大连海事大学 2019-2020（32）《线性代数》期中测验答案

一、填空题（15 分，每小题 3 分）

1. $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2018}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2019}=\begin{bmatrix}1&2&3+2019\times1\\4&5&6+2019\times4\\7&8&9+2019\times7\end{bmatrix}$

2. 设 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$，则 $2A_{31}+2A_{32}+2A_{33}-2A_{34}=$ __0__；

3. 设 A 为 3 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $|A^*|=4$，则 $|(\frac{1}{3}A)^{-1}-A^*|=$ __1/2 或 -125/2__.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$B_{3\times3}$ 存在一阶非零子式，且 $\mathrm{R}(AB)=0$，则参数 $t=$ __-3__.

5. 若 n 阶方阵 $A,\ B,\ C$ 满足 $AB=CB$，$|A-C|\neq0$，则 $\mathrm{R}(B)=$ __0__.

二、选择题（15 分，每小题 3 分）

1. 如果 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq0$，$D_1=\begin{vmatrix}3a_{11}&4a_{11}-a_{12}&-a_{13}\\3a_{21}&4a_{21}-a_{22}&-a_{23}\\3a_{31}&4a_{31}-a_{32}&-a_{33}\end{vmatrix}$，则 $D_1+D=$（　B　）。

（A）$-4D$　　(B) $4D$　　(C) $13D$　　(D) $-13D$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则（　D　）成立.

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　　　（B）若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

(C) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$　　　　（D）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{o}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

3. 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix}$

$\mathrm{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\mathrm{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$=(　C　　)

(A) $P_1P_2\boldsymbol{A}$　　(B) $P_1\boldsymbol{A}^{-1}P_2$　　(C) $P_1P_2\boldsymbol{A}^{-1}$　　(D) $P_2\boldsymbol{A}^{-1}P_1$

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为三阶方阵，且存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 可以表示成若干个初等矩阵的乘积，则 $R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=$ ___B___.

(A) 0　　（B）2　　(C) 3　　（D）6

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{3\times2}$ 和 $\boldsymbol{B}_{2\times3}$ 满足 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|=10$，计算 $|2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=$ ___A___

(A) 0　　（B）80　　(C) 20　　（D）-20

三、(12 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 都是 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且有 $3\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}^*$，

（1）证明 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 可逆;（2）若 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

证明:

$3\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}^*\Rightarrow 3\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{B}-2\mathbf{E}$　　…….(2 分)

$\Rightarrow 3\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　…….(4 分)

$\Rightarrow (\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=6\boldsymbol{E}$　　…….(6 分)

所以 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}\right)^{-1}=\dfrac{1}{6}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})$,　　…….(9 分)

（还有其他表示形式：$\left(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}\right)^{-1}=2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，但需要说明 B 可逆）

求出 $\boldsymbol{A}=6(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})^{-1}+3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}9 & 6 & 0\\ 6 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$　　…….(12 分)

四、（12 分）设有线性方程组 $\begin{cases}-x_1+kx_2+2x_3=1,\\ x_1-x_2+kx_3=2,\\ -5x_1+5x_2+4x_3=-1,\end{cases}$，问 k 取何值时，此方程组（1）有唯一解;（2）无解;（3）有无限多个解？并在有无限多解时，求其通解。

解:

$$\begin{vmatrix} -1 & k & 2 \\ 1 & -1 & k \\ -5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & k & 2 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -(k-1)(5k+4)$$

………….(4 分)

(1) 当 $k \neq 1$ 且 $k \neq -\dfrac{4}{5}$ 时，方程组有唯一解；　　　…………. (6 分)

(2) 当 $k = 1$ 时，

$$(A,b) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -5 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R(A) = R(A,b) = 2$，方程组有无穷多解

通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

……………….(10 分)

（3) 当 $k = -\dfrac{4}{5}$ 时，

$$(A,b) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{5} & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{4}{5} & 2 \\ -5 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & 4 & -10 & -5 \\ 5 & -5 & -4 & 10 \\ -5 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & 4 & -10 & -5 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$R(A) = 2, R(A,b) = 3$ 方程组无解。　　　…………………...(12 分)

五、(12 分)设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，并求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式.

解: 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，将其化为阶梯形矩阵 U，即

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

故 $R(A)=3, U$ 中一个最高阶非零子式为 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$，它对应于 A 中第 1，3，4 行、第 1，2，4 列交点元素排成的三阶行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

故它的一个最高阶非零子式为

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

六、（12 分）已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 \quad - 4x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = b \end{cases}$，讨论参数 a、b 为何值方程组有解，在有解时，求出通解

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & a & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{bmatrix}$$

当 b+2=0 时 R(A)=R(a,b), 方程组有解，

通解：

1）a+8=0 时，$x = c_1\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2）a+8≠0 时，$x = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

七、(6 分)、假设 $\boldsymbol{A,B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$ 可逆，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵，证明：$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}$ 也可逆， 并求 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})^{-1}$

$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})$

$\Rightarrow \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA} - \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})$

$= [\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}](\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})$

所以 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}$ 可逆,且 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})^{-1} = \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}$

八、(6 分)、假设 A,B 均为 n 阶方阵，且其中 E 为 n 阶单位矩阵，且有 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$，证明:

$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{n}$

证明：由 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$ 可知 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{o}$ …….(2 分)

由秩的性质可知 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\le \boldsymbol{n}$. …….(3 分)

注意到：$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})=2\boldsymbol{E}$

$\therefore \boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\ge \boldsymbol{R}(2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{n}$ …….(5 分)

综上：$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{n}$ …….(6 分)