一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	D	B	D	A	A	A	C	A

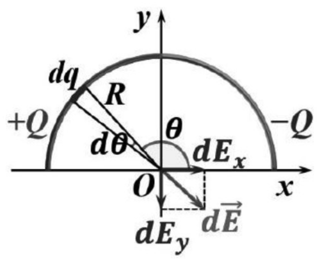
二、填空题

题号	答案	题号	答案
11	$\sigma/2\varepsilon_0$，向右；$3\sigma/2\varepsilon_0$，向右；$\sigma/2\varepsilon_0$，向左.	12	$\dfrac{q_2+q_4}{\varepsilon_0}$，$q_1,q_2,q_3,q_4$
13	Q/ε_0，0	14	$\lambda d/\varepsilon_0$，$\dfrac{\lambda d}{\pi\varepsilon_0(4R^2-d^2)}$
15	$\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}d$	16	0
17	$Q\Delta S/(16\pi^2\varepsilon_0 R^4)$，由球心 O 点指向 $\triangle S$	18	$\dfrac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2(2\pi R-d)}\approx\dfrac{qd}{8\pi^2\varepsilon_0 R^3}$，从圆心 O 点指向缺口

三、计算题

19. 解：

在带电体上选择一小段圆弧作为电荷元 dq，小圆弧的夹角为dθ，与 x 轴正方向的夹角为θ，设电荷线密度为λ，则电荷元可表示为$\mathrm{d}q=\lambda R\mathrm{d}\theta$.



左、右两半圆环所对应的电荷线密度可分别表示为

$$\lambda_+=\frac{Q}{\pi R/2}=\frac{2Q}{\pi R}$$

$$\lambda_-=\frac{-Q}{\pi R/2}=-\frac{2Q}{\pi R}$$

电荷元 dq 可视为点电荷，dq 在 O 点产生的电场强度矢量d$\vec{E}$的大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

d$\vec{E}$在 x 轴和 y 轴方向的分量分别为

$$\mathrm{d}E_x=-\mathrm{d}E\cos\theta=-\frac{\lambda R\cos\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=-\frac{\lambda\cos\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\mathrm{d}E_y=-\mathrm{d}E\sin\theta=-\frac{\lambda R\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=-\frac{\lambda\cos\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

分段代入λ的表达式，积分即可得到电场强度的分量，积分范围为整个带电体

$$E_x=\int\mathrm{d}E_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\lambda_-\cos\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{\lambda_+\cos\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta)=\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0R^2}$$

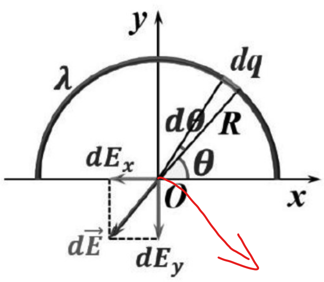
$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\lambda_-\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0R}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{\lambda_+\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0R}$$

$$=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta)=0$$

总电场强度为 $\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}=\dfrac{Q}{\pi^2\varepsilon_0R^2}\vec{i}$

20. 解：

在带电体上选择一小段圆弧作为电荷元 $\mathrm{d}q$，小圆弧的夹角为$\mathrm{d}\theta$，与 x 轴正方向的夹角为θ，则电荷元可表示为$\mathrm{d}q=\lambda R\mathrm{d}\theta$.



取第一象限的θ

电荷元 $\mathrm{d}q$ 可视为点电荷，$\mathrm{d}q$ 在 O 点产生的电场强度矢量$\mathrm{d}\vec{E}$的大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{\lambda_0\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0R}$$

$\mathrm{d}\vec{E}$在 x 轴和 y 轴方向的分量分别为

$$\mathrm{d}E_x=-\mathrm{d}E\cos\theta=-\frac{\lambda_0\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0R}$$

$$\mathrm{d}E_y=-\mathrm{d}E\sin\theta=-\frac{\lambda_0\sin^2\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0R}$$

积分即可得到电场强度分量，积分范围为整个带电体

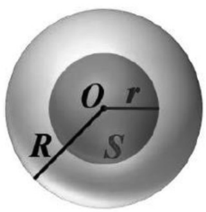
$$E_x=\int\mathrm{d}E_x=\int_0^{\pi}-\frac{\lambda_0\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0R}=0$$

$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=\int_0^{\pi}-\frac{\lambda_0\sin^2\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0R}=-\frac{\lambda_0}{8\varepsilon_0R}$$

