第一部分　选择题　(共 28 分)

一、单项选择题（本大题共 14 小题，每小题 2 分，共 28 分）在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填在题后的括号内。错选或未选均无分。

1.设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$=m，$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}$=n，则行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$等于（　　）

A. m+n　　B. −(m+n)

C. n−m　　D. m−n

2.设矩阵 **A**=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}^{-1}$ 等于（　　）

A. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.设矩阵 **A**=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，$\mathbf{A}^*$是 **A** 的伴随矩阵，则 $\mathbf{A}^*$中位于（1，2）的元素是（　　）

A. –6　　B. 6

C. 2　　D. –2

4.设 **A** 是方阵，如有矩阵关系式 **AB**=**AC**，则必有（　　）

A. **A** =**0**　　B. **B**$\neq$**C** 时 **A**=**0**

C. **A**$\neq$**0** 时 **B**=**C**　　D. |**A**|$\neq$**0** 时 **B**=**C**

5.已知 3×4 矩阵 **A** 的行向量组线性无关，则秩（$\mathbf{A}^T$）等于（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

6.设两个向量组α_1，α_2，…，α_s和β_1，β_2，…，β_s均线性相关，则（　　）

A.有不全为 0 的数λ_1，λ_2，…，λ_s使$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0$和$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots\lambda_s\beta_s=0$

B.有不全为 0 的数λ_1，λ_2，…，λ_s使$\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+\lambda_s(\alpha_s+\beta_s)=0$

C.有不全为 0 的数λ_1，λ_2，…，λ_s使$\lambda_1(\alpha_1-\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2-\beta_2)+\cdots+\lambda_s(\alpha_s-\beta_s)=0$

D.有不全为 0 的数λ_1，λ_2，…，λ_s和不全为 0 的数μ_1，μ_2，…，μ_s使$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0$和$\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2+\cdots+\mu_s\beta_s=0$

7.设矩阵 **A** 的秩为 r，则 **A** 中（　　）

A.所有 $r-1$ 阶子式都不为 0　　　B.所有 $r-1$ 阶子式全为 0

C.至少有一个 r 阶子式不等于 0　　　D.所有 r 阶子式都不为 0

8.设 $\mathbf{Ax=b}$ 是一非齐次线性方程组，η_1，η_2 是其任意 2 个解，则下列结论错误的是（　　）

A. $\eta_1+\eta_2$ 是 $\mathbf{Ax=0}$ 的一个解　　　B. $\frac{1}{2}\eta_1+\frac{1}{2}\eta_2$ 是 $\mathbf{Ax=b}$ 的一个解

C. $\eta_1-\eta_2$ 是 $\mathbf{Ax=0}$ 的一个解　　　D. $2\eta_1-\eta_2$ 是 $\mathbf{Ax=b}$ 的一个解

9.设 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 不可逆，则必有（　　）

A.秩(**A**)<n　　　　　　　　B.秩(**A**)=n−1

C.**A=0**　　　　　　　　D.方程组 **Ax=0** 只有零解

10.设 A 是一个 n(⩾3)阶方阵，下列陈述中正确的是（　　）

A.如存在数 λ 和向量 α 使 **A**α = λα，则 α 是 **A** 的属于特征值 λ 的特征向量

B.如存在数 λ 和非零向量 α，使(λ**E−A**)α=**0**，则 λ 是 **A** 的特征值

C.**A** 的 2 个不同的特征值可以有同一个特征向量

D.如 λ_1，λ_2，λ_3 是 **A** 的 3 个互不相同的特征值，α_1，α_2，α_3 依次是 **A** 的属于 λ_1，λ_2，λ_3 的特征向量，则 α_1，α_2，α_3 有可能线性相关

11.设 λ_0 是矩阵 **A** 的特征方程的 3 重根，**A** 的属于 λ_0 的线性无关的特征向量的个数为 k，则必有（　　）

A. k⩽3　　　　　　　　B. k<3

C. k=3　　　　　　　　D. k>3

12.设 **A** 是正交矩阵，则下列结论错误的是（　　）

A.$|\mathbf{A}|^2$ 必为 1　　　　　　　　B.|**A**|必为 1

C.$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$　　　　　　　　D.**A** 的行（列）向量组是正交单位向量组

13.设 **A** 是实对称矩阵，**C** 是实可逆矩阵，$\mathbf{B}=\mathbf{C}^T\mathbf{AC}$.则（　　）

A.**A** 与 **B** 相似

B. **A** 与 **B** 不等价

C. **A** 与 **B** 有相同的特征值

D. **A** 与 **B** 合同

14.下列矩阵中是正定矩阵的为（　　）

A.$\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$　　　　　　　　B.$\begin{pmatrix}3&4\\2&6\end{pmatrix}$

C.$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-3\\0&-3&5\end{pmatrix}$　　　　　　　　D.$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

第二部分　非选择题（共 72 分）

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）不写解答过程，将正确的答案写在每小题的空格内。错填或不填均无分。

15.$\begin{vmatrix}1&1&1\\3&5&6\\9&25&36\end{vmatrix}=$__________.

