-4} - \frac{1}{x-2} \\
&\qquad \Rightarrow \int \left[\frac{4}{x-4} - \frac{1}{x-2} \right] dx = \boxed{4\log(x-4) - \log(x-2)\, dx + c}
\end{aligned}$$

Esercizio 8.8.3.

$$\int_9^{16} \frac{\sqrt{t}-3}{t-3\sqrt{t}+2}\, dt$$

Risposta 8.8.3. *Si procede al cambiamento di variabile:*

$$t = y^2 \qquad dt = 2y\ dy$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int \frac{y-3}{2-3y+y^2}\, 2ydy = 2\int \frac{y^2+3y}{y^2-3y+2}\ dy = 2\int \left(1-\frac{2}{y^2-3y+2}\right)\ dy = \\
&\Rightarrow 2\int dy - 4\int \frac{1}{(y-1)(y-2)}\ dy \\
&\Rightarrow \frac{1}{(y-1)(y-2)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2} = \frac{A(y-2)+B(y-1)}{(y-1)(y-2)} = \frac{(A+B)y-2A-B}{(y-1)(y-2)} \\
&\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ -2(-B)-B-1=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2B-B-1=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases} \\
&2\int dy - 4\int \frac{1}{(y-1)(y-2)}\ dy = 2y - 4\int \left(\frac{-1}{y-1}+\frac{1}{y-2}\right)\ dy = 2y + 4log(y-1) + 4log(y-2) + c \\
&\Rightarrow \int \frac{\sqrt{t}-3}{t-3\sqrt{t}+2}\ dt = 2\sqrt{t} + 4log\left(\sqrt{t}-1\right) - 4log\left(\sqrt{t}-2\right) + c \\
&= 2\sqrt{t} + 4log\left|\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}-2}\right| + c \\
&\Rightarrow \int_9^{16} \frac{\sqrt{t}-3}{t-3\sqrt{t}+2}\ dt = 2\sqrt{16} + 4log\left|\frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}-2}\right| - 2\sqrt{9} + 4log\left|\frac{\sqrt{9}-1}{\sqrt{9}-2}\right| \\
&\Rightarrow \boxed{2+4\log 3-\log 2}
\end{aligned}$$

Esercizio 8.8.4. *Risolvere il seguente integrale per parti:*

$$\int x^2e^x\ dx$$

Risposta 8.8.4.

$$\begin{aligned}
&\int x^2e^x\ dx = x^2e^x - \int 2xe^x\ dx \\
&\Rightarrow x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x\ dx\right) \Rightarrow x^2e^x - (2xe^x - 2e^x + c) \\
&\Rightarrow x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - c \Rightarrow \boxed{e^x(x^2-2x+2)-c}
\end{aligned}$$

Esercizio 8.8.5. *Risolvere il seguente integrale per parti:*

$$\int x\sin(x)\cdot\cos(x)\ dx$$

Risposta 8.8.5.

$$\begin{aligned}
\int x\sin(x)\cdot\cos(x)\ dx &= -\frac{x}{2}\cos^2(x) - \int -\frac{1}{2}\cos^2(x) \\
&= -\frac{x}{2}\cos^2(x) + \frac{1}{2}\int \cos^2(x) \\
&= \boxed{-\frac{x}{2}\cos^2(x) + \frac{1}{4}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{4}x + c}
\end{aligned}$$

Esercizio 8.8.6. *Risolvere il seguente integrale per parti:*

$$\int x^2 \sin x \; dx$$

Risposta 8.8.6.

$$\int x^2 \sin(x) \; dx = -x^2 \cos(x) - \int -2x \cos(x) \; dx = -x^2 \cos(x) + \int 2x \cos(x) \; dx$$
$$\Rightarrow -x^2 \cos(x) + \left(2x \sin(x) - \int 2 \sin(x) \; dx\right)$$
$$= \boxed{-x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + c}$$

Esercizio 8.8.7. *Risolvere il seguente integrale per parti:*

$$\int \sqrt{1+x^2} \; dx$$

Risposta 8.8.7.

$$\int \sqrt{1+x^2} \; dx = \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2} \; dx \qquad \begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x^2} \\ g'(x) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ g(x) = x \end{cases}$$
$$\Rightarrow x\sqrt{1+x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \; dx$$
$$\Rightarrow x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} \; dx$$
$$\int \sqrt{1+x^2} \; dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \; dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; dx$$
$$2\int \sqrt{1+x^2} \; dx = x\sqrt{1+x^2} + \arcsin x + c$$
$$\int \sqrt{1+x^2} \; dx = \boxed{\frac{x\sqrt{1+x^2} + \arcsin x}{2} + c}$$

Esercizio 8.8.8. *Risolvere il seguente integrale con il metodo di sostituzione:*

$$\int e^{3x-1} \; dx$$

Risposta 8.8.8.

$$\int e^{3x-1} \; dx \qquad t = 3x-1 \qquad x = \frac{1+t}{3} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \; dx \Rightarrow \frac{1}{3} \; dt$$
$$\Rightarrow \int e^t \frac{1}{3} \; dt = \frac{1}{3} \int e^t \; dt \Rightarrow \frac{1}{3} e^t + c \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3} e^{3x-1} + c}$$

Esercizio 8.8.9. *Risolvere il seguente integrale con il metodo di sostituzione:*

$$\int \frac{e^x}{e^x+2} \; dx$$

Risposta 8.8.9.

$$\int \frac{e^x}{e^x+2}\ dx \qquad t = e^x \qquad x = ln(t) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}\ dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cancel{t}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}}{t+2}\ dt \Rightarrow \int \frac{1}{t+2}\ dt \Rightarrow ln|t+2| + c \Rightarrow \boxed{ln|e^x+2|+c}$$

Esercizio 8.8.10. *Risolvere il seguente integrale con il metodo di sostituzione:*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}\ dx$$

Risposta 8.8.10.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}\ dx \qquad \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \qquad \frac{dx}{dt} = 2tdx \Rightarrow 2tdt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{t+t^3}\cdot 2tdt \Rightarrow \int \frac{2t}{t+t^3}\ dt \Rightarrow 2\int \frac{t}{t+t^3}\ dt = 2\int \frac{\cancel{t}}{\cancel{t}(1+t^2)}\ dt$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{1}{1+t^2}\ dt \Rightarrow 2\cdot\arctan(t)+c \Rightarrow \boxed{2\cdot\arctan(\sqrt{2})+c}$$

Esercizio 8.8.11. *Risolvere il seguente integrale con il metodo di sostituzione:*

$$\int \frac{3e^x}{1+e^{2x}}\ dx$$

Risposta 8.8.11.

$$\int \frac{3e^x}{1+e^{2x}}\ dx \iff 3\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \iff 3\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} \qquad t = e^x \Rightarrow x = ln(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}\ dx \Rightarrow \frac{1}{t}\ dt$$

$$3\int \frac{\cancel{t}}{1+t^2}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\ dt = 3\int \frac{1}{1+t^2}\ dt \Rightarrow 3\cdot\arctan(t)+c \Rightarrow \boxed{3\cdot\arctan(e^x)+c}$$

Esercizio 8.8.12. *Risolvere il seguente integrale definito:*

$$\int_0^1 (3x^2-x+2)\ dx$$

Risposta 8.8.12.

