Triangulation

Точки проективной плоскости.

На обычной Евклидовой плоскости точки описываются парой координат$(x, y)^T$, на проективной плоскости точки описываются трехкомпонентным вектором$(x, y, w)^T$. При этом для любого ненулевого числа *a*, векторы$(x, y, w)^T$ и$(ax, ay, aw)^T$ соответствуют одной и той же точке.

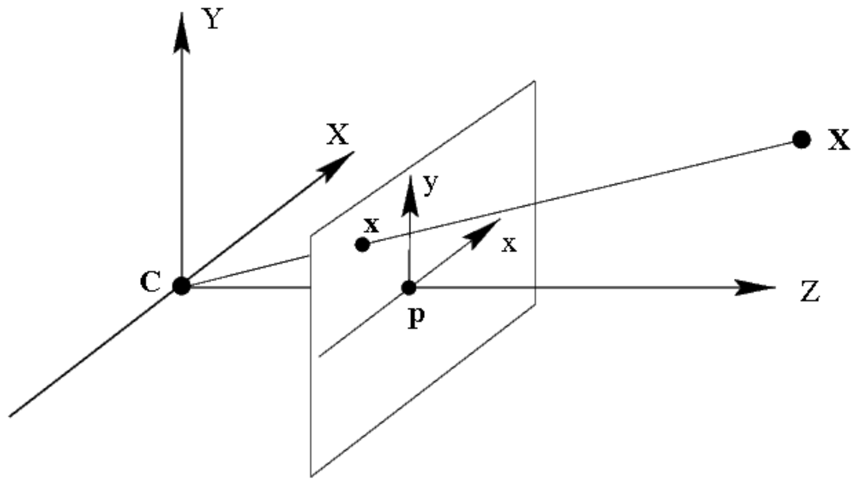
Точкам проективной плоскости можно сопоставить точки обычной Евклидовой плоскости. Координатному вектору $(x, y, w)^T$сопоставим точку Евклидовой плоскости с координатами $(x/w, y/w)^T$.

Проективное преобразование.

Проективное преобразование — это обратимое преобразование проективной плоскости (или пространства), которое переводит прямые в прямые. В координатах, проективное преобразование выражается в виде невырожденной квадратной матрицы *H*, при этом координатный вектор *x* переходит в координатный вектор *x*' по следующей формуле:

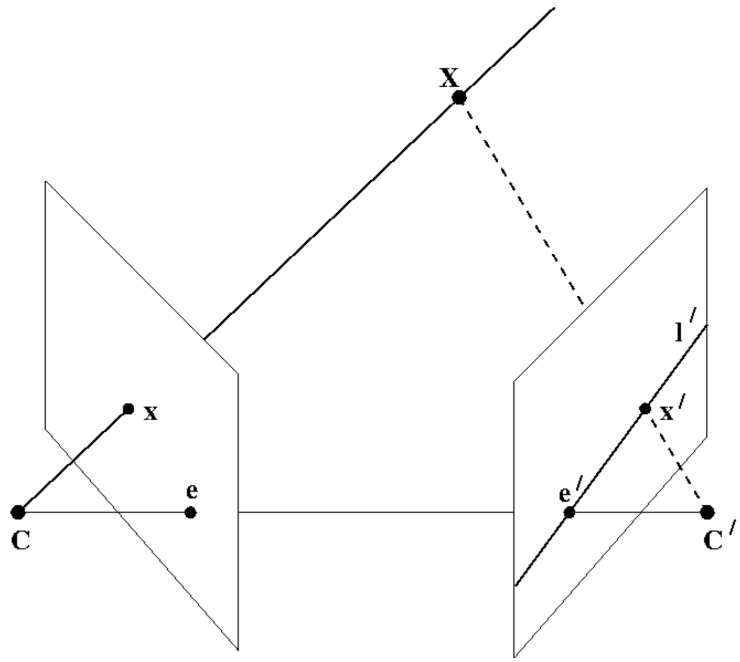
$x' = Hx.$

Модель проективной камеры Формула проецирования имеет простую математическую запись в однородных координатах:



- *X* — однородные координаты точки пространства
- *x* — однородные координаты точки плоскости
- *P* — матрица камеры размера 3x4, $P = K[R|t]$
- *K* — матрица 3x3 внутренних параметров камеры (док про Калибровку)
- *R* — ортогональная матрица размера 3x3, определяющая поворот камеры относительно глобальной системы координат
- t — трехмерный вектор смещения

Пара изображений.



