

线性代数超强总结

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{不可逆} \\ r(A) < n \\ Ax = 0 \text{有非零解} \\ 0 \text{是} A \text{的特征值} \\ A \text{的列（行）向量线性相关} \end{cases}$$

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{可逆} \\ r(A) = n \\ Ax = 0 \text{只有零解} \\ A \text{的特征值全不为零} \\ A \text{的列（行）向量线性无关} \\ A^T A \text{是正定矩阵} \\ A \text{与同阶单位阵等价} \\ A = p_1 p_2 \cdots p_s, p_i \text{是初等阵} \\ \forall \beta \in \mathbb{R}^n, Ax = \beta \text{总有唯一解} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{向量组等价} \\ \text{相似矩阵} \\ \text{矩阵合同} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{具有}} \text{反身性、对称性、传递性}$$

✓ 关于 e_1, e_2, \dots, e_n :

① 称为 \mathbb{R}^n 的标准基, \mathbb{R}^n 中的自然基, 单位坐标向量;

② e_1, e_2, \dots, e_n 线性无关;

③ $|e_1, e_2, \dots, e_n| = 1$;

④ $\text{tr}(E) = n$;

⑤ 任意一个 n 维向量都可以用 e_1, e_2, \dots, e_n 线性表示.

✓ 行列式的计算:

$$\textcircled{1} \text{ 若 } A \text{ 与 } B \text{ 都是方阵 (不必同阶), 则 } \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|$$

② 上三角、下三角行列式等于主对角线上元素的乘积.

$$\textcircled{3} \text{ 关于副对角线: } \begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & a_{2n-1} & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & & & a_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & a_{2n-1} & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n} \dots a_{n1}$$

✓ 逆矩阵的求法:

$$\textcircled{1} A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

$$\textcircled{2} (A:E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E:A^{-1})$$

$$\textcircled{3} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{4} \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \ddots & & \\ a_n & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & \frac{1}{a_n} \\ & & \ddots & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ \frac{1}{a_1} & & & \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{5} \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \ddots & & \\ A_n & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_n^{-1} \\ & & \ddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

√ 方阵的幂的性质: $A^m A^n = A^{m+n}$ $(A^m)^n = (A)^{mn}$

√ 设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 对 n 阶矩阵 A 规定: $f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$ 为 A 的一个多项式.

√ 设 $A_{m \times n}, B_{n \times s}$, A 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, B 的列向量为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$, AB 的列向量为

则: $r_i = A\beta_i, i=1, 2, \cdots, s$, 即 $A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_s)$
 若 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$, 则 $A\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n$
 r_1, r_2, \cdots, r_s , 即: AB 的第 i 个列向量 r_i 是 A 的列向量的线性组合, 组合系数就是 β_i 的各分量;
 AB 的第 i 个行向量 r_i 是 B 的行向量的线性组合, 组合系数就是 α_i 的各分量.

用 A, B 中简单的一个提高运算速度

√ 用对角矩阵 Λ 左乘一个矩阵, 相当于用 Λ 的对角线上的各元素依次乘此矩阵的行向量;

用对角矩阵 Λ 右乘一个矩阵, 相当于用 Λ 的对角线上的各元素依次乘此矩阵的列向量.

√ 两个同阶对角矩阵相乘只用把对角线上的对应元素相乘,

与分块对角阵相乘类似, 即: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & & o \\ & A_{22} & \\ o & & A_{kk} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & & o \\ & B_{22} & \\ o & & B_{kk} \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & & o \\ & A_{22}B_{22} & \\ o & & A_{kk}B_{kk} \end{bmatrix}$$

√ 矩阵方程的解法: 设法化成(I) $AX = B$ 或 (II) $XA = B$

当 $|A| \neq 0$ 时,

(I) 的解法: 构造 $(A:B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E:X)$ (当 B 为一列时, 即为克莱姆法则)

(II) 的解法: 将等式两边转置化为 $A^T X^T = B^T$,

用 (I) 的方法求出 X^T , 再转置得 X

√ $Ax = o$ 和 $Bx = o$ 同解 (A, B 列向量个数相同), 则:

- ① 它们的极大无关组相对应, 从而秩相等;
- ② 它们对应的部分组有一样的线性相关性;
- ③ 它们有相同的内在线性关系.

