基本概念

1. 余子式M_{ij}和代数余子式A_{ij}，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$。

2. 对称矩阵：$A^T=A$。

3. 伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$，组成元素$A_{ij}$，书写格式：行元素的代数余子式写在列。

4. 逆矩阵$AB=BA=E$，称A可逆。若A可逆，则$AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

5. 分块对角阵$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$，$|A|=|A_1|\cdot|A_2|$，$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}$。

6. 初等行（列）变换：① 对换两行或两列；② 某行或某列乘以非零常数k；③ 某行（列）的k倍加到另一行（列）。

7. 等价矩阵：① 初等变换得来的矩阵；② 存在可逆矩阵P,Q，使得$PAQ=B$。

8. 初等矩阵：初等变换经过一次初等变换得来的矩阵，① $E(i,j)$；② $E(i(k))$；③ $E(j,i(k))$。

9. 矩阵的秩：最高阶非零子式的阶数。$r(A)=k\Leftrightarrow \exists D_k\neq 0,\forall D_{k+1}=0$。

10. 线性表示：存在$k_1,k_2,\cdots,k_n$使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，等价于非齐次方程组$Ax=\beta$有解$k_1,k_2,\cdots,k_n$。

11. 线性相关：存在不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\vec{0}$，等价于齐次方程组$Ax=\vec{0}$有非零解。

12. 线性无关：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\vec{0}$成立$\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，等价于齐次方程组$Ax=\vec{0}$仅有零解。

13. 极大无关组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中$r$个向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$满足：① 线性无关；②$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中任意向量可由其表示或$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中任意$r+1$个向量线性无关，则称$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的极大无关组。

14. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$表示：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中任意一个向量可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$表示，等价于$BX=A$有解，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$。

15. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$等价：两个向量组能相互线性表示。

16.

17. 齐次方程组 $Ax=\vec{0}$ 基础解系：第一种描述：设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是方程组的解，且满足① 线性无关；② 任意一个解可由其表示。第二种描述：$n-r(A)$ 个线性无关的解。【其中 1 个线性无关的解☞1 个非零解；2 个线性无关的解☞2 个不成比例的解.】

18. 特征值和特征向量：$Ax=\lambda x, x\neq\vec{0}$。

19. 相似矩阵：存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，则称 A,B 相似。

20. 相似对角化：根据方阵 A，找到可逆矩阵 P 和对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。

21. 内积：$[\alpha,\beta]=\alpha^T\beta=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$。

22. 正交：$[\alpha,\beta]=0$。

23. 正交矩阵：$AA^T=E$ 或者 $A^T=A^{-1}$。特点：A 的列（行）为两两正交的单位向量。

24. 二次型：$f=x^TAx$，其中 A 为对称阵。

25. 合同矩阵：存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=B$，则称 A,B 合同。

26. 标准型：$f=y^T\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$。

27. 正负惯性指数：标准型中正负系数的个数。

28. 正定二次型：$\forall x\neq\vec{0}, f=x^TAx>0$。

29. 正定矩阵 A：对称阵 A 使得 $f=x^TAx$ 为正定二次型。

基本定理

1. 行列式按行按列展开定理：$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots a_{in}A_{in}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots a_{nj}A_{nj}$.
   逆过程应用：已知 $D=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$，求 $b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+\cdots+b_nA_{in}$. 将 D 中第 i 行元素换成对应的 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，得到 D_1，则：$b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+\cdots+b_nA_{in}=D_1$。

2. A_n 为可逆矩阵 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$；A_n 为可逆矩阵 $\Rightarrow$ $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*\Leftrightarrow A^*=|A|A^{-1}$。

   推论：方阵 A,B 满足 $AB=E$，则：① $BA=E$；② A 可逆，且 $\Rightarrow A^{-1}=B$。

3. 对矩阵 A 进行一次初等行（列）变换，等价于在矩阵 A 的左（右）边乘以一个与之对应的初等矩阵。

4. 初等变换不改变矩阵的秩。

5. 非齐次方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有解 $\Leftrightarrow$ b 可由 A 的列线性表示 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(A,b)$；唯一解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(A,b)=n$；无穷多解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(A,b)<n$；

非齐次方程组 $A_{m\times n}x=b$ 无解 $\Leftrightarrow$ b 不能由 A 的列线性表示 $\Leftrightarrow$ $r(A)\neq r(A,b)$

