**线性代数知识点总结**

**1 行列式**

**（一）行列式概念和性质**

1、逆序数：所有的逆序的总数

2、行列式定义：不同行不同列元素乘积代数和

3、行列式性质：（用于化简行列式）

（1）行列互换（转置），行列式的值不变

（2）两行（列）互换，行列式变号

（3）提公因式：行列式的某一行（列）的所有元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式

（4）拆列分配：行列式中如果某一行（列）的元素都是两组数之和，那么这个行列式就等于两个行列式之和。

（5）一行（列）乘k加到另一行（列），行列式的值不变。

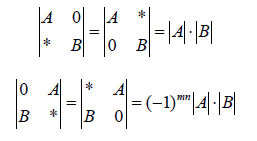
（6）两行成比例，行列式的值为0。

**（二）重要行列式**

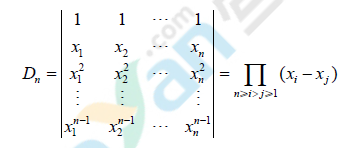
4、上（下）三角（主对角线）行列式的值等于主对角线元素的乘积

5、副对角线行列式的值等于副对角线元素的乘积乘 

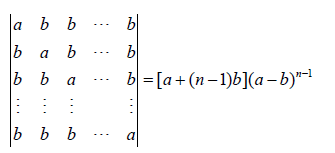
6、Laplace展开式：（A是m阶矩阵，B是n阶矩阵），则



7、n阶（n≥2）范德蒙德行列式

数学归纳法证明

★8、对角线的元素为a，其余元素为b的行列式的值：



**（三）按行（列）展开**

9、按行展开定理：

（1）任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和等于行列式的值

（2）行列式中某一行（列）各个元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于0

**（四）行列式公式**

10、行列式七大公式：

（1）|kA|=kn|A|

（2）|AB|=|A|·|B|

（3）|AT|=|A|

（4）|A-1|=|A|-1

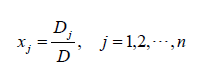
（5）|A\*|=|A|n-1

（6）若A的特征值λ1、λ2、……λn，则 

（7）若A与B相似，则|A|=|B|

**（五）克莱姆法则**

11、克莱姆法则：

（1）非齐次线性方程组的系数行列式不为0，那么方程为唯一解

（2）如果非齐次线性方程组无解或有两个不同解，则它的系数行列式必为0

（3）若齐次线性方程组的系数行列式不为0，则齐次线性方程组只有0解；如果方程组有非零解，那么必有D=0。

**2 矩阵**

**（一）矩阵的运算**

1、矩阵乘法注意事项：

（1）矩阵乘法要求前列后行一致；

（2）矩阵乘法不满足交换律；（因式分解的公式对矩阵不适用，但若B=E,O,A-1，A\*,f(A)时，可以用交换律）

（3）AB=O不能推出A=O或B=O。

2、转置的性质（5条）

（1）（A+B）T=AT+BT

（2）（kA）T=kAT

（3）（AB）T=BTAT

（4）|A|T=|A|

（5）（AT）T=A

**（二）矩阵的逆**

3、逆的定义：

AB=E或BA=E成立，称A可逆，B是A的逆矩阵，记为B=A-1

注：A可逆的充要条件是|A|≠0

4、逆的性质：（5条）

（1）（kA）-1=1/k·A-1 (k≠0)

