线性代数公式大全

1、行列式

1. 行列式共有个元素，展开后有项，可分解为行列式；
2. 代数余子式的性质：

①、和的大小无关；

②、某行（列）的元素乘以其它行（列）元素的代数余子式为0；

③、某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为；

1. 代数余子式和余子式的关系：
2. 设行列式：

将上、下翻转或左右翻转，所得行列式为，则；

将顺时针或逆时针旋转，所得行列式为，则；

将主对角线翻转后（转置），所得行列式为，则；

将主副角线翻转后，所得行列式为，则；

1. 行列式的重要公式：

①、主对角行列式：主对角元素的乘积；

②、副对角行列式：副对角元素的乘积；

③、上、下三角行列式（）：主对角元素的乘积；

④、和：副对角元素的乘积；

⑤、拉普拉斯展开式：、

⑥、范德蒙行列式：大指标减小指标的连乘积；

⑦、特征值；

1. 对于阶行列式，恒有：，其中为阶主子式；
2. 证明的方法：

①、；

②、反证法；

③、构造齐次方程组，证明其有非零解；

④、利用秩，证明；

⑤、证明0是其特征值；

2、矩阵

1. 是阶可逆矩阵：

（是非奇异矩阵）；

（是满秩矩阵）

的行（列）向量组线性无关；

齐次方程组有非零解；

，总有唯一解；

与等价；

可表示成若干个初等矩阵的乘积；

的特征值全不为0；

是正定矩阵；

的行（列）向量组是的一组基；

是中某两组基的过渡矩阵；

1. 对于阶矩阵： 无条件恒成立；
2. 



