

Einführung in die Spektraltechniken Die diskrete Fouriertransformation

Prof. Dr. Klaus Jung



Übergang zu diskreten Signalen

- Kontinuierliche Signale können im Computer nicht direkt bearbeitet werden
- Übergang zu diskreten Signalen
 - Sampeln von Tonsignalen
 - Digitalisieren von Bildern
- Fragestellungen
 - Geeignete Abtastfrequenzen
 - Auswirkungen auf das Spektrum
 - Rekonstruktion des kontinuierlichen Signals
 - Aliasing-Effekte

2 © Klaus Jung

Abtastung durch Impulsfunktion

- Impuls- / Dirac- / Deltafunktion

$$\delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0 \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\delta(sx) = \frac{1}{|s|} \cdot \delta(x) \text{ für } s \neq 0$$

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \delta(x - x_0) = \begin{cases} g(x_0) & \text{für } x = x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Abtastung an der Stelle x_0

3 © Klaus Jung

Abtastung durch Impulsfunktion

- Abtastung an den Stellen $x_i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - i)$$

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot III(x) \text{ mit } III(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - i)$$

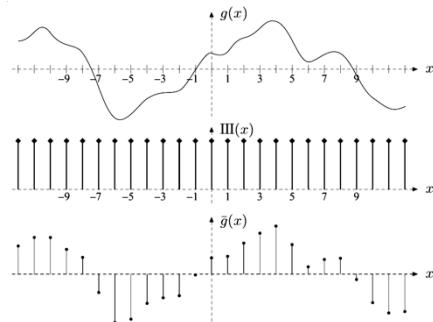
Mit Abtastintervall τ

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot III\left(\frac{x}{\tau}\right)$$

Kammfunktion
(„comb function“ oder „Shah function“)
Kyrillischer Buchstabe Schah III

4 © Klaus Jung

Abtastung durch Impulsfunktion



5 © Klaus Jung

Bildquelle: W. Burger, M. Burge: Digitale Bildverarbeitung

Eigenschaften der Kammfunktion

- Fouriertransformierte der Kammfunktion bleibt eine Kammfunktion

$$III\left(\frac{x}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau III\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot III\left(\frac{x}{\tau}\right) \Leftrightarrow \bar{G}(\omega) = G(\omega) * \tau III\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

- Wegen $f(x) * \delta(x - d) = f(x - d)$ ist das Spektrum von $\bar{G}(\omega)$ eine unendliche Wiederholung des Spektrums von $G(\omega)$ mit Periodenlänge $\frac{2\pi}{\tau} = \omega_s$ (Abtastfrequenz)

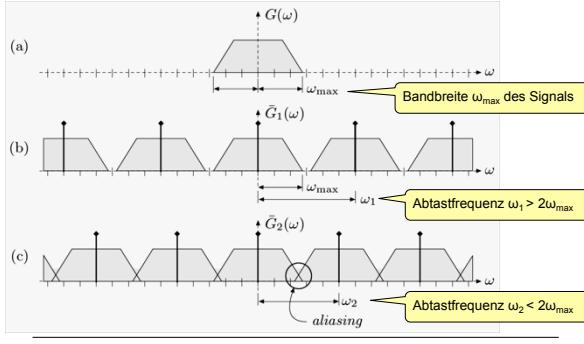
6 © Klaus Jung

Herleitung $f(x) * \delta(x - d) = f(x - d)$

$$\begin{aligned}
 f(x) * \delta(x - d) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cdot \underbrace{\delta((x-d) - x')}_{\neq 0 \text{ nur f\"ur } x' = x-d} dx' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-d) \cdot \delta((x-d) - x') dx' \\
 &= f(x-d) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta((x-d) - x') dx'}_1 \\
 &= f(x-d)
 \end{aligned}$$

7 © Klaus Jung

Aliasing und Abtasttheorem



8 © Klaus Jung

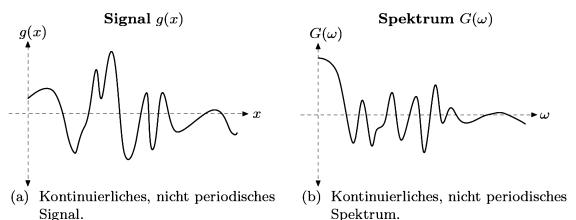
Bildquelle: W. Burger, M. J. Burge: Digitale Bildverarbeitung

