

SCHAUM'S
ouTlines

全美经典 学习指导系列

机械振动

[美] S. M. 凯利 著

贾启芬 刘习军 译

包括振动测量方法

有限元分析和本征值测定

学会使用计算机软件解决振动问题

完全解答313题

可作为教科书或供自学使用



科学出版社



麦格劳-希尔教育出版集团

(0-1422-0101)

责任编辑: 李义发

全球销量
超越 3000 万 的

SCHAUM'S
ouTlines

“全美经典学习指导系列” 是您的最佳 学习伴侣!



40年来最畅销的教辅系列

全美著名高校资深教授倾力之作

国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译
省时高效的学习辅导, 全面详细的习题解答

迄今为止国内最全面的教辅系列

覆盖大学理工科专业

全美经典学习指导系列

概率和统计	2000 工程力学学习题精解	电气工程基础
统计学	工程力学	工程电磁场基础
离散数学	3000 物理问题精解	数字信号处理
Mathematica 软件指南	流体力学	数字系统导论
数理金融引论	物理学基础	数学原理
机械振动	材料力学	电机与机电学
微分方程	2000 离散数学学习题精解	基本电路分析
统计学原理 (上)	工程热力学	信号与系统
统计学原理 (下)	数值分析	微生物学
微积分	量子力学	生物化学
热力学与材料力学	有机化学习题精解	生物学
有限元分析	2000 化学习题精解	分子和细胞生物学
线性代数	大学化学习题精解	人体解剖与生理学
近代物理学	电路	

<http://www.schina.com.cn>

<http://www.mhhe.com>

ISBN 7-03-009577-4



9 787030 095770 >

Mc
Graw
Hill

ISBN 7-03-009577-4/O · 1422

定价: 28.00 元

全美经典学习指导系列

机 械 振 动

[美] S. M. 凯利 著

贾启芬 刘习军 译

科 学 出 版 社

麦格劳-希尔教育出版集团

2 0 0 2

内 容 简 介

本书是一部很好的关于机械振动理论及习题的教辅书,全书共 11 章,主要论述机械系统分析、单自由度系统的自由振动和谐波激励、单自由度系统对任意激励的响应、多自由度系统的自由振动和受迫振动、连续系统的振动、振动控制、有限元法、非线性系统、计算机应用等,书末还有参考文献和附录。

本书可作为大专院校有关振动专业的教辅书,也可供有关专业的科研人员及工程技术人员参考。

S. Graham Kelly: Mechanical Vibrations

ISBN: 0-07-034041-2

Copyright © 1996 by the McGraw-Hill Companies, Inc.

Authorized translation from the English language edition published by McGraw-Hill, Inc.

All rights reserved. For sale in the People's Republic of China only.

本书中文简体字版由科学出版社和美国麦格劳-希尔国际公司合作出版。未经出版者书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

版权所有,翻印必究。

图书在版编目(CIP)数据

机械振动/[美]凯利(Kelly, S. G.)著;贾启芬等译. - 北京:科学出版社, 2002.

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009577-4

I. 机… II. ①凯… ②贾… III. 机械振动 IV. TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 041398 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码 100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

+

2002 年 1 月第 1 版 开本: A4(890 × 1240)

2002 年 1 月第一次印刷 印张: 16 1/2

印数: 1—4 000 字数: 466 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换 新欣)

前 言

研究机械振动的科技工作者必须掌握工程学领域的许多知识(静力学、动力学、材料力学、流体力学等),同时也要掌握数学方面的知识(微积分、微分方程和线性代数等),并综合运用这些知识来分析机械振动问题并形成解决该问题的方法。

在分析许多机械系统的振动之前,要求建立它们的模型,并且在包含必须的自由度个数在内的假设之后,运用基本的守恒定律来导出微分方程,应用恰当的数学方法来求解这些微分方程。通常,由模型建立的微分方程,它的解很为人熟悉,在这种情况下就可以运用现存的解。如果情况是这样的话,必须研究它的解法,并将其写成一种可以应用于分析和设计的形式。

学习机械振动的学生必须知道如何运用现有的知识来解决上述问题。本书的目的就是为学习机械振动的学生掌握有关知识提供补充,这种补充将会引导学生进行各方面的振动分析,每章都有一个关于本章理论的简短介绍,后面是大量的例题和习题,这些习题主要反映了该理论如何用在设计和分析应用中。在每章里还有一些习题,更加深入地验证了相应的理论。

本书涉及范围非常广,包括单自由度、多自由度和连续系统的自由振动和受迫振动,并考虑了无阻尼系统和黏性阻尼系统。把带有库仑阻尼和迟滞阻尼的系统考虑为单自由度系统,某些章节还有专门注释。第八章集中介绍振动控制设备的设计,例如隔振器、减振器。第九章从分析的角度介绍了有限元法,第九章习题就是取 n 个元素,应用有限元的方法来分析杆和梁的振动。第十章集中于非线性振动,主要讨论包括自激振动和混沌状态在内的非线性系统与线性系统的差异。第十一章介绍了如何把应用软件用于振动分析与设计。

本书可作为各种振动理论参考书的补充,也可以作为在振动理论发展方面的专门教辅书。总之,本书是研究振动问题解决方法的一个很好的参考资料。

本书作者衷心感谢 McGraw-Hill 的全体工作人员,尤其是约翰·埃里埃诺,感谢他为本书所作的贡献,并感谢他的妻子和儿子,在编书过程中给予的帮助和支持。

S. G. 凯利

配套的 Schaum 的电子指导性语言中的 习 题 和 例 题

在配套的 Schaum's Electronic Tutor 中,有本书中一些习题和例题部分的计算软件.写有电子指导性语言的 Mathcad 程序,允许每个数据、公式和图形的交互和完整的运算.在本书中印有“Mathcad”符号标记的地方,则那些习题均可以在 Electronic Tutor 软件中找到.下面列出了有 Mathcad 软件中的题目.对于更多的关于软件的信息及包含的屏幕采样实例见附录.

题 1.4	题 3.10	题 4.26	题 7.1	题 8.24
题 1.5	题 3.12	题 5.19	题 7.4	题 8.25
题 1.7	题 3.15	题 5.20	题 7.5	题 8.26
题 1.12	题 3.18	题 5.25	题 7.6	题 8.27
题 1.14	题 3.19	题 5.26	题 7.13	题 8.28
题 1.19	题 3.20	题 5.27	题 7.16	题 8.32
题 2.8	题 3.23	题 5.28	题 7.22	题 8.34
题 2.9	题 3.24	题 5.30	题 7.23	题 8.35
题 2.14	题 3.25	题 5.31	题 7.25	题 8.37
题 2.15	题 3.26	题 5.32	题 8.3	题 9.5
题 2.16	题 3.27	题 5.35	题 8.4	题 9.6
题 2.17	题 3.28	题 5.38	题 8.5	题 9.7
题 2.18	题 3.34	题 5.40	题 8.6	题 9.13
题 2.19	题 3.35	题 5.41	题 8.10	题 9.14
题 2.20	题 3.36	题 5.42	题 8.11	题 10.6
题 2.21	题 3.38	题 5.44	题 8.12	题 10.8
题 2.22	题 3.40	题 5.45	题 8.13	题 10.11
题 2.23	题 4.3	题 6.3	题 8.14	题 11.4
题 2.25	题 4.5	题 6.9	题 8.15	题 11.5
题 2.29	题 4.6	题 6.10	题 8.16	题 11.6
题 3.4	题 4.13	题 6.11	题 8.17	题 11.7
题 3.5	题 4.18	题 6.12	题 8.18	题 11.8
题 3.7	题 4.19	题 6.15	题 8.19	题 11.9
题 3.8	题 4.24	题 6.16		

目 录

前言	(i)
配套的 Schaum 的电子指导性语言中的习题和例题	(iii)
第一章 机械系统分析	(1)
§ 1.1 自由度和广义坐标	(1)
§ 1.2 机械系统组成	(1)
§ 1.3 等效系统分析	(1)
§ 1.4 扭转系统	(1)
§ 1.5 静平衡位置	(2)
第二章 单自由度系统的自由振动	(25)
§ 2.1 微分方程的推导	(25)
§ 2.2 微分方程的标准形式	(25)
§ 2.3 无阻尼响应	(26)
§ 2.4 阻尼响应	(26)
§ 2.5 满足库仑阻尼系统的自由振动响应	(28)
第三章 单自由度系统的谐波激励	(46)
§ 3.1 微分方程的推导	(46)
§ 3.2 谐波激励	(46)
§ 3.3 无阻尼系统的响应	(46)
§ 3.4 阻尼系统响应	(48)
§ 3.5 频率平方的激励	(49)
§ 3.6 谐波支撑激励	(50)
§ 3.7 多频激励	(51)
§ 3.8 一般循环激励, 傅里叶级数	(51)
§ 3.9 库仑阻尼	(52)
§ 3.10 迟滞阻尼	(52)
第四章 单自由度系统对任意激励的响应	(78)
§ 4.1 微分方程的一般形式	(78)
§ 4.2 卷积积分	(78)
§ 4.3 拉普拉斯变换解法	(78)
§ 4.4 单位脉冲函数和单位阶跃函数	(79)
§ 4.5 数值方法	(79)
§ 4.6 响应谱	(79)
第五章 多自由度系统的自由振动	(98)
§ 5.1 拉格朗日方程	(98)
§ 5.2 线性系统微分方程的矩阵公式	(98)
§ 5.3 刚度影响系数	(98)
§ 5.4 柔度矩阵	(99)
§ 5.5 标准模态解	(99)
§ 5.6 模态正交性	(99)
§ 5.7 矩阵迭代法	(99)

§ 5.8 阻尼系统·····	(100)
第六章 多自由度系统的受迫振动 ·····	(133)
§ 6.1 一般系统·····	(133)
§ 6.2 简谐激励·····	(133)
§ 6.3 拉普拉斯变换解·····	(133)
§ 6.4 比例阻尼系统的模态分析·····	(133)
§ 6.5 一般阻尼系统的模态分析法·····	(134)
第七章 连续系统的振动 ·····	(151)
§ 7.1 波动方程·····	(151)
§ 7.2 波动方程的解·····	(151)
§ 7.3 标准模态解·····	(151)
§ 7.4 梁的横向振动方程·····	(152)
§ 7.5 模态叠加法·····	(152)
§ 7.6 瑞利商·····	(153)
§ 7.7 瑞利-里兹法·····	(153)
第八章 振动控制 ·····	(174)
§ 8.1 隔振器·····	(174)
§ 8.2 简谐激励的隔振·····	(174)
§ 8.3 冲击隔振·····	(175)
§ 8.4 脉冲隔振·····	(175)
§ 8.5 减振器·····	(176)
§ 8.6 阻尼减振器·····	(176)
§ 8.7 Houdaille 阻尼减振器·····	(177)
§ 8.8 旋转·····	(178)
第九章 有限元法 ·····	(195)
§ 9.1 一般方法·····	(195)
§ 9.2 受迫振动·····	(195)
§ 9.3 杆元·····	(196)
§ 9.4 梁元·····	(196)
第十章 非线性系统 ·····	(211)
§ 10.1 与线性系统的差异·····	(211)
§ 10.2 定性分析·····	(211)
§ 10.3 达芬方程·····	(212)
§ 10.4 自激振动·····	(213)
第十一章 计算机应用 ·····	(222)
§ 11.1 振动专用应用软件·····	(222)
§ 11.2 电子表格程序·····	(222)
§ 11.3 电子记事本·····	(222)
§ 11.4 符号处理程序·····	(222)
参考文献 ·····	(245)
附录 配套的 Schaum 的电子指导性语言(Electronic Tutor)中的屏幕采样实例 ·····	(246)

第一章 机械系统分析

§ 1.1 自由度和广义坐标

在机械系统分析中所使用的自由度数目就是能完全描述系统的每个质点的运动所必需的独立运动坐标数目. 任何这样一套坐标都称为广义坐标. 广义坐标的选择是不惟一的. 位移、速度、加速度等条件可作为广义坐标对时间导数的函数. 有限个自由度数的系统称为离散系统, 而无限个自由度数的系统称为连续系统或参数分布系统.

§ 1.2 机械系统组成

一个机械系统包括惯性成分、刚度成分和阻尼成分. 当系统运动的时候, 惯性成分具有动能. 转动刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2, \quad (1.1)$$

其中 \bar{v} 为物体质心速度, ω 是关于绕垂直于运动平面的轴转动的角速度, m 是物体的质量, \bar{I} 是绕平行与通过质心转轴的转动惯量.

线性刚度成分(线性弹簧)具有如下形式的力-位移关系:

$$F = kx, \quad (1.2)$$

其中 F 是施加的力, x 是从原长状态起的伸长量. 刚度 k 具有的量纲为 N/m, 单位长度改变量的力.

阻尼器是对机械系统加黏性阻尼的力学装置. 线性阻尼成分具有如下力-速度关系:

$$F = cv, \quad (1.3)$$

其中 c 是阻尼系数, 具有的量纲为 N·s/m.

§ 1.3 等效系统分析

所有单自由度的黏性阻尼系统都可简化为如图 1.1 所示的质量-弹簧-阻尼系统. 令 x 为广义坐标, 线性系统的动能可写为

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}^2. \quad (1.4)$$

线性系统的势能可表示为

$$V = \frac{1}{2} k_{\text{eq}} x^2. \quad (1.5)$$

线性系统中任意两点 x_1 和 x_2 间由黏性阻力所作的功可表示为

$$W = - \int_{x_1}^{x_2} c_{\text{eq}} \dot{x} dx. \quad (1.6)$$

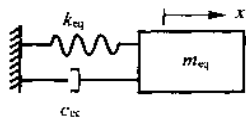


图 1.1

§ 1.4 扭转系统

当用角坐标系作为一个线性系统的广义坐标系时, 可用如图 1.2 所示的等效扭转系统来对该系统进行模式化. 线性扭转弹簧的扭矩正比于它的角位移, 而线性扭转黏性阻尼器的扭矩则与其角速度成正比. 在所选择的广义坐标系下, 通过计算总的动能、势能和黏性阻力对初始系统所作的功来确定扭转系统的等效系统参数, 该动能、势能和黏性阻力对初始系统所作的功可表示为

$$T = \frac{1}{2} I_{eq} \dot{\theta}^2, \quad (1.7)$$

$$V = \frac{1}{2} k_{teq} \theta^2, \quad (1.8)$$

$$W = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} c_{teq} \dot{\theta} d\theta. \quad (1.9)$$

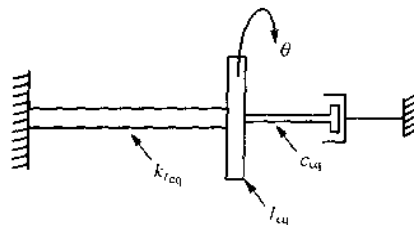


图 1.2

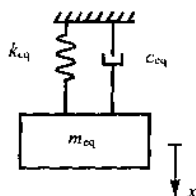


图 1.3

§ 1.5 静平衡位置

如图 1.3 所示的系统具有弹性元件, 所以当该系统处于平衡状态时也受力。在弹性因素影响下所产生的变形叫做静变形, 通常用 Δ_{st} 来表示。在线性系统中, 弹性因素的静变形对于系统的等效刚度没有影响。

例 题

- 1.1 试求如图 1.4 所示刚性杆的振动系统中自由度的数目, 并规定出该振动系统中可用的广义坐标系。

解 因为该杆是刚性的, 所以该系统只有一个自由度。选择广义坐标为 θ , 即杆的角位移, 此角位移从系统的平衡状态开始, 顺时针为正的方向为度量。

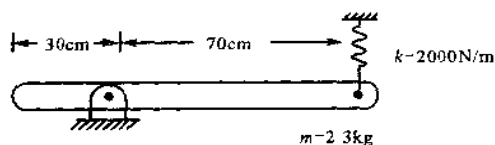


图 1.4

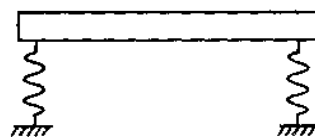


图 1.5

- 1.2 分析如图 1.5 所示的机械系统, 试求所需的自由度数目, 并规定出在进行振动分析时可用的广义坐标系。

解 设 x 为刚性杆质心的位移, 从系统平衡位置开始测量。为了确定杆上其他质点的位移, 光知道 x 本身是不够的。因此, 该系统不止有一个自由度。

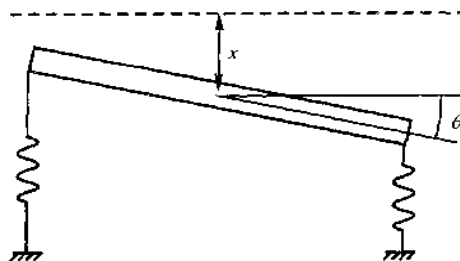


图 1.6

设 θ 为杆的顺时针角位移, 从杆在其平衡位置的轴线开始测量. 如果 θ 很小, 则杆右端的位移为 $x + (l/2)\theta$. 因此, 系统具有两个自由度, 即 x 和 θ 可作为广义坐标, 如图 1.6 所示.

- 1.3 在对如图 1.7 所示的机械系统进行分析时, 试求所用到的自由度数目, 并规定一套系统振动分析时所用到的广义坐标.

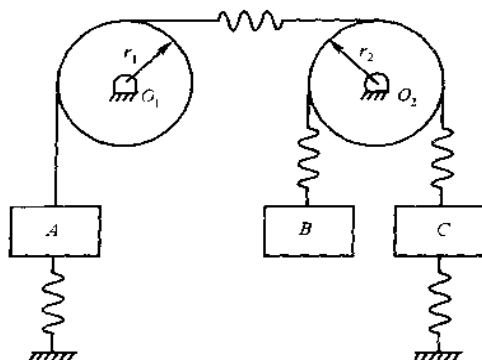


图 1.7

解 图 1.7 所示的系统有 4 个自由度. 一套可行的广义坐标为: θ_1 , 即以 O_1 为圆心的圆盘从平衡位置起顺时针角位移; θ_2 , 即以 O_2 为圆心的圆盘从平衡位置起顺时针角位移; x_1 , 物块 B 向下的位移; x_2 , 物块 C 向下的位移. 注意到物块 A 向上的位移由 $r_1\theta_1$ 给出, 因此, 从运动上来讲, 它对于该圆盘的运动是不独立的.

- 1.4 一个紧绕式螺旋线圈弹簧由一个直径为 18 mm 的杆制成, 该杆为 0.2% 的硬性钢 ($G = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$) 制成. 该弹簧有 80 个线圈匝数, 每个线圈的直径为 16 cm. 当该弹簧一端固定, 另一端垂直悬挂一个 200 kg 的物块时, 弹簧的伸长为多少?

解 螺旋线圈的刚度为

$$k = \frac{GD^4}{64Nr^3},$$

其中 D 是杆的直径, r 为线圈半径, N 为线圈匝数. 将已知量代入上式可得

$$k = \frac{\left[80 \times 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] (0.018\text{m})^4}{64(80)(0.08\text{m})^3} = 3.20 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}},$$

运用方程(1.2), 可得弹簧的伸长为

$$x = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k} = \frac{(200\text{kg}) \left(3.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{3.20 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0.613\text{m}.$$

- 1.5 试求如图 1.8 所示杆的纵向刚度.

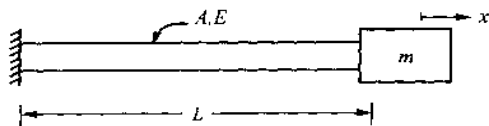


图 1.8

解 图 1.8 所示的物块的纵向运动可被模型化, 即为如图 1.1 所示的无阻尼系统. 当杆的一端有力 F 作用时, 其长度变化为

$$\delta = \frac{FL}{AE},$$

或是用方程(1.2)中的形式

$$F = \frac{AE}{L} \delta,$$

因此

$$k_{\text{eq}} = \frac{AE}{L}$$

1.6 试求如图 1.9 所示系统中转动轴的扭转刚度。

解 如果在轴的末端加一个力矩 M , 则由材料力学可知轴端的扭转角为

$$\theta = \frac{ML}{JG}$$

其中 J 为轴的截面极惯性矩, 因此

$$M = \frac{JG}{L}\theta$$

轴的等效扭转刚度为

$$k_t = \frac{JG}{L}$$

对如图 1.9 所示的轴来说

$$J = \frac{\pi}{2}(r_o^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{2}[(0.025\text{m})^4 - (0.015\text{m})^4] = 5.34 \times 10^{-7}\text{m}^4$$

因此

$$k_t = \frac{(5.34 \times 10^{-7}\text{m}^4) \left(80 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{1.4\text{m}} = 3.05 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

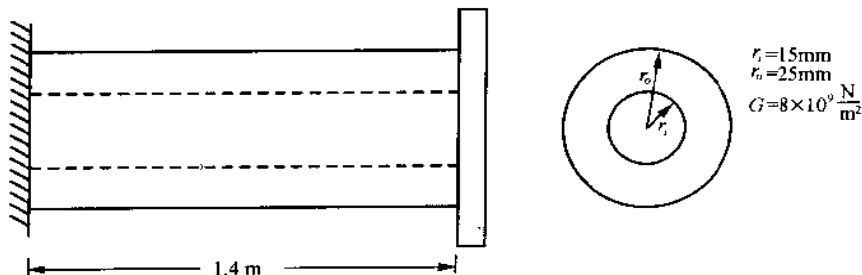


图 1.9

1.7 一个比如图 1.10 所示的梁的质量大的多的机器被置放在该梁上, 因为梁的惯性与机器的惯性相比要小的多, 所以可以用一个具有单自由度的模型来分析该机器的振动。用如图 1.3 所示的模型来简化该系统, 当该机器置放在梁上, 求其等效弹簧刚度。设

解 (a) $z = 1\text{m}$

(b) $z = 1.5\text{m}$

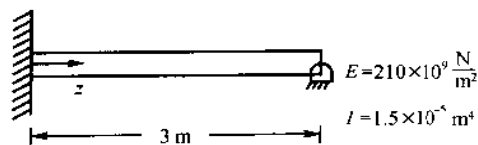


图 1.10

设函数 $w(z; a)$ 为该梁在位置 z 处由于在 $z = a$ 处施加单位载荷而产生的变形。从材料力学可知, 该梁的变形是线性的, 因此当施加一个大小为 F 的载荷时, 变形为

$$y(z; a) = Fw(z; a)$$

如果机器置于梁上的 $z = a$ 位置, 则在该位置的变形为

$$y(a; a) = Fw(a; a)$$

该式与方程(1.2)相似, 于是

$$k = \frac{1}{w(a; a)}. \quad (1.10)$$

根据材料力学, 当梁在 $z=0$ 处固定, 在 $z=L$ 处铰接, 并在 $z=a$ 处作用一个单位载荷时, 在 $z < a$ 段的变形为

$$w(z; a) = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{z^3}{12} \left(1 - \frac{a}{L} \right) \left[\left(\frac{a}{L} \right)^2 - 2 \frac{a}{L} - 2 \right] + \frac{z^2 a}{4} \left(1 - \frac{a}{L} \right) \left(2 - \frac{a}{L} \right) \right\}. \quad (1.11)$$

(a) 当 $a=1 \text{ m}$, $a/L=1/3$ 时, 则由方程(1.10)和(1.11)可得

$$\begin{aligned} k_{eq} &= \frac{1}{w(a; a)} = \frac{81EI}{11a^3} \\ &= \frac{81 \left(210 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (1.5 \times 10^{-5} \text{m}^4)}{11(1\text{m})^3} = 2.32 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}}; \end{aligned}$$

(b) 当 $a=1.5 \text{ m}$, $a/L=1/2$ 时, 用方程(1.10)和(1.11)可得

$$\begin{aligned} k_{eq} &= \frac{1}{w(a; a)} = \frac{96EI}{7a^3} \\ &= \frac{96 \left(210 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (1.5 \times 10^{-5} \text{m}^4)}{7(1.5\text{m})^3} = 1.28 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \end{aligned}$$

- 1.8** 一个质量为 m 的机器挂在一个长为 L 的简支梁的中间跨上, 该梁的弹性模量为 E , 截面惯性矩为 I . 机器的质量远远大于梁的质量, 因此可用一个单自由度模型来简化该系统. 求当用中间跨变形作为广义坐标时, 该梁的等效刚度是多少?

解 当在一个简支梁的中间施加一个大小为 F 的集中载荷时, 该梁在中间跨处的挠度为

$$\delta = \frac{FL^3}{48EI}.$$

当在中间跨处施加一个单位集中载荷时, 等效刚度是中间跨挠度的倒数. 因此

$$k_{eq} = \frac{48EI}{L^3}.$$

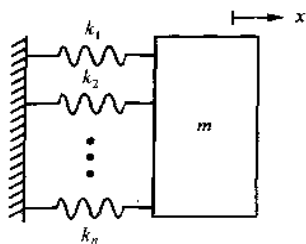


图 1.11

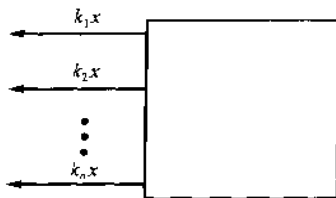


图 1.12

- 1.9** 如图 1.11 所示, 弹簧是相互并联的. 如果图 1.11 的系统由图 1.1 所示的系统所等效, 试推出该并联弹簧组合的等效刚度.

