APPENDICE MATEMATICA
Elementi di matematica finanziaria

1. Il regime dell'interesse semplice

L'interesse è il frutto reso dall'investimento del capitale. Nel corso dell'esposizione si farà riferimento a due regimi o tipologie di calcolo dell'interesse:

- il regime dell'interesse semplice;
- il regime dell'interesse composto.

Il primo si ha quando l'interesse è proporzionale al capitale e al tempo:

$$I = Kit$$

con

K = capitale investito; i = tasso d'interesse annuo; t = durata investimento

Quindi, si ha:

$$M = K + I = K + Kit = K(1 + it)$$

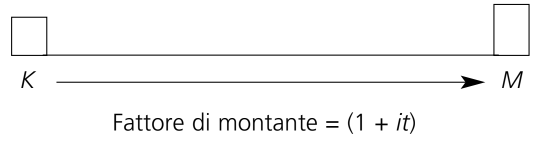

Figura 1

Il termine $(1 + it)$ è il fattore di montante e M il montante.

$$\text{montante} = \text{capitale investito} \times \text{fattore di montante}$$

Esempio

Dati: $K = 100$; $t = 1$ anno; $i\% = 10\%$ annuo; fattore di montante $= (1 + 0{,}10) = 1{,}10$;
montante $= 100[1 + 0{,}10(1)] = 110$

Il regime dell'interesse semplice è in genere utilizzato per operazioni finanziarie di breve durata (non oltre l'anno o i 18 mesi). Le ipotesi sottostanti il regime sono due:

- il frutto è corrisposto una sola volta alla scadenza dell'operazione finanziaria;
- l'interesse che matura prima della scadenza non capitalizza (non diventa capitale), e poiché dà frutto solo il capitale, l'interesse è sterile e non genera altro interesse.

Il regime non è favorevole al creditore che, durante la vita del prestito, non incassa e non capitalizza l'interesse. E infatti:

- il mancato incasso rende impossibile il consumo o il reinvestimento dell'interesse;
- la mancata capitalizzazione non compensa il creditore dell'indisponibilità materiale dell'interesse maturato.

Per le ragioni illustrate, il regime dell'interesse semplice è applicato a operazioni di breve termine. Se l'unità di tempo è inferiore all'anno (mesi o giorni), il tasso annuale è moltiplicato per il rapporto tra l'unità di misura temporale e l'anno espresso in mesi o giorni. Per effetto della variazione, l'equazione del montante diviene:

$$M = K\left[1 + i\left(\frac{m}{12}\right)\right] \quad \text{con} \quad m = \text{numero mesi}$$

$$M = K\left[1 + i\left(\frac{g}{360}\right)\right] \quad \text{con} \quad g = \text{numero giorni}$$

Esempio

Dati: $K = 100$; durata = 3 mesi; $t = 3/12$; $i\% = 10\%$ annuo

$$\text{fattore di montante } = \left[1 + 0{,}10\left(\frac{3}{12}\right)\right] = 1{,}025$$

$$\text{montante } = 100\left[1 + 0{,}10\left(\frac{3}{12}\right)\right] = 102{,}5$$

Dati: $K = 100$; durata = 90 giorni; $t = 90/360$; $i\ \% = 10\%$ annuo

$$\text{fattore di montante } = \left[1 + 0{,}10\left(\frac{90}{360}\right)\right] = 1{,}025$$

$$\text{montante } = 100\left[1 + 0{,}10\left(\frac{90}{360}\right)\right] = 102{,}5$$

2. Il regime dell'interesse semplice. Formule per la risoluzione di problemi inversi

Ci si è soffermati a illustrare il caso in cui, noti il capitale (K), il tempo (t) e il tasso (i) dell'operazione finanziaria, si doveva determinare l'incognita, l'importo del montante (M).

Nella pratica, i parametri noti e l'incognita possono essere diversi. Nel seguito si studiano alcuni casi.

