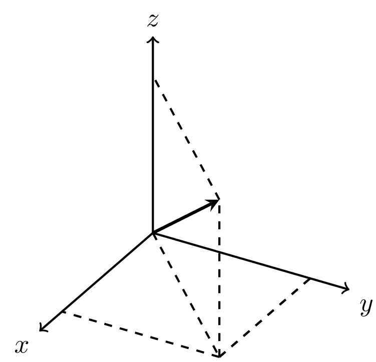
Algebra Lineare

Marco Cetica



11 gennaio 2021

Indice

1 Sistemi lineari **5**
- 1.1 Matrici . . . 5
  - 1.1.1 Proprietà . . . 5
  - 1.1.2 Somma tra matrici . . . 5
  - 1.1.3 Prodotto di matrice per scalere . . . 6
  - 1.1.4 Prodotto tra matrici . . . 6
- 1.2 Sistemi lineari . . . 7
  - 1.2.1 Sistemi triangolari superiori . . . 8
  - 1.2.2 Eliminazione Gaussiana . . . 9
- 1.3 Sistemi omogenei . . . 10

2 Calcolo vettoriale **13**
  - 2.0.1 Assiomi dei vettori . . . 13
  - 2.0.2 Esempi spazi vettoriali . . . 13
  - 2.0.3 Proprietà spazi vettoriali . . . 14
  - 2.0.4 Combinazioni lineari(o copertura lineare) . . . 16
  - 2.0.5 Basi di uno spazio vettoriale . . . 17
    - 2.0.5.1 Metodo per stabilire se un vettore è libero . . . 19
    - 2.0.5.2 Metodo per trovare dimensione e base di uno spazio di un vettore . . . 19
- 2.1 Operazioni fra sottospazi vettoriali . . . 20

3 Mappe lineari **23**
- 3.1 Duali e funzionali lineari . . . 23
- 3.2 Esempi . . . 23
- 3.3 Iniettività e suriettività . . . 24
- 3.4 Immagine e Kernel . . . 24
  - 3.4.1 Proprietà . . . 25
- 3.5 Rango di matrici . . . 26
  - 3.5.1 Proprietà elementari . . . 27
- 3.6 Prodotto di matrici . . . 29
  - 3.6.1 Proprietà elementari del prodotto . . . 29
  - 3.6.2 Prodotto matrici quadrate . . . 30
- 3.7 Basi e coordinate . . . 30
  - 3.7.1 Cambio di base . . . 30
- 3.8 Applicazioni lineari e matrici . . . 31

4 Determinante **35**
- 4.1 Introduzione . . . 35
- 4.2 Metodi di calcolo . . . 36
  - 4.2.1 Teorema di Kronocker . . . 37
- 4.3 Elementi di numeri complessi . . . 38
  - 4.3.1 Coniugio . . . 39
  - 4.3.2 Modulo . . . 39
    - 4.3.2.1 Proprietà . . . 39
  - 4.3.3 Forma trigonometrica . . . 39

5 Autovettori e autovalori **41**
5.1 Diagonalizzazione 41

6 Struttura metrica di $\mathbb{R}^n$ **45**
6.1 Spazio prehilbertiano 45
6.1.1 Proprietà 45
6.2 Norma 45
6.3 Interpretazione geometrica del prodotto scalare 46
6.4 Basi ortonormali per sottospazi di $\mathbb{R}^n$ 46
6.5 Procedura di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt 47
6.6 Matrici ortogonali 48
6.7 Teorema spettrale 49

7 Esercizi **51**
7.1 Sistemi lineari 51
7.2 Spazi vettoriali 52
7.3 Kernel e immagine 54
7.4 Rango 55

Capitolo 1

Sistemi lineari

1.1 Matrici

Una **matrice** è una tabella ordinata di valori appartenenti al medesimo insieme. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

In una matrice le righe orizzontali vengono chiamate **righe** della matrice mentre le colonne verticali vengono dette **colonne** della matrice. Nella seguente notazione di matrice, il significato dei due pedici è ben definito e <u>non</u> può essere lasciato all'interpretazione del lettore:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Infatti il primo pedice indica il numero di riga, mentre il secondo indica quello di colonna. Più generalmente, il numero di riga può essere indicato con la variabile i(o m) e il numero di colonna con la variabile j(o n).

1.1.1 Proprietà

La **dimensione di una matrice** è definita come il prodotto del numero delle righe e il numero di colonne. Nel seguente esempio, la dimensione è 6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Somma tra matrici

L'operazione somma tra due matrici genera una nuova matrice che prende il nome di **matrice somma**[1]. Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due matrici dello stesso tipo con m righe e n colonne. La somma tra queste due matrici restituisce una nuova matrice $A + B$ i cui elementi si ottengono sommando tutti gli elementi delle matrici A e B che occupano la stessa posizione. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 2 \\ -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Sommando si ottiene:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+7 & 5+(-5) & -3+2 \\ 1+(-9) & -2+4 & 4+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -1 \\ -8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

[1]La somma tra matrici gode della proprietà commutativa e associativa

1.1.3 Prodotto di matrice per scalere

Un'altra operazione che è possibile eseguire con le matrici è il prodotto di una certa matrice A per uno scalare λ. Di seguito un esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} e \ \lambda = 2$$

allora λA vale:

$$\lambda A = 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 0 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$$

1.1.4 Prodotto tra matrici

Il **prodotto tra matrici** è una della operazioni tra matrici che richiede più attenzione. Infatti tale operazione non è commutativa e può essere eseguita solo in determinate circostanze. In particolare, l'operazione di moltiplicazione può essere eseguita se e solo se, date due matrici A e B, il numero di colonne della matrice A è uguale al numero di righe della matrice B. Il prodotto di due matrici, di conseguenza, è una matrice avente tante righe quante sono le righe di A e tante colonne quante sono le colonne di B. Formalmente ed utilizzando le opportune notazioni, possiamo definire il prodotto tra matrici nel seguente modo:

Definizione 1.1.1. *(Prodotto tra matrici) Siano A e B due matrici definite in un campo $\mathbb{K}$ tali che il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe di B, cioè:*

$$A \in Mat(m, n, \mathbb{K}), \ B \in Mat(n, p, \mathbb{K})$$

tali che

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{12} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Il prodotto AB è allora definito dalla seguente matrice:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{12} & c_{23} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

tale che:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}, \ \forall j \in \{1, 2, \cdots, p\}$$

Consideriamo adesso il seguente esempio pratico. Siano A e B due matrici così definite:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

In questo caso l'operazione di moltiplicazione tra matrici può essere svolta in quanto il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B. La matrice AB avrà dunque 2 righe e 2 colonne.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2 Sistemi lineari

Definizione 1.2.1. *(Sistema lineare) Viene detto* ***sistema di equazioni lineari*** *in m equazioni e n incognite un sistema della forma:*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Dove il primo pedice indica l'equazione di riferimento mentre il secondo indica quale variabile si deve utilizzare.

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite è un problema che, in algebra lineare, si presta bene alla rappresentazione con notazione matriciale, ovvero $A\underline{x} = \underline{b}$. Genericamente, possiamo individuare con le seguenti notazioni i seguenti componenti del sistema.

- A è la matrice dei **coefficienti delle incognite**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- $\underline{x}$ il **vettore colonna delle incognite**

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- $\underline{b}$ è il vettore colonna dei termini noti

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Per cui

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Un esempio di sistema lineare è il seguente:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ -y + 2z = 0 \\ 4z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - z = 3 \\ -y - 2 = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - z = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Definizione 1.2.2. *Dato un sistema lineare S, se il sistema lineare S' è ottenuto da S mediante una successione delle seguenti operazioni:*

- *Lo scambio di due equazioni;*
- *La sostituzione di un'equazione con la somma di questa con un multiplo di un'altra*

Allora S e S' sono equivalenti, ossa $Sol(S) = Sol(S')$.

1.2.1 Sistemi triangolari superiori

Definizione 1.2.3. *Un sistema triangolare superiore è un particolare tipo di sistema lineare* ***quadrato****, ovvero un sistema lineare costituito da tante equazioni quante incognite.*

Possiamo dunque asserire che un sistema triangolare superiore è tale se la matrice dei coefficienti è anch'essa triangolare superiore. Una matrice è triangolare superiore se è una matrice quadrata e tutti gli elementi sopra e sotto alla diagonale sono nulli, ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.2.1. *Un sistema lineare triangolare superiore $Ax = b$ di n equazioni in n incognite(quadrato) ammette una e una sola soluzione se e solo se tutti gli elementi della diagonale principale della matrice A dei coefficienti sono diversi da zero.*

Dimostrazione. Supponiamo prima di tutto che tutti gli elementi $a_{11}, \cdots, a_{n,n}$ della diagonale principale di A siano nulli. In questo caso, l'ultima equazione del sistema è dela forma $a_{n,n}x_n = b_n$, con $a_{n,n} \neq 0$; quindi ammette l'unica soluzione $v_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$. Sostituendo v_n nella penultima equazione otteniamo:

$$a_{n-1,n-2}x_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1,n}v_n$$

In questo modo otteniamo di nuovo v_n il che dimostra la correttezza del teorema. QED

Esempio:

Consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2x = 8 \\ 3z = 6 \\ 2z = -2 \end{cases}$$

In questo caso la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti sono pari a

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

In questo caso il sistema è, effettivamente, triangolare superiore ma visto che $a_{22} = 0$, allora il sistema o non ha soluzioni o ne ha infinite. Proviamo quanto affermato; Sostituendo all'indietro si ottiene:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2x = 8 \\ -z = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Il che è impossibile in quanto z vale contemporaneamente -1 e -3. Il sistema non ha pertanto soluzioni.
Vediamo un altro esempio:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ -y + 2z = 0 \\ 4z = -4 \end{cases}$$

In questo caso le matrici dei coefficienti e dei termini noti sono pari a:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso il sistema è triangolare superiore con coefficienti $a_{k,k}$ non nulli; il sistema ammette, pertanto, una soluzione. Sostituendo all'indietro si ottiene:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

1.2.2 Eliminazione Gaussiana

Come è possibile notare dalla precedente sezione, risolvere sistemi triangolari è davvero molto banale. Proprio per questo motivo, è opportuno studiare un procedimento deterministico in grado di trasformare qualsiasi sistema lineare quadrato in un sistema lineare triangolare superiore che abbia le stesse soluzioni.

Definizione 1.2.4. *Due sistemi lineari(non necessariamente quadrati) dello stesso ordine si dicono equivalente se hanno esattamente le stesse soluzioni.*

Il metodo dell'Eliminazione di Gauss consiste in molteplici passi(esattamente $k-1$ passi, con k uguale all'ordine del sistema), il passo i-esimo annulla gli elementi sotto la diagonale principale della colonna i-esima della matrice dei coefficienti, producendo nel contempo un numero reale p_i, l'i-esimo pivot del sistema relativo alla data eliminazione di Gauss. Partendo da un sistema lineare quadrato $Ax = b$ di ordine n, dove:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Consideriamo la prima colonna della matrice A. Se contiene solo zeri, poniamo $p_1 = 0$ e passiamo a considerare la seconda colonna. Se invece contiene qualche elemento non nullo, scambiando se necessario la prima equazione con una delle successive in modo che a essere diverso da zero sia a_{11}, il primo elemento della diagonale principale. Poniamo $p_1 = a_{11}$, e sommiamo all'equazione j-esima la prima equazione moltiplicata per $-a_{j1}/p_1$. In questo modo otteniamo un sistema equivalente in cui gli elementi sotto la diagonale principale della prima colonna della matrice dei coefficienti sono tutti nulli. Anche i passi successivi sono molto simili, supponiamo di aver già trattato le prime $i-1$ colonne del sistema, e consideriamo la colonna i-esima compresa in giù; poniamo $p_i = 0$ e passiamo alla colonna successiva. Altrimenti , a meno di scambiare l'i-esima equazione con una sottostante, possiamo supporre che a_{ii} sia diverso da zero. Poniamo $p_1 = a_{11}$ e sommiamo alla j-esima equazione l'equazione i-esima moltiplicata per $-a_{ji}/p_i$. In questo modo otteniamo un sistema equivalente in cui gli elementi sotto la diagonale principale delle prime i colonne della matrice dei coefficienti sono tutti nulli. Procediamo in questo modo giungendo all'ultima colonna; ponendo infine $p_n = a_{nn}$ abbiamo ottenuto un sistema triangolare superiore, equivalente al sistema di partenza, con sulla diagonale principale gli n pivot $p_1, \cdots, p_n$.

Esempio:

Consideriamo il sistema di ordine 4(dunque 3 pivot) così formato:

$$\begin{cases} x + 3y + z - w = 1 \\ 3x + 9y + 4z + w = 1 \\ 2x + y + 5z + 2w = 0 \\ y - z - w = 2 \end{cases}$$

In questo caso la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti è definito nel seguente modo:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Siccome il primo elemento in alto a sinistra nella matrice dei coefficienti è diverso da zero, il primo pivot sarà $p_1 = 1$. Effettuiamo la seguente trasformazione:

$$\left|\begin{array}{cccr|r} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left|\begin{array}{cccr|r} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right.$$

In questa trasformazione abbiamo sottratto alla seconda riga 3 volte la prima e alla terza 2 volta la prima, mentre abbiamo lasciato invariata la quarta. Nella seconda colonna sotto la seconda riga ci sono degli elementi non nulli, tuttavia la diagonale principale ha comunque un elemento nullo(l'elemento $a_{2,2}$) e dunque è necessario effettuare uno scambio di riga; per farlo, abbiamo due scelte: possiamo portare al secondo posto la terza riga oppure la quarta. In questo esempio scegliamo di portarci la terza, otteniamo dunque:

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right|$$

Possiamo procedere scegliendo come pivot $p_2 = -5$(il primo termine non nullo della i-esima riga, con $i = 2$): A questo punto dobbiamo lasciare la terza riga invariata e sommare alla quarta $\frac{1}{5}$ della seconda, in modo da ottenere:

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \end{array}\right|$$

Il pivot 3 è pari a $p_3 = 1$. In questo passaggio dobbiamo semplicemente sommare $\frac{2}{5}$ della terza riga alla quarta, ottenendo:

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right|$$

Visto che siamo arrivati al pivot pari al grado del sistema diminuito di 1, allora il procedimento è terminato; per controllare ciò, osserviamo che l'ultima matrice sia, in effetti, una matrice triangolare superiore. Per questo motivo, il sistema lineare iniziale è equivalente al seguente sistema triangolare superiore il quale, come abbiamo appurato due sezioni fa, è sicuramente più banale da risolvere rispetto ad un generico sistema quadrato.

$$\begin{cases} x + 3y + z - w = 1 \\ -5y + 3z + 4w = -2 \\ z - 4w = -2 \\ \frac{7}{6}w = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Il quale, risolvendolo a ritroso, genere la seguente soluzione:

$$\begin{cases} x = 11 \\ y = -\frac{12}{7} \\ z = -\frac{30}{7} \\ w = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Questa soluzione, secondo il teorema 1.2.1, è dunque l'unica soluzione che il sistema lineare di partenza può ammettere.

1.3 Sistemi omogenei

Un **sistema lineare omogeneo** è un sistema lineare i cui termini noti delle equazioni che lo definiscono sono tutti nulli. L'usuale forma generale in cui si presenta il sistema è:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

mentre il vettore dei termini noti è della forma:

$$O_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$$

In questo modo chiamiamo $Ax = O_m$ con il nome di **sistema omogeneo di matrice A**.

Riguardo le soluzioni di un sistema omogeneo, possiamo inoltre notare che:

- $Sol(a) = \{w \in \mathbb{K}^n | A_x = b\}$
- $Sol_{O_m}(A) = A_x = O_m$

Teorema 1.3.1. *1. Se $v, w \in Sol_{O_m}(A)$ allora $v + w \in Sol_{O_m} Sol_{O_m}(A)$.*

2. Se $v \in Sol_{O_m}(A)$, $x \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda v \in Sol(A)$.

Dimostrazione. (1) Sia $A = (A_1, \cdots, A_2)$ allora:

$$Ax = b \iff x_1 A^1 + \cdots + x_n A^n = b$$

Se v, w sono soluzioni di $Ax = b$ e

$$v = \begin{cases} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{cases} \qquad e \qquad w = \begin{cases} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{cases}$$

allora $A^1 + \cdots + v_n A^1 = O_m = w_1 A' + \cdots + w_1 A^n$

$$\Rightarrow (v_1 + w_1)A + \cdots + (w_n + w_n)A^n = O_m$$

$$\Rightarrow w + v = \begin{cases} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ w_n + v_n \end{cases} \in Sol_{O_n}(A)$$

QED

Lo stesso meccanismo si utilizza per verificare il punto 2.

Teorema 1.3.2. *(Struttura per sistemi lineari) Sia $A \in M_{m.n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{K}^n$ e sia $\underline{v} \in Sol_n(A) \iff [A\underline{x} = b]$. Allora*

$$Sol_b(A) = \underline{v} + Sol_{O_m}(A)$$

dunque se esistono soluzioni di $Ax = b$ la soluzione è unica se e solo se $Ax = O_m$ ha soluzione unica.