Для понимания сначала стоит изучить док про Epipolar Geometry.

Эпиполярная геометрия имеет очень простую запись в координатах. Пусть имеется пара откалиброванных камер и

- *x* — однородные координаты точки на изображении одной камеры
- x’ — на изображении второй

Существует такая матрица *F* размера 3x3, что пара точек *x*, *x*' является стереопарой(одинаковыми точками на двух изображениях) тогда и только тогда, когда: $x'^T F x = 0$

Матрица *F* называется фундаментальной матрицей (fundamental matrix). Ее ранг равен 2, она определена с точностью до ненулевого множителя и зависит только от матриц исходных камер *P* и *P*'. Позже будем находить ее для пары кадров из видеопотока.

Использование этой теории.

Перед нами стоит задача превращения последовательности двумерных изображений в трехмерную структуру. Предположим, что кадра у нас только два. Обозначим их как A и B. Точки на изображении обозначим как ix_i, она соответствует трехмерной точке X_i.

Точки ix_i^A и ix_i^B находим с помощью алгоритмов, которые находят фичи на изображении.

По уже известному равенству $x = K[R|T]\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$

С учетом дисторсии наша формула усложняется:

$ix = D(K[R|T]\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix})$

Где D(X) — функция, принимающая однородные координаты точек изображения и возвращающая обычные координаты на изображении. Также позже нам понадобится обратная функция — InvD(ix).

Нормализация точек.

Преобразуем уравнение:

$nx_i = K^{-1}InvD(ix_i) = [R|T]\begin{pmatrix} X_i \\ 1 \end{pmatrix}$, где nx_i — это нормализованные точки изображения, зная K и коэффициенты дисторсии, мы легко найдем nx_i.

Fundamental matrix и Essential matrix

Fundamental matrix используется для нахождения уравнения эпиполярной прямой.

Итак, предположим, у нас есть два изображения, полученные от одной камеры. Нам неизвестны положения камер и координаты точек в пространстве. Договоримся ввести расчеты относительно первого кадра. Так получается, что $R^A = I$ (I — единичная матрица), T^A = (0, 0, 0). И переобозначим $R^B = R$, $t^B = t$. [R|t] — это матрица координат второго кадра, и оно же — матрица смещения положения камеры от кадра A к кадру B. В итоге имеем получаем такую систему:

$$\begin{cases} x_i^A = K\begin{pmatrix} X_i \\ 1 \end{pmatrix} \\ x_i^B = K[R|T]\begin{pmatrix} X_i \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Используя фундаментальную матрицу F (fubdamental matrix), получим такое уравнение:

$$(x_i^B)^T F x_i^A = 0$$

Из фундаментальной матрицы F уже можно получить необходимые нам R и t. Однако дисторсия все портит, с ее учетом зависимость точек между кадрами будет нелинейная, и это уже не будет работать. Но если мы перейдем к нормализованным точкам и используем сущностную матрицу E (essential matrix). Все будет почти тем же, но проще:

$$\begin{cases} nx_i^A = K \begin{pmatrix} X_i \\ 1 \end{pmatrix} \\ nx_i^B = K[R|T] \begin{pmatrix} X_i \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(nx_i^B)^T E nx_i^A = 0$$

Фундаментальная и сущностная матрицы связаны таким образом: $E = K^{-1} F K$. Теперь перед нами встала задача нахождения либо фундаментальной матрицы F, либо сущностной матрицы E, из которой позже сможем получить на R и t.

