Calcul Numeric

Cursul 1

2022

Anca Ignat

Echipa

Andreea Arusoaie **Valentin Roşca**

Ştefan Bălăucă **Augustus Tabarcea (en)**

Sebastian Ciobanu **Anca Ignat**

Andrei Luca

ancai@info.uaic.ro , **ancai_fii@yahoo.ro**

numericalcalculus2019@gmail.com – teme de laborator

http://profs.info.uaic.ro/~ancai/CN/

Detalii despre modul de desfăşurare online: Discord

Consultaţii:

- **prin e-mail la adresele de mai sus sau**
- **Online, Zoom – Luni 16:30-18**

Regulament - 2022

Laborator

- 8 teme
- cei care prezintă temele până la termenul limită precizat la fiecare temă, punctajul maxim ce poate fi obţinut este punctajul afişat pentru fiecare temă
- cei care prezintă temele după termenul limită precizat punctarea se va face din 50% din punctajul temei prezentate

Examen

- teză scrisă de 1 oră, cu 3 sau 4 exerciţii din materia predată, *″cu cursurile pe masă″*
- teza scrisă este notată între 1 şi 10
- testul scris va avea loc:

  - în perioada ?? mai - ?? mai 2022 - din primele 9 cursuri
  - 23 mai - 28 mai 2022 - pentru cei care nu obţin punctaj de promovare sau pentru mărirea notei - din toate cursurile

Calculul punctajului / notei final(e)

Punctaj final = punctaj laborator + 45*nota examen

Promovează disciplina acei studenţi care au:

- **nota la examen $\geq$ 3**

şi

- **punctaj final $\geq$ 410 pt**

Nota finală se calculează din punctajul final aplicând **”curba lui Gauss”**.

Desfăşurarea semestrului

Săptămânânile 1-7 şi 9-13 – şcoală conform orarului

Săptămâna a 8-a (prima săptămână de evaluare) – liberă

Săptămânile 10, 11, 12 - test scris

Bibliografie

1. Elemente de informatică şi calcul numeric, vol. 1 - C.Ignat, C.Ilioi, T.Jucan - Ed. Univ. 'Al. I. Cuza' Iaşi, 1987
2. Matrix Computations - G.H. Golub, C.F. van Loan - John Hopkins Univ. Press, 2012
3. Numerical Analysis – R.L. Burden, J.D. Faires – Brooks/Cole, Thomson Learning (10-th edition, 2015)
4. Calcul numeric în C - T. A. Beu - Ed. Albastră, Cluj, 2004
5. Numerical analysis with algorithms and programming, Santanu Saha Ray, CRC Press, 2016.
6. Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing**,** W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, Cambridge University Press, NY, USA, 2007 (http://numerical.recipes/)
7. Linear Algebra, Ideas and Applications - R.C. Penney, 4-th ed., Wiley, 2016
8. Numerical Optimization – J. Nocedal, S.J. Wright, Springer-Verlag, New York, 1999

Capitolele cursului

1. Rezolvarea sistemelor liniare ($\boldsymbol{Ax=b}$)

2. Optimizare numerică (**min** $\{ \boldsymbol{F(x)\ ;\ x \in R^n} \}$)

3. Valori şi vectori proprii ($\boldsymbol{Au = \lambda u}$)

4. Ecuaţii neliniare ($\boldsymbol{f(x)=0}$)

5. Interpolare numerică

“***The world cannot be understood without numbers. But the world cannot be understood with numbers alone.***”

Hans Rosling, Anna Rosling Ronnlund, Ola Rosling

Factfulness. Zece motive pentru care interpretăm greşit lumea şi de ce lucrurile stau mai bine decât crezi

“The world cannot be understood without numbers, nor through numbers alone.”

