5 VECTORI ALEATORI, ŞIRURI ŞI PROCESE ALEATOARE

5.1 Vectori aleatori

5.1.1 Repartiţii comune şi valori tipice

Fie două variabile aleatoare X şi Y (fiecare cu câmpul ei de probabilitate). Dacă ele sunt discrete, ***repartiţia comună de probabilitate*** a cuplului (X,Y) este

$$P_{XY}(A\times B)=\sum_{\substack{x_i\in A\\ y_j\in B}}P(X=x_i,Y=y_j),\quad \forall A\in\mathcal{K}_X,\forall B\in\mathcal{K}_Y. \tag{5.1}$$

În cazul finit, ea poate fi dată (asemănător variabilelor aleatoare unidimensionale finite, descrise în §3.1.2) printr-o matrice cu $(n+1)$ linii şi $(m+1)$ coloane,

$$(X,Y):\begin{pmatrix} & y_1 & \dots & y_j & \dots & y_m\\ x_1 & p_{11} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_i & p_{i1} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{im}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_n & p_{n1} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \mathbf{y}\\ \mathbf{x} & \mathbf{P}\end{pmatrix} \tag{5.2}$$

în prima coloană figurând valorile x_i, în prima linie — valorile y_j, iar în rest — probabilităţile p_{ij} (vezi şi Figura 5.1), cu

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=1. \tag{5.3}$$

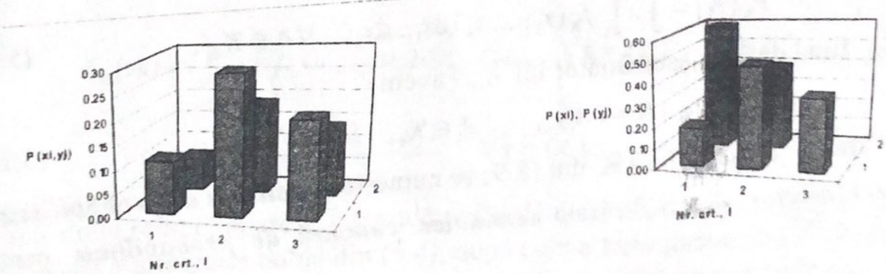

Figura 5.1 Graficele probabilităţilor comune şi ale celor individuale, pentru două repartiţii discrete, X şi Y

Funcţia comună de repartiţie a cuplului (X,Y) este, prin definiţie,

$$F_{XY}(x,y)=P(X(\omega_X)<x,Y(\omega_Y)<y),\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2., \tag{5.4}$$

iar dacă X,Y sunt absolut continue, $f_{XY}(x,y)$ este ***densitatea comună de probabilitate***, dată de derivata parţială mixtă, de ordinul 2, a funcţiei comune de repartiţie:

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}. \tag{5.5}$$

În cazul discret, ***repartițiile marginale*** ale lui X şi Y sunt definite de

$$\begin{aligned} P_X(X=x_i)&=p_i=\sum_j p_{ij},\ x_i\in R_X \\ P_Y(Y=y_j)&=p_j=\sum_i p_{ij},\ y_i\in R_Y \end{aligned} \tag{5.6}$$

iar în cazul continuu, ***densitățile marginale de probabilitate*** ale lui X şi Y, de

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x. \tag{5.7}$$

În general, se numeşte ***vector aleator*** (sau ***variabilă aleatoare multidimensională***) pe $(\Omega,\mathcal{K},P)$ un vector $\mathbf{X}=(X_i)_{i=1,\dots,n}$ ale cărui componente X_i sunt variabile aleatoare din $\mathcal{V}(\Omega_i,\mathcal{K}_i,P_i)$. Vom nota cu $\mathcal{V}^n$ mulţimea vectorilor aleatori de dimensiune n pe $(\Omega,\mathcal{K},P)$. Evident, $\mathbf{X}\in\mathcal{V}^n$ poate fi privit şi ca o aplicaţie $\mathbf{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$, cu $\Omega=\times_{i=1}^n\Omega_i$, $R=\times_{i=1}^n R_i$ şi $\mathcal{K}=\times_{i=1}^n\mathcal{K}_i$. Se poate demonstra că şi P este o probabilitate σ-aditivă, iar $(\Omega,\mathcal{K},P)$ — un câmp borelian de probabilitate (Spătaru, 1990, §15).

