โครงงานวิทยาศาสตร์

จำนวนวิธีของผลรวมของแต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าที่มี q หน้า n ลูก

The Number of Ways to Have the Sum S by Tossing n Dices Which each Dice has q Faces

นายณัฐธัญ ยอดสง่า

นายภูริณัฐ จันทร์ทองดี

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ (องค์การมหาชน)

ปีการศึกษา 2556

ใบรับรองโครงงานวิทยาศาสตร์
โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ (องค์การมหาชน)

มัธยมศึกษาตอนปลาย	คณิตศาสตร์
หลักสูตร	สาขาวิชา

จำนวนวิธีของผลรวมของแต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าที่มี q หน้า n ลูก

The Number of Ways to Have the Sum S by Tossing n Dices Which each Dice has q Faces

นามผู้จัดทำโครงงาน นายณัฐธัญ ยอดสง่า ม.5/2 เลขประจำตัวนักเรียน 06216
นายภูริณัฐ จันทร์ทองดี ม.5/2 เลขประจำตัวนักเรียน 06224

ได้รับพิจารณาเห็นชอบโดย

ประธานกรรมการ..วันที่....เดือน............พ.ศ. 2557

(อาจารย์ ถนอมศักดิ์ เหล่ากุล)

กรรมการ..วันที่....เดือน............พ.ศ. 2557

(อาจารย์ สิทธิโชค โสมอ่ำ)

กรรมการ..วันที่....เดือน............พ.ศ. 2557

(อาจารย์ ดร.อัญญารัตน์ บุญวัฒน์)

หัวหน้าสาขาวิชาคณิตศาสตร์..วันที่....เดือน............พ.ศ. 2557

(อาจารย์ ชิดเฉลิม คงประดิษฐ์)

หัวข้อโครงงาน จำนวนวิธีของผลรวมของแต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าที่มี q หน้า n ลูก

ผู้ทำโครงงาน นายณัฐธัญ ยอดสง่า

นายภูริณัฐ จันทร์ทองดี

อาจารย์ที่ปรึกษา อาจารย์ถนอมศักดิ์ เหล่ากุล

สาขา คณิตศาสตร์ **วิชา** คณิตศาสตร์

โรงเรียน มหิดลวิทยานุสรณ์ **ปีการศึกษา** 2556

บทคัดย่อ

ในการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติเมื่อเดือนพฤษภาคม ปี พ.ศ. 2546 มีข้อสอบถามว่า "จงหาจำนวนวิธีในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก 6 ครั้งแล้วได้ผลรวมแต้มเป็น 21" ทำให้ผู้จัดทำโครงงานสนใจว่า ถ้าผลรวมของแต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าที่มี q หน้า n ลูก เป็น S จะมีกี่วิธี จึงได้ศึกษาปัญหานี้ด้วยฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญ ซึ่งเรามารถทำได้ในกรณีที่ลูกเต๋ามี q หน้า n ลูก ผลรวมเป็น S และ ลูกที่ i มีแต้มบนลูกเต๋าที่เริ่มจาก r_i ถึง $r_i + q - 1$ เมื่อ $i = 1, 2, 3\ldots, n$ ผลการศึกษาพบว่า

$$n(S) = \sum_{k_1=0}^{b}\left(\binom{n}{k_1}(-1)^{k_1}\binom{n+S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i - 1}{S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i}\right) \text{ เมื่อ } b = \left\lfloor \frac{S-\sum_{i=1}^{n} r_i}{q} \right\rfloor$$

Research Title The Number of Ways to Have the Sum S by Tossing n Dices Which each Dice has q Faces

Researchers Mr.Nuttun Yodsanga and Mr.Purinut Chantongdee

Adisors Acting Sub Lt.Thanomsak Laokul

Department Mathematics

School Mahidol Wittayanusorn **Academic Year** 2013

Abstract

In the Thailand Mathematical Olympiad (TMO) held in May 2003, there was a question asking "How many ways are there to toss 6 dices and obtain the sum of 21?" This type of question is studied by using n dices, each dice has q faces, the total is S and the points on the i^{th} dice are running from r_i to $r_i + q - 1,\ i = 1, 2, 3\ldots, n$. The study is done by using generating function. We generalize this problem by considering the following problem: Find the number of ways to have the sum S by tossing n dices, each dice has q faces and the points on each face are running from r_i to $r_i + q - 1,\ i = 1, 2, 3\ldots, n$. By using generating function, we obtain the following result:

$$n(S) = \sum_{k_1=0}^{b} \left(\binom{n}{k_1} (-1)^{k_1} \binom{n + S - qk_1 - \sum_{i=1}^{n} r_i - 1}{S - qk_1 - \sum_{i=1}^{n} r_i} \right) \text{ where } b = \left\lfloor \frac{S - \sum_{i=1}^{n} r_i}{q} \right\rfloor$$

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ อาจารย์ถนอมศักดิ์ เหล่ากุล ที่คอยให้คำปรึกษาทั้งในด้านความรู้และการจัดทำรูปเล่มโครงงานทำให้โครงงานสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ขอขอบคุณ สาขาคณิตศาสตร์ โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ ที่เอื้อเฟื้อสถานที่ วัสดุ อุปกรณ์ และสิ่งอำนวยความสะดวกอื่นๆที่ใช้สำหรับการทำโครงงาน

ขอขอบคุณ เพื่อนๆ ที่ได้ให้กำลังใจ และให้ความช่วยเหลือตลอดมาโดยเฉพาะในด้านภาษาอังกฤษ สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ และคุณแม่ ผู้ที่ให้กำลังใจ ตลอดมา