Aliasing und Abtasttheorem

- Das kontinuierliche Signal $g(x)$ l\"sst sich aus dem diskreten Signal $\bar{g}(x)$ verlustfrei rekonstruieren, falls
 - das Spektrum $G(\omega)$ des kontinuierlichen Signals durch ω_{\max} beschr\"ankt ist und
 - f\"ur die Abtastfrequenz gilt: $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$
- Nehme dazu aus $\bar{G}(\omega)$ eine Replika von $G(\omega)$ und f\"uhre die inverse Fouriertransformation aus
- *Periodisches Signal g* \rightarrow *diskretes Spektrum G*
- *Diskretes Signal g* \rightarrow *periodisches Spektrum G*

9 © Klaus Jung

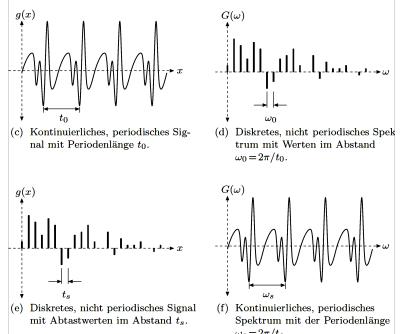
Kontinuierliche Signale



10 © Klaus Jung

Bildquelle: W. Burger, M. J. Burge: Digitale Bildverarbeitung

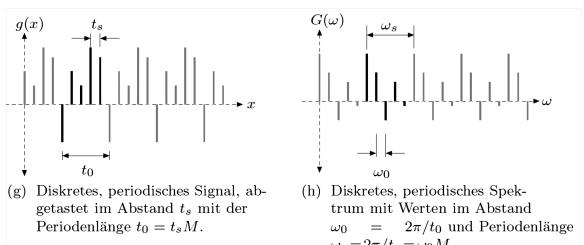
Diskrete und periodische Signale



11 © Klaus Jung

Bildquelle: W. Burger, M. J. Burge: Digitale Bildverarbeitung

Diskret-periodische Signale

M Abtastwerte \leftrightarrow M Spektralwerte

12 © Klaus Jung

Bildquelle: W. Burger, M. J. Burge: Digitale Bildverarbeitung

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

- Betrachte Signal $g(u)$ als Folge von M Abtastwerten (periodisch fortgesetzt)
- Definiere Transformation zum Spektrum $G(m)$, einer Folge von M Spektralwerten

$$G(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g(u) \cdot e^{-i2\pi \frac{mu}{M}} \quad \text{für } 0 \leq m < M$$

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} G(m) \cdot e^{i2\pi \frac{mu}{M}} \quad \text{für } 0 \leq u < M$$

$G(m)$ und $g(u)$ sind i.d.R. komplexwertig

13 © Klaus Jung

DFT: Beispiel

u	$g(u)$		$G(m)$		m
0	1.0000	0.0000	14.2302	0.0000	0
1	3.0000	0.0000	-5.6745	-2.9198	1
2	5.0000	0.0000	*0.0000	*0.0000	2
3	7.0000	0.0000	-0.0176	-0.6893	3
4	9.0000	0.0000	*0.0000	*0.0000	4
5	8.0000	0.0000	0.3162	0.0000	5
6	6.0000	0.0000	*0.0000	*0.0000	6
7	4.0000	0.0000	-0.0176	0.6893	7
8	2.0000	0.0000	*0.0000	*0.0000	8
9	0.0000	0.0000	-5.6745	2.9198	9

14 © Klaus Jung

DFT: Real- und Imaginärteil

- Zerlege in Real- und Imaginärteil

$$G_{\text{Re}}(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} (g_{\text{Re}}(u) \cdot C_m^M(u) + g_{\text{Im}}(u) \cdot S_m^M(u))$$

$$G_{\text{Im}}(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} (g_{\text{Im}}(u) \cdot C_m^M(u) - g_{\text{Re}}(u) \cdot S_m^M(u))$$

- Mit den Basisfunktionen

$$C_m^M(u) = \cos(2\pi \frac{mu}{M}) \quad S_m^M(u) = \sin(2\pi \frac{mu}{M})$$

15 © Klaus Jung

$G(0)$ ist Mittelwert des Signals
(bis auf Normierung)