Repartiția de probabilitate a vectorului aleator $\mathbf{X}$ (sau ***repartiția comună*** pentru $X_1,\dots,X_n\in\mathcal{V}$) este funcția

$$P_{\mathbf{X}}(\mathbf{A})=P_{X_1,\dots,X_n}(\mathbf{A})=P_{1,\dots,n}(\mathbf{A})=P((X_i(\omega_i))_{i=1,\dots,n}\in\mathbf{A}),\quad \forall\mathbf{A}\in\mathcal{K}_{\mathbf{X}}, \tag{5.8}$$

cu

$$P_{\mathbf{X}}(\mathbf{A})=\int\dots\int_{\mathbf{A}} f_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n,\quad \forall\mathbf{A}\in\mathcal{K}_{\mathbf{X}}, \tag{5.9}$$

unde, $\mathcal{K}_{X_i}$ fiind definiți asemănător lui $\mathcal{K}_X$, avem

$$\mathcal{K}_{\mathbf{X}}=\{\mathbf{A}=(A_i)_{i=1,\dots,n}\mid A_i\in\mathcal{K}_i,\quad i=1,\dots,n\}. \tag{5.10}$$

Funcţia $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ din (5.9) se numeşte ***densitatea de probabilitate a vectorului aleator*** $\mathbf{X}\in\mathcal{V}^n$ (sau ***densitatea comună de probabilitate*** pentru $X_1,\dots,X_n\in\mathcal{V}$). Evident,

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})=f_{X_1,\dots,X_n}(\mathbf{x})=f_{1,\dots,n}(\mathbf{x})\ge 0,\quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n. \tag{5.11}$$

În fine, ***funcția de repartiție*** a vectorului aleator $\mathbf{X}\in\mathcal{V}^n$ (sau ***funcția comună de repartiție*** pentru $X_1,\dots,X_n\in\mathcal{V}$) este

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})=F_{X_1,\dots,X_n}(\mathbf{x})=F_{1,\dots,n}(\mathbf{x})=P((X_i(\omega_i)<x_i)_{i=1,\dots,n}),\\ \forall\mathbf{x}=(x_i)_{i=1,\dots,n}\in\mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ea are următoarele proprietăți, corespunzătoare celor din (3.24)-(3.26), pentru variabilele unidimensionale:

$$\mathbf{a} < \mathbf{b} \Rightarrow F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a}) \le F_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\lim_{\substack{x_i \to a_i \\ x_i < a_i}} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{X}}((a_i, \mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n, \tag{5.13}$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \infty} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 1; \quad F_{\mathbf{X}}((-\infty_i, \mathbf{x})) = 0, \quad \forall \mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n,$$

unde am notat cu $(a_i, \mathbf{x})$ vectorul $\mathbf{x}$ a cărui componentă de rang i este forțată la valoarea a_i. Împreună cu proprietatea

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a} \le \mathbf{X} < \mathbf{b}) \ge 0, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \tag{5.14}$$

banală în cazul unidimensional, proprietățile (5.13) sunt necesare şi suficiente ca $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ să fie o funcție de repartiție.

Din (5.12) şi din Teorema 2.6 se obține, pentru orice $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1,\ldots,n}$, $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n$, cu $\mathbb{R}^n$ organizat ca produs direct (vezi §2.1), că

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a} \le \mathbf{X} < \mathbf{b}) &= P(\{\omega \mid X_i(\omega_i) \in I_i = [a_i, b_i), \quad i = 1, \ldots, n\}) = \\ &= F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} p_{ij} + \ldots + (-1)^n F_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}), \end{aligned} \tag{5.15}$$

unde p_i este valoarea lui $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ pentru $x_i = b_i$, restul componentelor lui $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n$ fiind $x_j = a_j$ $(j = 1, \ldots, n, j \ne i)$ etc.

În cazul discret, respectiv în cel continuu,

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{x}_i < \mathbf{x}} P_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, \\ F_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}) &= \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_1} f_{\mathbf{X}}(u_1, \ldots, u_n)\, \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n, \quad \forall \mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n, \\ f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{5.16}$$

unde, în a doua relație, apare o integrală multiplă de ordinul n, extindere la cazul n-dimensional a integralei duble din (5.4), după cum a treia relație este o extindere a derivatei parțiale mixte din (5.5), ambele putându-se defini prin recursivitate.