√ 判断 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系的条件:

① $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 线性无关;

② $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是 $Ax = 0$ 的解;

③ $s = n - r(A)$ = 每个解向量中自由变量的个数.

① 零向量是任何向量的线性组合, 零向量与任何同维实向量正交.

② 单个零向量线性相关; 单个非零向量线性无关.

③ 部分相关, 整体必相关; 整体无关, 部分必无关.

④ 原向量组无关, 接长向量组无关; 接长向量组相关, 原向量组相关.

⑤ 两个向量线性相关 \Leftrightarrow 对应元素成比例; 两两正交的非零向量组线性无关.

⑥ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中任一向量 α_i ($1 \leq i \leq n$) 都是此向量组的线性组合.

⑦ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 \Leftrightarrow 向量组中至少有一个向量可由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 \Leftrightarrow 向量组中每一个向量 α_i 都不能由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

⑧ m 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(A) < n$;

m 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A) = n$.

⑨ $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = o$.

⑩ 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 且表示法惟一.

⑪ 矩阵的行向量组的秩等于列向量组的秩.

阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数.

⑫ 矩阵的行初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变列向量间的线性关系.

矩阵的列初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变行向量间的线性关系.

向量组等价 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可以相互线性表示. 记作: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$

矩阵等价 A 经过有限次初等变换化为 B . 记作: $A \cong B$

⑬ 矩阵 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B) \neq 0 \Rightarrow A, B$ 作为向量组等价, 即: 秩相等的向量组不一定等价.

矩阵 A 与 B 作为向量组等价 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Rightarrow$

矩阵 A 与 B 等价.

⑭ 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \Rightarrow r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

⑮ 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 且 $s > n$, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性相关.

向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关, 且可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 则 $s \leq n$.

⑯ 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 且 $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则两向量组等价;

⑰ 任一向量组和它的极大无关组等价.

⑱ 向量组的任意两个极大无关组等价, 且这两个组所含向量的个数相等.

⑲ 若两个线性无关的向量组等价, 则它们包含的向量个数相等.

⑳ 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $r(A) \leq \min\{m, n\}$, 若 $r(A) = m$, A 的行向量线性无关;

若 $r(A) = n$, A 的列向量线性无关, 即:

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

线性方程组的矩阵式 $Ax = \beta$

向量式 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned}
 & \beta \text{ 可由 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性表示 } \Leftrightarrow Ax = \beta \text{ 有解 } \Leftrightarrow r(A) = r(A:\beta) \left\{ \begin{array}{l} < n \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow Ax = \beta \text{ 有无穷多解 } \left\langle \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \right\rangle Ax = o \text{ 有非零解 } \xrightarrow{\text{当 } A \text{ 为方阵时}} |A| = 0 \\ \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性相关} \end{array} \right. \\ \\ = n \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow Ax = \beta \text{ 有唯一组解 } \left\langle \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \right\rangle Ax = o \text{ 只有零解 } \xrightarrow{\text{当 } A \text{ 为方阵时}} |A| \neq 0 \\ \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性无关} \end{array} \right. \\ \\ \xrightarrow{\text{当 } A \text{ 为方阵时}} \text{克莱姆法则} \end{array} \right. \\
 & \beta \text{ 不可由 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性表示 } \Leftrightarrow Ax = \beta \text{ 无解 } \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow r(A) \neq r(A:\beta) \\ \Leftrightarrow r(A) < r(A:\beta) \\ \Leftrightarrow r(A) + 1 = r(A:\beta) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