2.1 Se l'incognita è il capitale da investire *K*

Noti il montante M, il tasso i e la scadenza n, è possibile ottenere il valore di K o capitale da investire. K è il valore attuale o valore alla data $t = 0$ del capitale a scadenza M.

$$M = K(1 + it)$$

da cui:

$$K = \frac{M}{(1+it)}$$

Come si può notare l'incognita K è il valore del montante riportato alla data iniziale dell'operazione finanziaria. K è il valore, alla data corrente ($t = 0$), di M disponibile alla data $t = 1$. In sintesi, K è il valore attuale di M e $\frac{1}{(1+it)}$ è il fattore di sconto o di attualizzazione.

$$\frac{1}{(1+it)} = \text{ fattori di sconto o di attualizzazione}$$

Più in generale si può definire il valore attuale come segue:

> Il valore attuale *K* è il prodotto del capitale *M* disponibile al tempo *t* per il fattore di sconto 1 / (1 + *it*).

In termini semplici, si tratta di "riportare indietro", dal tempo $t > 0$ al tempo $t = 0$, il capitale M scontandolo al tasso i. Ovviamente il valore attuale K è minore di M.

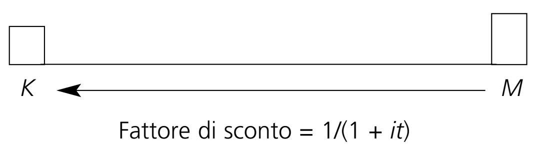

Figura 2

Esempio

Dati: $M = 108$; $i\% = 10\%$; $t = 1$ anno; fattore di sconto = $\dfrac{1}{[1+0{,}10(1)]}$;
K = valore attuale di M = ?

Il capitale da investire, al tasso del 10%, per avere dopo un anno un montante di 108 € è 98,18 €. In modo analogo, si può affermare che il valore attuale ($t = 0$) di 108 € disponibili tra un anno, al tasso dell'10%, è 98,18 €.

$$98{,}18 = \frac{108}{(1+0{,}10)}$$

E infatti si ha:

$$108 = 98{,}18(1 + 0{,}10)$$

Esempio

Dati: $M = 106$; $i\% = 8\%$; $t = 6$ mesi; $K = ?$

Il capitale necessario, per avere dopo 6 mesi un montante di 106 usufruendo del tasso dell'8%, è 101,92:

$$101{,}92 = \frac{106}{\left[1+0{,}08\left(\frac{6}{12}\right)\right]}$$

E infatti si ha:

$$106 = 101{,}92\left[1+0{,}08\left(\frac{6}{12}\right)\right]$$

2.2 Se l'incognita è il tempo di durata dell'investimento *t*

Noti il montante M, il capitale da investire K e il tasso d'interesse i, è possibile calcolare il tempo di durata t dell'operazione finanziaria:

$$M = K(1 + it)$$

$$(M - K) = Kit$$

posto I = interesse = $(M - K)$, si ottiene

$$I = \text{Kit}$$

$$t = \frac{I}{(Ki)}$$

Esempio

Dati: $M = 110$; $K = 95$; $I = 15$; $i = 12\%$; $t = ?$

$$1{,}32 = \left[\frac{15}{95(0{,}12)}\right]$$

Se si investe il capitale di 95 al tasso del 12% e si desidera ottenere un montante di 105, l'operazione finanziaria deve durare 1 anno, 3 mesi e 25 giorni:

$$t = 1{,}32$$

$$0{,}32 \times 360 = 115{,}20 \text{ cioè 3 mesi e 25 giorni}$$

2.3 Se l'incognita è il tasso d'interesse

Noti il montante M, il capitale iniziale K, il tempo di durata t dell'investimento, il tasso d'interesse i è stimato con la seguente formula:

$$M = K(1 + it)$$

$$(M - K) = Kit$$

posto I = interesse = $(M - K)$, si ottiene

$$I = Kit$$

$$i = \frac{I}{(Kt)}$$

Esempio

Dati: $M = 110$; $K = 95$; $I = 15$; $t = 1$ anno, 3 mesi e 25 giorni; $i = ?$

Si vuole conoscere il tasso annuo che consente, a un investimento iniziale di 95, di avere un montante di 110 dopo 1 anno, tre mesi e 25 giorni.

$$0{,}12 = \left[\frac{15}{(95)(1{,}32)}\right]$$

3. Regime dell'interesse composto

Il regime dell'interesse composto si caratterizza per la capitalizzazione periodica degli interessi che genera ulteriori interessi. La differenza rispetto al regime dell'interesse semplice che non consente capitalizzazione è dunque chiara.