Dimostrazione. Sia $v = \underline{v} + w \in \underline{v} + Sol_{O_m}(A)$ allora

$$A_x = A(w + \underline{v}) = (v_1 + w_1)A + \cdots + (v_n + w_n)A^n = b + O_m = b$$

Sia $v \in Sol_b(A)$ ossia $av = b$ e denoto $w = v - \underline{v}($ cioè $v = \underline{v} + w)$

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{w_1} \\ \vdots \\ \underline{w_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \underline{w_1} \\ \vdots \\ v_n \underline{w_1} \end{pmatrix}$$

$$A_w = w_1 A' + \cdots + w_n A^n = (v - \underline{v})A' + \cdots + (V_m - \underline{V_m})A^n = b - b = O_m$$

QED

Capitolo 2

Calcolo vettoriale

Definizione 2.0.1. *(Spazio vettoriale) Uno **spazio vettoriale** è un insieme $V \subset \mathbb{K}$ il quale contiene l'operazione di somma e quella di prodotto per un generico scalare. Gli elementi di uno spazio vettoriale prendono il nome di vettori.*

In particolare definiamo le due operazioni nel seguente modo:

- **Somma**: $V \times V \to V \quad \iff (v, w) \to v + w$
- **prodotto**: $\mathbb{K} \times V \to V \quad \iff (\lambda, w) \to \lambda w$

2.0.1 Assiomi dei vettori

1. $u + (v + w) = (u + v) + w \ \forall u, v, w \in V$ — proprietà associativa
2. $\exists \mathbb{O} \in V \ : \ u + \mathbb{O} = \mathbb{O} + u \ \forall u \in V$ — esistenza vettore nullo
3. $\forall u \in V \ \exists - u \in V \ : \ u + (-u) = -u + u = \mathbb{O}$ — esistenza dell'opposto
4. $u + v = v + u \ \forall u, v \in V$ — Proprietà commutativa
5. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \ e \ u, v \in V$
6. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ e \ v \in \mathbb{K}$
7. $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u) \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ e \ u \in V$
8. $1u = u \ \forall n \in V$

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Allora:

1. Il vettore nullo $\mathbb{O}$ è unico;
2. L'opposto di ogni $u \in V$ è unico;
3. $\forall u \in V$ su ha che $\lambda\mathbb{O} = \mathbb{O}$;
4. $\forall u \in V$ si ha che $= u = (-1)u$;
5. per $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in V$ si ha che $\lambda u = \mathbb{O} \iff \lambda = 0 \vee u = \mathbb{O}$.

2.0.2 Esempi spazi vettoriali

1. $\mathbb{K}^n$ è uno spazio vettoriale in $\mathbb{K}$ con le operazioni definite nel seguente modo:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

e dato $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allo stesso modo la matrice $M_{m.n}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale:

$$A = (x_{ij}) \qquad B = (b_{ij}) \qquad \lambda \in \mathbb{K}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

2. Sia E un insieme arbitrale

$$w = \{f : A \to \mathbb{R}\} \qquad E \neq \emptyset$$

E è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con queste operazioni:

$$f, t \in W \qquad f + g : E \to \mathbb{K}$$

ossia $(f+g)e =_{def} f(e) + g(e) \qquad \forall e \in E$
Se λ è uno scalare e $f \in W$ $\lambda f : w \to \mathbb{R}$ è definita da: $(\lambda f)(e) = \lambda f(e) \qquad \forall e \in \mathbb{K}$
Sia $\mathbb{K}[t]$ l'insieme dei polinomi di indeterminata in t e coefficienti in $\mathbb{K}$ allora

$$\phi(t) \in \mathbb{K}[t]$$

ha questo *aspetto*:

$$p(t) = \sum_{k \in u}^{m} a_k t^k$$

3. **Successioni reali**: Un altro esempio di spazio vettoriale è sicuramente l'usuale successione definita dai numeri naturale ai numeri reali:

$$\mathbb{R}^\infty := \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$$

2.0.3 Proprietà spazi vettoriali

1. Il vettore nullo è unico;

Dimostrazione.

$$\mathbb{O} + \mathbb{O}' = \mathbb{O}'$$

QED

2. L'opposto di ogni $u \in V$ è unico;

Dimostrazione. Siano $-u$ e $-u'$ 2 opposti di $u \in V$, allora:

$$-u = -u + \mathbb{O} = -u + (u + (-u)) = (-u + u) + (-u') = \mathbb{O} + (-u') = -u'$$

QED

3. $\forall u \in V \qquad o \cdot u = \mathbb{O}$

Dimostrazione.

$$ou + u = ou + 1u = (o+1)u = u \cdot 1 = u$$
$$\underbrace{ou + u}_{u-u} + (-u) = u + (-u) = \mathbb{O}$$

QED

4. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda \mathbb{O} = \mathbb{O}$

   Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \lambda \mathbb{O} &= \lambda(o \cdot u) \qquad \textit{con } u \in \mathbb{K} \\ &- (\lambda o)u = o \cdot u = \mathbb{O} \end{aligned}$$

QED

5. $\forall u \in V \qquad sia - u = (-1)u$

   Dimostrazione.

$$\begin{aligned} u + (-1)u &= 1 \cdot u + (-1)u = \\ &= (1 + (-1))u = ou = \mathbb{O} \end{aligned}$$

QED

6. Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ uno scalare e sia $u \in V$ un vettore colonna $\lambda u = \mathbb{O} \iff \lambda = 0$ oppure $u = o$.

   Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo che $\lambda \neq u$, allora $\lambda u = \mathbb{O}$. Segue che

$$\underbrace{\lambda^{-1}\lambda u}_{1 \cdot u = u} = \lambda^{-1}\mathbb{O} = \mathbb{O}$$

QED

Definizione 2.0.2. [1] *Un sottoinsieme $\emptyset \neq U \subset V$ con V spazio vettoriale si dice sottospazio vettoriale se:*

1. $\forall u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$, *vale a dire U è chiuso rispetto alla somma;*
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $u \in U \Rightarrow \lambda u \in U$

Esempi:

1. $\mathbb{R}^2 = V$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq 0$, $u = \{w \in \mathbb{R}^2 : w = tu \textit{ per } t \in \mathbb{R}\}$:

$$U = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ , \ x_1 = 0 \ e \ x_2 = u \right\}$$

   U è chiuso rispetto al prodotto ma non rispetto alla somma.

2. Sia $u = \mathbb{Z}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ m, n \in \mathbb{Z} \right\}$

   $\mathbb{Z}^2$ è chiuso rispetto alla somma, ma non è chiuso rispetto al prodotto di uno scalare. Es:

$$\pi \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \notin \mathbb{Z}^2$$

[1] Se U è un sottospazio vettoriale allora è anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

2.0.4 Combinazioni lineari(o copertura lineare)

V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Siano $V_1, \cdots, V_n \in V$ e sia $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{K}$. Il vettore

$$U = \lambda_1, V_1, \cdots + \lambda_n, V_n = \sum_{k=1}^{N} \lambda_n V_n$$

si dice **combinazione lineare** di V_n con coefficienti x_n. Una combinazione lineare, perciò, è una somma di multipli $V_1, \cdots V_n$.

Definizione 2.0.3. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Se $v_1 \cdots v_n \in V$, il sottospazio generato da $v_1, \cdots v_n \in V$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineare dei vettori $v_1, \cdots v_n$ e si denota con:*

$$Span(V_1 \cdots V_n) := \left\{ v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_n V_k : \lambda_1 \cdots \lambda_k \in K \right\}$$

Teorema 2.0.1. *Sia $\mathbb{K}_n[t]$ l'insieme dei polinomi in una variabile con coefficienti in $\mathbb{K}$ di grado $\leq n$. $\mathbb{K}_n[t]$ è un sottospazio vettoriale **finitamente generato**. Tale sottospazio vettoriale è definito nel seguente modo:*

$$\mathbb{K}_n[t] = Span(1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n)$$

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che lo sia. In tal caso esistono polinomi

$$P_1(T), \cdots, P_k(T) \in \mathbb{K}(T) \ : \ \mathbb{K}[t] = Span(p(t), \cdots, P_k(t))$$

dove $d_j = deg(P_j(T))$ $j = 1, \cdots, k$ e $D = max\{d_j\}$.

1. Se $q_1(t), q_2(t)$ sono polinomi, allora il grado della somma è minore o uguale al massimo dei gradi tra $q_1(t$ e $q_2(t))$.
2. Se $q(t) \in \mathbb{K}[t]$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ allora
$$deg(\lambda q[t]) \leq deg(q[t])$$
   In questo caso, il grado di una composizione lineare di
$$q_1(t), \cdots, p_k(t) \leq deg(q(t))$$
   il che implica
$$x^{d+1} \notin Span(p(t), \cdots, p_k(t))$$

QED

Definizione 2.0.4. *Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $V_1, \cdots, V_n$ allora*

- *Si dicono **linearmente dipendenti** se esistono scalari $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non tutti nulli, tali che la combinazione lineare*
$$\lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_n + V_n = \mathbb{O}$$
- *Si dicono **linearmente indipendenti** se l'unica combinazione lineare che produce il vettore nullo è formata da coefficienti nulli. Ovvero:*
$$\mu_1 V_1 + \cdots + \mu_n V_n = \mathbb{O} \iff \mu_1 \cdots \mu_n = 0$$
  con $\mu_1 \cdots \mu_n \in \mathbb{K}$.

Teorema 2.0.2. *$V_1 \cdots V_n$ sono vettori linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di loro è combinazione lineare degli altri.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ scalari non tutti nulli, tali che $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots \lambda_n V_n = \mathbb{O}$. Almeno uno fra gli scalari è diverso da zero. A meno di riordinare i $V_1 \cdots V_n$, possiamo supporre che $\lambda_1 \neq 0$, allora

$$V_1 = \lambda^{-1}(-\lambda_2 V_2 \cdots - \lambda_n V_n)$$

QED

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Se almeno uno fra $V_1, \cdots, V_n$ è combinazione lineare degli altri, allora posso supporre che $V_1 = \alpha, V_2 + \cdots + \alpha_n V_n$ con $\alpha, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Dunque: $V_1 - \alpha_2 V_2 - \cdots - \alpha_n V_n = \mathbb{O}$. Dunque $V_1 \cdots V_n$ è linearmente dipendente. QED

Teorema 2.0.3. *Sia $A = (A' \cdots A^n) \in M_{m.n}(\mathbb{K})$ e sia $b \in K^n$. Allora il sistema $Ax = b$ ha soluzione unica se e solo se $A' \cdots A^n$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Per il teorema 1.3.2 basta considerare il caso $Ax = O_m$, ovvero il caso in cui il sistema lineare sia un sistema di tipo omogeneo; in tal caso il suddetto sistema ammette una soluzione banale dove $x = 0$. Infatti, per avere soluzione tale sistema deve essere:

$$Ax = O_m \Rightarrow x_1 A' + \cdots + x_n A^n$$

in cui $x_1 = \cdots = x = 0$ ha una soluzione(ed essa è unica) se e solo se $A', \cdots, A^n$ sono linearmente indipendenti. QED

2.0.5 Basi di uno spazio vettoriale

Definizione 2.0.5. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato. Allora $B = \{v_1, \cdots, V_n\} \subset V$ si dice* ***base*** *di V se*

1. *$V = Span(V_1, \cdots V_n) \iff V_1 \cdots V_n$ è un sistema di generatori;*
2. *$V_1, \cdots V_n$ sono linearmente indipendenti.*

Teorema 2.0.4. *Siano $V_1, \cdots V_k \subset V$ linearmente indipendenti. Allora se esistono $\alpha_1 \cdots \alpha_k$ e $\beta_1 \cdots \beta_k \in \mathbb{K}$: $\alpha_1 V_1 + \cdots \alpha_k V_k = \beta_1 V_1 + \cdots + \beta_k V_k$ essi implicano che*

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2 \qquad \cdots \qquad \alpha_k = \beta_k$$

ovvero

$$v = \sum_{j=1}^{k} \mu_k v_k \in Span(v_1, \cdots, V_k)$$

è unicamente determinato dai coefficienti $\mu_1 \cdots \mu_k$.
Caso particolare:
Se $B = \{v_1, \cdots v_k\}$ è una base di V allora $\forall v \in V$ si scrive in un'unica combinazione lineare di $V_1 \cdots V_k$. Se $V = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k \Rightarrow x_1 \cdots x_k$ si dice

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \qquad \textit{colonna dei coefficienti}$$

Dimostrazione. Siano $V_1 \cdots V_k$ linearmente indipendenti. Inoltre siano

$$\alpha_1 \cdots \alpha_k \beta_1 \cdots \beta_k \in \mathbb{K} \ : \ \alpha_1 V_1 + \cdots + \underbrace{\alpha_k V_k = \beta V_1}_{\alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_k \beta_k = 0} + \cdots + \beta_k V_k$$

QED

Lemma 2.0.1. *Sia $\{v_1, \cdots, v_n\}$ un sistema di generatori di uno spazio vettoriale V. Se per $\{w_1, \cdots, w_k\}$ si ha $\{v_1, \cdots, v_n\} \subset Span(w_1, \cdots, w_k)$, allora $\{w_1, \cdots, w_k\}$ è un sistema di generatori di uno spazio vettoriale V.*

Dimostrazione. Se per ogni j si ha $v_j \in Span(w_1, \cdots, w_k)$, allora per $i = 1 \cdots k$ e $j = 1 \cdots n$ esistono scalari t_i^j tali che, $\forall j = 1 \cdots n$ si ha:

$$v_j = t_i^j w_1 + \cdots + t_k^j w_k = \sum_{i=1}^{k} t_i^j w_i$$

Sia inoltre $v \in V = Span(v_1, \cdots, v_n)$, si ha

$$v = \left[\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{k} t_i^j w_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j t_i^j \right) w_i \right] \in Span(w_1, \cdots, w_k)$$

QED

Lemma 2.0.2. *Se uno spazio vettoriale $V \neq \{\mathbb{O}\}$ ha una base composta da n elementi allora ogni sottoinsieme di V con più di n elementi non è libero.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V e, per assurdo, sia $\{w_1, \cdots, w_{n+1}\} \subset V$ un sistema libero. Dimostriamo, per induzione, che $\forall k = 1 \cdots n$ risulta che:

$$V = Span(w_1, \cdots, w_k, v_{k+1}, \cdots, v_n) \tag{2.1}$$

- $k = 1$ Dato che $\mathscr{B}$ è una base e $w_1 \neq \mathbb{O}$, per opportuni scalari $t_1 \cdots t_n$ non tutti nulli, si deve avere $w_1 = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$. A meno di riordinare $\mathscr{B}$, possiamo supporre che $t_1 \neq 0$ e quindi si ha

$$v_1 = \frac{1}{t_1} w_1 - \frac{t_2}{t_1} v_2 - \cdots - \frac{t_n}{t_1} v_n$$

  Ma allora $\{v_1, v_2 \cdots v_n\} \subset Span(w_1, v_2, \cdots, v_n)$ e quindi, per il Lemma 2.0.1, segue che $V = Span(w_1, v_2, \cdots, v_n)$.

- Supponendo vera l'affermazione 2.1(grazie al principio di induzione) fino al passo $(k-1)$-esimo; ossia che $V = Span(w_1, \cdots, w_{k-1}, v_k, \cdots, v_n)$ e dimostriamo che $V = Span(w_1, \cdots, w_k, v_{k+1}, \cdots, v_n)$. Dunque $w_k = s_1 w_1 + \cdots s_{k-1} w_{k-1} + s_k v_k + \cdots + s_n v_n$, per opportuni scalari $s_1 \cdots s_n$. Osserviamo che $s_k, \cdots, s_n$ non sono tutti nulli, questo perché $w_1, \cdots, w_k$ sono linearmente indipendenti. A meno di ordinare $v_k, \cdots, v_n$, possiamo supporre $s_k \neq 0$, ma allora:

$$v_k = -\frac{s_1}{s_k} w_1 - \cdots - \frac{s_{k-1}}{s_k} w_{k-1} + \frac{1}{s_2} w_k - \frac{s_{k+1}}{s_k} v_{k+1} - \cdots - \frac{s_n}{s_k} v_n$$

  e quindi, ragionando come nel caso precedente, $V = Span(w_1, \cdots, w_k, v_{k+1}, \cdots, v_n)$. Dunque, per induzione, la 2.1 è vera e possiamo dunque concludere che $V = Span(w_1, \cdots, w_n)$. Ma allora $w_{n+1} \in Span(w_1, \cdots, w_n)$, contro l'ipotesi che $\{w_1, \cdots, w_{n+1}\}$ fosse libero.

