第一章 矩阵

**矩阵的概念：**（零矩阵、负矩阵、行矩阵、列矩阵、n阶方阵、相等矩阵)

**矩阵的运算**：加法（同型矩阵）---------交换、结合律

数乘---------分配、结合律

乘法

（一般AB=BA，不满足消去律；由AB=0，不能得A=0或B=0）

转置： 

 

方幂： 

逆矩阵：设A是N阶方阵，若存在N阶矩阵B的AB=BA=I则称A是可逆的， 且

**矩阵的逆矩阵满足的运算律**：

1、可逆矩阵A的逆矩阵也是可逆的，且

2、可逆矩阵A的数乘矩阵kA也是可逆的，且

3、可逆矩阵A的转置也是可逆的，且

4、两个可逆矩阵A与B的乘积AB也是可逆的，且，但是两个可逆矩阵A与B的和A+B不一定可逆，即使可逆，但。A为N阶方阵，若|A|=0，则称A为**奇异矩阵**，否则为**非奇异矩阵**。

5、若A可逆，则

**逆矩阵注**：①AB=BA=I则A与B一定是方阵 ②BA=AB=I则A与B一定互逆；

③不是所有的方阵都存在逆矩阵；④若A可逆，则其逆矩阵是唯一的。

**分块矩阵**：加法，数乘，乘法都类似普通矩阵

转置：每块转置并且每个子块也要转置

注：**把分出来的小块矩阵看成是元素**

**初等变换**：

1、交换两行（列）

2.、非零k乘某一行（列）

3、将某行（列）的K倍加到另一行（列）

**初等变换不改变矩阵的可逆性，初等矩阵都可逆**

**初等矩阵**：单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵

等价标准形矩阵

第二章 行列式

**N阶行列式的值**：行列式中所有不同行、不同列的n个元素的乘积的和 

**行列式的性质**：**①**行列式行列互换，其值不变。（转置行列式）

**②**行列式中某两行（列）互换，行列式变号。

推论：若行列式中某两行（列）对应元素相等，则行列式等于零。

**③**常数k乘以行列式的某一行（列），等于k乘以此行列式。

推论：若行列式中两行（列）成比例，则行列式值为零；

推论：行列式中某一行（列）元素全为零，行列式为零。

**④**行列式具有分行（列）可加性

**⑤**将行列式某一行（列）的k倍加到另一行（列）上，值不变

**行列式依行（列）展开**：余子式、代数余子式

**定理**：**行列式中某一行的元素与另一行元素对应余子式乘积之和为零。**

**克莱姆法则**：

非齐次线性方程组 ：当系数行列式时，有唯一解：

齐次线性方程组 ：当系数行列式时，则只有零解

（**逆否命题：若方程组存在非零解，则D等于零）**

**特殊行列式：**

①转置行列式：

②对称行列式:

③反对称行列式: 奇数阶的反对称行列式值为零

④三阶线性行列式:

解法：用把化为零，。。化为三角形行列式

⑤上（下）三角形行列式

第三章 矩阵的秩与线性方程组

**矩阵的秩r(A)**：

**若A可逆，则满秩**

**若A是非奇异矩阵，则r（AB）=r（B）**

**初等变换不改变矩阵的秩**

**求法：1.定义；2.转化为标准式或阶梯形**

**伴随矩阵：**A为N阶方阵，伴随矩阵：

**特殊矩阵的逆矩阵**：

1、分块矩阵 则

2、准对角矩阵， 则

3、  4、（A可逆）

5、 6、（A可逆）

7、 8、****

**判断矩阵是否可逆**：充要条件是****，此时

**求逆矩阵的方法**：

定义法

伴随矩阵法

初等变换法 ,**只能是行变换。**

**初等矩阵与矩阵乘法的关系**：

设是m\*n阶矩阵，则对A的行实行一次初等变换得到的矩阵，等于用同等的m阶初等矩阵左乘以A：对A的列实行一次初等变换得到的矩阵，等于用同种n阶初等矩阵右乘以A （**行变左乘，列变右乘**）