$$\int_0^1 (3x^2-x+2)\ dx \Rightarrow \int (3x^2-x+2)\ dx = x^3 - \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

$$\int_0^1 (3x^2-x+2)\ dx = \left(1^3 - \frac{1^2}{2} + 2(1)\right) - \left(0^2 - \frac{0^2}{2} + 2(0)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + 2 = \boxed{\frac{5}{2}}$$

Esercizio 8.8.13. *Risolvere il seguente integrale definito:*

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 (3x^3-4x^2+3x-1)\ dx$$

Risposta 8.8.13.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 (3x^3-4x^2+3x-1)\ dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + c$$

$$= \left(\frac{3}{4}\cdot 1^4 - \frac{4}{3}\cdot 1^3 + \frac{3}{2}\cdot 1^2 - 1\right) - \left[\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + c\right]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - 1 + c - \frac{3}{64} - \frac{1}{6} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} - c$$

$$= \frac{144-256+288-192-9-32-72-96}{192} = -\frac{225}{192} = \boxed{-\frac{75}{64}}$$

Esercizio 8.8.14. *Risolvere il seguente integrale definito:*

$$\int_1^e \frac{x^2 - 3x^3 + 1}{2x^3}\ dx$$

Risposta 8.8.14. *È possibile risolverlo sfruttando la linearità dell'integrale:*

$$\begin{aligned}
&\int_1^e \frac{x^2 - 3x^3 + 1}{2x^3}\ dx \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\int_1^e \frac{x^2}{x^3}\ dx - \int_1^e \frac{3x^3}{x^3} + \int_1^e \frac{1}{x^3}\ dx\right] \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\int_1^e \frac{1}{x}\ dx - \int_1^e 3\ dx + \int_1^e \frac{1}{x^3}\ dx\right] \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\left\{[\log(x)]_1^e - [3x]_1^e + \left[\frac{1}{2x^2}\right]_1^e\right\} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\left\{1 - 3x + 3 - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}\right\} = \boxed{\frac{1}{2}\left\{\frac{9}{2} - 3e - \frac{1}{2e^2}\right\}}
\end{aligned}$$

Esercizio 8.8.15. *Risolvere il seguente integrale irrazionale:*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2}\ dx$$

Risposta 8.8.15.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{(x+1)(x-2)}\ dx = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax - 2A + Bx + B}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A + B}{(x+1)(x-2)} \\
&\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ -2A - A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ -3A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{3} \\ A = -\frac{1}{3} \end{cases} \\
&\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2 - x - 2}\right)\ dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}\right)\ dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{x-2}\right)\ dx \\
&= -\frac{1}{3} \cdot \log|x+1| + \frac{1}{3} \cdot \log|x-2| + c \\
&F(1) = -\frac{1}{3} \cdot \log|2| + \frac{1}{3} \cdot \log|1| + c = -\frac{1}{3} \cdot \log|2| \\
&F(0) = -\frac{1}{3} \cdot \log|1| + \frac{1}{3} \log|2| + c = \frac{1}{3} \cdot \log|2| \\
&\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2 - x - 2}\right)\ dx = F(1) - F(0) = -\frac{1}{3} \cdot \log|2| - \frac{1}{3} \cdot \log|2| = \boxed{-\frac{2}{3} \cdot \log(2)}
\end{aligned}$$

Esercizio 8.8.16. *Risolvere il seguente integrale improprio e determinarne il carattere:*

$$\int_0^1 \frac{\log(x)}{x^2}\ dx$$

Risposta 8.8.16.

$$\int \frac{\log(x)}{x^2}\ dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \log(x)\ dx \qquad \begin{cases} f(x) = \log(x) \\ g'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = x^{-2+1} = x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(x)}{x^2}\ dx &= -\frac{1}{x}\log(x) - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\ dx \\ &= -\frac{1}{x}\log(x) + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\ dx \\ &= -\frac{1}{x}\log(x) + \int \frac{1}{x^2}\ dx \\ &= -\frac{1}{x}\log(x) + \int x^{-2+1} \Rightarrow -\frac{1}{x}\log(x) + \int x^{-1} \\ &= \boxed{-\frac{\log(x)}{x} - \frac{1}{x} + C} \text{ \textit{è continua in} } (0,1] \text{ \textit{dunque è improprio solo in 0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\log(x)}{x^2}\ dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\log(x)}{x^2}\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\left(-\frac{\log(x)}{x} - \frac{1}{x}\right)\right]_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\left(-\cancel{\frac{\log(1)}{1}} - 1\right) - \left(-\frac{\log(\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right]_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} -1 + \frac{\overbrace{\log(\varepsilon)}^{-\infty}\left(1 - \overbrace{\frac{1}{\log(\varepsilon)}}^{0}\right)}{\underbrace{\varepsilon}_{0^+}} = -1 + (-\infty) = \boxed{-\infty} \text{ \textit{diverge}} \end{aligned}$$

Esercizio 8.8.17. *Studiare il carattere del seguente integrale:*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1}\ dx$$

Risposta 8.8.17. *Visto che*

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Allora siccome

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\ dx = 2\sqrt{x}$$

e

$$\lim_{M \to +\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^M = \left[2\sqrt{M} - 2\sqrt{1}\right] = +\infty$$

Allora anche l'integrale iniziale diverge a $+\infty$.

Esercizio 8.8.18. *Studiare il carattere del seguente integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{2x}+2e^x}{e^{2x}-1}\ dx$$

Risposta 8.8.18. *L'integrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{2x}+2e^x}{e^{2x}-1}$ *è continuo in $[1,+\infty]$(in quanto $x \neq 1$), dunque è improprio solo in 1.*

Applicando la condizione necessaria, si nota che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+2e^x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^{2x}}\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}{\cancel{e^{2x}}\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)}=1$$

Visto che la condizione necessaria non è soddisfatta si può dedurre che l'integrale iniziale diverge. Inoltre, convenuto il fatto che la funzione è positiva, si intuisce che l'integrale diverge a $+\infty$.

Esercizio 8.8.19. *Determinare il carattere del seguente integrale(con il confronto diretto):*

$$\int_1^{+\infty}\frac{1+\sin x}{x^2}\ dx$$

Risposta 8.8.19. *L'integrale* $\int_1^{+\infty}\frac{1+\sin x}{x^2}\ dx$ *è compreso tra* $0\le\frac{1+\sin x}{x^2}\le\frac{1}{x}$, *dunque visto che* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\ dx\Rightarrow\int\frac{1}{x}\ dx\Rightarrow[\ln(x)]_1^{+\infty}+c=+\infty$, *allora anche l'integrale iniziale diverge.*

Esercizio 8.8.20. *Determinare il carattere del seguente integrale(con il confronto asintotico):*

$$\int_0^1\frac{1}{ln(x)}\ dx$$

con la funzione $\frac{1}{1-x}$

Risposta 8.8.20.

$$\int_0^1\frac{1}{ln(x)}\ dx=[\ln|1-x|]_0^1=[ln(0)-ln(1)]_0^1=-\infty-0=-\infty$$

Dunque anche l'integrale di partenza diverge.

Esercizio 8.8.21. *Determinare il carattere del seguente integrale(con il confronto asintotico):*

$$\int_0^1\frac{e^x}{x+\sqrt{x}}\ dx$$

con la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$

Risposta 8.8.21.

$$\int_0^1\frac{e^x}{x+\sqrt{x}}\ dx=\left[2\sqrt{x}\right]_0^1=[2-0]=2$$

Allora anche l'integrale di partenza converge.