คณะผู้จัดทำ
วันที่ 4 มีนาคม พ.ศ. 2557

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

โครงงานนี้เกิดจากการที่คณะผู้จัดทำมีความสนใจในปัญหาคณิตศาสตร์ข้อหนึ่งที่ว่า“จงหาจำนวนวิธีในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก 6 ครั้งแล้วได้ผลรวมแต้มเป็น 21” ปัญหาคณิตศาสตร์ข้อนี้เป็นข้อสอบจากการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติครั้งที่ 2 ข้อที่ 5 วิธีในการแก้โจทย์ข้อนี้มีหลายวิธี ซึ่งวิธีที่คณะผู้จัดทำสนใจก็คือวิธีที่ใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด ในระหว่างที่คณะผู้จัดทำการแก้ปัญหานี้นั้นคณะผู้จัดทำก็เกิดความสงสัยว่าปัญหาในลักษณะนี้มีผลเฉลยในรูปทั่วไปหรือไม่ จึงได้เริ่มค้นหา ผลเฉลยในรูปทั่วไปของจำนวนวิธีทั้งหมดในการทอดลูกเต๋าจำนวน n ครั้งและผลรวมแต้มเป็น S เมื่อ S, n เป็นจำนวนเต็ม และขยายผลออกไปสู่เงื่อนไขที่กว้างขึ้นเช่น ลูกเต๋าที่ไม่ใช่ 6 ด้าน

ความรู้ที่ได้จากการศึกษาปัญหานี้สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในเรื่องของความได้เปรียบเสียเปรียบในการเล่นเกมบางเกม ตัวอย่างเช่น การเล่นไฮโล (ไฮโล คือ การพนันอย่างหนึ่งที่มีอุปกรณ์การเล่นพนันที่สำคัญคือลูกเต๋า ซึ่งจะใช้ลูกเต๋าทั้งหมดสามลูกจากนั้นเจ้ามือจะนำลูกเต๋าใส่ฝาครอบเพื่อไม่ให้ใครเห็นแล้วเขย่า) การเล่นไฮโลนี้ผู้เล่นพนันกับเจ้ามือจะต้องแทงพนันโดยกติกาการแทงพนันจะเกี่ยวกับผลรวมแต้มของลูกเต๋าซึ่งอยู่ในขอบเขตของโครงงานนี้

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1. เพื่อหาสูตรทั่วไปในการหาผลรวมของแต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋า n ลูก
2. นำสูตรนี้ไปประยุกต์ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาในลักษณะที่เกี่ยวกับผลรวมของแต้มจากการทอดลูกเต๋า

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

พบรูปทั่วไปของสูตรการหาจำนวนวิธีของผลรวมของแต้มจากการทอยลูกเต๋า q ด้าน n ลูก

1.4 ระยะเวลาในการทำโครงงาน

ตั้งแต่เดือนมิถุนายน พ.ศ. 2556 ถึงเดือนพฤศจิกายน พ.ศ. 2556

1.5 ขอบเขตของโครงงาน

ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนวิธีของผลรวมของแต้มจากการทอยลูกเต๋า q ด้าน n ลูก

1.6 วิธีในการดำเนินการ

1.6.1. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการนับ

1.6.2. ศึกษาทฤษฎีเกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิด

1.6.3. ฝึกทำโจทย์ในวิชาพื้นฐานคอมบินาทอริก และโจทย์ที่เกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิด

1.6.4. แก้ปัญหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ให้ผลรวมแต้มเป็น 21 ของการทอดลูกเต๋าลูกหนึ่ง จำนวน 6 ครั้ง

1.6.5. หารูปทั่วไปของ จำนวนวิธีทั้งหมดที่ให้ผลรวมแต้มเป็น S ของการทอดลูกเต๋าลูกหนึ่ง จำนวน n ครั้ง

1.6.6. หารูปทั่วไปของจำนวนวิธีทั้งหมดที่ให้ผลรวมแต้มเป็น S ของการทอดลูกเต๋าที่มี q ด้าน ลูกหนึ่ง จำนวน n ครั้งโดยที่แต้มบนหน้าลูกเต๋าเริ่มตั้งแต่ 1 ถึง q

1.6.7. หารูปทั่วไปของจำนวนวิธีทั้งหมดที่ให้ผลรวมแต้มเป็น S ของการทอดลูกเต๋า q ด้านลูกหนึ่ง จำนวน n ครั้งโดยที่แต้มบนลูกเต๋าเรียงติดต่อกันซึ่งไม่จำเป็นต้องเริ่มตั้งแต่ 1

1.6.8. นำผลที่ได้ไปประยุกต์ใช้

1.6.9. เขียนรายงาน

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ลำดับ

<u>นิยาม 1</u> ลำดับ (sequence) คือ ฟังก์ชัน a จากเซตของจำนวนนับไปเซต $\mathbb{R}$
$a\left(n\right)$คือ ค่าของฟังก์ชัน a ที่ n เขียนแทนด้วย a_n นิยมเขียนแทนลำดับนี้ด้วย $\left(a_n\right)$ หรือ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ และเรียก a_n ว่าพจน์ที่ n ของลำดับ $\left(a_n\right)$ กรณีที่ลำดับ $\left(a_n\right)$ มีจำนวนพจน์จำกัดกล่าวว่า $\left(a_n\right)$ เป็น**ลำดับจำกัด (finite sequence)** แต่ถ้าเซตของพจน์ของลำดับ $\left(a_n\right)$ เป็นเซตอนันต์นับได้กล่าวว่า $\left(a_n\right)$ เป็น**ลำดับอนันต์ (infinite sequence)**

2.2 กฎการนับเบื้องต้น

2.2.1 กฎการบวก

ให้ $\mathrm{k} \geq 1$ ถ้ามีเหตุการณ์ $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ซึ่งไม่มีส่วนร่วมทุกคู่ โดย

