組合賽局理論

詹挹辰

February 13, 2021

0 前言

0.1 動機與心得

在學校數字搜查線的這份學習單中，有著一個主題叫做賽局理論。原本我就有在書上看過一些組合賽局理論的觀念，且剛好在最近的營隊也有提到這個主題，於是我就想說藉此機會去研讀一下組合賽局理論的一些觀念與知識。讀著讀著就覺得自己對組合賽局理論有更深刻的理解跟感想。於是就萌生了將自己的所學和筆記彙整編成一份講義的想法。所以就著手進行了這份講義的編寫。

在編寫講義的過程中，我發現了編寫講義與解題是截然不同的兩回事。解題就只需要自己懂就可以了。但是在編講義的時候我卻要注意要讓讀者能夠理解我在說什麼還有許多要注意的細節。包含用詞的選擇：什麼樣的用詞能夠精準表達我的意思，又不會太艱深難懂讓大家搞不懂我在說什麼；或者是文意的流暢度跟要如何將觀念完整的告訴大家等等。這都是一些在編寫講義會需要注意到的事情。

我認爲我在做這份講義最困難的地方是資料的統整。因爲組合賽局理論的資料相當少，而網路上的資源又都參差不齊。許多的資料我都是從外國的文章看來的，光是要把他們翻譯成台灣的專有名詞就又耗費了許多精力。

除了從中學到了這些細節之外，我也更加的發現我原本的不足。在編講義的時候我才發現其實原本我有很多理論都沒有完整的學好。之前都僅僅是看過稍微會用而已，但是實際上要我說明給大家，可能講的還是相當含糊。而編寫講義才讓我重新整理了思路，眞正了解了這個主題。

編寫這份講義讓我收益良多，無論是在如何編寫講義，收集資料的過程，或者是編寫過程中遇到的困難和一些心得等等。編完這份講義讓我獲得的不僅僅是成就感，更重要的是我在編寫過程的收穫與感想。

1 組合賽局

1.1 組合賽局的定義

組合賽局理論 (Combinatorial Game)，或稱組合博弈論，是賽局論的一個分支，但跟主流賽局論不同的是，組合賽局論的主要研究對象是資訊完全、輪流行動的二人賽局。

Definition. 賽局 (Game)，又稱遊戲，博弈。本篇使用賽局或是遊戲。

Definition. 狀態，又稱盤面或局面。是指當下賽局的狀態。

Definition. 若滿足以下條件則此賽局爲一組合賽局

1. 有兩位玩家對戰，雙方輪流操作
2. 有一個可能的遊戲狀態集，且這個狀態集是有限的
3. 賽局資訊完全公開，雙方在任何時候都知道賽局的完整資訊和規則，不包含任何的機率因素
4. 對於一個盤面，某方可以執行哪些操作，以及執行哪個操作會導致什麼樣的狀態都是固定的
5. 賽局的結果只有一贏一敗或平手

在這裡我要額外補充一點，這份講義我們先只討論賽局會在有限步數結束的情形。組合賽局最大的特色就是他排除所有機率因素以及不透明的狀況。舉例來說，大多數的棋類都是組合賽局，而大部分的桌遊都不是組合賽局 (不透明，而且通常會有機率的因素)。

1.2 組合賽局的分類

Definition. 組合賽局的分類：

- 標準 (Normal)：輪到某回合時，無法操作者判輸
- 匱乏 (Misère)：輪到某回合時，無法操作者判贏
- 無偏 (Impartial)：在同一個盤面下，雙方可以做的操作皆相同
- 有偏 (Partizan)：在同一個盤面下，雙方可以做的操作可能不同

事實上還有許多其他常見的賽局 (Loopy, Loopfree, Finite, Transfinite)，但這個章節我們只討論遊戲會在有限步結束的情形，所以不會有上面那些 Case。

在這份講義中我們只會介紹標準無偏賽局。也就是既標準又無偏的賽局。大家可以先熟悉一下他的定義。

1.3 一些例子

現在我們知道組合賽局的定義是什麼了，那我們來看一些組合賽局的題目吧 (假設所有人的每一步都會是最優策略)：

Example 1.1. 總共有 N 個石頭，雙方輪流，每次每個人要拿一個石頭。最後不能拿的人就輸了。請問先手會贏還是會輸。

這是一個很簡單的問題，因爲每個人都一定要拿一個石頭，但是也只能拿一個石頭。所以我們可以很簡單的判斷奇偶性就可以知道答案了。雖然這個題目很智障，但他確實是一個組合賽局的題目。