Esercizio 8.8.22. *Risolvere il seguente integrale indefinito:*

$$\int e^x\cos(x)\ dx$$

Risposta 8.8.22. *Possiamo risolvere questo integrale applicando due volte l'integrazione per parti:*

$$\int e^x\cos(x)\ dx$$

$$\Rightarrow e^x\sin(x)-\int e^x\sin(x)\ dx$$

$$\Rightarrow\int e^x\cos(x)\ dx=e^x\sin(x)-\left[-e^x\cos(x)-\int -e^x\cos(x)\ dx\right]$$

$$\Rightarrow\int e^x\cos(x)\ dx=e^x\sin(x)+e^x\cos(x)-\int e^x\cos(x)\ dx$$

$$\Rightarrow 2\int e^x\cos(x)\ dx=e^x\sin(x)+e^x\cos(x)$$

$$\Rightarrow\int e^x\cos(x)\ dx=\boxed{\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}+c}$$

Esercizio 8.8.23. *Risolvere il seguente integrale indefinito:*

$$\int \log(x^2 - 6x + 6)\ dx$$

Risposta 8.8.23. *Per risolverlo possiamo utilizzare l'integrazione per parti:*

$$\int \log(x^2 - 6x + 6)\ dx \qquad \begin{cases} f(x) = \log(x^2 - 5x + 6) \\ g'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \dfrac{2x-5}{x^2-5x+6} \\ g(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int \log(x^2 - 6x + 6)\ dx &\Rightarrow x\log(x^2-5x+6) - \int \frac{x(2x-5)}{x^2-5x+6} \\
&\Rightarrow x\log(x^2-5x+6) - \int \left(\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + 2\right)\ dx \\
&\Rightarrow x\log(x^2-5x+6) - \\
2\int \frac{1}{x-2}\ dx &- 3\int \frac{1}{x-3}\ dx - 2\int 1\ dx \\
&\Rightarrow -2\int \frac{1}{u}\ du - 3\int \frac{1}{x-3}\ dx - 2\int 1\ dx \qquad \textit{con } u = x-2 \\
&\Rightarrow -2\log(u) + x\log(x^2-5x+6) - 3\int \frac{1}{x-3} - 2\int 1\ dx \\
&\Rightarrow -2\log(u) + x\log(x^2-5x+6) - 3\int \frac{1}{s}\ ds - 2\int 1\ dx \qquad \textit{con } s = x-3 \\
&\Rightarrow -2\log(u) + x\log(x^2-5x+6) - 3\log(s) - 2x + c \\
&\Rightarrow -2\log(u) + x\log(x^2-5x+6) - 2x - 3\log(x-3) + c \qquad \textit{si risostituisce } s = x-3 \\
&\Rightarrow x\log(x^2-5x+6) - 2x - 3\log(x-3) - 2\log(x-2) + c \qquad \textit{si risostituisce } u = x-2 \\
&\Rightarrow \boxed{x(\log(x^2-5x+6) - 2) - 3\log(x-3) - 2\log(x-2) + c}
\end{aligned}$$

Esercizio 8.8.24. *Risolvere il seguente integrale indefinito:*

$$\int \frac{x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\ dx$$

Risposta 8.8.24. *Iniziamo eseguendo la divisione polinomiale:*

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -2x^4 & -3x^3 & +2x^2 & -4x & +3 & x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & +x^3 & -2x^2 & & & x^2 \qquad -2 \\ \cline{1-4}
-- & -- & -2x^3 & -- & -4x & +3 & \\
 & & +2x^3 & -4x^2 & -2x & +4 & \\ \cline{3-6}
 & & -- & -4x^2 & -6x & +7 &
\end{array}
$$

Dunque possiamo riscrivere l'integrale come $\displaystyle\int (x^2 - 2)\ dx + \int \frac{-4x^3 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\ dx$
Risolviamo il secondo integrale con il metodo dei fratti semplici(in quanto il primo è immediato):

$$\int \frac{-4x^3 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\ dx = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(A+B+C) + x(-A-3B) - 2A + 2B - C}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ -A - 3B = -6 \\ -2A - 2B - C = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = \frac{3}{2} \\ C = -7 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{7}{x-2}$$

$$\Rightarrow \int (x^2 - 2)\ dx + \int \frac{-4x^3 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\ dx = \int x^2\ dx - 2\int dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\ dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1}\ dx - 7\int \frac{1}{x-2}\ dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}\cdot\log(x-1) + \frac{3}{2}\cdot\log(x+1) - 7\cdot\log(x-2) + c}$$

Esercizio 8.8.25. *Data la funzione* $f(x) = \dfrac{e^{2x} + 2e^x}{e^{2x} - 1}$*:*

1. *Stabilire se* $\int_1^4 f(x)\ dx$ *è un integrale di Riemann o un integrale improprio;*
2. *Calcolare l'integrale indefinito associato a* $f(x)$*;*
3. *Calcolare la media integrale di* f *nell'intervallo* $[1, 4]$

Risposta 8.8.25. *Il dominio della funzione* f *è definito come* $D\ :\ e^{2x} - 1 \neq 0 \Rightarrow e^{2x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \qquad D : \mathbb{R} - \{0\}$, *dunque nell'intervallo* $[1, 4]$ *la funzione è continua, perciò l'integrale iniziale è un integrale di Riemann.*

$$\int f(x)\ dx \qquad t = e^x \qquad x = \log t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\ dt$$

$$\int \frac{e^{2x} + 2e^x}{e^{2x} - 1}\ dx \Rightarrow \int \frac{t^2 + 2t}{t^2 - 1} \cdot \frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{t + 2t}{t^2 - 1}\ dt$$

$$\frac{t + 2t}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{At - A + Bt + B}{(t+1)(t-1)} = \frac{(A+B)t - A + B}{(t-1)(t+1)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B + 1 \\ 2B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ B = 3/2 \end{cases}$$

$$\int \frac{t + 2t}{t^2 - 1}\ dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1}\ dt + \frac{3}{2} \int \frac{1}{t-1}\ dt$$

$$= -\frac{1}{2} \log(t+1) + \frac{3}{2} \log(t-1) + c$$

$$\int \frac{e^{2x} + 2e^x}{e^{2x} - 1}\ dx = \boxed{-\frac{1}{2} \log(e^x + 1) + \frac{3}{2} \log(e^x - 1) + c}$$

Infine, per calcolare la media integrale, è sufficiente applicare la formula $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$*:*

$$m = \frac{1}{4-1} \int_1^4 f(x)\ dx = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2} \log(e^x + 1) + \frac{3}{2} \log(e^x - 1) \right]_1^4$$

$$= \boxed{\frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2} \log(e^4 + 1) + \frac{3}{2} \log(e^4 - 1) + \frac{1}{2} \log(e + 1) - \frac{3}{2} \log(e - 1) \right]}$$

Capitolo 9

Serie numeriche

L'idea alla base delle serie è quella di dover sommare infiniti numeri tra di loro (ad esempio tutti positivi) al fine di ottenere un valore finito. Questo concetto, seppur paradossale, è alla base di molti ragionamenti quotidiani; dividendo, ad esempio, un segmento lungo 10 *cm* in due parti uguali e ripetendo tale processo all'infinito, si ottengono valori sempre più piccoli ma comunque senza mai poter terminare. Questo concetto ha senso in quanto, grazie all'assioma di completezza dei numeri reali(§2.3.1), è possibile trovare un numero intermedio tra due numeri reali. Una serie numerica è rappresentata dal seguente simbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Gli elementi della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si chiamano **termini della serie**. mentre il simbolo $+\infty$ indica il passaggio al limite e non una somma infinita, la quale non avrebbe senso di esistere.