เหตุการณ์ E_1 เกิดได้ n_1 วิธี

เหตุการณ์ E_2 เกิดได้ n_2 วิธี

$\vdots$

เหตุการณ์ E_k เกิดได้ n_k วิธี

แล้วจำนวนวิธีที่จะเกิดอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์จาก $E_1, E_2, \ldots, E_k$ คือ $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$

2.2.2 กฎการคูณ

ถ้าสามารถแยกเหตุการณ์ E เป็น r เหตุการณ์ย่อย $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ที่มีลำดับ โดย

เหตุการณ์ E_1 เกิดได้ n_1 วิธี

เหตุการณ์ E_2 เกิดได้ n_2 วิธี

$\vdots$

เหตุการณ์ E_k เกิดได้ n_k วิธี

แล้วจำนวนวิธีที่จะเกิดอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์จาก $E_1, E_2, \ldots, E_k$ คือ $n_1 n_2 n_3 \cdots n_k$

2.2.3 แฟกทอเรียล

<u>นิยาม 2</u> เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก n แฟกทอเรียล หมายถึงผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n เขียนแทนด้วย $n!$

จากนิยาม $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(3)(2)(1)$

2.2.4 การจัดหมู่

<u>นิยาม 3</u> การจัดหมู่ หมายถึง การนำสิ่งของที่มีความแตกต่างกันทั้งหมดหรือเพียงบางส่วนมาจัดหมู่ โดยไม่ถือตำแหน่งหรือลำดับก่อนหลังเป็นสำคัญ

จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด เป็นหมู่ละ r สิ่ง ($r \le n$) เท่ากับ $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ วิธี เพื่อความสะดวกเราจะกำหนดให้ $\dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dbinom{n}{r}$

2.2.5 ทฤษฎีบททวินาม

ทฤษฎีบททวินาม คือ ทฤษฎีบทที่ว่าด้วยการกระจายนีพจน์ที่อยู่ในรูป $(x+y)^n$ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$ และ $n \in \mathbb{N}$ โดยที่

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r \\
&= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{r} x^{n-r} y^r + \ldots + y^n
\end{aligned}
$$

เมื่อ $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\left(n-r\right)!}$ เรียกสัมประสิทธิ์จากการกระจายข้างต้นว่า **สัมประสิทธิ์ทวินาม** ซึ่งจะพบว่าสัมประสิทธิ์นี้สอดคล้องตามรูปสามเหลี่ยมปาสกาลด้วย

2.3 ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

2.3.1 การหารลงตัว

<u>นิยาม 4</u> ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$ เราจะเรียกว่า a ว่าเป็น ตัวหาร หรือ ตัวประกอบตัวหนึ่งของ b ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ที่ทำให้ $b = aq$

ในกรณีที่ a เป็นตัวหารของ b เราจะเรียกอีกแบบหนึ่งว่า a หาร b ลงตัว เขียนแทนด้วย $a \mid b$

2.3.2 สมบัติของการหารลงตัว

ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ว่า 1) $a \mid 0, 1 \mid a$ และ $a \mid a$

2) $a \mid 1$ ก็ต่อเมื่อ $a = \pm 1$

3) ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$

4) ถ้า $a \mid b$ และ $c \mid d$ แล้ว $ac \mid bd$

5) ถ้า $a \mid b + c$ และ $a \mid b + d$ แล้ว $a \mid b - d$

2.3.3 ฟังก์ชันพื้น (Floor Function)

<u>นิยาม 5</u> ให้ $x \in \mathbb{R}$ และ $n \in \mathbb{Z}$ ฟังก์ชันพื้นของ x $\left(\lfloor x \rfloor\right)$ มีค่าเท่ากับจำนวนเต็มที่มากที่สุด ที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x

จากนิยามจะได้ว่า $x \in \mathbb{R}$ และ $n \in \mathbb{Z}$ $n = \lfloor x \rfloor \leftrightarrow n \le x < n + 1$

2.4 ฟังก์ชันก่อกำเนิด (generating function)

<u>นิยาม 6</u> ฟังก์ชันก่อกำเนิด

ให้ $\left(a_r\right)$ เป็นลำดับซึ่ง $\left(a_r\right) = \left(a_0, a_1, \ldots, a_r, \ldots\right)$ ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\left(a_r\right)$ นิยามโดย

$$A\left(x\right) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

2.4.1 สมบัติของฟังก์ชันก่อกำเนิด

ให้ $A\left(x\right)$ และ $B\left(x\right)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $a\left(r\right)$ และ $b\left(r\right)$ ตามลำดับ นั่นคือ

$A\left(x\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ และ $B\left(x\right) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$

ให้ $c_r = a_r + b_r$ และ $d_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \ldots + a_{r-1} b_1 + a_r b_0$ เมื่อ $r = 0, 1, 2, \ldots$

จะได้ว่า $A\left(x\right) + B\left(x\right) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$

และ $A\left(x\right) B\left(x\right) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots$

เนื่องจากการศึกษาฟังก์ชันก่อกำเนิด โดยทั่วไปจะสนใจเพียงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเท่านั้น ในส่วนของตัวแปรจึงสามารถกำหนดค่าให้อยู่ในช่วงที่อนุกรมกำลังลู่เข้า เมื่อฟังก์ชันก่อกำเนิดลู่เข้าจะพบว่ามีสมบัติเพิ่มเติมดังนี้

1) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

2) $\dfrac{1}{(1-x)^n} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r = 1 + \binom{n+1-1}{1}x + \binom{n+2-1}{2}x^2 + \ldots + \binom{n+r-1}{r} + \ldots$

2.4.2 การประยุกต์ใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดกับการนับ

การประยุกต์ใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดกับการนับทำได้โดยการแทนจำนวนชนิดของการเลือกของอย่างหนึ่งด้วยตัวแปรกำลังนั้นๆ แล้วให้จำนวนวิธีเป็นสัมประสิทธิ์