解 如果物块有任意位移 x , 则在该平衡组合当中每根弹簧的长度变化为 x . 图 1.12 隔离体中画出了该物块所受到的全部作用力

$$F = k_1x + k_2x + k_3x + \cdots + k_nx = \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) x. \quad (1.12)$$

当图 1.1 所示系统的弹簧有位移 x , 并且受力与方程(1.12)相等时, 图 1.1 所示系统可以用来对图 1.11 所示系统进行模型化. 如果图 1.1 的弹簧有位移 x , 那么其物块的受力为

$$F = k_{eq}x. \quad (1.13)$$

如要使方程(1.12)和(1.13)相等, 则有

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i$$

- 1.10** 如图 1.13 所示系统的弹簧为串联. 如果该系统可用图 1.1 所示系统模型化, 试推导该串联弹簧组合方程.

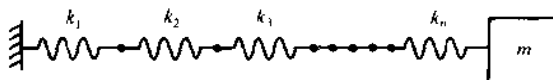


图 1.13

解 设 x 为图 1.13 所示物块在任意瞬时的位移. 设 x_i 为从固定支承端开始第 i 根弹簧的长度变化. 若假定每根弹簧是无质量的, 那么每根弹簧在其端点处受力大小相等方向相反, 如图 1.14 所示. 因此每根弹簧的受力相等.

$$k_1 x_1 = k_2 x_2 = k_3 x_3 = \cdots = k_n x_n. \quad (1.14)$$

另外

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.15)$$

将方程(1.14)中得到的 x_i 值代入方程(1.15)中得到

$$F = \frac{x}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}. \quad (1.16)$$

注意到图 1.1 所示系统中物块在任意位移 x 时的受力为 $k_{eq}x$, 使其与方程(1.16)相等可得到

$$k_{eq} = \frac{x}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}.$$



图 1.14

1.11 对如图 1.15 所示的系统进行模型化, 试将其物块连接在具有等效刚度的单个弹簧上.

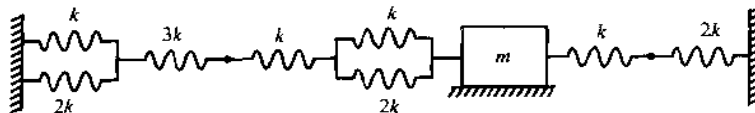


图 1.15

解 第一步先用从题 1.9 的结果中得到的弹簧等效刚度来代替图中的并联组合, 如图 1.16(a) 所示. 在物块左边的弹簧是一个个串联在一起的. 用题 1.10 的结果, 可以由一根弹簧取代它们, 该弹簧的刚度计算如下:

$$\frac{1}{\frac{1}{3k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{3k}} = \frac{k}{2}.$$

连在物块右边的弹簧是串联, 它们可用一根弹簧来取代, 该弹簧的刚度为

$$\frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{2k}} = \frac{2k}{3}.$$

如图 1.16(b) 所示. 当物块有任意位移 x 时, 图 1.16(b) 所示的每根弹簧的位移均相等, 作用在物块上的力为作用在每根弹簧上的力的总和. 因此这些弹簧表现出并联的特征, 故可以被单弹簧所取代, 该单弹簧的刚度为

$$\frac{k}{2} + \frac{2k}{3} = \frac{7k}{6}.$$

如图 1.16(c) 所示.

1.12 对图 1.17 所示的扭转系统进行模型化, 使其圆盘连接在一个具有等效刚度的扭转弹

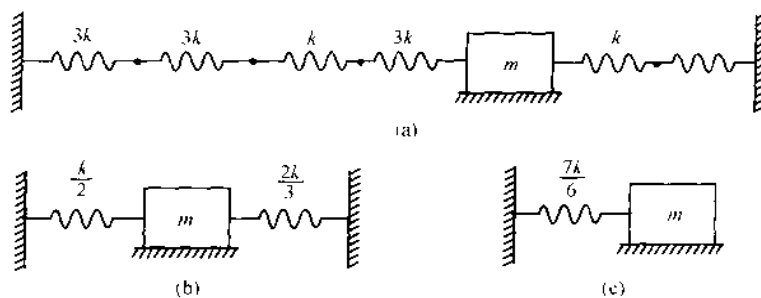


图 1.16

簧上。

解 图 1.17 中各轴的刚度计算如下:

$$\begin{aligned}
 k_{AB_{\text{铝}}} &= \frac{J_{AB_{\text{铝}}} G_{AB_{\text{铝}}}}{L_{AB_{\text{铝}}}} = \frac{\frac{\pi}{2} [(0.04 \text{ m})^4 - (0.02 \text{ m})^4] \cdot 80 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{0.6 \text{ m}} \\
 &= 5.03 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}, \\
 k_{AB_{\text{钢}}} &= \frac{J_{AB_{\text{钢}}} G_{AB_{\text{钢}}}}{L_{AB_{\text{钢}}}} = \frac{\frac{\pi}{2} (0.02 \text{ m})^4 \cdot 40 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{0.6 \text{ m}} = 1.68 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}, \\
 k_{BC} &= \frac{J_{BC} G_{BC}}{L_{BC}} = \frac{\frac{\pi}{2} (0.08 \text{ m})^4 \cdot 80 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{0.8 \text{ m}} = 1.65 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}, \\
 k_{DE} &= \frac{J_{DE} G_{DE}}{L_{DE}} = \frac{\frac{\pi}{2} (0.025 \text{ m})^4 \cdot 40 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1.2 \text{ m}} = 2.05 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}.
 \end{aligned}$$

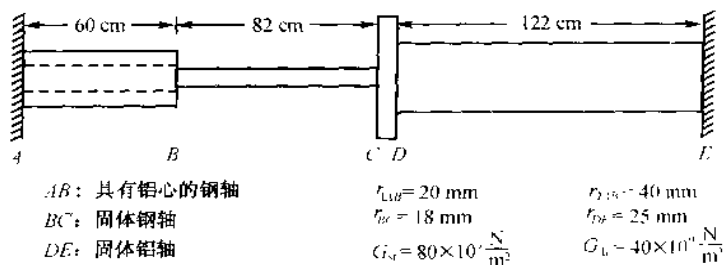


图 1.17

轴 AB 的铝心在末端的扭转角与轴 AB 的钢套在末端的扭转角是相等的。同样, 轴 AB 在末端的总扭矩为铝心的抗扭矩和钢套的抗扭矩的总和。因此, 轴 AB 的铝心和钢套可看作是并联的扭转弹簧, 其等效刚度为,

$$\begin{aligned}
 k_{AB} &= k_{AB_{\text{铝}}} + k_{AB_{\text{钢}}} = 5.03 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} + 1.68 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} \\
 &= 5.20 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}.
 \end{aligned}$$

轴 AB 与轴 BC 的扭矩是相等的, 侧盘的角位移为 $\theta_{AB} = \theta_{BC}$ 。因此, 轴 AB 与 BC 可为串联的扭转弹簧, 它们的组合与轴 DE 并联。因此等效刚度为

$$k_{\text{总}} = \frac{1}{\frac{1}{k_{AB}} + \frac{1}{k_{BC}}} + k_{DE} = 3.65 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

1.13 用机器的位移作为广义坐标, 试推导图 1.18 所示系统的等效刚度表达式。

解 设有一个向下的集中载荷 F_1 加在该简支梁的中间跨上,使其发生挠度 x .在弹簧上产生一个压缩力 kx .在梁的中间跨上向下作用的总力为 $F_1 + kx$.由问题 1.8 可知,一个简支梁由于在中间跨处施加集中载荷而产生的挠度为

$$x = \frac{F_1 L^3}{48EI}$$

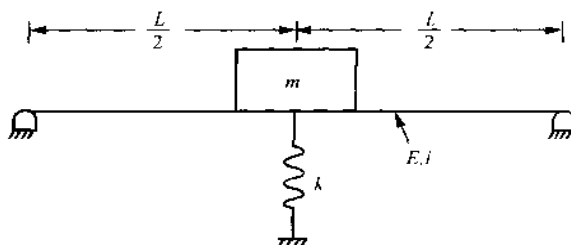


图 1.18

所以对于图 1.18 所示的梁来说,有

$$x = (F_1 + kx) \frac{L^3}{48EI}$$

从它可推出

$$x = \frac{F_1}{k + \frac{48EI}{L^3}}$$

通过设 $F_1 = 1$ 可得到等效刚度,即为

$$k_{eq} = k + \frac{48EI}{L^3}$$

用题 1.9 的结果,可以证明梁和弹簧可以看作二弹簧的并联.

1.14 由图 1.19 中物块的位移作为广义坐标,求图中系统的等效刚度是多少?

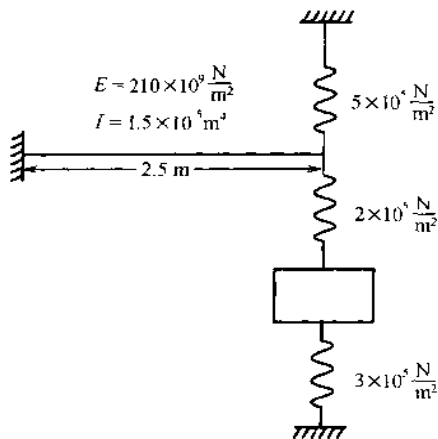


图 1.19

解 在自由端受单位集中载荷的悬臂梁在它的自由端的挠度是 $L^3/(3EI)$. 因此悬臂梁的等效刚度是

$$\begin{aligned} k_b &= \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \left(210 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (1.5 \times 10^{-5} \text{m}^4)}{(2.5\text{m})^3} \\ &= 6.05 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

对题 1.14 的分析说明了梁和上面的弹簧的运动是并联的, 然后这个并联组合又与梁和物块之间的弹簧串联, 最后此串联的组合又与物块和固定面连接的弹簧并联. 因此对系统应由并联和串联的组合公式并计算它的等效刚度为

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{6.05 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} + \frac{1}{5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} + \frac{1}{2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}} = 3 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\ = 4.69 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

- 1.15 如图 1.20 所示的阻尼器包含一个容器, 这个容器里含有阻尼系数为 μ 和深度为 h 的黏性流体. 一个平板所在接触面积为 A 的容器的表面上滑动. 求这个黏性阻尼器的阻尼系数是多少?



图 1.20

解 令 y 为流体的一个坐标, 并以容器的底部为原点. 如果 h 很小而且可忽略不稳定因素, 则流体中的速度分布 $u(y)$ 是线性的, 有 $u(0) = 0$, $u(h) = v$, 如图 1.21 中所示. 其中平板的速度是 v . 速度分布的数学公式是

$$u(y) = v \frac{y}{h}.$$

作用在平板上的剪切力可以用牛顿公式计算

$$\tau = \mu \frac{du}{dy},$$

推导出

$$\tau = \frac{\mu v}{h}.$$

总黏性力是由分布的剪切力合成的, 即

$$F = \tau A = \frac{\mu A}{h} v,$$

则力和平板速度之间的比例系数是阻尼系数, 为

$$c = \frac{\mu A}{h}.$$

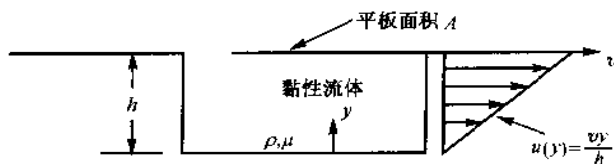


图 1.21

- 1.16 图 1.22 中的扭转阻尼器包含一个连接有转动轴的薄盘. 盘表面半径是 R , 并且在一个黏性度为 μ , 深度为 h 的容器中旋转. 求这个阻尼器的扭转黏性阻尼系数.

解 令 τ 为作用在圆盘表面上微元面积 $dA = r dr d\theta$ 的剪应力, 如图 1.23 所示. 由于受到分布的剪应力作用旋转轴的合成扭矩为

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \tau (r dr d\theta). \quad (1.17)$$

如果轴和盘的角速度为 ω , 那么微元的速度就为 $r\omega$. 从容器的底部以流体向上的位置为坐标 y , 并忽

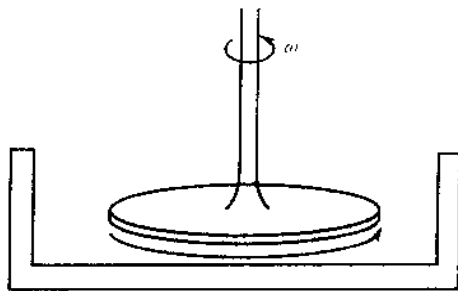


图 1.22

略不稳定因素。假定流体的深度很小,流体中的速度分布 $u(r, y)$ 可近似看成 y 的线性函数,并且有 $u(r, 0) = 0, u(r, h) = r\omega$, 可推导出

$$u(r, y) = \frac{r\omega}{h}y,$$

作用在盘上的剪应力可以用牛顿黏性定律来计算

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}(r, h) = \frac{r\mu\omega}{h}.$$

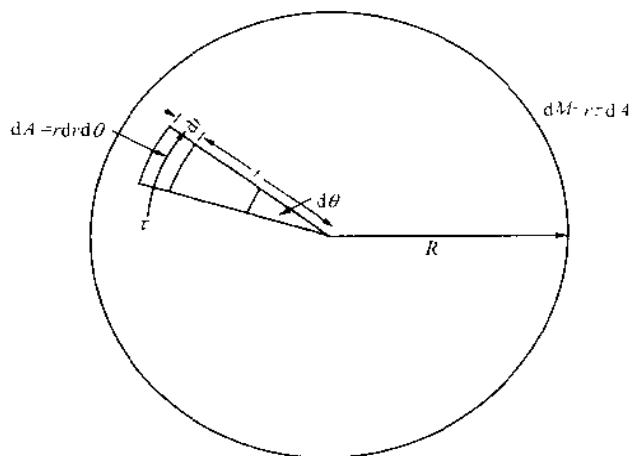


图 1.23

把上面的剪应力代入式(1.17)中,得到

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r\mu\omega}{h} r dr d\theta = \frac{\mu\pi R^4}{2h}\omega.$$

扭转阻尼系数即为扭矩与角速度之间的比例常数

$$c_t = \frac{\mu\pi R^4}{2h}.$$

- 1.17** 证明连接在固定支撑, 并有一个自由度系统的线性弹簧的惯性因素可以同具有 $1/3$ 弹簧质量的质点与该无重弹簧连接的系统所近似等效。

解 设弹簧均质并原长为 l , 由于弹簧质量不太大, 则系统仍可看成 一个自由度的系统, 而弹簧上各点的位移可近似与该点到悬挂点的距离成正比。令 m_r 是离悬挂点距离为 r 的弹簧质量; 令 m_{eq} 是弹簧端点的质心的质量, 则此质点可近似表示弹簧的惯性因素, 设弹簧的动能是

$$T = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2.$$

令 x 为沿弹簧的轴线的坐标, 并设弹簧此时没有变形, 即 $0 \leq x \leq l$, 如图 1.24 中所示。设位移函数

$u(z, t)$ 沿弹簧长度线性变化, 并 $u(0) = 0, u(l) = x$, 有

$$u(z, t) = \frac{x}{l} z$$

弹簧微元的动能为

$$dT = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dm = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{l} z \right)^2 \frac{m}{l} dz$$

由此可以得出弹簧的总动能为

$$T = \int dT = \frac{\dot{x}^2 m}{2l^3} \int_0^l z^2 dz = \frac{1}{2} \frac{m}{3} \dot{x}^2.$$

因此如果在无重弹簧上连接一个 $m/3$ 质量的小质点, 它的动能就和考虑弹簧质量并认为其为线性位移时相等。

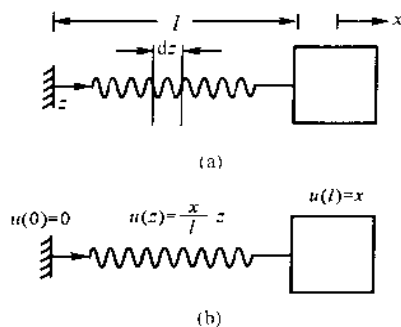


图 1.24

- 1.18 在如图 1.25 所示的系统中应加入一个质量为多大的物块, 才能和弹簧的串联组合的惯性效果近似相等?

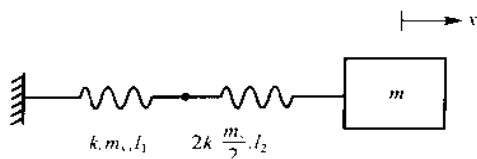


图 1.25

解 应用题 1.17 的结果, 左边弹簧的惯性因素可近似的被如下的模型所取代: 在两个弹簧的连接处放置一个质量为 $m/3$ 的质点. 设 x 为任意时刻物块的位移. 设 z_1 和 z_2 分别为沿左右弹簧轴线的坐标. 设 $u_1(z_1, t)$ 和 $u_2(z_2, t)$ 为这些弹簧的位移函数. 很明显的, $u_1(0, t) = 0, u_1(l_1, t) = x$. 还有, $u_1(l_1, t) = u_2(0, t) = w$. 假定每个弹簧的位移函数是线性的, 可推出

$$u_1(z_1, t) = \frac{w}{l_1} z_1,$$

$$u_2(z_2, t) = \frac{x - w}{l_2} z_2 + w.$$

由于弹簧是串联的, 则每个弹簧上受到的力是相同的, 即

$$kw = 2k(x - w) \Rightarrow w = \frac{2}{3}x.$$

因此串联弹簧的动能为

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \dot{x} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left(\frac{1}{3} \frac{\dot{z}_2}{l_2} \right)^2 \dot{x}^2 \frac{m}{2l_2} dz_2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_s \right) \dot{x}^2.$$

从以上可推出一个附加的质量为 $m/2$ 的质点。

- 1.19 用简支梁的静挠度函数, 请问加到图 1.26 中的系统上的物块的质点的质量为多少才能近似梁的惯性因素?

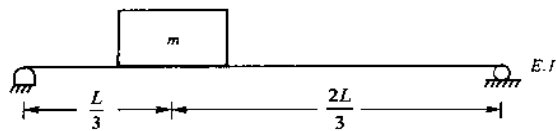


图 1.26

解 在简支梁的 $z = L/3$ 处加一个大小为 F 的集中载荷后, 梁的静挠度函数 $y(z)$ 为

$$y(z) = \frac{F}{EI} \begin{cases} \frac{5}{81} L^2 z - \frac{1}{9} z^3, & 0 \leq z \leq \frac{L}{3}, \\ \frac{1}{6} \left(z - \frac{L}{3} \right)^3 + \frac{5}{81} L^2 z - \frac{1}{9} z^3, & \frac{L}{3} \leq z \leq L. \end{cases}$$

在梁的 $z = L/3$ 处产生一个静挠度所需的外力可计算如下:

$$x = y\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{4FL^3}{243EI} \rightarrow F = \frac{243EIx}{4L^3}.$$

梁的动能为

$$\begin{aligned} T &= \int_0^L \frac{1}{2} \dot{y}^2 \rho A dz \\ &= \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{243}{4L^3} \right)^2 x^2 \left\{ \int_0^{L/3} \left(\frac{5}{81} L^2 - \frac{1}{3} z^2 \right)^2 dz \right. \\ &\quad \left. + \int_{L/3}^L \left[\frac{1}{6} \left(z - \frac{L}{3} \right)^3 + \frac{5}{81} L^2 z - \frac{1}{9} z^3 \right]^2 dz \right\} \\ &= 0.586 \rho A L = 0.586 m_b. \end{aligned}$$

因此梁的惯性因素可用如下的模型来近似: 在机器上加一个质量为 $0.586 m_b$ 的质点。

- 1.20 在两端固定的梁的中点加一个集中载荷后产生的近似挠度为

$$y(z) = \frac{x}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right),$$

其中 x 是中点的挠度。应用这种近似来确定在梁的中点应加多大的质点才能近似梁的惯性因素。

解 梁的动能为

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} \dot{y}^2(z) \rho A dz,$$

其中 ρ 是梁的质量密度, A 为它的横截面面积。代入所建议的近似值, 得

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho A \frac{x^2}{4} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right)^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} \rho A L \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} m_{\text{梁}} \right) \dot{x}^2. \end{aligned}$$

梁的惯性因素能用在中点加一个质量为 $\frac{3}{8} m_{\text{梁}}$ 的质点来近似。

- 1.21 设 x 是图 1.27 中的物块的位移, 从系统的平衡位置向下为正。证明在两个任意点之间的势能差与物块的质量无关。

解 设 x 为从系统的平衡位置开始的物块的向下位移。当系统处于平衡时, 弹簧有一个静变形 $\Delta = mg/k$ 。如果把系统的平衡位置的势能作为势能的基准面, 则系统在任意时刻的势能为,

$$V = \frac{1}{2}k(x + \Delta)^2 - mgr$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 + (k\Delta - mg)x + \frac{1}{2}k\Delta^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k\Delta^2.$$

因此物块在 x_1 和 x_2 之间运动时的势能差为

$$V_2 - V_1 = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k\Delta^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k\Delta^2 = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2),$$

它与物块的质量无关. 此题的结果可用来说明弹簧的静变形和产生静变形的重力在势能差中相互抵消.

- 1.22 求图 1.28 中系统中的 m_{eq} 和 k_{eq} , 把从系统的平衡位置开始算起的物块的向下位移 x 当作广义坐标.

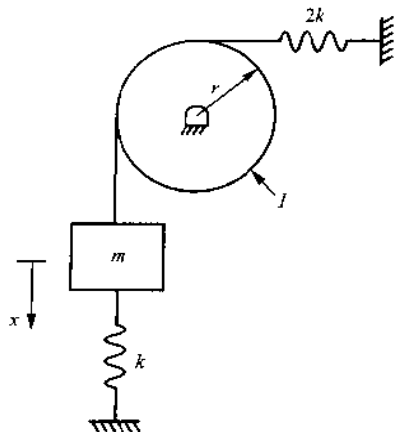


图 1.28

解 从题 1.21 的结果中可看出, 重力作用和静变形在势能的计算中相互抵消了, 因此它们可以被忽略. 系统的势能为

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(2k)x^2 \\ = \frac{1}{2}(3k)x^2 \rightarrow k_{eq} = 3k.$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 \\ = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\dot{x}^2 \rightarrow m_{eq} = m + \frac{I}{r^2}.$$

- 1.23 求图 1.29 中系统的 k_{eq} 和 m_{eq} , 把从平衡位置开始算起盘的中央的位移 x 当作广义坐标. 假定盘很薄, 并且做纯滚动.

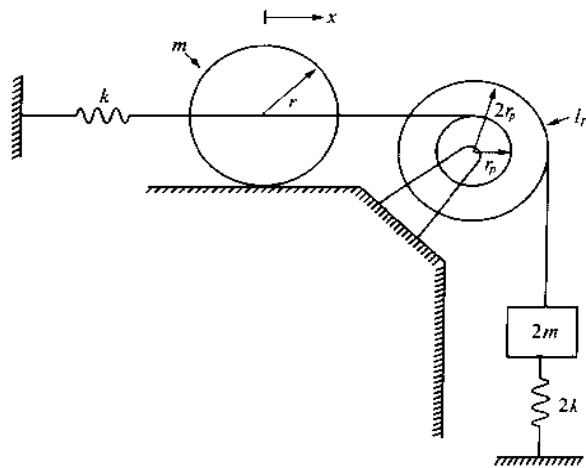


图 1.29

解 如果盘做纯滚动, 滑轮的角位移 θ 和物块的向下位移 y 为

$$\theta = \frac{x}{r_p}, \quad y = 2r_p\theta = 2x.$$

注意到重力作用和静变形相互抵消, 势能计算为

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} (2k) y^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} 2k(2x)^2 + \frac{1}{2} 9kx^2 \rightarrow k_{eq} = 9k$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_p \omega_{\dot{\theta}}^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (2m) \dot{y}^2.$$

如果盘很薄, 则 $I_d = mr^2/2$, 并且如果盘做纯滚动, $\omega_d = \dot{x}/r$, 因此, 有

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} I_p \left(\frac{\dot{x}}{r_p} \right)^2 + \frac{1}{2} (2m) (2\dot{x})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{19}{2} m + \frac{I_p}{r_p^2} \right] \dot{x}^2 \rightarrow m_{eq} = \frac{19}{2} m + \frac{I_p}{r_p^2}. \end{aligned}$$

1.24 计算如图 1.30 所示系统的等效系统的参数. 把 θ 作为广义坐标, 以顺时针方向为正, 从系统的平衡位置测起. 包括弹簧惯性影响的近似, 且 θ 假定很小.

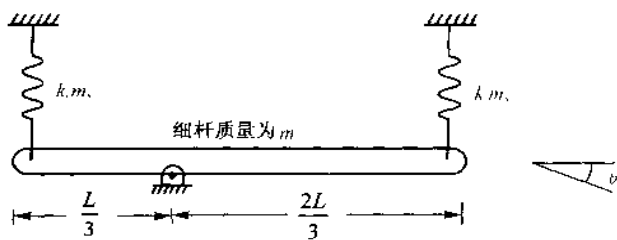


图 1.30

解 以弹簧质量的 $m/3$ 作用在杆的两端来估计弹簧的惯性. 考虑这些质量的动能则系统在任意瞬时的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} mL^2 \right] \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left[\frac{L}{6} \dot{\theta} \right]^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{3} \left[\frac{L}{3} \dot{\theta} \right]^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{3} \left[\frac{2L}{3} \dot{\theta} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9} mL^2 + \frac{5}{27} mL^2 \right] \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

如果 θ 很小, 则杆左端的位移近似为 $(L/3)\theta$ 并指向上, 杆右端的位移可近似为 $\left[\frac{2L}{3}\right]\theta$, 指向下. 因重力引起的势能与因静变形引起的势能相抵消, 则任意瞬时的势能为

$$V = \frac{1}{2} k \left[\frac{L}{3} \theta \right]^2 + \frac{1}{2} k \left[\frac{2L}{3} \theta \right]^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{5}{9} kL^2 \right] \theta^2.$$

由此解得

$$I_{eq} = \frac{1}{9} mL^2 + \frac{5}{27} mL^2, \quad k_{eq} = \frac{5}{9} kL^2.$$

1.25 计算如图 1.31 所示系统的等效系统的参数. 把 θ 作为广义坐标, θ 为杆顺时针转动角位移, 从系统的平衡位置测起. θ 假定很小.