Definizione 9.0.1. *(Somme parziali) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica. Definiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ la somma parziale k-esima della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ come*

$$s_k = a_1 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

A questo punto è possibile dare una definizione formale di serie numerica:

Definizione 9.0.2. *Data la successione dei termini $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ la successione delle somme parziali. Si definisce:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} s_k$$

*Se $\lim_{k\to+\infty} s_k$ è finito allora la serie è **convergente** e il valore del limite prende il nome di **somma della serie**.*
*Se $\lim_{k\to+\infty} s_k = \pm\infty$ allora la serie è **divergente**.*
*Se la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite allora la serie viene detta **indeterminata**.*

9.1 Serie geometrica

La **serie geometrica** è una delle serie numeriche più ricorrenti nonché una delle pochissime di cui si riesce a calcolare in modo immediato la somma. È dunque rilevante analizzarne le caratteristiche e i dettagli fondamentali in quanto giocherà un ruolo fondamentale nella risoluzione di esercizi ben più complessi.

Definizione 9.1.1. *Si chiama serie geometrica la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

*dove il numero $q \in \mathbb{R}$ viene chiamato **ragione della serie**.*

Il risultato di questa serie può essere calcolato utilizzando il prodotto notevole:

$$(1+q+q^2+\cdots+q^k)(1-q)=1-q^{k+1}$$

possiamo dunque scrivere che, per $q\neq 1$

$$s_k=1+q+q^2+\cdots+q^k=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

mentre per $q=1$

$$s_k=1+q+q^2+\cdots+q^k=1+1+\cdots+1=k+1$$

$$s_k=\begin{cases}\frac{1-q^{k+1}}{1-q} & \textit{se } q\neq 1\\ k+1 & \textit{se } q=1\end{cases} \quad \textit{e} \quad \lim_{k\to+\infty} s_k=\begin{cases}+\infty & \textit{se } q\geq 1\\ \frac{1}{1-q} & \textit{se } |q|<1\\ \nexists & \textit{se } q\leq -1\end{cases}$$

Dunque, la serie geometrica converge se $|q|<1$, diverge se $q\geq 1$ ed è indeterminata per $q\leq -1$.

9.2 Serie telescopica

La **serie telescopica** è un'altra tipologia di serie di cui si riesce a calcolare esplicitamente la somma; anch'essa ricopre un ruolo fondamentale nella risoluzione di esercizi più complessi ed è dunque rilevante studiarne le proprietà e le caratteristiche.

Definizione 9.2.1. *Data una successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *si definisce la serie telescopica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_{n+1}-b_n)$$

i termini della serie sono $a_n=b_{n+1}-b_n$ *e la somma parziale* k*-esima è*

$$s_k=\sum_{n=1}^{k}(b_{n+1}-b_n)=b_{k+1}-b_1$$

I termini della serie sono $a_n=b_{n+1}-b_n$ *e la somma parziale* k*-esima è*

$$s_k=\sum_{n=1}^{k}(b_{n+1}-b_n)$$

dunque la serie telescopica converge se e sole se la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

9.3 Serie di Mengoli

La **serie di Mengoli** è un caso particolare di serie telescopica, essa è definita nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

il fatto che essa sia un caso particolare di serie telescopica è dovuto al seguente fatto:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

dunque è la serie telescopica che corrisponde alla successione $b_n=-\frac{1}{n}$. La serie di Mengoli, inoltre, è **convergente** e la sua somma vale

$$s=\lim_{k\to+\infty}\frac{-1}{k+1}+1=1$$

9.4 Serie a termini positivi

Lemma 9.4.1. *Le serie a termini positivi possono essere solo convergenti o divergenti a $+\infty$.*

Dimostrazione. Se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora la successione delle somme parziali è crescente, infatti:

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1} \geq s_k \ \forall \in \mathbb{N}$$

Dunque la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ può solo convergere o divergere a $+\infty$. □

9.5 Condizione necessaria per la convergenza

Teorema 9.5.1: Condizione necessaria alla convergenza

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Dimostrazione. Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente, per definizione

$$\lim_{k\to+\infty} s_k = S \in \mathbb{R}$$

Osserviamo dunque che

$$a_n = s_n - sn - 1$$

quindi

$$\lim_{k\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0$$

□

9.6 Serie armonica

La **serie armonica** è una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

a termini positivi. Essa può quindi solo essere convergente o divergente a $+\infty$. Essa soddisfa il teorema 9.5. Mostriamo però che la serie armonica non è convergente, infatti se essa convergesse dovrebbe accadere che

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n} - s_n = s - s = 0$$

mentre invece

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + (n\ volte) + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Il precedente esempio ci permette dunque di dimostrare che l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx$$

non è convergente, infatti

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\ dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Siccome la serie armonica diverge a $+\infty$ allora

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

9.7 Serie resto

Per le serie numeriche, come per gli integrali impropri, quello che conta per la convergenza, non sono i primi termini della serie, ma quelli con indice grande. Questo concetto si esprime bene definendo le serie resto.

Definizione 9.7.1. *Data la serie numerica* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e fissato un numero naturale* N*, la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *viene detta* ***serie resto***.

Dimostrazione. Sia s_k la somma parziale k-esima della serie originale

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

invece sia t_k la somma parziale k-esima della serie resto

$$t_k = \sum_{n=N}^{k} a_n \qquad \forall k \geq N$$

si intuisce che $s_k = S_{N-1} + t_k$ e quindi $\lim_{k\to+\infty} s_k$ è finito se e solo se lo è pure $\lim_{k\to+\infty} t_k$. ☐

9.8 Criteri per serie a termini positivi

Come già osservato ampiamente le serie a termini positivi non oscillano mai, esse possono solo convergere o divergere a $+\infty$. Vediamo dunque dei criteri che valgono solo per le serie positive(o definitivamente positive).

9.8.1 Confronto diretto

Teorema 9.8.1: Confronto diretto

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora

1. se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge allora $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge;
2. se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge;

Dimostrazione. Siano

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \qquad e \qquad t_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$$

da $a_n \leq b_n$ segue che

$$0 \leq s_k \leq t_k$$

1. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge allora $\lim_{k\to+\infty} s_k = +\infty$ e dunque $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ cioè $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.
2. Supponiamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converga. Se per assurdo $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non convergesse, dovrebbe divergere a $+\infty$ essendo a termini positivi, quindi per il caso precedente anche $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergerebbe contraddicendo le ipotesi.

□

Esempio:

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n-4}$.

Osserviamo fin da subito che la serie soddisfa la condizione necessaria $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$. Inoltre $\frac{1}{n-4} \geq \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 5$, quindi, siccome la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, allora anche $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n-4}$ diverge.

