**基本概念**

1. 余子式和代数余子式，，。
2. 对称矩阵：。
3. 伴随矩阵，组成元素，书写格式：行元素的代数余子式写在列。
4. 逆矩阵，称可逆。若可逆，则.
5. 分块对角阵，，。
6. 初等行（列）变换：① 对换两行或两列；② 某行或某列乘以非零常数；③ 某行（列）的倍加到另一行（列）。
7. 等价矩阵：① 初等变换得来的矩阵；② 存在可逆矩阵，使得。
8. 初等矩阵：初等变换经过一次初等变换得来的矩阵，① ；② ；③。
9. 矩阵的秩：最高阶非零子式的阶数。。
10. 线性表示：存在使得，等价于非齐次方程组有解。
11. 线性相关：存在不全为的数，使得，等价于齐次方程组有非零解。
12. 线性无关：成立，等价于齐次方程组仅有零解。
13. 极大无关组：中个向量满足：① 线性无关；②中任意向量可由其表示或中任意个向量线性无关，则称为的极大无关组。
14. 向量组可由向量组表示：中任意一个向量可由表示，等价于有解，，。
15. 向量组与向量组等价：两个向量组能相互线性表示。
16. 齐次方程组基础解系：第一种描述：设是方程组的解，且满足① 线性无关；② 任意一个解可由其表示。第二种描述：个线性无关的解。【其中1个线性无关的解☞1个非零解；2个线性无关的解☞2个不成比例的解.】
17. 特征值和特征向量：。
18. 相似矩阵：存在可逆矩阵，使得，则称相似。
19. 相似对角化：根据方阵，找到可逆矩阵和对角阵，使得。
20. 内积：。
21. 正交：。
22. 正交矩阵：或者。特点：的列（行）为两两正交的单位向量。
23. 二次型：，其中为对称阵。
24. 合同矩阵：存在可逆矩阵，使得，则称合同。
25. 标准型：。
26. 正负惯性指数：标准型中正负系数的个数。
27. 正定二次型：。
28. 正定矩阵：对称阵使得为正定二次型。

**基本定理**

1. 行列式按行按列展开定理：．

逆过程应用：已知，求．将中第行元素换成对应的，得到，则：。

1. 为可逆矩阵；为可逆矩阵。

推论：方阵满足，则：①；②可逆，且。

1. 对矩阵进行一次初等行（列）变换，等价于在矩阵的左（右）边乘以一个与之对应的初等矩阵。
2. 初等变换不改变矩阵的秩。
3. 非齐次方程组有解可由的列线性表示；唯一解；无穷多解；

非齐次方程组无解不能由的列线性表示

特别地：当方程组的系数矩阵为方阵时：唯一解。

1. 齐次方程组仅有零解的列向量组线性无关；齐次方程组有非零解的列向量组线性相关。
2. 矩阵方程有解的列可由的列线性表示；的列与的列等价。
3. 矩阵通过初等行变换变成矩阵，则行向量组等价，列向量组有相同的相关性．
4. 齐次线性方程组系数矩阵的秩，则存在基础解系，并且的通解为，其中为任意常数．
5. 不同特征值对应的特征向量线性无关；实对称阵不同特征值对应的特征向量正交。
6. 相似矩阵有相同的秩和相同的特征值。
7. 方阵可对角化有个线性无关的特征向量重特征值，；实对称阵一定可以对角化；有个不同的特征值则一定可以对角化。
8. 实对称阵一定可以对角化，并且一定存在正交阵，使得.
9. 任意二次型，总有正交变换，化为标准形，其中是的矩阵的特征值.
10. 设二次型的秩为，且二次型的标准型分别为和，则系数和中正负个数相等.
11. 对称阵正定二次型为正定二次型二次型的规范型为的特征值全为正的各顺序阶主子式全大于。

**基本性质**

1. 行列式运算性质：转置不变；对换取反；数乘可提；行列拆分；叠加不变。
2. 矩阵乘法：① 或；② ；③ 。
3. 矩阵转置：① ② 

③  ④

4. 方阵的行列式：①方阵， ②，为阶方阵。

1. 伴随矩阵：①； ②； ③ 
2. 逆矩阵：①； ②；

③； ④， ⑤。

1. 初等矩阵：，，。
2. 初等变换与初等矩阵：可逆等于有限个初等矩阵的乘积.
3. 矩阵左（右）边乘可逆矩阵相当于对进行初等行（列）变换.
4. 行阶梯矩阵的秩等于其非零行的行数。
5. 秩：①； ②；

③； ④ ；

⑤，则； ⑥；

⑦.

1. ，为维非零列向量，则。
2. 向量组线性相关向量组中至少有一个向量能由其余个向量线性表示．
3. 设向量组线性无关，向量组可由线性表示，即，则无关．
4. 相关组添加向量仍相关，无关组减少向量仍无关；无关组添加分量仍无关，相关组减少分量仍相关。
5. 设向量组线性无关，而线性相关，则向量必能由向量组线性表示，且表示式是惟一的．
6. 向量组与它的极大无关组等价；
7. 矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩．
8. 矩阵等价矩阵行（列）向量组等价。向量组等价对应矩阵等价，除非两个向量组中向量个数相等.
9. 矩阵等价且同型；列向量组等价。
10. 设是齐次方程组的基础解系，是非齐次方程组的一个特解，则的通解，，其中为任意常数．
11. 两个方程组同解行向量组等价.
12. 设的特征值为，则：①；② ．
13. 同型且秩相等等价；方阵可对角化，且有相同特征值相似；对称阵的特征值正负个数对应相等合同。
14. 设，则有下表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 矩阵 |  |  |  |  |  |  |  |
| 特征值 |  |  |  |  |  |  |  |
| 特征向量 |  |  |  |  |  | / |  |

**基本方法**

1. 求行列式：方法一、利用行列式的性质化三角行列式；方法二、利用性质尽可能多的化行列式的某行（列）元素为零，然后依此行（列）用Laplace展开。
2. 求解矩阵方程：方法：通过矩阵运算将方程化为三种方式，具体运算放最后一步，注意左，右乘。
3. 求矩阵的秩：具体时，将（行阶梯矩阵），中非零行的行数；为抽象矩阵时，利用秩的不等式证明.
4. 讨论向量组的相关性：① 具体时，构造矩阵，比较秩与个数的关系；②. 抽象时，先设，通过恒等变形或乘法，或重组，得到，或者用秩的理论判断，.
5. 求极大无关组：将向量组的各向量做为矩阵的列，行阶梯矩阵，向量组的秩等于矩阵的秩，每个阶梯上取一列（一般取阶梯竖线右边的第一列），构成极大无关组。
6. 求基础解系和通解：先求，得，通过矩阵的运算，求出的各线性无关的解及的一个特解，再利用解的结构得到通解。
7. 含参数方程组求解：①．行阶梯型，讨论可否由的列线性表示；②．特别，当为方阵时，求出的条件，即唯一解的条件，再把中的参数代入原方程组，继续由，判断是表达式不唯一，还是不能由其表示。
8. 方阵特征值，特征向量求法：① 解，得根，② 解方程组，得基础解系，从而得到对应的特征向量为，其中不全为0.
9. 方阵对角化：①求特征值；②得所有特征值的特征向量；③ 令，，则。
10. 二次型正交变换下化标准形：① 写出对称阵，② 求，得特征值，③ 将每一个特征值代入，得基础解系，正交单位化（一个向量时，只要单位化），最终得到所有特征值对应的（特征）向量，④，令，得二次型的标准形。【其中②，③，④步也为对称阵通过正交矩阵对角化的步骤。】