Si investe per due anni il capitale di 100 €, al tasso annuo dell'8%; gli interessi sono corrisposti e reinvestiti alla fine di ciascun anno. Dopo un anno il montante è 108 €:

$$M(1) = K(1 + i)$$

$$108 = 100(1 + 0{,}08)$$

Il montante è reinvestito, per un anno, al tasso dell'8%:

$$M(2) = M(1)(1 + i) = K(1 + i)(1 + i) = K(1 + i)^2$$

$$116{,}64 = 108(1 + 0{,}08) = 100(1 + 0{,}08)(1 + 0{,}08) = 100(1 + 0{,}08)^2$$

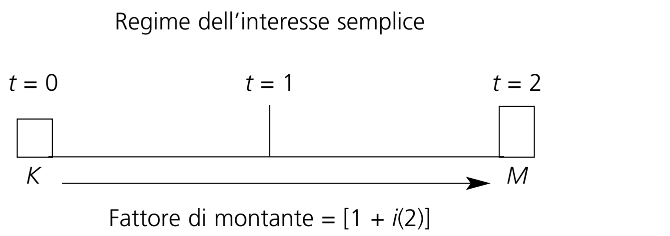

Figura 3

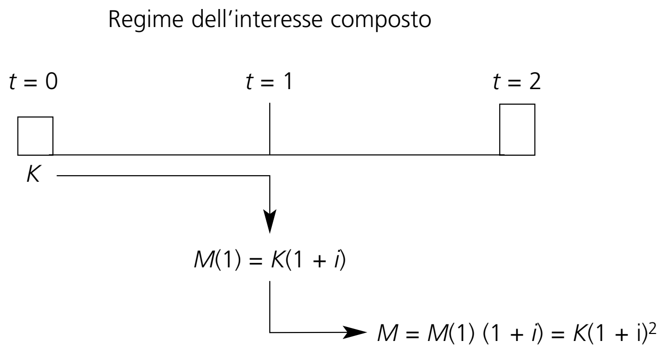

Figura 4

La tabella riassume, alle varie date, il processo di formazione del montante con capitalizzazione composta.

Date	$t = 0$	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$
Investimento	–100		
$M(1)$		108	
Reinvestimento		–108	
$M(2)$			116,64
Totale	–100		116,64

Il montante finale può essere scomposto in capitale, interesse e interesse su interesse. Se si sviluppa il quadrato dell'equazione del montante si ottiene il risultato cercato:

$$M = K(1 + i)^2$$

$$M = K(1 + 2i + i^2)$$

$$M = K + 2Ki + Ki^2$$

$$116{,}64 = 100 + 2(100)(0{,}08) + 100(0{,}08)^2$$

$$116{,}64 = 100 + 16 + 0{,}64$$

$$\text{montante} = \text{capitale} + \text{interesse} + \text{interesse su interesse}$$

Se la **capitalizzazione è annuale** e il numero degli anni è intero, l'equazione del montante è data da:

$$M = K(1 + i)^n$$

mesi rapportato a 12
mesi : 4/12 = 03,3

con
n = numero anni interi

Se il numero di anni non è intero, per esempio 2,40 (due anni, 4 mesi e 24 giorni)[1], l'equazione diventa:

$$M = K(1 + i)^n(1 + i)^f = K(1 + i)^{n+f}$$

Giorni rapportato ad un mese :24/30 = 0,8 (80% di 30gg), poi 80% rapportato a 12 mesi: 08/12 = 0,066666667

con f = frazione di anno

$$120{,}29 = 100(1 + 0{,}08)^{2{,}40}$$

La somma finale è definita **montante con formula esponenziale**.