Example 1.2. (CF 1373B) 現在有一個 01 字串，雙方輪流，每人每次可以拿兩個連續的相異數字。不能操作者輸。請判斷先手必勝或先手必敗。

可以發現一件事情，如果整個字串同時有 0 和 1 的話那他一定會存在至少一個地方會是 01 或 10。所以遊戲結束的狀態一定是整個字串只剩下 0 或只剩下 1。那我們就只需要算出 0 和 1 的個數之後這題就跟上面那題一樣了。

上面兩個例題我們只是利用簡單的邏輯判斷 (或者說是策略) 就解出來了。但眞正的組合賽局遠比這些還要複雜。於是我們就需要有一套系統的來分析組合賽局這個東西。於是我們引進一個概念叫做 Game Graph。

2 Game Graph

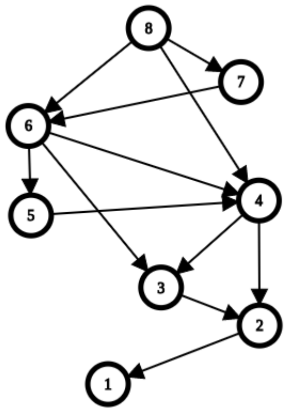
2.1 Game Graph 簡介

Definition. 如果將每個賽局狀態 (盤面) 都視爲一個節點，再把該狀態每個操作變成的所有下一個狀態連上有向邊。我們就稱這張圖爲 Game Graph。

Game Graph 包含了整個賽局裡的所有資訊，所以我們就可以把組合賽局題目轉換成在 Game Graph 上的問題啦。先來上一題簡單的例題。

Example 2.1. 現在有 8 個石頭，我們每次可以取剩下石頭個數的因數個石頭 (不可全取)，沒辦法進行操作者輸。請問先手有否必勝策略？

我們來看看這題的 Game Graph 會長怎樣吧。



Example 2.1 的 Game Graph

那我們要這張圖要幹嘛呢？其實他可以跟我們說這個遊戲所有的事情。例如我們可以發現所有狀態最後的終止節點都是 1 等等。然後我們就可以利用這張圖得到一些有用的東西了。

2.2 勝負判定

我們以 0 和 1 代表兩位玩家，並且定義轉移函數 F 與勝負函數 S。對於一個輪到 a 動的賽局盤面 x (可以想像成一個節點存了 (x, a) 這個二元組)，$F(x, a) = \{y \mid a$ 可以將狀態 x 轉移到狀態 $y\}$($F(x, a)$ 也就是 x 的所有後繼狀態的集合)，如果 a 會贏則 $S(x, a) = 1$，平手則 $S(x, a) = 0$，a 會

輸則 $S(x,a)=-1$。觀察這張圖會發現一件事：其實每一個節點的 $S(x,a)$ 都可以由以下遞迴式算出。

Theorem 2.1. 勝負函數遞迴式

$$S(x,a)=\begin{cases} 1, & \exists y\in F(x,a),\ S(y,a\ xor\ 1)=-1 \\ -1, & \forall y\in F(x,a),\ S(y,a\ xor\ 1)=1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

你說你不喜歡數學？我也不喜歡，翻譯成白話文可以用這樣解釋：$S(x,a)=1$ 的時候代表如果有一個操作你做了就會讓對手最後輸掉，那你就執行那個操作讓對手輸掉。而 $S(x,a)=-1$ 的情況則是在說，如果你不管怎麼走都會讓對手贏，那你就輸定了。

事實上因爲我們討論的狀況是遊戲會在有限步内結束，這也就代表說其實我們的 Game Graph 是一個 DAG(有向無環圖)。既然他是 DAG 那上面的那個遞迴式我們就可以用拓樸排序或是動態規劃這兩種演算法在 $O(N+M)$ 的時間内把所有節點的 $S(x,a)$ 都處理出來了。