总电场强度为 $\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}=-\dfrac{\lambda_0}{8\varepsilon_0R}\vec{j}$

21. 解：

选择半径为 r 的同心球面 S 作为高斯面，根据高斯定理应有



$$\Phi_E=\int_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{S内}\rho\mathrm{d}V$$

在球对称电场中，可得

$$\Phi_E=\int_SE\mathrm{d}S=E\int_S\mathrm{d}S=E\cdot4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{S内}\rho\mathrm{d}V$$

当高斯面 S 位于球体内部时，高斯面内总电荷为

$$\int_{S内}\rho\mathrm{d}V=\int_0^rAr\cdot4\pi r^2\mathrm{d}r=\pi Ar^4$$

当高斯面 S 位于球体外部时，高斯面内总电荷为

$$\int_{S内}\rho \mathrm{d}V=\int_0^R Ar\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\pi AR^4$$

由此，球体内部的电场为

$$\Phi_E=E\cdot 4\pi r^2=\frac{\pi Ar^4}{\varepsilon_0}\quad\rightarrow\quad E_{\mathrm{in}}=\frac{\pi Ar^4}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{Ar^2}{4\varepsilon_0}$$

球体外部的电场为

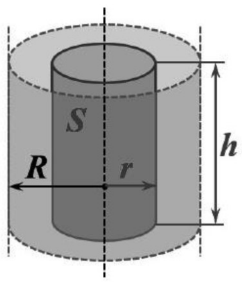
$$\Phi_E=E\cdot 4\pi r^2=\frac{\pi AR^4}{\varepsilon_0}\quad\rightarrow\quad E_{\mathrm{ex}}=\frac{\pi AR^4}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

因此，空间中的电场分布为

$$\begin{cases}\vec{E}_{\mathrm{in}}=\dfrac{Ar^2}{4\varepsilon_0}\vec{e}_r & (0\le r\le R)\\[2ex] \vec{E}_{\mathrm{ex}}=\dfrac{AR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & (R\le r<\infty)\end{cases}$$

电场强度的方向沿径向，当 $A>0$ 时沿径向向外，当 $A<0$ 时沿径向向内.

22. 解：



选择半径为 r，高为 h 的同轴圆柱面 S 作为高斯面，则

$$\Phi_E=\int_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{S内}\rho\mathrm{d}V$$

柱形高斯面底面上的电通量为零，因此

$$\Phi_E=\int_{S侧}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E\int_{S侧}\mathrm{d}S=E\cdot 2\pi rh$$

当高斯面 S 位于圆柱体内部时，高斯面内总电荷为

$$\int_{S内}\rho\mathrm{d}V=\int_0^r Ar\cdot 2\pi hr\mathrm{d}r=\frac{2\pi Ah}{3}r^3$$

当高斯面 S 位于圆柱体外部时，高斯面内总电荷为

$$\int_{S内}\rho\mathrm{d}V=\int_0^R Ar\cdot 2\pi hr\mathrm{d}r=\frac{2\pi Ah}{3}R^3$$

由此，圆柱体内部的电场为

$$\Phi_E=E\cdot 2\pi rh=\frac{2\pi Ah}{3\varepsilon_0}r^3\quad\rightarrow\quad E_{\mathrm{in}}=\frac{2\pi Ahr^3}{3\varepsilon_0\cdot 2\pi rh}=\frac{Ar^2}{3\varepsilon_0}$$

球体外部的电场为

$$\Phi_E=E\cdot 2\pi rh=\frac{2\pi Ah}{3\varepsilon_0}R^3\quad\rightarrow\quad E_{\mathrm{ex}}=\frac{2\pi AhR^3}{3\varepsilon_0\cdot 2\pi rh}=\frac{AR^3}{3\varepsilon_0 r}$$

因此，空间中的电场分布为

$$\begin{cases}\vec{E}_{\mathrm{in}}=\dfrac{Ar^2}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r & (0\le r\le R)\\[2ex] \vec{E}_{\mathrm{ex}}=\dfrac{AR^3}{3\varepsilon_0 r}\vec{e}_r & (R\le r<\infty)\end{cases}$$

电场强度的方向沿径向，当 $A>0$ 时沿径向向外，当 $A<0$ 时沿径向向内.

23. 解：

(1) 带电体中的空腔是电中性的，可视为同时存在等量的正负电荷，于是空腔带电体可视为：由完整的带电大球体与带有相反电荷的小球体组合而成.