Si può utilizzare l'equazione del **montante con formula lineare**, anche se di preferenza si fa ricorso alla formula precedente:

$$M = K(1 + i)^n(1 + if)$$

$$120{,}37 = 100(1 + 0{,}08)^2[1 + 0{,}08(0{,}40)]$$

totale= 2+ 0,066666667 + 0,33 -> 2,40

Si noti che:

$$K(1 + i)^{n+f} < K(1 + i)^n(1 + \text{if})$$

$$120{,}29 < 120{,}37$$

Se il periodo di capitalizzazione è inferiore all'anno (**capitalizzazione frazionata**) e il tasso è annuo, si converte il tasso annuo (i) in periodale ($1/m$) e si moltiplica la durata per m o numero di capitalizzazioni all'anno. Si dice che il tasso i è convertibile m volte l'anno.

$$M = K\left[1 + \left(\frac{i}{m}\right)\right]^{mn}$$

$i\% = 8\%$; $m = 2$ = frequenza semestrale; $n = 3$

$$126{,}53 = 100\left[1 + \left(\frac{0{,}08}{2}\right)\right]^{2\times 3}$$

Se $m = 4$ = frequenza trimestrale

[1] 2,40 anni diventa 2 anni, 4 mesi e 24 giorni nel modo che segue:

$$2{,}40 \text{ cioè } 2 \text{ anni}$$

$$0{,}40 \times 12 = 4{,}80 \text{ cioè } 4 \text{ mesi}$$

$$0{,}80 \times 30 = 24 \text{ giorni}$$

si ha:

$$126,82 = 100\left[1+\left(\frac{0,08}{4}\right)\right]^{4\times 3}$$

Il tasso annuo convertibile è un tasso nominale e non effettivo. Il tasso effettivo annuo ($i_{\text{effettivo}}$) che si ha con la capitalizzazione frazionata è maggiore.

Si consideri il seguente esempio in cui si confrontano i montanti e i relativi tassi di due investimenti con differente frazionamento.

Esempio

1° caso: m = 1 o capitalizzazione annuale

$$125,97 = 100(1 + 0,08)^3$$

$$i_{\text{effettivo}}\% = \left[\left(\sqrt[3]{\frac{125,97}{100}}\right)-1\right]100 = 8\%$$

$$i = i_{\text{effettivo}}$$

2° caso: m = 2 o capitalizzazione frazionata

$$126,53 = 100\left[1+\left(\frac{0,08}{2}\right)\right]^{2*3}$$

$$i_{\text{effettivo}}\% = \left[\left(\sqrt[3]{\frac{126,53}{100}}\right)-1\right]100 = 8,16\%$$

$$i < i_{\text{effettivo}}$$

In generale, il tasso effettivo è dato dall'equazione che segue:

$$i_{\text{effettivo}}\% = \left(\sqrt[t]{\frac{M}{K}}\right)-1$$

Se si conosce il tasso nominale e la frequenza m, il tasso effettivo è ottenuto dall'uguaglianza:

$$\left(1+i_{\text{effettivo}}\right)^t = \left[1+\left(\frac{i}{m}\right)\right]^{mt}$$

$$i_{\text{effettivo}} = \left[1+\left(\frac{i}{m}\right)\right]^t -1$$

$$\left(1+i_{\text{effettivo}}\right)^3 = \left[1+\left(\frac{0,08}{2}\right)\right]^{2\times 3}$$

$$0,0816 = (1 + 0,04)^2 - 1$$

$$i_{\text{effettivo}}\% = 8,16\%$$

4. Il regime dell'interesse composto. Formule per la risoluzione di problemi inversi

Come per il regime dell'interesse semplice, si illustrano casi in cui l'incognita è diversa in funzione dei parametri noti.

4.1 Se l'incognita è il capitale da investire, *K*

Noti i valori del montante M, del tasso i e del tempo t, è possibile ottenere il valore di K o capitale da investire. K esprime il valore attuale, o valore al tempo $t = 0$, del capitale a scadenza M. Come nel caso del regime dell'interesse semplice, si deve "riportare" alla data corrente il valore di un capitale disponibile in una data futura $t > 0$. Si deve, quindi, attualizzare il capitale M utilizzando il fattore di sconto $(1 + i)^t$.