一開始有提到說這份講義只會介紹標準無偏賽局：根據”標準”的這個性質，遊戲最後一定會分出勝負，沒有平手的 Case；根據”無偏”的這個性質：無論當下盤面是誰進行操作，雙方能進行的操作是一樣的。那麼其實我們不需要在意是誰進行操作的。因爲我們只需要判斷一些奇偶性就可以得到這些資訊。所以我們可以把轉移函數跟勝負函數定義成 $F(x),S(x)$。這時候遞迴式就長的可愛多了：

Theorem 2.2. 勝負函數遞迴 (在標準無偏賽局下)

$$S(x)=\begin{cases} 1, & \exists y\in F(x),\ S(y)=-1 \\ -1, & \forall y\in F(x),\ S(y)=1 \end{cases}$$

這時候我們可以回去看到 Example 3.3 的那張 Game Graph 了。透過勝負函數的遞迴式我們可以得到以下表格：

節點	S(x)	節點	S(x)
1	-1	5	-1
2	1	6	1
3	-1	7	-1
4	1	8	1

Example 2.1 的 S(X) 表格

有了這個表格就可以求出答案啦。但是如果我現在把題目改成這樣

Example 2.2. 同 Example 2.1，數據範圍改成 $N\le 10^{18}$

如果要用拓樸排序直接找到答案的話似乎不可行。但是如果我們可以把表打出來觀察，我們就會發現偶數節點的 $S(X)$ 值都是 1，而奇數節點的都是-1。這時候我們就可以~~大膽猜測~~用數學歸納法證明答案是偶數必勝。

這裡給出這題偶數必勝的證明：

Proof. 容易知道所有數字最後的中止條件都是 1，故 $S(1) = -1$。並且透過勝負函數遞迴式我們知道 $S(2) = 1$。我們使用數學歸納法證明這個結論：

假設當 $n = i$ 時，$1 \sim i$ 都滿足 i 爲奇數時 $S(i) = -1$ 且 i 爲偶數時 $S(i) = 1$。

i 爲偶數時，則 $i - 1$ 必爲他的後繼狀態 (1 是 i 的因數)。故 i 存在一個後繼狀態爲 -1，透過遞迴關係式得到 $S(i) = 1$。

i 爲奇數時，i 的所有因數皆爲奇數，所以他的後繼狀態必定是小於自己的偶數 (奇 $-$ 奇 $=$ 偶)，而由假設知道所有小於 i 的偶數的 $S(X) = 1$。由勝負遞迴式可知 $S(x) = -1$。 □

建表這個技巧可以幫你找到一些題目的性質。通常可以用數學歸納法或一些題目性質證明。雖然建表聽起來不太正規，但如果你是在數學或程式競賽這種有時間壓力的環境底下，建表找規律也不失爲一個不錯的方法。

當然，有些題目是不能輕易的用規律找出來的，我們接下來會介紹一些有用的定理來解決更多的組合賽局問題。

2.3 Game Graph 性質整理

最後整理一下 Game Graph 的性質：

1. Game Graph 是一張 DAG
2. 沒有出度的的狀態就是必敗狀態
3. 一個狀態是必勝狀態若且唯若至少存在一個必敗狀態爲他的後繼狀態
4. 一個狀態是必敗狀態若且唯若他的所有後繼狀態都是必勝狀態

3 標準無偏賽局 ICG

標準無偏賽局 (impartial combinatorial games 簡稱 ICG)，又稱爲公平組合遊戲。是什麼意思呢？回顧一下第一頁的賽局分類，標準 (Normal)：無法行動者輸。無偏 (Impartial)：雙方不管在什麼時候能進行的操作都是一樣的。同時具有這兩個性質的組合賽局就叫做 ICG。
進入有趣的題目之前，我們要先來介紹一些定理跟定義。

3.1 Zermelo's Thm.

Theorem 3.1. Zermelo's theorem 策梅洛定理
對於一個組合賽局，

1. 先手有必勝策略
2. 後手有必勝策略
3. 雙方皆有平手策略

以上三者必然有其一成立。

上面這個定理看起來蠻廢話的。透過 Game Graph 我們知道，每個節點都會被勝負遞迴式唯一決定，而一定是贏或輸或平手中其中一個。
值得一提的，先來複習一下標準 (Normal) 的定義：輪到某回合時，無法操作者判輸。因爲組合賽局會在有限步內結束，所以其實我們有這件事：