Traffic Flow

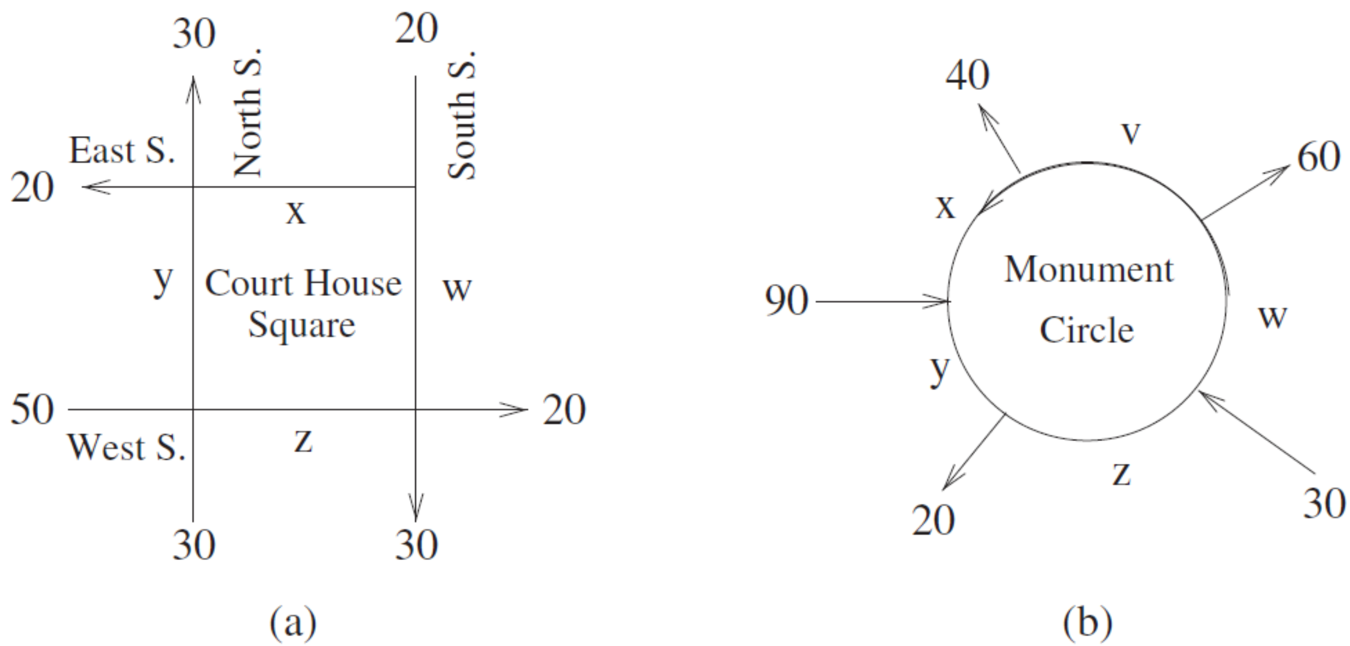
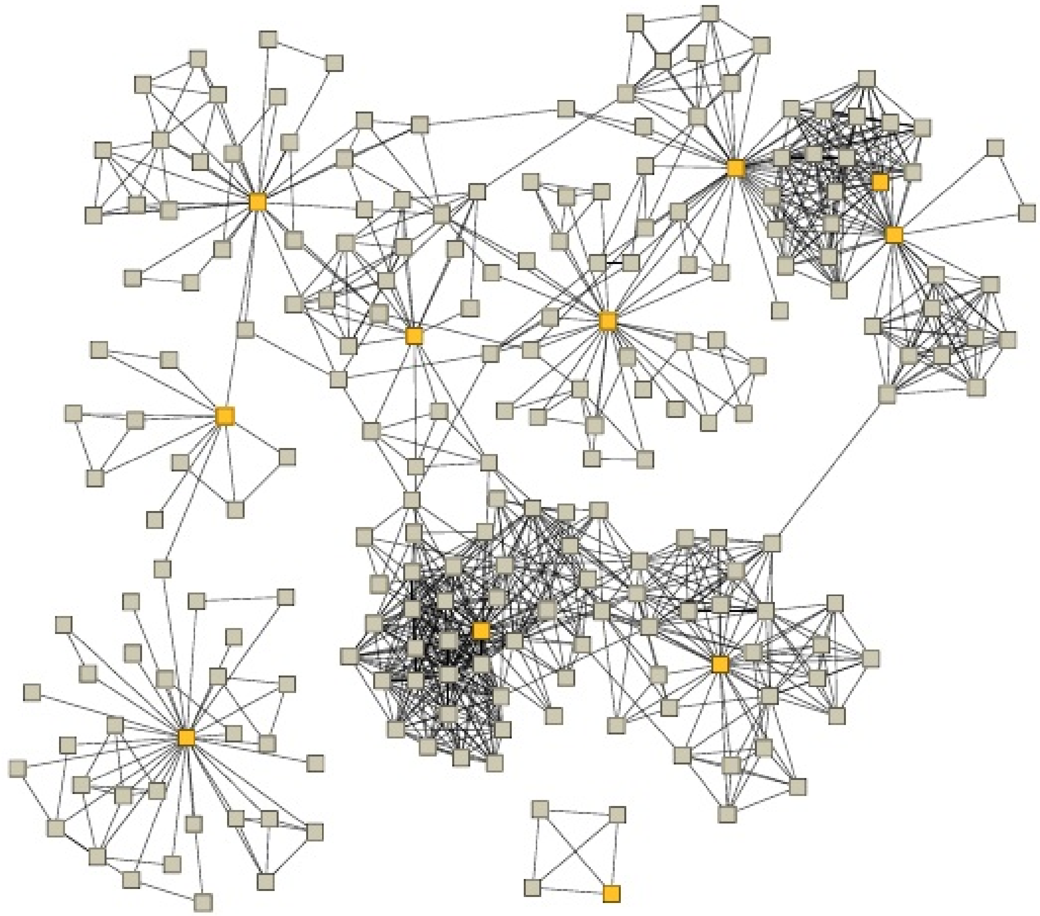