$$K = \frac{M}{(1+i)^t} = M(1+i)^{-t}$$

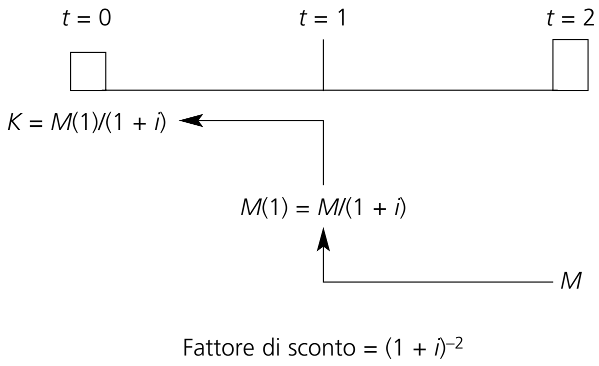

Figura 5

Un semplice esempio può essere d'aiuto. Il capitale disponibile tra due anni (M) è 108,64 €, il tasso di attualizzazione è l'8%, il valore attuale in regime di capitalizzazione composta (K) è 100 €.

Date	$t = 0$	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$
M			118,64
$M(1) =$		108=118,64/(1+0,08)	
K	100=108/(1+0,08)		

L'esempio che segue espone un caso in cui si ha un numero di anni non intero.

Esempio

Dati: $M = 130$; $t = 3$ anni e 5 mesi; i %= 8%; K = valore attuale di M = ?

$$99{,}94 = 130(1 + 0{,}08)^{-3{,}4167}$$

Il valore attuale di 130 €, tra 3 anni e cinque mesi, al tasso dell'8%, è 99,92 €. In modo equivalente si può dire che, per avere 130 €, tra 3 anni e 5 mesi, si deve investire in $t = 0$, al tasso dell'8%, un capitale di 99,94 €.

4.2 Se l'incognita è la durata *t* dell'investimento

Noti il montante M, il capitale da investire K e il tasso d'interesse i, è possibile calcolare il tempo di durata t dell'operazione finanziaria.

$$M = K(1 + i)^t$$

$$\left(\frac{M}{K}\right) = (1+i)^t$$

$$\ln\left(\frac{M}{K}\right) = t\ \ln(1+i)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{M}{K}\right)}{\ln(1+i)}$$

Esempio

Dati: $M = 130$; $K = 99{,}94$; $i = 8\%$; $t = ?$

$$3{,}4169 = \frac{\ln\left(\frac{130}{99{,}94}\right)}{\ln(1+0{,}08)}$$

Si noti che lo 0,4169 di anno corrisponde a 5 mesi:

$$0{,}4169 \times 12 = 5{,}00$$

In sintesi, se si investe il capitale di 99,94 € al tasso dell'8% e si vuole ottenere un montante di 130 €, l'operazione finanziaria deve durare 3 anni e 5 mesi circa.

4.3 Se l'incognita è il tasso d'interesse, *i*

Dati i valori del capitale K, del montante M e del tempo t, è possibile stimare il tasso i:[2]

$$i\% = \left[\left(\sqrt[t]{\frac{M}{K}}\right) - 1\right]100 = \left[\left(\frac{M}{K}\right)^{\frac{1}{t}} - 1\right]100$$

[2] La dimostrazione è la seguente:

$$M = K(1+i)^t \Rightarrow \frac{M}{K} = (1+i)^t \Rightarrow \left(\sqrt[t]{\frac{M}{K}}\right) = (1+i) \Rightarrow \left[\left(\sqrt[t]{\frac{M}{K}}\right) - 1\right] = i$$

Esempio

Dati: $M = 130$; $K = 99{,}92$; $t = 3$ anni e 5 mesi; $i = ?$

$$0{,}08 = \left[\sqrt[3,42]{\left(\frac{130}{99{,}92}\right)}\right] - 1 = \left(\frac{130}{99{,}92}\right)^{\frac{1}{3,42}} - 1$$

Si osservi che il tasso i = 8% è un tasso composto con capitalizzazione annua. Si può essere interessati a conoscere il tasso semplice che produce lo stesso montante del composto e viceversa:

$$[1 + i_{\text{semplice}}(t)] = (1 + i_{\text{composto}})^t$$

da cui si ottiene

$$i_{\text{semplice}} = \frac{\left[(1 + i_{\text{composto}})^t - 1\right]}{t}$$

oppure

$$i_{\text{composto}} = \frac{\left[1 + i_{\text{semplice}}(t)\right]^{\frac{1}{t}}}{t} - 1$$

$$8{,}32\% = \frac{\left[(1 + 0{,}08)^2 - 1\right]}{2}$$

$$8\% = \left[1 + 0{,}0832(2)\right]^{0,5} - 1$$

Si noti che a parità di montante il tasso semplice è maggiore del composto.