特别地：当方程组的系数矩阵 A 为方阵时：唯一解 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$。

6. 齐次方程组 $A_{m\times n}x=0$ 仅有零解 $\Leftrightarrow$ A 的列向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$；齐次方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ A 的列向量组线性相关 $\Leftrightarrow$ $r(A)<n$。

7. 矩阵方程 $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow$ B 的列可由 A 的列线性表示 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,B)$；$B$ 的列与 A 的列等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r(A,B)$。

8. 矩阵 A 通过初等行变换变成矩阵 B，则 A,B 行向量组等价，列向量组有相同的相关性.

9. 齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 系数矩阵的秩 $r(A)=r<n$，则存在基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，并且 $Ax=0$ 的通解为 $\vec{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

10. 不同特征值对应的特征向量线性无关；实对称阵不同特征值对应的特征向量正交。

11. 相似矩阵有相同的秩和相同的特征值。

12. 方阵可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow$ k 重特征值 λ_i，$r(A-\lambda_i E)=n-k$；

实对称阵一定可以对角化；A 有 n 个不同的特征值则 A 一定可以对角化。

13. 实对称阵一定可以对角化，并且一定存在正交阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$.

14. 任意二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$，总有正交变换 $x=Qy$，化 f 为标准形 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值.

15. 设二次型 $f=x^TAx$ 的秩为 r，且二次型的标准型分别为 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ry_r^2$ 和 $f=k_1z_1^2+k_2z_2^2+\cdots+k_rz_r^2$，则系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 中正负个数相等.

16. 对称阵 A 正定 $\Leftrightarrow$ 二次型 $f=x^TAx$ 为正定二次型 $\Leftrightarrow$ 二次型 $f=x^TAx$ 的规范型为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$ $\Leftrightarrow$ A 的特征值全为正 $\Leftrightarrow$ A 的各顺序阶主子式全大于 0。

基本性质

1. 行列式运算性质：转置不变；对换取反；数乘可提；行列拆分；叠加不变。

2. 矩阵乘法：① $AB=O \not\Rightarrow A=O$ 或 $B=O$；② $AB\neq BA$；③ $AB=AC \not\Rightarrow B=C$。

3. 矩阵转置：① $(A^T)^T=A$　　② $(A+B)^T=A^T+B^T$

③ $(kA)^T=kA^T$　　④ $(AB)^T=B^TA^T$

4. 方阵的行列式：①方阵 A,B，$|AB|=|A|\cdot|B|$　② $|kA|=k^n|A|$，A 为 n 阶方阵。

5. 伴随矩阵：① $AA^*=A^*A=|A|E$；　② $|A^*|=|A|^{n-1}$；　③ $(kA)^*=k^{n-1}A^*$

6. 逆矩阵：① $(A^{-1})^{-1}=A$；　② $(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$；

③ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；　④ $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$，　⑤ $|A^{-1}|=|A|^{-1}$。

7. 初等矩阵：$E^{-1}(i,j)=E(i,j)$，$E^{-1}(i(k))=E(i(\dfrac{1}{k}))$，$E^{-1}(i,j(k))=E(i,j(-k))$。

8. 初等变换与初等矩阵：A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 等于有限个初等矩阵的乘积.

9. 矩阵 A 左（右）边乘可逆矩阵 P 相当于对 A 进行初等行（列）变换.

10. 行阶梯矩阵的秩等于其非零行的行数。

11. 秩：① $r(A_{m\times n})\le\min\{m,n\}$；　② $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$；

③ $r(A)\le r(A,B)\le r(A)+r(B)$；　④ $r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$；

⑤ $A_{m\times n}B_{n\times k}=O$，则 $r(A)+r(B)\le n$；　⑥ $r(A)=r(A^T)$；

⑦ $r(A^*)=\begin{cases} n\Leftrightarrow r(A)=n \\ 1\Leftrightarrow r(A)=n-1 \\ 0\Leftrightarrow r(A)<n-2 \end{cases}$.

12. $A=\alpha\beta^T$，α,β 为 n 维非零列向量，则 $r(A)=1$。

13. 向量组 $A:\alpha_1,a_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

14. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，即 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 无关 $\Leftrightarrow |C|\neq 0$.