FIGURE 1.24 Two traffic patterns.

(R.C. Penney – Linear Algebra, Ideas and Applications, 4-th ed., Wiley, 2016)

- one way streets;
- the numbers represent the average number of cars per minute that enter or leave a given street at 3:30pm;
- ***x*, *y*, *z*, *w***, … - average number of cars per minute on a certain street
- no. of cars entering = no. of cars leaving

$$\begin{aligned} x + y \quad\quad\quad\quad &= 50 \\ y + z \quad\quad &= 80 \\ z + w &= 50 \\ x + \quad\quad\quad\quad w &= 20 \\ x + y + z + w &= 100 \end{aligned}$$



Centralitate în reţelele sociale

- noţiune introdusă de A. Bavelas în 1948 studiind comunicarea între oameni

(V, E) – graful care modelează reţeaua, $\boldsymbol{A}$ – matricea de adiacenţă asociată, $\boldsymbol{A = (a_{ij})_{i,j=1}^{N}}$, $\boldsymbol{N}$=|**?**|

- care sunt cele mai ‘importante’ noduri din reţea?

1. Centralitate de grad (‘*degree centrality*’) – se bazează pe noţiunea de grad/grade asociate nodurilor în grafuri

   Se numeşte **drum geodesic** între două vârfuri orice drum de lungime minimă (număr minim de muchii) dintre cele 2 vârfuri.

2. Centralitate de apropiere (‘*closeness centrality*’)

   Centralitatea de apropiere a unui nod este suma lungimilor drumurilor geodesice de la nodul respectiv la toate celelalte noduri.

3. Centralitate de interrelaţie (‘*betweennes centrality*’)

$$\boldsymbol{b(v) = \sum_{\substack{s \neq v \neq t, \\ s,t \in V}} \frac{n_{st}(v)}{n_{st}}}$$

unde $\boldsymbol{n_{st}}$ este numărul total de drumuri geodesice între nodurile ***s*** şi ***t***, iar $\boldsymbol{n_{st}(v)}$ este numărul de drumuri geodesice care trec prin nodul ***v***.

- măsoară controlul pe care îl deţine nodul ***v*** în circulaţia informaţiilor în reţea

4. Centralitate de vector propriu (‘*eigenvector centrality’*)

- se ţine cont de faptul că nu toate muchiile (conexiunile) sunt la fel de importante (ca în cazul centralităţii de grad)

- conexiunile către persoane influente vor ‘împrumuta’ importanţă mai mare decât conexiunie către persoanele mai puţin influente

x(i) = centralitatea de vector propriu a nodului $\boldsymbol{v_i}$

$$x(i)=\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in\Gamma(v_i)}x(j)=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}x(j)\ ,\ \lambda>0 \text{ o constanta}$$

$$x=(x(1),x(2),\ldots,x(N))^T$$

$$x=\frac{1}{\lambda}Ax \ \Leftrightarrow Ax=\lambda x$$

$\lambda_A>0$* -** valoarea proprie Perron (cea mai mare valoare proprie) , ***x – vectorul propriu asociat