5. La capitalizzazione continua

Con riferimento alla capitalizzazione frazionata, si può considerare il caso in cui la frequenza m tenda all'infinito: la capitalizzazione degli interessi avviene istante per istante o in modo continuo.

$$M = \lim_{m \to \infty} K\left[1 + \left(\frac{i}{m}\right)\right]^{mt} = K \lim_{m \to \infty}\left[1 + \left(\frac{i}{m}\right)\right]^{mt}$$

da cui si ottiene[3]: $M = Ke^{it}$

Il fattore di montante nella capitalizzazione continua è dato dalla funzione esponenziale e^{it} con $e = 2{,}7183$.

Esempio

Dati: $K = 100$; $t = 3$ anni; $i = 6\%$

$$119{,}72 = 100e^{0,06(3)}$$

[3] L'espressione finale è ottenuta con la sostituzione di $x = m/i$.

$$M = K \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{mt} = K \lim_{x \to \infty}\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{it}$$

Poiché $e = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ si ha, infine, $M = Ke^{it}$.

6. La capitalizzazione continua. Formule per la risoluzione di problemi inversi

6.1 Se l'incognita è il capitale da investire *K* o valore attuale di *M*

Se il montante M è noto, come la scadenza (t) e il tasso (i), e si desidera conoscere il capitale K da investire o valore attuale di M, l'equazione da utilizzare è derivata nel modo che segue. Si consideri l'equazione del montante:

$$M = Ke^{it} \qquad [1]$$

Dalla [1] si ottiene facilmente il valore incognito di K:

$$K = Me^{-it}$$

Esempio

Dati: $M = 139{,}84$; $t = 4$ anni; $i = 6\%$; $K =$ valore attuale di $M = ?$

$$110 = 139{,}84e^{-(0{,}06)(4)}$$

E infatti:

$$M = Ke^{it}$$

$$139{,}84 = 110e^{(0{,}06)(4)}$$

In sintesi, 110 € è il capitale che si deve investire in $t = 0$, al 6%, per avere dopo 4 anni il montante di 139,84. In modo analogo si può dire che 110 € è il valore attuale di 139,84 €, investiti per 4 anni al 6%.

6.2 Se l'incognita è il tasso d'interesse *i*

Sono noti il capitale iniziale K, il montante M e il tempo t di durata dell'investimento, l'incognita è il tasso i. Il valore del saggio d'interesse è ricavato risolvendo l'equazione del montante:

$$M = Ke^{it}$$

$$\left(\frac{M}{K}\right) = e^{it}$$

$$i = \frac{\left[\ln\left(\frac{M}{K}\right)\right]}{t}$$

Esempio

Dati: $M = 131{,}47$; $t = 3{,}42$ o 3 anni e 5 mesi; $K = 100$; $i = ?$

$$0{,}08 = \left[\frac{\ln\left(\frac{131{,}47}{100}\right)}{3{,}42}\right]$$

Se si investe, per 3 anni e 5 mesi, un capitale di 100 € al tasso dell'8%, alla scadenza si ha un montante di 131,47 €.

7. Montante e valore attuale di rendite annue, immediate, posticipate, a rata costante

Illustrati i regimi dell'interesse, si ritiene utile fornire alcuni elementi per la valutazione delle rendite. Perché affrontare il tema delle rendite? Un motivo è che il prezzo di un titolo con cedola fissa può essere ottenuto con il montante o il valore attuale di una rendita temporanea, posticipata, con rata costante annua o frazionata.

Si definisce rendita un insieme di prestazioni con scadenze diverse. È una rendita posticipata[4], a rate costanti, frazionata, il flusso di cedole di un BTP. L'investimento in un titolo può essere espresso dalla somma di una rendita più il capitale rimborsato a scadenza. Della rendita e del capitale si possono considerare sia il montante che il valore attuale.