15. 相关组添加向量仍相关，无关组减少向量仍无关；无关组添加分量仍无关，相关组减少分量仍相关。

16. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关，则向量$\beta$必能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，且表示式是惟一的.

17. 向量组与它的极大无关组等价；

18. 矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩.

19. 矩阵等价 $\not\Leftrightarrow$ 矩阵行（列）向量组等价。向量组等价 $\not\Rightarrow$ 对应矩阵等价，除非两个向量组中向量个数相等.

20. 矩阵A,B等价$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$且同型；列向量组$A,B$等价$\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r(A,B)$。

21. 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是齐次方程组$Ax=0$的基础解系，$\eta^*$是非齐次方程组$Ax=b$的一个特解，则$Ax=b$的通解$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*$,，其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数.

22. 两个方程组$Ax=0,Bx=0$同解$\Leftrightarrow$ A,B行向量组等价.

23. 设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则：①$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$；②$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=|A|$.

24. A,B同型且秩相等$\Rightarrow A,B$等价；方阵A,B可对角化，且有相同特征值$\Rightarrow A,B$相似；对称阵A,B的特征值正负个数对应相等$\Rightarrow A,B$合同。

25. 设$Ax=\lambda x$，则有下表：

矩阵	A	A^2	$f(A)$	A^{-1}	A^*	A^T	$P^{-1}AP$
特征值	λ	λ^2	$f(\lambda)$	λ^{-1}	$\|A\|/\lambda$	λ	λ
特征向量	x	x	x	x	x	/	$P^{-1}x$

基本方法

1. 求行列式：方法一、利用行列式的性质化三角行列式；方法二、利用性质尽可能多的化行列式的某行（列）元素为零，然后依此行（列）用 Laplace 展开。

2. 求解矩阵方程：方法：通过矩阵运算将方程化为$AX=B,XA=B,AXB=C$三种方式，具体运算放最后一步，注意左，右乘。

3. 求矩阵的秩：A具体时，将$A\xrightarrow{r}B$（行阶梯矩阵），$r(A)=r(B)=B$中非零行的行数；A为抽象矩阵时，利用秩的不等式证明$r\le r(A)\le r$.

4. 讨论向量组的相关性：① $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 具体时，构造矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，比较秩与个数的关系；②. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 抽象时，先设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，通过恒等变形或乘法，或重组，得到 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，或者用秩的理论判断，$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$.

5. 求极大无关组：将向量组的各向量做为矩阵的列，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\xrightarrow{r}B$ 行阶梯矩阵，向量组的秩等于矩阵 B 的秩，每个阶梯上取一列（一般取阶梯竖线右边的第一列），构成极大无关组。

6. 求基础解系和通解：先求 $r(A)$，得 $n-r(A)$，通过矩阵的运算，求出 $Ax=O$ 的 $n-r(A)$ 各线性无关的解及 $Ax=b$ 的一个特解，再利用解的结构得到通解。

7. 含参数方程组 $Ax=b$ 求解：①. $(A\,|\,b)\xrightarrow{r}$ 行阶梯型，讨论 $r(A)=r(A\,|\,b)?\Leftrightarrow b$ 可否由 A 的列线性表示；②. 特别，当 A 为方阵时，求出 $|A|\neq 0$ 的条件，即唯一解的条件，再把 $|A|=0$ 中的参数代入原方程组，继续由 $r(A)=r(A\,|\,b)?$，判断是表达式不唯一，还是不能由其表示。

8. 方阵特征值，特征向量求法：① 解 $|A-\lambda E|=0$，得根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，② 解方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$，得基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$，从而得到对应 λ_i 的特征向量为 $k_1\xi_1+\cdots+k_s\xi_s$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为 0.

9. 方阵对角化：① $|A-\lambda E|=0$ 求特征值；② $(A-\lambda_i E)x=0$ 得所有特征值的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$；③ 令 $P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$。

10. 二次型正交变换下化标准形：① 写出对称阵 A，② 求 $|A-\lambda E|=0$，得特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，③ 将每一个特征值代入 $(A-\lambda_i E)x=0$，得基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$，正交单位化（一个向量时，只要单位化），最终得到所有特征值对应的（特征）向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，④ $Q=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，令 $x=Qy$，得二次型的标准形 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$。【其中②，③，④步也为对称阵通过正交矩阵 Q 对角化的步骤。】