Compresia imaginilor digitale şi descompunerea după valori singulare

o imagine digitală ↔ matrice de pixeli $\boldsymbol{A}$ cu $\boldsymbol{m}$ linii şi $\boldsymbol{n}$ coloane

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a}_{ij}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \;,\; \boldsymbol{a}_{ij} \in \mathbb{R} \text{ sau } \mathbb{R}^3$$

$$(\boldsymbol{a}_{ij} \in \{\mathbf{0,1,\ldots,255}\} \text{ sau } \boldsymbol{a}_{ij} \in \{\mathbf{0,1,\ldots,255}\}^3 \text{ sau } \boldsymbol{a}_{ij} \in [\mathbf{0,1}]^{(3)}\ )$$

Memorarea lui $\boldsymbol{A}$: ***m·n·*mem*(int/double)(·3)*** bytes

Descompunerea dupa valori singulare (**SVD**) a unei matrici

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{V}^T \;,\; \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{m\times m},\, \boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{m\times n},\, \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\boldsymbol{U} = \left[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m\right],\; \boldsymbol{V} = \left[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\right] - \text{ matrici ortogonale}$$

$$\left(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j\right)_{\mathbb{R}^m}=\boldsymbol{\delta}_{ij}=\begin{cases}\mathbf{1}\ \text{daca}\ \boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\\ \mathbf{0}\ \text{daca}\ \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}\end{cases},\quad \left(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j\right)_{\mathbb{R}^n}=\boldsymbol{\delta}_{ij}\quad \forall \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & & 0\\ 0 & \sigma_2 & & 0 & & 0\\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & & \sigma_r & & 0\\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 & & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r>0\ \ ,r\leq\min\{m,n\}$ - valorile singulare ale matr. $\boldsymbol{A}$

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

$$A \approx A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$$

memorarea lui A_k necesită ***k(m+n+1)*·mem(double)**

$m=1265,\ n=538$, $r_c = \dfrac{mn}{k(m+n+1)}$,

$k=50$ $r_c=7.54$; $k=100$ $r_c=3.77$; $k=200$ $r_c=1.88$;

$k=300$ $r_c=1.25$; $k=400$ $r_c=0.94$; $k=538$ $r_c= 0.70$

Vectori şi matrici

Fie $x_i, y_i, \lambda \in \mathbb{R}$. Se definesc vectorii $x, y \in \mathbb{R}^n$ şi operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari astfel:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} .$$

Fie vectorul $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^{n}$:

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \text{ cu } \quad z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}.$$

Pentru $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}$ utilizăm notaţiile:

$$z = a + ib\text{ , } Re\, z = a, \quad Im\, z = b\ \text{ ,}$$

$\bar{z} = a - ib$ – conjugatul numărului $\boldsymbol{z}$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - modulul numărului complex $\boldsymbol{z}$

Notăm cu $\mathbb{R}^{m\times n}$ / $\mathbb{C}^{m\times n}$ spaţiul matricilor cu elemente reale / complexe cu ***m*** linii şi ***n*** coloane

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad a_{ij}\in\mathbb{R}\ /\ \mathbb{C},\ i=1,2,\ldots,m\ ,\quad j=1,2,\ldots,n$$

Definiţie

$\boldsymbol{X}$ se numeşte *spaţiu vectorial (spaţiu liniar)*

$$\boldsymbol{+ : X \times X \to X} \ \textbf{şi} \ \boldsymbol{\cdot : K \times X \to X}, \qquad \boldsymbol{(K = \mathbb{R})}$$

astfel încât $(X, +)$ este un grup comutativ :

$\boldsymbol{a + b = b + a \ , \ \forall a,b \in X}$ – comutativitate,

$\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c) \ , \ \forall a,b,c \in X}$ – asociativitate ,

$\boldsymbol{\exists\, 0 \in X}$ **a. î.** $\boldsymbol{a + 0 = 0 + a = a \ , \ \forall a \in X}$ - element neutru ,

$\boldsymbol{\forall a \in X, \ \exists -a \in X}$ a.î. $\boldsymbol{a + (-a) = (-a) + a = 0}$ – element opus.

iar pentru operaţia de înmulţire cu scalari au loc relaţiile:

$$\boldsymbol{\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b, \forall \lambda \in K, \forall a,b \in X,}$$

$$\boldsymbol{(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \forall \lambda,\mu \in K, \forall a \in X,}$$

$$\boldsymbol{\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a, \forall \lambda,\mu \in K, \forall a \in X,}$$

$\boldsymbol{\exists 1 \in K}$ astfel încât $\boldsymbol{1 \cdot a = a, \forall a \in X}$.

