

# 线性代数知识点总结

## 1 行列式

### (一) 行列式概念和性质

1、逆序数：所有的逆序的总数

2、行列式定义：不同行不同列元素乘积代数和

3、行列式性质：（用于化简行列式）

(1) 行列互换（转置），行列式的值不变

(2) 两行（列）互换，行列式变号

(3) 提公因式：行列式的某一行（列）的所有元素都乘以同一数  $k$ ，等于用数  $k$  乘此行列式

(4) 拆列分配：行列式中如果某一行（列）的元素都是两组数之和，那么这个行列式就等于两个行列式之和。

(5) 一行（列）乘  $k$  加到另一行（列），行列式的值不变。

(6) 两行成比例，行列式的值为 0。

### (二) 重要行列式

4、上（下）三角（主对角线）行列式的值等于主对角线元素的乘积

5、副对角线行列式的值等于副对角线元素的乘积乘  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

6、Laplace 展开式：（ $A$  是  $m$  阶矩阵， $B$  是  $n$  阶矩阵），则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$$

7、 $n$  阶（ $n \geq 2$ ）范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

数学归纳法证明

★8、对角线的元素为 **a**，其余元素为 **b** 的行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$$

(三) 按行(列)展开

9、按行展开定理：

- (1) 任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和等于行列式的值
- (2) 行列式中某一行(列)各个元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于 0

(四) 行列式公式

10、行列式七大公式：

- (1)  $|kA| = k^n |A|$
- (2)  $|AB| = |A| \cdot |B|$
- (3)  $|A^T| = |A|$
- (4)  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- (5)  $|A^*| = |A|^{n-1}$

$$|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

- (6) 若  $A$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则
- (7) 若  $A$  与  $B$  相似，则  $|A| = |B|$

(五) 克莱姆法则

11、克莱姆法则：

- (1) 非齐次线性方程组的系数行列式不为 0，那么方程有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j=1,2,\cdots,n$$

(2) 如果非齐次线性方程组无解或有两个不同解，则它的系数行列式必为 0

(3) 若齐次线性方程组的系数行列式不为 0，则齐次线性方程组只有 0 解；如果方程组有非零解，那么必有  $D=0$ 。

## 2 矩阵

### (一) 矩阵的运算

#### 1、矩阵乘法注意事项：

(1) 矩阵乘法要求前列后行一致；

(2) 矩阵乘法不满足交换律；（因式分解的公式对矩阵不适用，但若  $B=E, O, A^{-1}, A^*, f(A)$  时，可以用交换律）

(3)  $AB=O$  不能推出  $A=O$  或  $B=O$ 。

#### 2、转置的性质（5 条）

$$(1) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(2) (kA)^T = kA^T$$

$$(3) (AB)^T = B^T A^T$$

$$(4) |A|^T = |A|$$

$$(5) (A^T)^T = A$$

### (二) 矩阵的逆

#### 3、逆的定义：

$AB=E$  或  $BA=E$  成立，称  $A$  可逆， $B$  是  $A$  的逆矩阵，记为  $B=A^{-1}$

注： $A$  可逆的充要条件是  $|A| \neq 0$

#### 4、逆的性质：（5 条）

$$(1) (kA)^{-1} = 1/k \cdot A^{-1} (k \neq 0)$$

$$(2) (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(3) |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

$$(4) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(5) (A^{-1})^{-1} = A$$

## 5、逆的求法：

- (1)  $A$  为抽象矩阵：由定义或性质求解
- (2)  $A$  为数字矩阵： $(A|E) \rightarrow$  初等行变换  $\rightarrow (E|A^{-1})$

## (三) 矩阵的初等变换

## 6、初等行（列）变换定义：

- (1) 两行（列）互换；
- (2) 一行（列）乘非零常数  $c$
- (3) 一行（列）乘  $k$  加到另一行（列）

## 7、初等矩阵：单位矩阵 $E$ 经过一次初等变换得到的矩阵。

## 8、初等变换与初等矩阵的性质：

- (1) 初等行（列）变换相当于左（右）乘相应的初等矩阵
- (2) 初等矩阵均为可逆矩阵，且  $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$  ( $i, j$  两行互换)；

$$E_i^{-1}(c) = E_i(1/c) \text{ (第 } i \text{ 行 (列) 乘 } c)$$

$$E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k) \text{ (第 } i \text{ 行乘 } k \text{ 加到 } j)$$