Вычисление Essential matrix 8-ми точечным алгоритмом

Перепишем предыдущее уравнение (при $nx_z^A = 1$ и $nx_z^B = 1$)

$$E_{11} \cdot nx_x^A \cdot nx_x^B + E_{12} \cdot nx_y^A \cdot nx_x^B + E_{13} \cdot nx_x^B + E_{21} \cdot nx_x^A \cdot nx_y^B + E_{22} \cdot nx_y^A \cdot nx_y^B + E_{23} \cdot nx_y^B + E_{31} \cdot nx_x^A + E_{32} \cdot nx_y^A + E_{33} = 0$$

Здесь опущен параметр i ради удобства, но имеем ввиду что это справедливо для каждой точки. Введем вектор e и матрицу M:

$$e = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33})$$

$$M = \begin{pmatrix} nx_{1\,x}^A \cdot nx_{1\,x}^B & nx_{1\,y}^A \cdot nx_{1\,x}^B & nx_{1\,x}^B & nx_{1\,x}^A \cdot nx_{1\,y}^B & nx_{1\,y}^A \cdot nx_{1\,y}^B & nx_{1\,y}^B & nx_{1\,x}^A & nx_{1\,y}^A & 1 \\ nx_{2\,x}^A \cdot nx_{2\,x}^B & nx_{2\,y}^A \cdot nx_{2\,x}^B & nx_{2\,x}^B & nx_{2\,x}^A \cdot nx_{2\,y}^B & nx_{2\,y}^A \cdot nx_{2\,y}^B & nx_{2\,y}^B & nx_{2\,x}^A & nx_{2\,y}^A & 1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Тогда всю систему уравнений можно представить в виде: $Me = 0$.

Получаем однородную систему уравнений, решив которую, получим E из e. Для решения необходимо минимум 8 точек.

Решение систем однородных уравнений при помощи сингулярного разложения

Сингулярное разложение — это декомпозиция матрицы, приводящее ее к такому виду:

$$M = UWV^T$$

U, V — ортогональные матрицы, W — диагональная матрица. При этом диагональные элементы матрицы W принято располагать в порядке убывания. Также ранг матрицы W — это и ранг матрицы M. А так как W — диагональная матрица, то ее ранг — это количество ненулевых диагональных элементов.

Итак, было дано уравнение вида: $Me = 0$, M — известная нам матрица, e — вектор, который на необходимо найти.

Строки V^T, которым соответствует нулевой диагональный элемент W на этой же строке, являются нуль-пространствами матрицы M, т. е. в данном случае являются линейно-независимыми решениями нашей системы. А так как элементы W располагаются в порядке убывания, то смотреть нужно последний элемент матрицы W. И решением будет последняя строка $(V^T)_9$. При расчете сущностной матрицы, используя 8 точек, последний элемент матрицы W должен быть равен нулю — $W_{99} = 0$, но на практике, в следствии ошибок, там будет какое-то ненулевое значение, и по величине этого значения можно оценить величину этой ошибки. При этом мы получим лучшее решение.

Тем не менее, найденное нами решение — не единственное, более того, решений будет бесконечно много. Если умножить найденное решение на какой-либо коэффициент, оно все-равно останется решением. Таким образом в уравнении спрятался коэффициент s (который может быть любым): $M(es) = 0$

Правда, все эти решения будут линейно зависимыми, а интересовать нас будет только одно из них.

Отсюда и матрица E может также масштабироваться. Вот только расчеты ведутся в однородном пространстве и, как следствие, от масштабирования (т. е. от коэффициента s) не зависят. Наверное, стоит масштабировать получившуюся матрицу E так, чтобы $E_{33} = 1$.