解 令 ϕ 从系统的平衡位置测起作为杆 CD 逆时针角位移, 因为杆 AB, CD 用刚性杆连接, 所以它们的位移必然相同. 假定 θ 和 ϕ 很小, 则

$$\frac{2}{3} L\theta = L\phi \rightarrow \phi = \frac{2}{3} \theta.$$

任意瞬时系统的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_{AB} \bar{v}_{AB}^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_{CD} \bar{v}_{CD}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} mL^2 \right] \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{6} L\dot{\theta} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} mL^2 \right] \left(\frac{2}{3} \dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{2} L \cdot \frac{2}{3} \dot{\theta} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{7}{27} mL^2 \right] \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

任意瞬时系统的势能为

$$V = \frac{1}{2} 3k \left(\frac{L}{3} \theta \right)^2 + \frac{1}{2} k \left(L - \frac{2}{3} \phi \right)^2 + \frac{1}{2} 3k \left(\frac{L}{3} \theta \right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{4}{9} L \theta \right)^2 \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{43}{81} k L^2 \right) \theta^2.$$

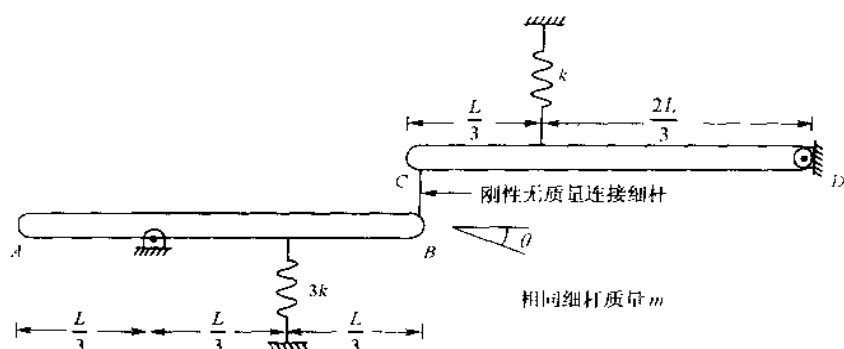


图 1.31

因为 θ 为广义坐标, 所以等效系统为转动系统. 由以上近似等效系统参数为

$$I_{eq} = \frac{7}{27} mL^2, \quad k_{eq} = \frac{43}{81} kL^2.$$

- 1.26 如图 1.32 所示系统的圆盘在平板上作纯滚动. 求等效系统的参数, 把 x 作为广义坐标, x 为从系统的平衡位置起的位移.

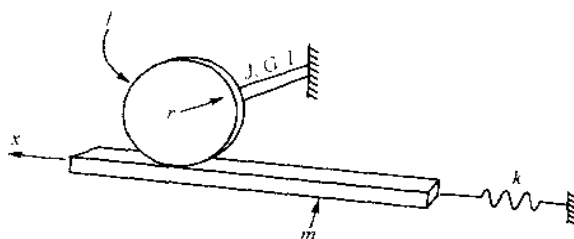


图 1.32

解 令 θ 为圆盘从平衡位置顺时针转动的角位移. 因为圆盘的中心固定且沿平板只滚不滑

$$x = r\theta \rightarrow \theta = \frac{x}{r}.$$

任意瞬时系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 \\ = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{r^2} \right) \dot{x}^2.$$

绕轴的扭转刚度为

$$k_t = \frac{JG}{L}.$$

系统在任意瞬时的势能为

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} k_t \theta^2 = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} \frac{JG}{L} \left(\frac{x}{r} \right)^2 \\ = \frac{1}{2} \left(k + \frac{JG}{Lr^2} \right) x^2.$$

所以等效系统的参数为

$$m_{eq} = m + \frac{I}{r^2}, \quad k_{eq} = k + \frac{JG}{Lr^2}.$$

- 1.27 试求如图 1.33 所示等效系统的参数, 用 θ 作为广义坐标, θ 从系统的平衡位置以绕顺时针转角位移为正, 假定 θ 较小.

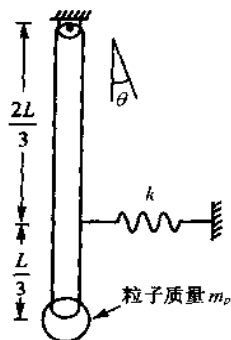


图 1.33

解 任意瞬时系统的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} m_p v_p^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} mL^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{2} L \dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} m_p (L \dot{\theta})^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} mL^2 + m_p L^2 \right) \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

取铰所在水平面为零势能面, 系统在任意位置的势能与在初始位置的势能的势能差为

$$V = \frac{1}{2} k \left(\frac{2}{3} L \theta \right)^2 + mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta) + m_p g L (1 - \cos \theta).$$

因为 θ 很小, 即

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \theta^2,$$

所以

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} k L^2 \right) \theta^2 + mg \frac{L}{2} \left(\frac{1}{2} \theta^2 \right) + m_p g L \left(\frac{1}{2} \theta^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} k L^2 + mg \frac{L}{2} + m_p g L \right) \theta^2. \end{aligned}$$

由于选用角坐标为广义坐标, 所以等效系统是转动系统, 有

$$I_{eq} = \frac{1}{3} mL^2 + m_p L^2, \quad k_{eq} = \frac{4}{9} k L^2 + mg \frac{L}{2} + m_p g L.$$

- 1.28 试求如图 1.34 所示等效系统的参数, 用 x 作为广义坐标, 其中 x 是物体从平衡位置向下的位移.

解 连有阻尼器的绳上的圆盘的角位移 θ 和物块的位移 y , 在任意瞬时为

$$\theta = \frac{x}{r}, \quad y = 2r\theta = 2x.$$

系统在任意瞬时的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{r^2} \right) \dot{x}^2. \end{aligned}$$

注意到由于重力引起的势能变化与由于弹簧静止位移差引起的势能变化平衡, 因此, 系统在任意瞬时的势能为

$$V = \frac{1}{2} k x^2.$$

黏性阻尼在两个任意瞬时之间所作的功为

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{x_1}^{x_2} c \dot{y} dx = - \int_{x_1}^{x_2} c (2\dot{x}) d(2x) = - \int_{x_1}^{x_2} 4c \dot{x} dx.$$

由以上可知

$$m_{eq} = m + \frac{I}{r^2}, \quad k_{eq} = k, \quad c_{eq} = 4c.$$

- 1.29 重解题 1.28, 并设 θ 为广义坐标, 且 θ 为系统平衡位置量起的角位移, 以逆时针转动为正.

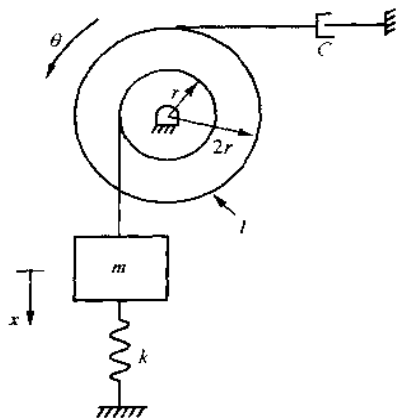


图 1.34

解 物块向下的位移 x 和连有阻尼器的绳上的质点的位移在任意瞬时为

$$x = r\theta, \quad y = 2r\theta$$

系统在任意瞬时的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (mr^2 + I) \dot{\theta}^2.$$

系统在任意瞬时的势能为

$$V = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k(r\theta)^2 = \frac{1}{2} kr^2\theta^2.$$

黏性阻尼在两个任意瞬时之间所作的功为

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} c \dot{y} d\theta = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} c (2r\dot{\theta}) d(2r\theta) = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} 4cr^2 \dot{\theta} d\theta.$$

由于选用角坐标为广义坐标, 所以等效系统是转动系统, 即由以上可得

$$I_{eq} = I + mr^2, \quad c_{eq} = 4cr^2, \quad k_{eq} = kr^2.$$

- 1.30 确定如图 1.35 所示等效系统的参数, 用 θ 作为广义坐标, 其中 θ 是杆从系统的平衡位置以绕顺时针角位移为正, 假定 θ 较小.

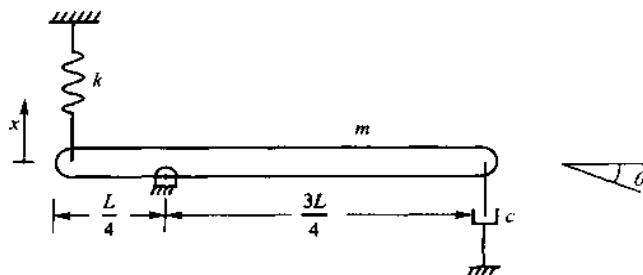


图 1.35

解 假定 θ 很小, 杆左端的位移记为 x_l , 右端位移记为 x_r , 质心位移记为 \bar{x} , 则有

$$x_l = -\frac{L}{2}\theta, \quad x_r = \frac{3}{4}L\theta, \quad \bar{x} = \frac{L}{4}\theta.$$

系统在任意瞬时的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} mL^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{4} L \dot{\theta} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{48} mL^2 \right) \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

系统在任意瞬时的势能为

$$V = \frac{1}{2} kx_l^2 = \frac{1}{2} k \left(-\frac{1}{4} L\theta \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{16} kL^2 \right) \theta^2.$$

黏性阻尼在两个任意瞬时之间所作的功为

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= - \int_{\theta_1}^{\theta_2} c \dot{x}_r dx_r = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} c \left(\frac{3}{4} L \dot{\theta} \right) d \left(\frac{3}{4} L \theta \right) \\ &= - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{9}{16} cL^2 \dot{\theta} d\theta. \end{aligned}$$

由于选用角坐标为广义坐标, 所以等效系统是转动系统, 由以上可知

$$I_{eq} = \frac{7}{48} mL^2, \quad I_{eq} = \frac{9}{16} cL^2, \quad k_{eq} = \frac{1}{16} kL^2.$$

- 1.31 重解题 1.30, 用 x 作为广义坐标, 其中 x 为杆的左端从平衡位置起向上的位移, 假定 x 很小.

解 假定 l 很小, 右端向下的位移记为 x , 质心位移记为 \bar{x} , 杆端顺时针转动角位移记为 θ , 则

$$x = 3\bar{x}, \quad \bar{x} = l\theta, \quad \theta = \frac{4}{l}\bar{x}.$$

系统在任意瞬时的动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\bar{x}}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{\bar{x}}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}ml^2 \cdot \left(\frac{4}{l}\dot{\bar{x}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3}m\dot{\bar{x}}^2.$$

系统在任意瞬时的势能为

$$V = \frac{1}{2}kx^2.$$

黏性阻尼在两个任意瞬时之间所作的功为

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 c\dot{x}d\bar{x} = \int_1^2 c(3\dot{\bar{x}})d(3\bar{x}) = \int_1^2 9c\dot{\bar{x}}d\bar{x}.$$

所以等效系统的参数为

$$m_{eq} = \frac{7}{3}m, \quad c_{eq} = 9c, \quad k_{eq} = k.$$

- 1.32 试求图 1.36 所示等效系统的参数, 以 x 作为广义坐标, 其中 r 为圆盘质心从平衡位置起的位移, 假定圆盘只滚动不滑动.

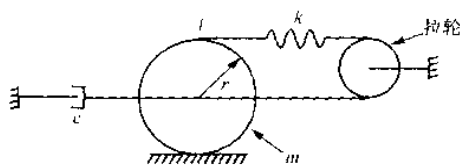


图 1.36

解 由于圆盘只滚动不滑动, 则摩擦力不作功, 角位移与 x 的关系为

$$\theta = \frac{x}{r}.$$

系统在任意瞬时的动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}m\dot{x}^2.$$

弹簧连结在圆盘上的 A 点, 如果圆盘中心向左移动距离为 x , 则 A 点相对圆盘移动距离为 $l\theta$, 弹簧长度改变量为

$$\delta = (x + r\theta) + l = 2x + r\theta = 2x + x = 3x.$$

系统在任意瞬时的势能为

$$V = \frac{1}{2}(3x)^2 = \frac{1}{2}9kx^2.$$

黏性阻尼在两个任意瞬时之间所作的功为

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_1^2 c\dot{x}dx,$$

所以等效系统的系数为

$$m_{eq} = \frac{3}{2}m, \quad c_{eq} = c, \quad k_{eq} = 9k.$$

补充习题

- 1.33 试求如图 1.37 所示系统, 进行运动分析时所必需的自由度数.
答: 3.
- 1.34 试求如图 1.38 所示系统在进行运动分析时所必需的自由度数.

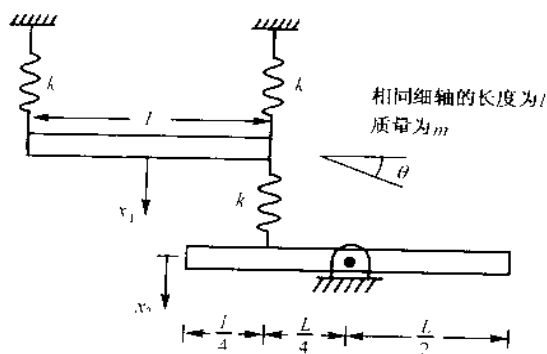


图 1.37

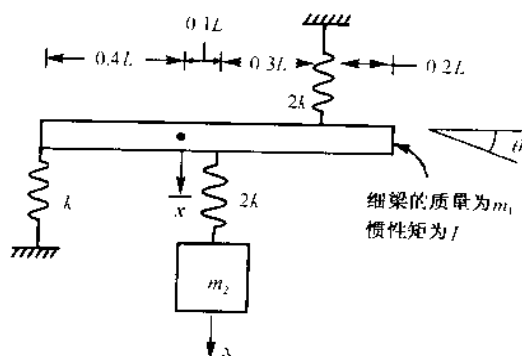


图 1.38

答:3.

1.35 试求如图 1.39 所示系统在进行运动分析所必需的自由度数.

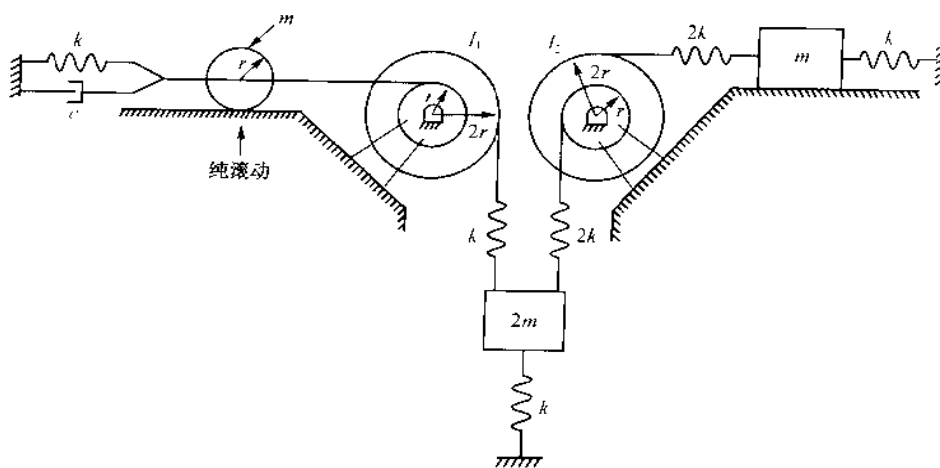


图 1.39

答:4.

 1.36 试求截面为 $30 \times 50 \text{ mm}$ 的矩形钢制杆的轴向刚度, 杆长为 2.1 m . ($E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$).

 答: $1.5 \times 10^8 \text{ N/m}$

- 1.37 试求 60 cm 长的铝轴的扭转刚度, 内径 25 mm, 外径 35 mm. ($G = 40 \times 10^9 \text{ N/m}^2$).
答: $1.16 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$.

- 1.38 质量为 200 kg 的机器放在如图 1.40 所示的梁上. 试求当系统为一个自由度时梁的刚度.

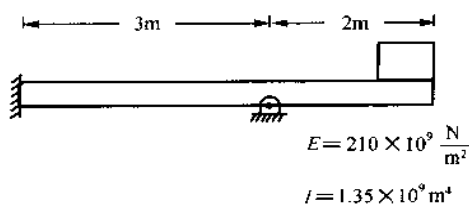


图 1.40

答: $5.00 \times 10^5 \text{ N/m}$.

- 1.39 试求当机器放在如图 1.41 所示的位置时, 梁的等效刚度.

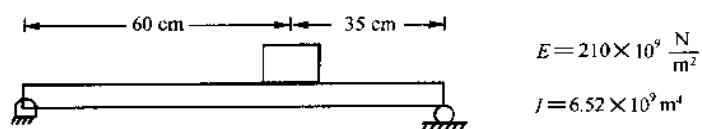


图 1.41

答: $8.85 \times 10^7 \text{ N/m}$.

- 1.40 半径为 6 mm 的钢制杆 ($G = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$) 作成的螺旋线圈弹簧, 线圈直径 6 cm, 匝数为 46, 弹簧的刚度为多少?

答: $2.09 \times 10^4 \text{ N/m}$.

- 1.41 当题 1.40 的弹簧用在如图 1.42 所示系统时, 其刚度为多少?

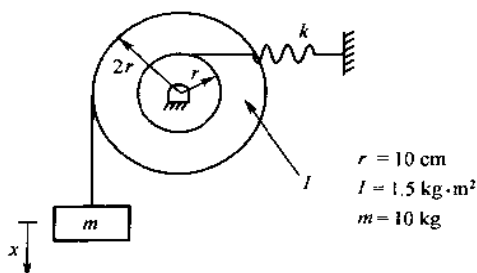


图 1.42

答: $9.39 \times 10^{-3} \text{ m}$.

- 1.42 试求如图 1.43 所示系统的等效刚度.

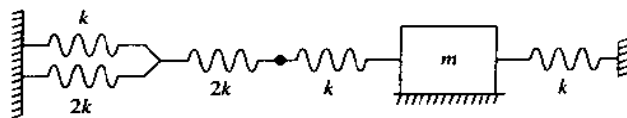


图 1.43

答: $17k/11$.

1.43 试求如图 1.44 所示系统的等效刚度。

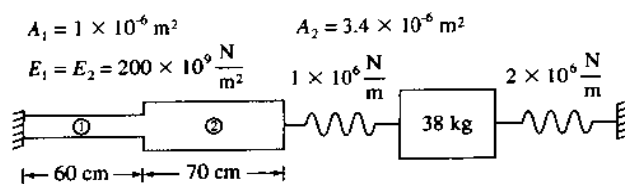


图 1.44

答: $2.20 \times 10^6 \text{ N/m}$ 。

1.44 试求如图 1.45 所示系统的等效扭转刚度。

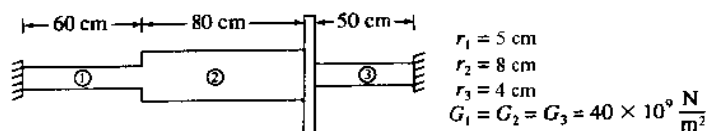


图 1.45

答: $8.66 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$ 。

1.45 试求如图 1.46 所示系统的等效刚度。

答: $1.5 \times 10^6 \text{ N/m}$ 。

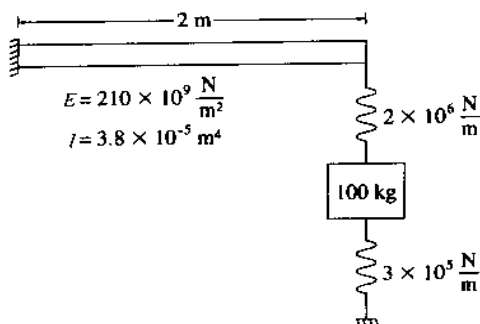


图 1.46

1.46 试求如图 1.47 所示系统的等效刚度。

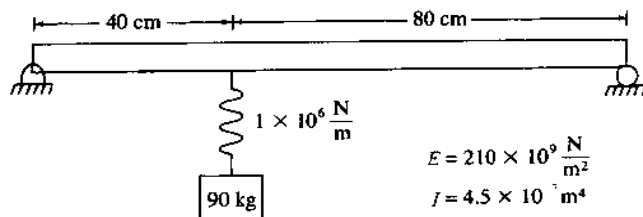


图 1.47

答: $7.69 \times 10^5 \text{ N/m}$ 。

1.47 试求如图 1.48 所示系统的等效刚度。

答: $6.35 \times 10^7 \text{ N/m}$ 。

1.48 如图 1.49 所示的扭转黏性阻尼器由嵌套在半径为 r 的柱体缸里的旋转柱体构成。两

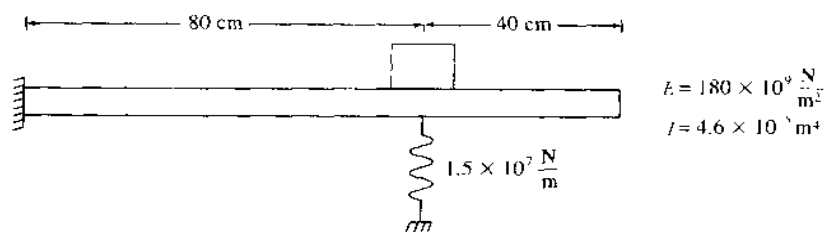


图 1.48

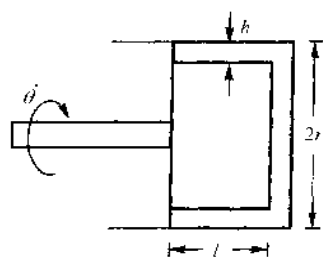


图 1.49

个柱体共轴, 间隙为 h , 其间充满黏性系数为 μ 的液体. 柱体与液体接触的长度为 l . 试求此阻尼器的扭转黏性阻尼系数.

$$\text{答: } c_t = \frac{2\pi\mu r^3 l}{h}.$$

1.49 用 \dot{x} 来表示如图 1.50 所示系统在任意时刻的动能, 并考虑弹簧的惯性影响.

$$\text{答: } \frac{1}{2} \left(\frac{7}{4} m + \frac{5}{4} m_s + \frac{I_p}{4r^2} \right) \dot{x}^2$$

1.50 圆轴的一端固定, 另一端连接一个薄圆盘, 设 θ

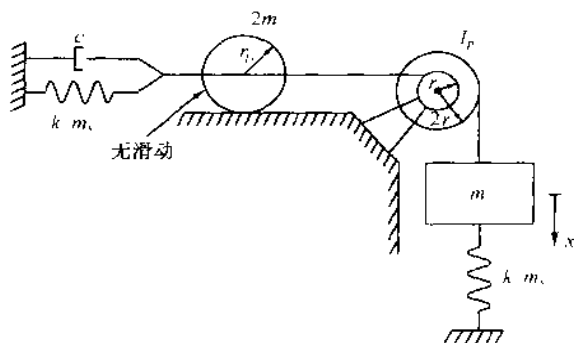


图 1.50

(t) 为圆盘的角位移. 对其轴向质心轴而言, 该圆轴的质量惯性矩为 I . 为了近似的表示该圆轴的惯性影响, 在其一端增加一个圆盘, 试用线性位移近似法来表示增加圆盘的等效质量惯性矩.

$$\text{答: } I_{eq} = \frac{1}{3} I.$$

1.51 有一个悬臂梁长为 L , 横截面积惯性矩为 I , 弹性模量为 E , 自由端有一载荷为 F , 其静挠度为

$$y(z) = \frac{Fz^2}{6EI}(3L - z).$$

若该梁的横截面面积为 A , 密度为 ρ , 试用上述方程推导该梁的等效质量.

$$\text{答: } 0.236\rho AL.$$

1.52 三角方程

$$y(z) = x \left[1 - \cos \left| \frac{\pi z}{2L} \right| \right]$$

满足一个长为 L 的悬臂梁的所有边界条件, 其中 x 为该梁自由端的挠度. 在该梁的自由端加一个质点, 使其可以近似代替该梁的惯性影响, 运用上述方程来确定该质点的质

量, 设梁的密度为 ρ , 横截面面积为 A .

答: $0.227\rho AL$.

- 1.53 悬臂梁惯性影响, 可用一个被置于梁中段 $2/3$ 处的质点来等效, 试用一个与题 1.20 相似的三角方程来确定一个质点的质量.

答: $2/3\rho AL$.

- 1.54 试求如图 1.51 所示啮合系统的等效惯性矩.

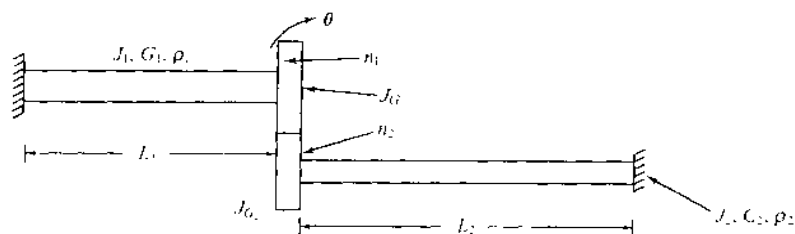


图 1.51

答: $J_{eq} = J_{G1} + J_{G2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2$.