9.8.2 Confronto asintotico

Teorema 9.8.2: Confronto asintotico

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni tali che $a_n > 0$, $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Allora

1. Se $0 < l < +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$;
2. Se $l = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge
3. Se $l = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Dimostrazione. (caso 1) Per la definizione di limite con $\varepsilon = \frac{1}{2}$ si ha che esiste N tale che

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3l}{2} \ \forall n \geq N$$

Siccome $b_n > 0$ per ogni n, si deduce che

$$\frac{1}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3l}{2} b_n \ \forall n \geq N$$

Allora utilizzando il criterio del confronto diretto sulle serie resto (da N in poi) si ha che le due serie sono entrambe convergenti o entrambe divergenti. □

Dimostrazione. (caso 2) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ allora esiste N tale che

$$\frac{a_n}{b_n} \leq 1 \ \forall n \geq N$$

cioè

$$0 < a_n \leq b_n \ \forall n \geq N$$

e si può utilizzare il criterio del confronto diretto sulle serie resto. □

Dimostrazione. (caso 3) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, allora esiste N tale che

$$\frac{a_n}{b_n} \geq 1 \ \forall n \geq N$$

cioè

$$0 < b_n \leq a_n \ per \ n \geq N$$

□

Esempio:

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

La serie ha termini positivi e soddisfa la condizione necessaria $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Confrontandola asintoticamente con la serie di Mengoli si evince che hanno lo stesso carattere, infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot n(n+1) = 1$$

dunque sono entrambe convergenti.

9.8.3 Criterio di McLaurin

Teorema 9.8.3: Criterio di McLaurin

Sia $f\ :\ [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione positiva e decrescente, allora:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\ dx \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \text{ hanno lo stesso carattere}$$

Dimostrazione. Siccome f è positiva, sia la serie che l'integrale improprio possono solo convergere o divergere a $+\infty$. Inoltre la decrescenza di f garantisce l'integrabilità in ogni intervallo limitato. Fissato $k \in \mathbb{N}$, per la decrescenza di f si ha che

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \qquad \forall x \in [k, k+1]$$

e dunque, per la monotonia dell'integrale di Riemann

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\ dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\ dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\ dx = f(k)$$

Sommando per k da 1 fino a n tutti i termini di

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\ dx \leq f(x)$$

si ha

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(x)$$

cioè

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\ dx \leq S_n$$

Quindi S_n diverge se e solo se $\int_1^{n+1} f(x)\ dx$ diverge □

9.8.4 Serie armoniche generalizzate

Definizione 9.8.1. *Si chiama serie armonica generalizzata la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Fanno parte di questa categoria tutte quelle serie a termini positivi e che soddisfano la condizione necessaria di convergenza(ma solo se $\alpha > 0$). Dunque se $\alpha \leq 0$ sono divergenti. Applicando il teorema di McLaurin a $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}\ dx$ che per $\alpha > 0$ è positiva e decrescente. Quindi la serie armonica generalizzata ha lo stesso carattere di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx$$

che converge per $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha \leq 1$.
Esempio:
Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log(n)}$
Applichiamo il teorema di McLaurin alla funzione $f(x) = \dfrac{1}{x \log(x)}$ che sulla semiretta $[2, +\infty)$ è positiva e decrescente. La serie ha quindi lo stesso carattere di

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log(x)}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{1}{x \log(x)}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \log(\log(b)) - \log(\log(2)) = +\infty$$

dunque essa diverge.

9.8.5 Criteri di D'Alembert

I **criteri di D'Alembert** sono criteri che si applicano sempre a serie a termini positivi. Tali criteri non richiedono che si debba trovare una serie di confronto, tuttavia possono essere considerati come un confronto con la serie geometrica. Questa ultima affermazione ci fa concludere che tali criteri funzionano solo quando la serie è riconducibile ad una serie geometrica.

9.8.5.1 Criterio della radice

Teorema 9.8.4: Criterio della radice

Sia $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e sia

$$L = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Allora[a],

(I) se $0 \leq L < 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge;

(II) se $L > 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

[a] se $L = 1$ non è possibile utilizzare questo criterio.

Dimostrazione. .

(I) Siccome $L < 1$ allora $\exists q \in \mathbb{R}\ :\ L < q < 1$. Per la definizione di limite(prendendo $\varepsilon = q - L$) esiste un indice $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \ \forall n \geq N \qquad \text{cioè} \qquad a_n \leq a^n \ \forall n \geq N$$

Possiamo dunque utilizzare il criterio del confronto diretto in quanto la serie geometrica che ha per termine q^n è convergente(visto che $0 < q < 1$).

(II) Se invece $L > 1$, sempre per la definizione di limite(con $\varepsilon = L - 1$), allora esiste un indice $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \ \forall n \geq N \qquad \text{quindi} \qquad a_n > 1 \ \forall n \geq N$$

La condizione necessaria non è, tuttavia, soddisfatta dunque la serie diverge.

□

Esempio:
Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{2^n}$$

È una serie a termini positivi che soddisfa la condizione necessaria in quanto, per il confronto tra infiniti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{2^n} = 0$$

Applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^4}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^{1/n})^4}{2} = \frac{1}{2}$$

Grazie al limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = 1$$

Siccome $L = \frac{1}{2} < 1$ la serie è convergente.

9.8.5.2 Criterio del rapporto

Teorema 9.8.5: Criterio del rapporto

Sia $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e sia

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Allora

(I) se $0 \leq L < 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

(II) se $L > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge

Anche in questo caso se $L = 1$ non si può applicare il criterio.

Dimostrazione. È una conseguenza del **teorema di Cesaro**, infatti se

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

allora anche

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

e si può utilizzare il criterio della radice. □

Esempio:
Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$$

È una serie a termini positivi che soddisfa la condizione necessaria perché, per il confronto tra infiniti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$$

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

Siccome $L = 0 < 1$ la serie è convergente.

9.9 Serie che cambiano segno

Per le serie che cambiano segno infinite volte i criteri precedente non possono essere applicati. Tra queste serie ce ne sono alcuni più regolari che cambiano segno a seconda della parità dell'indice.

9.9.1 Criterio di Leibnitz

La serie a segno alterno sono quelle che possono essere rappresentate nella forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n \; con \; a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema 9.9.1: Criterio di Leibnitz

Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ dove $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$; se la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, allora la serie converge. Inoltre detta S la somma della serie e indicata con s_n la ridotta n-esima si ha

$$|S - s_n| \leq a_{n+1}$$

Dimostrazione. Ricordando che le somme parziali seguono il seguente schema

$$s_0 = a_0, \qquad s_1 = a_0 - a_1 \leq s_0, \qquad s_2 = a_0 - a_1 + a_2 \leq s_0, \qquad s_3 = s_1 + a_2 - a_3 \geq s_1$$

e ricordando che la successione a_n è decrescente e positiva, si dimostra che la successione s_k non è monotona, ma ammette due sottosuccessioni $\{s_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{s_{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ monotone. Infatti:

$$s_{2k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq s_{2k}$$

e

$$s_{2k+3} = s_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq s_{2k+1}$$

Inoltre ogni somma pari è maggiore o uguale di ogni somma dispari, infatti:

$$s_{2k+2} = s_{2k+1} + a_{2k+2} \geq s_{2k+1}$$

La successione delle somme pari è decrescente, la successione delle somme dispari è crescente ed entrambe sono comprese tra s_1 e s_0. Questo significa che entrambe le sottosuccessioni hanno limite

$$\lim_{k\to+\infty} s_{2k} = \lim_{k\to+\infty} s_{2k-1} + a_{2k} = \lim_{k\to+\infty} s_{2k-1}$$

le due sottosuccessioni tendono allo stesso numero S. Siccome la sottosuccessione dei termini di indice pari e quella dei termini di indice dispari completano tutta la successione, allora

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = S$$

Fissiamo adesso $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che n sia pari. Allora

$$|S - s_n| = s_n - S \leq s_n - s_{n+1} = a_{n+1}$$

Se invece n è dispari

$$|S - s_n| = S - s_n \leq s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$$

□

9.9.2 Convergenza assoluta

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice che converge assolutamente se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge.