Se numeşte ***funcția de repartiție marginală*** a lui $X_i \in \mathcal{V}$, în raport cu $\mathbf{X} = (X_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathcal{V}^n$, funcția

$$F_{X_i}(x; \mathbf{X}) = F_{\mathbf{X}}(a_1, \ldots, a_n), \quad a_i = x,\ a_j = +\infty,\ i, j = 1, \ldots, n, \quad i \ne j. \tag{5.17}$$

Fie $X, Y \in \mathcal{V}$, cu $\mu_X = M(X)$, $\mu_Y = M(Y)$; $\sigma_X^2 = D(X)$ şi $\sigma_Y^2 = D(Y)$; cum $X + Y$, $XY \in \mathcal{V}$, din (3.53) şi (3.57) rezultă

$$\begin{aligned} M(X+Y) &= \mu_X + \mu_Y, \quad M(XY) = \mu_X \mu_Y, \\ D(X+Y) &= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2M((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)), \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\mathbf{a} < \mathbf{b} \Rightarrow F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a}) \le F_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\lim_{\substack{x_i \to a_i \\ x_i < a_i}} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{X}}((a_i, \mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n, \tag{5.13}$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \infty} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 1; \quad F_{\mathbf{X}}((-\infty_i, \mathbf{x})) = 0, \quad \forall \mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n,$$

unde am notat cu $(a_i, \mathbf{x})$ vectorul $\mathbf{x}$ a cărui componentă de rang i este forțată la valoarea a_i. Împreună cu proprietatea

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a} \le \mathbf{X} < \mathbf{b}) \ge 0, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \tag{5.14}$$

banală în cazul unidimensional, proprietățile (5.13) sunt necesare și suficiente ca $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ să fie o funcție de repartiție.

Din (5.12) și din Teorema 2.6 se obține, pentru orice $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1,\ldots,n}$, $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n$, cu $\mathbb{R}^n$ organizat ca produs direct (vezi §2.1), că

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a} \le \mathbf{X} < \mathbf{b}) = P(\{\omega \mid X_i(\omega_i) \in I_i = [a_i, b_i), \quad i = 1, \ldots, n\}) =$$

$$= F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} p_{ij} + \ldots + (-1)^n F_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}), \tag{5.15}$$

unde p_i este valoarea lui $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ pentru $x_i = b_i$, restul componentelor lui $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n$ fiind $x_j = a_j$ ($j = 1, \ldots, n$, $j \ne i$) etc.

În cazul discret, respectiv în cel continuu,

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}_i < \mathbf{x}} P_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n,$$

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_1} f_{\mathbf{X}}(u_1, \ldots, u_n)\, \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n, \quad \forall \mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n, \tag{5.16}$$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n,$$

unde, în a doua relație, apare o integrală multiplă de ordinul n, extindere la cazul n-dimensional a integralei duble din (5.4), după cum a treia relație este o extindere a derivatei parțiale mixte din (5.5), ambele putându-se defini prin recursivitate.

Se numește ***funcția de repartiție marginală*** a lui $X_i \in \mathcal{V}$, în raport cu $\mathbf{X} = (X_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathcal{V}^n$, funcția

$$F_{X_i}(x; \mathbf{X}) = F_{\mathbf{X}}(a_1, \ldots, a_n), \quad a_i = x, \; a_j = +\infty, \; i, j = 1, \ldots, n, \quad i \ne j. \tag{5.17}$$

Fie $X, Y \in \mathcal{V}$, cu $\mu_X = M(X)$, $\mu_Y = M(Y)$; $\sigma_X^2 = D(X)$ și $\sigma_Y^2 = D(Y)$; cum $X+Y$, $XY \in \mathcal{V}$, din (3.53) și (3.57) rezultă

$$M(X+Y) = \mu_X + \mu_Y, \quad M(XY) = \mu_X \mu_Y,$$

$$D(X+Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2M((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)), \tag{5.18}$$

$$Y = \left(\sum_{j=1}^{m} X_{ij} \right), \quad (5.40)$$

iar densitatea de probabilitate a lui $Z = X + Y$ este

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, z-y)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(z-x, y)\mathrm{d}y. \tag{5.19}$$

Dacă $X, Y \in \mathcal{L}^r \subseteq \mathcal{V}$ (vezi §3.2), atunci se poate defini ***semidistanța în medie de ordinul*** r (notată d_r, cu $r \in \mathbb{R}^+$) între X și Y, prin

$$d_r(X,Y) = (M(|X-Y|^r))^{\frac{1}{r}}, \tag{5.20}$$

și se spune că X și Y sunt ***identice în medie de ordinul*** r ($X \overset{r}{=} Y$) dacă $d_r(X,Y) = 0$. Întrucât $\mathcal{L}^\infty$ este submulțimea variabilelor aleatoare aproape sigur mărginite, cu

$$d_\infty = \lim_{r\to\infty} d_r(X,Y) \overset{\text{a.s.}}{=} \sup|X-Y|, \tag{5.21}$$

iar $S \subset \mathcal{L}^\infty$ (unde S este submulțimea variabilelor aleatoare simple) și $\mathcal{L}^0 = \mathcal{V}$, rezultă următoarea ierarhie a submulțimilor de variabile aleatoare:

$$S \subset \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^s \subset \mathcal{L}^r \subset \mathcal{L}^0 = \mathcal{V}, \quad 1 \le r \le s \le \infty. \tag{5.22}$$

Am definit, in §3.1, semidistanțele d_P și d_F, iar acum — și d_r. $(\mathcal{V}, d_P)$, $(\mathcal{V}, d_F)$ și $(\mathcal{V}, d_r)$ sunt spații semimetrice, iar $(\mathcal{F}, d_F)$ este un spațiu metric (unde $\mathcal{F}$ este spațiul funcțiilor de repartiție ale variabilelor aleatoare din $\mathcal{V}$).