- 1.55 重解题 1.54, 并考虑轴的惯性影响.

答: $\frac{1}{3} J_1 + J_{G1} + \left(J_{G2} + \frac{1}{3} J_2 \right) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2$.

- 1.56 如图 1.42 所示系统, 用 x 作为广义坐标, 试确定该系统的等效模型的 m_{eq} 和 k_{eq} , 注意到在题 1.40 中 $k = 2.09 \times 10^4$ N/m.

答: $m_{eq} = 47.5$ kg, $k_{eq} = 5.23 \times 10^3$ N/m

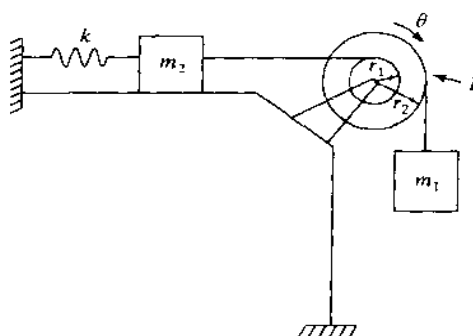


图 1.52

- 1.57 如图 1.52 所示系统, 用 θ 作为广义坐标, 即滑轮的顺时针方向的角位移, 试确定该系统的等效模型的 I_{eq} 和 k_{teq} .

答: $I_{eq} = I + m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2$, $k_{teq} = k r_1^2$.

- 1.58 如图 1.53 所示系统, 用 θ 作为广义坐标, 即杆的逆时针角位移, 试确定该系统的等效模型的 I_{eq} 和 k_{teq} .

答: $I_{eq} = \frac{11}{9} mL^2$, $k_{teq} = kL^2 + \frac{11}{6} mgL$.

- 1.59 如图 1.54 所示系统, 用 x 作为广义坐标, 试确定该系统的等效模型的 m_{eq} , k_{eq} 和 c_{eq} .

答: $m_{eq} = m + \frac{1}{9} \rho L^2$, $c_{eq} = \frac{c}{9}$, $k_{eq} = 3k$.

- 1.60 如图 1.54 所示系统, 用 θ 作为广义坐标, 试确定该系统的等效模型的 I_{eq} , k_{teq} 和 c_{teq} .

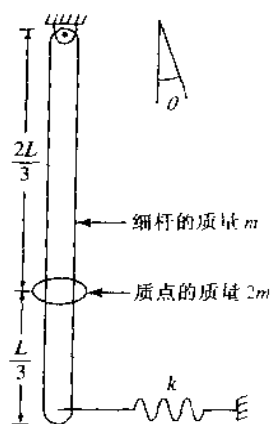


图 1.53

$$\dot{\varphi} = \dot{\theta} \frac{1 + 2\cos^2\theta}{1 + 2\cos\theta} \quad \text{或} \quad \dot{\varphi} = \dot{\theta} \frac{1 + 2\cos\theta}{1 + \cos\theta}$$

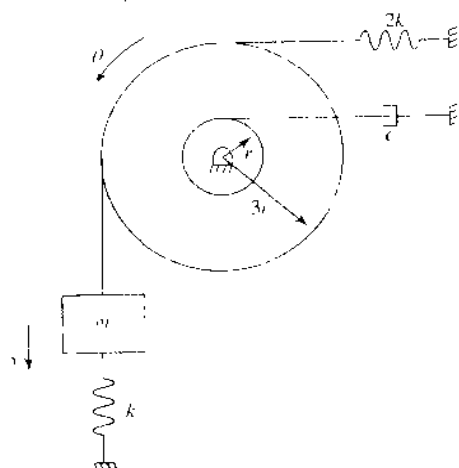


图 1.54

1.61 如图 1.55 所示系统, 用 θ 作为广义坐标, 试确定该系统的等效模型的 I_{eq} , k_{eq} 和 c_{eq} 。

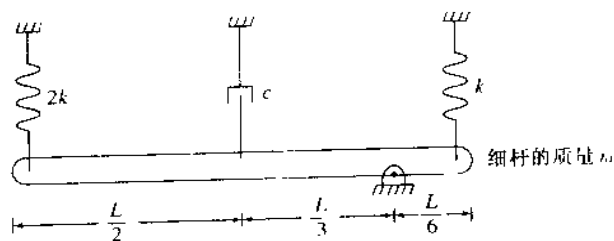


图 1.55

$$\text{答: } I_{eq} = \frac{7}{36}mL^2, \quad c_{eq} = \frac{1}{9}cL^2, \quad k_{eq} = \frac{17}{12}kL^2$$

1.62 运用能量方法推导两个串联在一起的相等的弹簧的等效刚度。

$$\text{答: } k/2.$$

第二章 单自由度系统的自由振动

§ 2.1 微分方程的推导

用如图 2.1 或图 2.2 所示系统可以对所有的线性单自由度系统进行模型化. 系统的等效方法或能量方法, 正如第一章中所描述到的可以用来求系统的等效惯性、刚度和阻尼特性. 当广义坐标为线位移坐标时, 如图 2.1 所示系统可以用来作为模型, 其微分方程为

$$m_{eq}\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = 0. \quad (2.1)$$

当广义坐标为角位移坐标时, 图 2.2 所示系统可以用来作为模型, 其微分方程为

$$I_{eq}\ddot{\theta} + c_{teq}\dot{\theta} + k_{teq}\theta = 0. \quad (2.2)$$

另外一个用来推导单自由度系统运动的微分方程的方法是隔离体简图解法. 画出在任意时刻的物块的隔离体图. 由弹性因素和黏性阻尼而产生的外力用所选的广义坐标的形式标定出来, 其方向与所选的广义坐标的正方向一致. 牛顿力学的基本规律适用于隔离体简图, 由该规律可以推导出微分方程. 对于作平面运动的刚性体来说, 这些方程为

$$\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}, \quad (2.3)$$

$$\sum M_G = \bar{I}\alpha, \quad (2.4)$$

其中上面有横线的量表示物体的质心 G 的对应量.

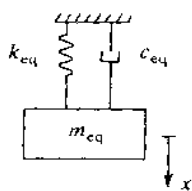


图 2.1

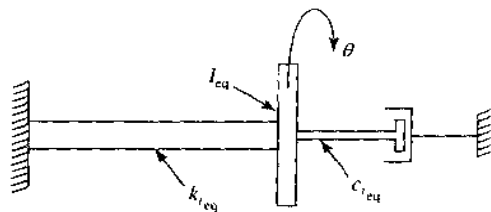


图 2.2

对于作平面运动的刚体, 若用达朗贝尔原理时, 则刚体的隔离体图上, 除了要画上任意时刻作用物体上的外力以外, 还应画上的在某时刻的有效力. 对于刚性隔离体来说, 有效力定义为大小等于 $m\bar{\mathbf{a}}$, 作用在质心上, 及力偶矩等于 $\bar{I}\alpha$. 对于任意一点 A 来说, 方程(2.3)和方程(2.4)具有以下形式:

$$(\sum \mathbf{F})_{\text{ext}} = (\sum \mathbf{F})_{\text{eff}} \quad (2.5)$$

和

$$(\sum M_A)_{\text{ext}} = (\sum M_A)_{\text{eff}}. \quad (2.6)$$

§ 2.2 微分方程的标准形式

方程(2.1)可以写为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0, \quad (2.7)$$

其中

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \quad (2.8)$$

被称作系统的无阻尼固有频率, 而

$$\zeta = \frac{c_{\text{eq}}}{2m_1\omega_n} = \frac{c_{\text{eq}}}{2\sqrt{m_{\text{eq}}k_{\text{eq}}}} \quad (2.9)$$

被称作阻尼比, 方程(2.7)的初始条件形式为

$$x(0) = x_0 \quad (2.10)$$

和

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (2.11)$$

§ 2.3 无阻尼响应

当 $\zeta=0$ 时, 方程(2.7)满足方程(2.10)和(2.11)的解为

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi), \quad (2.12)$$

其中振幅 A 为离开平衡位置的最大位移, 其大小由下式确定:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}. \quad (2.13)$$

相位角 ϕ 由下式确定:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} \right). \quad (2.14)$$

方程(2.12)如图 2.3 所示.

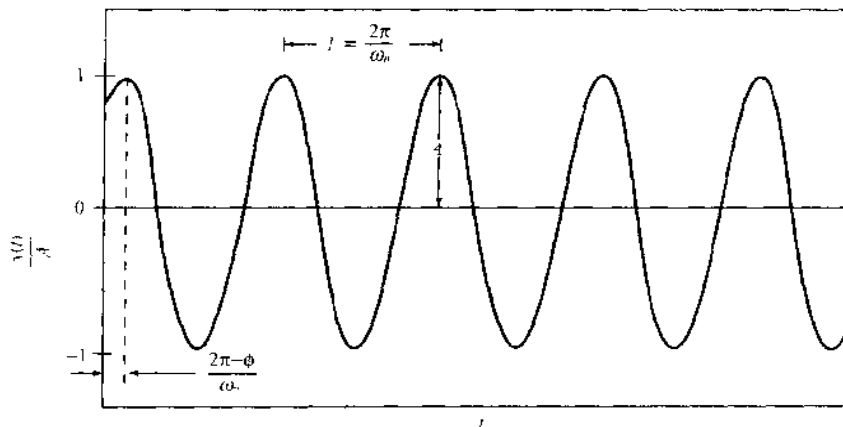


图 2.3

§ 2.4 阻尼响应

对于一个有黏性阻尼的单自由度系统来说, 自由振动响应的机械运动形式取决于 ζ 的大小.

情形 1: $\zeta < 1$ (欠阻尼)

$$x(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_d), \quad (2.15)$$

其中

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2}, \quad (2.16)$$

$$\phi_d = \arctan \frac{x_0 \omega_d}{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}. \quad (2.17)$$

有阻尼的固有频率为

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.18)$$

当 $x_0 \neq 0$ 时, 方程(2.15)如图 2.4 所示.

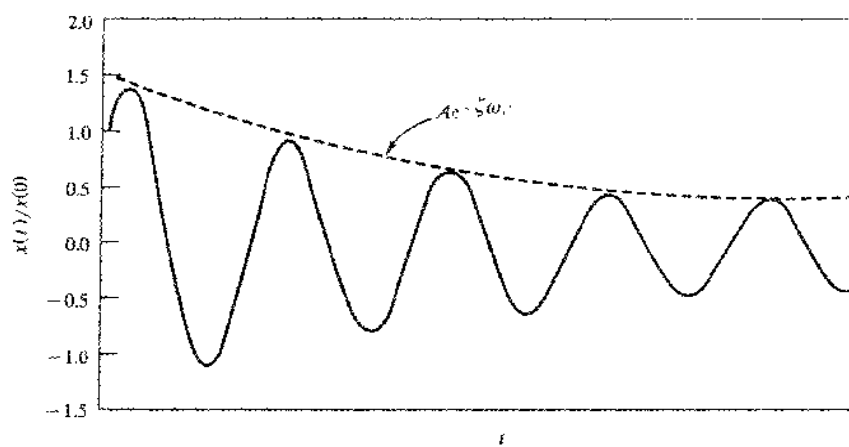


图 2.4

对一个欠阻尼系统来说, 对数减缩率被定义为

$$\delta = \ln \left[\frac{x(t)}{x(t + T_d)} \right] \quad (2.19)$$

其中阻尼周期为

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad (2.20)$$

情形 2: $\zeta = 1$ (临界阻尼).

对于 $\zeta = 1$ 的情况, 方程(2.7)满足方程(2.10)和(2.11)的解为

$$x(t) = e^{-\omega_n t} [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0) t] \quad (2.21)$$

方程(2.21)如图 2.5 所示.

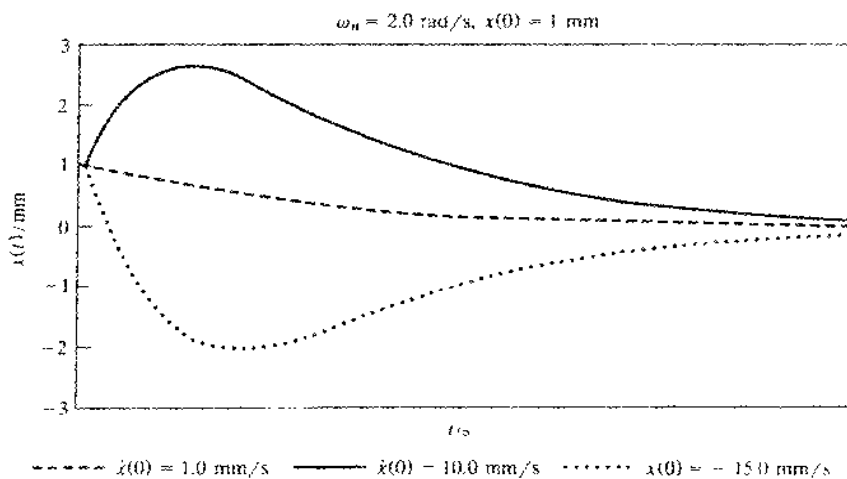


图 2.5

情形 3: $\zeta > 1$ (过阻尼).

对于 $\zeta > 1$ 的情况, 方程(2.7)满足方程(2.10)和(2.11)的解为

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left\{ \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} + x_0 \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1} \right) \right] e^{+\omega_n \sqrt{\zeta^2-1} t} \right. \\ & \left. + \left[-\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} + x_0 \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1} \right) \right] e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2-1} t} \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\omega_n = 3 \text{ rad/s}, \quad \zeta = 1.2, \quad x(0) = 1 \text{ mm},$$

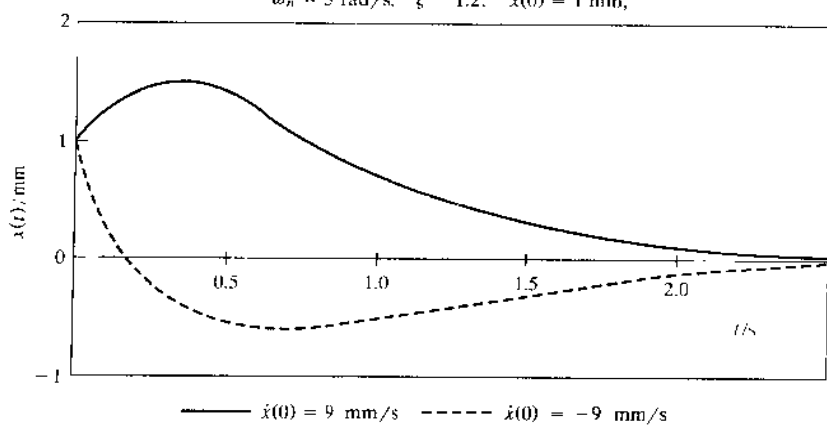


图 2.6

方程(2.22)如图 2.6 所示。

§ 2.5 满足库仑阻尼系统的自由振动响应

具有库仑阻尼系统运动的微分方程可以被普遍的写为

$$\ddot{x} + \omega_{eq}^2 x = \begin{cases} \frac{F_f}{m_{eq}}, & \dot{x} > 0, \\ \frac{F_f}{m_{eq}}, & \dot{x} < 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

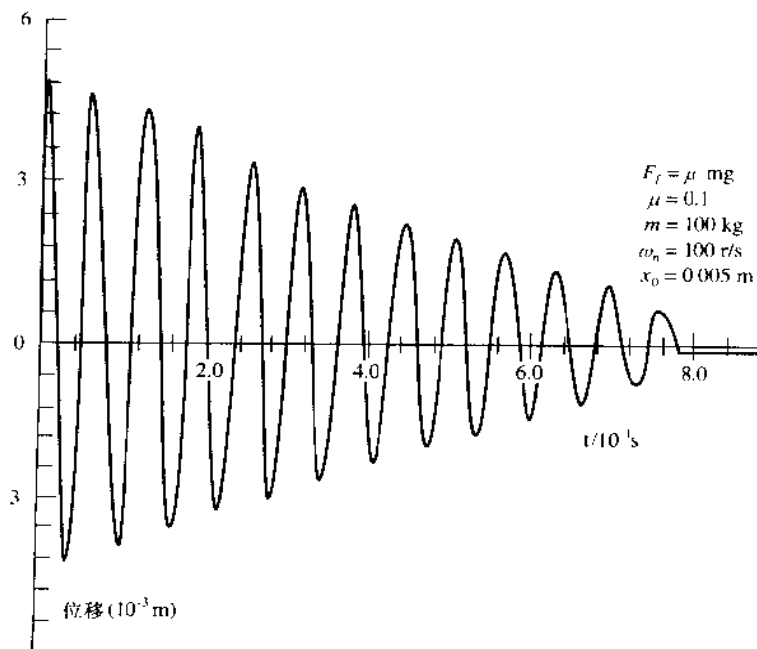


图 2.7

其中 F_f 为摩擦力大小, 当 $x_0 = \delta$ 和 $\dot{x}_0 = 0$ 时, 方程 (2.23) 的解非常复杂, 如图 2.7 所示, 在每一个周期, 响应的振幅不断下降, 即有

$$\Delta A = -\frac{4F_f}{m_c \omega_n^2}, \quad (2.24)$$

当弹性因素中的力不足以克服摩擦力时, 运动将停止, 使得该系统具有一个非平衡位置的永久位移。

例 题

- 2.1 运用等效系统法来推导如图 1.28 所示系统自由振动微分方程, 以 x 作为其广义坐标, 并求该系统的固有频率。

解 根据图 1.28 所示系统可以用一个如图 2.1 所示的无限元系统来模型化 (根据题 1.22 可知, 该等效系统参数为

$$m_{eq} = m \frac{l}{r^2}, \quad k_{eq} = 3k, \quad c_{eq} = 0.$$

运用方程 (2.1) 来表示微分方程为

$$\begin{aligned} \left(m + \frac{l}{r^2} \right) \ddot{x} + 3kx &= 0, \\ \ddot{x} + \frac{3kr^2}{l + mr^2} x &= 0. \end{aligned}$$

从该方程可以确定出固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3kr^2}{l + mr^2}}.$$

- 2.2 运用等效系统法来推导如图 1.31 所示系统自由振动的微分方程, 以 θ 作为其广义坐标, 并求该系统的固有频率。

解 根据题 1.25 的结果, 图 1.31 所示系统可以用如图 2.2 所示的无限元系统来模型化, 其中,

$$I_{eq} = \frac{7}{27} mL^2, \quad k_{eq} = \frac{43}{81} kL^2$$

然后, 运用方程 (2.2) 可得到微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{7}{27} mL^2 \ddot{\theta} + \frac{43}{81} kL^2 \theta &= 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{43}{21} \frac{k}{m} \theta &= 0 \end{aligned}$$

从该方程可以确定出固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{43k}{21m}}.$$

- 2.3 运用等效系统法来推导如图 1.35 所示系统自由振动的微分方程, 以 θ 作为其广义坐标, 并求该系统的固有频率。

解 根据题 1.30 的结果, 图 1.35 所示系统可以用如图 2.2 所示的系统来模型化, 其中

$$I_{eq} = \frac{7}{48} mL^2, \quad c_{eq} = \frac{9}{16} cL, \quad k_{eq} = \frac{1}{16} kL^2.$$

然后, 运用方程 (2.2) 可得到微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{7}{48} mL^2 \ddot{\theta} + \frac{9}{16} cL \dot{\theta} + \frac{1}{16} kL^2 \theta &= 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{27}{7} \frac{c}{m} \dot{\theta} + \frac{3}{7} \frac{k}{m} \theta &= 0. \end{aligned}$$

从该方程可以确定出固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{7m}}.$$

2.4 设 x 为广义坐标, 用隔离体的图解法推导如图 1.28 所示系统的运动微分方程.

解 系统中物块和圆盘在任意时刻隔离体图解如图 2.8 所示. 由于重力作用而使弹簧产生静变形, 这种作用在微分方程中被消除了. 圆盘中心的力矩总和为

$$\left(\sum M_O\right)_{\text{ext}} = \left(\sum M_O\right)_{\text{int}},$$

导出

$$-(k_s)x - (2k_s)x = (m_s)(\ddot{x}) + I \left(\frac{\ddot{x}}{r}\right),$$

$$\left(mr + \frac{I}{r}\right)\ddot{x} + 3k_sx = 0.$$

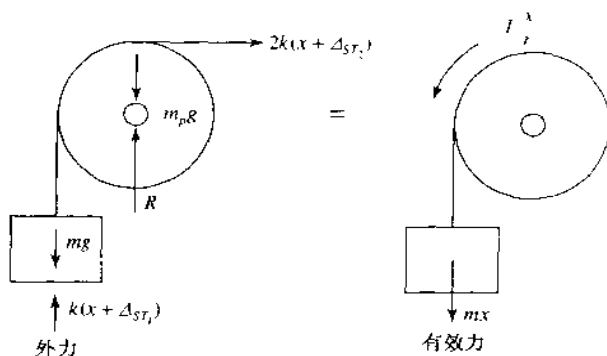


图 2.8

2.5 设 θ 为广义坐标, 用隔离体的图解法推导如图 1.31 所示系统的运动微分方程.

解 用 ϕ 表示杆 CD 顺时针方向旋转的角度. 由于是刚性连接, 所以质点位移是相同的, 假定 θ 和 ϕ 都很小, 有

$$L\phi = \frac{2}{3}L\theta \rightarrow \phi = \frac{2}{3}\theta$$

杆的隔离体图解如图 2.9 和 2.10 所示. 假定 θ 很小, 由于重力作用而产生的静变形, 这种效果在微分方程中被抵消了. 作用在杆上的力矩总和应是

$$\left(\sum M_O\right)_{\text{ext}} = \left(\sum M_O\right)_{\text{int}},$$

推导出

$$-3k\left(\frac{L}{3}\theta\right)\frac{L}{3} - F_{BC}\left(\frac{2}{3}L\right) - \frac{L}{6}m\ddot{\theta}\left(\frac{L}{6}\right) = \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta},$$

$$F_{BC} = -\frac{1}{6}mL\ddot{\theta} - \frac{1}{2}kL\theta.$$

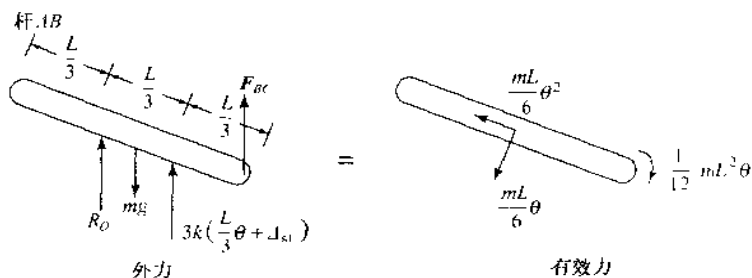


图 2.9

作用在杆 CD 上的力矩总和是

$$\left(\sum M_O\right)_{\text{ext}} = \left(\sum M_O\right)_{\text{int}},$$

推导出

$$F_{ph}L = \frac{4}{9}kL\dot{\theta}\left[\frac{2}{3}L\right] - \frac{1}{2}mL\left[\frac{2}{3}\dot{\theta}\right]\left[\frac{L}{2}\right] + \frac{1}{12}mL^2\left[\frac{2}{3}\dot{\theta}\right],$$

代入 F_{ph} 推导出

$$\frac{7}{18}mL^2\ddot{\theta} - \frac{43}{54}kL^2\theta = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{43}{21}\frac{k}{m}\theta = 0.$$

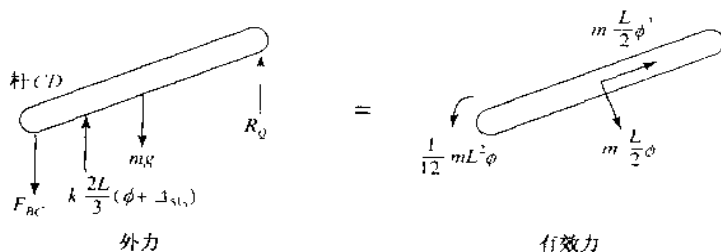


图 2.10

2.6 设 θ 为广义坐标, 用隔离体的图解法推导如图 1.35 所示系统的运动微分方程。

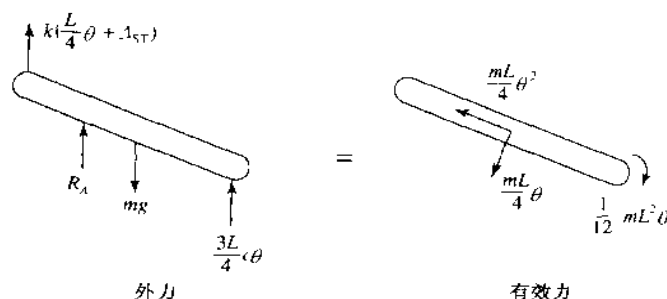


图 2.11

解 假定 θ 很小, 杆在任意时刻的隔离体图解如图 2.11 所示。由于重力作用导致弹簧静变形, 这些数的项在微分方程中被消除了, 因此, 杆上各力对销钉的力矩总和为

$$\left(\sum M_A\right)_{\text{ex}} = \left(\sum M_A\right)_{\text{in}},$$

导出

$$-k\frac{1}{4}\theta\left[\frac{L}{4}\right] - \frac{3}{4}cL\dot{\theta}\left[\frac{3}{4}L\right] - \frac{L}{4}m\dot{\theta}\left[\frac{L}{4}\right] + \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta},$$

$$\frac{7}{48}mL^2\ddot{\theta} + \frac{9}{16}cL^2\dot{\theta} + \frac{1}{16}kL^2\theta = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{27}{7}\frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{3}{7}\frac{k}{m}\theta = 0.$$

2.7 计算图 1.15 所示系统的固有频率。从题 1.11 可知, 图 1.15 所示的系统可用图 2.1 所示的系统模型等效, 其中

$$k_{\text{eq}} = \frac{7}{6}k, \quad m_{\text{eq}} = m,$$

解 因此从方程(2.8)可推出

$$\omega_n = \sqrt{\frac{7k}{6m}} = \sqrt{\frac{7k}{6m}}.$$

2.8 在一个长 1.8 m 的悬臂钢梁 ($E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$) 的末端放置一个重 200 kg 的机器。该

机器以 21 Hz 的固有频率振动, 求这个梁的横截面关于它的中轴线的惯性矩是多大?