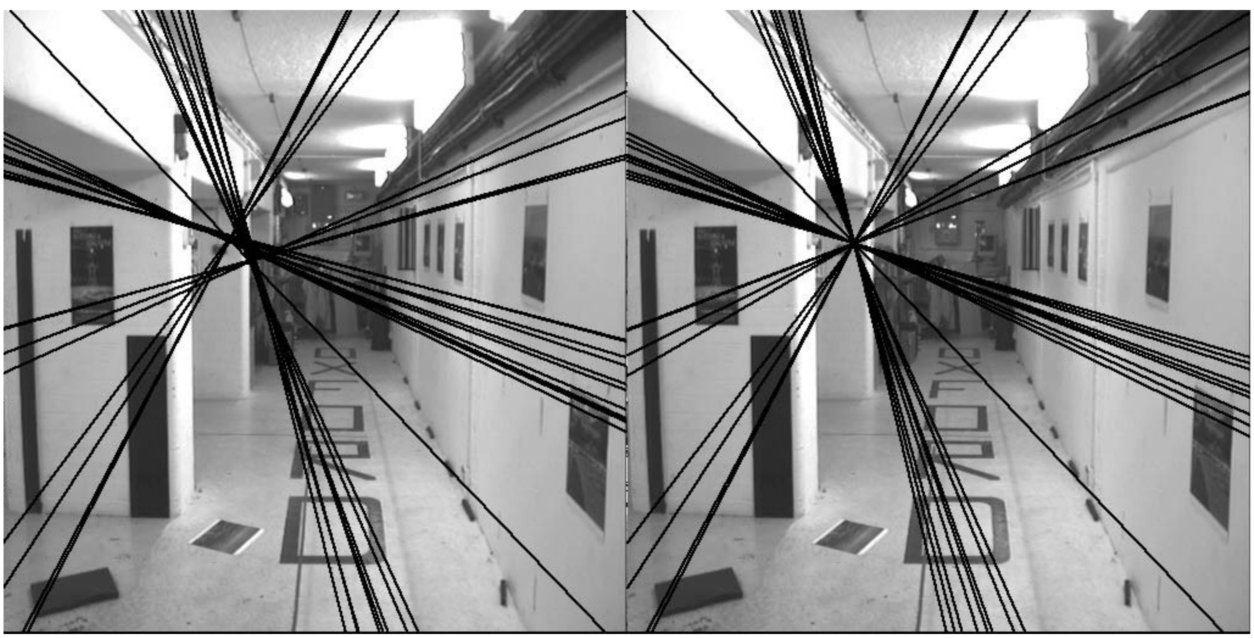
Для нахождения Essential matrix можно использовать также 7 точечный алгоритм. Идея та же, но мы упрощаем матрицу и находим меньше неизвестных. Получается больше разных ситуаций в решении.

Уточнение Essential и Fundamental matrix

Так как все в этом мире несовершенно, то мы будем постоянно получать ошибки, с которыми нам необходимо бороться. Так сущностная матрица должна иметь ранг равный 2 и следовательно $\left|E\right| = 0$. На практике, однако, это будет нет так.

Чтобы увидеть в чем это выражается, возьмем фундаментальную матрицу. Сущностная матрица / фундаментальная матрица — разница лишь в том, с какими точками мы работаем (нормализованными или точками на изображении).

Луч, выпущенный из точки кадра А, ляжет в кадр В как прямая линия. Допустим матрица F — это фундаментальная матрица кадров А и В ($(x_i^B)^T F x_i^A = 0$).



На картинке изображен пример эпиполярных линий, полученных из правильной фундаментальной матрицы (ранг которой равен 2, картинка справа) и неправильной (слева).

Чтобы получить правильную фундаментальную матрицу, воспользуемся свойством сингулярного разложения — приближать матрицу к заданному рангу:

$$F = UWV^T$$

В идеале W_{33} (последний элемент диагонали) должен быть равен нулю. Введем новую матрицу W'_{33}, которая равна W, только у которой элемент W'_{33}= 0.

Тогда исправленный вариант: $F' = UW'V^T$.

Ровно тот же принцип работает и для сущностной матрицы.

Получение положения камеры из сущностной матрицы

Введем матрицу $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Используем сингулярное разложение на сущностной матрице: $E = UWV^T$

Тогда получаем такие решения:

$R_1 = UHV^T$

$R_2 = UH^TV^T$

$c_1 = (U^T)_3$

$c_2 = -(U^T)_3$

c1, c2 — координаты положения камеры.

На необходимо положение камеры в локальных координатах самой камеры: $t = -Rc$

Получается 4 решения: $[R_1| - R_1c_1], [R_1| - R_1c_2], [R2| - R_2c_1], [R2| - R_2c_2]$

Нужно выбрать одно. Идея, как это сделать: проводим триангуляцию для всех случаев, выбираем из всех тот, в котором больше всего реалистичных точек (например, которые находятся не за камерой).

Вычисление координат точек в пространстве (триангуляция)

Допустим сейчас у нас есть больше, чем два кадра — A, B, C, …

$[R^A|t^A], [R^B|t^B], [R^C|t^C]$,… их положения.

nx^A, nx^B, nx^C, … — их нормализованные точки.