QED

Teorema 2.0.5. *Ogni spazio vettoriale finitamente generato $V \neq \{\mathbb{O}\}$ ha una base. Due basi dello stesso spazio vettoriale hanno la stessa cardinalità.*

Dimostrazione. Supponiamo che $V = Span(v_1, \cdots, v_n)$. Sia k il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\{v_1, \cdots, v_n\}$ e sia $\mathscr{B}$ un sottoinsieme di $\{v_1, \cdots, v_n\}$ costituito da k vettori linearmente indipendenti. Per determinare $\mathscr{B}$ si procede nel modo seguente:

- Se $\{\mathbb{O}\} \neq V = Span(v_1, \cdots, v_n)$ allora almeno uno fra i $v_1 \cdots v_n$ è diverso dal vettore nullo. A meno di riordinare i vettori $v_1, \cdots, v_n$, si può supporre $v_1 \neq \mathbb{O}$.

- Si presentano ora due possibilità mutualmente esclusive. La prima è che, per ogni indice $j = 2, \cdots, n$, l'insieme $\{v_1, v_j\}$ non sia libero. In questo caso $V = Span(v_1)$ e quindi $\{v_1\}$ è una base di V. La seconda è che, per quale $j = 2, \cdots, n$, l'insieme $\{v_1, v_j\}$ sia un sistema libero. Sia j_0 il primo indice j per cui questo avviene. A meno di riordinare $v_2, \cdots, v_n$, possiamo supporre che sia $j_0 = 2$. Dunque $\{v_1, v_2\}$ è un sistema libero.

- Di nuovo ci sono due possibilità mutualmente esclusive. La prima è che, $\forall j = 3, \cdots, n$ l'insieme $\{v_1, v_2, v_j\}$ non sia libero. In questo caso $V = Span(v_1, v_2)$ e quindi $\{v_2, v_2\}$ è una base di V. La seconda è che per qualche $j = 3, \cdots, n$ l'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ sia un sistema libero. Sia j_0 il primo indice j per cui questo avviene. A meno di riordinare $v_3, \cdots, v_n$, possiamo supporre che sia $j_0 = 3$. Dunque $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un sistema libero. Dopo un numero finito di passi (al più n), a meno di riordinare l'insieme, si può supporre che $v_1, \cdots, v_k$ siano linearmente indipendenti e che, se $k < n$, $\forall j = k+1, \cdots, n$ i vettori $v_1, \cdots, v_k, v_j$ siano linearmente dipendenti e quindi $v_j \in Span(v_1, \cdots v_k)$. L'insieme $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots v_k\}$ è quello cercato. Dal Lemma 2.0.1 segue che $\mathscr{B}$ è un sistema di generatori per V ed è quindi una base perché è anche libero. Sia ora C un'altra base di V. Osserviamo innanzitutto che C ha al più k elementi. Infatti la base C non può contenere più di k elementi perché se esistessero $w_1, \cdots, w_{k+1} \in C$, allora $\{w_1, \cdots, w_{k+1}\}$ sarebbe un sistema libero; questo non è possibile per il Lemma 2.0.2. Scambiando i ruoli di $\mathscr{B}$ e C, la stessa dimostrazione prova che $\mathscr{B}$ non può avere più elementi di C e quindi segue la tesi.

QED

Lemma 2.0.3. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione n e sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\} \subset V$.*

1. *Se $\mathscr{B}$ è libero allora $\mathscr{B}$ è una base;*

2. *Se $\mathscr{B}$ è un sistema di generatori allora $\mathscr{B}$ è una base.*

Dimostrazione. (1) Se V ha dimensione n allora ogni insieme di vettori con più di n elementi NON è libero, $\forall v \in V$ si deve avere $v \in Span(v_1, \cdots, v_n)$ e quindi $\mathscr{B}$ è una base. QED

Dimostrazione. (2) Supponiamo che $\mathscr{B} = \{V_1, \cdots, V_n\}$ sia un generatore di V ma non sia una base di V. Allora $\mathscr{B}$ conterrebbe un sottoinsieme proprio libero $\mathscr{B}'$ e $\mathscr{B} \subset Span(\mathscr{B}')$. Ma allora per il Lemma 2.0.1, $\mathscr{B}'$ sarebbe anche un sistema di generatori di V e quindi una base con una cardinalità strettamente minore della dimensione di V, il che è assurdo. QED

Corollario 2.0.1. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $W \subset V$ un sottospazio, allora:*

1. *W è finitamente generato e $dim(W) \leq dim(V)$;*

2. *$Dim(V) = Dim(W) \iff W = V$.*

Dimostrazione. (1) Se W non fosse finitamente generato, in W esisterebbero $n+1$ vettori ciascuno dei quali non sarebbe combinazione lineare degli altri. Dunque ci sarebbero $n+1$ vettori linearmente indipendenti in W e quindi in V. Questo è però impossibile visto che $dim(V) = n$. In W non possono essere trovati più di n vettori linearmente indipendenti e quindi $dim(W) \leq dim(V)$. QED

Dimostrazione. (2) Sia $dim(W) = n = Dim(V)$. Se b è una base di $W \subset V$ e b contiene n vettori linearmente indipendenti, allora b è una base anche per V. Ovvero:

$$W = Span(b) = V$$

QED

Teorema 2.0.6 (Completamento)**.** *Sia $\mathscr{B} = \{V_1, \cdots, V_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V e, per $1 \leq p \leq n$, siano $w_1, \cdots, w_p$ vettori linearmente indipendenti di V, esistono allora $n-p$ vettori di $\mathscr{B}$ che insieme di $w_1, \cdots, w_p$ formano una base di V.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{F} = \{w_1, \cdots, w_p, v_1, \cdots, v_n\}$ un sistema di generatori di V. Dato che contiene la base di $\mathscr{B}$ allora $\mathscr{F}$ è un sistema di generatori per V. Allora, come nella dimostrazione del teorema della selezione di una base, si selezionano $n-p$ vettori fra $v_1, \cdots, v_n$ in modo che, insieme ai vettori $w_1, \cdots, w_p$ formino un sistema libero di n vettori in V e quindi uba base. QED

2.0.5.1 Metodo per stabilire se un vettore è libero

Sia $A^1, \cdots, A^k$ una lista di vettori di $\mathbb{K}^n$ e sia $A = (A^1, \cdots, A^k) \in M_{n,k}(\mathbb{K})$. I vettori $A^1, \cdots, A^k$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbb{O}_n = x_1A^1 + \cdots + x_kA^k = Ax$ ha per unica soluzione la soluzione nulla $x_1 = \cdots = x_k = 0$. Questo succede se e solo se una qualunque riduzione a scala di A ha rango k ossia se ha le prime k righe non completamente nulle e le restanti $n-k$ tutte nulle.

2.0.5.2 Metodo per trovare dimensione e base di uno spazio di un vettore

Per determinare la dimensione e la base dello spazio generato da un insieme di vettori $\mathbb{K}^n$ è necessario utilizzare la tecnica illustrata nel teorema 2.0.5 e quella illustrata qui sopra per determinare se un insieme di vettori è linearmente indipendente. Dunque se $U = Span(A^1, \cdots, A^k) \subset K^n$, si seleziona un sottoinsieme massimo libero di $\mathscr{F} = \{A^1, \cdots, A^k\}$ procedendo induttivamente:

1. Si trova il primo $j_1 \in \{1, \cdots, k\}$ tale che il vettore $A^{j_1} \neq \mathbb{O}$;

2. Si trova il primo $j_2 \in \{j_1 + 1, \cdots, k\}$ tale che $\{A^{j_1}, A^{j_2}\}$ sia libero.

3. $\vdots$

Passo p. Si trova il primo $j_p \in \{j_{p-1} + 1, \cdots, k\}$ tale che $\{A^{j_1}, \cdots, A^{j_{p-1}}, A^{j_p}\}$ sia libero.

4. $\vdots$

2.1 Operazioni fra sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $U, W \subset V$ suoi sottospazi. Allora $U \cap W$ è un sottospazio di V mentre in generale $U \cup W$ non è un sottospazio di V. Infatti è immediato verificare che:

$$v_1, v_2 \in (U \cap W) \Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1 + v_2 \in U \\ v_1 + v_2 \in W \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W$$

inoltre

$$\lambda \in \mathbb{K}\ ,\ u \in U \cap W \Rightarrow \lambda u \in U \cap W$$

Definizione 2.1.1. *Siano U, W sottospazi vettoriali, la somma di U e di W è*

$$U + W = \{v \in V \mid v = u + w \qquad con\ u \in U,\ w \in W\}$$

Ossia, $U + W$ è un sottospazio vettoriale con $(U \cup W) \subset U' + W'$. Osserviamo inoltre che: presi $A \in M_{m,n}$ e $B \in M_{k.n}$:

$$U = \{x \mid Ax = \mathbb{O}_m\} \qquad W = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Bx = \mathbb{O}_m\}$$

$$C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in M_{m+k}, n \qquad U \cap W = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Cx = \mathbb{O}_{m+k}\}$$

Lemma 2.1.1. *Siano $U, W \subset V$ sottoinsiemi vettoriali con:*

$$U = Span(\mathscr{B}) \qquad \mathscr{B} \subset V$$

$$W = Span(\mathscr{C}) \qquad \mathscr{C} \subset V$$

Allora $U + W = Span(\mathscr{B} \cup \mathscr{C})$

Dimostrazione. $U + W = \{v \mid V = u + w \qquad con\ u \in U, w \in W\}$ implica che

$$v \in U + W$$

è somma di multipli in $\mathscr{B}$ e di multipli in $\mathscr{C}$ con $V \in Span(\mathscr{B} \cup \mathscr{C})$. QED

Teorema 2.1.1. *(Formula di Grassman) Siano U, W sottoinsiemi vettoriali finitamente generati di uno spazio vettoriale $V \in \mathbb{K}$. $U + W$ è finitamente generato e:*

$$dim(U + W) + dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W) \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Sia $A = \{v_1, \cdots, v_k\}$ una base di $U \cap W$, sia $B = \{v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}, \cdots, u_v\}$ completamente di A ad una base di U. Sia $C = \{v_1, \cdots, v_n, w_{k+1}, \cdots, w_k\}$ completamente di A a una base di W. Ci basterà dimostrare che $B \cup C = \{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, u_r, w_{k+1}, \cdots, w_s\}$ è una base di $U + W$. Infatti in questo caso si avrà:

$$dim(U + W) = r + s - k = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

che equivale all'equazione 2.2. Per il precedente lemma $U + W = Span(B \cup C)$. Dobbiamo allora solo dimostra che $B \cup C$ è libero. Siano $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \cdots, \beta_r, \gamma_{k+1}, \cdots, \gamma_s$ scalari tali che

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_{k+1} u_{k+1} + \cdots + \beta_r u_r + \gamma_{k+1} w_{k+1} + \cdots + \gamma_s w_s = \mathbb{O} \tag{2.3}$$

Se $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k, v = \beta_{k+1} u_{k+1} + \cdots + \beta u_r$ e $w = \gamma_{k+1} w_{k+1} + \cdots + \gamma_s w_s$, allora $v + u \in U$ e $w \in W$. D'altra parte, $w = -(v + u) \in U$ e quindi $w \in U \cap W$. Devono esistere allora scalari $\delta_1, \cdots \delta_k$ tali che $\delta_1 v_1 + \cdots + \delta_k v_k = w = \gamma_{k+1} w_{k+1} + \cdots + \gamma_s w_s$ e quindi si ha

$$\delta_1 v_1 + \cdots + \delta_k v_K - \gamma_{k+1} w_{k+1} - \cdots - \gamma_s w_s = \mathbb{O}$$

e questo, dato che C è un sistema libero, è possibile solo se $\delta_1 = \cdots = \delta_k = \gamma_{k+1} = \cdots = \gamma_s = 0$. Ma allora segue che

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_{k+1} u_{k+1} + \cdots + \beta_r u_r = \mathbb{O}$$

e questo, dato che b è un sistema libero, è possibile solo se $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_{k+1} = \cdots = \beta_r = 0$. In conclusione l'espressione 2.3 è valida se e solo se tutti i coefficienti sono nulli e quindi $B \cup C$ è libero. QED

Definizione 2.1.2. *Se $U, W \subset V$ sono sottospazi di uno spazio vettoriale tali che $U \cap W = \{\mathbb{O}\}$, la loro somma si dice* ***somma diretta*** *di u e W e si denota mediante $U \oplus W$. Dunque, in questo caso, la formula di Grassman diventa:*

$$dim(U \oplus W) = dim(U) + dim(V)$$

Nel caso in cui $U \oplus W = V$ si dice che U e W sono supplementari.

Corollario 2.1.1. *La somma di due sottospazi U e W è una somma diretta se e solo se ogni vettore di V si scrive in modo unico come somma di un vettore di u e uno di W. Ovvero $V = U \oplus W \iff \forall v \in V$ si* ***decompone*** *in modo unico come somma di un vettore di U e uno di W.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$

$$V = U \oplus W \qquad v \in V$$

$$\underbrace{u_1}_{\in U} + \underbrace{w_1}_{\in W} = U - \underbrace{u_2}_{\in U} + \underbrace{w_2}_{\in W} \Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1$$

Ma allora

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = U \cap W = \{\mathbb{O}\} \Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = \mathbb{O}$$

QED

Dimostrazione. $(\Leftarrow)$ $\forall v \in V$ somma unica di un vettore di U di uno in W, sia $v \in U \cap W$, allora

$$v + \mathbb{O} = V = \mathbb{O} + v$$

il che implica $V = \mathbb{O}$ QED

Capitolo 3

Mappe lineari

Un altro importante capitolo dell'algebra lineare(forse quello più rilevante) è lo studio delle cosiddette **mappe lineari**(o *applicazioni lineari*). Una mappa lineare non è altro che una funzione con delle particolari proprietà.

Definizione 3.0.1. *Una **mappa lineare** da V a W è una funzione $T : V \to W$ con le seguenti proprietà:*

- $T(u+v) = Tu + Tv \quad \forall u, v \in V$ *Additività*
- $T(\lambda v) = \lambda(Tv) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *e* $\forall v \in V$ *Omogeneità*

Dalla seconda condizione segue inoltre che $L(\mathbb{O}_v) = \mathbb{O}_w$ se L è lineare. Possiamo fare un'ulteriore osservazione: siano $V, W, Z \in \mathbb{K}$ e siano $V \longmapsto W$ e $W \longmapsto Z$ due applicazioni lineari, allora

$$V \longmapsto W \longmapsto Z$$

Infine, osserviamo che lo spazio di tutte le mappe lineari da V a W è denotato dalla notazione $L(V, W)$.

3.1 Duali e funzionali lineari

Definizione 3.1.1. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, allora $L(V, \mathbb{K})$ viene chiamato **duale** di V e gli elementi di $L(V, A)$ prendono il nome di **funzionali lineari** e si indicano con la notazione $L(V, \mathbb{K}) = V^*$*

3.2 Esempi

Di seguito sono riportati alcuni esempi di mappe lineari.

1. Siano V e W spazi vettoriale, l'applicazione nulla è:

$$\begin{aligned} N\colon V &\longmapsto W \\ V &\longmapsto \mathbb{O}_m \end{aligned}$$

   il quale è lineare. L'applicazione nulla è l'unica applicazione costante lineare.

2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, l'applicazione identità

$$Id_v\colon V \longmapsto V$$

   è lineare

3. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, è definita un'applicazione

$$\begin{aligned} L_a\colon \mathbb{K}^n &\longmapsto \mathbb{K}^m \qquad \textit{ossia } L_A(x) = Ax \ , \ \textit{se } A = (A', \cdots, A^m), A^j \in \mathbb{K}^m \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

il che implica

$$L_a(x) = Ax = x_i A' + \cdots + x_n A^n \in \mathbb{K}^m$$

L_A è un'applicazione lineare, infatti se prendiamo $x, y \in \mathbb{K}^n$, allora

$$\begin{aligned} L_A(x+y) &= (x+y)A' + \cdots + (x_n + y_n)A^m \\ &= \underbrace{x_i A' + \cdots + x_m A^n}_{Ax} + \underbrace{y_i A' + \cdots + y_m A^m}_{A_y} \\ &= L_A(x) = L_A(y) \end{aligned}$$

4. Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $B = \{v_1 \cdots v_n\}$ una sua base. L'applicazione $F_s : V \to \mathbb{K}^n$ che ogni vettore di V associa le sue coordinate relative a B è lineare.
5. Sia $V = \mathbb{K}[x]$, $x_o \in \mathbb{K}$ un polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}$ con una valutazione in x_0. Allora

$$\begin{aligned} U_{x_0} \colon \mathbb{K}[x] &\longmapsto \mathbb{K} \\ P(x) &\longmapsto P(x) \end{aligned}$$

è una funzione lineare.

6. Sia $V \colon \mathbb{K}[x]$ tale che

$$\begin{aligned} D \colon \mathbb{K}[x] &\longmapsto \mathbb{K}[x] \\ \sum_{j=0}^{x} a_j x^j &\longmapsto \sum_{j=0}^{n} j a_j x^{j-1} \end{aligned}$$

sia l'applicazione lineare della derivata.