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจำนวนคำตอบของสมการ

$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 20$ โดยที่ $C_i \geq 0$ และ $1 \leq i \leq 4$

วิธีทำ

เนื่องจากทุก C_i เป็นจำนวนเต็มบวกหรือ 0

สามารถแทน C_i แต่ละตัวอยู่ในรูป $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

คำตอบคือ สัมประสิทธิ์ของ x^{20} ในฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\right)^4$$

พิจารณา $f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\right)^4$

จาก $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ จะได้ว่า $f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\right)^4 = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^4$

จาก $\dfrac{1}{(1-x)^n} = 1 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n+1}{2}x^2 + \binom{n+2}{3}x^3 + \ldots$ จะได้ว่าพจน์ที่มี x^{20} คือ $\binom{4+19}{20}x^{20}$

หรือก็คือ $\binom{23}{20}x^{20}$

ดังนั้น จำนวนคำตอบของสมการ $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 20$ โดยที่ $C_i \geq 0$ และ $1 \leq i \leq 4$
คือ $\binom{23}{20}$ คำตอบ

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ร้านค้าแห่งหนึ่งมีลูกอมขายทั้งหมด 3 รสได้แก่ รสมะนาว รสส้ม และรสองุ่น นายเอ๋ต้องการซื้อลูกอมที่ร้านค้าแห่งนี้จำนวน 8 เม็ดจงหาจำนวนวิธีในการซื้อลูกอมของนายเอ๋ เมื่อร้านค้าแห่งนี้มีลูกอมรสมะนาว 3 เม็ด รสส้ม 3 เม็ด และ รสองุ่น 4 เม็ด

วิธีทำ เนื่องจาก เลือกลูกอมรสมะนาวได้ 0 ถึง 3 เม็ด
เลือกลูกอมรสส้มได้ 0 ถึง 3 เม็ด
เลือกลูอมรสองุ่นได้ 0 ถึง 4 เม็ด

ดังนั้น สามารถเขียนแทนลูกอมรสมะนาวด้วย $1 + x + x^2 + x^3$
สามารถเขียนแทนลูกอมรสส้มด้วย $1 + x + x^2 + x^3$
สามารถเขียนแทนลูกอมรสส้มด้วย $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

คำตอบคือ สัมประสิทธิ์ของ x^8 ในฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right)\left(1 + x + x^2 + x^3\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4\right)$$

$$= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 13x^4 + 14x^5 + 13x^6 + 10x^7 + 6x^8 + 3x^9 + x^{10}$$

นั่นคือ จำนวนวิธีในการซื้อลูกอมของนายเอ๋คือ 6 วิธี

บทที่ 3

วิธีดำเนินการทดลอง

3.1 วิธีดำเนินการทดลอง

3.1.1. ศึกษาความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

3.1.2. ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันก่อกำเนิด

3.1.3. ฝึกทำโจทย์ในวิชาคอมบินาทอริก และโจทย์ที่เกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิด

3.1.4. แก้ปัญหา จำนวนวิธีทั้งหมดที่ให้ผลรวมแต้มเป็น 21 ของการทอดลูกเต๋าลูกหนึ่ง จำนวน 6 ครั้ง

3.1.5. หารูปทั่วไปของ จำนวนวิธีทั้งหมดที่ให้ผลรวมแต้มเป็น S ของการทอดลูกเต๋าสมดุลลูกหนึ่ง จำนวน n ครั้ง

3.1.6. หารูปทั่วไปของ จำนวนวิธีทั้งหมดที่ให้ผลรวมแต้มเป็น S ของการทอดลูกเต๋า q ด้านลูกหนึ่ง จำนวน n ครั้งโดยที่แต้มบนหน้าลูกเต๋าเริ่มตั้งแต่ 1 ถึง q

3.1.7. หารูปทั่วไปของ จำนวนวิธีทั้งหมดที่ให้ผลรวมแต้มเป็น S ของการทอดลูกเต๋า q ด้านลูกหนึ่ง จำนวน n ครั้งโดยที่แต้มบนลูกเต๋าเรียงต่อกันซึ่งไม่จำเป็นต้องเริ่มตั้งแต่ 1

บทที่ 4

ผลการทดลอง

4.1 การหาจำนวนวิธีที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 21 จากการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก 6 ครั้ง

เนื่องจากแต้มบนลูกเต๋าแต่ละลูกเป็นได้ 6 ค่าคือ 1,2,3,4,5 และ 6

จึงเขียนแทนลูกเต๋าด้วย $x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^6$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของปัญหานี้คือ $f\left(x\right) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^6)^6$

จำนวนวิธีที่ผลรวมของลูกเต๋าเป็น 21 คือ สัมประสิทธิ์ของ x^{21} ใน $f(x)$ ซึ่งสามารถหา สัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

พิจารณา $f\left(x\right) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^6)^6$

$$= x^6\left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^5\right)^6$$

$$= x^6\left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^6$$

$$= x^6\left(1 - x^6\right)^6\frac{1}{\left(1 - x\right)^6}$$

$$= x^6\sum_{i=0}^{\infty}\left(\binom{6 + i - 1}{i}x^i\right)\sum_{r=0}^{6}\left(\binom{6}{r}\left(1^{6-r}\right)\left(-x^6\right)^r\right)$$

$$= x^6\sum_{i=0}^{\infty}\left(\binom{6 + i - 1}{i}x^i\right)\sum_{r=0}^{6}\left(\binom{6}{r}\left(-1\right)^r\left(x^{6r}\right)\right)$$

$\therefore$ สัมประสิทธิ์ของ x^{21} คือผลรวมของค่าจากซิกม่าที่สอดคล้องกับสมการ $i + 6r + 6 = 21$