（2）（AB）-1=B-1·A-1

（3）|A-1|=|A|-1

（4）（AT）-1=（A-1）T

（5）（A-1）-1=A

5、逆的求法：

（1）A为抽象矩阵：由定义或性质求解

（2）A为数字矩阵：（A|E）→初等行变换→（E|A-1）

**（三）矩阵的初等变换**

6、初等行（列）变换定义：

（1）两行（列）互换；

（2）一行（列）乘非零常数c

（3）一行（列）乘k加到另一行（列）

7、初等矩阵：单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵。

8、初等变换与初等矩阵的性质：

（1）初等行（列）变换相当于左（右）乘相应的初等矩阵

（2）初等矩阵均为可逆矩阵，且Eij-1=Eij（i，j两行互换）；

Ei-1（c）=Ei（1/c）（第i行（列）乘c）

Eij-1（k）=Eij（-k）（第i行乘k加到j）

**★（四）矩阵的秩**

9、秩的定义：非零子式的最高阶数

注：（1）r（A）=0意味着所有元素为0，即A=O

（2）r（An×n）=n（满秩）←→ |A|≠0 ←→A可逆；

r（A）＜n←→|A|=0←→A不可逆；

（3）r（A）=r（r=1、2、…、n-1）←→r阶子式非零且所有r+1子式均为0。

10、秩的性质：（7条）

（1）A为m×n阶矩阵，则r（A）≤min（m,n）

（2）r（A±B）≤r（A）±（B）

（3）r（AB）≤min{r（A），r（B）}

（4）r（kA）=r（A）（k≠0）

（5）r（A）=r（AC）（C是一个可逆矩阵）

（6）r（A）=r（AT）=r（ATA）=r（AAT）

（7）设A是m×n阶矩阵，B是n×s矩阵，AB=O，则r（A）+r（B）≤n

11、秩的求法：

（1）A为抽象矩阵：由定义或性质求解；

（2）A为数字矩阵：A→初等行变换→阶梯型（每行第一个非零元素下面的元素均为0），则r（A）=非零行的行数

**（五）伴随矩阵**

12、伴随矩阵的性质：（8条）

（1）AA\*=A\*A=|A|E → ★A\*=|A|A-1

（2）（kA）\*=kn-1A\*

（3）（AB）\*=B\*A\*

（4）|A\*|=|A|n-1

（5）（AT）\*=（A\*）T

（6）（A-1）\*=（A\*）-1=A|A|-1

（7）（A\*）\*=|A| n-2·A

★（8）r（A\*）=n （r（A）=n）；

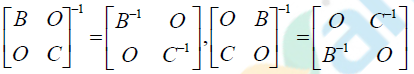
r（A\*）=1 （r（A）=n-1）；

r（A\*）=0 （r（A）＜n-1）

**（六）分块矩阵**

13、分块矩阵的乘法：要求前列后行分法相同。

14、分块矩阵求逆：



**3 向量**

**（一）向量的概念及运算**

1、向量的内积：（α，β）=αTβ=βTα

2、长度定义： ||α||= 

3、正交定义：（α，β）=αTβ=βTα=a1b1+a2b2+…+anbn=0

4、正交矩阵的定义：A为n阶矩阵，AAT=E ←→ A-1=AT ←→ ATA=E → |A|=±1

**（二）线性组合和线性表示**

5、线性表示的充要条件：

非零列向量β可由α1，α2，…，αs线性表示

(1)←→非齐次线性方程组（α1，α2，…，αs）（x1，x2，…，xs）T=β有解。

★(2)←→r（α1，α2，…，αs）=r（α1，α2，…，αs，β）（系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，用于大题第一步的检验）