Teorema 3.2.1. *Sia W uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $w_1, \cdots w_n$ degli elementi di W. Allora* ***esiste*** *ed è* ***unico*** *un'applicazione lineare $T \colon V \longmapsto W$ tale che $T(v_j) = W_j \quad \forall j_1 \cdots n$ ed è definita da:*

$$T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j$$

Corollario 3.2.1. *Sia $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ un'applicazione lineare. Allora $\exists! A \in M_{m,n} \ : \ T = L_A$*

3.3 Iniettività e suriettività

Un'applicazione $F : A \to B$ si dice **iniettiva** se e solo se

$$F(a_1) = F(a_2) \iff a_1 = a_2$$

Un'applicazione viene invece detta **suriettiva** se e solo se

$$\forall b \in B \qquad \exists a \in A \colon F(a) = b$$

Infine, un'applicazione si dice **biettiva** se e solo se essa è contemporaneamente iniettiva e suriettiva. In questo caso l'applicazione è anche invertibile. Infatti

$$F^{-1} : B \to A \qquad \text{definita da} \qquad \exists! b \in B \ e \ a_b \in A \colon F(a_b) = b$$

Ad esempio, l'applicazione $\Phi : M_{m,n} \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ è biettiva visto che $\Phi(A) = \Phi(B) \iff A = B$.

3.4 Immagine e Kernel

Definizione 3.4.1. *Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora L'immagine di T $Im(T) = \{w \in W \colon w = T(v)$ con $v \in V\}$, mentre il nucleo(kernel) di T è l'insieme di T:*

$$\ker(T) = \{v \in V \colon T(v) = \mathbb{O}_w\}$$

3.4.1 Proprietà

Sia $T : V \to W$ lineare

1. $Im(T)$ e $\ker(T)$ sono sottospazi vettoriali di W e di V(nucleo);
2. T è suriettiva $\iff$ $I_m(T) = W$;
3. T è iniettiva $\iff$ $\ker(T)\{\mathbb{O}_v\}$.

Teorema 3.4.1. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato e sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare.*

1. *Siano $v_1 \cdots v_n$ generatori di W($W = Span(V_1, \cdots V_n)$) allora $T(v_1) \cdots T(v_n)$ è un sistema di generatori per $I_m(T)$ Dunque T è suriettiva $\iff$ $T(v_1) \cdots T(v_n)$*
2. *Se T è iniettiva e $v_1 \cdots v_n \in V$ sono linearmente indipendenti, allora $T(v_1) \cdots T(v_n) \in W$ sono linearmente indipendenti. Inoltre se per una base $\{v_1, \cdots v_n\}$ si ha che $T(v_1) \cdots T(v_n)$ sono linearmente indipendente, allora T è iniettiva.*
3. *Sia $v_1, \cdots v_n$ una base di V. Allora T è iniettiva se e solo se $\{T(v_1) \cdots T(v_n)\}$ è una base di V.*

Dimostrazione. (1) Sia $w \in Im(T) \implies w = T(v)$. $v_1, \cdots, v_n$ generano V : $V' = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$

$$w = T(v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = \underbrace{x_1T(v_1) + \cdots + x_nT(v_n)}_{\in Span(T(v_1),\cdots,T(v_n))}$$

QED

Dimostrazione. (3) Siano $v_1 \cdots v_n$ linearmente indipendenti e T iniettiva. Siano $\alpha_1 \cdots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tale che

$$\alpha_1T(v_1) + \cdots + \alpha_nT(v_k) = \mathbb{O}_w$$

Allora $\alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n$ sono linearmente indipendenti. QED

Teorema 3.4.2. *Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare biettiva, allora $T^{-1} : W \to V$ è lineare.*

Dimostrazione. Siano $w_1, w_2 \in W$, allora esistono unici v_1, v_2 tali che

$$T(v_1) = w_1 \qquad e \qquad T(v_2) = w_2$$

e

$$T^{-1}(w_1) = v_1 \qquad e \qquad T^{-2}(w_2) = v_2$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} T^{-1}(w_1 + w_2) &= T^{-1}(T(v_1) + T(v_2)) \\ &= T^{-1}(T(v_1 + v_2)) \\ &= v_1 + v_2 \\ &= T^{-1} + T^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

Segue dunque che T^{-1} è additiva. QED

Definizione 3.4.2. *Un'applicazione $T : v \to W$ biettiva è un* ***isomorfismo****. Ad esempio sia V un sottospazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato e sia $B = \{v_1, \cdots v_n\}$ una base di V. Allora sia*

$$F_b : V \to \mathbb{K}^n$$

l'applicazione che assegna ad ogni $v \in V$ le sue coordinate relative a B è lineare. Ovviamente è anche biettiva. Infatti è iniettiva dato che due vettori $v, w \in V$ sono uguali se e solo se hanno le stesse coordinate rispetto alla base B ossia se e solo se $F_B(v) = F_B(w)$.

Teorema 3.4.3. *Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.*

Dimostrazione. Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione $n \in \mathbb{K}$. Allora esistono basi $\{v_1 \cdots v_n\}$ di V e $\{w_1 \cdots w_n\}$ di W. Sia $T : V \to W$, l'unica applicazione lineare tale che $T(v_j) = w_j$ implica che T trasforma la base B di V nella base C di W. Questo implica dunque che T è biettiva e dunque è anche isomorfo. QED

Definizione 3.4.3. *(Rango) Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Si dice **rango** di T il numero*

$$\boldsymbol{rank}(T) = \dim(Im(T))$$

Teorema 3.4.4. *(Teorema delle dimensioni) Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e $T : V \to W$ un'applicazione lineare, allora*

$$\dim(V) = \boldsymbol{rank}(T) + \dim(\ker(T))$$

Dimostrazione. Sia $B = \{v_1, \cdots v_n\}$ base di $\ker(T)$ e sia $\widetilde{B} = \{v_1 \cdots v_k, v_{k+1}, \cdots v_k\}$ completamento di B a una base di V. Le immagini di vettori di $\widetilde{B}$ generano $Im(T)$. Se $n - k = \dim(Im(T)) = \mathtt{rank}(T)$ ci basta provare che $c = \{T(V_{n+1}) \cdots T(V_n))\}$ è libero. Siano dunque $\alpha_{k+1} \cdots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che $\alpha_{K+1}T(V_{k+1}) + \cdots + \alpha_n T(V_n) = \mathbb{O}_w$, questo implica che $\alpha_{k+1}V_{k+1} + \cdots \alpha_n V_n \in \ker(T)$ che è uguale a $\beta_1 V_1 + \cdots + \beta_k V_k$ Perciò $\widetilde{B}$ è una base di V e dunque è libero. QED

Corollario 3.4.1. *Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora*

1. *T è iniettiva $\iff \dim(V) = \boldsymbol{rank}(T)$;*
2. *T è suriettiva $\iff \boldsymbol{rank}(T) = \dim(W)$;*
3. *Se $\dim(V) = \dim(W)$ allora T biettiva implica che T è iniettiva e suriettiva.*

Dimostrazione. (1) T è iniettiva se e solo se $\ker(T) = \{\mathbb{O}_v\}$, ciò accade se e solo se $\dim(\ker(T)) = 0$. Per il teorema 3.4.4 questo accade se e solo se $\dim(T) = \mathtt{rank}(T)$. QED

Dimostrazione. (2) T è suriettiva se e solo se $Im(T) = W$ e se e solo se $\dim(Im(T)) = \mathtt{rank}(T)$. QED

Dimostrazione. (3) T è biettiva se e solo se T è iniettiva e suriettiva. Questo vale quando $\mathtt{rank}(T) = \dim(W)$, per la dimostrazione numero 1 di questo corollario, ciò vale quando $\mathtt{rank}(T) = \dim(T)$. Dunque T è iniettiva. QED

3.5 Rango di matrici

Definizione 3.5.1. *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice tale che*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & a_{ij} \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

*Si definisce **trasportata** di A la matrice $\mathbf{A}^\intercal \in M_{n.m}(\mathbb{K})$ data da*

$$A^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^\intercal = (\widetilde{a}_{ji})_{\substack{j=1\cdots n \\ i=1\cdots n}} \qquad \widetilde{a}_{ji} = a_{ij}$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathbf{A}^\intercal)^1 \\ \vdots \\ (\mathbf{A}^\intercal)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}^1)^\intercal \\ \vdots \\ (\mathbf{A}^m)^\intercal \end{pmatrix}$$

Osserviamo infine che, dati $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e dato $\lambda \in \mathbb{K}$, abbiamo che $(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal$ e che $(\lambda A)^\intercal = \lambda A^\intercal$. Infine possiamo dire che la trasportata definita come

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) \longmapsto M_{n,k}(\mathbb{K})$$

$$A \longmapsto A^\intercal$$

è lineare. Questo significa che la trasposizione è un isomorfismo.

Definizione 3.5.2. *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, tale che $A = (A^1 \cdots A^k)$ allora*

- $\forall i = 1 \cdots n \;\; A^i \in \mathbb{K}^m \implies \underbrace{Span(A^1 \cdots A^n)}_{Im(L_A)=Im(A)} \subset \mathbb{K}^n$
- $\forall i = 1 \cdots m \;\; A_1 \cdots A_m \;\; A_i \in (\mathbb{K}^n)^*$ *e* $Span(A_1, \cdots A_m) \subset (\mathbb{K}^n)^*$

Il rango per colonne di A $\mathtt{rank}_C(A) = \dim(Span(A^1, \cdots, A^m)) = \mathtt{rank}(L_A)$ *Invece il rango per righe di A* $\mathtt{rank}_R(A) = \dim(Span(A_i \cdots A_n))$

3.5.1 Proprietà elementari

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ allora

1. $\mathtt{rank}(A^\intercal) = \mathtt{rank}_R(A)$ e $\mathtt{rank}_R(A^\intercal) = \mathtt{rank}_C(A)$
2. $\underbrace{\dim(\mathbb{K}^n)}_{n} = \underbrace{\mathtt{rank}(L_A)}_{\dim(Im(A))} + \underbrace{\dim(\ker(L_A))}_{\dim(\ker(A))}$ con

$$L_A \colon \mathbb{K}^n \longmapsto M_{n,k}(\mathbb{K}^m)$$

$$x \longmapsto Ax$$

Questo significa che $n = \mathtt{rank}_C(A) + \dim(\ker(A))$

Teorema 3.5.1. *Sia $S \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice a scala di rango r e pivot $s_{ij_1} \cdots s_{rj_r}$, tale che*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & s_{1j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & s_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & s_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & s_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & s_{rj_r} & \cdots & s_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad con\ s_{kj_k} \neq 0 \;\; \forall k = 1 \cdots n$$

abbiamo che

1. $\mathtt{rank}_C(S) = \mathtt{rank}_R(S) = R$ *e* $Im(S) = Span(c, \cdots c_R)$. *Inoltre* $\{s^I \cdots S^{j_R}\}$ *è una base per* $Im(S)$*;*
2. *Il* $\ker(S)$ *è un sottospazio di* $\mathbb{K}^n$ *di dimensione uguale a* $n - r$*;*
3. *Se* $c \in \mathbb{K}^m$ *il sistema* $Sx = c$ *ha soluzione compatibile se e solo se le ultime* $m - r$ *coordinate di* c *sono nulle.*

Dimostrazione. (1) Lo spazio delle righe di S ha dim $= R$. Per provare che il rango $\mathtt{rank}_R(S) = R$ basta dimostrare che $S_1 \cdots S_R$ sono linearmente indipendenti. Siano dunque $t_1 \cdots t_R$ tali che

$$t_1 S_1 + \cdots + t_r S_R = (0 \cdots 0) \tag{3.1}$$

devo dimostrare che $t_1 \cdots t_r = 0$. 3.1 si riscrive come

$$t_1(0 \cdots 0, s_{ij_i}, \cdots) + t_2(0, \cdots 0, s_{2j_2} \cdots) + \cdots + t_R(0 \cdots 0, s_{Rj_R}, \cdots) = (0 \cdots 0)$$

il quale genera

$$\begin{cases} s_{1j_1} t_1 + 0 \cdots + 0 = 0 \\ s_{1j_2 t_1} + s_{2j_2} + 0 \cdots + 0 = 0 \\ \vdots \\ s_1 j_R t_1 + \cdots + s_{rj_r} t_R + 0 + \cdots + 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s_{1j_1} t_1 = 0 \\ s_{1j_2} t_1 + s_{2j_r} t_2 = 0 \\ \vdots \\ s_{1j_2} t_1 + \cdots + S_{rj_r} t_R = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \\ \vdots \\ t_R = 0 \end{cases} \Rightarrow Span(S_1, \cdots, S_n)$$

QED

Teorema 3.5.2. *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, allora $\mathtt{rank}_C(A) = \mathtt{rank}_R(A)$. Inoltre se $r = \mathtt{rank}(S)$ con S qualunque riduzione a scala di A, allora $\mathtt{rank}_C(A) = r = \mathtt{rank}_R(A)$.*

Dimostrazione. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e sia S una riduzione a scala di A. Sappiamo che $r = \mathtt{rank}(S) = \mathtt{rank}_C(S) = \mathtt{rank}_R(S)$, per come si riduce a scala, sappiamo che le righe $S_1, \cdots, S_m \subset Span(A_1, \cdots, A_m)$. Il $\mathtt{rank}_R(A) = \dim(Span(A_1, \cdots, A_n)) \geq \dim(Span(S_1, \cdots, S_m)) = \mathtt{rank}_R(S) = \mathtt{rank}_C(S) = r$. I sistemi $Ax = \mathbb{O}_m$ e $Sx = \mathbb{O}_m$ sono equivalenti, ossia $\ker(A) = \ker(S)$ e

$$\begin{aligned} m - \mathtt{rank}_C(A) &= \dim(\ker(A)) = \dim(\ker(S)) \\ &= \underbrace{n - \mathtt{rank}_R(S)}_{n-r} = n - r \geq n - \mathtt{rank}_R(A) \end{aligned}$$

Ciò implica che $\mathtt{rank}_C(A) \leq \mathtt{rank}_R(A)$. QED

Definizione 3.5.3. *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, il rango di A è il numero $\mathtt{rank}(A) = \mathtt{rank}_c(A) = \mathtt{rank}_R(A)$. Il rango di A $\mathtt{rank}_A = \dim(Span(A', \cdots, A^m)) = \mathtt{rank}(L_A)$*

Corollario 3.5.1. *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$*

1. $n = \mathtt{rank}(A) + \dim(\ker(A))$;
2. $\mathtt{rank}(A) = \mathtt{rank}(A^\intercal)$

Dimostrazione. È esattamente la riformulazione del teorema 3.4.4 mentre il secondo punto è la riformulazione del precedente teorema. QED

Teorema 3.5.3. *(Rouché-Capelli) Un sistema $Ax = b$ di m equazioni in n incognite ha soluzioni se e solo se il rango della matrice $A = (A' \cdots A^n)$ è uguale al rango della matrice completa $A' = (A' \cdots A^n b)$. Se esiste una soluzione per $Ax = b$, allora la soluzione è unica se e solo se $\mathtt{rank}(A) = n$.*

Dimostrazione. $Ax = b$ è compatibile se $b \in Span(A' \cdots A^n)$ dato che $Span(A' \cdots A^n) \subset Span(A' \cdots A^n b)$. Inoltre $b \in Span(A' \cdots A^n)$ se e solo se $Span(A' \cdots A^n) = Span(A' \cdots A^n b)$ e questo avvieme se e solo se $\dim(Span(A' \cdots A^n)) = \underbrace{\dim(Span(A' \cdots A^n))}_{\mathtt{rank}(A')}$. Infine, se ha soluzione $Ax = b$, essa è unica se e solo se $Ax = \mathbb{O}_m \iff \dim(\ker(A)) = 0$. Per il teorema 3.4.4 ciò accade se e solo se $m = \mathtt{rank}(A)$. QED

Teorema 3.5.4. *Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $S \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una sua riduzione a scala. Siano $b \in \mathbb{K}^m$ e $c \in \mathbb{K}^m$ l'unico vettore ottenuto da b con le stesse manipolazioni usate pe ridurre A e S. Allora:*

1. $SOl_A(b) = SOl_S(c)$ *ossia* $Ax = b$ *equivale a* $Sx = c$;
2. $\ker(A) = \ker(S)$;
3. $\mathtt{rank}_A = \mathtt{rank}(S)$;
4. *Se $S^{j_1} \cdots S^{j_R}$ sono le colonne della matrice a scala S corrispondenti ai pivot $s_{1j_1} \cdots s_{rj_r}$ di S, allora il sottoinsieme $\{A^{j_1} \cdots A^j\}$ delle colonne di A è una base di $Im(A)$.*

Dimostrazione. (1,2,3) Il primo punto è immediato dato che in un sistema lineare sostituendo a un'equazione la somma di questa con un multiplo di un'altra oppure scambiando equazioni si ottiene un sistema equivalente. La 2 è equivalente al caso 1 con $b = 0$. Infine, usando il teorema 3.4.4, si ha il punto 3 dato che:

$$\mathtt{rank}(A) = n - \dim(\ker(A)) = n - \dim(\ker(S)) = \mathtt{rank}(S)$$

QED

Dimostrazione. (4) Se $\mathtt{rank}(A) = r = \mathtt{rank}(S)$ allora $\dim(Span(A' \cdots A^n)) = r$. Sia inoltre $\widehat{A} = (A^{j_1} \cdots A^{j_R})$, allora $A^{j_1} \cdots A^{j_R}$ sono linearmente indipendenti se $\widehat{A}x = \mathbb{O}_m \iff Sx = \mathbb{O}_m$ ha soluzione unica. Tutto ciò implica che $A^{j_1} \cdots A^{j_R}$ sono linearmente indipendenti. QED

Esempio:

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e sia

$$Im(A) = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\right\}$$

Una possibile riduzione a scala è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = S$$

con

$$Im(S) = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : S \in \mathbb{R}\right\}$$

Allora $Im(A) \neq Im(S)$.