หรือก็คือ $i + 6r = 15$

จะได้ r ทั้งหมด 3 ค่าคือ $0, 1, 2$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^{21} คือ

$$\binom{6 + 15 - 1}{15}\left(-1\right)^0\binom{6}{0} + \binom{6 + 9 - 1}{9}\left(-1\right)^1\binom{6}{1} + \binom{6 + 3 - 1}{3}\left(-1\right)^2\binom{6}{2}$$

$$= 15504 - 12012 + 840 = 4332$$

นั่นคือวิธีทั้งหมดที่ให้ผลรวมแต้มเป็น 21 คือ 4332 วิธี

4.2 การหาจำนวนวิธีที่ผลรวมแต้มเป็น S จากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก n ครั้ง

เนื่องจากแต้มบนลูกเต๋าแต่ละลูกเป็นได้ 6 ค่าคือ 1,2,3,4,5 และ 6

จึงเขียนแทนลูกเต๋าแต่ละลูกด้วย $x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^6$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของปัญหานี้คือ $f\left(x\right) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^6)^n$

จำนวนวิธีที่ผลรวมของลูกเต๋าเป็น S คือ สัมประสิทธิ์ของ x^S ใน $f(x)$

ซึ่งสามารถหาสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

จึงเขียนแทนลูกเต๋าด้วย $x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^6$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของปัญหานี้คือ $f\left(x\right) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^6)^n$

จำนวนวิธีที่ผลรวมของลูกเต๋าเป็น S คือ สัมประสิทธิ์ของ x^S ใน $f\left(x\right)$ ซึ่งสามารถหา สัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
f\left(x\right) &= (x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^6)^n \\
&= x^n \left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^5\right)^n \\
&= x^n \left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^n \\
&= x^n \left(1 - x^6\right)^n \frac{1}{\left(1 - x\right)^n} \\
&= x^n \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\binom{n + k_2 - 1}{k_2} x^{k_2} \right) \sum_{k_1=0}^{n} \left(\binom{n}{k_1} \left(1^{n-k_1}\right) \left(-x^6\right)^{k_1} \right) \\
&= x^n \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\binom{n + k_2 - 1}{k_2} x^{k_2} \right) \sum_{k_1=0}^{n} \left(\binom{n}{k_1} \left(-1\right)^{k_1} \left(x^{6k_1}\right) \right) \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}
\end{aligned}
$$

จากทุก $k_1 \in \mathbb{Z}$ จะมีบาง $k_2 \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $x^n x^{6k_1} x^{k_2} = x^S$

จะได้ว่า $n + 6k_1 + k_2 = S$ __________(2)

ดังนั้น $k_2 = S - 6k_1 - n$ __________(3)

เมื่อต้องการให้ $x^n x^{6k_1} x^{k_2} = x^S$

จาก (1) และ (3) จะได้ว่า ฟังก์ชัน $g \subset f$ ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ x^S เท่ากันฟังก์ชันหนึ่งคือ

$$g(x) = x^n \sum_{k_1=0}^{n} \left(\binom{n}{k_1} (-1)^{k_1} \left(x^{6k_1} \right) \right) \sum_{S-6k_1-n=0}^{\infty} \left(\binom{n+S-6k_1-n-1}{S-6k_1-n} x^{S-6k_1-n} \right)$$

$$= x^n \sum_{k_1=0}^{n} \left(\binom{n}{k_1} (-1)^{k_1} \left(x^{6k_1} \right) \right) \sum_{S-6k_1-n=0}^{\infty} \left(\binom{S-6k_1-1}{S-6k_1-n} x^{S-6k_1-n} \right)$$

สำหรับทุก k_1 ของพจน์ $\sum_{k_1=0}^{n} \left(\binom{n}{k_1} (-1)^{k_1} \left(x^{6k_1} \right) \right)$ ถ้าสามารถหา k_2 ที่สอดคล้องเงื่อนไขได้จะได้ว่ามี k_2

เพียงค่าเดียวจาก $\sum_{S-6k_1-n=0}^{\infty} \left(\binom{S-6k_1-1}{S-6k_1-n} x^{S-6k_1-n} \right)$ ที่ทำให้เกิดพจน์ x^S

จะได้ $Ax^S = x^n \sum_{k_1=a}^{b} \left(\binom{n}{k_1} (-1)^{k_1} \left(x^{6k_1} \right) \binom{S-6k_1-1}{S-6k_1-n} x^{S-6k_1-n} \right)$

โดยที่ a เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดและ b เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่ทำให้ $n+6k_1+k_2 = S$ เมื่อ $k_1, k_2 \geq 0$ และ A เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^S

$$Ax^S = x^S \sum_{k_1=a}^{b} \left(\binom{n}{k_1} (-1)^{k_1} \binom{S-6k_1-1}{S-6k_1-n} \right)$$

$$A = \sum_{k_1=a}^{b} \left(\binom{n}{k_1} (-1)^{k_1} \binom{S-6k_1-1}{S-6k_1-n} \right) \qquad (4)$$

จาก (2) จะได้ว่า

$$k_1 = \frac{S-k_2-n}{6}$$

เนื่องจาก S, n เป็นค่าคงที่

ดังนั้น ค่าของ k_1 จึงขึ้นกับค่าของ k_2

เนื่องจาก $\mathrm{n}, S \in \mathbb{N}$ และ $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $k_1, k_2 \geq 0$

สมมติ $S-n$ หารด้วย 6 ได้เศษ r โดยที่ $0 \leq r \leq b$ จาก k_1 เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น k_2 หารด้วย 6 เหลือเศษ 6 เพราะฉะนั้น k_1 จะมากที่สุดเมื่อ k_2 น้อยที่สุด ดังนั้น $k_2 = r$

จะได้ $b = \dfrac{S-r-n}{6}$

จาก $\dfrac{S-n-6}{6} < \dfrac{S-r-n}{6} \le \dfrac{S-n}{6}$ จะได้ $\dfrac{S-r-n}{6} = \left\lfloor \dfrac{S-n}{6} \right\rfloor$