6、线性表示的充分条件：（了解即可）

若α1，α2，…，αs线性无关，α1，α2，…，αs，β线性相关，则β可由α1，α2，…，αs线性表示。

7、线性表示的求法：（大题第二步）

设α1，α2，…，αs线性无关，β可由其线性表示。

（α1，α2，…，αs|β）→初等行变换→（行最简形|系数）

行最简形：每行第一个非0的数为1，其余元素均为0

**（三）线性相关和线性无关**

8、线性相关注意事项：

（1）α线性相关←→α=0

（2）α1，α2线性相关←→α1，α2成比例

9、线性相关的充要条件：

向量组α1，α2，…，αs线性相关

（1）←→有个向量可由其余向量线性表示；

（2）←→齐次方程（α1，α2，…，αs）（x1，x2，…，xs）T=0有非零解；

★（3）←→r（α1，α2，…，αs）＜s 即秩小于个数

特别地，n个n维列向量α1，α2，…，αn线性相关

（1）←→ r（α1，α2，…，αn）＜n

（2）←→|α1，α2，…，αn |=0

（3）←→（α1，α2，…，αn）不可逆

10、线性相关的充分条件：

（1）向量组含有零向量或成比例的向量必相关

（2）部分相关，则整体相关

（3）高维相关，则低维相关

（4）以少表多，多必相关

★推论：n+1个n维向量一定线性相关

11、线性无关的充要条件

向量组α1，α2，…，αs 线性无关

（1）←→任意向量均不能由其余向量线性表示；

（2）←→齐次方程（α1，α2，…，αs）（x1，x2，…，xs）T=0只有零解

（3）←→r（α1，α2，…，αs）=s

特别地，n个n维向量α1，α2，…，αn 线性无关

←→r（α1，α2，…，αn）=n ←→|α1，α2，…，αn |≠0 ←→矩阵可逆

12、线性无关的充分条件：

（1）整体无关，部分无关

（2）低维无关，高维无关

（3）正交的非零向量组线性无关

（4）不同特征值的特征向量无关

13、线性相关、线性无关判定

（1）定义法

★（2）秩：若小于阶数，线性相关；若等于阶数，线性无关

【专业知识补充】

（1）在矩阵左边乘列满秩矩阵（秩=列数），矩阵的秩不变；在矩阵右边乘行满秩矩阵，矩阵的秩不变。

（2）若n维列向量α1，α2，α3 线性无关，β1，β2，β3 可以由其线性表示，即（β1，β2，β3）=（α1，α2，α3）C，则r（β1，β2，β3）=r（C），从而线性无关。

←→r（β1，β2，β3）=3 ←→ r（C）=3 ←→ |C|≠0

**（四）极大线性无关组与向量组的秩**

14、极大线性无关组不唯一

15、向量组的秩:极大无关组中向量的个数成为向量组的秩

对比：矩阵的秩:非零子式的最高阶数

★注:向量组α1，α2，…，αs 的秩与矩阵A=（α1，α2，…，αs）的秩相等

★16、极大线性无关组的求法

（1）α1，α2，…，αs 为抽象的：定义法

（2）α1，α2，…，αs 为数字的：

（α1，α2，…，αs）→初等行变换→阶梯型矩阵

则每行第一个非零的数对应的列向量构成极大无关组

**（五）向量空间**

17、基（就是极大线性无关组）变换公式：

若α1，α2，…，αn 与β1，β2，…，βn 是n维向量空间V的两组基，则基变换公式为（β1，β2，…，βn）=（α1，α2，…，αn）Cn×n

其中，C是从基α1，α2，…，αn 到β1，β2，…，βn 的过渡矩阵。

C=（α1，α2，…，αn）-1（β1，β2，…，βn）

18、坐标变换公式：

向量γ在基α1，α2，…，αn与基β1，β2，…，βn 的坐标分别为x=（x1，x2，…，xn）T，y=（y1，y2，…，yn）T，，即γ=x1α1 + x2α2 + … +xnαn =y1β1 + y2β2 + … +ynβn，则坐标变换公式为x=Cy或y=C-1x。其中，C是从基α1，α2，…，αn 到β1，β2，…，βn 的过渡矩阵。C=（α1，α2，…，αn）-1（β1，β2，…，βn）