解 系统的固有频率是

$$\omega_n = 21 \text{ Hz} = \left[21 \frac{\text{周}}{\text{s}} \right] \left[2\pi \frac{\text{rad}}{\text{周}} \right] = 131.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

与系统的固有参数关系是

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \rightarrow k_{eq} = m\omega_n^2 = (200 \text{ kg}) \left[131.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]^2 = 3.48 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}},$$

对悬臂梁末端的质量来说, 梁的等效刚度是

$$k_{eq} = \frac{3EI}{L^3},$$

因此

$$I = \frac{k_{eq}L^3}{3E} = \frac{\left[3.48 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right] (1.8 \text{ m})^3}{3 \left[210 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]} = 3.22 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

2.9 在一个长 40 cm 重 2.5 kg 的细长杆的一端装有一个销钉连接, 杆上放有一个 3 kg 的质点, 这个质点应该放在离这个销钉多远的地方才能使杆的振动周期为 1 s?

解 如果振动周期为 1 s, 则

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1 \text{ s}} = 6.28 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

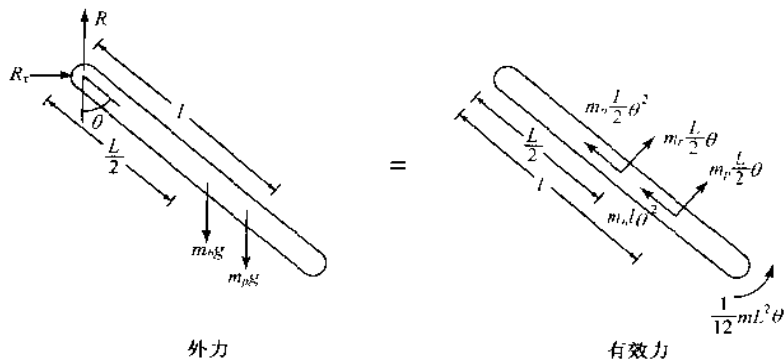


图 2.12

设 l 为质点到销钉的距离, 设 θ 为系统从垂直平衡位置算起的逆时针的角位移, 杆和质点在任意时刻的隔离体图解如图 2.12 所示, 因此, 所有力关于对支撑点之矩求和为

$$\left(\sum M_O \right)_{\text{ext}} = \left(\sum M_O \right)_{\text{eff}}.$$

假定 θ 很小, 可推出

$$-m_b g \frac{l}{2} \theta - m_p g l \theta - m_p l \ddot{\theta}(t) + m_b \frac{l}{2} \theta \left[\frac{l}{2} \right] + \frac{1}{12} m l^2 \ddot{\theta},$$

$$\left(m_b \frac{l^2}{3} + m_p l^2 \right) \ddot{\theta} + \left(m_b \frac{l}{2} + m_p l \right) g \theta = 0.$$

从微分方程中可算出固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\left(m_b \frac{l}{3} + m_p l \right) g}{m_b \frac{l^2}{3} + m_p l^2}}.$$

变换得

$$m_p \omega_n^2 l^2 = m_p g l + m_b \frac{l^2}{3} \omega_n^2 - m_b \frac{l}{2} g = 0,$$

代入已知的数值, 计算得

$$118.3l^2 - 29.43l + 0.36 = 0,$$

它的正解为 $l = 0.235 \text{ m}$.

- 2.10 一个质量 5 kg 的圆轮安装在一个质量为 1 kg 的圆板上, 这个圆板中心与一个直径为 40 mm , 长为 75 cm ($G = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$) 的钢棒相连接, 它的另一端是固定的. 圆板质心的极惯性矩为 $1.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 这个机构的扭转振动周期为 0.15 s . 求轮子的极惯性矩是多大?

解 2.28 如果 $c_{\tau_{eq}} = 0$, 那么这个扭转振动就与图 2.2 中的系统模型等效. 棒的扭转刚度是

$$k_t = \frac{JG}{L} = \frac{\frac{\pi}{2} (0.02 \text{ m})^4 \left(80 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{0.75 \text{ m}} = 2.68 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}.$$

固有频率为

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.15 \text{ s}} = 41.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

扭转系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{I}} \rightarrow I = \frac{k_{eq}}{\omega_n^2} = \frac{2.68 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}}{\left(41.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2} = 15.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

因此圆轮的惯性矩为

$$I_w = I - I_p = 15.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 - 1.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 13.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

- 2.11 质量 60 kg 直径为 40 cm 圆筒, 盛有质量密度为 1100 kg/m^3 废料, 圆筒被直径为 30 mm 的钢缆所吊起 ($E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$). 当圆筒被吊起 10 m 时, 测出系统的固有频率为 40 Hz . 求圆筒中的废料的容量.

解 2.29 这个系统可以看成如下的模型: 一个物体连接在一个弹性杆的末端. 所测的频率是纵向振动的频率. 这个钢缆的等效刚度是

$$k_{eq} = \frac{AE}{L} = \frac{\pi (0.015 \text{ m})^2 \left(210 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{10 \text{ m}} = 1.48 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

总质量为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \rightarrow m = \frac{k_{eq}}{\omega_n^2} = \frac{1.48 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{\left(40 \frac{\text{Hz}}{2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \right)^2} = 234.3 \text{ kg}.$$

因此, 废料的质量为

$$m_w = m - m_d = 234.3 \text{ kg} - 60 \text{ kg} = 174.3 \text{ kg}.$$

它的容量为

$$V = \frac{m_w}{\rho} = \frac{174.3 \text{ kg}}{1100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0.158 \text{ m}^3.$$

- 2.12 特技表演的高空杂技师经常用一个摇摆棒. 摇摆棒是由一端固定细长的棒组成, 以至高空杂技师能在它的另一端摇摆并表演把戏. 当一个重 120 lb ①的杂技师在一个直径为 4 in ②的 25 ft ③ ($E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$) 长钢棒上时, 它的固有频率是多少 Hz ?

解 2.30 在摇摆棒的一端的高空杂技师, 可以被模型化为在一个悬臂梁的末端有一个质量. 因此, 这个杆的等效刚度是

$$k_{eq} = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \left(29 \times 10^6 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} \right) \left(\frac{12 \text{ in}}{4} \right)^4 \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{6} \text{ ft} \right)^4}{(25 \text{ ft})^3} = 4.86 \times 10^6 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}.$$

因此高空杂技师的固有频率是

① lb (磅)为非法定单位, $1 \text{ lb} = 0.453592 \text{ kg}$.

② in (英寸)为非法定单位, $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$.

③ ft (英尺)为非法定单位, $1 \text{ ft} = 3.048 \times 10^{-1} \text{ m}$.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{4.86 \times 10^3 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}}{\frac{120 \text{ lb}}{32.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}}}} = 3.30 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \left(\frac{1 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \right) \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 1.82 \text{ Hz}$$

2.13 求如图 2.13 所示系统的固有频率。

解 设 θ 为从系统平衡位置开始算起杆的顺时针方向的角位移。假定 θ 很小, 系统在任意时刻的势能为

$$V = \frac{1}{2} k \left(\frac{L}{3} \theta \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} k L^2 \right) \theta^2 \rightarrow k_{eq} = \frac{1}{9} k L^2$$

系统在任意时刻的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m L^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{6} L \dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{2}{3} L \dot{\theta} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} m L^2 + \frac{4}{9} M L^2 \right) \dot{\theta}^2 = I_{eq} \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{9} m L^2 + \frac{4}{9} M L^2 \end{aligned}$$

则得微分方程为

$$\left(\frac{1}{9} m L^2 + \frac{4}{9} M L^2 \right) \ddot{\theta} + \frac{1}{9} k L^2 \theta = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m + 4M} \theta = 0,$$

从以上可以确定出固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + 4M}}$$

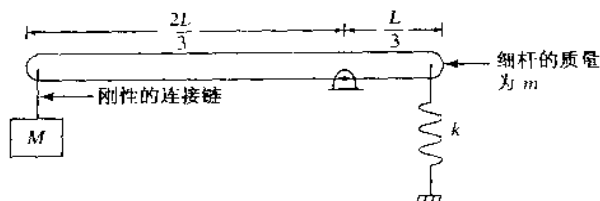


图 2.13

2.14 图 2.14 中质量 200 kg 的物块的固有频率是多少?

解 简支梁在它的中点的等效刚度是

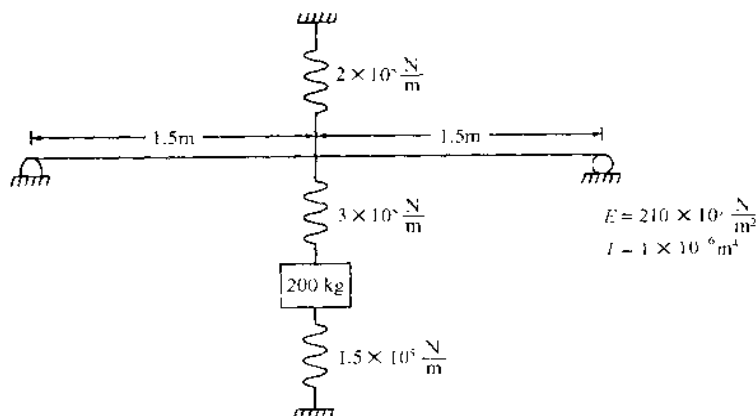


图 2.14

$$k_h = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48 \left(210 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (1 \times 10^{-6} \text{m}^4)}{(3\text{m})^3} = 3.73 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

梁和上面的弹簧并联, 这个并联组合又与梁和物块连接的弹簧串联起来, 最后, 又与连接物块和地面的弹簧并联起来. 用并联与串联结合的方程, 得到系统的等效刚度是

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{3.73 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}} + \frac{1}{2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}} + \frac{1}{3 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} + 1.5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ = 3.47 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

固有频率是

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{3.47 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{200 \text{kg}}} = 41.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- 2.15 一个质量 500 kg 的车辆被安装在一个弹簧上, 使弹簧的静变形是 1.5 mm. 为了使系统达到临界阻尼, 加在系统上并与弹簧并联的黏性阻尼器的阻尼系数是多少?

解 静变形与固有频率的关系为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}} = \sqrt{\frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0.0015 \text{m}}} = 80.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

由附加的黏性阻尼器的阻尼系数 c 导出的阻尼比为

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \rightarrow c = 2\zeta m\omega_n.$$

当阻尼比为 1 时, 系统处于临界衰减, 则此时的阻尼系数为临界阻尼系数, 即

$$c = 2(1)(500 \text{kg}) \left(80.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) = 8.09 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}.$$

- 2.16 当 c 为多少时, 图 2.15 所示的系统的阻尼比等于 1.25?

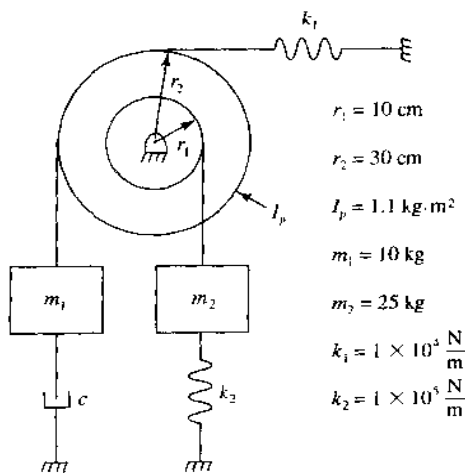


图 2.15

解 用等效系统模型来推导微分方程. 设 θ 为圆盘的逆时针角位移, 系统在任意时刻的动能为

$$T = \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 (r_2 \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_1 \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} (I_p + m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2) \dot{\theta}^2 \\ \rightarrow I_{eq} = I_p + m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2 \\ = 1.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + (10 \text{kg})(0.3 \text{m})^2 + (25 \text{kg})(0.1 \text{m})^2 = 2.25 \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

系统在任意时刻的势能为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k_1(r_2\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(r_1\theta)^2 = \frac{1}{2}(k_1r_2^2 + k_2r_1^2)\theta^2 \\ &\rightarrow k_{\text{eq}} = k_1r_2^2 + k_2r_1^2 = \left[1 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right](0.3\text{m})^2 + \left[1 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right](0.1\text{m})^2 \\ &= 1900 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} \end{aligned}$$

在两个任意时刻之间阻尼力所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} c r_2^2 \dot{\theta} d(r_2\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} c r_2^2 \dot{\theta} d\theta \\ &\rightarrow c_{r_{\text{eq}}} = c r_2^2 = (0.3\text{m})^2 c = 0.09c. \end{aligned}$$

因此,微分方程为

$$\begin{aligned} 2.25\ddot{\theta} + 0.09c\dot{\theta} + 1900\theta &= 0, \\ \ddot{\theta} + 0.04c\dot{\theta} + 844.4\theta &= 0. \end{aligned}$$

从这个微分方程得

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{844.4} = 29.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\ 2\xi\omega_n &= 0.04c. \end{aligned}$$

若阻尼比是 1.25,则阻尼系数 c 为

$$c = \frac{2(1.25)\left(29.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)}{0.04 \frac{\text{m}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}} = 1820 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}.$$

- 2.17** 枪的机械反冲通常设计成临界阻尼情况,以致它能迅速的返回到它开枪时的位置而产生过冲.为一个 10 kg 的枪设计一个机械反冲装置(即求 c 和 k),使其具有 5 cm 的反冲,并要求在最大反冲后的 0.5 s 内,开火机械能返回到 0.5 mm 以内.

解 当机械达到最大反冲时,设 $t=0$.机械从这个时刻开始的反应可看成临界阻尼系统,并有 $x(0)=0.05\text{ m}$,和 $\dot{x}(0)=0$.从方程(2.21)有

$$x(t) = 0.05e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t).$$

要求 $x(0.5)=0.0005\text{ m}$,可推出

$$0.0005 = 0.05e^{-0.5\omega_n}(1 + 0.5\omega_n).$$

由试凑法可得到 $\omega_n = 13.2\text{ rad/s}$,由此解出

$$\begin{aligned} k &= m\omega_n^2 = (10\text{kg})\left(13.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = 17400 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \\ c &= 2m\omega_n = 2(10\text{kg})\left(13.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) = 264 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}. \end{aligned}$$

- 2.18** 铁路的缓冲器被设计成一个带有一个黏性缓冲器与一个弹簧并联.当这个阻尼器工作在一个 20 000 kg 的火车并有 $2 \times 10^5\text{ N/m}$ 的刚度时,要使系统阻尼比为 1.25 时,问缓冲器的阻尼系数应为多少?

解 从阻尼比可计算出阻尼系数为

$$c = 2\xi\sqrt{mk} = 2(1.25)\sqrt{(20\,000\text{kg})\left(200\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)} = 1.58 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}.$$

- 2.19** 题 2.18 中的火车在安装缓冲器时以 20 m/s 速度行驶.问缓冲器的最大偏移量是多少?

解 题 2.18 中系统的固有频率是

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{20\,000\text{kg}}} = 3.16 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

当车啮合缓冲器时,设 $t=0$,由于系统处在过阻尼情况,并有 $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=20\text{ m/s}$,应用方程

(2.22)可导出

$$x(t) = \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3.16 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = \frac{e^{-(1.58)(3.16)t}}{2 \sqrt{(1.25)^2 - 1}} \\ \times [e^{(3.16)\sqrt{(1.25)^2 - 1}t} - e^{-(3.16)\sqrt{(1.25)^2 - 1}t}], \\ x(t) = 4.22(e^{-1.58t} - e^{-6.32t}) \text{ m},$$

获得最大偏移的时间由求导数得到

$$\frac{dx}{dt} = 0 = 4.22(-1.58e^{-1.58t} + 6.32e^{-6.32t}), \\ \frac{6.32}{1.58} = \frac{e^{-1.58t}}{e^{-6.32t}} = e^{4.74t}, \\ t = \frac{1}{4.74} \ln\left(\frac{6.32}{1.58}\right) = 0.292 \text{ s}.$$

因此最大缓冲偏移为

$$x_{\max} = 4.22(e^{-1.58(0.292)} - e^{-6.32(0.292)}) = 1.99 \text{ m}.$$

- 2.20 空火车的质量为 4500 kg. 当题 2.18 中的缓冲器安装在空车时, 问系统的固有频率和阻尼比为多少?

解 固有频率和阻尼比可如下计算为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{4500 \text{ kg}}} = 6.67 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\ \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{1.58 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}}{2\sqrt{(4500 \text{ kg})\left(200\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)}} = 2.63.$$

- 2.21 对欠阻尼系统来说, 过冲被看成是系统在它的第一个半周期结束时的最大位移. 问最小阻尼比应为多少, 才能使系统的过冲不大于 5%?

解 欠阻尼系统的一般响应为

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_d).$$

设 Δ 为欠阻尼系统的初始位移, 则有

$$x(0) = \Delta = A \sin \phi_d.$$

对 5% 的过冲来说, 有

$$x\left(\frac{T_d}{2}\right) = 0.05\Delta = Ae^{-\zeta\omega_n (T_d/2)} \sin\left(\frac{\omega_d T_d}{2} + \phi_d\right) = A \sin \phi_d e^{-\zeta\omega_n (T_d/2)} \\ = \Delta e^{-\zeta\omega_n (T_d/2)}.$$

阻尼器的固有周期为

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}},$$

因此

$$0.05 = e^{-(\zeta\pi\sqrt{1-\zeta^2})}, \\ \zeta = \sqrt{\frac{[\ln(0.05)]^2}{\pi^2 + [\ln(0.05)]^2}} = 0.690.$$

- 2.22 为质量 2000 kg 的车辆(自重)设计悬挂器, 估计来自乘客和货物的最大附加质量为 1000 kg. 当车辆为空载时, 悬挂器的静偏移为 3.1 mm. 为了使它在空载和满载时所承受不大于 5% 的过冲, 系统的最小阻尼系数是多少?

解 所要求的悬挂器刚度为

$$k = \frac{mg}{\Delta s} = \frac{(2000 \text{ kg}) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{0.0031 \text{ m}} = 6.33 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}},$$

题 2.21 结果表明, 阻尼比必须不小于 0.69 才能把过冲限制在 5% 左右。刚度固定但质量可变的系统的阻尼比对一个更大的质量来说应该小一些, 因此当交通工具满载时, 它的阻尼系数必须限制在 0.69, 即有

$$c = 2\zeta \sqrt{mk} = (0.69) \sqrt{(3000 \text{ kg}) \left(6.33 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right)} = 1.90 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}.$$

- 2.23 在题 2.22 中设计的汽车悬挂系统发生 5.5 cm 的偏差。如果汽车载有 25 kg 的燃料, 一位 80 kg 的乘客及 110 kg 的货物, 则车的过冲量是多少?

解 汽车总质量为 2215 kg, 因此有

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6.33 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{2215 \text{ kg}}} = 5.35 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{1.90 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}}{2\sqrt{(2215 \text{ kg}) \left(6.33 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right)}} = 0.802.$$

由题 2.20 其过冲量可计算为

$$= x \left(\frac{T_d}{2} \right) = \Delta e^{-(\zeta + \sqrt{1-\zeta^2})} = (0.055 \text{ m}) e^{-(0.802 + \sqrt{1-0.802^2})} = 0.0081 \text{ m}.$$

- 2.24 用一自由振动测试装置来确定一弹性构件的刚度和阻尼性质。构件上系有 20 kg 的物块, 移动物块 1 cm 然后释放, 监测的振荡结果如图 2.16 所示。求构件的 k 和 c 。

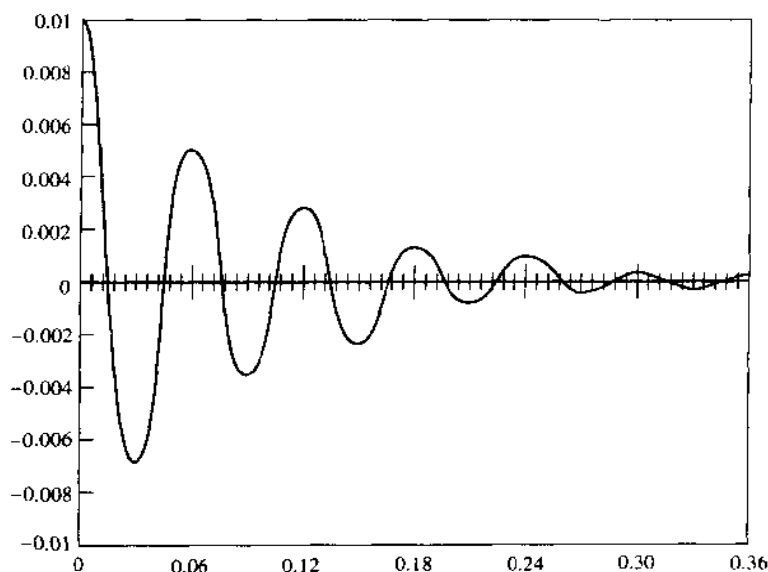


图 2.16

解 图 2.16 中的物块在第一个循环的末尾位移为 0.005 m, 其对数减缩率可计算为

$$\delta = \ln \left(\frac{0.01 \text{ m}}{0.005 \text{ m}} \right) = 0.693.$$

因此, 阻尼比可确定为

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0.693}{\sqrt{4\pi^2 + (0.693)^2}} = 0.11.$$

从图 2.16 可知阻尼周期为 0.06 s, 阻尼固有频率为

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{0.06s} = 104.7 \frac{\text{rad}}{s}.$$

无阻尼固有频率为

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{104.7 \frac{\text{rad}}{s}}{\sqrt{1-(0.11)^2}} = 105.3 \frac{\text{rad}}{s}.$$

所以刚度和阻尼系数为

$$k = m\omega_n^2 = (20\text{kg}) \left(105.3 \frac{\text{rad}}{s} \right)^2 = 2.22 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}},$$

$$c = 2\zeta m\omega_n = 2(0.11)(20\text{kg}) \left(105.3 \frac{\text{rad}}{s} \right) = 4.63 \times 10^2 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}.$$

- 2.25 如图 2.15 中 25 kg 的物块移动 20 mm 后释放, 如果 $c = 100 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$, 经过多少个周期后振幅衰减为 1 mm?

解 利用题 2.16 的结果, 阻尼比为

$$\zeta = \frac{0.04c}{2\omega_n} = \frac{0.04 \left(100 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \right)}{2 \left(29.1 \frac{\text{rad}}{s} \right)} = 0.069.$$

所以其对数减缩率为

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi(0.069)}{\sqrt{1-(0.069)^2}} = 0.435.$$

对数减缩率的概念可以表示为方程(2.19)的形式, 即用循环量之间的关系表示为

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+nT_d)} \right),$$

其中 n 为整数. 因此振幅从最初的 20 mm 衰减为 1 mm 经历 n 个周期, 于是

$$0.435 = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{20\text{mm}}{1\text{mm}} \right) \rightarrow n = 6.89.$$

然而, 因为 n 必须为整数, 所以经历 7 个周期后振幅将为 1 mm.

- 2.26 列举具有库仑阻尼系统和黏性阻尼系统在自由振动中的三条不同之处, 自由振动是欠阻尼的.

解 三条异点如下:

- (a) 库仑阻尼的大小对频率和周期无影响, 而黏性阻尼对频率 ω_d 和周期 T_d 有影响. 黏性阻尼的增加会导致 ω_d 的减少和 T_d 的增加.
- (b) 库仑阻尼系统的振动幅度以每周期定常数减小(线性减小), 而黏性阻尼系统的振幅以对数律减小.
- (c) 库仑阻尼系统在振幅很小以致弹性构件的力不足以克服静摩擦力时会停止运动, 从而产生永久的位移. 而黏性阻尼系统会无限运动下去.

- 2.27 质量为 m 的物体与刚度为 k 的弹簧相连, 并沿摩擦系数为 μ 的表面上滑移, 试用动能定理确定物体每次循环的振幅的变化量.