ดังนั้น k_1 ที่มากที่สุดเมื่อ $b = \left\lfloor \dfrac{S-n}{6} \right\rfloor$

k_1 น้อยที่สุดเมื่อ k_2 มากที่สุด นั่นคือ $k_1 \to -\infty$ เมื่อ $k_2 \to +\infty$ แต่ $k_1 \ge 0$ ดังนั้น $a = 0$

ดังนั้น $A = \sum_{k_1=0}^{\left\lfloor \frac{S-n}{6} \right\rfloor} \left(\binom{n}{k_1} (-1)^{k_1} \binom{S-6k_1-1}{S-6k_1-n} \right)$

4.3 การหาจำนวนวิธีที่ได้ผลรวมแต้มเป็น S จากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก n ครั้งเมื่อลูกเต๋ามี q หน้าและแต้มบนลูกเต๋ามีค่าตั้งแต่ 1 ถึง q

เนื่องจากแต้มบนลูกเต๋าแต่ละลูกเป็นได้ q ค่าคือ $1, 2, 3, 4, \ldots, q-1$ และ q

จึงเขียนแทนลูกเต๋าด้วย $x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^q$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของปัญหานี้คือ $f(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^q)^n$

จำนวนวิธีที่ผลรวมของแต้มเป็น S คือ สัมประสิทธิ์ของ x^S ใน $f(x)$

ซึ่งสามารถหาสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^q\right)^n \\
&= x^n \left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{q-1}\right)^n \\
&= \frac{x^n (1-x^q)^n}{(1-x)^n} \\
&= x^n \left(\frac{\left(1-x^q\right)}{1-x} \right)^n
\end{aligned}
$$

$$f(x)=\left(x^{n}\right)\left(1-x^{q}\right)\left(\frac{1}{(1-x)^{n}}\right)$$

$$=\left(x^{n}\right)\sum_{k_1=0}^{n}\left(\binom{n}{k_1}(-1)^{k_1}\left(x^{qk_1}\right)\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\binom{n+k_2-1}{k_2}x^{k_2}\right) \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(1)$$

จากทุก $k_1 \in \mathbb{Z}$ จะมีบาง $k_2 \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $x^{n}x^{qk_1}x^{k_2}=x^{S}$

จะได้ว่า $n+qk_1+k_2=S$ ______________(2)

ดังนั้น $k_2=S-qk_1-n$ ______________(3) เมื่อต้องการให้ $x^{n}x^{qk_1}x^{k_2}=x^{S}$

จาก (1) และ (3) จะได้ว่าฟังก์ชัน $g \subset f$ ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ x^{S} เท่ากันฟังก์ชันหนึ่งคือ

$$g(x)=x^{n}\sum_{k_1=0}^{n}\left(\binom{n}{k_1}(-1)^{k_1}x^{qk_1}\right)\sum_{S-qk_1-n=0}^{\infty}\left(\binom{n+S-qk_1-n-1}{S-qk_1-n}x^{S-qk_1-n}\right)$$

$$=x^{n}\sum_{k_1=0}^{n}\left(\binom{n}{k_1}(-1)^{k_1}x^{qk_1}\right)\sum_{S-qk_1-n=0}^{\infty}\left(\binom{S-qk_1-1}{S-qk_1-n}x^{S-qk_1-n}\right)$$

สำหรับทุก k_1 ของพจน์ $\sum_{k_1=0}^{n}\left(\binom{n}{k_1}(-1)^{k_1}\left(x^{qk_1}\right)\right)$ ถ้าสามารถหา k_2 ที่สอดคล้องเงื่อนไขได้จะได้ว่ามี k_2 เพียงค่าเดียวจาก $\sum_{S-qk_1-n=0}^{\infty}\left(\binom{S-qk_1-1}{S-qk_1-n}x^{S-qk_1-n}\right)$ ที่ทำให้เกิดพจน์ x^{S}

จะได้ $Ax^{S}=x^{n}\sum_{k_1=a}^{b}\left(\binom{n}{k_1}(-1)^{k_1}\left(x^{qk_1}\right)\binom{S-qk_1-1}{S-qk_1-n}x^{S-qk_1-n}\right)$

โดยที่ a เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดและ b เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่ยังคงทำให้ $n+qk_1+k_2=S$ เมื่อ $k_1,k_2\geq 0$ และ A เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^{S}

พิจารณา $Ax^{S}=x^{S}\sum_{k_1=a}^{b}\left(\binom{n}{k_1}(-1)^{k_1}\binom{S-qk_1-1}{S-qk_1-n}\right)$

$$\therefore A=\sum_{k_1=a}^{b}\left(\binom{n}{k_1}(-1)^{k_1}\binom{S-qk_1-1}{S-qk_1-n}\right) \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(4)$$

จาก (2) จะได้ว่า $k_1 = \dfrac{S-k_2-n}{q}$

เนื่องจาก S, n เป็นค่าคงที่

ดังนั้น ค่าของ k_1 ขึ้นอยู่กับค่าของ k_2

เนื่องจาก $\mathrm{n}, S \in \mathbb{N}$ และ $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $k_1, k_2 \geq 0$

สมมติ $S-n$ หารด้วย q ได้เศษ r โดยที่ $0 \leq r \leq q$ จาก k_1 เป็นจำนวนเต็มดังนั้น k_2 หารด้วย q เหลือเศษ r เพราะฉะนั้น k_2 จะมากที่สุดเมื่อ k_2 น้อยที่สุดดังนั้น $k_2 = r$ จะได้

$$b = \frac{S-r-n}{q}$$

จาก $\dfrac{S-n-6}{q} < \dfrac{S-r-n}{q} \leq \dfrac{S-n}{q}$ จะได้ $\dfrac{S-r-n}{q} = \left\lfloor \dfrac{S-n}{q} \right\rfloor$