Definiţie

Fie $\boldsymbol{X}$ un spaţiu liniar. Spunem că vectorii $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, …, $\boldsymbol{x_p} \in \boldsymbol{X}$ sunt *liniar independenţi* dacă:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + .. + \alpha_p x_p = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ...\alpha_p = \mathbf{0}\,,\, \alpha_i \in K$$

*Spaţiu*l vectorial $\boldsymbol{X}$ este *finit dimensional* dacă există $\boldsymbol{p}$ vectori liniar independenţi în $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, …,$\boldsymbol{x_p} \in \boldsymbol{X}$, şi orice mulţime de $\boldsymbol{q}$ elemente din $\boldsymbol{X}$ cu $\boldsymbol{q} > \boldsymbol{p}$ este liniar dependentă. În acest caz dimensiunea spaţiului $\boldsymbol{X}$ este $\boldsymbol{p}$ (dim $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{p}$).

Fie spaţiul vectorial ***X*** finit dimensional cu dim ***X = p***. Orice sistem de ***p*** vectori liniar independenţi din ***X*** se numeşte *bază* a spaţiului ***X***.

Fie $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_p} \in \boldsymbol{X}$ o bază pentru spaţiul ***X*** . Atunci pentru $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, $\exists$ unice constantele $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_p} \in K$ astfel încât

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + .. + \alpha_p x_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \ .$$

$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ este un spaţiu vectorial finit dimensional, dim $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}$ cu baza canonică:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \ \dots \ , \ \boldsymbol{e}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{- poziţia } \boldsymbol{k} \\ \\ \\ \end{matrix}, \dots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Calcul matricial

Fie matricea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad A = \left(a_{ij}\right)_{i=1\ldots m,\, j=1\ldots n}$$

Se defineşte ***matricea transpusă***:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, A^T = \left(a_{ji}\right)_{i=1\ldots m,\, j=1\ldots n} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Pentru matricea:

$$A \in \mathbb{C}^{m\times n},\ A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}$$

se defineşte ***matricea adjunctă*** A^H:

$$A^H = \overline{A^T} = \left(\overline{a_{ji}}\right)_{\substack{j=1\ldots n\\ i=1\ldots m}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^H = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

Pentru $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matricea adjunctă coincide cu transpusa,

$A^H = A^T$.

Fie vectorul $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, acesta este considerat vector coloană, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\mathbf{1}}$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^T = \left(\boldsymbol{x}_1 \ \boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_n \right)$$

Dacă facem înmulţirea matricială $\boldsymbol{Ae_j}$ obţinem coloana $\boldsymbol{j}$ a matricei $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{Ae_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_{\text{poziţia } j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{Ae_j}$ este coloana $\boldsymbol{j}$ a matricei $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{j=1,...,n}$;

$\boldsymbol{e_i^T A}$ este linia $\boldsymbol{i}$ a matricei $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{i=1,...,m}$.

Fie vectorii ***x, y***, cu ajutorul lor definim produsele scalare în $\mathbb{C}^{n}$ şi $\mathbb{R}^{n}$:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n}\ ,\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n}$$

$$(x\,,\,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i\,\overline{y_i}=y^{H}x=\begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \cdots & \overline{y_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,,\; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$(x\,,\,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y^T x = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proprietăţile matricei $\boldsymbol{A^H}$	Proprietăţi ale matricei $\boldsymbol{A^T}$
1. $(A + B)^H = A^H + B^H$	$(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^H)^H = A$	$(A^T)^T = A$
3. $(AB)^H = B^H A^H$	$(AB)^T = B^T A^T$
4. $(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Propoziţie

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{m}$ atunci:

$$\left(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{C}^m} = \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^H \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{C}^n} .$$

Pentru cazul real avem:

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{m} \Rightarrow \left(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{R}^n}$$

Demonstraţie

$$\boldsymbol{(Ax , y) = y^H (Ax) = y^H A\, x = y^H (A^H)^H x =}$$

$$\boldsymbol{= (A^H y)^H x = (x , A^H y).}$$

Tipuri de matrice

Definiţii

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n \times n}}$ se numeşte ***simetrică*** dacă $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$.