對於一個標準賽局，先手或後手其一必有必勝策略

這也就是組合賽局基本定理。

接著我們來繼續定義一些名詞。

3.2 賽局的更多定義

Definition. 賽局和
兩個賽局 G_1, G_2 的和，表示爲 $G_1 + G_2$。代表由以下方式構建的賽局：
每次從 G_1 和 G_2 兩個賽局中選其中一個，並做一次該賽局的一個合法操作

簡單來說就只是把兩個賽局擺在桌上，每次選一個賽局去進行操作。但需要注意的是，這裡的賽局和沒有要求要是同類型的賽局，例如把西洋棋跟跳棋一起放在桌上，這樣也是一個合法的賽局和。

接下來的這個定義跟理論是在理論層次的一些東東，如果對理論沒有太大興趣的話可以直接往後看。

Definition. 賽局的型別
在 ICG 當中，贏者不是先手就是後手，所以我們有了以下兩種型別的定義：

- N (Next player win)：下一輪輪到的玩家 (先手) 獲勝
- P (Previous player win)：上一輪輪到的玩家 (後手) 獲勝

如果一個賽局是先手獲勝，那麼這個賽局的型別是 N。反之，如果是後手獲勝，那麼這個賽局的型別是 P。值得注意的是，雖然我們會説賽局盤面，但其實每一個賽局盤面也是一個賽局。所以我們定義賽局的型別，其實也是跟定義賽局盤面的型別是同一個意思。

Definition. 等價賽局給定兩個賽局 G_1, G_2，如果對於" 所有" 賽局 H，$G_1 + H$ 與 $G_2 + H$ 的型別皆相同，那我們就説 G_1 與 G_2 等價，記作 $G_1 = G_2$。

爲什麼要這樣定義阿？不妨想想對於一個賽局，我們能對他做什麼？拿他去跟其他賽局做賽局和。還有嗎？沒了。所以只要所有賽局跟他們兩個賽局的和結果都是一樣的，我們把這兩個賽局視爲等價的也沒有什麼關係。

比較特別的是，等價賽局沒有要求兩個賽局經過某些操作演變成的賽局也要相同。因爲根據定義來看我們只在意他的結果，而不是在意他的過程。

爲什麼我們要定義這些東西呢？除了方便我們表示外我們還可以延伸知道以下幾個定理：

Theorem 3.2. 如果 $G_1 = G_2$，則 G_1 和 G_2 型別相同。

這很顯然。如果他們型別不一樣的話他們就不會等價。

Theorem 3.3. 如果 G_2 的型別是 P(後手必勝)，則 $G_1 + G_2 = G_1$。

這個定理的意思是，如果把一個型別是 P 的賽局加到別的賽局上，那就相當於沒有加。這個定理很棒，建議大家記起來。

那要怎麼理解這個定理呢？如果你本來在 G_1 的型別是先手必勝，那你就先去玩 G_1，當 G_2 不存在就好。如果對方跟你一起玩 G_1，那你就跟他一起玩。如果對方想玩 G_2，因爲後手必勝，所以你現在去玩 G_2 的話一定會贏。所以不管怎樣只要你在 G_1 的型別是 N 的話，那你就還會是 N。那如果不是 N 的話呢？就代表你不管在 G_1 還是 G_2 都是先手必敗，所以你不管怎麼也都還是先手必敗。事實上上面這個定理可以再延伸得到這個定理：

Theorem 3.4. 如果 G_1, G_2 的型別都是 P，那麼 $G_1 = G_2$。

Proof. 對於任意一個賽局 H，$H+G_1=H+G_2=H$，根據等價的定義我們有 $G_1=G_2$ □

這個定理比上面那個還要厲害，他跟我們說型別 P 就只有一種賽局。也就是說型別爲 P 的賽局是賽局加法的單位元素，而這個單位元素具有唯一性。所以我們可以用 0 來代表型別爲 P 的賽局，又稱爲零賽局。之後我們統一用 0 來表示 0 賽局。