解 令 X_1 为循环运动开始, 并出现速度为零时的振幅; X_2 为下次循环又出现速度为零时的振幅. 在此时间间隔上, 应用动能定理为

$$T_1 + V_1 + W_{1 \rightarrow 2} = T_2 + V_2,$$

其中

$$T_1 = T_2 = 0,$$

$$V_1 = \frac{1}{2} k X_1^2, \quad V_2 = \frac{1}{2} k X_2^2,$$

并且摩擦力做功为

$$W_{1 \rightarrow 2} = -\mu mg(X_1 + X_2),$$

则有

$$\frac{1}{2} k X_1^2 - \mu mg (X_1 + X_2) = \frac{1}{2} k X_2^2,$$

$$\frac{1}{2} k X_2^2 - \mu mg X_2 + (\mu mg X_1 - \frac{1}{2} k X_1^2) = 0.$$

在求根公式中, 用 X_1 表示 X_2 的解, 即

$$X_2 = \frac{1}{2} \left[-\mu mg \pm \sqrt{(\mu mg)^2 - 2k \left(\mu mg X_1 - \frac{1}{2} k X_1^2 \right)} \right]$$

$$X_2 = -X_1, \quad X_1 = \frac{2\mu mg}{k},$$

而 X_2 必须为正, 所以在半个循环里振幅的改变为

$$X_1 - X_2 = \frac{2\mu mg}{k}.$$

由于振幅的改变量与振幅无关, 在每半个循环中它为常数. 所以, 一个循环运动振幅改变量为

$$\Delta A = \frac{4\mu mg}{k}.$$

2.28 将如图 2.17 所示系统的物体平移 10 mm 后释放, 则物体的激振运动将循环多少次?

解 图 2.17 的系统运动微分方程如下:

$$m\ddot{x} + kx = \begin{cases} -\mu mg, & \dot{x} > 0, \\ \mu mg, & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

与方程(2.23)相比, 则

$$F_f = \mu mg,$$

则每次循环振幅减少为

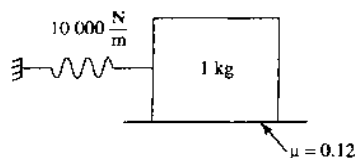


图 2.17

$$\Delta A = \frac{4\mu mg}{k} = \frac{4(0.12)(1\text{kg})\left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{10\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0.47\text{mm},$$

所以, 当振幅提供的弹簧力不能克服摩擦力时, 运动就会停止. 结果永久的位移为

$$kx_f = \mu mg \rightarrow x_f = \frac{\mu mg}{k} = 0.118\text{mm}.$$

因此, 循环的数目为

$$n > \frac{x_0 - x_f}{\Delta A} = \frac{10\text{mm} - 0.118\text{mm}}{0.47\text{mm}} \approx 21.02\text{周},$$

所以, 将会完成 22 次循环.

2.29 将如图 2.18 所示系统的物体平移 25 mm 后释放, 测得每次循环振幅减少 1.2 mm. 则物体与接触面的摩擦系数为多少?

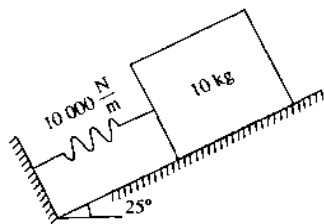


图 2.18

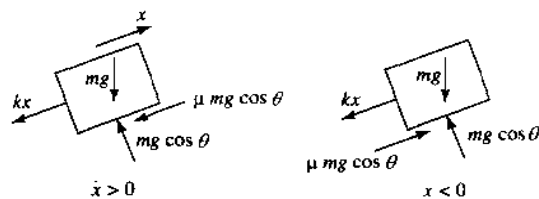


图 2.19

解 对图 2.19 的隔离体图应用牛顿定律, 可得

$$m\ddot{x} + kx = \begin{cases} -\mu mg \cos \theta, & \dot{x} > 0, \\ \mu mg \cos \theta, & \dot{x} < 0. \end{cases}$$

因此, 可由公式(2.23)和(2.24)

$$F_f = \mu mg \cos \theta, \quad \Delta A = \frac{4 \mu mg \cos \theta}{k} \rightarrow \mu = \frac{k \Delta A}{4 mg \cos \theta},$$

代入已知数值, 得到

$$\mu = \frac{\left\{ 1 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right\} (0.0012 \text{ m})}{4 (10 \text{ kg}) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cos(25^\circ)} = 0.034.$$

- 2.30 图 2.20 中的杆与一直径为 5 cm 的柱体连接, 二者之间的摩擦系数为 0.08, 如果杆转动 13° 后释放, 则每次循环角度的减少量为多少?

解 杆在任意瞬时的隔离体图如图 2.21 所示, 杆与圆柱体之间的摩擦的影响, 以大小为 $\frac{\mu mg d}{2}$ 的力矩作用在杆上, 并与杆的运动方向相反, 所以隔离体图表示顺时针角速度. 力矩求和为

$$(\sum M_0)_{\text{eff}} = (\sum M_0)_{\text{ext}}.$$

假定 θ 很小, 则

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\theta = \begin{cases} -\mu mg \frac{d}{2}, & \dot{\theta} < 0, \\ \mu mg \frac{d}{2}, & \dot{\theta} > 0. \end{cases}$$

由上式及方程(2.23)可得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{I + ml^2}}, \quad F_f = \frac{1}{2} \mu mg d.$$

由方程(2.24)可得

$$\Delta\theta = \frac{4 \left(\frac{1}{2} \mu mg d \right)}{mgl} \approx \frac{2\mu d}{l},$$

代入已知数值得到

$$\Delta\theta = \frac{2(0.08)(0.05 \text{ m})}{0.6 \text{ m}} = 0.0133 \text{ rad} = 0.76^\circ.$$

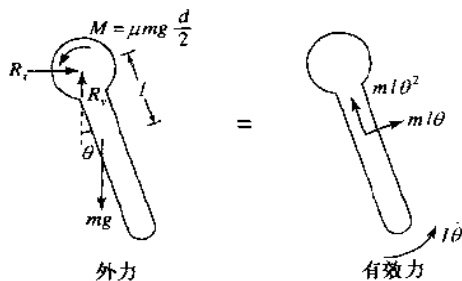


图 2.21

补充习题

- 2.31 用等效系统法推导如图 2.22 所示系统的运动微分方程. 以 x 为广义坐标, 试求系统的固有频率.

答: $\left(m + \frac{I}{9r^2} \right) \ddot{x} + \frac{k}{9} x = 0, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k r^2}{I + 9 m r^2}}.$

- 2.32 用等效系统法推导如图 2.23 所示系统运动的微分方程. 以 θ 作为广义坐标, 并假定 θ 很小, 试求系统的固有频率.

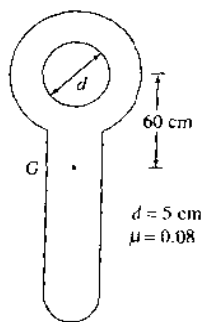


图 2.20

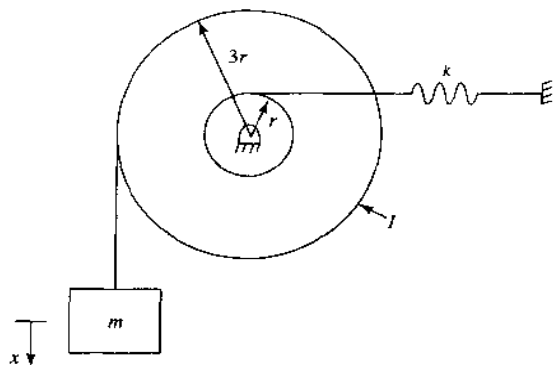


图 2.22

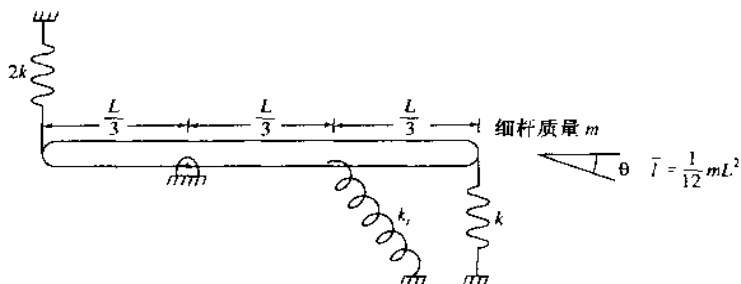


图 2.23

答: $\frac{1}{9} mL^2 \ddot{\theta} + \left(\frac{2}{3} kL^2 + k_t \right) \theta = 0, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{6kL^2 + 9k_t}{mL^2}}.$

- 2.33 用等效系统法推导如图 2.24 所示系统运动的微分方程. 把 x 作为广义坐标, 假定 x 很小, 试求系统的固有频率.

答: $\left(\frac{1}{3} m + M \right) \ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m + 3M}}.$

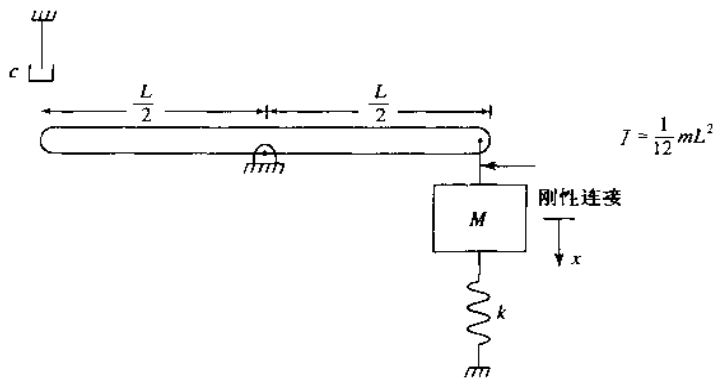


图 2.24

- 2.34 用隔离体图解法推导如图 2.25 所示系统运动的微分方程. 把 θ 作为广义坐标, 假定 θ 很小, 假定结构是由细长的杆嵌套而成.

答: $\frac{81}{96} mL^2 \ddot{\theta} + mgL\theta = 0.$

- 2.35 用隔离体图解法推导如图 2.26 所示系统运动的微分方程. 把 θ 作为广义坐标, 假定 θ

很小.

答: $\frac{7}{48}mL^2\ddot{\theta} - \frac{9}{16}cL^2\dot{\theta} + \left(\frac{11}{16}kL^2 - mg\frac{L}{4}\right)\theta = 0$.

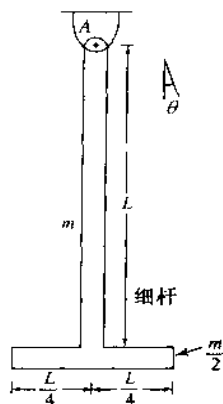


图 2.25

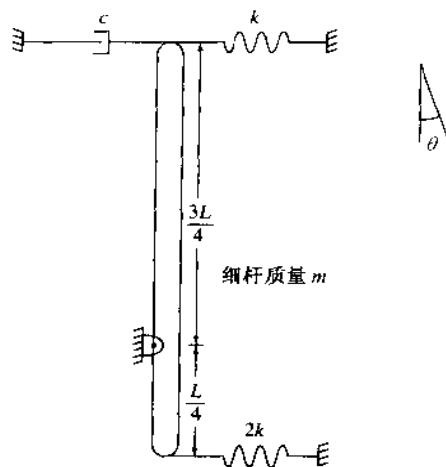


图 2.26

- 2.36 质量为 300 kg 的物体连在四个并联的相同的弹簧上, 弹簧刚度为 2.3×10^5 N/m. 试求系统的固有频率(Hz).

答: 8.81 Hz.

- 2.37 一薄盘的质量惯性矩为 $5.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 连在直径为 10 cm, 长为 2.5 cm 的铝杆的末端($G = 40 \times 10^9$ N/m²), 问盘扭转振动的固有频率应为多少?

答: 164.6 rad/s.

- 2.38 试求如图 2.27 所示系统的固有频率.

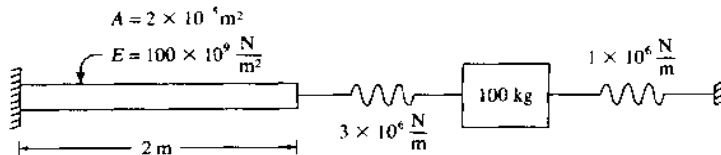


图 2.27

答: 132.3 rad/s.

- 2.39 重 2000 lb 的汽车空载时的静偏差为 0.8 in, 则当汽车载有 200 lb 的乘客及 250 lb 的货物时其固有频率为多少?

答: 19.9 rad/s.

- 2.40 如图 2.28 所示杆的质心位置和惯性矩未知, 当杆铰接在 A 点时, 其固有频率为 20 rad/s. 当 250 kg 的质量加到自由端时, 系统的固有频率为 10 rad/s. 试求杆的质心位置 l.

答: 0.512 m.

- 2.41 质量惯性矩为 $2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的转子连在 60 cm 长的钢制轴上($G = 80 \times 10^9$ N/m²), 若要使得系统转动的固有频率在 100 Hz 到 200 Hz 之间, 轴的直径范围是多少?

答: $9.32 \text{ cm} < D < 13.2 \text{ cm}$.

- 2.42 质量为 45 kg 的均质飞轮, 内径为 80 cm, 外径为 100 cm,

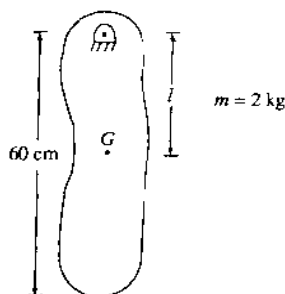


图 2.28

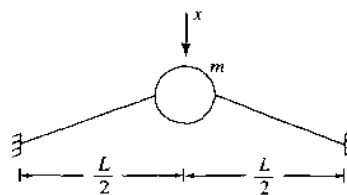


图 2.29

在内缘有楔形支撑并使其为钟摆, 周期为 2.1 s. 试求飞轮的转动惯性矩.

答: $I = 10.65 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

- 2.43 如图 2.29 所示, 质量为 m 的质点连在长为 L 的弹簧的中点上, 且张力为 T . 试求质点竖向振动的固有频率.

答: $\omega_n = \sqrt{\frac{4T}{mL}}$.

- 2.44 如图 2.30 所示系统的圆盘只滚不滑, 试求阻尼比为 0.2 时 c 的值.

答: $c = 1.55 \sqrt{mk}$.

- 2.45 如图 2.31 所示系统, 如果 $m = 20 \text{ kg}$, $k = 10000 \text{ N/m}$, 则当 c 多大时, 系统达到临界阻尼?

答: $c = 1.55 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$.

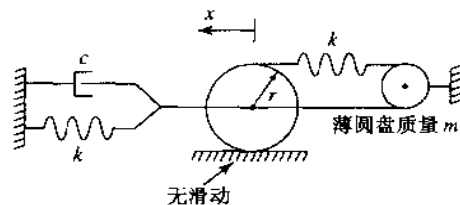


图 2.30

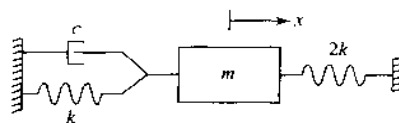


图 2.31

- 2.46 一个 200 kg 的物块连接有一个刚度是 50000 N/m 弹簧, 同时并联一个黏性阻尼器. 这个系统的自由振动周期为 0.471 s . 系统的阻尼系数是多少?

答: $c = 1.91 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$.

- 2.47 对设计题 2.17 中的反冲机械来说, 要产生一个 5 cm 的反冲, 则反冲机械的初始速度是多少?

答: 1.79 m/s .

- 2.48 对欠阻尼衰减系统来说, 为了使它的过冲限制在 10% , 它的阻尼比应为多少?

答: $\zeta = 0.591$.

- 2.49 质量 1000 kg 重的机器被放置在一个刚度为 $1 \times 10^6 \text{ N/m}$ 的振动隔离器上. 给机器一个 5 cm 的初始位移然后释放. 10 个周期后, 机器的振幅为 1 cm . 系统的阻尼比为多少?

答: $\zeta = 0.026$.

- 2.50 质量 100 kg 的物块连在刚度为 $1.5 \times 10^6 \text{ N/m}$ 的弹簧上, 并同时并联一个阻尼系数为 $4900 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 的黏性阻尼器. 给物块 5 m/s 的初速度. 求物块的最大位移是多少?

答: 30.9 mm .

- 2.51 求解题 2.50. 设 $c = 29000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$.

答: 13.4 mm .

- 2.52 给题 2.51 中的系统一个初始速度后, 要多长时间系统才能永久返回到平衡点 1 mm 以内?

答: 0.0515 s .

- 2.53 图 2.32 中系统的细长杆从平衡位置旋转 5° 后释放. 如果 $m = 2 \text{ kg}$, $l = 80 \text{ cm}$, $r = 10 \text{ cm}$, $k = 20000 \text{ N/m}$, $c = 300 \text{ N} \cdot \text{s/m}$. 求系统关于 θ 对时间响应.

答: $\theta(t) = 0.0895 e^{-6.61t} \sin(28.9t + 1.35)$.

- 2.54 求解题 2.53. 设 $c = 1500 \text{ N} \cdot \text{s/m}$.

答: $\theta(t) = 0.144 e^{-18.6t} - 0.055 e^{-47.6t}$.

- 2.55 设计一个弹簧隔振器, 使系统质量为 m 时, 系统达到临界阻尼. 求这个机械系统的阻尼比是多少? (a) 当质量为 $3m/4$; (b) 当质量为 $4m/3$.

答:(a) 1.15, (b) 0.866.

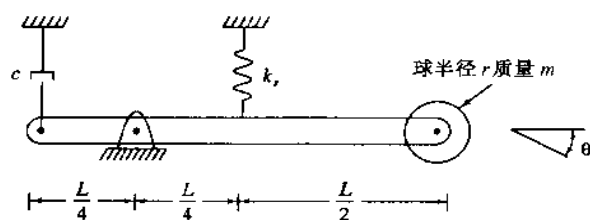


图 2.32

- 2.56 如初始条件是与临界阻尼系统的运动相反的符号,过冲是可能的.推导产生过冲时,初始条件 x_0 和 \dot{x}_0 所必须满足的关系.

答: $\dot{x}_0 + \omega_n x_0 < 0$.

- 2.57 质量 35 kg 的物块和一个刚度是 1.7×10^5 N/m 的弹簧相连.在物块与其滑动的表面之间的摩擦系数是 0.11.物块被放置在离平衡位置 10 mm 处然后释放.(a)在第一个周期结束时,物块的运动振幅为多少?(b)运动将产生多少次循环?

答:(a) 9.11 mm, (b) 11.

- 2.58 质量 50 kg 的物块和一个刚度是 200000 N/m 的弹簧相连,物块沿与水平面成 34° 角的平面上滑动.将物块放置在离平衡位置 1 cm 处然后释放,求物块和平面之间的摩擦系数 μ 应为多少时物体在 10 次循环后运动才会停止?

答: $0.120 < \mu < 0.133$.

第三章 单自由度系统的谐波激励

§ 3.1 微分方程的推导

在第三章中将讨论用隔离体图解法来推导单自由度系统的受迫振动的微分方程. 随时间变化的外力及外力矩作用在隔离体上.

由等效系统的方法, 任何一个单自由度的线性系统都能与图 3.1 或 3.2 中所示系统所等效. 图 3.1 中所示系统适用于所选的广义坐标代表一个线位移的系统, 而如果所选的坐标是角位移, 那么图 3.2 中所示系统是适用的. 在第一, 第二章中等效惯性, 刚度和阻尼属性已经被确定了. 用虚功原理能确定等效外力 F_{eq} 和力矩 M_{eq} . 设 δx 为广义坐标中的变量(虚位移). 当系统位移从 x 到 $x + \delta x$ 时, 设 δW 为外力所做的功. 等效力由如下的方程所决定:

$$\delta W = F_{eq} \delta x. \quad (3.1)$$

如果广义坐标是一个角位移, 则

$$\delta W = M_{eq} \delta \theta. \quad (3.2)$$

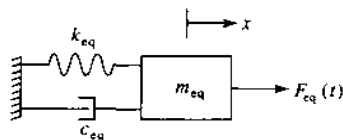


图 3.1

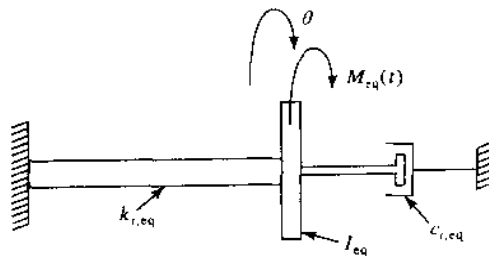


图 3.2

单自由度系统的受迫振动的微分方程的一般形式为

$$m_{eq} \ddot{x} + c_{eq} \dot{x} + k_{eq} x = F_{eq}(t), \quad (3.3)$$

两边除以 m_{eq} , 得

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{1}{m_{eq}} F_{eq}(t). \quad (3.4)$$

§ 3.2 谐波激励

单频谐波激励的形式为

$$F_{eq}(t) = F_0 \sin(\omega t + \psi), \quad (3.5)$$

F_0 为激励振幅, ω 是激励频率, ψ 为激励的相位.

§ 3.3 无阻尼系统的响应

当 $\zeta = 0$, $\omega \neq \omega_n$, 并满足初始条件为 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ 时, 应用方程(3.5)所给的 $F_{eq}(t)$, 则方程(3.4)的解为

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[x_0 - \frac{F_0 \sin \psi}{m_{eq}(\omega_n^2 - \omega^2)} \right] \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \left[\dot{x}_0 - \frac{F_0 \omega \cos \psi}{m_{eq}(\omega_n^2 - \omega^2)} \right] \sin \omega_n t \\ & + \frac{F_0}{m_{eq}(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin(\omega t + \psi), \end{aligned} \quad (3.6)$$

响应如图 3.3 所示.

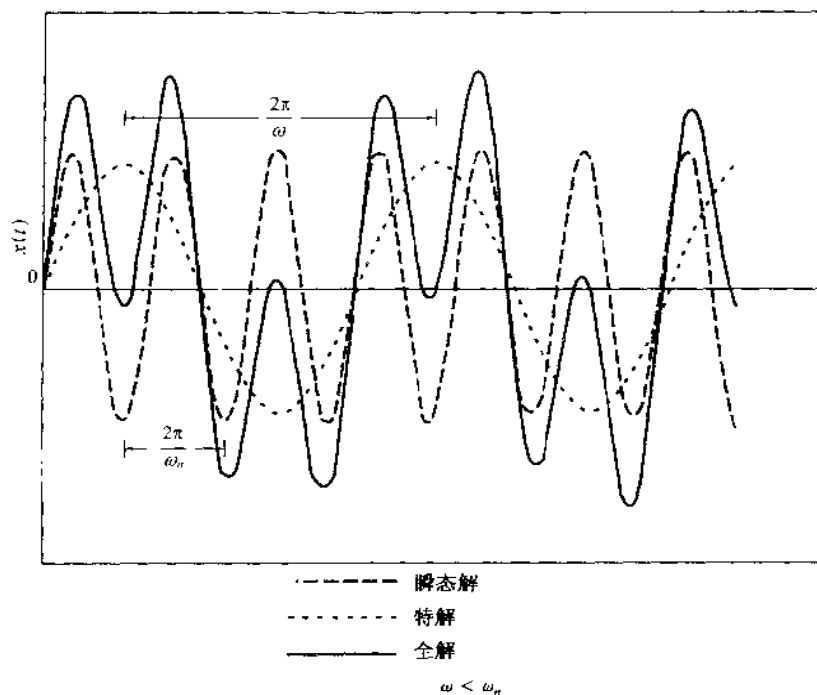


图 3.3

当 $\omega = \omega_n$ 时, 方程(3.4)的解为

$$\begin{aligned}
 x(t) = & x_0 \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} + \frac{F_0 \cos \psi}{2 m_{eq} \omega_n^2} \right) \sin \omega_n t \\
 & - \frac{F_0}{2 m_{eq} \omega_n^2} t \cos(\omega_n t + \psi)
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

图 3.4 表明了共振的条件, 即当激励频率和固有频率一致时, 响应就会无限增长。

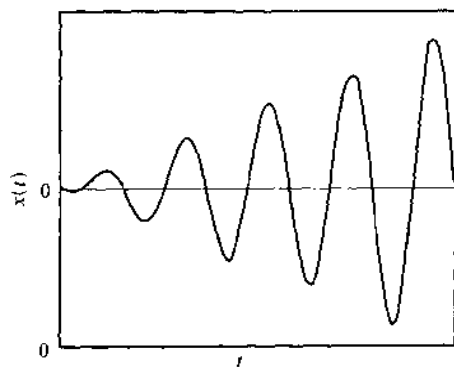


图 3.4

当 ω 非常接近 ω_n 但不相等, 并且 $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ 时, 方程(3.7)变为如下的形式:

$$x(t) \approx -\frac{2F_0}{m_{eq}(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin\left[\frac{\omega - \omega_n}{2}t\right] \cos\left[\frac{\omega + \omega_n}{2}t\right] \quad (3.8)$$