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n \times n}}$ se numeşte ***autoadjunctă*** dacă $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}$.

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n \times n}}$ se numeşte ***unitară*** dacă $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}$.

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n \times n}}$ se numeşte ***ortogonală*** dacă

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{I}_{n}.$$

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A=(a_{ij})}$ se numește matrice ***triunghiulară inferior*** (sau ***inferior triunghiulară***) dacă

$$\boldsymbol{a_{ij} = 0} \text{ pentru } \boldsymbol{j > i}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A=(a_{ij})}$ se numește matrice ***triunghiulară superior*** (sau ***superior triunghiulară***) dacă

$$\boldsymbol{a_{ij} = 0} \text{ pentru } \boldsymbol{j < i}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notăm cu $\boldsymbol{I_n}$ matricea unitate:

$$\boldsymbol{I_n} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n \times n}}, \boldsymbol{I_n} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Matrice diagonală ***D*=diag*[d₁, d₂,…,dₙ]***

$$\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Norme

Definiție

Fie $\boldsymbol{X}$ un spațiu vectorial real. Se numește ***normă*** aplicația:

$$\|\,.\,\| : X \to \mathbb{R}_+$$

care îndeplinește condițiile:

$$\textbf{(1)}\quad \|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \iff x = 0;$$

$$\textbf{(2)}\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall\, x, y \in X;$$

$$\textbf{(3)}\quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall\, x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vom numi ***norme vectoriale*** normele definite pe spațiile $\boldsymbol{X} = \mathbb{C}^{n}$ sau $\mathbb{R}^{n}$.

Exemple

Fie spațiile vectoriale $\mathbb{C}^n$ sau $\mathbb{R}^n$. Pe aceste spații următoarele aplicații sunt norme vectoriale:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|;$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2};$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1..n\}.$$

Dacă $\|\cdot\|_{v}$ este o normă vectorială şi $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice nesingulară atunci aplicația:

$$\|\cdot\|_{P} : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_{P} = \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\|_{v}$$

este de asemenea o normă vectorială.

Definiție

Se numește ***produs scalar*** în spațiul vectorial ***X*** aplicația:

$$(\cdot,\cdot): X \times X \to K$$

care satisface condițiile :

$$(a)\ (x,x) \geq 0,\ \forall\, x \in X, \quad (x,x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0;$$

$$(b)\ (x,y) = \overline{(y,x)},\ \forall\, x, y \in X,$$

$$(c)\ (\lambda x, y) = \lambda (x,y),\ \forall\, x, y \in X, \forall \lambda \in K,$$

$$(d)\ (x+y, z) = (x,z) + (y,z),\ \forall\, x, y, z \in X.$$

Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$$|(x, y)| \le \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} \quad \forall x, y \in X$$

Într-un spațiu vectorial dotat cu produs scalar se poate induce o normă numită euclidiană:

$$\|x\|_2 = |x| := \sqrt{(x, x)}.$$

Reamintim definiția produselor scalare pe $\mathbb{C}^n$ şi pe $\mathbb{R}^n$ introduse anterior:

$$(x,y)_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \quad , \quad (x,y)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Obținem norma euclidiană (valabilă în spaţiile $\mathbb{C}^n$ şi $\mathbb{R}^n$):

$$\|x\|_2 = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Norme matriceale

Definiție

Aplicația $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ se numește ***normă matriceală*** dacă:

$$\textbf{(1)}\ \|A\| \geq 0\ \forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}\ ;\ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

$$\textbf{(2)}\ \|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|\ ,\forall \alpha \in \mathbb{R}\ ,\forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

$$\textbf{(3)}\ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall\ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

$$\textbf{(4)}\ \|A * B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|\ , \forall\ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Exemple

Norma Frobenius definită de relația $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ este o normă matriceală.

Aplicația $\|A\|_{\max} = \max\{|a_{ij}|; i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n\}$ ***NU*** este o normă matriceală.

Pentru $n = 2$ fie:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, B = A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$A * B = I_2 \text{ , } \|A\|_{\max} = \|B\|_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\|A * B\|_{\max} = 1 > \|A\|_{\max} \bullet \|B\|_{\max} = \frac{1}{2}.$$