DFT: Real- und Imaginärteil

$$G_{\text{Re}}(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} (g_{\text{Re}}(u) \cdot C_m^M(u) + g_{\text{Im}}(u) \cdot S_m^M(u))$$

$$G_{\text{Im}}(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} (g_{\text{Im}}(u) \cdot C_m^M(u) - g_{\text{Re}}(u) \cdot S_m^M(u))$$

- Für $m = 0$ und reellwertiges g gilt:

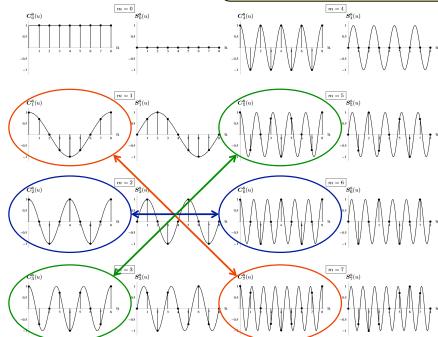
$$C_0^M(u) = 1 \quad S_0^M(u) = 0$$

$$G(0) = G_{\text{Re}}(0) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g_{\text{Re}}(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g(u)$$

16 © Klaus Jung

DFT: Aliasing

$m = 4$ ist maximale Frequenzkomponente, die mittels eines Signals der Länge $M = 8$ beschrieben werden kann



17 © Klaus Jung

Bildquelle: W. Burger, M. J. Burge: Digitale Bildverarbeitung

DFT: Symmetrie

- Falls g reellwertig ist, gilt $G(\omega) = G^*(-\omega)$
- Damit hat im diskreten Fall die Spektralkomponente mit Wellenzahl m ein gleich großes Duplikat mit Wellenzahl $-m$

$$|G(m)| = |G(kM - m)| = |G(kM + m)| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

18 © Klaus Jung

Zeitsignal

- $g(u)$ sei ein Zeitsignal
- $M = 500$ Abtastwerte im Intervall $\tau = 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s}$
- Abtastfrequenz $f_s = 1/\tau = 1000 \text{ Hertz}$
- Grundfrequenz $f_1 = 1/(M\tau) = 2 \text{ Hertz}$
- Wellenzahl $m = 2$ entspricht $f_2 = 4 \text{ Hertz}$
- Maximal darstellbare Frequenz ist

$$f_{\max} = \frac{1}{2} f_s = \frac{M}{2} f_1 = 500 \text{ Hertz}$$

19 © Klaus Jung

Signal im Ortsraum

- $g(u)$ eindimensionales Signal von 15 cm Länge auf einem Druckraster von 120 Punkten/cm ($\approx 300 \text{ dpi}$)
- $M = 1800$ Abtastwerte im Intervall $\tau = 1/120 \text{ cm} \approx 83 \mu\text{m}$
- Abtastfrequenz $f_s = 1/\tau = 120 \text{ Zyklen/cm}$
- Grundfrequenz $f_1 = 1/(M\tau) = 1/15 \text{ Zyklen/cm}$
- Maximal darstellbare (feinste aufzulösende) Struktur

$$f_{\max} = \frac{1}{2} f_s = \frac{M}{2} f_1 = 60 \text{ Zyklen/cm}$$

20 © Klaus Jung

Leistungsspektrum

- Leistung = Betrag des komplexwertigen Spektrums

$$|G(m)| = \sqrt{G_{\text{Re}}^2(m) + G_{\text{Im}}^2(m)}$$

Typisch ist
logarithmische
Darstellung
 $\log_{10}(|G(m)|)$

- Verschiebung des Signals
 - Phasenverschiebung des Spektrums
 - keine Änderung des Leistungsspektrums

$$g_2(u) = g_1(u - d) \text{ mit } d \in \mathbb{Z}$$

$$|G_2(m)| = |G_1(m)|$$

21 © Klaus Jung

Diskrete Fouriertransformation in 2D

- Einfache mathematische Verallgemeinerung

$$G(m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u,v) \cdot e^{-i2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)}$$

$$g(u,v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G(m,n) \cdot e^{i2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)}$$

- 2D-DFT ist separabel

- In einem Signal $g(u,v)$ können erst alle Zeilen $g(\cdot, v)$ 1D-transformiert werden,
- dann alle Spalten des Ergebnisses 1D-transformieren