## ★ (四) 矩阵的秩

## 9、秩的定义：非零子式的最高阶数

注：(1)  $r(A)=0$  意味着所有元素为 0，即  $A=O$

- (2)  $r(A_{n \times n})=n$  (满秩)  $\leftrightarrow |A| \neq 0 \leftrightarrow A$  可逆；

$$r(A) < n \leftrightarrow |A|=0 \leftrightarrow A \text{ 不可逆；}$$

- (3)  $r(A)=r$  ( $r=1, 2, \dots, n-1$ )  $\leftrightarrow r$  阶子式非零且所有  $r+1$  子式均为 0。

## 10、秩的性质：(7 条)

- (1)  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵，则  $r(A) \leq \min(m, n)$
- (2)  $r(A \pm B) \leq r(A) \pm r(B)$
- (3)  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- (4)  $r(kA) = r(A)$  ( $k \neq 0$ )
- (5)  $r(A) = r(AC)$  ( $C$  是一个可逆矩阵)
- (6)  $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$
- (7) 设  $A$  是  $m \times n$  阶矩阵， $B$  是  $n \times s$  矩阵， $AB=O$ ，则  $r(A) + r(B) \leq n$

### 11、秩的求法:

(1) A 为抽象矩阵: 由定义或性质求解;

(2) A 为数字矩阵:  $A \rightarrow$  初等行变换  $\rightarrow$  阶梯型 (每行第一个非零元素下面的元素均为 0), 则  $r(A) =$  非零行的行数

### (五) 伴随矩阵

### 12、伴随矩阵的性质: (8 条)

$$(1) AA^* = A^*A = |A|E \rightarrow \star A^* = |A|A^{-1}$$

$$(2) (kA)^* = k^{n-1}A^*$$

$$(3) (AB)^* = B^*A^*$$

$$(4) |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$(5) (A^T)^* = (A^*)^T$$

$$(6) (A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = |A|^{-1}A$$

$$(7) (A^*)^* = |A|^{n-2} \cdot A$$

$$\star (8) r(A^*) = n \quad (r(A) = n);$$

$$r(A^*) = 1 \quad (r(A) = n-1);$$

$$r(A^*) = 0 \quad (r(A) < n-1)$$

### (六) 分块矩阵

13、分块矩阵的乘法: 要求前列后行分法相同。

14、分块矩阵求逆:

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

## 3 向量

### (一) 向量的概念及运算

1、向量的内积:  $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha$

2、长度定义:  $||\alpha|| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

3、正交定义:  $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0$

4、正交矩阵的定义: A 为 n 阶矩阵,  $AA^T = E \leftrightarrow A^{-1} = A^T \leftrightarrow A^T A = E \rightarrow |A| = \pm 1$

## (二) 线性组合和线性表示

### 5、线性表示的充要条件:

非零列向量  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示

(1)  $\leftrightarrow$  非齐次线性方程组  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) (x_1, x_2, \dots, x_s)^T = \beta$  有解。

★(2)  $\leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$  (系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩, 用于大题第一步的检验)

### 6、线性表示的充分条件: (了解即可)

若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$  线性相关, 则  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示。

### 7、线性表示的求法: (大题第二步)

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关,  $\beta$  可由其线性表示。

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s | \beta) \rightarrow$  初等行变换  $\rightarrow$  (行最简形 | 系数)

行最简形: 每行第一个非 0 的数为 1, 其余元素均为 0

## (三) 线性相关和线性无关

### 8、线性相关注意事项:

(1)  $\alpha$  线性相关  $\leftrightarrow \alpha = 0$

(2)  $\alpha_1, \alpha_2$  线性相关  $\leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2$  成比例

### 9、线性相关的充要条件:

向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关

(1)  $\leftrightarrow$  有个向量可由其余向量线性表示;

(2)  $\leftrightarrow$  齐次方程  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) (x_1, x_2, \dots, x_s)^T = 0$  有非零解;