事實上若對於群論有所了解的話，會發現賽局加上這個定理之後就具有了群的性質。但是因爲我不會賽局群，在競賽中貌似也不會出現，所以在這邊我們就省略不提。

如果上面的東西都看不懂怎麼辦？沒關係這些大多只是理論層次，我們接下來來講點有趣的題目吧！(接下來提到的所有賽局都是指標準無偏賽局。)

3.3 NIM

NIM 遊戲在組合賽局中可說是最經典的遊戲，我們來看看 NIM 遊戲是什麼吧。

Example 3.1. NIM 遊戲
總共有 N 堆石頭，每堆有 a_i 個。兩名玩家輪流行動，每次操作一名玩家可以任選一堆拿走任意多個石頭，可把整堆取光，但是不能不取。取走最後一件物品者獲勝。請問先手有無必勝策略？$(N\le 10^6, a_i\le 10^{18})$

剛剛學完了 Game Graph，如果我們把這個遊戲丟到 Game Graph 裡面，用簡單的數學我們會發現他會有 $O(\prod_{i=1}^{n} a_i)$ 個節點，這顯然不會是我們要的。我們勢必要想一個更優的方法。

Definition. NIM sum
定義 NIM 和 $=a_1\oplus a_2\oplus a_3...\oplus a_n$。其中 $\oplus$ 代表 xor。

Theorem 3.5. NIM 遊戲先手必勝若且唯若 NIM 和 $\neq 0$

爲什麼是 xor 呢？這邊給出這個定理的證明。

Proof. 我們只需要證明三件事情就可以證明這是對的了：

1. 沒有下一個狀態的狀態是必敗的狀態
2. 對於所有 NIM 和 $\neq 0$ 的狀態一定存在一種操作使得 NIM 和變成 0
3. 對於所有 NIM 和 $=0$ 的狀態一定不存在某種操作使得 NIM 和 $=0$

第一點：所有物品備取光顯然是一個必敗的局面。

第二點：當 NIM 和不爲 0 的時候，我們令 $x =$ NIM 和。假設 x 的二進制表示中最高位的 1 在第 k 位。那麼由 xor 的特性，至少存在一堆石子 a_i，他的第 k 位是 1。那我們就從第 i 堆石頭拿走一些石頭，讓第 i 堆變成 $a_i \oplus x$。由 xor 的運算，$a_1 \oplus a_2 ... (a_i \oplus x) \oplus ... a_n = x \oplus x = 0$。又 xor 的定義，我們知道如果 a_i 的第 k 位也是 1 的話，就會滿足 $a_i > a_i \oplus x$。所以這件事一定可以做的到。那我們就證完這件事了。

第三點：如果我們要把任意一堆 a_i 改成 $a_i^{'}$，那麼根據 xor 的運算我們會得到：$a_1 \oplus a_2 ... (a_i^{'}) \oplus ... a_n = 0 \oplus a_i \oplus a_i^{'} = 0$，也就是 $a_i = a_i^{'}$，代表說我們沒有取走任何石頭，與我們的假設矛盾。 □

證明完了上面那件事，其實我們在證明的過程中給出了必勝策略 (如果有的話)，這部份留給讀者自行練習。

Theorem 3.6. 對於一個 N 堆，NIM 和爲 x 的 NIM 遊戲 G，他與一個滿足下面條件的 NIM 遊戲 H 等價：僅有一堆石頭且個數爲 x 的 NIM 遊戲。

Proof. 對於賽局和 $G + G$，我們知道他的 NIM 和是 $0(x \oplus x = 0)$，所以 $G + G$ 後手必勝。同理我們也會有 $G + H$ 後手必勝跟。根據定理 3.3 我們有：$G = G + (H + H) = (G + H) + H = H$。 □

這個定理告訴了我們，其實一個 N 堆 NIM 和爲 x 的 NIM 遊戲跟只有一堆 x 個的 NIM 遊戲等價。

接著我們要介紹一個 ICG 中最重要的一個定理：SG 定理。

3.4 Sprague-Grundy Theorem

Definition. MEX(minimum excluded)
對於一個集合 S，定義 $mex(S)$ 爲不在 S 中的最小非負整數。例如：$mex(0, 2, 3) = 1, mex(1, 2) = 0$