Mărimile

$$K_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y) = M((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)),$$
$$\rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad -1 \le \rho_{XY} \le 1, \tag{5.23}$$

se numesc ***corelația*** (*covariance*) sau ***momentul mixt centrat de ordinul 2*** (notat și cu $\nu_{1,1}(X,Y)$), respectiv ***coeficientul de corelație*** a variabilelor aleatoare X și Y. Se observă că expresia lui K_{XY} apare în cea a lui $D(X+Y)$ din (5.18) și că, dacă $X = Y$, atunci $K_{XX} = D(X) = \sigma_X^2$ și $\rho_{XX} = 1$.

Pentru cazul discret, respectiv pentru cel absolut continuu, rezultă

$$K_{XY} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} M((x_i-\mu_X)(y_j-\mu_Y)) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(x_i-\mu_X)(y_j-\mu_Y)p_{ij},$$
$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5.24}$$

X și Y se numesc ***corelate*** când $\rho_{XY} \ne 0$, ***total corelate*** când $\rho_{XY} = \pm 1$ și ***necorelate*** când $\rho_{XY} = 0$.

Teorema 5.1 Pentru $X, Y \in \mathcal{V}$, dacă $\rho_{XY} = 1$ sau $\rho_{XY} = -1$, atunci X și Y sunt ***liniar dependente***, adică există $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a > 0$, respectiv $a < 0$, astfel încât

$$Y = aX + b. \tag{5.25}$$

Demonstrație. Notând cu $\eta_X = X - \mu_X$ și $\eta_Y = Y - \mu_Y$ abaterile lui X și Y, rezultă că $M(\eta_X) = M(\eta_Y) = 0$ și $D(\eta_X) = \mu_X^2$ și $D(\eta_Y) = \mu_Y^2$. Dacă $\rho_{XY} = 1$, atunci $M(\eta_X \eta_Y) = \sigma_X \sigma_X$ și $M((\eta_X / \sigma_X - \eta_Y / \sigma_Y)^2) = 0$, deci

$$a = \rho_{XY} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}, \quad b = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \mu_X . \square \tag{5.26}$$

În capitolul despre dependența stohastică, vom vedea că, pe lângă indicatori ai (in)dependenței deterministe, K_{XY} și ρ_{XY} sunt și indicatori ai (in)dependeței stohastice.

Exemplul 5.1 Dacă X și Y sunt două repartiții normale, cu mediile μ_X, μ_Y, dispersiile σ_X^2, σ_Y^2 și coeficientul de corelație $\rho = \rho_{XY}$, atunci (X, Y) este repartiția bidimensională normală (vezi §5.1.2.4), cu densitatea comună de probabilitate

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - 2\rho \frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right]} . \square \tag{5.27}$$

În general, dacă $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($j = 1, \ldots, m$) sunt funcții măsurabile Borel, iar $\mathbf{X} = (X_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathscr{V}^n$, atunci $Y_j = g_j(\mathbf{X})$ ($j = 1, \ldots, m$) sunt și ele variabile aleatoare din $\mathscr{V}$, iar $\mathbf{Y} = (Y_j)_{j=1,\ldots,m}$ este un vector aleator din $\mathscr{V}^n$, cu funcția de repartiție

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{y}) = \int \ldots \int_{\mathbf{A}} \mathrm{d}F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{y} = (y_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n, \tag{5.28}$$

unde

$$A = \{\mathbf{x} \mid g_j(\mathbf{x}) < y_j, \quad j = 1, \ldots, m\} \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n . \tag{5.29}$$

Pentru $m = n$, dacă X_i au densitățile de probabilitate $f_{X_i}(x)$, iar $g_i(\mathbf{x})$ sunt injective și diferențiabile ($i = 1, \ldots, n$), rezultă că

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}}(g_1^{-1}(y_1), \ldots, g_n^{-1}(y_n)) \mid J \mid, \tag{5.30}$$

unde

$$\mid J \mid = \det \left(\frac{\partial g_i^{-1}(y_i)}{\partial y_j} \right)_{i,j=1,\ldots,n} \tag{5.31}$$

este un determinant funcțional, numit ***jacobian***. În cazul unidimensional $n = m = 1$, se obțin relațiile (3.43).