ดังนั้น k_1 ที่มากที่สุดเมื่อ $b = \left\lfloor \dfrac{S-n}{q} \right\rfloor$

k_1 น้อยที่สุดเมื่อ k_2 มากที่สุด นั่นคือ $k_1 \to -\infty$ เมื่อ $k_2 \to +\infty$ แต่ $k_1 \geq 0$ ดังนั้น $a = 0$

ดังนั้น $A = \displaystyle\sum_{k_1=0}^{\left\lfloor \frac{S-n}{q} \right\rfloor} \left(\binom{n}{k_1} (-1)^{k_1} \binom{S-qk_1-1}{S-qk_1-n} \right)$

4.4 การหาจำนวนวิธีที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น S จากการทอดลูกเต๋า n ลูกเมื่อลูกเต๋าแต่ละลูกมี q หน้าและแต้มบนลูกเต๋าลูกที่ i มีแต้มเป็น r_i ถึง $r_i + q - 1$

เนื่องจากแต้มบนลูกเต๋าบนลูกที่ i เป็นได้ q ค่าคือ $r_i, r_i+1, r_i+2, r_i+3, \ldots, r_i+q-1$

จึงเขียนแทนลูกเต๋าด้วย $x^{r_i} + x^{r_i+1} + x^{r_i+2} + x^{r_i+3} + \ldots + x^{r_i+q-1}$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของปัญหานี้คือ

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x^{r_i} + x^{r_i+1} + x^{r_i+2} + x^{r_i+3} + \ldots + x^{r_i+q-1})$$

จำนวนวิธีที่ผลรวมของลูกเต๋าเป็น S คือ สัมประสิทธิ์ของ x^S ใน $f(x)$

ซึ่งสามารถหาสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

พิจารณา $f\left(x\right)=\prod_{i=1}^{n}(x^{r_i}+x^{r_i+1}+x^{r_i+2}+x^{r_i+3}+\ldots+x^{r_i+q-1})$

$$= x^{\sum_{i=1}^{n} r_i}\left(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{q-1}\right)^n$$

$$= x^{\sum_{i=1}^{n} r_i}\left(\frac{(1-x^q)}{1-x}\right)^n$$

$$= \left(x^{\sum_{i=1}^{n} r_i}\right)(1-x^q)^n\left(\frac{1}{(1-x)^n}\right)$$

$$= \left(x^{\sum_{i=1}^{n} r_i}\right)\sum_{k_1=0}^{n}\left[\binom{n}{k_1}(-1^{k_1})(x^{qk_1})\right]\sum_{k_2=0}^{\infty}\left[\binom{n+k_2-1}{k_2}x^{k_2}\right] \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(1)$$

ต้องการสัมประสิทธิ์ของ x^S จากทุก $k_1 \in \mathbb{Z}$ จะมีบาง $k_2 \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $x^{\sum_{i=1}^{n} r_i}x^{qk_1}x^{k_2} = x^S$

จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} r_i + qk_1 + k_2 = S$ ______________(2)

ดังนั้น $k_2 = S - qk_1 - \sum_{i=1}^{n} r_i$ ______________(3)

จาก (1) และ (3) จะได้ว่า จะมี ฟังก์ชัน $g \subset f$ ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ x^S เท่ากันคือ

$$g\left(x\right) = (x^{\sum_{i=1}^{n} r_i})\sum_{k_1=0}^{n}\left[\binom{n}{k_1}(-1^{k_1})(x^{qk_1})\right]\sum_{S-qk_1-\sum_{i=1}^{q} r_i=0}^{\infty}\left[\binom{n+S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i-1}{S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i}x^{S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i}\right]$$

สำหรับทุก k_1 ของพจน์ $\left[\sum_{k_1=0}^{n}\binom{n}{k_1}\left(-1^{k_1}\right)\left(x^{qk_1}\right)\right]$ ถ้าสามารถหา k_2 ที่สอดคล้องเงื่อนไขได้จะมี k_2 เพียง

ค่าเดียวจาก $\left[\sum_{S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i=0}^{\infty}\binom{n+S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i-1}{S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i}x^{S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i}\right]$ ที่ทำให้เกิดพจน์ x^S จะได้

$$Ax^S = x^n \sum_{k_1=a}^{b} \left[\binom{n}{k_1} \left(-1^{k_1}\right) \left(x^{qk_1}\right) \binom{n+S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i - 1}{S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i} x^{S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i} \right]$$

โดยที่ a เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดและ b เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่ยังคงทำให้ $\sum_{i=1}^{n} r_i + qk_1 + k_2 = S$ เมื่อ $k_1, k_2 \geq 0$ และ A เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^S

$$Ax^S = x^S \sum_{k_1=a}^{b} \left[\binom{n}{k_1} \left(-1^{k_1}\right) \binom{n+S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i - 1}{S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i} \right]$$

$$x^S = \sum_{k_1=a}^{b} \left[\binom{n}{k_1} \left(-1^{k_1}\right) \binom{n+S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i - 1}{S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i} \right] \qquad (4)$$

จาก (2) จะได้ว่า

$$k_1 = \frac{S - k_2 - \sum_{i=1}^{n} r_i}{q}$$

เนื่องจาก $S, q, \sum_{i=1}^{n} r_i$ เป็นค่าคงที่

ดังนั้น k_1 ขึ้นกับ k_2

เนื่องจาก $\mathrm{q}, \sum_{i=1}^{n} r_i, \mathrm{S} \in \mathbb{N}$ และ $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $k_1, k_2 \geq 0$