16.设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\end{pmatrix}$.则 **A**+2**B**=__________.

17. 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{3\times3}$，|**A**|=2，$A_{ij}$ 表示 |**A**| 中元素 a_{ij} 的代数余子式（i,j=1,2,3），则 $(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23})^2+(a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23})^2+(a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23})^2=$_________.

18.设向量（2，-3，5）与向量（-4，6，a）线性相关，则 a=_________.

19.设 **A** 是 3×4 矩阵，其秩为 3，若 η_1，η_2 为非齐次线性方程组 **Ax=b** 的 2 个不同的解，则它的通解为_________.

20.设 **A** 是 m×n 矩阵，**A** 的秩为 r(<n)，则齐次线性方程组 **Ax=0** 的一个基础解系中含有解的个数为_________.

21.设向量 α、β 的长度依次为 2 和 3，则向量 α+β 与 α−β 的内积（α+β，α−β）=______.

22.设 3 阶矩阵 A 的行列式|**A**|=8，已知 **A** 有 2 个特征值−1 和 4，则另一特征值为_______.

23.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 10 & 6 \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & 10 & 8 \end{pmatrix}$，已知 $\alpha=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 是它的一个特征向量，则 α 所对应的特征值为_________.

24.设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ 的秩为 4，正惯性指数为 3，则其规范形为_______.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

25.设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.求（1）$\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$；（2）$|4\mathbf{A}|$.

26.试计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

27.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求矩阵 **B** 使其满足矩阵方程 **AB**=**A**+2**B**.

28.给定向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

试判断 α_4 是否为 α_1，α_2，α_3 的线性组合；若是，则求出组合系数。

29.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

求：（1）秩（**A**）；

（2）**A** 的列向量组的一个最大线性无关组。

30.设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ 的全部特征值为 1，1 和−8.求正交矩阵 T 和对角矩阵 **D**，使 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}=\mathbf{D}$.

31.试用配方法化下列二次型为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3,$$

并写出所用的满秩线性变换。

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

32.设方阵 **A** 满足 $\mathbf{A}^3=\mathbf{0}$，试证明 **E**−**A** 可逆，且 $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2$.

33.设 η_0 是非齐次线性方程组 **Ax=b** 的一个特解，ξ_1，ξ_2 是其导出组 **Ax=0** 的一个基础解系.试证明

（1）$\eta_1=\eta_0+\xi_1$，$\eta_2=\eta_0+\xi_2$ 均是 **Ax=b** 的解；

（2）η_0，η_1，η_2 线性无关。

答案：

一、单项选择题（本大题共 14 小题，每小题 2 分，共 28 分）

1.D	2.B	3.B	4.D	5.C
6.D	7.C	8.A	9.A	10.B

11.A　　　　12.B　　　　13.D　　　　14.C

二、填空题（本大题共 10 空，每空 2 分，共 20 分）

15. 6

16. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

17. 4

18. –10

19. $\eta_1+c(\eta_2-\eta_1)$（或 $\eta_2+c(\eta_2-\eta_1)$），c 为任意常数

20. n−r

21. –5

22. –2

23. 1

24. $z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2$

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

25.解（1）$\mathbf{AB}^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 18 & 10 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

（2）$|4\mathbf{A}|=4^3|\mathbf{A}|=64|\mathbf{A}|$，而

$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2$.

所以$|4\mathbf{A}|=64\cdot(-2)=-128$

26.解 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=30+10=40.$

27.解　$\mathbf{AB}=\mathbf{A}+2\mathbf{B}$ 即（$\mathbf{A}-2\mathbf{E}$）$\mathbf{B}=\mathbf{A}$，而

（$\mathbf{A}-2\mathbf{E}$）$^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

所以　$\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}3 & -8 & -6\\ 2 & -9 & -6\\ -2 & 12 & 9\end{pmatrix}.$$

28.解一 $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3 & 0\\ 1 & -3 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 4 & -1 & 9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & -5 & 3 & -2\\ 1 & -3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 13 & -1 & 12\end{pmatrix}$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 8 & 8\\ 0 & 0 & -14 & -14\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以 $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，组合系数为（2，1，1）.