**（六）Schmidt正交化**

19、Schmidt正交化

设α1，α2，α3 线性无关

（1）正交化

令β1=α1





（2）单位化



**4 线性方程组**

**（一）方程组的表达形与解向量**

1、解的形式：

(1)一般形式

(2)矩阵形式：Ax=b；

(3)向量形式：A=（α1，α2，…，αn）

2、解的定义：

若η=（c1，c2，…，cn）T满足方程组Ax=b，即Aη=b，称η是Ax=b的一个解（向量）

**（二）解的判定与性质**

3、齐次方程组：

（1）只有零解←→r（A）=n（n为A的列数或是未知数x的个数）

（2）有非零解←→r（A）＜n

4、非齐次方程组：

（1）无解←→r（A）＜r（A|b）←→r（A）=r（A）-1

（2）唯一解←→r（A）=r（A|b）=n

（3）无穷多解←→r（A）=r（A|b）＜n

5、解的性质：

（1）若ξ1，ξ2是Ax=0的解，则k1ξ1+k2ξ2是Ax=0的解

（2）若ξ是Ax=0的解，η是Ax=b的解，则ξ+η是Ax=b的解

（3）若η1，η2是Ax=b的解，则η1-η2是Ax=0的解

【推广】

（1）设η1，η2，…，ηs是Ax=b的解，则k1η1+k2η2+…+ksηs为

Ax=b的解 （当Σki=1）

Ax=0的解 （当Σki=0）

（2）设η1，η2，…，ηs是Ax=b的s个线性无关的解，则η2-η1，η3-η1，…，ηs-η1为Ax=0的s-1个线性无关的解。

变式：①η1-η2，η3-η2，…，ηs-η2

②η2-η1，η3-η2，…，ηs-ηs-1

**（三）基础解系**

6、基础解系定义：

（1）ξ1，ξ2，…，ξs 是Ax=0的解

（2）ξ1，ξ2，…，ξs 线性相关

（3）Ax=0的所有解均可由其线性表示

→基础解系即所有解的极大无关组

注：基础解系不唯一。

任意n-r（A）个线性无关的解均可作为基础解系。

★7、重要结论：（证明也很重要）

设A施m×n阶矩阵，B是n×s阶矩阵，AB=O

（1）B的列向量均为方程Ax=0的解

（2）r（A）+r（B）≤n（第2章，秩）

8、总结：基础解系的求法

（1）A为抽象的：由定义或性质凑n-r（A）个线性无关的解

（2）A为数字的：A→初等行变换→阶梯型

自由未知量分别取1,0,0；0,1,0；0,0,1；代入解得非自由未知量得到基础解系

**（四）解的结构（通解）**

9、齐次线性方程组的通解（所有解）

设r（A）=r，ξ1，ξ2，…，ξn-r 为Ax=0的基础解系，

则Ax=0的通解为k1η1+k2η2+…+kn-rηn-r （其中k1，k2，…，kn-r为任意常数）

10、非齐次线性方程组的通解

设r（A）=r，ξ1，ξ2，…，ξn-r 为Ax=0的基础解系，η为Ax=b的特解，

则Ax=b的通解为η+ k1η1+k2η2+…+kn-rηn-r （其中k1，k2，…，kn-r为任意常数）

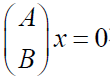
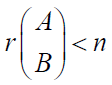
**（五）公共解与同解**

11、公共解定义：

如果α既是方程组Ax=0的解，又是方程组Bx=0的解，则称α为其公共解

12、非零公共解的充要条件：

方程组Ax=0与Bx=0有非零公共解

←→ 有非零解←→ 

13、重要结论（需要掌握证明）

（1）设A是m×n阶矩阵，则齐次方程ATAx=0与Ax=0同解，r（ATA）=r（A）

（2）设A是m×n阶矩阵，r（A）=n，B是n×s阶矩阵，则齐次方程ABx=0与Bx=0同解，r（AB）=r（B）

**5 特征值与特征向量**

**（一）矩阵的特征值与特征向量**

1、特征值、特征向量的定义：

设A为n阶矩阵，如果存在数λ及非零列向量α，使得Aα=λα，称α是矩阵A属于特征值λ的特征向量。

2、特征多项式、特征方程的定义：

|λE-A|称为矩阵A的特征多项式（λ的n次多项式）。

|λE-A |=0称为矩阵A的特征方程（λ的n次方程）。

注:特征方程可以写为|A-λE|=0

3、重要结论：

（1）若α为齐次方程Ax=0的非零解，则Aα=0·α，即α为矩阵A特征值λ=0的特征向量

（2）A的各行元素和为k，则(1，1，…，1)T为特征值为k的特征向量。

（3）上（下）三角或主对角的矩阵的特征值为主对角线各元素。

△4、总结：特征值与特征向量的求法

（1）A为抽象的：由定义或性质凑

（2）A为数字的：由特征方程法求解

5、特征方程法：

（1）解特征方程|λE-A|=0，得矩阵A的n个特征值λ1，λ2，…，λn

注：n次方程必须有n个根(可有多重根，写作λ1=λ2=…=λs=实数，不能省略)

（2）解齐次方程（λiE-A）=0，得属于特征值λi的线性无关的特征向量，即其基础解系（共n-r（λiE-A）个解）

6、性质：

（1）不同特征值的特征向量线性无关

（2）k重特征值最多k个线性无关的特征向量

1≤n-r（λiE-A）≤ki

（3）设A的特征值为λ1，λ2，…，λn，则|A|=Πλi，Σλi=Σaii

（4）当r（A）=1，即A=αβT，其中α，β均为n维非零列向量，则A的特征值为λ1=Σaii=αTβ=βTα，λ2=…=λn=0

（5）设α是矩阵A属于特征值λ的特征向量，则

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | f（A） | AT | A-1 | A\* | P-1AP（相似） |
| λ | f（λ） | λ | λ-1 | |A|λ-1 | λ |
| α | α | / | α | α | P-1α |

**（二）相似矩阵**

7、相似矩阵的定义：

设A、B均为n阶矩阵，如果存在可逆矩阵P使得B=P-1AP，称A与B相似，记作A~B

8、相似矩阵的性质

（1）若A与B相似，则f（A）与f（B）相似

（2）若A与B相似，B与C相似，则A与C相似

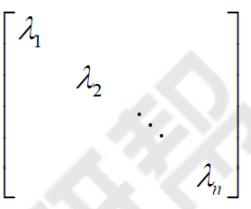
（3）相似矩阵有相同的行列式、秩、特征多项式、特征方程、特征值、迹（即主对角线元素之和）