★(3)  $\leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$  即秩小于个数

特别地,  $n$  个  $n$  维列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关

(1)  $\leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) < n$

(2)  $\leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$

(3)  $\leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  不可逆

### 10、线性相关的充分条件：

- (1) 向量组含有零向量或成比例的向量必相关
- (2) 部分相关，则整体相关
- (3) 高维相关，则低维相关
- (4) 以少表多，多必相关

★推论：n+1 个 n 维向量一定线性相关

### 11、线性无关的充要条件

向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关

- (1)  $\leftrightarrow$  任意向量均不能由其余向量线性表示；
- (2)  $\leftrightarrow$  齐次方程  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) (x_1, x_2, \dots, x_s)^T = 0$  只有零解
- (3)  $\leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$

特别地，n 个 n 维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关

$\leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = n \quad \leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0 \quad \leftrightarrow$  矩阵可逆

### 12、线性无关的充分条件：

- (1) 整体无关，部分无关
- (2) 低维无关，高维无关
- (3) 正交的非零向量组线性无关
- (4) 不同特征值的特征向量无关

### 13、线性相关、线性无关判定

- (1) 定义法

★(2) 秩：若小于阶数，线性相关；若等于阶数，线性无关

#### 【专业知识补充】

(1) 在矩阵左边乘列满秩矩阵（秩=列数），矩阵的秩不变；在矩阵右边乘行满秩矩阵，矩阵的秩不变。

(2) 若 n 维列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关， $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  可以由其线性表示，即  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) C$ ，则  $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(C)$ ，从而线性无关。

$\leftrightarrow r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3 \leftrightarrow r(C) = 3 \leftrightarrow |C| \neq 0$

#### (四) 极大线性无关组与向量组的秩

##### 14、极大线性无关组不唯一

##### 15、向量组的秩:极大无关组中向量的个数成为向量组的秩

对比: 矩阵的秩:非零子式的最高阶数

★注:向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的秩与矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  的秩相等

##### ★16、极大线性无关组的求法

(1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  为抽象的: 定义法

(2)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  为数字的:

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \rightarrow$  初等行变换  $\rightarrow$  阶梯型矩阵

则每行第一个非零的数对应的列向量构成极大无关组

#### (五) 向量空间

##### 17、基 (就是极大线性无关组) 变换公式:

若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  与  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  是  $n$  维向量空间  $V$  的两组基, 则基变换公式为  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) C_{n \times n}$

其中,  $C$  是从基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  到  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  的过渡矩阵。

$$C = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^{-1} (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

##### 18、坐标变换公式:

向量  $\gamma$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  与基  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  的坐标分别为  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ , 即  $\gamma = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = y_1 \beta_1 + y_2 \beta_2 + \dots + y_n \beta_n$ , 则坐标变换公式为  $x = Cy$  或  $y = C^{-1}x$ 。其中,  $C$  是从基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  到  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  的过渡矩阵。  $C = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^{-1} (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$

#### (六) Schmidt 正交化

##### 19、Schmidt 正交化

设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关

(1) 正交化

令  $\beta_1 = \alpha_1$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$



$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

(2) 单位化

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$$

## 4 线性方程组

(一) 方程组的表达形与解向量

1、解的形式:

(1) 一般形式

(2) 矩阵形式:  $Ax=b$ ;

(3) 向量形式:  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

2、解的定义:

若  $\eta = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  满足方程组  $Ax=b$ , 即  $A\eta=b$ , 称  $\eta$  是  $Ax=b$  的一个解 (向量)

(二) 解的判定与性质

3、齐次方程组:

(1) 只有零解  $\leftrightarrow r(A) = n$  ( $n$  为  $A$  的列数或是未知数  $x$  的个数)

(2) 有非零解  $\leftrightarrow r(A) < n$

4、非齐次方程组:

(1) 无解  $\leftrightarrow r(A) < r(A|b) \leftrightarrow r(A) = r(A) - 1$

(2) 唯一解  $\leftrightarrow r(A) = r(A|b) = n$

(3) 无穷多解  $\leftrightarrow r(A) = r(A|b) < n$

5、解的性质:

(1) 若  $\xi_1, \xi_2$  是  $Ax=0$  的解, 则  $k_1\xi_1+k_2\xi_2$  是  $Ax=0$  的解

(2) 若  $\xi$  是  $Ax=0$  的解,  $\eta$  是  $Ax=b$  的解, 则  $\xi + \eta$  是  $Ax=b$  的解

(3) 若  $\eta_1, \eta_2$  是  $Ax=b$  的解, 则  $\eta_1 - \eta_2$  是  $Ax=0$  的解

### 【推广】

(1) 设  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$  是  $Ax=b$  的解, 则  $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\dots+k_s\eta_s$  为

$$\begin{cases} Ax=b \text{ 的解} & (\text{当 } \sum k_i=1) \\ Ax=0 \text{ 的解} & (\text{当 } \sum k_i=0) \end{cases}$$

(2) 设  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$  是  $Ax=b$  的  $s$  个线性无关的解, 则  $\eta_2-\eta_1, \eta_3-\eta_1, \dots, \eta_s-\eta_1$  为  $Ax=0$  的  $s-1$  个线性无关的解。

变式: ①  $\eta_1-\eta_2, \eta_3-\eta_2, \dots, \eta_s-\eta_2$

②  $\eta_2-\eta_1, \eta_3-\eta_2, \dots, \eta_s-\eta_{s-1}$

### (三) 基础解系

#### 6、基础解系定义:

(1)  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是  $Ax=0$  的解

(2)  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  线性相关

(3)  $Ax=0$  的所有解均可由其线性表示

→基础解系即所有解的极大无关组

注: 基础解系不唯一。

任意  $n-r(A)$  个线性无关的解均可作为基础解系。

#### ★7、重要结论: (证明也很重要)

设  $A$  是  $m \times n$  阶矩阵,  $B$  是  $n \times s$  阶矩阵,  $AB=O$

(1)  $B$  的列向量均为方程  $Ax=0$  的解

(2)  $r(A)+r(B) \leq n$  (第2章, 秩)

#### 8、总结: 基础解系的求法

(1)  $A$  为抽象的: 由定义或性质凑  $n-r(A)$  个线性无关的解

(2)  $A$  为数字的:  $A \rightarrow$  初等行变换  $\rightarrow$  阶梯型

自由未知量分别取  $1,0,0; 0,1,0; 0,0,1$ ; 代入解得非自由未知量得到基础解系

### (四) 解的结构 (通解)

#### 9、齐次线性方程组的通解 (所有解)

设  $r(A)=r$ ,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  为  $Ax=0$  的基础解系,

则  $Ax=0$  的通解为  $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dots+k_{n-r}\xi_{n-r}$  (其中  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  为任意常数)

## 10、非齐次线性方程组的通解

设  $r(A)=r$ ,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  为  $Ax=0$  的基础解系,  $\eta$  为  $Ax=b$  的特解, 则  $Ax=b$  的通解为  $\eta + k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r}$  (其中  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  为任意常数)

### (五) 公共解与同解

## 11、公共解定义:

如果  $\alpha$  既是方程组  $Ax=0$  的解, 又是方程组  $Bx=0$  的解, 则称  $\alpha$  为其公共解

## 12、非零公共解的充要条件:

方程组  $Ax=0$  与  $Bx=0$  有非零公共解

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0 \text{ 有非零解} \leftrightarrow r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} < n$$

## 13、重要结论 (需要掌握证明)

(1) 设  $A$  是  $m \times n$  阶矩阵, 则齐次方程  $ATAx=0$  与  $Ax=0$  同解,  $r(ATA)=r(A)$

(2) 设  $A$  是  $m \times n$  阶矩阵,  $r(A)=n$ ,  $B$  是  $n \times s$  阶矩阵, 则齐次方程  $ABx=0$  与  $Bx=0$  同解,  $r(AB)=r(B)$

# 5 特征值与特征向量

## (一) 矩阵的特征值与特征向量

### 1、特征值、特征向量的定义:

设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 如果存在数  $\lambda$  及非零列向量  $\alpha$ , 使得  $A\alpha = \lambda\alpha$ , 称  $\alpha$  是矩阵  $A$  属于特征值  $\lambda$  的特征向量。

