# 线性可分支持向量机

最大间隔分隔超平面问题

 （1.1）

线性可分支持向量机学习的最优化问题

 （1.2）

此优化问题为凸优化问题。应用拉格朗日对偶性，通过求解对偶问题得到原始问题的最优解。

拉格朗日函数

 （1.3）

对偶问题



求



以上两式可得

 （1.4）

 （1.5）

式（1.4）（1.5）带入拉格朗日函数（1.3）中可得



即有

 （1.6）

求

 （1.7）

上式由求最大值转为求最小值

 （1.8）

由于原问题为凸优化问题，故存在，，，使得，为原问题的解为对偶问题的解，并且存在

 （1.9）

 （1.10）

式（1.10）中对应的，证明如下

条件



由此可得式（1.9）



若，则由式（1.9）可得。由于并非原问题（1.2）的解，产生矛盾。故存在，对有

 （1.11）

将（1.9）带入（1.11）并注意到，则有式（1.10）



以上证明完毕

将（1.9）带入分离超平面方程中可得

 （1.12）

分类决策函数可以写成

 （1.13）

即分类决策函数只依赖于输入与训练样本的内积。（1.13）为线性可分支持向量机的对偶形式。

对应的样本点即是支持向量。支持向量均位于间隔边界上。

# 线性支持向量机

原始问题

 （2.1）

求对偶问题

 （2.2）



以上三式可得

 （2.3）

 （2.4）

 （2.5）

式（2.3）（2.4）（2.5）带入拉格朗日函数（2.2）中可得



即有

 （2.6）

即为

 （2.7）

利用等式约束消去约束条件中的，并将目标函数由求极大转为求极小即得到对偶问题

 （2.8）

由于原问题为凸优化问题，故存在，，，使得，为原问题的解为对偶问题的解，并且存在

 （2.9）

 （2.10）

式（2.10）中对应的。

其中对应的样本点即是支持向量，其到间隔边界的距离是。

以下分情况讨论支持向量的位置

若，则，亦即，此时支持向量位于间隔边界上；

若，则，亦即，分情况讨论

若，则分类正确，支持向量位于间隔边界与分离超平面之间；

若，则支持向量位于分离超平面上；

若，则分类错误，支持向量位于分离超平面误分一侧。

# 非线性支持向量机

核函数



为核函数，为映射函数，核函数为两个映射函数的内积，简记为

核函数应用在支持向量机中，对偶问题为

 （3.1）

# 序列最小最优化算法

目标问题，支持向量机凸优化问题的对偶问题

 （4.1）

算法是一种启发算法，思路是：若所有变量的解都满足此最优化问题的条件，则该最优化问题的解就得到了；否则选择两个变量，固定其他变量，针对这两个变量构建一个二次规划问题。这个二次规划问题关于这两个变量的解应该更接近原始二次规划问题的解，因为这会使得原始二次规划问题的目标函数值变得更小。子问题有两个变量，一个是违反条件最严重的那一个，另一个由约束条件自动确定。

假设选择的两个变量是和，其他变量是固定的。则的最优化问题（4.1）的子问题可以写成

 （4.2）

假设优化问题（4.2）的初始可行解为，，最优解为，，在约束方向未经剪辑的最优解为。

下面讨论的取值范围

若，则，；

若，则，。

下面求解，

记 （4.3）

令 （4.4）

记 （4.5）

将（4.5）带入（4.2）目标函数，目标函数可以写成

 （4.6）

由和可得

 （4.7）

将式（4.7）带入（4.6）中，并利用可得

 （4.8）

将目标函数对求导，并令其等于零

 （4.9）

整理式（4.9）并将式（4.5）带入可得

 （4.10）

有 （4.11）

将（4.11）带入式（4.10）中可得

 （4.12）

令，则有

 （4.13）

对剪辑后可得

 （4.14）

由式（4.5）和（4.11）可得

 （4.15）

中的条件

分析原问题条件中



其中记

另有与

可以得到

（1） （4.16）

（2） （4.17）

（3） （4.18）

更新和

当时，由条件（4.17）可知



于是

 （4.18）

由定义式（4.4）可得

 （4.19）

整理得

 （4.20）

将（4.20）带入（4.18）中可得

 （4.21）

同理，若，也有

 （4.22）

若和同时满足，则；

若或是0或者，则和以及其之间的数都符合条件的阈值，此时选择其中点作为。

 （4.23）