Необходимо найти точку $X = (X_x, X_y, X_z)$

$$\begin{cases} nx^A = [R^A|T^A]\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \\ nx^B = [R^B|T^B]\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \\ nx^C = [R^C|T^C]\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \\ ... \end{cases}$$

Представим эту систему так:

$$\begin{cases} nx_x^A \cdot (R_{31}^A \cdot X_x + R_{32}^A \cdot X_y + R_{33}^A \cdot X_z + t_z^A) = R_{11}^A \cdot X_x + R_{12}^A \cdot X_y + R_{13}^A \cdot X_z + t_x^A \\ nx_y^A \cdot (R_{31}^A \cdot X_x + R_{32}^A \cdot X_y + R_{33}^A \cdot X_z + t_z^A) = R_{21}^A \cdot X_x + R_{22}^A \cdot X_y + R_{23}^A \cdot X_z + t_y^A \\ nx_x^B \cdot (R_{31}^B \cdot X_x + R_{32}^B \cdot X_y + R_{33}^B \cdot X_z + t_z^B) = R_{11}^B \cdot X_x + R_{12}^B \cdot X_y + R_{13}^B \cdot X_z + t_x^B \\ nx_y^B \cdot (R_{31}^B \cdot X_x + R_{32}^B \cdot X_y + R_{33}^B \cdot X_z + t_z^B) = R_{21}^B \cdot X_x + R_{22}^B \cdot X_y + R_{23}^B \cdot X_z + t_y^B \\ \quad .. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (nx_x^A \cdot R_{31}^A - R_{11}^A) \cdot X_x + (nx_x^A \cdot R_{32}^A - R_{12}^A) \cdot X_y + (nx_x^A \cdot R_{33}^A - R_{13}^A) \cdot X_z + (nx_x^A \cdot t_z^A - t_x^A) = 0 \\ (nx_y^A \cdot R_{31}^A - R_{21}^A) \cdot X_x + (nx_y^A \cdot R_{32}^A - R_{22}^A) \cdot X_y + (nx_y^A \cdot R_{33}^A - R_{23}^A) \cdot X_z + (nx_y^A \cdot t_z^A - t_y^A) = 0 \\ (nx_x^B \cdot R_{31}^B - R_{11}^B) \cdot X_x + (nx_x^B \cdot R_{32}^B - R_{12}^B) \cdot X_y + (nx_x^B \cdot R_{33}^B - R_{13}^B) \cdot X_z + (nx_x^B \cdot t_z^B - t_x^B) = 0 \\ (nx_y^B \cdot R_{31}^B - R_{21}^B) \cdot X_x + (nx_y^B \cdot R_{32}^B - R_{22}^B) \cdot X_y + (nx_y^B \cdot R_{33}^B - R_{23}^B) \cdot X_z + (nx_y^B \cdot t_z^B - t_y^B) = 0 \\ \quad \dots \end{cases}$$

В матричном виде:

$$T = \begin{pmatrix} (nx_x^A \cdot R_{31}^A - R_{11}^A) & (nx_x^A \cdot R_{32}^A - R_{12}^A) & (nx_x^A \cdot R_{33}^A - R_{13}^A) & (nx_x^A \cdot t_z^A - t_x^A) \\ (nx_y^A \cdot R_{31}^A - R_{21}^A) & (nx_y^A \cdot R_{32}^A - R_{22}^A) & (nx_y^A \cdot R_{33}^A - R_{23}^A) & (nx_y^A \cdot t_z^A - t_y^A) \\ (nx_x^B \cdot R_{31}^B - R_{11}^B) & (nx_x^B \cdot R_{32}^B - R_{12}^B) & (nx_x^B \cdot R_{33}^B - R_{13}^B) & (nx_x^B \cdot t_z^B - t_x^B) \\ (nx_y^B \cdot R_{31}^B - R_{21}^B) & (nx_y^B \cdot R_{32}^B - R_{22}^B) & (nx_y^B \cdot R_{33}^B - R_{23}^B) & (nx_y^B \cdot t_z^B - t_y^B) \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$T \cdot \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

С помощью сингулярного разложения находим вектор a такой, что $Ta = 0$.

$a = \begin{pmatrix} sX_x \\ sX_y \\ sX_z \\ s \end{pmatrix}$, где s — какой-то неизвестный коэффициент. Выходит:

$$X = (a_x/a_w, a_y/a_w, a_z/a_w)$$