# Einführung in die Spektraltechniken

Die Fouriertransformation

Prof. Dr. Klaus Jung

Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin
University of Applied Sciences

## Verwendung / Nutzen

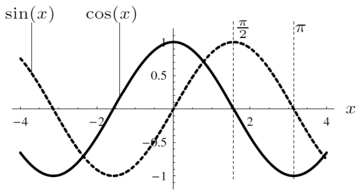
- Darstellung und Analyse von Bildern im Frequenzbereich
- Effiziente Realisierung von Bildverarbeitungs-operationen im Frequenzraum
  - Lineare Filter
  - Faltungsoperationen
- Bildkompression
  - Transformationskodierung
  - Diskrete Cosinus Transformation (DCT)
    - JPEG
    - MPEG

## Sinus und Kosinus

- Analytische Funktionen
- Periodische Funktionen

$f(x) = \cos(x) \qquad g(x) = \sin(x)$



## Frequenz und Amplitude $a \cdot \cos(\omega x)$

- Periodenlänge: $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Frequenz: $f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f$
- Kreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- Amplitude: $a$

| | $\cos(x)$ | $\cos(3x)$ |
|---|---|---|
| Periode $T$ | $2\pi$ | $2\pi/3$ |
| Kreisfrequenz $\omega$ | 1 | 3 |
| Frequenz $f$ | $\frac{1}{2\pi}$ | $\frac{3}{2\pi}$ |

## Phase

- Verschieben um $\varphi$ entlang der $x$-Achse

$$\cos(x) \rightarrow \cos(x - \varphi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \ldots = \cos(2k\pi)$$

$$\sin(\omega x) = \cos(\omega x - \tfrac{\pi}{2})$$

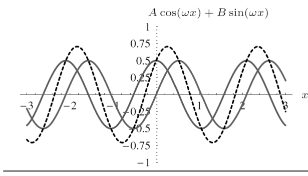
 

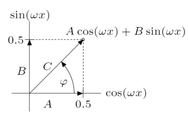
## Addition

- Addition von cos/sin gleicher Frequenz liefert wieder cos bzw. sin gleicher Frequenz

$$A \cdot \cos(\omega x) + B \cdot \sin(\omega x) = C \cdot \cos(\omega x - \varphi)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \tan^{-1}(B/A)$$



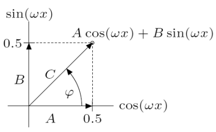

 

## Euler'sche Notation

- Kosinus und Sinus als ein Paar orthogonaler, zweidimensionaler Vektoren

$z = a + ib \in \mathbb{C}$

$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$




$\left|a \cdot e^{i\theta}\right| = |a| \cdot \left|e^{i\theta}\right| = |a|$

$\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$ $\qquad e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi}$

$\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$ $\qquad e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \cdot \sin(\omega x)$

## Fourierreihen

- Sei $g(x)$ *periodische* Funktion mit Frequenz $\omega_0$ dann existieren Koeffizienten $A_k$ und $B_k$, so dass:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( A_k \cos(k\omega_0 x) + B_k \sin(k\omega_0 x) \right)$$

- Das Finden von $A_k$ und $B_k$ heißt *Fourieranalyse*

## Fourierintegral

- Erweiterung des Konzepts auf *nicht notwendig periodische* Funktionen
  - Nicht nur Vielfache der Grundfrequenz ($k\omega_0$)
  - Beliebige Frequenzen $\omega$ notwendig

$$g(x) = \int_0^{\infty} A_\omega \cos(\omega x) + B_\omega \sin(\omega x)\, d\omega$$

$$\left.\begin{aligned} A_\omega &= A(\omega) = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \cos(\omega x)\, dx \\ B_\omega &= B(\omega) = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \sin(\omega x)\, dx \end{aligned}\right\} \text{Spektrum}$$

## Fouriertransformation

- Erweiterung der Zerlegung auf *komplexe* Funktionen $g(x)$
  - Verwendung der Euler'schen Schreibweise
  - Berechne das *Fourierspektrum* aus $A(\omega)$, $B(\omega)$

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \sqrt{\pi/2}\left(A(\omega) - i \cdot B(\omega)\right) \\ &= \sqrt{\pi/2}\left(\tfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \cos(\omega x)\, dx - i \cdot \tfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \sin(\omega x)\, dx\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \left(\cos(\omega x) - i \cdot \sin(\omega x)\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\omega x}\, dx \end{aligned}$$

## Fouriertransformation

- *Fouriertransformation* $F: g(x) \mapsto G(\omega)$
  - Berechne das kontinuierliche *Fourierspektrum*

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\omega x}\, dx$$

- *Inverse Fouriertransformation* $F^{-1}: G(\omega) \mapsto g(x)$
  - Rekonstruiere die ursprüngliche Funktion

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot e^{i\omega x}\, d\omega$$

## Fouriertransformation: Beispiele

| *Funktion* | *Transformationspaar* $g(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(\omega)$ |
|---|---|
| **Kosinusfunktion** mit Frequenz $\omega_0$ | $g(x) = \cos(\omega_0 x)$<br>$G(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right)$<br>wenn w (omega) = 0 ist, kommt der Peak bei w0 |
| **Sinusfunktion** mit Frequenz $\omega_0$ | $g(x) = \sin(\omega_0 x)$<br>$G(\omega) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right)$ |
| **Gauß-Funktion** der Breite $\sigma$ | $g(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$<br>$G(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$ |
| **Rechteckpuls** der Breite $2b$ | $g(x) = \Pi_b(x) = \begin{cases} 1 & \lvert x\rvert \le b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$<br>$G(\omega) = \frac{2b\sin(b\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega}$ |