3.6 Prodotto di matrici

Se $A = (a_1, \cdots, a_n) \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ è una riga e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ è una colonna, allora il prodotto di A per B è lo scalare

$$AB = \sum_{l=1}^{n} a_l b_l$$

Più in generale, siano $A = (a_{il}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B = (b_{lj}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, se $A_1 \cdots A_m$ sono le righe di A e $B^1 \cdots B^n$ sono le colonne di B, dato che A ha n colonne e B ha n righe, utilizzando la precedente equazione ha senso considerare il prodotto $A_i B^j$ per ogni $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, p$. Per definizione il prodotto di A per B è la matrice $C = AB = (c_i j) \in M_{m,p}(\mathbb{K})$ tale che per ogni $i = 1 \cdots m$ e $j = 1 \cdots p$ si ha che

$$c_{ij} = A_i B^j = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$$

3.6.1 Proprietà elementari del prodotto

Siano A, B, C matrici del giusto ordine tali che abbia senso le moltiplicazioni. Sia inoltre $\lambda \in \mathbb{K}$, allora

- $A(B+C) = AB + AC \iff (B+C)A = BA + CA$
- $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$
- $A(BC) = (AB)C$
- $\mathbb{O}A = \mathbb{O}$
- Siano A e B moltiplicabili con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Allora $AB \in M_{m,p}(\mathbb{K})$ e $(AB)^\intercal \in M_{pm} \iff B^\intercal A^\intercal$

  Dimostrazione. Siano $A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj})$, $AB = (c_{ij})$, $(AB)^\intercal = (d_{ji})$, $d_{ji} = (c_{ij})$ e $B^\intercal A^\intercal = (e_{ji})$ dimostriamo che $d_{ji} = e_{ji}$ tale che $A_i = (a_{i1} \cdots a_{ip})$, $(A^\intercal)^i = A_i^\intercal = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{ip} \end{pmatrix}$ e

  $$d_{ji} = c_{ij} = A_i B^j = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} a_{ik} = (b^\intercal)_j (A^\intercal)^i = e_{ji}$$

  QED

3.6.2 Prodotto matrici quadrate

Siano $A, B \in M_n$ e $Im(\delta_{ij}) \in M_n$ allora $AIm = A = Im(a)$

Definizione 3.6.1. *Sia $A \in M_n$, A è invertibile se esiste $B \in M_n$ tale che $BA = AB = Im$.*

Teorema 3.6.1. *$A \in M_n$ è invertibile se e solo se A è non singolare.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) A è non singolare, A ha riduzione triangolare superiore tutta non nulla, ciò implica che $Ax = b$. QED

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia A invertibile, ciò implica che essa ha inverso unico $A^{-1}\colon Ax = b \iff x = A^{-1}Ax = A^{-1}b$ QED

3.7 Basi e coordinate

Definizione 3.7.1. *La notazione*

$$GL_m(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K})\colon A \text{ è invertibile}\}$$

*si dice **gruppo-generale lineare**. $GL_m(\mathbb{K})$ con l'operatore di prodotto è un gruppo algebrico.*

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ allora

1. A è invertibile se e solo se A è non singolare;
2. L'applicazione $L_A\colon \mathbb{K}^n \longmapsto \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo.

Si noti inoltre che $A \in Gl_n(\mathbb{K}) \iff$ colonne di A ad una base di $\mathbb{K}^n$ implica che

$$B(\mathbb{K}^n) = \{\text{insieme delle basi di}\mathbb{K}^n\}$$

allora

$$\begin{gathered} GL_n(\mathbb{K}) \longmapsto^{\Phi} B(\mathbb{K}^n) \\ A = (A' \cdots A^n) \longmapsto \{A' \cdots A^n\} \end{gathered}$$

è biettiva

3.7.1 Cambio di base

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una sua base. Sia inoltre

$$\begin{aligned} F_B\colon &\longmapsto M_{n,k}\mathbb{K}^n \\ v &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e sia $B' = \{v' \cdots v'_n\}$ un'altra base di V, B' si definisce un'assegnazione di V. Consideriamo dunque, $\forall j = 1 \cdots n$, $V'_j = bj + \cdots + b_{nj}v_n = \sum_{i=1}^n b_{ij}v_j$. Per $v \in V$ si deve avere

$$\sum_{i=1}^n x_i v_i = v = \sum_{j=1}^n x'_j v'_j = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^n b_{ij} v_j\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ij} x'_j\right) v_j$$

Da ciò segue che $x_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}x'_j$ il quale implica che $x = Bx'$.

Definizione 3.7.2. *Sia*

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

la matrice che ha per colonne le coordinate vettori di una base $B' = \{v' \cdots v'_n\}$ di V relative alla base $B = \{v_1 \cdots v_n\}$ di V. Allora se per $v \in V$ la colonna x è la colonna delle sue coordinate rispetto a B e x' quella rispetto a B'. Allora $x = Bx'$ si dice matrice del cambio di base della base B alla base B'.

Osservazioni:

1. Se B è la matrice del cambio di base da B(vecchia) alla base B'(nuova) allora B è invertibile, ovvero $B \in GL_k(\mathbb{K})$. Infatti $\forall x \in \mathbb{K}^n$ $x = F_B(v)$ e $x = Bx'$ è un sistema con soluzione **unica**, ovvero

$$x' = F_{b'}(v) \Rightarrow B \text{ è invertibile} \tag{3.2}$$

Inoltre B^{-1} è la matrice del cambio di base da B^1 e B(nuova). Infatti $\forall v \in V$ vale la 3.2, ma 3.2 implica pure che $x' = B^{-1}x \Rightarrow B^{-1}$ è la matrice del cambio di base da B^1 a B.

2. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $B = \{v_1 \cdots v_n\}$ una base fissata. Se $B' = \{v'_1 \cdots v'_n\}$, allora B' è una base e $B = (b_{ij})$ è la matrice del cambio di base da B a B'. Allora

$$\{B' \ : \ B' \text{ base di } V\} = \{v' \cdots v'_n\} \colon v'_j = 3.2$$

3.8 Applicazioni lineari e matrici

Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ rispettivamente con dimensione $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$. Sia $B = \{v_1 \cdots v_n\}$ base di V e $c = \{w_1 \cdots w_m\}$ base per W. Sia

$$T \colon V \to W$$

un'applicazione lineare. Per $v \in V$ sia $x = F_B(v)$ e sia $y = F_C(T(v)$, come si esprime dunque y in funzione di x? Per $v_i \in B$ $T(v_I) = a_1 \colon w_1 + \cdots + a_{mI}w_m$. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1I} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_C\left(T(v_1)\right), \cdots, F_C\left(T(v_n)\right) \end{pmatrix}$$

A viene detta matrice associata a T relativa alla base B di V e C di W.

Teorema 3.8.1. *Se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è la colonna delle coordinate rispetto a B di $v \in V$ e $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ colonna delle coordinate di $T(v)$ relative a c, allora $y = Ax$*

Dimostrazione. Sia $v \in V$ $v = x_iv_i + \cdots + x_nv_n$ e e

$$\begin{aligned} T(v) = y_1w_1 + \cdots + y_mw_m &= T(x_1v_1 + \cdots x_nv_n) = \\ &= T(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1T(v_1) + \cdots + x_nT(v_n) \\ &= x_1(a_{11}w_1 + \cdots + a_{1m}w_m) + \\ &\ \vdots \\ &+ x_m(a_n, w_1 + \cdots + a_{nm}w_m) \\ &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)w_1 \\ &+ (a_{mn}x_1 + \cdots + a_{mn}x_m)w_m \end{aligned}$$

Tutto ciò implica che

$$\boxed{y_j = a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n} \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

QED

Osservazioni:

1. Se $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ e $L_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, allora A è la matrice associata ad L_A relativa alla base canonica.

2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $B = \{v_1 \cdots v_n\}$ $B' = \{v'_1 \cdots v'_n\}$ due basi di V. Inoltre sia

$$Id\colon V \longmapsto V$$

$$B' \longmapsto B$$

La matrice associata a Id relativa a B' e B è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $Id(v'_j) = v'_j$ relativa a B.

Teorema 3.8.2. *Abbiamo visto che $\mathscr{L} \approxeq M_{mn}(\mathbb{K})$. Siano dunque V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ con $\dim(V) = n$ e $dim(W) = m$. Fissate dunque due basi B e C per V e W si ha che*

$$\Psi\colon \mathscr{L}(V, W) \longmapsto M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$T \longmapsto \textit{Matrice di } T$$

è biettiva. Inoltre Ψ è lineare dato che $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(V, W)$ $\Psi(T + T_2)$ è la somma delle matrici $T_1 T e T_2$. Inoltre λT per $\lambda \in \mathbb{K}$, $T \in \mathscr{L}(V, W)$ implica che

$$\Psi(\lambda T) = \lambda \Psi(T)$$

è un isomorfismo.

Esempio:

Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ con dimensione 4. Una base tipica è data da $B = \{1, x, x^2, x^3\}$. Considero ora $T\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ tale che $T(p(x)) = p(x) - p(2x) + p'(x) + p''(x)$. Trovare la matrice A di T relativa a B:

- $T(1) = 0 = 01 + 0x + 0x^2 + 0x^3$
- $T(x) = x - 2x + 1 = \boxed{-x + 1}$
- $T(x^2) = x^2 - 4x^2 + 2x + 2 = \boxed{2 + 2x - 3x^2}$
- $T(x^3) = x^3 - 8x^3 + 3x^2 + 6x = \boxed{6x + 3x^2 - 7x^3}$

La matrice A sarà dunque formata da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Problema: Data $T\colon V \to W$ applicazione lineare, dobbiamo capire come cambia la matrice di T cambiando le basi scelte in V e W. Cominciamo col dare una risposta a questa domanda nel caso più semplice ma particolarmente importante, ovvero quello degli endomorfismi. Vale a dire nel caso della applicazioni lineari $T\colon V \to V$. Sia allora V uno spazio vettoriale finitamente generato su $\mathbb{K}$ e siano B, B' basi di V e B la matrice del cambio di base da B a B'. Sia inoltre A la matrice di T rispetto alla base B e sia A' la matrice di T rispetto alla base B'. Dunque se per un vettore V rispettivamente $x \in \mathbb{K}^n$ è il vettore delle coordinate di V alla base B, $x' \in \mathbb{K}^n$ è il vettore delle coordinate di X alla base B', si ha $x = Bx'$. Analogamente, se rispettivamente $y \in \mathbb{K}^n$ è il vettore delle coordinate di $T(v)$ alla base $B', y' \in \mathbb{K}^n$ è il vettore delle coordinate di $T(v)$ alla base B'. Ora, per definizione di matrice associata, abbiamo che

$$y = Ax \qquad e \qquad y' = A'x'$$

Ma d'altra parte

$$y' = B^{-1}y = B^{-1}Ax = B^{-1}ABx'$$

dato che questo vale per ogni v, possiamo concludere la seguente proposizione.

Proposizione 3.8.1. *Se A, A' sono matrici associate a $T\colon V \to V$ relative a basi B e B' di V allora si ha che*

$$A' = B^{-1}AB$$

Definizione 3.8.1. *Due matrici A e A' quadrate di ordine n si dicono simili se esiste una matrice invertibile B di ordine n tale che $A' = B^{-1}AB$.*

Esempio:
Sia

$$\widetilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$$

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice del cambio di base da $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ a $\widetilde{B}$.

Verificare che

$$\widetilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$$

La matrice A' di T relativa a $\widetilde{B}$ è

$$A'' = \widetilde{B}^{-1} \cdot A\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposizione 3.8.2. *Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e $T\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Siano B, B' basi di V e C, C' basi di W. Siano inoltre B la matrice del cambio di base da B a B' e C la matrice del cambio di base da C a C'. Se A e A' sono matrici di T relative a B e C, allora $A' = C^{-1}AB$.*

Capitolo 4

Determinante

4.1 Introduzione

Lo scopo dello studio dei determinanti di una matrice è quello di definire una funzione (appunto il determinante) sullo spazio delle matrici quadrate di ordine n, per ogni n, utile a studiare proprietà delle matrici e che sia calcolabile facendo somme e prodotti delle entrate della matrici. In particolare si desidera che il determinante di una matrice sia non nullo se e solo se la matrice è invertibile. Per $n = 1$, ossia nel caso di matrici di ordine 1, lo scopo si ottiene semplicemente assegnando alla matrice (a) il valore $\det(a) = a$ per ogni scalare a. Si osservi che in questo caso alla matrice unità $I_1 = (1)$ si associa il numero $\det(I_1) = 1$. Nel caso $n = 2$, ossia per matrici di ordine 2, osserviamo che richiedere che una matrice sia invertibile è equivalente a richiedere che le sue righe non siano proporzionali. Ovvero

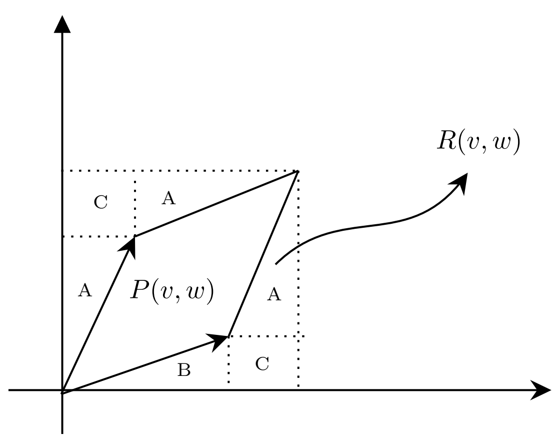
$$M_2(\mathbb{K}) \ni \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

è non singolare se e solo se le righe (a_{11}, a_{12}) e (a_{21}, a_{22}) non sono proporzionali e questo succede se e solo se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Si osservi che anche in questo caso questa funzione associa alla matrice unità I_2 il numero 1. Il determinante delle matrici quadrate di ordine 2 definito in questo modo ha una semplice interpretazione geometrica. Su $\mathbb{R}^2$ si considerino due vettori v, w. I vettori v, w individuano un parallelogramma che denotiamo $P(v, w)$. Se in termini della base canonica $\{e_1, e_2\}$ si ha $v = v_1e_1 + v_2e_2$ e $w = w_1e_1 + w_2e_2$ e

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

Allora con una semplice verifica geometrica si può dimostrare che

$$\det(A) = \begin{cases} Area(P(v,w)) & \text{Se si passa da v a w ruotando in senso antiorario} \\ -Area(P(v,w)) & \text{Se si passa da v a w ruotando in senso orario} \end{cases}$$



Ovvero

$$\begin{aligned} Area(P(v,w)) &= Area(R(v,w)) - 2Area(A) - 2Area(B) - 2Area(c) \\ &= (v_1 + w_1) \cdot (v_2 + w_2) - 2\frac{w_1 v_1}{2} - \frac{2v_1 w_2}{2} \end{aligned}$$

Definizione 4.1.1. *(Determinante) $\forall n \geq 1$ un determinante è una funzione $d_n \colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tale che*

1. *d_n ha la matrice con due righe uguali;*
2. *d_n è una funzione lineare su ciascuna riga una volta fissate le altre:*

$$d_n \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \lambda_i A_i + \lambda_i' A_i' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \lambda_i d_n \begin{pmatrix} A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \lambda_i' d_n \begin{pmatrix} A_i \\ \vdots \\ A_i' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

3. *$d_n(I_m) = 1$*

Definizione 4.1.2. *Sia $A \in M_n$ il **minore** (i,j) della matrice A è la matrice $A_{ij} \in M_{m-1}$ ottenuta da A rimuovendo la i-esima riga e la j-esima colonna.*

4.2 Metodi di calcolo

Teorema 4.2.1. *$\forall n \geq 1$ esiste un'unica funzione determinante $d_n \colon M_n \to \mathbb{K}$ che verifica la precedenti proprietà e valgono le seguenti formule per ricorrenza in ogni matrice $A = (a_{ij}) \in M_n$.*

(i) ***Sviluppo di Laplace del determinante lungo la colonna** j_0**-esima**: $\forall j_o = 1 \cdots n$ si ha che*

$$d_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} d_{n-1}(A_{ij_0})$$

(ii) ***Sviluppo di Laplace del determinante lungo la riga** i_0**-esima**: $\forall j_o = 1 \cdots n$ si ha che*

$$d_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} d_{n-1}(A_{i_0 j})$$

Proposizione 4.2.1. *Il determinante di una matrice A quadrata di ordine n è un polinomio di grado n nelle n^2 entrate della matrice, composta dalla somma di $n!$ addendi ciascuno dei quali ha valore assoluto uguale al valore assoluto del prodotto di n entrate della matrice A scelte una per ogni riga di A in modo che ciascuna sia sua una colonna diversa.*

Effettuiamo ora alcune osservazioni sul calcolo del determinante.