สมมติ $S - \sum_{i=1}^{n} r_i$ หารด้วย q ได้เศษ c โดยที่ $c \in \mathbb{N}$ จาก k_1 เป็นจำนวนเต็มดังนั้น k_2 หารด้วย q เหลือเศษ c k_1 จะมากที่สุดเมื่อ k_2 น้อยที่สุดดังนั้น $k_2 = c$ จะได้

$$b = \frac{S - c - \sum_{i=1}^{n} r_i}{q}$$

จาก $$\frac{S - \sum_{i=1}^{n} r_i}{q} - 1 = \frac{S - \sum_{i=1}^{n} r_i - q}{q} < \frac{S - c - \sum_{i=1}^{n} r_i}{q} \leq \frac{S - \sum_{i=1}^{n} r_i}{q}$$

จะได้ $$\frac{S-c-\sum_{i=1}^{n} r_i}{q} = \left\lfloor \frac{S-\sum_{i=1}^{n} r_i}{q} \right\rfloor$$

ดังนั้น k_1 มากที่สุดคือ $b = \left\lfloor \frac{S-\sum_{i=1}^{n} r_i}{q} \right\rfloor$

k_1 น้อยที่สุดเมื่อ k_2 มากที่สุด นั่นคือ $k_1 \to -\infty$ เมื่อ $k_2 \to +\infty$ แต่ $k_1 \geq 0$ ดังนั้น $a = 0$

ดังนั้น $$A = \sum_{k_1=0}^{b} \left(\binom{n}{k_1} \left(-1^{k_1}\right) \binom{n+S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i - 1}{S-qk_1-\sum_{i=1}^{n} r_i} \right)$$ เมื่อ $b = \left\lfloor \frac{S-\sum_{i=1}^{n} r_i}{q} \right\rfloor$

บทที่ 5

สรุปและวิจารณ์ผลการทดลอง

5.1 ผลการทดลอง

1) จำนวนวิธีที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 21 จากการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก 6 ครั้งเท่ากับ 4332 วิธี

2) จำนวนวิธีที่ผลรวมแต้มเป็น S จากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก n ครั้ง

เท่ากับ $\sum_{k_1=a}^{b}\left(\binom{n}{k_1}(-1)^{k_1}\binom{S-6k_1-1}{S-6k_1-n}\right)$ วิธี

3) จำนวนวิธีที่ได้ผลรวมแต้มเป็น S จากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก n ครั้งเมื่อลูกเต๋ามี q หน้าและแต้มบนลูกเต๋ามีค่าตั้งแต่ 1 ถึง q เท่ากับ

$$\sum_{k_1=0}^{\left\lfloor\frac{S-n}{q}\right\rfloor}\left(\binom{n}{k_1}(-1)^{k_1}\binom{S-qk_1-1}{S-qk_1-n}\right) \text{ วิธี}$$

4) จำนวนวิธีที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น S จากการทอดลูกเต๋า n ลูกเมื่อลูกเต๋าแต่ละลูกมี q หน้าและแต้มบนลูกเต๋าลูกที่ i มีแต้มเป็น r_i ถึง r_i+q-1 เท่ากับ

$$\sum_{k_1=0}^{b}\left(\binom{n}{k_1}\left(-1^{k_1}\right)\binom{n+S-qk_1-\sum_{i=1}^{n}r_i-1}{S-qk_1-\sum_{i=1}^{n}r_i}\right) \text{ วิธี เมื่อ } b=\left\lfloor\frac{S-\sum_{i=1}^{n}r_i}{q}\right\rfloor$$

5.2 วิจารณ์ผลการทดลอง

รูปทั่วไปของจำนวนวิธีในการโยนลูกเต๋าที่มีจำนวนด้าน จำนวนลูก และผลรวมเป็นตัวแปรที่ได้จากการทดลองนี้สามารถใช้ได้กับกรณีที่แต้มบนลูกเต๋าแต่ละลูกเรียงติดต่อกัน ไม่มีการถ่วงน้ำหนัก และ จำนวนด้านของทุกลูกเต๋าที่นำมาโยนมีจำนวนด้านเท่ากันเท่านั้น

บรรณานุกรม

CHEN Chuan-Chong and KOH Khee-Meng, principles and techniques in combinatorics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore (1992)

ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์ และคณะ, คอมบินาทอริก :โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน., มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการฯ (สอวน.)/ศูนย์หนังสือจุฬาฯ (2553)

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 37 :โลกทฤษฎีจำนวน (NUMBER THEORY), ศูนย์หนังสือจุฬา (2556)

ประวัติผู้ทำโครงงาน

นายณัฐธัญ ยอดสง่า เกิดเมื่อวันที่ 17 มีนาคม พ.ศ. 2540 ที่ตำบลชุมแพ อำเภอชุมแพ จังหวัดขอนแก่น สำเร็จการศึกษาระดับประถมศึกษาที่โรงเรียนอนุบาลชุมแพ อำเภอชุมแพ จังหวัดขอนแก่น ในปีการศึกษา 2551 ระดับมัฐยมศึกษาตอนต้นจากโรงเรียนขอนแก่นวิทยายน อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น ในปีการศึกษา 2554 ปัจจุบันกำลังศึกษาอยู่ในระดับชั้นมัฐยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์

นายภูริณัฐ จันทร์ทองดี เกิดเมื่อวันที่ 6 มีนาคม พ.ศ. 2540 ที่แขวงบางแคเหนือ เขตบางแค กรุงเทพมหานครฯ สำเร็จการศึกษาระดับประถมศึกษาที่โรงเรียนเผดิมศึกษา เขตภาษีเจริญ ในปีการศึกษา 2551 ระดับมัฐยมศึกษาตอนต้นจากโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย เขตพระนคร กรุงเทพมหานครฯ ในปีการศึกษา 2554 ปัจจุบันกำลังศึกษาอยู่ในระดับชั้นมัฐยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์