Teorema 9.9.2: Convergenza assoluta

Se una serie converge assolutamente allora converge.

Dimostrazione. $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n| \ e \ 0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$$

sono convergenti per il criterio del confronto diretto. Lo sono anche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$$

□

È opportuno osservare, tuttavia, che non vale il viceversa, vale a dire che esistono serie che convergono ma non convergono assolutamente. Ad esempio la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Converge per il criterio di Leibnitz, ma se viene calcolata in valore assoluto diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge.

9.10 Esercizi

Esercizio 9.10.1. *Determinare il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{n^3-n^2+4}$$

Risposta 9.10.1. *Innanzitutto utilizziamo la condizione necessaria di convergenza per vedere se essa può convergere:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{n^3-n^2+4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(1+n+\frac{4}{n^3}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Sia

$$a_n = \frac{n+3}{n^3-n^2+4} \Rightarrow \begin{cases} n+3 \sim n \\ n^3+n^2+4 \sim n^3 \end{cases}$$

Dunque $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$, *essendo* $\frac{1}{n^2}$ *una serie armonica generalizzata con* $\alpha > 1$, *possiamo concludere che essa converge e, grazie al teorema del confronto asintotico, converge anche la serie iniziale.*

Esercizio 9.10.2. *Determinare il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+5}{n^4+2}$$

Risposta 9.10.2. *Innanzitutto utilizziamo la condizione necessaria di convergenza per vedere se essa può convergere:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+5}{n^4+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n(3+\frac{5}{n})}{n^4(1+\frac{2}{n^4})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^3} = 0$$

Sia

$$a_n = \frac{3n+5}{n^4+2} \Rightarrow \begin{cases} 3n+5 \sim n \\ n^4+2 \sim n^4 \end{cases}$$

Dunque $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sim \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$, *essendo* $\frac{1}{n^3}$ *una serie armonica generalizzata con* $\alpha > 1$, *possiamo concludere che essa converge e, grazie al teorema del confronto asintotico, converge anche la serie iniziale.*

Esercizio 9.10.3. *Determinare il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+5}{n^4+3n^3-6n+2}$$

Risposta 9.10.3. *Innanzitutto utilizziamo la condizione necessaria di convergenza per vedere se essa può convergere:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+5}{n^4+3n^3-6n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1+\frac{5}{n^2})}{n^4(1+3n-\frac{6}{n^3}+\frac{2}{n^4})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+3n} = 0$$

Sia

$$a_n = \frac{n^2+5}{n^4+3n^3-6n+2} \Rightarrow \begin{cases} n^2+5 \sim n^2 \\ n^4+3n^3-6n+2 \sim n^4 \end{cases}$$

Dunque $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$, *essendo* $\frac{1}{n^2}$ *una serie armonica generalizzata con* $\alpha > 1$, *possiamo concludere che essa converge e, grazie al teorema del confronto asintotico, converge anche la serie iniziale.*

Esercizio 9.10.4. *Determinare il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - n^2}}$$

Risposta 9.10.4. *In questo caso è sufficiente scegliere come serie per il confronto* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$*, visto che essa è una serie armonica generalizzata con* $\alpha > 1$*, allora possiamo concludere che converge. Inoltre, visto che* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - n^2}} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ *anche la serie di partenza converge.*

Esercizio 9.10.5. *Studiare il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}$$

Risposta 9.10.5. *Sia* $a_n \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}} = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$*, allora* $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$*. Dunque, visto che* $a_n \sim \frac{e^2}{n^2}$ *allora la serie di partenza converge.*

Esercizio 9.10.6. *Studiare il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2 + 1}{n^4 + n + 1}$$

Risposta 9.10.6. *Utilizziamo la condizione necessaria di convergenza per vedere se la serie può essere convergente:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+1}{n^4+n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^4(1 + \frac{n}{n^3} + \frac{1}{n^4})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{+\infty} = 0$$

Possiamo dunque procedere con il confronto asintotico. Sia

$$a_n = \frac{3n^2+1}{n^4+n+1} \Rightarrow \begin{cases} (3n^2+1) \sim n^2 \\ (n^4+n+1) \sim n^4 \end{cases}$$

Dunque $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$*, essendo* $\frac{1}{n^2}$ *una serie armonica generalizzata con* $\alpha > 1$*, allora possiamo concludere che converge. Inoltre, grazie al teorema del confronto asintotico, anche la serie di partenza converge.*

Capitolo 10

Numeri complessi

I **numeri complessi** permettono di estendere l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ rendendo possibile, a partire dalla definizione di unità immaginaria, l'estrazione delle radici di indice pari di numeri negativi e di risolvere le equazioni di secondo grado con delta negativo. I numeri complessi nascono dunque per colmare i limiti dell'insieme dei numeri reali, ed è proprio grazie a questo concetto che è possibile darne una prima definizione.

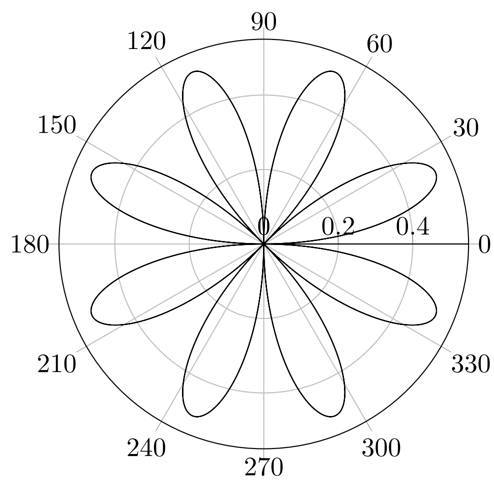


Figura 10.1: Diagramma polare della funzione $\sin(2x) \cdot \cos(2x)$

Definizione 10.0.1. *(Numeri complessi come esenzione dei numeri reali) Consideriamo la seguente equazione:*

$$x^2 + 1 = 0$$

*è facile convincersi del fatto che essa non ha soluzioni, questo perché il quadrato di qualsiasi numero reale è una quantità positiva o al più nulla, ma mai negativa. Dalla precedente equazione è dunque possibile introdurre il valore i, chiamato **unità immaginaria**, e definito nel seguente modo*

$$i := \sqrt{-1}$$

In questo modo l'equazione iniziale ammetterà ben due radici complesse, vale a dire $x_1 = i$ e $x_2 = -i$. Questo perché

$$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1 \iff x = \pm\sqrt{-1} \iff x = \pm i$$

A questo punto possiamo definire l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi come l'insieme di tutti i numeri della forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$

10.1 Proprietà

10.1.1 Parte reale e parte immaginaria di un numero complesso

Definizione 10.1.1. *Sia $z = a+ib$ un qualsiasi numero complesso. Il numero reale a prende il nome di **parte reale** e si indica con $Re(z)$, mentre b si dice **parte immaginaria** e si indica con $Im(z)$. I numeri complessi aventi parte reale nulla(ad esempio $-5i$) vengono detti **immaginari puri**.*

10.1.2 Piano di Argand-Gauss

Come per i numeri naturali $\mathbb{N}$, anche i numeri complessi $\mathbb{C}$ possono essere rappresentati su una retta, tuttavia essi necessitano di un piano più avanzato, detto **piano complesso** o **piano di Argand-Gauss**. In particolare, è possibile associare al numero complesso $z = a + ib$ il punto del piano di coordinate(cartesiane) $(a, b) = (Re(z), Im(z))$ in cui l'asse x è chiamato **asse reale**, mentre l'asse y è detto **asse immaginario**.
A questo punto è possibile dare l'altra definizione di numero complesso.