值得注意的是，mex 的求解沒有什麼比較好的方法，通常可以利用 set 或直接陣列模擬去實現。

Definition. SG 函數 (SG Value)
對於一個狀態 x 和他的所有後繼狀態 $y_1, y_2 ... y_k$，我們定義 SG 函數：

$$SG(x) = mex\{SG(y_1), SG(y_2) ... SG(y_k)\}$$

定義完這個我們就可以直接看到定理的部份了：

Theorem 3.7. SG Value 的和
對於 N 個標準無偏賽局 $G_1, G_2, ...G_n$ ，令 $G = G_1 + G_2 + ... + G_n$，

$$\text{則有 } SG(G) = SG(G_1) \oplus SG(G_2) \oplus ... \oplus SG(G_n)\text{。}$$

且先手必勝若且唯若 $SG(G) \neq 0$

欸？這個好像跟 NIM 和長的有點像？因爲其實我們有這件事：

Theorem 3.8. SG 定理
對於任意一個標準無偏賽局，必有一個跟他等價的只有一堆的 NIM 遊戲。而那一堆的大小也就是 SG Value。

Proof. 用一個直觀的方式來理解，考慮一個有 x 個物品的堆，將這個堆視爲節點 x，且節點 x 可以到達節點 y 若且唯若 $y < x$。這樣我們就成功用 Game Graph 表示出這一堆了，也就代表我們證出了一個只有一堆的 NIM 遊戲等價於一個 ICG。也就是說一個 N 堆的 NIM 遊戲等價於 N 個 ICG 的和。

因爲每個點 y 會連到 x 若且唯若 $y < x$，根據 mex 的算法我們可以得到 $SG(x) = x$ 。這也就是說一個一堆的 NIM 遊戲的 SG Value 是 x。但同時我們又知道一個一堆的 NIM 遊戲的 NIM 和是 x。所以我們就證明了每一個 ICG 對應到的那個 NIM 遊戲的大小就是 SG Value。如果我們把他推廣到 N 堆的話，就會發現其實 SG Value 的和就跟 NIM 和是同一個東西。 □

我們剛剛證明了一件事：所有的 ICG 都可以變成 NIM 遊戲，也就代表可以套用 NIM 和跟定理 3.5。這也就是 SG 定理的強大之處。

有了 SG 定理之後，ICG 就可以都用 SG 來進行分析了。我們來帶一些例題來說明 SG 定理要怎麼用。

3.5 一些例題

Example 3.2. 有向圖遊戲 (經典題)
給定 N 個有向無環圖，每一張有向無環圖中有一個唯一的起點，每個起點上放有一個棋子。兩名玩家輪流，每次操作先任選一張圖，再將那張圖上的棋子沿著有向邊移動一步。無法移動者判輸，請問先手有無必勝策略？

這題是一個裸題，他就是給你一堆的 Game Graph 然後就你求解而已。在中國這個遊戲有一個特別的名詞叫做有向圖遊戲。可以直接用 SG 定理建表求解。
接著來講一題比較正常的題目：

Example 3.3. Cutting Game(POJ2311)
給定一張 $N * M$ 的矩形方格紙，兩名玩家輪流行動。在每一次行動中，可以任選一張矩形方格紙，沿著某一行或者是某一列的隔線把他剪成兩部份。首先剪出 $1 * 1$ 的玩家獲勝。請問先手是否必勝？$(1 \leq N, M \leq 200)$

我們發現這個遊戲跟 ICG 有一些地方太一樣。他的獲勝方式是先剪出 $1 * 1$ 的人勝。這其實是一個匱乏賽局。但是因爲我們沒有學過，所以我們要先想辦法把他變成我們學過的 ICG。

首先，一個簡單的觀察告訴我們，如果你剪出 $1 * X$ 或 $X * 1$ 的方格紙，那對手下一步就可以剪出一個 $1*1$ 的方格。所以 $1*X$ 或 $X*1$ 是一個必贏的狀態。採取最優策略的話會盡量避免讓自己剪出這些狀態。所以如果我們找到一些狀態是會迫使我們剪出 $1*X$ 或 $X*1$ 的方格紙，那這些狀態就會是我們的必輸狀態。想想後我們會發現有三個局面：$2*2, 2*3, 3*2$。於是這三個局面就是必輸局面。這樣就可以把這個問題轉換成 ICG 了。