**线性方程组解的判定：**

**非齐次线性方程组**：

增广矩阵→简化阶梯型矩阵

r(AB)=r(B)=r 当r=n时，有唯一解；当时，有无穷多解

r(AB)r(B)，无解

**齐次线性方程组**：

仅有零解充要r(A)=n有非零解充要r(A)<n

当齐次线性方程组方程个数<未知量个数，一定有非零解

当齐次线性方程组方程个数=未知量个数，有非零解充要|A|=0

齐次线性方程组若有零解，一定是无穷多个

N维向量：由n个实数组成的n元有序数组。希腊字母表示（加法数乘）

特殊的向量：行（列）向量，零向量θ，负向量，相等向量，转置向量

向量间的线性关系: 线性组合或线性表示

向量组的秩：

**定理**：如果是向量组的线性无关的部分组，则它是 极大无关组的充要条件是：中的每一个向量都可由线性表出。

**秩:**极大无关组中所含的向量个数。

**定理**：设A为m\*n矩阵，则的充要条件是：A的列（行）秩为r。

**线性组合或线性表示注**：两个向量α，β，若则α是β的线性组合

任意向量都是单位向量组的线性组合

零向量是任意向量组的线性组合

任意向量组中的一个都是他本身的线性组合

**向量组间的线性相关注**：

1. n个n维**单位向量组**一定是线性无关

2. 一个非零向量是线性无关，零向量是线性相关

3．含有零向量的向量组一定是线性相关

4.若两个向量成比例，则他们一定线性相关

向量β可由线性表示的充要条件是

**判断向量组是否线性相关的方法**：

1、定义法：设，求

1. 向量间关系法：部分相关则整体相关，整体无关则部分无关
2. 分量法（n个m维向量组）：
3. 线性相关（充要）

线性无关（充要）

推论①当m=n时，相关，则；无关，则

②当m<n时，线性相关

推广：若向量组线性无关，则当s为奇数时，向量组 也线性无关；当s为偶数时，向量组也线性相关。

定理：如果向量组线性相关，则向量可由向量组线性表出，且 表示法唯一的充分必要条件是线性无关。

**极大无关组注**：向量组的极大无关组不是唯一的，但他们所含向量的个数是确定的；

不全为零的向量组的极大无关组一定存在；

无关的向量组的极大无关组是其本身；

向量组与其极大无关组是等价的。

第四章 向量空间

**向量的内积**

定义：（α，β）=

性质：非负性、对称性、线性性

(α,kβ)=k(α,β);

(kα,kβ)=(α,β);

(α+β,)=(α,)+(α,)+(β,)+(β,);

 ,

向量的长度：

的充要条件是α=0；α是单位向量的充要条件是（α，α）=1

正交向量：α，β是正交向量的充要条件是（α，β）=0

　　　正交的向量组必定线性无关

**正交矩阵**：ｎ阶矩阵Ａ　　　

**性质**：1、若A为正交矩阵，则Ａ可逆，且，且也是正交矩阵；

　２、若A为正交矩阵，则；

　３、若A、Ｂ为同阶正交矩阵，则ＡＢ也是正交矩阵；

　４、ｎ阶矩阵Ａ＝（）是正交矩阵的充要条件是Ａ的列（行）向量组是 标准正交向量；

**线性方程组解的结构**：齐次非齐次、基础解系

**齐次线性方程组（I）解的结构**：解为

（I）的两个解的和仍是它的解；

（I）解的任意倍数还是它的解；

（I）解的线性组合也是它的解，是任意常数。

**非齐次线性方程组（II）解的结构**：解为

（II）的两个解的差仍是它的解；

若是非齐次线性方程组AX=B的一个解，v是其导出组AX=O的一个解，则u+v是（II）的一个解。

**定理**：

如果齐次线性方程组的系数矩阵A的秩，则该方程组的基础解系存在，且在每个基础解系中，恰含有n-r个解。

若是非齐次线性方程组AX=B的一个解，v是其导出组AX=O的全部解，则u+v是（II）的全部解。