În general, dacă $g(\mathbf{X}) \in \mathscr{V}^n$, atunci media ei va fi

$$M(g(\mathbf{X})) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{x}) P_{\mathbf{X}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{x}) \mathrm{d}F_{\mathbf{X}} . \tag{5.32}$$

Pentru repartițiile discrete, respectiv absolut continue, rezultă

$$M(g(\mathbf{X}))=\sum_{i\in I} g(\mathbf{x}_i)P_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i),\quad \mathbf{x}_i\in\mathbb{R}^n,$$

$$M(g(\mathbf{X}))=\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{5.33}$$

În particular, pentru $g(\mathbf{X})\equiv\mathbf{X}$, se obține ***media vectorului aleator*** $\mathbf{X}$, $M(\mathbf{X})$.

Dacă $\mathbf{X}=(X_i)_{i=1,\dots,n}\in\mathscr{V}^n$, atunci

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}=(M(X_i))_{i=1,\dots,n}=(\mu_{X_i})_{i=1,\dots,n},$$
$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}=(D(X_i))_{i=1,\dots,n}=(\sigma^2_{X_i})_{i=1,\dots,n} \tag{5.34}$$

se numesc ***vectorul mediilor***, respectiv ***vectorul dispersiilor***,

$$\mu_{r_1,\dots,r_n}=M(X_1^{r_1},\dots,X_n^{r_n})=\int_{\mathbb{R}^n} x_1^{r_1}\dots x_n^{r_n}\mathrm{d}F(x_1,\dots,x_n),$$
$$\nu_{r_1,\dots,r_n}=M\left((X_1-\mu_{X_i})^{r_1}\dots(X_n-\mu_{X_i})^{r_i}\right) \tag{5.35}$$

— ***momentul inițial, respectiv centrat, de ordin*** $\mathbf{r}=(r_i)_{i=1,\dots,n}$,

$$\boldsymbol{\mu}_m=(M(X_i^m))_{i=1,\dots,n},$$
$$\boldsymbol{\nu}_m=(M((X_i-\mu_{X_i})^m))_{i=1,\dots,n}, \tag{5.36}$$

— ***vectorul momentelor inițiale, respectiv centrate, de ordin*** m, iar

$$\mathbf{K}_{\mathbf{X}}=(K_{X_iX_j})_{i,j=1,\dots,n}=(K_{ij})_{i,j=1,\dots,n},$$
$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}}=(\rho_{X_iX_j})_{i,j=1,\dots,n}=(\rho_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \tag{5.37}$$

— ***matricea de corelație*** (sau ***de covarianță***) , respectiv ***matricea coeficienților de corelație*** a vectorului aleator $\mathbf{X}$, K_{ij} și ρ_{ij} fiind calculați conform relațiilor (5.24), deci K_{ij} sunt momentele mixte centrate „de ordinul 2”, $\nu_{1,1}(X_i,X_j)$. Întrucât $K_{ij}=K_{ji}$, matricea de corelație este simetrică, iar $K_{ii}=D(X_i)$ $(i=1,\dots,n)$. Evident,

$$\mathbf{Y}=\mathbf{X}-\mathbf{M}_{\mathbf{X}}=(X_i-M(X_i))_{i=1,\dots,n}=(X_i-\mu_{X_i})_{i=1,\dots,n} \tag{5.38}$$

este un vector aleator cu componente de medie zero, iar

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Y}}=\mathbf{K}_{\mathbf{X}-\mathbf{M}_{\mathbf{X}}}=\mathbf{K}_{\mathbf{X}}. \tag{5.39}$$

Dacă variabilele $X_1,\dots,X_n$ sunt liniar dependente, atunci, din Teorema 5.1, rezultă că $\det(\mathbf{K}_{\mathbf{X}})=0$. Așadar, numărul $m\le n$ de variabile liniar independente, dintre cele n componente ale vectorului aleator $\mathbf{X}$, este dat de rangul matricii $\mathbf{K}_{\mathbf{X}}$.

Dacă $\mathbf{X}_j=(X_{ij})_{i=1,\dots,n}\in\mathscr{V}^n$ este o mulțime de vectori aleatori, iar $\boldsymbol{\mu}_j$ — vectorii mediilor ($j=1,\dots,m$), atunci $\mathbf{Y}=\sum_{j=1}^m\mathbf{X}_j\in\mathscr{V}^n$ și