这种情况为拍现象, 如图 3.5 中所示. 其运动特征是, 具有慢变的周期性振幅振动。

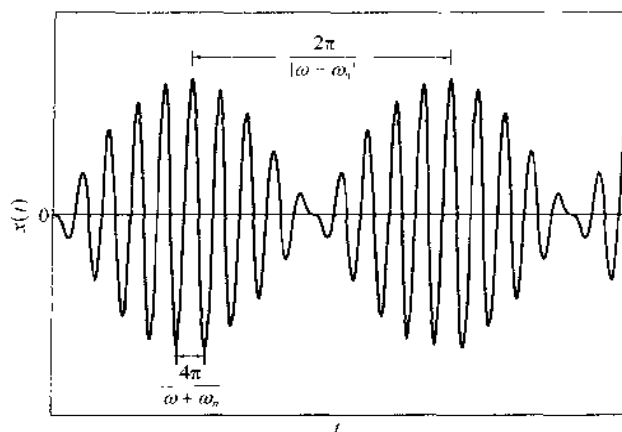


图 3.5

§ 3.4 阻尼系统响应

当 $\zeta \neq 0$ 时, 方程(3.5)的齐次解随着时间的增长而衰减, 最终只有特解在响应中占重要地位. 这种情况被称为稳定状态, 稳态响应对应的特解为

$$x_{ss}(t) = X \sin(\omega t + \psi - \phi), \quad (3.9)$$

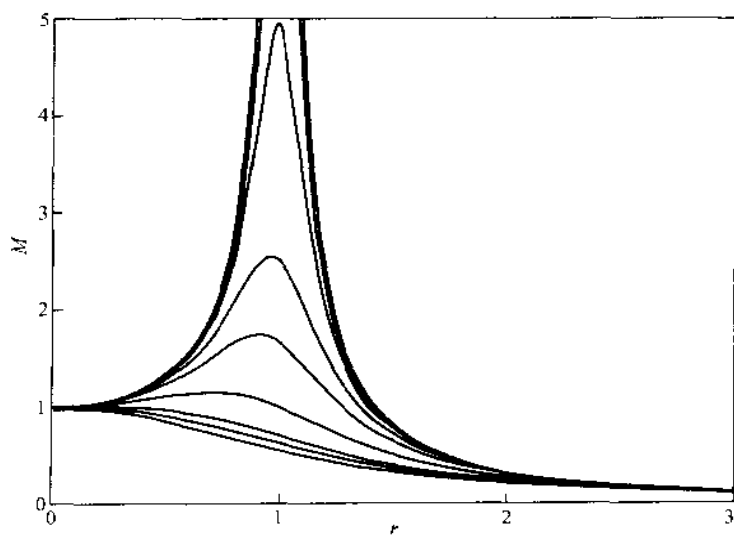


图 3.6

其中 X 为稳态振幅, ϕ 为相位差. 稳态振幅可计算如下:

$$\frac{m_{eq} \omega_n^2 X}{F_0} = M(r, \zeta), \quad (3.10)$$

其中

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (3.11)$$

被称为频率比, 并且

$$M(r, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (3.12)$$

被称为放大因子, 在响应和激励之间的相位差为

$$\phi = \arctan \left\{ \frac{2\zeta r}{1-r^2} \right\}. \quad (3.13)$$

图 3.6 和图 3.7 示出, 当 ζ 的值不同时, 非量纲的放大因数和相位差为 r 的函数关系曲线族。注意到对 ζ 的固定值, 即当 $\zeta < 1/\sqrt{2}$, M 的最大值为

$$M_{\max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad (3.14)$$

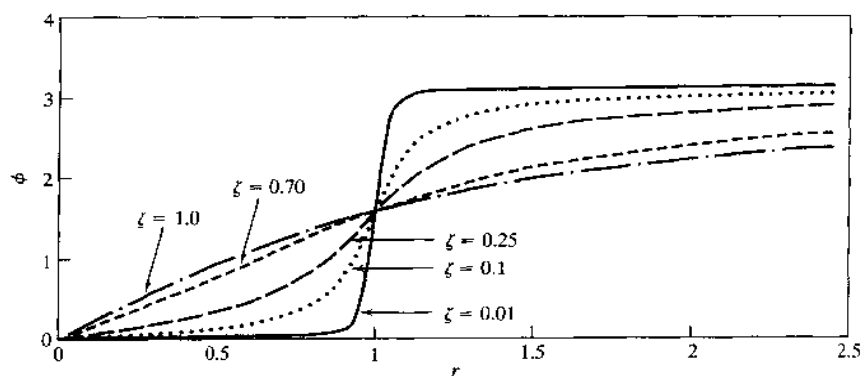


图 3.7

频率比为

$$r_{m_N} = \sqrt{1-2\zeta^2}. \quad (3.15)$$

§ 3.5 频率平方的激励

谐波激励的通常形式为它的振幅和它的频率的平方成比例, 也就是

$$F_0 = A\omega^2, \quad (3.16)$$

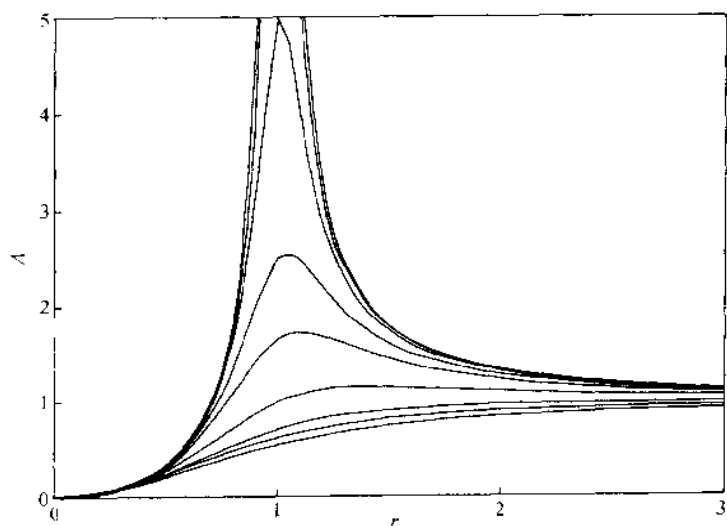


图 3.8

其 A 为比例的常数, 对一个频率平方的激励, 方程(3.10)改写为如下的形式:

$$\frac{m_{\omega} X}{A} = \Delta(r, \zeta), \quad (3.17)$$

其中

$$\Delta(r, \zeta) = r^2 M(r, \zeta) = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}. \quad (3.18)$$

对不同的 ζ 值, 无量纲函数 Δ 与 r 的函数关系曲线族, 如图 3.8 所示. 并注意到当 $\zeta < 1/\sqrt{2}$ 时, Δ 的极大值为

$$\Delta_{\max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (3.19)$$

频率比为

$$r_{m_{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}. \quad (3.20)$$

§ 3.6 谐波支撑激励

图 3.9 中所示系统中的物块与并联在一起的弹簧和黏性阻尼器相连, 然后又与可运动的支撑相连. 已知支撑的谐波运动形式为

$$y(t) = Y \sin \omega t. \quad (3.21)$$

物块的绝对位移 x 由以下的方程所决定:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 T \sin \omega t + 2\zeta\omega_n Y \cos \omega t. \quad (3.22)$$

设

$$z(t) = x(t) - y(t) \quad (3.23)$$

为支撑与物块之间的相对位移, 则 $z(t)$ 的微分方程为

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n \dot{z} + \omega_n^2 z = \omega^2 Y \sin \omega t. \quad (3.24)$$

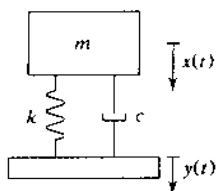


图 3.9

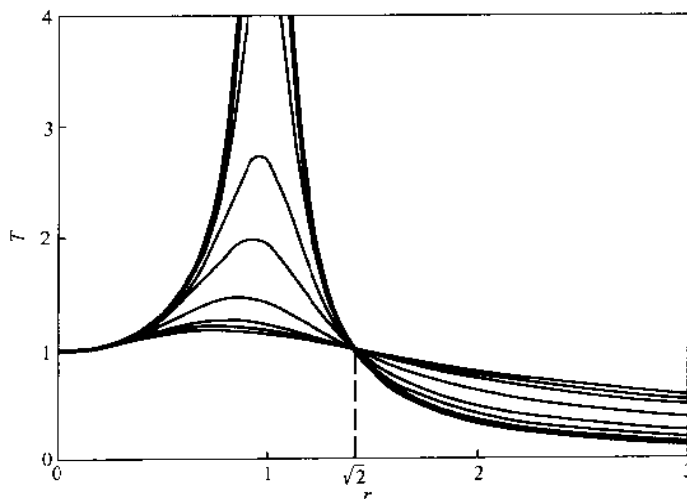


图 3.10

方程(3.24)的稳态解为

$$z(t) = Z \sin(\omega t - \phi), \quad (3.25)$$

其中 ϕ 由方程(3.13)所决定, 并有

$$\frac{Z}{Y} = \Lambda(r, \zeta). \quad (3.26)$$

绝对位移的稳态振幅由如下的方程所给出:

$$\frac{X}{Y} = T(r, \zeta) = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}. \quad (3.27)$$

对不同的 ζ 值, $T(r, \zeta)$ 与 r 的函数关系, 如图 3.10 所示.

§ 3.7 多频激励

当作用力函数为

$$F(t) = \sum_{i=1}^n F_i \sin(\omega_i t + \psi_i), \quad (3.28)$$

方程(3.4)的稳态解是用线性叠加原则所获得, 即

$$x(t) = \sum_{i=1}^n F_i M(r_i, t) \sin(\omega_i t + \psi_i - \phi_i), \quad (3.29)$$

其中

$$r_i = \frac{\omega_i}{\omega_n} \quad (3.30)$$

和

$$\phi_i = \arctan \left\{ \frac{2\zeta r_i}{1 - r_i^2} \right\}. \quad (3.31)$$

§ 3.8 一般循环激励, 傅里叶级数

如果 $F(t)$ 是周期 T 的周期函数, 那么 $F(t)$ 可以用傅里叶级数表示

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^n (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t), \quad (3.32)$$

其中

$$\omega_i = \frac{2\pi i}{T}, \quad (3.33)$$

$$a_i = \frac{T}{2} \int_0^T F(t) \cos \omega_i t dt, \quad (3.34)$$

$$b_i = \frac{T}{2} \int_0^T F(t) \sin \omega_i t dt. \quad (3.35)$$

如果 F 是收敛的, 那么方程(3.32)所示的级数对所有的 t 完全收敛于 $F(t)$. 如果 $F(t)$ 有一个间断点 t , 那么方程(3.32)所示的级数收敛于 F 在 t 点左、右导数的平均值.

如果 $F(t)$ 是偶函数, 对所有的 t , 则有 $F(-t) = F(t)$, 并且 $b_i = 0, i = 1, 2, \dots$. 如果 $F(t)$ 是一个奇函数, 对所有的 t , 则有 $F(-t) = -F(t)$, 并且 $a_i = 0, i = 1, 2, \dots$.

方程(3.22)的另一种形式为

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sin(\omega_i t - \kappa_i), \quad (3.36)$$

其中

$$c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \quad (3.37)$$

和

$$\kappa_i = \tan^{-1} \left(\frac{a_i}{b_i} \right). \quad (3.38)$$

受到周期激励的单自由度系统的响应为

$$x(t) = -\frac{1}{m_{\text{eq}}\omega_n^2} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} c_i M(r_i, \zeta) \sin(\omega_i t + \kappa_i - \phi_i) \right], \quad (3.39)$$

对最大稳态位移来说, 上界为

$$x_{\max} \leq -\frac{1}{m_{\text{eq}}\omega_n^2} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} c_i M(r_i, \zeta) \right]. \quad (3.40)$$

§ 3.9 库仑阻尼

带有库仑阻尼的系统在受到单频率的谐波激励时的响应可近似用如下的系统所模型化: 即与质量带有等效黏性阻尼比 ζ_{eq} 的黏性阻尼器的系统等效. 其中 ζ_{eq} 是通过求解带有库仑阻尼的系统在一个运动周期中所做的功和等效系统所做的功相等而得到. 因此这两个系统具有相等的阻尼系数, 即为

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{2l}{\pi r_i M}, \quad (3.41)$$

其中

$$l = \frac{F_f}{F_0}, \quad (3.42)$$

F_f 是库仑阻尼力的大小, F_0 是激振力的幅度, M 是放大因子, 代入方程(3.12)得

$$M = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{4l}{\pi}\right)^2}{(1 - r^2)^2}}. \quad (3.43)$$

由方程(3.43)可得 $l < \pi/4$ 时放大因子的近似值.

§ 3.10 迟滞阻尼

实验表明, 迟滞阻尼在一个运动周期的能量的损失与频率无关, 而与振幅的平方成比例. 具有迟滞阻尼系统的自由振动响应与黏性阻尼系统的很相似. 无量纲的迟滞阻尼系数 h 是由对数减缩率 δ 决定的, 即关系式为

$$h = \frac{\delta}{\pi}. \quad (3.44)$$

对于受迫振动, 等效黏性阻尼比为

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{h}{2r}. \quad (3.45)$$

因此, 放大因子为

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + h^2}}. \quad (3.46)$$

例 题

3.1 用隔离体图解法导出如图 3.11 所示系统的微分方程, 用 θ 作为广义坐标.

解 假设 θ 很小, 系统在任意瞬时的隔离体图如图 3.12. 所有力关于对铰支点之矩求和得

$$\begin{aligned} (\sum M_O)_{\text{ex}} - (\sum M_O)_{\text{eff}} &= -\frac{3}{4}kL\theta \left(\frac{3}{4}L \right) - F_0 \sin \omega t \left(\frac{1}{4}L \right) - \frac{1}{4}cL\dot{\theta} \left(\frac{1}{4}L \right) + M_0 \sin \omega t \\ &\quad - \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta} + \frac{1}{4}mL\dot{\theta} \left(\frac{1}{4}L \right), \\ \frac{7}{48}mL^2\ddot{\theta} + \frac{1}{16}cL^2\dot{\theta} + \frac{9}{16}kL^2\theta &= M_0 \sin \omega t - \frac{1}{4}F_0 L \sin \omega t. \end{aligned}$$

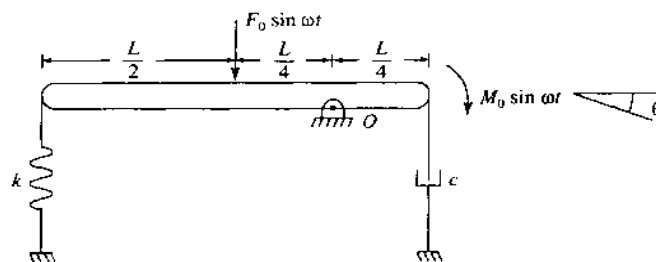


图 3.11

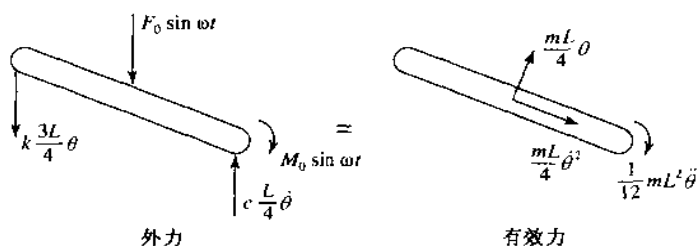


图 3.12

3.2 用等效系统法导出如图 3.11 所示系统的微分方程, 用 θ 作为广义坐标. 在任意瞬时系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{4} L \dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} mL^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{7}{48} mL^2 \dot{\theta}^2.$$

解 在任意瞬时系统的势能为

$$V = \frac{1}{2} k \left(\frac{3}{4} L \theta \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{9}{16} k L^2 \theta^2.$$

在两时刻间阻尼力作的功为

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{4} c L \dot{\theta} d \left(\frac{1}{4} L \theta \right) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{16} c L^2 \dot{\theta} d \theta.$$

当系统运动 $\delta\theta$ 后外力作的功为

$$\begin{aligned} \delta W &= - F_0 (\sin \omega t) \delta \left(\frac{1}{4} L \theta \right) + M_0 (\sin \omega t) \delta \theta \\ &= \left(- \frac{1}{4} F_0 L + M_0 \right) (\sin \omega t) \delta \theta. \end{aligned}$$

因此, 微分方程为

$$\frac{7}{48} mL^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{16} c L^2 \dot{\theta} + \frac{9}{16} k L^2 \theta = \left(- \frac{1}{4} F_0 L + M_0 \right) \sin \omega t.$$

3.3 问当 m 为多大时, 图 3.13 所示系统才会发生共振?

解 图 3.13 所示物块上的弹簧为并联组合, 因此导出等效刚度为 $3 \times 10^5 \text{ N/m}$. 当 50 rad/s 的激励频率等于固有频率时, 共振才会发生, 即

$$50 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \omega_n = \sqrt{\frac{k_{\text{eq}}}{m}},$$

所以得到

$$m = \frac{k_{\text{eq}}}{\omega^2} = \frac{3 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{\left(50 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2} = 120 \text{ kg}.$$

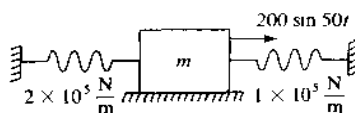


图 3.13

- 3.4 质量为 45 kg 的机器放在长为 1.6 m 的悬臂梁的末端, 梁的弹性模量为 $200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 横截面积惯性矩为 $1.6 \times 10^{-5} \text{ m}^4$. 当它工作的时候, 机器产生大小为 125 N 的谐振力, 求工作转速为多少时, 机器的稳态振幅小于 0.2 mm?

解 梁的等效刚度为

$$k_{eq} = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \left[200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] (1.6 \times 10^{-5} \text{ m}^4)}{(1.6 \text{ m})^3} = 2.34 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{2.34 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{45 \text{ kg}}} = 228.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

为使稳态振幅小于 0.2 mm, 允许的放大因子为

$$M = \frac{m\omega_n^2 X}{F_0} = \frac{(45 \text{ kg}) \left(228.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 (0.0002 \text{ m})}{125 \text{ N}} = 3.74.$$

对无阻尼, 方程(3.12)变为

$$M = \frac{1}{|1 - r^2|}.$$

为使 $r < 1$, 要求 $M < 3.74$, 所以

$$r < \sqrt{1 - \frac{1}{3.74}} = 0.856.$$

为使 $r > 1$, 要求 $M < 3.74$, 有

$$r > \sqrt{1 + \frac{1}{M}} = \sqrt{1 + \frac{1}{3.74}} = 1.126.$$

所以, 允许的频率范围为

$$\omega < 0.856\omega_n = 195.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{和} \quad \omega > 1.125\omega_n = 256.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- 3.5 质量为 0.8 kg 的薄盘, 半径为 60 mm, 与长为 1.2 m、直径为 20 mm 的钢制轴 ($G = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$) 连接. 圆盘上作用有频率为 700 rad/s 并振幅为 12.5 N·m 谐振矩. 问圆盘稳态振动的角振幅应为多少?

解 轴的扭转刚度为

$$k_t = \frac{JG}{L} = \frac{\frac{\pi}{2} (0.01 \text{ m})^4 \left(80 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{1.2 \text{ m}} = 1.05 \times 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}.$$

轴的转动惯量为

$$I_s = \frac{1}{2} \rho \pi L r^4 = \frac{1}{2} \left(7500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \pi (1.2 \text{ m}) (0.01 \text{ m})^4 \\ = 1.41 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

轴的惯性影响单自由度的模型等效为

$$I_{eq} = I_d + \frac{1}{3} I_s = \frac{1}{2} m_d r_d^2 + \frac{1}{3} I_s \\ = \frac{1}{2} (0.8 \text{ kg}) (0.06 \text{ m})^2 + \frac{1}{3} (1.41 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2) = 1.49 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{I_{eq}}} = \sqrt{\frac{1.05 \times 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}}{1.49 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}} = 839.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{700 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{839.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0.834.$$

因此,放大因子为

$$M = \frac{1}{1-r^2} = \frac{1}{1-(0.834)^2} = 3.28.$$

把 Θ 作为转动振动的稳态振幅,与方程(3.10)的等效转动振动方程为

$$\begin{aligned}\frac{I_{eq}\omega_n^2\Theta}{T_0} &= M, \\ \Theta = \frac{MT_0}{I_{eq}\omega_n^2} &= \frac{3.28(12.5\text{N}\cdot\text{m})}{(1.49\times 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^2)\left(839.5\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2} \\ &= 0.0390\text{rad} = 2.24^\circ.\end{aligned}$$

- 3.6 质量为 45 kg 的机器固定在四个刚度为 $2\times 10^5\text{N/m}$ 的并联弹簧上,当机器的运转频率为 32 Hz 时,测得机器的稳态振幅为 1.5 mm,则激振力幅度为多大?

解 系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{4\left(2\times 10^5\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)}{45\text{kg}}} = 133.3\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

系统的频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\left(32\frac{\text{周}}{\text{s}}\right)\left(2\pi\frac{\text{rad}}{\text{周}}\right)}{133.3\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1.51.$$

频率比大于 1 的无阻尼系统的放大因子为

$$M = \frac{1}{r^2-1} = \frac{1}{(1.51)^2-1} = 0.781.$$

为求解激振力,方程(3.10)可化为

$$F_0 = \frac{m\omega_n^2 X}{M} = \frac{(45\text{kg})\left(133.3\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2(0.0015\text{m})}{0.781} = 1.51\times 10^3\text{N}.$$

- 3.7 一系统具有振动周期为 0.05 s,拍振周期为 1.0 s.试求系统的固有频率,并求当激振频率大于固有频率时其激振频率.

解 由图 3.5 可知振动周期为

$$T = \frac{4\pi}{\omega + \omega_n} = 0.05\text{s}.$$

拍振周期为

$$T_b = \frac{2\pi}{|\omega - \omega_n|} = 1\text{s}.$$

由以上方程可得

$$\begin{aligned}\omega + \omega_n &= 80\pi, \\ \omega - \omega_n &= 2\pi.\end{aligned}$$

联立解出

$$\omega = 41\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_n = 39\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- 3.8 求解题 3.4,设阻尼比为 0.08.

解 由题 3.4 可知,系统的固有频率为 228.0 rad/s,最大的放大因子为 3.74,因此,为把放大因子限制到 3.74,须有

$$\begin{aligned}3.74 &> \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + [2(0.08)r]^2}}, \\ r^4 - 1.9744r^2 + 1 &> 0.07149, \\ r^4 - 1.9744r^2 + 0.9285 &> 0.\end{aligned}$$

上述方程为 r^2 的二次方程,应用求根公式,此方程的正根为 $r=0.879$ 及 $r=1.096$,当 $\omega < 0.879$

$(228.0 \text{ rad/s}) - 200.4 \text{ rad/s}$ 或 $\omega > 1.096(228.0 \text{ rad/s}) = 249.4 \text{ rad/s}$ 时放大因子小于 3.74.

- 3.9 质量为 110 kg 的机器固定在刚度为 $2 \times 10^6 \text{ N/m}$ 的弹性基础上, 当机器的运作频率为 150 rad/s 时, 机器产生 1500 N 的谐振力. 机器的稳态振幅测得为 1.9 mm, 则基础的阻尼比为多少?

解 系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{110 \text{ kg}}} = 134.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

运动过程放大因子为

$$M = \frac{m\omega_n^2 X}{F_0} = \frac{(110 \text{ kg}) \left(134.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 (0.0019 \text{ m})}{1500 \text{ N}} = 2.53.$$

当运动频率为 150 rad/s 时, 频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{150 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{134.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1.113.$$

为解阻尼比, 方程(3.12)可化为

$$\zeta = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{1}{M^2} - (1 - r^2)^2}.$$

因此, 解得

$$\zeta = \frac{1}{2(1.113)} \sqrt{\frac{1}{(2.53)^2} - [1 - (1.113)^2]^2} = 0.142.$$

- 3.10 如图 3.14 系统的运动微分方程为

$$\left(m + \frac{I}{r^2} \right) \ddot{x} + c\dot{x} + 5kx = \frac{M_0}{r} \sin \omega t,$$

根据给出的数据, 试求物块的稳态振幅.

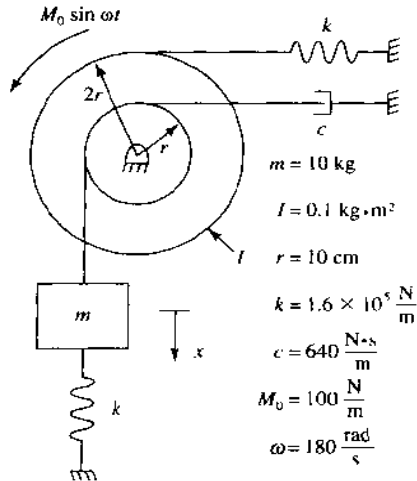


图 3.14

解 系统的固有频率及阻尼比为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{5k}{m + \frac{I}{r^2}}} = \sqrt{\frac{5 \left(1.6 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right)}{10 \text{ kg} + \frac{0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{(0.1 \text{ m})^2}}} = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\zeta = \frac{c}{2\omega_n \left(m + \frac{I}{r^2} \right)} = \frac{640 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}}{2 \left(200 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \left(10 \text{kg} + \frac{0.1 \text{kg} \cdot \text{m}^2}{(0.1 \text{m})^2} \right)} = 0.08.$$

频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{180 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0.9.$$

系统的放大因子为

$$M = M(0.9, 0.08) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (0.9)^2]^2 + [2(0.08)(0.9)]^2}} = 4.19.$$

由方程(3.10)确定的稳态振幅为

$$F_0 = \frac{M_0}{r} = \frac{100 \text{N} \cdot \text{m}}{0.1 \text{m}} = 1000 \text{N}$$

及

$$m_{\text{eq}} = m + \frac{I}{r^2} = 20 \text{kg}.$$

所以

$$X = \frac{F_0 M(0.9, 0.08)}{m_{\text{eq}} \omega_n^2} = \frac{(1000 \text{N})(4.19)}{(20 \text{kg}) \left(200 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2} = 5.24 \text{mm}.$$

3.11 由方程(3.12)导出方程(3.14).