Dirac-, Impuls- oder Deltafunktion $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$

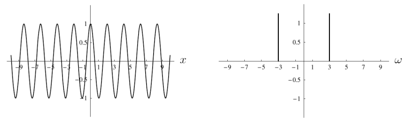
Bleibt eine Gauß-Funktion

„Sinc"-Funktion *sin(x)/x*

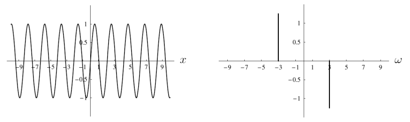
 

**Gaußbeispiel:**
**Die Fouriertransformation ergibt wieder eine Gaußkurve, wenn Sigmar =1 ist.**

## Kosinus/Sinus ←→ Impusfunktion



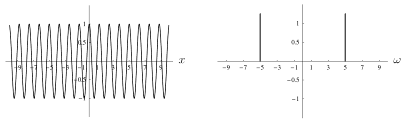
(a) Kosinus ($\omega_0=3$): $g(x)=\cos(3x)$ ∘—• $G(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot(\delta(\omega-3)+\delta(\omega+3))$



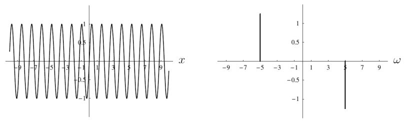
(b) Sinus ($\omega_0=3$): $g(x)=\sin(3x)$ ∘—• $G(\omega)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot(\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3))$

13 © Klaus Jung

## Kosinus/Sinus ←→ Impusfunktion



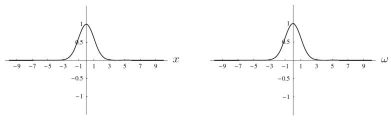
(c) Kosinus ($\omega_0=5$): $g(x)=\cos(5x)$ ∘—• $G(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot(\delta(\omega-5)+\delta(\omega+5))$



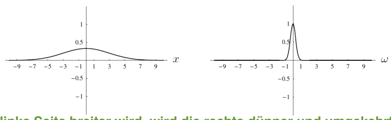
(d) Sinus ($\omega_0=5$): $g(x)=\sin(5x)$ ∘—• $G(\omega)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot(\delta(\omega-5)-\delta(\omega+5))$

14 © Klaus Jung

## Gaußfunktion



(a) Gauß ($\sigma=1$): $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ ∘—• $G(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

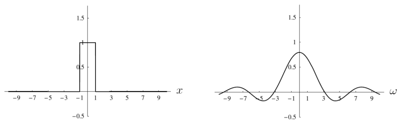


Wenn die linke Seite breiter wird, wird die rechte dünner und umgekehrt

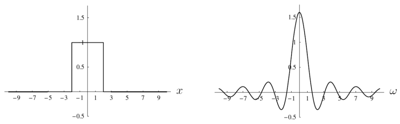
(b) Gauß ($\sigma=3$): $g(x)=\frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot 9}}$ ∘—• $G(\omega)=e^{-\frac{9\omega^2}{2}}$

15 © Klaus Jung

## Rechteck- ←→ „Sinc"-Funktion



(c) Rechteckpuls ($b=1$): $g(x)=\Pi_1(x)$ ∘—• $G(\omega)=\frac{2\sin(\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega}$



(d) Rechteckpuls ($b=2$): $g(x)=\Pi_2(x)$ ∘—• $G(\omega)=\frac{4\sin(2\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega}$

16 © Klaus Jung

## Eigenschaften

komplexe konjugiert
z = a + ib
z* = a - ib

komplex konjugiert

- Symmetrie $G(\omega)=G^*(-\omega)$ Frequenzspektrum sieht links/rechts immer gleich aus
- Linearität $\begin{cases} a\cdot g(x) \leftrightarrow a\cdot G(\omega) \\ g_1(x)+g_2(x) \leftrightarrow G_1(\omega)+G_2(\omega)\end{cases}$

  Wenn ich das Signal mit 10 mult. wird das Spektrum auch (G) mal 10 genommen

  Wenn ich zwei Signaleaddiere, kommen eben zwei Peaks
- Ähnlichkeit $g(sx) \leftrightarrow \frac{1}{s}\cdot G(\frac{\omega}{s})$

  Phasenverschiebung
- Verschiebung $g(x-d) \leftrightarrow e^{-i\omega d}\cdot G(\omega)$ Spektrum bleibt gleich, nur die Phase ändert sich
- Faltung $\begin{cases} g(x)*h(x) \leftrightarrow G(\omega)\cdot H(\omega) \\ g(x)\cdot h(x) \leftrightarrow G(\omega)*H(\omega)\end{cases}$

17 © Klaus Jung

Stern bedeutet Faltung

Wenn man im Ortsraum viele Operationen machen muss
z.B. ein 100x100 Kernel (100 Multiplikationen) für jeden Bildpunkt, dauerts lange.
Stattdessen das Frequenzspektrum mit dem Frequenzspektrum des Filters multiplizieren

## Definition Faltung

$$(g*h)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x')\cdot h(x-x')\,dx'$$

18 © Klaus Jung

| g | | G |
| --- | --- | --- |
| konti | periodisch | diskret -> 1 Peak |
| konti | nicht periodisch | kontinuierlich -> Gauß-Bsp |
| diskret | periodisch | diskret -> 1 Peak → periodisch |
| diskret | nicht  periodisch | kontinuierlich -> Gauß-Bsp |