在遊戲開始前我們只有一張方格紙，但是在過程中會出現很多大小不同的方格紙，那要怎麼做呢？在這題當中，每一張方格紙都是一個賽局。如果有很多個賽局的話，那就把他們拿去做賽局和就好啦。所以我們就可以寫出下面這個遞迴式：

$$SG(N, M) = mex(\begin{array}{l} \{SG(i, M) \oplus SG(N - i, M),\ \forall i \in [1, N)\} \cup \\ \{SG(N, i) \oplus SG(N, M - i),\ \forall i \in [1, M)\}). \end{array}$$

這樣就可以透過求解遞迴式來解出這一題了。

我們在解組合賽局的題目的時候我們會需要作到這幾件事：

1. 把遊戲轉換成 ICG
2. 拆解出" 獨立" 的賽局
3. 計算出 SG Value

這三件事情是解決無偏賽局最核心的三件事情。解決完這些之後剩下的就是要優化你的 SG 函數或加速 SG 函數的計算。可能是觀察題目並透過數學歸納法證明 SG 函數有更好的性質或是用演算法等等。但那些前提是你要能把前面三件事情做好。

4 習題

這裡的題目都沒有按難度排。

Problem 4.1. (經典問題) 現在有 N 個石頭，雙方輪流拿石頭，每次操作每個人可以拿 $1 \sim k$ 個石頭，請問先手會贏還是先手會輸。$(N \leq 10^6)$

Problem 4.2. (CF1194D) 上題的變化題。現在有 N 個石頭，雙方輪流拿石頭，每次操作每個人可以拿 $1, 2, k$ 個石頭，請問先手會贏還是先手會輸。$(0 \leq N \leq 10^9, 3 \leq K \leq 10^9)$

Problem 4.3. (CF255E) 有 n 堆石頭，兩人輪流操作，每次操作可以選一堆石頭 (假設這堆石頭有 x 個)，將那堆的石頭數量改成 $y(0 \leq y < x$ 且 $\sqrt[4]{x} \leq y \leq \sqrt{x})$，不能操作者判輸，請問先手會贏還是先手會輸。

Problem 4.4. 經典問題 壓克力蛋糕
桌上有一塊巧克力蛋糕被切成 $N * M$ 的矩形，左下角爲 $(1, 1)$，右上角爲 (N, M)。特別的，$(1, 1)$ 的蛋糕是壓克力蛋糕。現在兩人輪流操作，每回合可以選一塊剩餘的蛋糕 (i, j)，並將他右上角的蛋糕全部吃掉。沒有人想要吃到壓克力蛋糕。所以請你判斷先手還是後手會吃到壓克力蛋糕。

Problem 4.5. TIOJ1123 辣椒醬蛋糕問題
這是上一題的變化版。桌上有一塊巧克力蛋糕被切成 $N * M$ 的矩形。辣椒醬蛋糕在 (i, j) 的位置 (不一定在 $(1, 1)$)。兩人輪流操作，每次操作可以切直的一刀或橫的一刀 (平行格線，不可切邊緣)，並且把不含辣椒醬蛋糕的蛋糕全部吃掉。最後吃掉辣椒醬蛋糕的人就輸了。請判斷先手會吃不會吃到辣椒醬蛋糕，如果不會，請給出最優策略的第一步 (詳細輸出件題目)。

Problem 4.6. (CF603C) 這是一個奇怪的遊戲，遊戲規則如下：農場裡有 N 堆牛牛，起初第 i 堆有 a_i 隻牛牛。兩人輪流行動，一次行動需從以下兩種操作選一種執行：

- 選一堆不是空的牛牛，並且把一隻牛牛丟到外太空。
- 選一堆大小爲 $2x$ 的牛牛，把他們全部丟到外太空，然後新增 k 堆牛牛，每一堆的牛數都是 x。

最後無法行動的人就輸了，請問先手會贏還是先手會輸。
$(1 \leq N \leq 10^5, 1 \leq K \leq 10^9, 1 \leq a_i \leq 10^9)$