矩阵转置的性质:	$(A^T)^T = A$	$(AB)^T = B^T A^T$	$(kA)^T = kA^T$	$ A^T = A $	$(A+B)^T = A^T + B^T$	
矩阵可逆的性质:	$(A^{-1})^{-1} = A$	$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	$(kA)^{-1} = k^{-1} A^{-1}$	$ A^{-1} = A ^{-1}$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$	$(A^{-1})^k = (A^k)^{-1} = A^{-k}$
伴随矩阵的性质:	$(A^*)^* = A ^{n-2} A$	$(AB)^* = B^* A^*$	$(kA)^* = k^{n-1} A^*$	$ A^* = A ^{n-1}$	$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{ A }$ $(A^T)^* = (A^*)^T$	$(A^*)^k = (A^k)^*$ $AA^* = A^*A = A E$
$r(A^*) = \begin{cases} n & \text{若 } r(A) = n \\ 1 & \text{若 } r(A) = n-1 \\ 0 & \text{若 } r(A) < n-1 \end{cases}$		$ AB = A B $	$ kA = k^n A $	$ A^k = A ^k$		

$$\text{线性方程组解的性质: } \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} (1) \eta_1, \eta_2 \text{ 是 } Ax=0 \text{ 的解, } \eta_1 + \eta_2 \text{ 也是它的解} \\ (2) \eta \text{ 是 } Ax=0 \text{ 的解, 对任意 } k, k\eta \text{ 也是它的解} \\ (3) \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k \text{ 是 } Ax=0 \text{ 的解, 对任意 } k \text{ 个常数} \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \lambda_k\eta_k \text{ 也是它的解} \end{array} \\ (4) \gamma \text{ 是 } Ax=\beta \text{ 的解, } \eta \text{ 是其导出组 } Ax=0 \text{ 的解, } \gamma + \eta \text{ 是 } Ax=\beta \text{ 的解} \\ (5) \eta_1, \eta_2 \text{ 是 } Ax=\beta \text{ 的两个解, } \eta_1 - \eta_2 \text{ 是其导出组 } Ax=0 \text{ 的解} \\ (6) \eta_2 \text{ 是 } Ax=\beta \text{ 的解, 则 } \eta_1 \text{ 也是它的解} \Leftrightarrow \eta_1 - \eta_2 \text{ 是其导出组 } Ax=0 \text{ 的解} \\ (7) \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k \text{ 是 } Ax=\beta \text{ 的解, 则} \\ \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \lambda_k\eta_k \text{ 也是 } Ax=\beta \text{ 的解} \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_k = 1 \\ \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \lambda_k\eta_k \text{ 是 } Ax=0 \text{ 的解} \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_k = 0 \end{array} \right\} \text{ 齐次方程组}$$

✓ 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 若 $r(A) = m$, 则 $r(A) = r(A:\beta)$, 从而 $Ax = \beta$ 一定有解.

当 $m < n$ 时, 一定不是唯一解. $\Rightarrow \frac{\text{方程个数}}{\text{向量维数}} < \frac{\text{未知数的个数}}{\text{向量个数}}$, 则该向量组线性相关.

m 是 $r(A)$ 和 $r(A:\beta)$ 的上限.

✓ 矩阵的秩的性质:

$$\textcircled{1} \quad r(A) = r(A^T) = r(A^T A)$$

$$\textcircled{2} \quad r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$$

$$\textcircled{3} \quad r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

$$\textcircled{4} \quad r(kA) = \begin{cases} r(A) & \text{若 } k \neq 0 \\ 0 & \text{若 } k = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad r \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$$

$$\textcircled{6} \quad \text{若 } A \neq 0, \text{ 则 } r(A) \geq 1$$

$$\textcircled{7} \quad \text{若 } A_{m \times n}, B_{n \times s}, \text{ 且 } r(AB) = 0, \text{ 则 } r(A) + r(B) \leq n$$

$$\textcircled{8} \quad \text{若 } P, Q \text{ 可逆, 则 } r(PA) = r(AQ) = r(A)$$

$$\textcircled{9} \quad \text{若 } A \text{ 可逆, 则 } r(AB) = r(B)$$

$$\text{若 } B \text{ 可逆, 则 } r(AB) = r(A)$$

⑩ 若 $r(A) = n$, 则 $r(AB) = r(B)$, 且 A 在矩阵乘法中有左消去律:

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = 0 \Rightarrow B = o \\ AB = AC \Rightarrow B = C \end{array} \right.$$

标准正交基 n 个 n 维线性无关的向量, 两两正交, 每个向量长度为 1.