10.1.3 Numeri complessi come coppia ordinata

Definizione 10.1.2. *Indicato con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, possiamo definire l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi come l'insieme ottenuto dal prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ con se stesso. Vale a dire*

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

in questo modo è possibile concludere che ogni numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali, cioè

$$z \in \mathbb{C} \iff z = (a, b) \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

I numeri complessi della forma $(a, 0)$ coincidono con i numeri reali, mentre i numeri della forma $(0, b)$ sono immaginari puri. L'unità immaginaria i è il numero complesso immaginario puro che si identifica con la coppia ordinata $i = (0, 1)$.

10.1.4 Elemento neutro, opposto, inverso e coniugato

Come per l'insieme dei numeri reali, anche nei numeri complessi è possibile definire tali concetti; in particolare:

- $(0, 0)$ è l'**elemento neutro rispetto alla somma**;
- $(-a, -b)$ è l'**opposto** del numero complesso (a, b);
- $(1, 0)$ è l'**elemento neuro rispetto al prodotto**;
- $z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$ è l'**inverso moltiplicativo** di $z = (a, b)$.

Infine possiamo definire il **coniugato**(si indica con $\overline{z}$) di un numero complesso $z = (a, b)$ come

$$\overline{z} = (a, -b)$$

vale a dire il simmetrico di un numero rispetto all'asse delle ascisse.

10.1.5 Confronto tra numeri complessi

Due numeri complessi si dicono **uguali** se la parte reale e la parte immaginaria coincidono, vale a dire

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$$

Tuttavia, a differenza dei numeri reali, non è possibile confrontare due numeri complessi, ossia non è possibile determinare se un numero è maggiore di un altro. Si può riassumere tale concetto dicendo che i numeri complessi **non sono ordinati**.

10.1.6 Campo dei numeri complessi

Riguardo alle operazioni(somma e prodotto) che si possono eseguire con i numeri complessi è possibile trarre le seguenti considerazioni:

- $(\mathbb{C}, +)$ è un **gruppo abeliano**, infatti la somma tra numeri complessi gode della proprietà commutativa e della proprietà associativa. Inoltre esistono sia l'elemento neutro $(0,0)$ sia l'elemento l'opposto $(-a,-b)$ di ogni numero complesso (a,b).
- $(\mathbb{C} - \{(0,0)\}, \cdot)$ anch'esso è un gruppo abeliano;
- La moltiplicazione è distributiva rispetto alla somma, infatti: $(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)] = [(a,b)\cdot(c,d)]+[(a,b)\cdot(e,f)]$

Tutto questo ci permette di concludere che $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un **campo**, chiamato anche **campo dei numeri complessi**. In un campo ordinato tutti i quadrati devono essere maggiori o uguali a zero, mentre in $\mathbb{C}$ vale l'uguaglianza $i^2 = -1$. Ciò giustifica quanto scritto in precedenza, ossia che l'insieme dei numeri complessi non è un insieme ordinato.

10.2 Forma algebrica

La forma algebrica di un numero complesso è un modo di rappresentare un numero complesso z che permette di esplicitare sia la parte reale $Re(z)$ sia la parte immaginaria $Im(z)$ nella forma $z = Re(z) + i \cdot Im(z)$.

Definizione 10.2.1. *Un numero complesso z è espresso nella forma algebrica se si presenta nella forma*

$$z = a + ib \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

dove i indica l'unità immaginaria.

Un esempio di numero complesso espresso in forma algebrica è il seguente: $2 + 5i$.

10.2.1 Ricavare forma algebrica

Il procedimento per ricavare la forma algebrica di un numero complesso è abbastanza semplice, partendo dal numero complesso $(a,b) \in \mathbb{C}$ possiamo ricavare la forma algebrica nel seguente modo:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) = a + ib$$

Esempio:
Rappresentare il seguente numero complesso in forma algebrica:

$$[12 + 7i] - [4 + 3i] = (12 - 4) + (7 - 3)i = 8 + 4i$$

10.3 Forma polare

La forma polare(o trigonometrica) di un numero complesso è un altro modo per rappresentare i numeri complessi che consente di esprimere qualsiasi numero complesso mediante due valori detti modulo e argomento, nella forma $z = r[\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)]$.

Definizione 10.3.1. *Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso. z è in forma polare se si presenta nella forma*

$$z = r[\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)]$$

dove i indica l'unità immaginaria, r un numero reale non negativo e θ è un angolo tale da soddisfare una tra le seguenti condizioni:

$$-\pi < \theta \leq \pi \text{ oppure } 0 \leq \theta < 2\pi$$

Esempio:

$$2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

10.3.1 Ricavare forma polare

Partendo da un numero complesso espresso in forma algebrica, è possibile convertirlo in forma polare ricordando i seguenti teoremi trigonometrici:

- $a = \overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos(\theta) = r\cos(\theta)$
- $b = \overline{OB} = \overline{OP} \cdot \sin(\theta) = r\sin(\theta)$

Otteniamo dunque che:

$$z = (a, b) = a + ib = r\cos(\theta) + i[r\sin(\theta)] = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

10.4 Forma esponenziale

L'ultimo modo disponibile per rappresentare i numeri complessi è quello della forma esponenziale(o Euleriana), la quale consente di esprimere un numero complesso mediante due valori r e θ chiamati, rispettivamente, **modulo** e **argomento**.

Definizione 10.4.1. *Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si dice essere in forma esponenziale se si presenta mediante una rappresentazione del tipo:*

$$z = re^{i\theta}$$

dove i indica l'unità immaginaria.

Esempio: $2e^{\frac{\pi}{4}i}$

10.4.1 Ricavare forma esponenziale

Per ricavare la forma esponenziale di un numero complesso si può dimostrare che vale l'**identità di Eulero** per cui $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ e che ci permette di ricavare quanto necessario:

$$z = (a, b) = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] \underbrace{=}_{\text{identità di Eulero}} re^{i\theta}$$

10.5 Modulo e argomento

Il **modulo** e l'**argomento** di un numero complesso z, indicati con $|z|$ e $arg(z)$, sono due valori reali che permettono di rappresentare nel piano di Argand-Gauss qualsiasi numero complesso. Le formule per calcolare il modulo e l'anomalia(argomento) dipendono dalla rappresentazione di un dato numero complesso. L'unico caso non banale è quando il numero complesso si presenta in forma algebrica; nella forma polare e nella forma esponenziale, invece, non è necessario svolgere nessun calcolo in quanto esse forniscono esplicitamente sia il modulo che l'anomalia:

- **Polare**: $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, modulo: r, anomalia: r;
- **Esponenziale**: $z = re^{i\theta}$, modulo: r, argomento: θ.