### 2、特征多项式、特征方程的定义:

$|\lambda E - A|$  称为矩阵  $A$  的特征多项式 ( $\lambda$  的  $n$  次多项式)。

$|\lambda E - A| = 0$  称为矩阵  $A$  的特征方程 ( $\lambda$  的  $n$  次方程)。

注: 特征方程可以写为  $|A - \lambda E| = 0$

### 3、重要结论:

(1) 若  $\alpha$  为齐次方程  $Ax=0$  的非零解, 则  $A\alpha = 0 \cdot \alpha$ , 即  $\alpha$  为矩阵  $A$  特征值  $\lambda=0$  的特征向量

(2)  $A$  的各行元素和为  $k$ , 则  $(1, 1, \dots, 1)^T$  为特征值为  $k$  的特征向量。

(3) 上 (下) 三角或主对角的矩阵的特征值为主对角线各元素。

#### △4、总结：特征值与特征向量的求法

- (1) A 为抽象的：由定义或性质凑
- (2) A 为数字的：由特征方程法求解

#### 5、特征方程法：

- (1) 解特征方程  $|\lambda E - A| = 0$ ，得矩阵 A 的 n 个特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

注：n 次方程必须有 n 个根(可有多重根，写作  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = \text{实数}$ ，不能省略)

- (2) 解齐次方程  $(\lambda_i E - A)x = 0$ ，得属于特征值  $\lambda_i$  的线性无关的特征向量，即其基础解系 (共  $n - r(\lambda_i E - A)$  个解)

#### 6、性质：

- (1) 不同特征值的特征向量线性无关
- (2) k 重特征值最多 k 个线性无关的特征向量

$$1 \leq n - r(\lambda_i E - A) \leq k_i$$

- (3) 设 A 的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则  $|A| = \prod \lambda_i, \sum \lambda_i = \sum a_{ii}$

- (4) 当  $r(A) = 1$ ，即  $A = \alpha \beta^T$ ，其中  $\alpha, \beta$  均为 n 维非零列向量，则 A 的特征值为  $\lambda_1 = \sum a_{ii} = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

- (5) 设  $\alpha$  是矩阵 A 属于特征值  $\lambda$  的特征向量，则

A	f(A)	$A^T$	$A^{-1}$	$A^*$	$P^{-1}AP$ (相似)
$\lambda$	$f(\lambda)$	$\lambda$	$\lambda^{-1}$	$ A  \lambda^{-1}$	$\lambda$
$\alpha$	$\alpha$	/	$\alpha$	$\alpha$	$P^{-1}\alpha$

#### (二) 相似矩阵

#### 7、相似矩阵的定义：

设 A、B 均为 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P 使得  $B = P^{-1}AP$ ，称 A 与 B 相似，记作  $A \sim B$

#### 8、相似矩阵的性质

- (1) 若 A 与 B 相似，则  $f(A)$  与  $f(B)$  相似
- (2) 若 A 与 B 相似，B 与 C 相似，则 A 与 C 相似

(3) 相似矩阵有相同的行列式、秩、特征多项式、特征方程、特征值、迹（即主对角线元素之和）

### 【推广】

(4) 若  $A$  与  $B$  相似，则  $AB$  与  $BA$  相似， $A^T$  与  $B^T$  相似， $A^{-1}$  与  $B^{-1}$  相似， $A^*$  与  $B^*$  也相似

### (三) 矩阵的相似对角化

#### 9、相似对角化定义：

如果  $A$  与对角矩阵相似，即存在可逆矩阵  $P$ ，使得  $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ ，称  $A$  可相似对角化。

注： $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$  ( $\alpha_i \neq 0$ ，由于  $P$  可逆)，故  $P$  的每一列均为矩阵  $A$  的特征值  $\lambda_i$  的特征向量

#### 10、相似对角化的充要条件

- (1)  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量
- (2)  $A$  的  $k$  重特征值有  $k$  个线性无关的特征向量