α 与 β 正交 $(\alpha, \beta) = 0$.

α 是单位向量 $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = 1$.

✓ 内积的性质: ① 正定性: $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 且 $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = o$

② 对称性: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

③ 双线性: $(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha, \beta_1) + (\alpha, \beta_2)$

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$$

$$(c\alpha, \beta) = (c\alpha, \beta) = (\alpha, c\beta)$$

施密特 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,

$$\text{正交化} \begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \\ \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 \end{cases}$$

$$\text{单位化: } \eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \quad \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \quad \eta_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

正交矩阵 $AA^T = E$.

✓ A 是正交矩阵的充要条件: A 的 n 个行 (列) 向量构成 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基.

✓ 正交矩阵的性质: ① $A^T = A^{-1}$;

② $AA^T = A^T A = E$;

③ A 是正交阵, 则 A^T (或 A^{-1}) 也是正交阵;

④ 两个正交阵之积仍是正交阵;

⑤ 正交阵的行列式等于 1 或 -1.

A 的特征矩阵 $\lambda E - A$.

A 的特征多项式 $|\lambda E - A| = f(\lambda)$.

A 的特征方程 $|\lambda E - A| = 0$. $Ax = \lambda x \rightarrow Ax$ 与 x 线性相关

✓ 上三角阵、下三角阵、对角阵的特征值就是主对角线上的 n 各元素.

✓ 若 $|A| = 0$, 则 $\lambda = 0$ 为 A 的特征值, 且 $Ax = 0$ 的基础解系即为属于 $\lambda = 0$ 的线性无关的特征向量.

✓ $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr} A$

✓ 若 $r(A) = 1$, 则 A 一定可分解为 $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1, b_2, \cdots, b_n]$, $A^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)A$, 从而 A

的特征值为: $\lambda_1 = \text{tr} A = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$.

✓ 若 A 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, $f(x)$ 是多项式, 则:

① $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$;

② 当 A 可逆时, A^{-1} 的全部特征值为 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}$,

A^* 的全部特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_1}, \frac{|A|}{\lambda_2}, \cdots, \frac{|A|}{\lambda_n}$.

✓ λ 是 A 的特征值, 则: $\begin{cases} kA & k\lambda \\ aA + bE & a\lambda + b \\ A^{-1} & \frac{1}{\lambda} \\ A^2 & \lambda^2 \\ A^m & \lambda^m \\ A^* & \frac{|A|}{\lambda} \end{cases}$ 分别有特征值

✓ x 是 A 关于 λ 的特征向量, 则 x 也是 $\begin{cases} kA & k\lambda \\ aA + bE & a\lambda + b \\ A^{-1} & \frac{1}{\lambda} \\ A^2 & \lambda^2 \\ A^m & \lambda^m \\ A^* & \frac{|A|}{\lambda} \end{cases}$ 关于 $\frac{1}{\lambda}, \lambda^2, \lambda^m, \frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量.

A 与 B 相似 $B = P^{-1}AP$ (P 为可逆阵) 记为: $A \sim B$

✓ A 相似于对角阵的充要条件: A 恰有 n 个线性无关的特征向量. 这时, P 为 A 的特征向量拼成的矩阵, $P^{-1}AP$ 为对角阵, 主对角线上的元素为 A 的特征值.

✓ A 可对角化的充要条件: $n - r(\lambda_i E - A) = k_i$ k_i 为 λ_i 的重数.

✓ 若 n 阶矩阵 A 有 n 个互异的特征值, 则 A 与对角阵相似.