Proposizione 4.2.2. *Sia $A = (A_1 \cdots A_n) \in M_n$ una matrice quadrata di ordine n. Allora*

1. *Se A ha una riga nulla allora il $\det(A) = 0$;*
2. *Il valore del determinante non cambia se si somma a una riga un multiplo di un'altra;*
3. *Il valore del determinante cambia segno se si scambiano due righe:*

$$\det(A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n) = -\det(A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n)$$

4. *Se S è una matrice triangolare superiore ottenuta da A mediante una riduzione di Gauss che comporta σ scambi di righe, allora*

$$\det(A) = (-1)^{\sigma} \det(S)$$

5. *Se A ha le righe linearmente dipendenti, allora* $\det(A) = 0$*;*

6. *Se S è una matrice triangolare superiore e $s_{11}, \cdots, s_{nm} \in \mathbb{K}$ gli elementi sulla diagonale di S, allora*

$$\det(S) = s_{s11} \cdots s_{nn}$$

7. *A è invertibile se e solo se* $\det(a) \neq 0$.

Teorema 4.2.2. *(Teorema di Binet) Siano $A, B \in M_n$, allora*

$$\det(A, B) = \det(A) \cdot (B)$$

Corollario 4.2.1. *Se B è invertibile, allora* $\det\big(B^{-1}\big) = \frac{1}{\det(b)}$ *e se $A \in M_n$ e $GL_n(\mathbb{K}) \ni B \implies$* $\det\big(B^{-1}AB\big) = \det(A)$

Dimostrazione. Sia $B \in GL_n(\mathbb{K}) \implies BB^{-1} = I$, allora $\det\big(BB^{-1}\big) = \det(I) = 1 = det(B) \cdot B(B^{-1})$. QED

Teorema 4.2.3. *(Teorema di Cramer) Se per $i = 1..n$, $B(i) = (A', \cdots, A^{i-1}, b, A^{i+1}, \cdots, A^n)$ e $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è la soluzione di $Ax = b$ allora $x_i = \frac{\det(B(i))}{\det(A)}$*

Dimostrazione. $\det(B(i)) = \det\big(A' \cdots A^{i-1}, x_i a' + \cdots + x_n A^n\big) = x_1 \det(A' \cdots A', \cdots A^n) + \cdots + x_1 \det\big(A' \cdots A^i \cdots A^n\big) + \cdots + x_n \det(A' \cdots A^n \cdots A^n) = x_i \det(A)$. QED

Proposizione 4.2.3. *Sia $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{K})$. Se $A^{-1} = (x_{ij})$ allora vale che*

$$x_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Dimostrazione. La j-esima colonna X^j di $A^{-1} = (x' \cdots x^j \cdots x^n)$

$$X^j = \begin{pmatrix} x_{ij} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$

e x^j è la soluzione di $AX^j = e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Per il teorema di Cramer, $x_{ij} = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}$, dove B_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i-esima con e_j. QED

4.2.1 Teorema di Kronocker

Uno dei metodi più utilizzati per calcolare il rango di una matrice è il **teorema di Kronocker**(noto anche con il nome di **teorema degli orlati**). Questo algoritmo permette di calcolare il rango di una matrice utilizzando le informazioni ottenute grazie al calcolo del determinante.

Teorema 4.2.4. *(Teorema di Kronecker) Il rango di $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ è r se e solo se esiste una sottomatrice quadrata di ordine r di A con determinante diverso da 0 e tutte le sottomatrici di A di ordine maggiore di r hanno determinante uguale a zero.*

All'atto pratico, il calcolo del rango mediante il teorema degli orlati si riduce ai seguenti passaggi:

1. Fissare un elemento non nullo di A(nel caso in cui A è una matrice nulla, il suo rango è zero);

2. Orlare l'elemento fissato in modo da ottenere sottomatrici quadrate di A di ordine 2(nel caso in cui le sottomatrici hanno determinante nullo, il rango di A è 1);

3. Costruiamo tutte le sottomatrici orlate di A' di ordine 3(se tutte le sottomatrici hanno determinante nullo, allora il rango di A è pari a 2);

4. Orlare A'' in modo da ottenere sottomatrici orlate di ordine 4(se tutte le sottomatrici hanno determinante nullo, il rango di A è pari a 3);
5. Iterare questa procedura fino a quando non si riesce ad annullare il determinante di tutte le sottomatrici di A^n

Esempio:
Determinare il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo adesso la seguente sottomatrice:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo caso il $\det(A') = (1 \cdot 1) - (3 \cdot 0) = 1$, dunque orliamo la matrice con la terza riga e la terza colonna:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{Sarrus}{\rightsquigarrow} \begin{matrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{matrix} \Longrightarrow \det(A'') = 0$$

Visto che la sottomatrice A'' di ordine 3 ha determinante nullo, allora il rango della matrice $\text{rank}(A) = 2$

4.3 Elementi di numeri complessi

Su $\mathbb{R}^2$ consideriamo le seguenti operazioni:

+: $(x, y), (y, v) \in \mathbb{R}^2$ allora $(x, y) + (u, v) = (x + y, y + v)$;

×: $(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yu, xu + yu)$

In questo modo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è un campo. $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale che ha per base $1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$. Ma allora

$$\begin{aligned} i^2 = i \cdot i &= (0,1)(0,1) \\ &= (0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) \\ &= -\underbrace{(1,0)}_{1} = -1 \end{aligned}$$

Se $x + iy, u + iv \in \mathbb{R}^2$ li moltiplico come se fossero polinomi e ricordo che $i^2 = -1$ allora

$$\begin{aligned} (x+iy)(u+iv) &= xu + ixu + iyu + i^2 yu \\ &= xu - yu + i(xu + yu) \\ &\simeq (xu - yu, xu + yu) \end{aligned}$$

D;ora in poi, indicheremo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot) = \mathbb{C}$ e $x + iy = z \in \mathbb{C}$.

Proposizione 4.3.1. *Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$, allora*

- *$x = Re(z)$ è la parte reale di z;*
- *$y = Im(z)$ è la parte immaginaria*

In questo modo possiamo dire che

$$\mathbb{R} \in \mathbb{C} \implies \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) = 0\}$$

4.3.1 Coniugio

Se $z = x + iy$ per definizione il suo coniugato è $\widehat{z} = x - iy$. In questo modo

$$Re(z) = \frac{z + \widehat{z}}{z} \qquad \frac{z - \widehat{z}}{zi} = Im(z)$$

$$\widehat{z + w} = \widehat{z} + \widehat{w}$$

$$\widehat{z \cdot w} = \widehat{z} \cdot \widehat{w}$$

4.3.2 Modulo

Il modulo di un numero complesso è definito come

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re(z))^2 + Im((z))^2} = \sqrt{z\widehat{z}}$$

Sia $z = x + iy \neq 0$, allora

$$0 \neq |z|^2 = z\widehat{z}$$

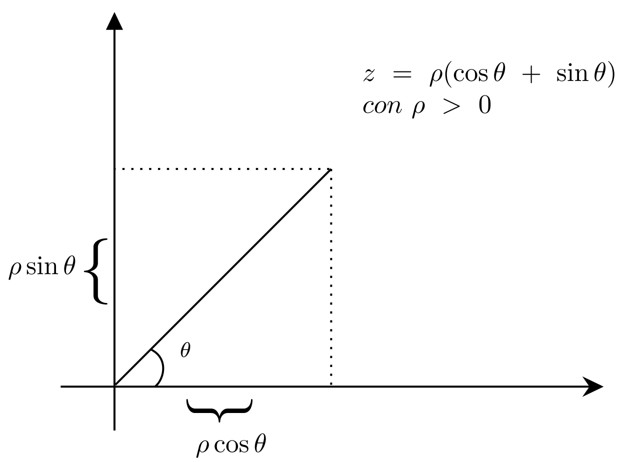
Dunque

$$z\widehat{z} = |z|^2 \implies \frac{\widehat{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z} \iff z^{-1} = \frac{\widehat{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

4.3.2.1 Proprietà

1. $|z| \geq 0$ e $|z|0 \iff z = 0$
2. $|zw| = |z| \cdot |w|$
3. $|\widehat{z}| = |z| = |-z|$
4. $|z + w| \leq |z| + |w|$ *Disuguaglianza triangolare*

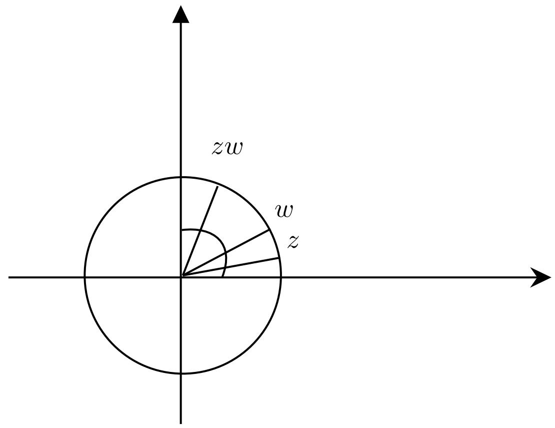
4.3.3 Forma trigonometrica



$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \\ w &= |w|(\cos\phi + i\sin\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zw =&|z||w| \left[(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi)\right] \\ &+ i(\cos\phi\sin\theta + \cos\theta\sin\theta) \\ &|z||w| \left[\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)\right] \end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui $|z| = |w| = 1$



Proposizione 4.3.2. *(Notazione di Eulero)*

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) = \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi) \iff e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$$

Teorema 4.3.1. *(Formula di De Moivre) Sia $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}$ e sia $z^2 = |z|^2(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|^2e^{2i\theta}$, allora*

$$z^n = |z|^n(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{4.1}$$

Teorema 4.3.2. *(Teorema fondamentale dell'algebra) Sia $P(z)$ un polinomio a coefficienti complessi $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ con grado $n \geq 1$. Allora esistono esattamente n radici per $P(z)$*

Sia $z \in \mathbb{C}$, vogliamo studiare

$$w^n - z = 0 \iff w^n = z \tag{4.2}$$

Se $z = 0 \implies 0$ è l'unica radice di 4.2 con molteplici n. Sia $n \neq 0$, allora

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Cerco w tale che $w^n = z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ con $w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$:

- $$w_0 = |z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

- $$w_i = |z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$$

- $$w_{n-1} = |z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\theta}{n} + i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)$$

- $$w_{n-1} = |z|^{\frac{1}{n}}\left(\underbrace{\cos\frac{\theta+2n\pi}{n}}_{\cos\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right)} + i\underbrace{\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}}_{\sin\frac{\theta}{n}+2n}\right)$$

Capitolo 5

Autovettori e autovalori

5.1 Diagonalizzazione

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e $T\colon V \to V$ un'applicazione lineare chiamata **endomorfismo** di V.

Definizione 5.1.1. *Un vettore non nullo $v \in V$ si dice **autovettore** di T relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$ se vale*

$$T(v) = \lambda v$$

Si noti, difatti, che se $v \in \mathbb{O}$ allora $T(v) = T(\mathbb{O}) = \lambda\mathbb{O}$, il che non ha affatto senso. Analogamente, per le matrici vale che se $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $v \in \mathbb{K}^n \backslash \{\mathbb{O}\}$, allora esso si dice autovettore di A relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$(questo se $Av = \lambda v$).

Proposizione 5.1.1. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $T\colon U \to V$ un endomorfismo. λ è autovalore di $T \iff \ker(T - \lambda\ Id) \neq \{\mathbb{O}\}$ e v è un autovettore di T relativo a $\lambda \iff v \in \ker(T - \lambda Id) - \{\mathbb{O}\}$.*

Definizione 5.1.2. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $T\colon V \to V$ un endomorfismo. Se λ è autovalore di T allora $V_\lambda = \ker(T - \lambda Id)$ e si dice autospazio di T relativo a λ. Inoltre il numero $m_g(\lambda) - \dim(V_\lambda)$ si dice molteplicità geometrica di λ.*

Proposizione 5.1.2. *Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo e B una base di V. Allora la matrice di T relativa a B è diagonale se e solo se B è costituita da autovettori di T..*

Proposizione 5.1.3. *Sia $B = \{v_1 \cdots v_n\}$. Se v_i è un autovettore di T $\forall i = 1 \cdots n$ vale che $T(v_i) = \lambda_i V_i$ per λ_i autovalore relativo a v_i e la matrice di T relativa a B della forma*

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Se invece la matrice relativa a B di T è diagonale, allora

$$D = \begin{pmatrix} d_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

implica che $T(v_1) = d_1 v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = d_1 v_1$ è un autovalore Inoltre, ciò implica che $B = \{v_1 \cdots v - N\}$ è costituita da autovalori.

Definizione 5.1.3. *$A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice **diagonalizzabile** se esiste $B \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che $B^{-1}AB$ è diagonale.*

Teorema 5.1.1. *Sia B una base di V e sia A la matrice T relativa a B. Allora*

1. *La funzione $P_T\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definita da*

   $$P_T(\lambda) = \det(A - \lambda Im)$$

   è un polinomio di grado N e non dipende dalla scelta della base B.

2. *Uno scalare λ_0 è autovalore di $T \iff P_T(\lambda_0) = 0$.*

Dimostrazione. (1) P_T non dipende da B. Sia B' un'altra base per V e A' la matrice di T relativa a B; sappiamo che $B \in GL_n(\mathbb{K})$ dunque si ha $A' = B^{-1}AB$ e

$$\begin{aligned}\det(A' - \lambda Im) &= \det\big(B^{-1}AB - \lambda Im\big) \\ &= \det\big(B^{-1}AB - B^{-1}(\lambda Im)B\big) \\ &= \det\big[B^{-1}(A - \lambda Im)B\big] \\ &\overset{4.2.2}{=} \boxed{\det(A - \lambda_n)}\end{aligned}$$

Sappiamo inoltre che

$$P_T(\lambda) = \det(A - \lambda_n) = \det\begin{pmatrix} a_n - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nm} - \lambda \end{pmatrix}$$

è un polinomio di grado n in λ. QED

Dimostrazione. (2) $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è autovalore di T se e solo se $\ker(T - \lambda_0 Id) = \{\mathbb{O}\} \iff \exists v \neq 0$ tale che $v \in \ker(T - \lambda_0 Idv) \iff$ la matrice di $T - \lambda_0$ non è invertibile. QED

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 + 1) Sol \nsubseteq \mathbb{R}$$

In quanto A non ha autovalori reali, ovvero

$$\nexists BGL_2(\mathbb{R}) \ \mid \ B^{-1}AB \text{ sia diagonale}$$

Definizione 5.1.4. *Sia λ_0 autovalore di un endomorfismo $T \colon V \to V$ di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ finitamente generato. La **molteplicità** algebrica di λ_0 è la molteplicità $m_a(\lambda_0)$ di λ_0 come radice del polinomio caratteristico di T.*

Proposizione 5.1.4. *Sia $T \colon V \to V$ endomorfismo di V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ autovalori di T a due a due distinti(ossia $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$) e inoltre siano $v_1 \cdots v_k$ autovettori relativi a $\lambda_1 \cdots \lambda_k$. Allora*

$$v_1 \cdots v_k$$

*sono **linearmente indipendenti**.*

Dimostrazione. Si dimostra per induzione:

$k = 1$: $v_1 \neq 0 \implies v_1$ è linearmente indipendente;

$k = n$: Consideriamo vero il caso per $k - 1$ e dimostriamo il caso di k: Siano $\lambda_1 \cdots \lambda_l$ autovalori a due a due distinti e $v_1 \cdots v_k$ autovettori relativi. Siano inoltre $\alpha_1 \cdots \alpha_k \in \mathbb{K}$ tali che

$$\begin{aligned}\mathbb{O} &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_k + \alpha_k v_k \qquad (5.1)\\ \mathbb{O} &= T(\mathbb{O}) = T(k_1\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_k + \alpha_k v_k) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\lambda_{k-1} v_{k-1} + \lambda_k \alpha_k v_k \\ \mathbb{O} &= \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} \\ &\overset{\text{Ip. Ind.}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

In questo modo 5.1 diventa

$$\alpha_k v_k = \mathbb{O} \implies \alpha_k = 0$$

QED

Proposizione 5.1.5. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su $\mathbb{K}$, Se $T\colon V \to V$ endomorfismo con $dim(V) = n$ con n autovalori in $\mathbb{K}$ tutti distinti allora T è diagonalizzabile. Inoltre se A è una matrice con n autovalori in $\mathbb{K}$ a due a due distinti allora A è una matrice diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Siano $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ gli n autovalori di T con $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$. $\forall j = 1 \cdots n$, sia v_j un autovettore relativo all'autovalore λ_j. Questo fatto implica che $\{v_1 \cdots v_n\}$ è un sistema libero di n vettori in V con $dim(V) = n$. Allora $B = \{v_1 \cdots v_n\}$ è una base di v costituita da autovettori in $\mathbb{K}$. A è allora diagonalizzabile. QED