#### 11、相似对角化的充分条件：

- (1)  $A$  有  $n$  个不同的特征值（不同特征值的特征向量线性无关）
- (2)  $A$  为实对称矩阵

#### 12、重要结论：

- (1) 若  $A$  可相似对角化，则  $r(A)$  为非零特征值的个数， $n-r(A)$  为零特征值的个数
- (2) 若  $A$  不可相似对角化， $r(A)$  不一定为非零特征值的个数

### (四) 实对称矩阵

#### 13、性质

- (1) 特征值全为实数
- (2) 不同特征值的特征向量正交
- (3)  $A$  可相似对角化，即存在可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP = \Lambda$
- (4)  $A$  可正交相似对角化，即存在正交矩阵  $Q$ ，使得  $Q^{-1}AQ = QTAQ = \Lambda$

## 6 二次型

### (一) 二次型及其标准形

#### 1、二次型：

(1) 一般形式

(2) 矩阵形式（常用）

#### 2、标准形：

如果二次型只含平方项，即  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \dots + d_nx_n^2$

这样的二次型称为标准形（对角线）

#### 3、二次型化为标准形的方法：

(1) 配方法：

通过可逆线性变换  $x=Cy$  ( $C$  可逆)，将二次型化为标准形。其中，可逆线性变换及标准形通过先配方再换元得到。

★(2) 正交变换法：

通过正交变换  $x=Qy$ ，将二次型化为标准形  $\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \dots + \lambda_ny_n^2$

其中， $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的  $n$  个特征值， $Q$  为  $A$  的正交矩阵

注：正交矩阵  $Q$  不唯一， $\gamma_i$  与  $\lambda_i$  对应即可。

### (二) 惯性定理及规范形

#### 4、定义：

正惯性指数：标准形中正平方项的个数称为正惯性指数，记为  $p$ ；

负惯性指数：标准形中负平方项的个数称为负惯性指数，记为  $q$ ；

规范形： $f=z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_{p+q}^2$  称为二次型的规范形。

#### 5、惯性定理：

二次型无论选取怎样的可逆线性变换为标准形，其正负惯性指数不变。

注：(1) 由于正负惯性指数不变，所以规范形唯一。

(2)  $p$ =正特征值的个数， $q$ =负特征值的个数， $p+q$ =非零特征值的个数= $r(A)$

### (三) 合同矩阵

#### 6、定义：

$A, B$  均为  $n$  阶实对称矩阵，若存在可逆矩阵  $C$ ，使得  $B=C^TAC$ ，称  $A$  与  $B$  合同

### △7、总结：n 阶实对称矩阵 A、B 的关系

(1) A、B 相似 ( $B=P^{-1}AP$ )  $\leftrightarrow$  相同的特征值

(2) A、B 合同 ( $B=C^TAC$ )  $\leftrightarrow$  相同的正负惯性指数  $\leftrightarrow$  相同的正负特征值的个数

(3) A、B 等价 ( $B=PAQ$ )  $\leftrightarrow r(A) = r(B)$

注：实对称矩阵相似必合同，合同必等价

(四) 正定二次型与正定矩阵

### 8、正定的定义

二次型  $x^T Ax$ ，如果任意  $x \neq 0$ ，恒有  $x^T Ax > 0$ ，则称二次型正定，并称实对称矩阵 A 是正定矩阵。

### 9、n 元二次型 $x^T Ax$ 正定充要条件：

(1) A 的正惯性指数为 n

(2) A 与 E 合同，即存在可逆矩阵 C，使得  $A=C^T C$  或  $C^T AC=E$

(3) A 的特征值均大于 0

(4) A 的顺序主子式均大于 0 (k 阶顺序主子式为前 k 行前 k 列的行列式)

### 10、n 元二次型 $x^T Ax$ 正定必要条件：

(1)  $a_{ii} > 0$

(2)  $|A| > 0$

### 11、总结：二次型 $x^T Ax$ 正定判定 (大题)

(1) A 为数字：顺序主子式均大于 0

(2) A 为抽象：①证 A 为实对称矩阵： $A^T=A$ ；②再由定义或特征值判定

### 12、重要结论：

(1) 若 A 是正定矩阵，则  $kA$  ( $k > 0$ )， $A^k$ ， $A^T$ ， $A^{-1}$ ， $A^*$  正定

(2) 若 A、B 均为正定矩阵，则  $A+B$  正定