选课序号

专业班级：

姓名：

学号

装 订 线

大连海事大学 2018-2019（2）《线性代数 B》期中测验

参考答案

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题（15 分，每小题 3 分）

1. 设$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}$，则$3A_{31}+A_{32}-A_{33}+2A_{34}=$__0__.

2. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B_{3\times3}$存在一阶非零子式，且$AB=B$，则参数$t=$ __$-10/3$__.

3. 已知 A 为 3 阶可逆矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若 $|A|=2$，则 $\left|A^*-\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}\right|=$__$-4$__.

4. 设A,B均为8阶方阵，$Ax=b$只有一个解，B的秩为 5，则BA^T 的秩等于__5__.

5. $$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{2018}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{2019}=\underline{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3+2019\times1\\ 4 & 5 & 6+2019\times4\\ 7 & 6 & 9+2019\times7\end{bmatrix}}$$

二、选择题（15 分，每小题 3 分）

1. 如果$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$，则$D_1=\begin{vmatrix}3a_{11}+4a_{13} & a_{11}+2a_{12} & 5a_{12}\\ 3a_{21}+4a_{23} & a_{21}+2a_{22} & 5a_{22}\\ 3a_{31}+4a_{33} & a_{31}+2a_{32} & 5a_{32}\end{vmatrix}=$（ C ）。

（A）$-40D$ (B) $40D$ (C) $20D$ (D) $-20D$

2. 设 n 阶矩阵 ***A*，*B*，*C*, *D*** 满足 ***ABCD=E***，则（ A ）

（A）***BCDA=E*** （B）***ACBD=E***

（C）***BACD=E*** （D）***CBDA=E***

3. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$

$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$＝ （ B ）

(A) $P_1P_2\boldsymbol{A}$ (B) $P_1P_2\boldsymbol{A}^{-1}$ (C) $P_1\boldsymbol{A}^{-1}P_2$ (D) $P_2\boldsymbol{A}^{-1}P_1$

4. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是（ C ）.

(A) $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$ (B) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$ (C) $\boldsymbol{A}^2\neq\boldsymbol{O}$ (D) $|\boldsymbol{A}|\neq 1$

5. 设 A、B 均为 n 阶矩阵，且秩相等，则（ D ）

(A) $R(A-B)=0$ (B) $R(A+B)=2R(A)$

(C) $R(A,B)=2R(A)$ (D) $R(A,B)\le R(A)+R(B)$

三、（15 分）设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是 3 阶矩阵，且$5\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}$是 3 阶单位矩阵.

（1）试证明$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$可逆；（2）若$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$.

解：

（1） $5\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$ 可得

$$5\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{B}$$ ………………..3 分

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{2B}-\boldsymbol{5E})=5\boldsymbol{E}$$ ……………….3 分

故 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{5}(\boldsymbol{2B}-\boldsymbol{5E})$ ………………..2 分

（2） $$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=5(\boldsymbol{2B}-\boldsymbol{5E})^{-1}$$ ………………..3 分

$$\boldsymbol{A}=5(\boldsymbol{2B}-\boldsymbol{5E})^{-1}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ ………………..4 分

选课序号

专业班级：

姓名：

学号

装 订 线

四、(12 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\1&1&0&4&-1\\2&0&3&-1&3\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，并求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式.

解: 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，将其化为阶梯形矩阵 U，即

$$A\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&-4&1\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=U \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8\text{ 分}$$

故 $R(A)=3, U$ 中一个最高阶非零子式为 $\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&-4\\0&0&4\end{vmatrix}=12\neq0$，它对应于 A 中第 1，3，4 行、第 1，2，4 列交点元素排成的三阶行列式.

$$\begin{vmatrix}1&-1&-1\\3&0&7\\0&3&0\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1&-1\\3&-7\end{vmatrix}=12\neq0$$

故它的一个最高阶非零子式为

$$\begin{vmatrix}1&-1&-1\\3&0&-7\\0&3&0\end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

五、 (15 分) 线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+px_3=4\\-x_1+px_2+x_3=p^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$$

问 p 取何值时，此方程组无解、有唯一解或有无穷多解？并在其有无穷多解时，求出通解.

解. $\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}1&1&p&4\\-1&p&1&p^2\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\sim\cdots\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&-4\\0&2&p-2&8\\0&p-1&3&p^2-4\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & \dfrac{p-2}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1+p)(4-p)}{2} & p(p-4) \end{pmatrix}$$ ………………6 分

所以，

(1) 当 $p \neq -1$，且 $p \neq 4$ 时，$r(\overline{\mathbf{A}})=r(\mathbf{A})=3$，此时线性方程组有唯一解. ………2 分

(2) 当 $p=-1$时，$r(\mathbf{A})=2$，$r(\overline{\mathrm{A}})=3$，此时线性方程组无解. ………2 分

(3) 当 $p=4$时，$r(\overline{\mathbf{A}})=r(\mathbf{A})=2$，此时线性方程组有无穷多组解. ……2 分

原线性方程组化为$\begin{cases} x_1=-3x_3 \\ x_2=4-x_3 \end{cases}$.

或者写为 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}+C\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (C \in R)$ ……………3 分

六、(8 分) 设$\boldsymbol{A}$是 8 阶方阵，$\boldsymbol{E}$是 8 阶单位矩阵，且$\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 证明：

$$R(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=8$$

证明：

由于$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}) \leq 8$， ………………..3 分

又根据 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$，可知 ………………..2 分

$8=R(\boldsymbol{E}) \leq R(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$. ………………..3 分