Il montante di una rendita annua a rate costanti C, immediata posticipata è dato da $S_{n,i}$:[5]

$$S_{n,i} = C\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

L'equazione assume il reinvestimento delle cedole, al tasso i, sino alla scadenza n del titolo.

$$S_{n,i} = C(1 + i)^{n-1} + C(1 + i)^{n-2} + ... + C(1 + i) + C$$

Se si inverte la somma si ha:

$$S_{n,i} = C + C(1 + i) + ... + C(1 + i)^{n-2} + C(1 + i)^{n-1}$$

L'equazione è una progressione geometrica di primo termine C e di ragione $(1 + i)$:[6]

$$S_{n,i} = C\left[\frac{\left((1+i)^n - 1\right)}{\left((1+i) - 1\right)}\right] = C\left[\frac{\left((1+i)^n - 1\right)}{i}\right]$$

Nel caso di un titolo obbligazionario, il tasso i può essere il tasso di rendimento:

$$i_{\text{rendita}} = i_{\text{rendimento}}$$

Esempio

Dati: $n = 6$ anni; $C = 5$; $i\% = 5{,}5\%$

$$S_{6;0,055} = (1 + 0{,}055)^5 + 5(1 + 0{,}055)^4 + ... + 5(1 + 0{,}55)^1 + 5$$

$$34{,}44 = 5\left\{\frac{\left[(1+0{,}055)^6 - 1\right]}{0{,}055}\right\}$$

---

[4] Si definisce rendita immediata posticipata la rendita in cui le prestazioni iniziano a maturare con effetto immediato e la cui prima rata scade fra un periodo (dopo un anno o una frazione di anno).

[5] Il montante si indica con $S_{n,i}$ e si legge: S posticipato, figurato n al tasso i.

[6] La progressione geometrica di n anni, con primo termine k ragione q è espressa da:

$$k\left[\frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}\right]$$

Se il valore di rimborso (*VR*) del titolo è 100 €, il montante totale è 134,44 €:

$$M = S_{n,i} + VR = C\left\{\frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}\right\} + K$$

$$134{,}44 = 34{,}44 + 100$$

L'investimento nel titolo, inclusa la capitalizzazione delle cedole al tasso *i* e il rimborso finale, genera un montante o incasso totale di 134,44 €.

L'equazione del prezzo di un titolo con cedola fissa annua può essere espressa dalla somma del montante di una rendita immediata posticipata a rata costante e del capitale rimborsato a scadenza.

Se invece del montante si desidera stimare il valore attuale o prezzo del titolo, nell'ipotesi che il tasso *i* sia il tasso di rendimento, si deve calcolare il valore attuale della rendita costituita dalle cedole e sommare il valore attuale del valore di rimborso. Nell'ipotesi che le cedole siano annuali la rendita è annua a rate costanti, di *n* anni, immediata e posticipata, $A_{n,i}$[7].

$$A_{n,i} = C(1 + i)^{-1} + C(1 + i)^{-2} + ... + C(1 + i)^{-(n-1)} + C(1 + i)^{-n}$$

L'equazione è una progressione geometrica di primo termine $C(1 + i)^{-1}$ e di ragione $(1 + i)^{-1}$.

$$A_{n,i} = C\left\{\frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{\left[1-(1+i)^{-1}\right]}\right\} = C\left\{\frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}\right\}$$

Esempio

Dati: $n = 6$ anni; $C = 5$; $i\% = 5{,}5\%$

$$A_{6;0,055} = 5(1 + 0{,}055)^{-1} + 5(1 + 0{,}055)^{-2} + ... + 5(1 + 0{,}055)^{-5} + 5(1 + 0{,}055)^{-6}$$

$$24{,}98 = 5\left\{\frac{\left[1-(1+0{,}055)^{-6}\right]}{0{,}055}\right\}$$

Se il tasso *i* corrisponde al tasso di rendimento del titolo, il valore attuale della rendita e del capitale a scadenza è il prezzo. Se il titolo rimborsa 100 € e il tasso di rendimento è il 5,5%, il valore attuale dell'investimento o prezzo è 97,50 €.

$$VA = A_{n,i} + 100(1+i)^{-n} = C\left\{\frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}\right\} + 100(1+i)^{-n}$$

$$97{,}50 = 24{,}98 + 100(1 + 0{,}055)^{-6} = 24{,}98 + 72{,}52$$

---

[7] Il valore attuale di una rendita di *n* anni al tasso *i*, rata costante annuale, immediata e posticipata è dato da $A_{n,i}$ e si legge: *A* posticipato, figurato *n* al tasso *i*.