Proposizione 5.1.6. *Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con $\dim(V) = n$ e $T\colon V \to V$ un endomorfismo $\forall \lambda_0 \in \mathbb{K}$ di T. Allora si ha*

$$1 \leq m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0)$$

Dimostrazione. Siano $m_g(\lambda_0) = R$ e $m_a(\lambda_0) = s$. Sia inoltre $\{v_1 \cdots v_n\}$ base per $V_{\lambda_0} = \ker(T - \lambda_0 Id_v)$ e sia $\{v_1 \cdots v-2, v_{r+1} \cdots v_n\} = B$ un completamento ad una base di V_1. Inoltre sappiamo che $T(v_j) = \lambda_0 V_j \ \ \forall j = 1 \cdots n$. La matrice A di T relativa a B è:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \lambda_0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \qquad P_T(\lambda) = \det(A - \lambda_0 Im)$$

QED

Teorema 5.1.2. *Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con $\dim(V) = n$. Allora, T è diagonalizzabile se e solo se T ha n autovalori(contati con la molteplicità, ossia con la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori n in $\mathbb{K}$), inoltre in ciascun autovalore la molteplicità algebrica e geometrica coincidono.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Se T è diagonalizzabile allora esiste una base di autovettori $\underbrace{\{v_1 \cdots v_n\}}_{B}$ per V. Inoltre, la matrice di T relativa a B è la matrice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad P_T(\lambda) = \det(\Lambda - \lambda Im) = (\lambda_1 - \lambda) - \cdots (\lambda_m - \lambda)$$

QED

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Siano $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ gli autovalori di T e siano m_j le molteplicità di λ_j, allora

$$m_a(\lambda_j) = m_j - m_g(\lambda_j) \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} m_j = m = \dim(V)$$

V_{λ_j} ha base $\widetilde{B}_j$ che ha m_j vettori:

$$\widetilde{B}_1 = \{v_1 \cdots \underbrace{v_{m_1}}_{\mu_1}\} \ \ \widetilde{B}_2 = \{v_{m_1} + 1, \cdots, \underbrace{v_{m_1+m_2}}_{\mu_2}\} \ \ \widetilde{B}_r = \{\underbrace{v_{m_1} + \cdots + m_{r-1}}_{\mu_{r-1}+1} + 1, \cdots, v_{m_1} + \cdots + m_r\} \ \ \sum_{k=1}^{j} m_k = \mu_k \tag{5.2}$$

A questo punto, dimostro che $\widetilde{B} = \bigcup_{k=1}^{r} b_k$ è una base di V, in particolare scriviamo la 5.2 come:

$$\mathbb{O} = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{\mu_1} v_{\mu_1}}_{w_1 \in V_{\lambda_1}} + \cdots + \underbrace{\alpha_{\mu r-1} + 1 \ v_{\mu_{r-1}} + 1 + \cdots + \alpha_{\mu_r} v_{\mu_r}}_{w_2 \in V_{\lambda_2}}$$

Ma allora siccome $\mathbb{O} = 1 \cdot w_1 + \cdots + 1 \cdot w_2 \implies w = \mathbb{O} \quad \forall j = 1 \cdots r$, ciascuno dei $w_j = \mathbb{O}$ è allora combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti. Questo ultimo fatto implica che tutti i coefficienti α_l in 5.2 sono nulli. I vettori $B = \bigcup_{k=1}^{r} b_k$ sono n vettori linearmente indipendenti in V; $\widetilde{B}$ è dunque una base di V costituita da n autovettori di T. Ciò dimostra che V è diagonalizzabile. QED

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad A \text{ è diagonalizzabile?}$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Im) = (1-\lambda) & \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ & = [(1-\lambda)^2 - 1] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}}_{(1-\lambda)^2 - 1} = (\lambda^2 - 2\lambda)^2 = \lambda^2(\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

Capitolo 6

Struttura metrica di $\mathbb{R}^n$

6.1 Spazio prehilbertiano

Definizione 6.1.1. *Il prodotto scalare canonico di uno spazio vettoriale V in un certo campo $\mathbb{R}^n$ è la funzione*

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

definito da

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad e \qquad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

tale che

$$\langle V | W \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n = \sum_{i=0}^{n} v_i w_i = w^{\mathsf{T}} v$$

6.1.1 Proprietà

1. **Il prodotto è bilineare**, ossia lineare in ciascuna variabile fissato l'altra:

$$\begin{aligned} &\langle \alpha v + \beta z | w \rangle = \alpha \langle v | w \rangle + \beta \langle z | w \rangle \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ &\langle v | w_1 + w_2 \rangle = \langle v | \lambda w \rangle \end{aligned}$$

2. Il prodotto scalare è **simmetrico**

$$\langle v | w \rangle = \langle w | v \rangle \implies \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

3. Il prodotto scalare è definito **positivo**

$$\langle v | v \rangle \geq 0 \ e \ \langle v | v \rangle > 0 \iff v \neq 0 \quad dato\ che\ \langle v | v \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

6.2 Norma

Definizione 6.2.1. *La **norma** è una funzione da uno spazio vettoriale reale o complesso ad un valore reale non negativo che misura, in un certo senso, la distanza dall'origine. Più precisamente possiamo dire che dato $V \subset \mathbb{R}^n$ la norma è definita come*

$$\| \ \| : V \to \mathbb{R} \coloneqq \|V\| = \sqrt{\langle v | v \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v^2}$$

Proposizione 6.2.1. *Sia $\langle \cdot | \cdot \rangle$ il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la sua norma. Allora*

1. $\forall v \in \mathbb{R}^n$ si ha $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0$ se e solo se $v = \mathbb{O}$;

2. $\forall \lambda$ *e* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *si ha* $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ *e* $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 < 2\langle v|w\rangle$
3. $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ *vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:*

$$|\langle v|w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$$

e l'uguaglianza vale se e solo se v *e* w *sono linearmente dipendenti.*

4. $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ *vale la disuguaglianza triangolare*

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

6.3 Interpretazione geometrica del prodotto scalare

La nozione di prodotto scalare risulta utile per effettuare delle misurazioni nel contesto degli spazi vettoriali. Abbiamo già visto come la norma possa tornare utile per misurare la lunghezza di vettori e quindi di definire la distanza tra due punti di uno spazio vettoriale. Vediamo ora come il prodotto scalare sia lo strumento adatto per misurare angoli fra vettori. Cominciamo con il caso $\mathbb{R}^2$. Siano $v, w \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbb{O}\}$ due vettori non nulli. Allora se

$$v = \begin{pmatrix} \|v\| & \cos\phi \\ \|v\| & \sin\phi \end{pmatrix} \qquad e \qquad w = \begin{pmatrix} \|w\| & \cos\psi \\ \|w\| & \sin\psi \end{pmatrix}$$

dove ϕ e ψ sono gli angoli formati da v e w con l'asse reale positovo, allora

$$\langle v|w\rangle = \|v\| \, \|w\| \, (\cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi) = \|v\| \, \|w\| \, \cos(\phi - \psi) \qquad \text{ossia} \qquad \cos(\phi-\psi) = \frac{\langle v|w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}$$

e quindi il prodotto scalare ci permette di calcolare l'angolo fra i due vertici v e w.

Definizione 6.3.1. *Sia* $\langle \cdot|\cdot \rangle$ *un prodotto scalare definito positivo su* $\mathbb{R}^n$ *e siano* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *due vettori non nulli. L'angolo(convesso) fra* v *e* w *il numero reale* $\theta = \angle(vw \in [0, \phi])$ *tale che*

$$\cos\theta = \frac{\langle v|w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}$$

Definizione 6.3.2. *Due vettori* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *si dicono* ***ortagonali*** *se* $\langle v|w\rangle = 0$ *e si scrive* $v \perp w$. *Se* $s_1 S_2 \subset \mathbb{R}^n$ *scriveremo* $S_1 \perp S_2$ *se ogni vettore di* S_1 *è ortogonale a ogni vettore in* S_2 *Se* S_1 *consiste in un solo elemento* v *si scrive semplicemente* $v \perp S_2$.

6.4 Basi ortonormali per sottospazi di $\mathbb{R}^n$

Proposizione 6.4.1. *Siano* $v_1 \cdots v_k \in \mathbb{R}^n$ *vettori non nulli a due a due ortogonali. Allora* $v_1 \cdots v_k$ *sono linearmente indipendenti. In particolare se* $k = n = \dim(\mathbb{R}^n)$, *allora* $\{v_1 \cdots v_n\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Siano $\alpha_1 \cdots \alpha_k \in \mathbb{R} \mid \alpha v_1 + \cdots \alpha_k v_k = \mathbb{O}$ e sia $i_0 \in \{1 \cdots k\}$. Allora posso calcolare

$$\langle v_{j_0}|\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_1 \langle v_{j_0}|v_1\rangle$$

QED

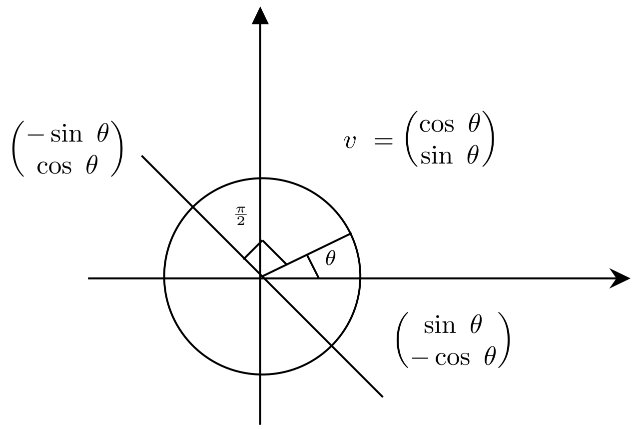
Definizione 6.4.1. *Sia* $V \subset \mathbb{R}^n$ *sottospazio vettoriale e* B *una base ortogonale di* V, *tale che* $B = \{v_1 \cdots v_k\}$ *è una base tale che* $v_i \perp v_j$ $\forall i \neq j$. *In questo modo* B *viene detta* ***ortogonale***. *Inoltre se* $\forall i = 1 \cdots k$ *si ha* $\|v_i\| = 1$.

Proposizione 6.4.2. *Se* $B = \{v_1 \cdots v_k\}$ *è una base ortogonale allora lo è pure* $\widetilde{B} = \{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \cdots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\}$

Proposizione 6.4.3. *Sia* V *un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^n$ *e* $\{v_1 \cdots v_k\} \subset V$ *è una base ortonormale se e solo se* $\forall i, j$ *vale che*

$$\langle v_1|v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Esempio:
Descrivo tutte le basi ortonormali di $\mathbb{R}^2$. Sia v il primo vettore di una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$



Dunque al varioare di $\theta \in \mathbb{R}$ l'insieme di tutte le basi ortonormali di $\mathbb{R}^2$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \right\} \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Proposizione 6.4.4. *Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale e $\{v_1 \cdots v_k\}$ una base ortonormale, allora $\forall v \in V$ si ha che*

$$v = \sum_{i=1}^{k} \langle v|v_1\rangle\, v_i \qquad \underline{\textit{Somma di Fourier}}$$

Dimostrazione. Sia $v = \sum_{1}^{k} \alpha_i v_i \qquad \alpha_1 \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}$. Allora calcolo α_{i0} tale che

$$\langle v_1|v_{i0}\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_1 v_1 \mid v_{i0} \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_1 \langle v_1|v_{i0}\rangle = \alpha_{i0}$$

<u>QED</u>

6.5 Procedura di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Siano w_1 e w_2 due vettori, allora posso cercare $w_1 = v_2 - \alpha w_1$ tale che $\langle w_2|w_1\rangle = 0$, ossia voglio che

$$\begin{aligned} 0 =&\ \langle v_2 - \alpha w_1|w_1\rangle \\ =&\ \langle v_2|w_1\rangle - \alpha \langle w_1|w_1\rangle \end{aligned}$$

Il che implica che

$$\alpha = \frac{\langle v_2|w_1\rangle}{\langle w_1|w_1\rangle} = w_2 = v_2 - \alpha_1 \perp w_1$$

e che

$$0 = \langle v_3 - \alpha w_1 - \beta w_2|w_1\rangle = \langle v_3|w_1\rangle - \alpha \langle w_1|w_1\rangle$$

$$0 = \langle v_3 - \alpha w_1 - \beta w_2|w_2\rangle = \langle v_3|w_2\rangle - \beta \langle w_2|w_2\rangle$$

Teorema 6.5.1. *(Processo di Gram-Schmidt) Siano $v_1 \cdots v_4 \in V \subset \mathbb{R}^n$ vettori linearmente indipendenti. Allora i vettori $w_1 \cdots w_r$ definiti per ricorrenza da*

1. $w_1 = v_1$;
2. $$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2|w_1\rangle}{\langle w_1|w_1\rangle} v_1$$

3.

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3|v_1\rangle}{\langle w_1|w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3|w_2\rangle}{\langle w_2|w_2\rangle} w_2$$

$\vdots$

j

$$w_j = v_j - \sum_{j=1}^{j-1} \frac{\langle v_j|w_i\rangle}{\langle w_i|w_i\rangle} w_i$$

soddisfano le seguenti proprietà:

1. *Span*$(w_1 \cdots w_i) =$ *Span*$(v_1 \cdots v_i) \quad \forall i = 1 \cdots r$*;*
2. $w_i \perp$ *Span*$(w_1 \cdots w_{i-1}) \quad \forall i = 2 \cdots r$*;*
3. *Se* $V =$ *Span*$(v_1 \cdots v_r) \implies \left\{ \frac{w_1}{\|w\|} \cdots \frac{w_r}{\|w_r\|} \right\}$ *è una base ortonormale per* V*.*

Dimostrazione. Si procede per induzione sull'indice j. Se $j = 1$ gli enunciati sono banali. Supponiamo che il risultato sia vero $j-1$, allora in particolare $Span(w_1 \cdots w_{j-1}, v_j) = Span(v_1 \cdots v_{j-1}, v_j)$ e, per costruzione $w_j \in Span(w_1, \cdots, w_{j-1} v_j)$. Dato che per $\forall k, j$ si ha che

$$\begin{aligned} \langle w_j|w_k\rangle &= \left\langle v_j = \sum_{h=1}^{j-1} \frac{\langle v_j|w_k\rangle}{\langle w_h|w_h\rangle} w_h, w_k \right\rangle = \langle v_j|w_k\rangle - \sum_{h=1}^{j-1} \frac{\langle v_j|w_h\rangle}{\langle w_h|w_h\rangle} \langle w_h|w_k\rangle \\ &= \langle v_j|w_k\rangle - \frac{\langle v_j|w_k\rangle}{\langle w_k|w_k\rangle} \langle w_k|w_k\rangle = 0 \end{aligned}$$

allora i vettori $w_1 \cdots w_{j-1}, w_j$ sono a due a due ortogonali in $Span(v_1 \cdots v_{j-1}, v_j)$ e quindi $Span(v_1 \cdots w_j) = Span(v_1 \cdots v_j)$. Da questo segue che anche w_j è ortogonale a $Span(w_1 \cdots w_{j-1})$. QED

Corollario 6.5.1. *(Completamento ortonormale) Siano* $v_1 \cdots v_R$ *vettori non nulli a due a due ortogonali in uno spazio vettoriale* $V \in \mathbb{R}^n$ *con* $\dim(V) = k$*, allora*

$$\exists v_{r+1} \cdots v_k \iff \{v_1 \cdots v_r, v_{r+1} \cdots v_k\}$$

è una base ortonormale di V*.*

6.6 Matrici ortogonali

Definizione 6.6.1. *Un isomorfismo* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *si dice* ***isometria*** *se* $\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \langle T(v)|T(w)\rangle = \langle v|w\rangle$*. Se* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *è lineare allora* $T = L_A$ *con* $A \in M_n(\mathbb{R})$*; se, invece,* T *è biettiva allora* $A \in GL_n(\mathbb{R})$*. Una matrice* $A \in M_n$ *si dice ortogonale se è invertibile e se l'inverso è uguale alla matrice trasposta.*

Proposizione 6.6.1. *Sia* $A \in M_n(\mathbb{R})$*, allora*

1. A *è ortogonale;*
2. L_A *è isometria di* $\mathbb{R}^n$
3. *Le colonne di* A *costituiscono una base ortonormale di* $\mathbb{R}^n$

Inltre possiamo affermare che:

> *Se* A *è orotogonale, allora* A^{-1} *è ortogonale e se* B *è un'altra matrice ortogonale, allora pure* AB *lo è.*

Dimostrazione. ($1 \implies 2$) Sia $A \in GL_n$ e $A^{-1} = A^\intercal$ e sia $v, w \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\langle L_A(v)|L_A(w)\rangle = \langle Av|Aw\rangle = (Av)^\intercal Av = w^\intercal A^\intercal Av = w^\intercal v = \langle v|w\rangle$$

QED

Dimostrazione. ($1 \Longleftarrow 2$) $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha che

$$\begin{aligned} \langle v|w\rangle &= \langle L_A(v)|L_A(w)\rangle \\ &= \langle Av|Aw\rangle = w^\intercal A^\intercal Av \\ &= \langle A^\intercal Av|w\rangle \end{aligned}$$

e quindi $\langle v - A^\intercal Av|w\rangle = 0 \ \forall v, w \in \mathbb{R}^n$. QED

Dimostrazione. ($1 \iff 3$) Sia $A = (A' \cdots A^n)$ ortogonale. Questo succede se e solo se

$$\langle A^i|A^i\rangle = (A')^\intercal \overset{Kronecker}{=} \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \iff \{A' \cdots A^n\} \text{ è una base ortogonale di } \mathbb{R}^n$$

QED

Definizione 6.6.2. *Denotiamo con $O(n)$ il gruppo di tutte le matrici ortagonali tali che*

$$\begin{aligned} A \in O(n) &\implies A^{-1} = A^\intercal \in O(n) \\ A, B \in O(n) &\implies AB \in O(n) \end{aligned}$$

Proposizione 6.6.2. *Sia $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare, B, B' basi ortonormali e $\mathscr{B}$ la matrice del cambio di base data da B a B'. Siano inoltre A, A' le matrici di T relative a B, B'. Allora*

$$A' = B^{-1}AB = B^\intercal AB$$

Definizione 6.6.3. *Siano $A, A' \in M_n$. Esse si dicono congruenti se esiste $B \in GL_n$ tale che $A' = B^\intercal AB$.*

6.7 Teorema spettrale

Dimostreremo ora che ogni matrice simmetrica reale ha tutti gli autovalori reali, è diagonalizzabile ed esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita dai suoi autovettori. Questo è un risultato molto importante conosciuto con il nome di *teorema spettrale.* Lo enunceremo e dimostreremo con precisione in questa sezione.