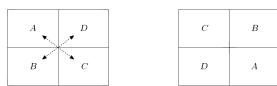
22 © Klaus Jung

Zentrierte Darstellung

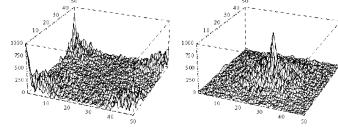
- Symmetrien

$$G(m,n) = G(m + pM, n + qN) \text{ für alle } p, q \in \mathbb{Z}$$

$$|G(m,n)| = |G(-m,-n)|$$

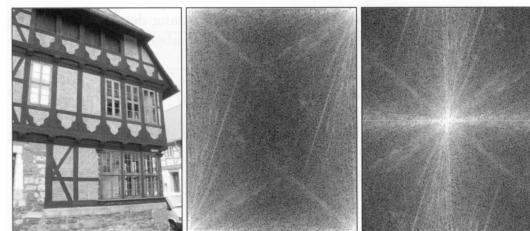


- Legt Koordinatenursprung $(0,0)$ in die Mitte



23 © Klaus Jung

Zentrierte Darstellung

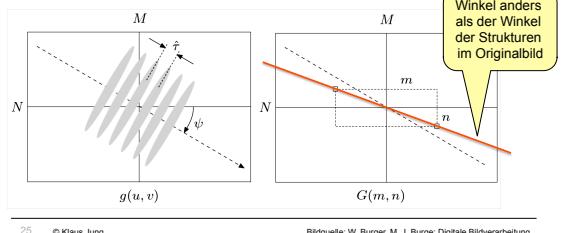


24 © Klaus Jung

Bildquelle: W. Burger, M. J. Burge: Digitale Bildverarbeitung

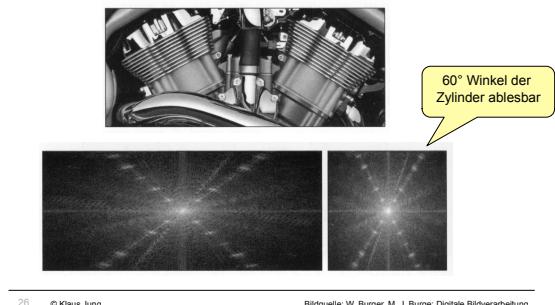
Geometrische Korrektur

- Frequenz $\hat{f} = 1/\hat{\tau}$ in Richtung ψ
- Koeffizient des Spektrums an Position $(m, n) = \pm \hat{f} \cdot (M \cos \psi, N \sin \psi)$



Geometrische Korrektur

- Skaliere Spektrum auf quadratische Form

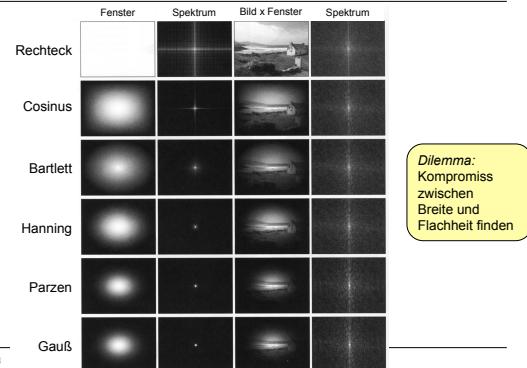


Auswirkungen der Periodizität

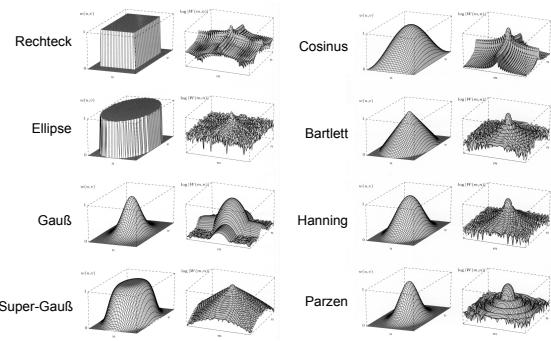
- Bild wird als periodisch fortgesetzt angesehen
 - Hohe Frequenzen bei Intensitätsprüngen am Rand
 - Überlagern eigentliche Strukturen im Spektrum