L'equazione del prezzo di un titolo con cedola fissa annua può essere espressa dalla somma del valore attuale di una rendita immediata posticipata a rata costante e del valore attuale del capitale a scadenza.

8. Montante e valore attuale di rendite frazionate, immediate, posticipate, a rata costante

Se il titolo ha cedola semestrale o trimestrale (la rendita è frazionata), il calcolo del montante e del valore attuale del flusso periodale richiede la determinazione del tasso equivalente i_m:[8]

$$i_m = (1+i)^{1/m} - 1$$

Noto i_m, lo si inserisce nella formula di $S_{n,i(m)}$ o di $A_{n,i(m)}$.

Esempio

Dati: $n = 6$ anni; $C = 5$; $m = 2$; $i\% = 5{,}5\%$

$$i_m = (1 + 0{,}055)^{0{,}5} - 1 = 0{,}0271$$

$$S_{n,i(m)} = 2{,}5\left\{\frac{\left[(1+0{,}0271)^{12} - 1\right]}{0{,}0271}\right\} = 34{,}99$$

$$A_{n,i(m)} = 2{,}5\left\{\frac{\left[1-(1+0{,}0271)^{-12}\right]}{0{,}0271}\right\} = 25{,}32$$

In pratica, conviene calcolare il montante o il valore attuale della rendita annua posticipata (a parità di durata e di tasso) e moltiplicare il valore di $S_{n,i}$ o $A_{n,i}$ per il fattore $[i / i_m(m)]$.

$$S_{n,i(m)} = S_{n,i}\left[\frac{i}{i_m(m)}\right]$$

$$A_{n,i(m)} = A_{n,i}\left[\frac{i}{i_m(m)}\right]$$

Si noti che $i_m(m)$ corrisponde a:

$$i_m(m) = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]$$

[8] Posto che i sia il tasso annuo composto con capitalizzazione annua e i_m il tasso periodale (non annuo) composto con capitalizzazione frazionata, si ha la condizione di equivalenza fra due leggi d'interesse composto con diverso periodo di capitalizzazione:

$$(1 + i)^t = (1 + i_m)^{mt}$$

Dall'equazione si ricava:

$$i_m = (1 + i)^{1/m} - 1 \text{ oppure } i = (1 + i_m)^m - 1$$

Esempio

Dati: n = 6 anni; C = 5; m = 2; $i\%$ = 5,5%; $i_2(2) = 2[(1 + 0{,}055)^{1/2} - 1] = 0{,}0543$; VR = 100

$$S_{6;0,0271} = S_{6;0,055}\left\{\left[\frac{0{,}055}{(0{,}0543)}\right]\right\} = 34{,}44(1{,}0129) = 34{,}88$$

$$A_{6;0,0271} = A_{6;0,055}\left\{\left[\frac{0{,}055}{(0{,}0543)}\right]\right\} = 24{,}98(1{,}0129) = 25{,}30$$

Nell'ipotesi che il 5,5% sia il TIR del titolo, il montante dell'investimento e il valore attuale o prezzo del titolo sono:

$$M = S_{n,i}\left[\frac{i}{i_m(m)}\right] + VR = C\left\{\frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}\right\}\left[\frac{i}{i_m(m)}\right] + VR$$

$$134{,}88 = 34{,}88 + 100$$

$$VA = A_{n,i}\left[\frac{i}{i_m(m)}\right] + VR(1+i)^{-n} = C\left\{\frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}\right\}\left[\frac{i}{i_m(m)}\right] + VR(1+i)^{-n}$$

$$97{,}82 = 25{,}30 + 100(1+0{,}055)^{-6} = 25{,}30 + 72{,}52$$