

# 第六周理论力学作业

车晗昕

3 月 24 日

## 1 题 2.13

**2.13** 长为  $l$  的均匀细链条伸直地平放在水平光滑桌面上,其方向与桌边缘垂直,此时链条的一半从桌边下垂.起始时,整个链条是静止的.试用两种不同的方法,求此链条的末端滑到桌子的边缘时,链条的速度  $v$ .

### 1.1

系统机械能守恒,可列出方程:

$$-\frac{1}{4}l \cdot \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}l \cdot mg;$$

可以解得:

$$v = \frac{\sqrt{3gl}}{2};$$

### 1.2

列出质点的运动方程:

$$m \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{x}{l}mg;$$

积分:

$$\int_0^v dV^2 = \int_{l/2}^l dx^2;$$

可以得到:

$$v = \frac{\sqrt{3gl}}{2};$$

## 2 题 2.14

**2.14** 一条柔软、无弹性、质量均匀的绳索, 竖直地自高处下落至地板上. 如绳索的长度等于  $l$ , 每单位长度的质量等于  $\sigma$ . 求当绳索剩在空中的长度等于  $x$  ( $x < l$ ) 时, 绳索的速度及它

习 题

115

对地板的压力. 设开始时, 绳索的速度为零, 它的下端离地板的高度为  $h$ .

柔软绳索自由下落, 可以认为系统内部无内力:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(l + h - x);$$

解得:

$$v = \sqrt{2g(l + h - x)};$$

不妨考虑很短的一段时间, 计算绳子给地面的冲量, 并忽略二阶小量。

第一部分为已经在地面的绳子给的冲量:

$$dI_1 = \sigma(l - x)gdt;$$

第二部分为在这段时间内落到地面的绳子给的冲量:

$$dI_2 = \sigma v^2 dt;$$

解得:

$$F = \frac{dI_1 + dI_2}{dt} = \sigma(2h + 3l - 3x)g;$$

### 3 题 2.18

**2.18** 原始总质量为  $m_0$  的火箭,发射时单位时间内消耗的燃料与  $m_0$  成正比,即  $\alpha m_0$  ( $\alpha$  为比例常数),并以相对速度  $v$  喷射. 已知火箭本身的质量为  $m$ ,求证只有当  $\alpha v > g$  时,火箭才能上升;并证明能达到的最大速度为

$$v \ln \frac{m_0}{m} - \frac{g}{\alpha} \left( 1 - \frac{m}{m_0} \right)$$

能达到的最大高度为

$$\frac{v^2}{2g} \left( \ln \frac{m_0}{m} \right)^2 + \frac{v}{\alpha} \left( 1 - \frac{m}{m_0} - \ln \frac{m_0}{m} \right)$$

当推力大于重力时火箭才能上升,且重力最大为开始时。不妨计算瞬时冲量:

$$\alpha m_0 dt > M_0 g dt;$$

可得:

$$\alpha m_0 > g;$$

列出变质量质点得运动方程:

$$(m_0 - \alpha m_0 t) \frac{du}{dt} = -(m_0 - \alpha m_0 t) + \alpha m_0 v;$$

化简并积分:

$$\int_0^u du = \int_0^{\frac{m_0 - m}{\alpha m_0}} \left( -g + \frac{\alpha m_0 v}{m_0 - \alpha m_0 t} \right) dt;$$

可得:

$$u = v \ln \frac{m_0}{m} - \frac{g}{\alpha} \left( 1 - \frac{m}{m_0} \right);$$

再次对时间积分可得最大高度:

$$H_{max} = \frac{v^2}{2g} \left( \ln \frac{m_0}{m} \right)^2 + \frac{v}{\alpha} \left( 1 - \frac{m}{m_0} - \ln \frac{m_0}{m} \right);$$