线性代数超强总结

 



√ 关于：

①称为的标准基，中的自然基，单位坐标向量；

②线性无关；

③；

④；

⑤任意一个维向量都可以用线性表示.

√ 行列式的计算：

① 若都是方阵（不必同阶）,则

②上三角、下三角行列式等于主对角线上元素的乘积.

③关于副对角线：

√ 逆矩阵的求法:

①

②

③ 

④ 

⑤ 

√ 方阵的幂的性质： 

√ 设，对阶矩阵规定：为的一个多项式.

√ 设的列向量为,的列向量为，的列向量为,

√ 用对角矩阵左乘一个矩阵,相当于用的对角线上的各元素依次乘此矩阵的行向量；

用对角矩阵右乘一个矩阵,相当于用的对角线上的各元素依次乘此矩阵的列向量.

√ 两个同阶对角矩阵相乘只用把对角线上的对应元素相乘,

与分块对角阵相乘类似,即：



√ 矩阵方程的解法：设法化成

当时,





√ 和同解（列向量个数相同）,则：

① 它们的极大无关组相对应,从而秩相等；

② 它们对应的部分组有一样的线性相关性；

③ 它们有相同的内在线性关系.

√ 判断是的基础解系的条件：

① 线性无关；

② 是的解；

③ .

1. 零向量是任何向量的线性组合,零向量与任何同维实向量正交.
2. 单个零向量线性相关；单个非零向量线性无关.
3. 部分相关,整体必相关；整体无关,部分必无关.
4. 原向量组无关,接长向量组无关；接长向量组相关,原向量组相关.
5. 两个向量线性相关对应元素成比例；两两正交的非零向量组线性无关.
6. 向量组中任一向量≤≤都是此向量组的线性组合.
7. 向量组线性相关向量组中至少有一个向量可由其余个向量线性表示.

向量组线性无关向量组中每一个向量都不能由其余个向量线性表示.

1. 维列向量组线性相关；

维列向量组线性无关.

1. .
2. 若线性无关，而线性相关,则可由线性表示,且表示法惟一.
3. 矩阵的行向量组的秩等于列向量组的秩.

阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数.

1. 矩阵的行初等变换不改变矩阵的秩,且不改变列向量间的线性关系.

矩阵的列初等变换不改变矩阵的秩,且不改变行向量间的线性关系.

向量组等价 和可以相互线性表示. 记作：

矩阵等价 经过有限次初等变换化为. 记作：

1. 矩阵与等价作为向量组等价,即：秩相等的向量组不一定等价.

矩阵与作为向量组等价

矩阵与等价.

1. 向量组可由向量组线性表示≤.
2. 向量组可由向量组线性表示,且，则线性相关.

向量组线性无关,且可由线性表示,则≤.

1. 向量组可由向量组线性表示,且,则两向量组等价；
2. 任一向量组和它的极大无关组等价.
3. 向量组的任意两个极大无关组等价,且这两个组所含向量的个数相等.
4. 若两个线性无关的向量组等价,则它们包含的向量个数相等.
5. 若是矩阵,则,若，的行向量线性无关；

若，的列向量线性无关,即：

线性无关.

线性方程组的矩阵式  向量式 

 



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 矩阵转置的性质： |  |  |  |  |  |
| 矩阵可逆的性质： |  |  |  |  |  |  |
| 伴随矩阵的性质： |  |  |  |  |  |  |  |
|  | |  |  |  |

线性方程组解的性质：

√ 设为矩阵,若,则,从而一定有解.

当时,一定不是唯一解.,则该向量组线性相关.

是的上限.

√ 矩阵的秩的性质：

① 

② ≤

③ ≤

④ 

⑤ 

⑥≥

⑦ ≤

⑧ 

⑨ 



⑩ 且在矩阵乘法中有左消去律:



标准正交基 个维线性无关的向量,两两正交,每个向量长度为1.

 .

是单位向量 .

√ 内积的性质： ① 正定性：

② 对称性：

③ 双线性：





施密特 线性无关,



单位化：  

正交矩阵 .

√ 是正交矩阵的充要条件：的个行（列）向量构成的一组标准正交基.

√ 正交矩阵的性质：① ；

② ；

③ 是正交阵,则（或）也是正交阵；

④ 两个正交阵之积仍是正交阵；

⑤ 正交阵的行列式等于1或-1.

的特征矩阵 .

的特征多项式 .

的特征方程 . 

√ 上三角阵、下三角阵、对角阵的特征值就是主对角线上的各元素.

√ 若,则为的特征值,且的基础解系即为属于的线性无关的特征向量.

√  

√ 若,则一定可分解为=、,从而的特征值为：, .

√ 若的全部特征值，是多项式,则:

① 的全部特征值为；

② 当可逆时,的全部特征值为,

的全部特征值为.

√ 

√ 

与相似  （为可逆阵） 记为：

√ 相似于对角阵的充要条件：恰有个线性无关的特征向量. 这时,为的特征向量拼成的矩阵，为对角阵,主对角线上的元素为的特征值.

√ 可对角化的充要条件： 为的重数.

√ 若阶矩阵有个互异的特征值,则与对角阵相似.

与正交相似  （为正交矩阵）

√ 相似矩阵的性质：①  若均可逆

② 

③  （为整数）

④ ,从而有相同的特征值,但特征向量不一定相同.即:是关于的特征向量,是关于的特征向量.

⑤  从而同时可逆或不可逆

⑥ 

⑦ 

√ 数量矩阵只与自己相似.

√ 对称矩阵的性质：

① 特征值全是实数,特征向量是实向量；

② 与对角矩阵合同；

③ 不同特征值的特征向量必定正交；

④ 重特征值必定有个线性无关的特征向量；

⑤ 必可用正交矩阵相似对角化（一定有个线性无关的特征向量,可能有重的特征值,重数=）.

可以相似对角化 与对角阵相似. 记为： （称是的相似标准型）

√ 若为可对角化矩阵,则其非零特征值的个数（重数重复计算）.

√ 设为对应于的线性无关的特征向量,则有：

.

√ 若, ,则：.

√ 若,则,.

二次型  为对称矩阵 

与合同 . 记作： （）

√ 两个矩阵合同的充分必要条件是：它们有相同的正负惯性指数.

√ 两个矩阵合同的充分条件是：

√ 两个矩阵合同的必要条件是：

√ 经过化为标准型.

√ 二次型的标准型不是惟一的,与所作的正交变换有关,但系数不为零的个数是由 惟一确定的.

√ 当标准型中的系数为1，-1或0时,则为规范形 .

√ 实对称矩阵的正（负）惯性指数等于它的正（负）特征值的个数.

√ 任一实对称矩阵与惟一对角阵合同.

√ 用正交变换法化二次型为标准形:

1. 求出的特征值、特征向量；
2. 对个特征向量单位化、正交化；
3. 构造（正交矩阵）,；
4. 作变换,新的二次型为,的主对角上的元素即为的特征值.

正定二次型 不全为零，.

正定矩阵 正定二次型对应的矩阵.

√ 合同变换不改变二次型的正定性.

√ 成为正定矩阵的充要条件（之一成立）：

1. 正惯性指数为；
2. 的特征值全大于；
3. 的所有顺序主子式全大于；
4. 合同于，即存在可逆矩阵使；
5. 存在可逆矩阵，使 （从而）；
6. 存在正交矩阵，使 （大于）.

√ 成为正定矩阵的必要条件： ； .