1. 矩阵是表格，推导符号为波浪号或箭头；行列式是数值，可求代数和；
2. 关于分块矩阵的重要结论，其中均、可逆：

若，则：

Ⅰ、；

Ⅱ、；

②、；（主对角分块）

③、；（副对角分块）

④、；（拉普拉斯）

⑤、；（拉普拉斯）

3、矩阵的初等变换与线性方程组

1. 一个矩阵，总可经过初等变换化为标准形，其标准形是唯一确定的：；

等价类：所有与等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类；标准形为其形状最简单的矩阵；

对于同型矩阵、，若；

1. 行最简形矩阵：

①、只能通过初等行变换获得；

②、每行首个非0元素必须为1；

③、每行首个非0元素所在列的其他元素必须为0；

1. 初等行变换的应用：（初等列变换类似，或转置后采用初等行变换）
   1. 若，则可逆，且；

②、对矩阵做初等行变化，当变为时，就变成，即：；

③、求解线形方程组：对于个未知数个方程，如果，则可逆，且；

1. 初等矩阵和对角矩阵的概念：

①、初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵；

②、，左乘矩阵，乘的各行元素；右乘，乘的各列元素；

③、对调两行或两列，符号，且，例如：；

④、倍乘某行或某列，符号，且，例如：；

⑤、倍加某行或某列，符号,且，如：；

1. 矩阵秩的基本性质：

①、；

②、；

③、若，则；

④、若、可逆，则；（可逆矩阵不影响矩阵的秩）

⑤、；（※）

⑥、；（※）

⑦、；（※）

⑧、如果是矩阵，是矩阵，且，则：（※）

Ⅰ、的列向量全部是齐次方程组解（转置运算后的结论）；

Ⅱ、

⑨、若、均为阶方阵，则；

1. 三种特殊矩阵的方幂：

①、秩为1的矩阵：一定可以分解为列矩阵（向量）行矩阵（向量）的形式，再采用结合律；

②、型如的矩阵：利用二项展开式；

二项展开式：；

注：Ⅰ、展开后有项；

Ⅱ、

Ⅲ、组合的性质：；

③、利用特征值和相似对角化：

1. 伴随矩阵：

①、伴随矩阵的秩：；

②、伴随矩阵的特征值：；

③、、

1. 关于矩阵秩的描述：

①、，中有阶子式不为0，阶子式全部为0；（两句话）

②、，中有阶子式全部为0；

③、，中有阶子式不为0；

1. 线性方程组：，其中为矩阵，则：

①、与方程的个数相同，即方程组有个方程；

②、与方程组得未知数个数相同，方程组为元方程；

1. 线性方程组的求解：

①、对增广矩阵进行初等行变换（只能使用初等行变换）；

②、齐次解为对应齐次方程组的解；

③、特解：自由变量赋初值后求得；

1. 由个未知数个方程的方程组构成元线性方程：

①、；

②、（向量方程，为矩阵，个方程，个未知数）

③、（全部按列分块，其中）；

④、（线性表出）

⑤、有解的充要条件：（为未知数的个数或维数）

4、向量组的线性相关性

1. 个维列向量所组成的向量组：构成矩阵；

个维行向量所组成的向量组：构成矩阵；

含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应；

1. ①、向量组的线性相关、无关 有、无非零解；（齐次线性方程组）

②、向量的线性表出 是否有解；（线性方程组）

③、向量组的相互线性表示 是否有解；（矩阵方程）

1. 矩阵与行向量组等价的充分必要条件是：齐次方程组和同解；(例14)
2. ；(例15)
3. 维向量线性相关的几何意义：

①、线性相关 ；

②、线性相关 坐标成比例或共线（平行）；

③、线性相关 共面；

1. 线性相关与无关的两套定理：

若线性相关，则必线性相关；

若线性无关，则必线性无关；（向量的个数加加减减，二者为对偶）

若维向量组的每个向量上添上个分量，构成维向量组：

若线性无关，则也线性无关；反之若线性相关，则也线性相关；（向量组的维数加加减减）

简言之：无关组延长后仍无关，反之，不确定；

1. 向量组（个数为）能由向量组（个数为）线性表示，且线性无关，则(二版定理7)；

向量组能由向量组线性表示，则；（定理3）

向量组能由向量组线性表示

有解；

（定理2）

向量组能由向量组等价（定理2推论）

1. 方阵可逆存在有限个初等矩阵，使；

①、矩阵行等价：（左乘，可逆）与同解

②、矩阵列等价：（右乘，可逆）；

③、矩阵等价：（、可逆）；

1. 对于矩阵与：

①、若与行等价，则与的行秩相等；

②、若与行等价，则与同解，且与的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性；

③、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；

④、矩阵的行秩等于列秩；

1. 若，则：

①、的列向量组能由的列向量组线性表示，为系数矩阵；

②、的行向量组能由的行向量组线性表示，为系数矩阵；（转置）

1. 齐次方程组的解一定是的解，考试中可以直接作为定理使用，而无需证明；

①、 只有零解只有零解；

②、 有非零解一定存在非零解；

1. 设向量组可由向量组线性表示为：（题19结论）

（）

其中为，且线性无关，则组线性无关；（与的列向量组具有相同线性相关性）

（必要性：；充分性：反证法）

注：当时，为方阵，可当作定理使用；

1. ①、对矩阵，存在， 、的列向量线性无关；（）

②、对矩阵，存在， 、的行向量线性无关；

1. 线性相关

存在一组不全为0的数，使得成立；（定义）

有非零解，即有非零解；

，系数矩阵的秩小于未知数的个数；

1. 设的矩阵的秩为，则元齐次线性方程组的解集的秩为：；
2. 若为的一个解，为的一个基础解系，则线性无关；（题33结论）

5、相似矩阵和二次型

1. 正交矩阵或（定义），性质：

①、的列向量都是单位向量，且两两正交，即；

②、若为正交矩阵，则也为正交阵，且；

③、若、正交阵，则也是正交阵；

注意：求解正交阵，千万不要忘记施密特正交化和单位化；

1. 施密特正交化：

；





;

1. 对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；

对于实对称阵，不同特征值对应的特征向量正交；

1. ①、与等价 经过初等变换得到；

，、可逆；

，、同型；

②、与合同 ，其中可逆；

与有相同的正、负惯性指数；

③、与相似 ；

1. 相似一定合同、合同未必相似；

若为正交矩阵，则，（合同、相似的约束条件不同，相似的更严格）；

1. 为对称阵，则为二次型矩阵；
2. 元二次型为正定：

的正惯性指数为；

与合同，即存在可逆矩阵，使；

的所有特征值均为正数；

的各阶顺序主子式均大于0；

；(必要条件)