解二　考虑 $\alpha_4=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，

即 $\begin{cases}-2x_1+x_2+3x_3=0\\ x_1-3x_2=-1\\ 2x_2+2x_3=4\\ 3x_1+4x_2-x_3=9.\end{cases}$

方程组有唯一解 $(2，1，1)^T$，组合系数为（2，1，1）.

29.解　对矩阵 **A** 施行初等行变换

$$\mathbf{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2\\ 0 & 3 & 2 & 8 & -2\\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 8 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -21 & 7\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 8 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\mathbf{B}.$$

（1）秩（**B**）=3，所以秩（**A**）=秩（**B**）=3.

（2）由于 **A** 与 B 的列向量组有相同的线性关系，而 **B** 是阶梯形，**B** 的第 1、2、4 列是 **B** 的列向量组的一个最大线性无关组，故 **A** 的第 1、2、4 列是 **A** 的列向量组的一个最大线性无关组。

（**A** 的第 1、2、5 列或 1、3、4 列，或 1、3、5 列也是）

30.解　**A** 的属于特征值 $\lambda=1$ 的 2 个线性无关的特征向量为

$\xi_1=(2，-1，0)^T$，　　$\xi_2=(2，0，1)^T$.

经正交标准化，得 $\eta_1=\begin{pmatrix}2\sqrt{5}/5\\ -\sqrt{5}/5\\ 0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}2\sqrt{5}/15\\ 4\sqrt{5}/15\\ \sqrt{5}/3\end{pmatrix}$.

$\lambda=-8$ 的一个特征向量为

$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，经单位化得 $\eta_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$.

所求正交矩阵为 $\mathbf{T}=\begin{pmatrix}2\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{15}/15 & 1/3\\ -\sqrt{5}/5 & 4\sqrt{5}/15 & 2/3\\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3\end{pmatrix}$.

对角矩阵 $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$.

（也可取 $\mathbf{T}=\begin{pmatrix}2\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{15}/15 & 1/3\\ 0 & -\sqrt{5}/3 & 2/3\\ \sqrt{5}/5 & -4\sqrt{5}/15 & -2/3\end{pmatrix}$.）

31.解 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-2x_3)^2-2x_2^2+4x_2x_3-7x_3^2$

$=(x_1+2x_2-2x_3)^2-2(x_2-x_3)^2-5x_3^2$.

设 $\begin{cases}y_1=x_1+2x_2-2x_3\\ y_2=\quad x_2-x_3\\ y_3=\quad x_3\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=y_1-2y_2\\ x_2=\quad y_2+y_3\\ x_3=\quad y_3\end{cases}$，

因其系数矩阵 $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆，故此线性变换满秩。

经此变换即得 $f(x_1,x_2,x_3)$的标准形

$y_1^2-2y_2^2-5y_3^2$.

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

32.证 由于 $(\mathbf{E}-\mathbf{A})(\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2)=\mathbf{E}-\mathbf{A}^3=\mathbf{E}$，

所以 $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆，且

$(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2$.

33.证 由假设 $\mathbf{A}\eta_0=\mathbf{b}$，$\mathbf{A}\xi_1=\mathbf{0}$，$\mathbf{A}\xi_2=\mathbf{0}$.

（1）$\mathbf{A}\eta_1=\mathbf{A}(\eta_0+\xi_1)=\mathbf{A}\eta_0+\mathbf{A}\xi_1=\mathbf{b}$，同理 $\mathbf{A}\eta_2=\mathbf{b}$，

所以 η_1，η_2 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的 2 个解。

（2）考虑 $l_0\eta_0+l_1\eta_1+l_2\eta_2=\mathbf{0}$，

即 $(l_0+l_1+l_2)\eta_0+l_1\xi_1+l_2\xi_2=\mathbf{0}$.

则 $l_0+l_1+l_2=0$，否则 η_0 将是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，矛盾。所以

$l_1\xi_1+l_2\xi_2=\mathbf{0}$.

又由假设，ξ_1，ξ_2 线性无关，所以 $l_1=0$，$l_2=0$，从而 $l_0=0$.

所以 η_0，η_1，η_2 线性无关。