A 与 B 正交相似 $B = P^{-1}AP$ (P 为正交矩阵)

✓ 相似矩阵的性质: ① $A^{-1} \sim B^{-1}$ 若 A, B 均可逆

② $A^T \sim B^T$

③ $A^k \sim B^k$ (k 为整数)

④ $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 从而 A, B 有相同的特征值, 但特征向量不一定相同.

即: x 是 A 关于 λ_0 的特征向量, $P^{-1}x$ 是 B 关于 λ_0 的特征向量.

⑤ $|A| = |B|$ 从而 A, B 同时可逆或不可逆

⑥ $r(A) = r(B)$

⑦ $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

✓ 数量矩阵只与自己相似.

✓ 对称矩阵的性质:

① 特征值全是实数, 特征向量是实向量;

② 与对角矩阵合同;

③ 不同特征值的特征向量必定正交;

④ k 重特征值必定有 k 个线性无关的特征向量;

⑤ 必可用正交矩阵相似对角化 (一定有 n 个线性无关的特征向量, A 可能有重的特征值, 重数 $= n - r(\lambda E - A)$).

A 可以相似对角化 A 与对角阵 Λ 相似. 记为: $A \sim \Lambda$ (称 Λ 是 A 的相似标准型)

✓ 若 A 为可对角化矩阵, 则其非零特征值的个数 (重数重复计算) $= r(A)$.

✓ 设 α_i 为对应于 λ_i 的线性无关的特征向量, 则有:

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \dots, \lambda_n\alpha_n) = \underbrace{[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]}_P \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_\Lambda.$$

✓ 若 $A \sim B$, $C \sim D$, 则: $\begin{bmatrix} A & o \\ o & C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B & o \\ o & D \end{bmatrix}.$

✓ 若 $A \sim B$, 则 $f(A) \sim f(B)$, $|f(A)| = |f(B)|.$

二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ A 为对称矩阵 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

A 与 B 合同 $B = C^T A C$. 记作: $A \simeq B$ (A, B 为对称阵, C 为可逆阵)

✓ 两个矩阵合同的充分必要条件是: 它们有相同的正负惯性指数.

✓ 两个矩阵合同的充分条件是: $A \sim B$

✓ 两个矩阵合同的必要条件是: $r(A) = r(B)$

✓ $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ 经过 $\begin{cases} \text{正交变换} \\ \text{合同变换} \\ \text{可逆线性变换} \end{cases}$ $X = CY$ 化为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$ 标准型.

✓ 二次型的标准型不是惟一的, 与所作的正交变换有关, 但系数不为零的个数是由 $\underbrace{r(A)}_{\text{正惯性指数} + \text{负惯性指数}}$

惟一确定的.

✓ 当标准型中的系数 d_i 为 1, -1 或 0 时, 则为规范形.

✓ 实对称矩阵的正 (负) 惯性指数等于它的正 (负) 特征值的个数.

√ 任一实对称矩阵 A 与惟一对角阵

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

合同.

√ 用正交变换法化二次型为标准形:

① 求出 A 的特征值、特征向量;

② 对 n 个特征向量单位化、正交化;

③ 构造 C (正交矩阵), $C^{-1}AC = \Lambda$;

④ 作变换 $X = CY$, 新的二次型为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_1^n d_i y_i^2$, Λ 的主对角上的元素 d_i 即为 A 的

特征值.

正定二次型 x_1, x_2, \dots, x_n 不全为零, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$.

正定矩阵 正定二次型对应的矩阵.

√ 合同变换不改变二次型的正定性.

√ 成为正定矩阵的充要条件 (之一成立):

① 正惯性指数为 n ;

② A 的特征值全大于 0;

③ A 的所有顺序主子式全大于 0;

④ A 合同于 E , 即存在可逆矩阵 Q 使 $Q^T A Q = E$;

⑤ 存在可逆矩阵 P , 使 $A = P^T P$ (从而 $|A| > 0$);

⑥ 存在正交矩阵，使 $C^T AC = C^{-1} AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ (λ_i 大于 0) .

✓ 成为正定矩阵的必要条件： $a_{ii} > 0$ ； $|A| > 0$.