由高斯定理可得，电荷体密度为ρ的均匀带电球体，其内部和外部任意点的电场分别为

内
$$\vec{E}_{\text{in}} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r \tag{1}$$

外
$$\vec{E}_{\text{ex}} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \tag{2}$$

根据等式(1)，完整带电的大球体在 M 点所产生的电场为

$$\vec{E}_{M1} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r = \frac{\rho d}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r \quad 1$$

根据等式(2)，位于空腔处，带有相反电荷的小球体在 M 点所产生的电场为

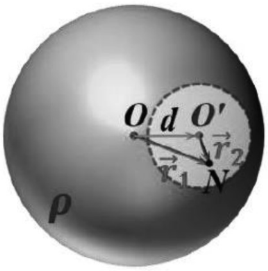
$$\vec{E}_{M2} = \frac{-\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{-\rho r^3}{3\varepsilon_0 (2d)^2}\vec{e}_r = \frac{-\rho r^3}{12\varepsilon_0 d^2}\vec{e}_r$$

根据场强叠加原理，M 点的总电场为

$$\vec{E}_M = \vec{E}_{M1} + \vec{E}_{M2} = \frac{\rho d}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r + \frac{-\rho r^3}{12\varepsilon_0 d^2}\vec{e}_r = \frac{\rho \vec{e}_r}{3\varepsilon_0}\left(d - \frac{r^3}{4d^2}\right)$$

(2) 如图所示，设空腔内的 N 点相对于两球心 O 和 O'的位置矢量分别为$\vec{r}_1$ 和 $\vec{r}_2$；则根据等式(1)，由完整带电大球体在 N 点所产生的电场为

$$\vec{E}_{N1} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1$$



同样根据等式(1)，位于空腔处，带有相反电荷的小球体在 N 点所产生的电场为

$$\vec{E}_{N2} = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2$$

根据场强叠加原理，N 点的总电场为

$$\vec{E}_N = \vec{E}_{N1} + \vec{E}_{N2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1 + \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho d}{3\varepsilon_0}\vec{e}_{OO'}$$

N 点是空腔内的任意一点，N 点的电场为恒定矢量，因此空腔内为匀强电场.

24. 解：

(1) 带电体中的空腔是电中性的，可视为同时存在等量的正负电荷，于是空腔带电体可视为：由完整的大圆柱体与带有相反电荷的小圆柱体组合而成.

由高斯定理可得，电荷体密度为ρ的均匀带电圆柱体，其内部和外部任意点的电场分别为

内
$$\vec{E}_{\text{in}} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r \tag{1}$$

引、

$$\vec{E}_{\text{ex}}=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_r \tag{2}$$

根据等式(1)，完整带电的大圆柱体在 M 点所产生的电场为

$$\vec{E}_{M1}=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r$$

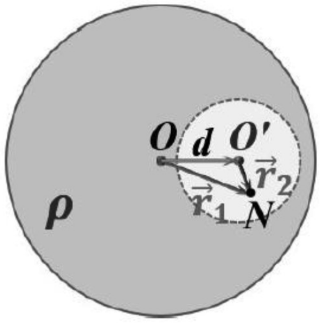
根据等式(2)，位于空腔处，带有相反电荷的小圆柱体在 M 点所产生的电场为

$$\vec{E}_{M2}=\frac{-\rho r^2}{2\varepsilon_0(2d)}\vec{e}_r=\frac{-\rho r^2}{4\varepsilon_0 d}\vec{e}_r$$

根据场强叠加原理，M 点的总电场为

$$\vec{E}_M=\vec{E}_{M1}+\vec{E}_{M2}=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r+\frac{-\rho r^2}{4\varepsilon_0 d}\vec{e}_r=\frac{\rho\vec{e}_r}{2\varepsilon_0}\left(d-\frac{r^2}{2d}\right)$$

(2) 如图所示，设空腔截面内的 N 点相对于 O 和 O'的位置矢量分别为$\vec{r}_1$ 和$\vec{r}_2$；则根据等式(1)，由完整的带电大圆柱体在 N 点所产生的电场为



$$\vec{E}_{N1}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}_1$$

同样根据等式(1)，位于空腔处，带有相反电荷的小圆柱体在 N 点所产生的电场为

$$\vec{E}_{N2}=\frac{-\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}=\frac{-\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}_2$$

根据场强叠加原理，N 点的总电场为

$$\vec{E}_N=\vec{E}_{N1}+\vec{E}_{N2}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}_1+\frac{-\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}_2=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\vec{e}_{OO'}$$

N 点是空腔内的任意一点，N 点的电场为恒定矢量，因此空腔内为匀强电场.