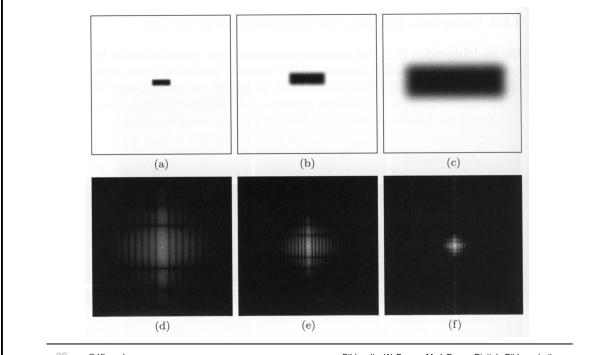
Windowing (Fensterfunktionen)



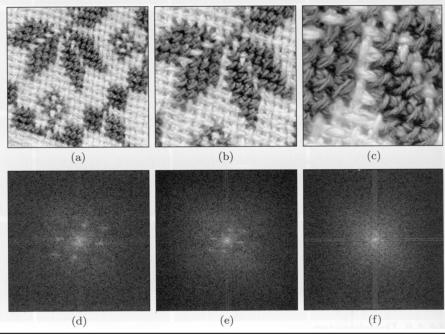
Fensterfunktionen



Skalierung



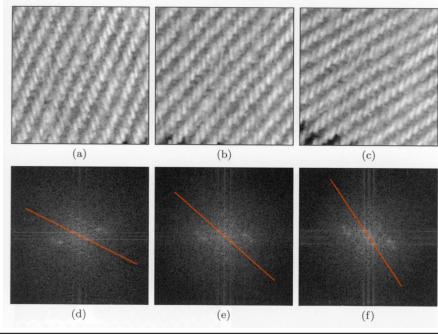
Gerichtete periodische Muster



31 © Klaus Jung

Bildquelle: W. Burger, M. J. Burge: Digitale Bildverarbeitung

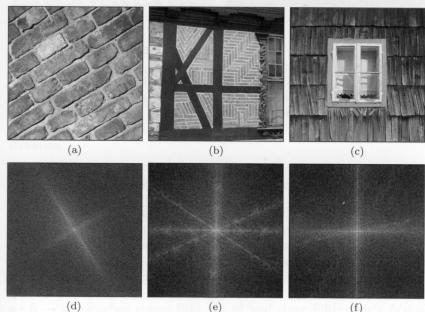
Rotation



32 © Klaus Jung

Bildquelle: W. Burger, M. J. Burge: Digitale Bildverarbeitung

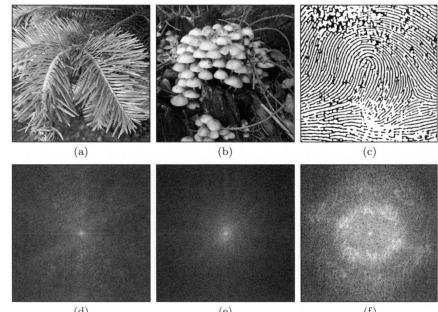
Überlagerung von Mustern



33 © Klaus Jung

Bildquelle: W. Burger, M. J. Burge: Digitale Bildverarbeitung

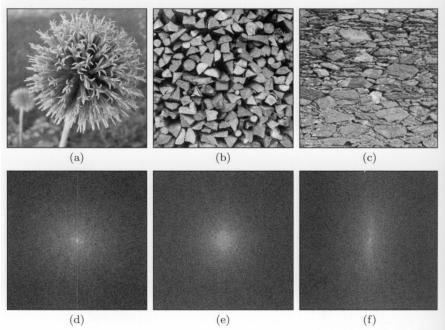
Natürliche Bildmuster



34 © Klaus Jung

Bildquelle: W. Burger, M. J. Burge: Digitale Bildverarbeitung

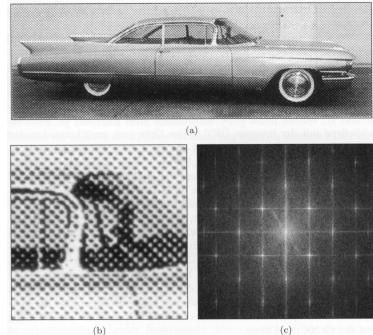
Muster ohne ausgeprägte Orientierung



35 © Klaus Jung

Bildquelle: W. Burger, M. J. Burge: Digitale Bildverarbeitung

Druckraster



36 © Klaus Jung

Bildquelle: W. Burger, M. J. Burge: Digitale Bildverarbeitung