10.5.1 Modulo

Definizione 10.5.1. *Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ in forma algebrica*

$$z = a + ib$$

sappiamo che $Re(z) = a \in \mathbb{R}$, $Im(z) = b \in \mathbb{R}$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di z e che sono entrambi numeri reali. Possiamo dunque definire il modulo del numero complesso z come

$$r = |z| := \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \textit{con } r \geq 0$$

10.5.2 Anomalia

Definizione 10.5.2. *Definiamo l'argomento(o anomalia) di un numero complesso z come il numero*

$$\theta := Arg(z) \in (-\pi, +\pi)$$

dato da

$$\theta := Arg(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & se\ a = 0,\ b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & se\ a = 0,\ b < 0 \\ non\ definito & se\ a = 0,\ b = 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) & se\ a > 0,\ b\ qualsiasi \\ \arctan(\frac{b}{a} + \pi) & se\ a < 0,\ b \geq 0 \\ \arctan(\frac{b}{a} - \pi) & se\ a < 0,\ b < 0 \end{cases}$$

L'argomento di un numero complesso può poi essere definito nell'intervallo $[0, 2\pi]$, in questo caso si ottengono:

$$\theta := Arg(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & se\ a = 0,\ b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & se\ a = 0,\ b < 0 \\ non\ definito & se\ a = 0,\ b = 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) & se\ a > 0,\ b\ qualsiasi \\ \arctan(\frac{b}{a} + 2\pi) & se\ a < 0,\ b \geq 0 \\ \arctan(\frac{b}{a} + \pi) & se\ a < 0,\ b < 0 \end{cases}$$

Esempio:
Calcolare il modulo e l'anomalia di $z = -3 + 3i$.
Decidiamo di lavorare in $(-\pi, \pi]$, dunque:

$$|-3 + 3i| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$$

inoltre

$$Arg(-3 + 3i) = \arctan\left(\frac{3}{-3}\right) + \pi = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

10.6 Potenze e radici

Una delle richieste più frequenti nella risoluzione di esercizi con i numeri complessi è proprio quella di trovare la potenza e la radice di un numero complesso z. In entrambi i casi il procedimento è abbastanza meccanico.

10.6.1 Potenza di numero complesso

Per determinare la potenza di un numero complesso è necessario introdurre la **formula di De Moivre** la quale, tra le altre cose, permette anche di risolvere le equazioni con i numeri complessi.

Teorema 10.6.1: Formula di De Moivre

Sia $z \in \mathbb{C}$ con esponente $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$z^n$$

se z è espresso in forma algebrica, cioè nella forma

$$z = a + ib \; con \; a, b \in \mathbb{R}$$

Allora si devono determinare modulo e anomalia di $z(r,\, \theta)$ in modo tale da passare alla forma polare o alla forma esponenziale[a]:

$$z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] \qquad oppure \qquad z = re^{i\theta}$$

Fatto ciò, se il numero è espresso in forma polare, allora applichiamo la formula di De Moivre, secondo cui la potenza di un numero complesso si ottiene elevando il modulo dell'esponente e moltiplicando l'argomento per l'esponente, vale a dire:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Se, invece, il numero è espresso in forma esponenziale, allora la formula di De Moivre è ancora più semplice:

$$z^n = r^n e^{ie\theta}$$

[a] Questo passaggio deve essere ignorato qualora z sia già in forma polare o esponenziale

Dimostrazione. Visto che entrambe le formule(sia quella per la forma polare sia quella per la forma esponenziale) sono equivalenti, allora, considerando la formula di Eulero per cui

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

si possono applicare le proprietà delle potenze e, a partire dalla potenza della forma esponenziale $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$, si ricava

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

□

Esempio:
Si calcoli la potenza z^5 del numero complesso $z = 1 + i$.

Visto che il numero z è in forma algebrica, allora è necessario ricavare modulo e anomalia:

$$r = |1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Passiamo all'anomalia scegliendo di lavorare nell'intervallo $[0, 2\pi)$ e di esprimere tale numero in forma polare:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Infine, calcoliamo la potenza quinta come richiesto:

$$\begin{aligned}(1 + i)^5 &= \sqrt{2^2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -4 - 4i\end{aligned}$$

10.6.2 Radice di un numero complesso

Ogni numero complesso ha esattamente n radici di grado n, le quali possono essere calcolate mediante una precisa formula a partire dalla forma polare del numero complesso. Come per le potenza, anche la radice di un numero complesso segue un procedimento molto meccanico e quindi facile da utilizzare; tale meccanismo deriva direttamente dalla formula di De Moivre e può essere riassunto dal seguente algoritmo:

(I) Si deve scrivere il numero complesso in forma polare, cioè nella forma $z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$ o più genericamente, sarà necessario determinare modulo e anomalia;

(II) Partendo dalla formula

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

applichiamo la **formule delle radici complesse**:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \qquad \textit{con } k \in \{0, 1, ..., (n-1)\}$$

La variare di k la formula per le radici del numero complesso z descrive tutte le n radici n-esime di z:

$$k = 0 \ : \qquad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$$
$$k = 1 \ : \qquad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi}{n}\right)\right)$$
$$k = (n-1) \ : \qquad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}\right)\right)$$

L'angolo $\frac{\theta}{n}$ viene detto **anomalia principale**.

Esempio:
Determinare le radici quarte del seguente numero complesso:

$$z = 3 + i\sqrt{3}$$

Determiniamo il modulo di z:

$$r = |z| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

e l'anomalia:

$$\theta = Arg(z) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Esprimiamo z in forma polare:

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Infine applichiamo la formula per le 4 radici quarte(dunque con $n = 4$):

$$\sqrt[4]{3 + i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{4}\right)\right)$$

Infine è possibile scrivere esplicitamente le 4 radici:

$$\sqrt[4]{3 + i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\right)$$
$$\sqrt[4]{3 + i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{24}\right)\right)$$
$$\sqrt[4]{3 + i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{25\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{25\pi}{24}\right)\right)$$
$$\sqrt[4]{3 + i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{37\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{37\pi}{24}\right)\right)$$

Bibliografia

[1] Elisa Francini. Appunti schematici per il corso analisi 1: Calcolo differenziale e integrale, 2018.

[2] Carlo Sbordone Paolo Marcellini. *Elementi di Analisi Matematica uno*. Liguri Editore, 2002.

[3] Norman Ramsey Daniel Kleppner. *Quick Calculus 2nd Edition - A Self Teaching Guide*. Norman Ramsey, 1985.

[4] Marco Bramanti Carlo Domenico Pagani Sandro Salsa. *Analisi Matematica 1*. Zanichelli, 2014.

[5] Carlo Sbordone Paolo Marcellini. *Esercitazioni di Matematica(parte prima)*. Liguri Editore, 2013.

[6] Carlo Sbordone Paolo Marcellini. *Esercitazioni di Matematica(parte seconda)*. Liguri Editore, 2014.

[7] YouMath. `https://www.youmath.it/lezioni/analisi-matematica.html`.

[8] Elia Bombardelli. `https://www.youtube.com/channel/UC3_rz0ss9O7Yy0ypBG4M6lg`.

[9] Marcello Dario Cerroni. `https://www.youtube.com/channel/UCANRkcoSeqyJrD49RxpYiPQ`.