【推广】

（4）若A与B相似，则AB与BA相似，AT与BT相似，A-1与B-1相似，A\*与B\*也相似

**（三）矩阵的相似对角化**

9、相似对角化定义：

如果A与对角矩阵相似，即存在可逆矩阵P，使得P-1AP=Λ= ，

称A可相似对角化。

注：Aαi=λiαi（αi≠0，由于P可逆），故P的每一列均为矩阵A的特征值λi的特征向量

10、相似对角化的充要条件

（1）A有n个线性无关的特征向量

（2）A的k重特征值有k个线性无关的特征向量

11、相似对角化的充分条件：

（1）A有n个不同的特征值（不同特征值的特征向量线性无关）

（2）A为实对称矩阵

12、重要结论：

（1）若A可相似对角化，则r（A）为非零特征值的个数，n-r（A）为零特征值的个数

（2）若A不可相似对角化，r（A）不一定为非零特征值的个数

**（四）实对称矩阵**

13、性质

（1）特征值全为实数

（2）不同特征值的特征向量正交

（3）A可相似对角化，即存在可逆矩阵P使得P-1AP=Λ

（4）A可正交相似对角化，即存在正交矩阵Q，使得Q-1AQ=QTAQ=Λ

**6 二次型**

**（一）二次型及其标准形**

1、二次型：

（1）一般形式

（2）矩阵形式（常用）

2、标准形：

如果二次型只含平方项，即f（x1，x2，…，xn）=d1x12+d2x22+…+dnxn2

这样的二次型称为标准形（对角线）

3、二次型化为标准形的方法：

（1）配方法：

通过可逆线性变换x=Cy（C可逆），将二次型化为标准形。其中，可逆线性变换及标准形通过先配方再换元得到。

★（2）正交变换法：

通过正交变换x=Qy，将二次型化为标准形λ1y12+λ2y22+…+λnyn2

其中，λ1，λ2，…，λn 是A的n个特征值，Q为A的正交矩阵

注:正交矩阵Q不唯一，γi与λi 对应即可。

**（二）惯性定理及规范形**

4、定义：

正惯性指数：标准形中正平方项的个数称为正惯性指数，记为p；

负惯性指数：标准形中负平方项的个数称为负惯性指数，记为q；

规范形：f=z12+…zp2-zp+12-…-zp+q2称为二次型的规范形。

5、惯性定理：

二次型无论选取怎样的可逆线性变换为标准形，其正负惯性指数不变。

注：（1）由于正负惯性指数不变，所以规范形唯一。

（2）p=正特征值的个数，q=负特征值的个数，p+q=非零特征值的个数=r（A）

**（三）合同矩阵**

6、定义：

A、B均为n阶实对称矩阵，若存在可逆矩阵C，使得B=CTAC，称A与B合同

△7、总结：n阶实对称矩阵A、B的关系

（1）A、B相似（B=P-1AP）←→相同的特征值

（2）A、B合同（B=CTAC）←→相同的正负惯性指数←→相同的正负特征值的个数

（3）A、B等价（B=PAQ）←→r（A）=r（B）

注：实对称矩阵相似必合同，合同必等价

**（四）正定二次型与正定矩阵**

8、正定的定义

二次型xTAx，如果任意x≠0，恒有xTAx＞0，则称二次型正定，并称实对称矩阵A是正定矩阵。

9、n元二次型xTAx正定充要条件：

（1）A的正惯性指数为n

（2）A与E合同，即存在可逆矩阵C，使得A=CTC或CTAC=E

（3）A的特征值均大于0

（4）A的顺序主子式均大于0（k阶顺序主子式为前k行前k列的行列式）

10、n元二次型xTAx正定必要条件：

（1）aii＞0

（2）|A|＞0

11、总结：二次型xTAx正定判定（大题）

（1）A为数字：顺序主子式均大于0

（2）A为抽象：①证A为实对称矩阵：AT=A；②再由定义或特征值判定

12、重要结论：

（1）若A是正定矩阵，则kA（k＞0），Ak，AT，A-1，A\*正定

（2）若A、B均为正定矩阵，则A+B正定