Proposizione 6.7.1. *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica reale. Allora A ha esattamente n autovalori reali.*

Dimostrazione. Data una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$, si consideri l'endomorfismo $L_A \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Allora L_A ha n autovalori contati con la loro molteplicità in $\mathbb{C}$. Pertanto ci resta da dimostrare che in efffetti sono tutti reali. Sia allora $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ un autovettore di A relativo all'autovalore λ. Allora $Av = \lambda v$. Utilizziamo le seguenti notazioni per vettori e matrici:

$$\textit{se } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \ \textit{ allora } \ \widehat{w} = \begin{pmatrix} \widehat{w}_1 \\ \vdots \\ \widehat{w}_n \end{pmatrix}, \qquad \textit{se } A = (a_{ij}) \in M(\mathbb{C}) \textit{ allora } \widehat{A} = (\widehat{a}_{ij})$$

In particolare, si ha $(\widehat{w})^\intercal w = |w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2 \geq 0$ e $(\widehat{w})^\intercal w = |w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2 = 0$ se e solo se $w = \mathbb{O} \in \mathbb{C}^n$. Dunque

$$\widehat{\lambda}(|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2) = \widehat{\lambda}(\widehat{v})^\intercal v = (\widehat{\lambda v})^\intercal v = \widehat{Av}^\intercal v = (\widehat{v})^\intercal \widehat{A}^\intercal v = (\widehat{v})^\intercal Av = \lambda(\widehat{v})^\intercal v = \lambda(|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2)$$

Dato che $|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2 \neq 0$ questo è possibile se e solo se $\widehat{\lambda} = \lambda$ ossia se $\lambda \in \mathbb{R}$. QED

Teorema 6.7.1. *(Teorema spettrale per matrici in $\mathbb{R}$) Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice reale simmetrica ossia tale che $A = A^\intercal$. Allora tutti gli autovalori di A sono reali, A è diagonalizzabile e esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A è quindi esiste una matrice ortogonale B tale che $B^{-1}AB = B^\intercal AB$ sia diagonale con la diagonale compsota dagli autovalori di A.*

Dimostrazione. Si può procedere per induzione su n. Se $n = 1$ il risultato è ovvio. Supponiamo che $n > 1$ e che il risultato sia vero per $n-1$. Ricordiamo che la matrice A è la matrice dell'applicazione lineare $L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ relative alla base canonica di $\mathbb{R}^n$. Sappiamo che esiste un autovalore $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ di A. Sia B^1 un autovettore relativo a λ_1. Allora esistono $\widehat{B}^2, \cdots, \widehat{B}^n \in \mathbb{R}^n$ tali che $\widehat{\mathcal{B}} = \{B^1, \widehat{B}^2, \cdots, \widehat{B}^n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Allora la matrice $\widehat{B} = (B^1, \widehat{B}^2, \cdots, \widehat{B}^n)$ è una matrice ortogonale. Sia $\widehat{A}$ la matrice dell'applicazione lineare $L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ relativa alla base $\widehat{B}$. Allora $\widehat{A} = \widehat{A}^{-1} A \widehat{B} = \widehat{B}^\intercal A \widehat{B}$ e $\widehat{A}$ è simmetrica dato che $\widehat{A}^\intercal = [\widehat{B}^\intercal A \widehat{B}]^\intercal = \widehat{B}^\intercal A^\intercal (\widehat{B}^\intercal)^\intercal = \widehat{B}^\intercal A \widehat{B} = \widehat{A}$ e quindi, dato che $L_A(B^1) = \lambda_1 B^1$, si ha che

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

dove A' è una matrice simmetrica di ordine $n-1$. Per l'ipotesi induttiva allora esiste una matrice ortogonale C di ordine $n-1$ tale che $\widetilde{D} = (C)^\intercal A' C$ è una matrice diagonale di ordine $n-1$. Sia

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Allora la matrice $B = \widehat{B}\widetilde{B}$ è ortogonale e la matrice

$$\begin{aligned} D = B^\intercal A B = \widetilde{B}^\intercal [\widehat{B}^{\intercal T} A \widehat{B}] \widetilde{B} = \widetilde{B}^\intercal \widehat{A} \widetilde{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C^\intercal & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & & C \\ 0 & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C^\intercal A' C & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{D} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è una matrice diagonale. Inoltre la matrice D è la matrice dell'applicazione lineare L_A rispetto alla base ortogonale costituita dalle colonne della matrice ortogonale $B = \widehat{B}\widetilde{B}$. I vettori di questa base, ossia le colonne di B sono autovettori dell'applicazione L_A e quindi di A, dato che D è diagonale e gli elementi sulla diagonale di D sono esattamente gli autovalori di L_A, e quindi di A. QED

Proposizione 6.7.2. *Sia A una matrice simmetrica reale. Gli autovettori di A relativi a autovalori disinti sono ortogonali.*

Proposizione 6.7.3. *Siano $\mu \neq \nu$ autovalori di A e v, w autovettori realtivi rispettivamente A μ e ν, ossia $Av = \mu v$ e $Aw = vw$. Allora*

$$\mu \langle v|w \rangle = \langle \mu v|w \rangle = w^\intercal(\mu v) = w^\intercal A v = [w^\intercal A v]^\intercal = v^\intercal A^\intercal w = v^\intercal A w = v^\intercal \nu w = \nu v^\intercal w = \nu \langle w|v \rangle = \nu \langle v|w \rangle$$

e quindi, dato che $\mu \neq \nu$ allora deve valere che $\langle u|w \rangle = 0$.

Capitolo 7

Esercizi

7.1 Sistemi lineari

Esercizio 7.1.1. *Dopo aver studiato la sezione relativa a questo argomento, rispondere alle seguenti domande di teoria:*

1. *Cosa significa che due sistemi lineare sono equivalenti?*
2. *Cosa vuol dire che un sistema è ottenuto da un altro mediante eliminazione di Gauss?*
3. *Cosa vuol dire che una data matrice B è riduzione di Gauss della matrice A?*
4. *Enunciare una condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema triangolare abbia soluzione unica.*

Risposta 7.1.1. .

1. *Due sistemi lineari vengono detti equivalenti se ammettono le stesse soluzioni.*
2. *Significa che, applicando l'algoritmo di eliminazione Gaussiana ad un certo sistema A, si ottiene il sistema B.*
3. *Signfifica che la matrice B associata ad un certo sistema lineare $Bx = b$ è soluzione di un certo sistema $Ax = a$ con matrice associata uguale ad A.*
4. *Un sistema quadrato $Ax = a$ ha soluzione unica se e solo se una sua qualunque riduzione di Gauss triangolare superiore $Sx = b$ ha tutti i termini della diagonale principale non nulli.*

Esercizio 7.1.2. *Trovare, se esse esistono, le soluzioni dei seguenti sistemi lineari:*

1.
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -x + 2y - 3z = -2 \\ -2y + 3z - 4t = -11 \\ -3z + 4t = 15 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 11x_2 + 5x_3 = 9 \\ 4x_1 + 18x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

Risposta 7.1.2. *1.*

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ -x+2y-3z=-2 \\ -2y+3z-4t=-11 \\ -3z+4t=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-2y=5 \\ -2y+3z-4t=-11 \\ -\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}z=\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=-1 \\ t=3 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=8 \\ -x_1-2x_2+3x_3=1 \\ 3x_1-7x_2+4x_3=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 52 & 104 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=8 \\ -t_2+5x_3=9 \\ 52x_3=104 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=1 \\ x_3=2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{cases} 2x_1+8x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+11x_2+5x_3=9 \\ 4x_1+18x_2+3x_3=11 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 & 0 \\ 2 & 11 & 5 & 9 \\ 4 & 18 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 2 & 11 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1+8x_2-4x_3=0 \\ 3x_2+9x_3=9 \\ 5x_3=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=0 \\ x_3=1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.2 Spazi vettoriali

Esercizio 7.2.1. .

1. *Dare la definizione di spazio vettoriale*
2. *Dare la definizione di sottospazio vettoriale*
3. *Cosa significa che un vettore è combinazione lineare?*
4. *Cosa significa che un vettore è linearmente indipendente?*
5. *Cosa si intende per "span"?*

6. *Dare la definizione di base e di dimensione di spazio vettoriale finitamente generato.*

Risposta 7.2.1. .

1. *Uno spazio vettoriale V è un insieme non vuoto su un certo campo $\mathbb{K}$ in cui valgono le operazioni di somma tra vettori e di prodotto di un vettore per uno scalare. Inoltre la coppia $(V,+)$ è un gruppo abeliano.*
2. *Un sottospazio vettoriale U di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme $\emptyset \neq U \subset V$ tale che esso è chiuso rispetto alla soma tra vettori e rispetto al prodotto tra vettori e uno scalare.*
3. *Data una lista di vettori $v_1 \cdots v_n \in V$ e una lista di scalari $\lambda_1 \cdots \lambda_n \in \mathbb{K}$, v si definisce combinazione lineare di $v_1 \cdots v_n$ se è della forma*
$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$
4. *Una lista di vettori $v_1 \cdots v_n \in \mathbb{K}$ si definiscono linearmente indipendenti se il fatto che la loro combinazione lineare sia uguale a zero, implica che tutti gli scalari siano nulli, ovvero:*
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbb{O} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \mathbb{O}$$
5. *Con il termine "span"(o copertura lineare) si intende l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di una certa lista di vettori $v_1 \cdots v_n$.*
6. *Una base $B = \{v_1 \cdots v_n\}$ di uno spazio vettoriale V, è un sottoinsieme di V tale che $v_1 \cdots v_n$ sono linearmente indipendenti e B è un insieme di generatori per V, ovvero $B = span(v_1 \cdots v_n)$*

Esercizio 7.2.2. *Dire quale dei seguenti insiemi è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$:*

1. $$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 1 = 0 \right\}$$
2. $$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0 \right\}$$
3. $$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 0 \right\}$$

Risposta 7.2.2. .

1. *Verifichiamo anzitutto che il vettore nullo appartenga all'insieme V_1:*
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V_1$$
Pertanto V_1 non è un sottospazio vettoriale.
2. *Visto che $2(0) - 0 = 0$ allora $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_2$. Verifichiamo adesso la somma. Siano $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2(x_2, y_2)$ elementi di V_2, allora*
$$\begin{aligned} &\Rightarrow v_1 + v_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2), (y_1 + y_2) \\ &\Rightarrow 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = 0 \\ &2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2 = 0 \\ &\underbrace{(2x_1 - y_1)}_{2x-y=0} + \underbrace{(2x_2 - y_2)}_{2x-y=0} = 0 \end{aligned}$$
Infine, verifichiamo il prodotto. Siano $v_1 = (x_1, y_1) \in V_2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora
$$\begin{aligned} &\lambda v_1 = \lambda(x_1, y_1) = \lambda x_1 + \lambda y_1 = 0 \\ &\Rightarrow 2\lambda x_1 - \lambda y = 0 \Rightarrow \lambda\underbrace{(2x_1 - y_1)}_{0} = 0 \Rightarrow \lambda 0 = 0 \end{aligned}$$
L'insieme V_2 è un sottospazio vettoriale.

3. *Visto che $x^2 = 0$ è l'asse delle x in $\mathbb{R}^2$, allora V_3 è un sottospazio vettoriale.*

Esercizio 7.2.3. *Sia $\aleph = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una lista finita di vettori, tale che*

$$v_1 = (1, 0, -1, 1) \qquad v_2 = (0, 0, 1, 0) \qquad v_3 = (-1, 1, 3, 0) \qquad v_4 = (2, 4, 2, 5)$$

determinare se essi sono linearmente indipendenti oppure no.

Risposta 7.2.3. *Per essere linearmente indipendenti, i quattro vettori devono soddisfare l'equazione*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = \mathbb{O}_{\mathbb{R}^4} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \mathbb{O}$$

Verifichiamo:

$$\begin{aligned} &\alpha_1(1, 0, -1, 1) + \alpha_2(0, 0, 1, 0) + \alpha_3(-1, 1, 3, 0) + \alpha_4(2, 4, 2, 5) \\ \implies &(\alpha_1, 0, -\alpha_1, \alpha_1) + (0, 0, \alpha_2, 0) + (-\alpha_3, \alpha_3, 3\alpha_3, 0) + (2\alpha_4, 4\alpha_4, 2\alpha_4, 5\alpha_2) \\ = &(\alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_3 + 4\alpha_4, -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_1 + 5\alpha_4) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

A questo punto possiamo costruire il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \\ 7\alpha_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Visto che l'unica soluzione è quella banale, allora $\aleph = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è linearmente indipendente.

7.3 Kernel e immagine

Esercizio 7.3.1. *.*

1. *Dare la definizione di Immagine e di Kernel di un'applicazione lineare*
2. *Dimostrare che ogni applicazione lineare mappa 0 a 0.*
3. *Dare la definizione di rango di un'applicazione lineare*
4. *Enunciare il teorema della dimensione.*

Risposta 7.3.1. *.*

1. *L'immagine di un'applicazione lineare $T\colon V \to W$ è il sottoinsieme del codominio W che ha per elementi tutti i vettori di W che mappano, tramite T, gli elementi di V. Ovvero*

$$Im(T) = \{w \in W \mid \exists v \in V \ : \ T(v) = w\}$$

Il nucleo, invece, è un sottoinsieme del dominio dell'applicazione che mappa gli elementi del dominio in zeri del codominio, ovvero

$$\ker(T) := \{v \in V \mid T(v) = 0\} \qquad \text{con } T\colon V \to W$$

Per dimostrare questa affermazione è sufficiente applicare la proprietà di additività delle applicazioni lineari:

$$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$$

aggiungendo l'inverso additivo di $T(0)$ in ciascun lato dell'quazione, si ottiene la tesi.

Il rango di un'applicazione lineare è definito come la dimensione dello spazio vettoriale dato dalla sua immagine, ovvero:

$$\text{rank}(T) = \dim(Im(V))$$

con $T : V \to W$.

Il teorema della dimensione per applicazioni lineari enuncia che

$$\dim(V) = \text{rank}(T) + \dim(\ker(T))$$

con $T : V \to W$ e V spazio vettoriale finitamente generato.

7.4 Rango

Esercizio 7.4.1. .

1. *Enunciare il teorema di Rouché-Capelli;*
2. *Cosa significa che due applicazione lineari sono isomorfe?*
3. *Cosa significa che una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile?*

Risposta 7.4.1. .

1. *Il teorema di Rouché-Cappelli enuncia che un sistema lineare $Ax = b$ di m equazioni in n incognite ha soluzione se e solo se il rango della matrice $A = (A', \cdots, A^n)$ del sistema è uguale al rango della matrice completa $A' = (A', \cdots, A^n, b)$ del sistema.*
2. *Due applicazioni lineari si dicono isomorfe se e solo se esiste una correlazione biunivoca tra i due oggetti.*
3. *Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ viene detta invertibile se esiste una matrice quadrata dello stesso ordine della matrice A, solitamente indicata con A^{-1}, tale che il prodotto delle righe per le colonne tra le suddette matrici restituisca la matrice identità di ordine n, ovvero:*

$$A \in GL_m(\mathbb{K}) \iff \exists A^{-1} \mid AA^{-1} = Id_n = A^{-1}A$$