解 对于定值 ζ , 当 $\partial M / \partial r = 0$ 时, 解出 r 值, 则 $M(r, \zeta)$ 在 r 值处取得最大值. 因此

$$\frac{\partial M}{\partial r} = -\frac{1}{2} [(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{-3/2} [2(1 - r^2)(-2r) + 2(2\zeta r)(2\zeta)],$$

$$\frac{\partial M}{\partial r} = 0 \rightarrow (1 - r^2) + 2\zeta^2 = 0,$$

$$r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}.$$

把 r 的值代入方程(3.12), 得到

$$M_{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (1 - 2\zeta^2)]^2 + 4\zeta^2(1 - 2\zeta^2)}} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

- 3.12** 质量为 120 kg 的机器固定在长为 1.5 m 的简支梁中间跨上, 梁的弹性模量为 $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 横截面积惯性矩为 $I = 1.53 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. 在此系统机器上作用力幅为 2000 N 的变频率谐波激励, 以测试该系统. 试验记载的最大稳态振幅为 2.5 mm. 试求系统的阻尼比.

解 梁的刚度为

$$k = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48 \left(200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (1.53 \times 10^{-6} \text{m}^4)}{(1.5 \text{m})^3} = 4.35 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4.35 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{120 \text{kg}}} = 190.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

放大因子的最大值为

$$M_{\text{max}} = \frac{m \omega_n^2 X_{\text{max}}}{F_0} = \frac{(120 \text{kg}) \left(190.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) (0.0025 \text{m})}{2000 \text{N}} = 5.44.$$

方程(3.14)可化为

$$\zeta^4 - \zeta^2 + \frac{1}{4M_{\text{max}}^2} = 0.$$

此方程为 ζ^2 的二次方程, 其根为

$$\zeta = \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{M_{\max}^2}} \right) \right]^{1/2}.$$

将 $M_{\max} = 5.44$ 代入, 注意到在 \pm 号的选择中, 选 $+$ 号使得阻尼比大于 $1/\sqrt{2}$, 所以 $\zeta = 0.092$.

- 3.13 质量为 82 kg 的机器工具固定在弹性基础上, 用一实验确定基础的刚度和阻尼比, 当工具在 8000 N 的谐振力以各种频率激励下, 在 40 Hz 频率下稳态振幅最大为 4.1 m , 根据这些条件确定基础的刚度和阻尼比.

解 由方程(3.10)及(3.14)可得, 最大稳态振幅与阻尼比的关系为

$$M_{\max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{m\omega_n^2 X_{\max}}{F_0}. \quad (3.47)$$

由方程(3.15)可得固有频率与出现最大稳态振幅时的频率的关系为

$$r_{M_{\max}} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} = \frac{\omega_{\max}}{\omega_n},$$

$$\omega_n = \frac{\omega_{\max}}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}.$$

代入方程(3.47)可得

$$\frac{m\omega_n^2 X_{\max}}{(1 - 2\zeta^2)F_0} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}},$$

$$\frac{(82 \text{ kg}) \left[\left(40 \frac{\text{周}}{\text{s}} \right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{周}} \right) \right]^2 (0.0041 \text{ m})}{(1 - 2\zeta^2)(8000 \text{ N})} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

代入已知条件和计算的数据可得

$$28.20\zeta^2(1 - \zeta^2) = (1 - 2\zeta^2)^2,$$

$$\zeta^4 - \zeta^2 + 0.03107 = 0,$$

$$\zeta = 0.179, 0.984.$$

不过, 只有当 $\zeta < 1/\sqrt{2}$, 即 $\zeta = 0.179$ 时才会得到最大稳态振幅. 用方程(3.15)确定固有频率为

$$\omega_n = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\left(40 \frac{\text{周}}{\text{s}} \right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{周}} \right)}{\sqrt{1 - (0.179)^2}} = 255.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

由此可得基础的刚度为

$$k = m\omega_n^2 = (82 \text{ kg}) \left(255.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 5.35 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

- 3.14 质量为 35 kg 的电动机工作频率为 60 Hz , 固定在刚度为 $3 \times 10^6 \text{ N/m}$ 的基础上, 激励力和稳态响应的相位差为 21° , 则系统的阻尼比为多少?

解 固有频率及频率比为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{35 \text{ kg}}} = 292.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\left(60 \frac{\text{周}}{\text{s}} \right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{周}} \right)}{292.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1.288$$

整理方程(3.13)可解出 ζ 为

$$\zeta = \frac{1}{2r} \tan \phi.$$

不过, 频率比大于 1, 反应先于激励, 如果相位角度在 0 到 180° 之间, 合适的数为 $\phi = 180^\circ - 21^\circ = 159^\circ$, 所以

$$\zeta = \frac{1 - (1.288)^2}{2(1.288)} \tan^{-1}(159^\circ) = 0.0982.$$

- 3.15 如图 3.15 所示机器质量为 m , 固定在简化模型为刚度 k 的并联弹簧及黏性阻尼系数为 c 的阻尼器上, 机器在常速 ω 下有不平衡的转动分量, 此分量可描述为质量为 m_0 , 以

偏心距为 e 绕轴转动, 试推导出机器位移的微分方程及稳态振幅。

解 机器在任意瞬时的隔离体图如图 3.16 所示, 竖向的合力为

$$(\sum F)_{\text{ext}} = (\sum F)_{\text{eff}}$$

注意到重力与静弹簧力抵消, 所以

$$-kx - c\dot{x} = (m - m_0)\ddot{x} + m_0 e \omega^2 \sin \theta + m_0 \ddot{x} \quad (3.48)$$

由于 ω 为常数, 则

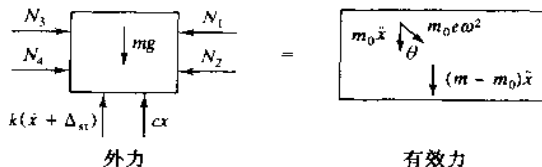


图 3.16

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad (3.49)$$

把方程(3.49)代入方程(3.48), 整理得

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m_0 e \omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) = m_0 \omega^2 \sin(\omega t + \psi) \quad (3.50)$$

其中

$$\psi = \theta_0 + \pi$$

因此由于旋转不平衡而产生的系统响应是由频率平方的谐波激励所激励的系统响应。由方程(3.16)所定义的比例常数为

$$A = m_0 e$$

应用方程(3.17)可以得到

$$\frac{mX}{m_0 e} = \Lambda(r, \zeta) = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (3.51)$$

其中

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$$

- 3.16 质量为 65 kg 的工业缝纫机有 0.15 kg·m 不平衡旋转力矩。该机器以 125 Hz 的频率运行, 并安装在一个等效刚度为 2×10^6 N/m, 阻尼比为 0.12 的基座上。求该机器的稳态振幅为多少?

解 该系统的固有频率和频率比为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^6 \text{ N/m}}{65 \text{ kg}}} = 175.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\left(125 \frac{\text{周}}{\text{s}}\right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{周}}\right)}{175.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 4.48$$

根据题 3.15 的结果, 由旋转不平衡而给机器带来的激励是一个频率平方简谐激励, 该激励的旋转不平衡量为 $A = m_0 e$, 因此运用题 3.15 中的方程(3.51)可得

$$\frac{mX}{m_0 e} = \Lambda(4.48, 0.12) = \frac{(4.48)^2}{\sqrt{[1 - (4.48)^2]^2 + [2(0.12)(4.48)]^2}} = 1.051$$

$$X = \frac{1.051(0.15 \text{ kg} \cdot \text{m})}{65 \text{ kg}} = 2.43 \text{ mm}$$

- 3.17 质量 80 kg 的互动机放置在一个薄而无质量的梁上。用频率扫描仪来确定该机器的旋转不平衡转矩和该梁的等效刚度。随着机器运转速度的增加, 由以下数据求解:

(a) 在转速为 65 rad/s 时, 机器的稳态振幅为 7.5 mm ;

(b) 最大的稳态振幅发生在速度小于 65 rad/s 时;

(c) 随着速度的大幅度的增加, 稳态振幅接近 5 mm .

假定该系统无阻尼.

解 题 3.15 说明, 一个具有旋转不平衡的机器以不平衡转矩 $A = m_0 e$, 经历了频率平方的谐波, 图 3.8 说明, 当频率比大幅度增长时, $A \rightarrow 1$. 因此, 由条件 (c) 得

$$\frac{(80 \text{ kg})(0.005 \text{ m})}{m_0 e} = 1,$$

$$m_0 e = 0.4 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

由于最大稳态振幅发生在速度小于 65 rad/s 时, 所以 65 rad/s 的速度对应的频率比有可能大于 1. 因此, 对于一个 $r > 1$ 的无阻尼系统来说

$$A = \frac{r^2}{r^2 - 1}.$$

对于 $\omega = 65 \text{ rad/s}$, 则有

$$A = \frac{mX}{m_0 e} = \frac{(80 \text{ kg})(0.0075 \text{ m})}{0.04 \text{ kg} \cdot \text{m}} = 1.5.$$

因此

$$1.5 = \frac{r^2}{r^2 - 1} \rightarrow r = 1.73 \rightarrow \omega_n = \frac{65 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{1.73} = 37.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\rightarrow k = m\omega_n^2 = (80 \text{ kg}) \left(37.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 1.13 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

3.18 质量 500 kg 的转向轮有 1.26 kg 的不平衡质量, 偏离转轴 50 cm . 对于在 200 到 600 r/min 之间所有速度, 要使该转向轮的稳态振幅小于 2 mm , 那么, 当阻尼比为 0.06 时, 弹性基础的刚度为多少?

解 题 3.15 的结果表明, 一个具有旋转不平衡的机器以 $A = m_0 e$, 按频率平方简谐激励. 因此当转向轮安装在基座上时, 为了使稳态振幅小于 2 mm , A 的最大可能值为

$$A_{\text{all}} = \frac{mX_{\text{max}}}{m_0 e} = \frac{(500 \text{ kg})(0.002 \text{ m})}{(1.26 \text{ kg})(0.05 \text{ m})} = 1.587.$$

从方程 (3.19) 可得, $A_{\text{max}}(\zeta = 0.06) = 8.36 > A_{\text{all}}$. 于是从图 3.8 看出, 因为 $A_{\text{all}} > 1$, $\zeta < 1/\sqrt{2}$, 其中 r 有两个值, 于是 $A(r, 0.06) = 1.587$. 为了使 $A < 1.587$, 频率比不可以在这两个值之间, 满足此条件必须有

$$1.587 = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (0.12r)^2}}.$$

对上式平方, 两边乘以右边的分母, 整理得到

$$1.591r^4 - 5.001r^2 + 2.519 = 0.$$

它是一个 r^2 的二次方程, 运用二次方程的解的公式可得到结果. 得到的允许频率的范围是

$$r < 0.788 \quad \text{或} \quad r > 1.634.$$

在整个频率范围内, 为了使 $r < 0.788$, 则 $r = 0.788$ 所对应的频率应该小于 600 r/min . 因此

$$\omega_n > \frac{\omega}{r} = \frac{\left(600 \frac{\text{r}}{\text{min}} \right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{r}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right)}{0.788} = 79.73 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$k_{\text{min}} = (500 \text{ kg}) \left(79.73 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 3.18 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

在整个频率范围内, 为了使 $r > 1.634$, 则 $r = 1.634$ 所对应的频率应该小于 200 r/min . 因此

$$\omega_n < \frac{\omega}{r} = \frac{\left(200 \frac{\text{r}}{\text{min}} \right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{r}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right)}{1.634} = 12.82 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$k_{\text{max}} = (500 \text{ kg}) \left(12.82 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 8.21 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

因此基础的刚度为

$$k < 8.21 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \text{和} \quad k > 3.18 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

- 3.19 质量 40 kg 的风扇有大小为 0.1 kg·m 不平衡转矩. 该风扇安装在如图 3.17 所示的梁上. 该梁经过了特殊处理, 使其黏性阻力有所增加. 当风扇的速度不断改变时, 已知其最大稳态振幅为 20.3 mm. 当该风扇的转速为 1000 r/min 时, 其稳态振幅为多少?

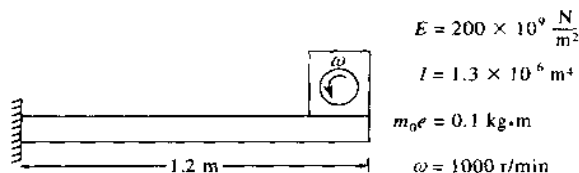


图 3.17

解 最大 Δ 值为

$$\Delta_{\max} = \frac{mX_{\max}}{m_0e} = \frac{(40\text{kg})(0.0203\text{m})}{0.1\text{kg}\cdot\text{m}} = 8.12.$$

运用方程(3.19)可得阻尼比为

$$8.12 = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}},$$

$$\zeta = 0.0617.$$

该梁的刚度为

$$k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3\left(200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)(1.3 \times 10^{-6}\text{m}^4)}{(1.2\text{m})^3} = 4.51 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4.51 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{40\text{kg}}} = 106.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\left(1000 \frac{\text{r}}{\text{min}}\right)\left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{r}}\right)\left(\frac{1\text{min}}{60\text{s}}\right)}{106.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0.986.$$

所求的稳态振幅计算如下:

$$\begin{aligned} X &= \frac{m_0e}{m} \Delta(0.986, 0.0617) \\ &= \frac{0.1\text{kg}\cdot\text{m}}{40\text{kg}} \frac{(0.986)^2}{\sqrt{[1 - (0.986)^2]^2 + [2(0.0617)(0.986)]^2}} \\ &= 19.48\text{mm}. \end{aligned}$$

- 3.20 题 3.19 中的风扇分别以 1000 r/min, 1250 r/min, 1500 r/min, 1750 r/min 和 2000 r/min 的转速运行. 在所有的转速下, 要使该风扇的稳态振幅小于 10 mm, 应该在该风扇上增加质量最小为多少?

解 增加风扇质量会减小该系统的固有频率, 因此在任何速度下都会增加其频率比. 如没有附加质量时, 当 $\omega = 1000 \text{ r/min}$, $r = 0.986$. 对于 $\omega = 1000 \text{ r/min}$ 的速度来说, 增加质量可能会导致频率比大于 1. 图 3.8 说明, 对于 $r > 1$ 来说, 随着激励频率的增加, 一个频率平方激励的稳态振幅就会减少. 因此对于 $\omega = 1000 \text{ r/min}$ 来说, 如果 $X < 10 \text{ mm}$, 那么对于所有 $\omega > 1000 \text{ r/min}$ 的速度来说, $X < 10 \text{ mm}$ 都会成立. 因此, 对于 $\omega = 1000 \text{ r/min}$, 期望的放大因子为

$$M = \frac{m\omega_n^2 X}{F_0} = \frac{kX}{m_0 e \omega^2} = \frac{\left(4.51 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(0.01\text{m})}{(0.1\text{kg} \cdot \text{m}) \left(104.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2} = 4.11,$$

即为

$$4.11 = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + [2(0.0617)r]^2}}$$

解出 $r = 1.096$. 因此

$$\omega_n = \frac{104.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{1.096} = 95.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$m = \frac{k}{\omega_n^2} = \frac{4.51 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{\left(95.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2} = 49.5 \text{ kg}.$$

所以加在该机器上的最小质量应为 49.5 kg.

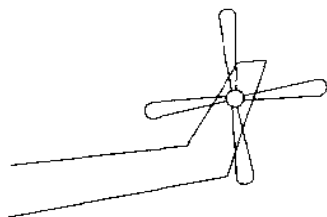


图 3.18

3.21 如图 3.18 所示的直升飞机的尾部螺旋桨由四个叶片组成, 每一个叶片的质量为 2.3 kg, 并且有一个引擎盒的质量为 28.5 kg. 每一个叶片的重心距离转轴中心为 170 mm. 该尾部螺旋桨与直升飞机的主体由一个弹性结构连接. 测量得到该尾部螺旋桨的固有频率为 135 rad/s. 在飞行当中, 螺旋桨以 900 r/min 的速度转动. 当在飞行时, 如果其中的一个叶片断开并且脱落掉了, 问

该螺旋桨的振动振幅应为多少? 假设阻尼比为 0.05.

解 螺旋桨的总质量为

$$m = 4(2.3\text{kg}) + 28.5\text{kg} = 37.7\text{kg}.$$

尾部的等效刚度为

$$k_{eq} = m\omega_n^2 = (37.7\text{kg}) \left(135 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = 6.87 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

如果在飞行时一个叶片脱落了, 螺旋桨将会不平衡旋转, 导致尾部作简谐激励. 旋转不平衡量为

$$m_0 e = (2.3\text{kg})(0.17\text{m}) = 0.391\text{kg} \cdot \text{m}.$$

一个叶片脱落后, 螺旋桨的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{6.87 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{37.7\text{kg} - 2.3\text{kg}}} = 139.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\left(900 \frac{\text{r}}{\text{min}}\right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{r}}\right) \left(\frac{1\text{min}}{60\text{s}}\right)}{139.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0.677.$$

运用方程(3.17)计算稳态振幅为

$$\begin{aligned} X &= \frac{m_0 e}{m} \Delta(0.677, 0.05) \\ &= \frac{0.391\text{kg} \cdot \text{m}}{35.4\text{kg}} \frac{(0.677)^2}{\sqrt{[1 - (0.677)^2]^2 + [2(0.05)(0.677)]^2}} \\ &= 9.27\text{mm}. \end{aligned}$$

3.22 当长为 L 直径为 D 的圆柱体, 放在一个密度为 ρ 流速为 v 的流体当中时, 分别在圆柱体的上下面产生涡流, 这将使圆柱体上受到一个简谐力, 该力的形式如方程(3.5)所示. 所产生的涡流的频率与斯特劳哈尔数有关, 即

$$S = \frac{\omega D}{2\pi v}. \quad (3.52)$$

解 激振力振幅与牵引系数 C_D 有关, 即

$$C_D = \frac{F_0}{\frac{1}{2} \rho v^2 D L} \quad (3.53)$$

当雷诺数 Re 为 $1 \times 10^3 < Re < 2 \times 10^5$ 时, 牵引系数和斯特劳哈尔数相差很小. 这些常数的值近似为

$$S = 0.2, \quad C_D = 1.0.$$

在此题中, 表明了激振振幅与频率的平方成正比, 并且确定了比例常数.

从方程(3.52)和 $S = 0.2$ 中可以解出 v ,

$$v = \frac{\omega D}{0.4\pi} \quad (3.54)$$

将方程(3.54)代入方程(3.53)中, 并使 $C_D = 1.0$, 可得

$$C_D = \frac{F_0}{\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\omega D}{0.4\pi} \right)^2 D L}$$

于是可求出

$$F_0 = 0.317 \rho D^3 L \omega^2.$$

- 3.23 在公众杂技表演中, 一个质量为 120 kg 的人站在一个旗杆的末端, 如图 3.19 所示. 在风速为 5 m/s 时该人所遭受到的由涡流引起的振动振幅为多少? 假设阻尼比为 0.02, 空气的密度为 1.2 kg/m^3 .

解 旗杆可以看作是一个悬臂梁, 则刚度为

$$k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \left(80 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) \frac{\pi}{4} (0.05 \text{ m})^4}{(5 \text{ m})^3} \\ = 9.42 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

该人的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9.42 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{120 \text{ kg}}} = 8.86 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

产生的涡流的频率为

$$\omega = \frac{0.4\pi v}{D} = \frac{0.4\pi \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)}{0.1 \text{ m}} = 62.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

因此频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{62.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{8.86 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 7.09.$$

运用题 3.22 的结果, 注意到涡流产生了一个频率平方的激振, 其中

$$A = 0.317 \rho D^3 L = 0.317 \left(1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) (0.1 \text{ m})^3 (5 \text{ m}) = 1.9 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

于是运用方程(3.17)得

$$X = \frac{A}{m} A(7.09, 0.02) \\ = \frac{1.9 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}}{120 \text{ kg}} \frac{(7.09)^2}{\sqrt{[1 - (7.09)^2]^2 + [2(0.02)(7.09)]^2}} \\ = 1.67 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

- 3.24 质量 35 kg 的物块通过一个弹簧连接在一个基座上, 该弹簧的刚度为 $1.4 \times 10^6 \text{ N/m}$, 并且与一个隔振器并联, 该隔振器的阻尼系数为 $1.8 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$. 给该基座一个简谐位移, 振幅为 10 mm, 频率为 35 Hz. 物块的绝对位移的稳态振幅为多少?

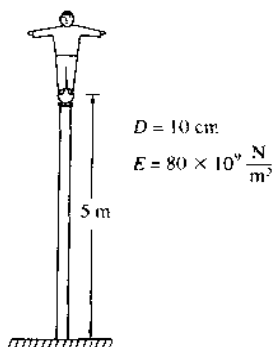


图 3.19

解 固有频率、阻尼比和频率比分别为

$$\begin{aligned}\omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.4 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{35 \text{ kg}}} = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\ \zeta &= \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{1.8 \times 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}}{2(35 \text{ kg}) \left(200 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)} = 0.129, \\ r &= \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\left(35 \frac{\text{周}}{\text{s}} \right) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{\text{周}} \right)}{200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1.10.\end{aligned}$$

运用方程(3.27)可以得到绝对位移的振幅为

$$\begin{aligned}X &= YT(1.10, 0.129) \\ &= (0.01 \text{ m}) \sqrt{\frac{1 + [2(0.129)(1.10)]^2}{[1 - (1.10)^2]^2 + [2(0.129)(1.10)]^2}} \\ &= 29.4 \text{ mm}.\end{aligned}$$

3.25 对于题 3.24 中的系统, 试求该物块相对于其基座的相对位移稳态振幅。

解 由方程(3.26)可以得到该物块相对于基座的位移为

$$\begin{aligned}Z &= YA(1.10, 0.129) \\ &= (0.01 \text{ m}) \frac{(1.10)^2}{\sqrt{[1 - (1.10)^2]^2 + [2(0.129)(1.10)]^2}} \\ &= 34.3 \text{ mm}.\end{aligned}$$

3.26 质量 35 kg 的流体监视设备放在实验室的桌子上, 在该设备和桌子之间放置了一个垫子, 该垫子的刚度为 $2 \times 10^5 \text{ N/m}$, 阻尼比为 0.08. 该桌子固定在实验室的地板上, 测量得到在频率为 30 Hz 时, 地面的稳态振幅为 0.5 mm. 问该流体监视设备的加速度振幅为多少?

解 固有频率和频率比分别为

$$\begin{aligned}\omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{35 \text{ kg}}} = 75.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ r &= \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\left(30 \frac{\text{周}}{\text{s}} \right) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{\text{周}} \right)}{75.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 2.49.\end{aligned}$$

由方程(3.27)可以计算出该流体监视设备绝对位移的振幅为

$$\begin{aligned}X &= YT(2.49, 0.08) \\ &= (0.0005 \text{ m}) \sqrt{\frac{1 + [2(0.08)(2.49)]^2}{[1 - (2.49)^2]^2 + [2(0.08)(2.49)]^2}} \\ &= 1.03 \times 10^{-4} \text{ m}.\end{aligned}$$

加速度振幅为

$$A = \omega^2 X = \left[\left(30 \frac{\text{周}}{\text{s}} \right) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{\text{周}} \right) \right]^2 (1.03 \times 10^{-4} \text{ m}) = 3.66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

3.27 对于题 3.26 中, 流体测量设备和桌子之间垫子的最大弹性变形为多少?

解 在流体测量设备和桌子之间安置弹性垫, 因此其变形为流体测量设备相对于桌子的位移。

运用方程(3.26)可以计算出相对位移振幅为

$$\begin{aligned}Z &= YA(2.49, 0.08) \\ &= (0.0005 \text{ m}) \frac{(2.49)^2}{\sqrt{[1 - (2.49)^2]^2 + [2(0.08)(2.49)]^2}} \\ &= 5.94 \times 10^{-4} \text{ m}.\end{aligned}$$

- 3.28 如图 3.20 所示为一个车辆悬挂系统的模型. 质量 500 kg 的机车通过一个悬挂系统与轮子相连, 该系统可以看作是一个刚度为 $4 \times 10^5 \text{ N/m}$ 的弹簧与一个阻尼系数为 $3000 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 的黏性阻尼器并联. 该轮子可以看作是刚性的, 并且沿着路面运动. 该机车所走的路面如图 3.21 所示. 如果该机车以一个恒定的速度 52 m/s 运动, 问该机车的加速度振幅为多少?

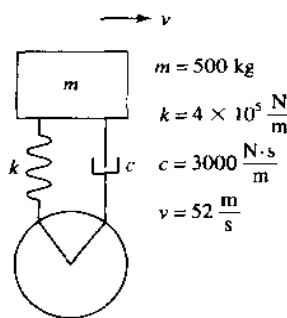


图 3.20

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{500 \text{ kg}}} = 28.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{3000 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}}{2(500 \text{ kg}) \left(28.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)} = 0.106.$$

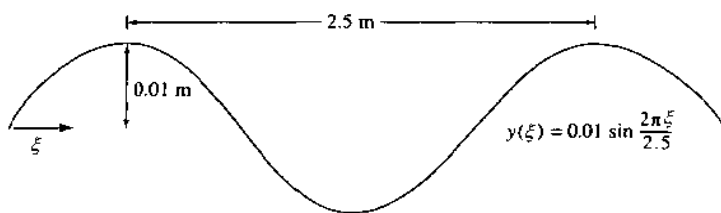


图 3.21

该路面的数学表达式为

$$y(\xi) = 0.01 \sin(0.8\pi\xi) \text{ m}.$$

如果该机车以恒定的水平速度运行, 那么 $\xi = vt$. 因此, 轮子随时间变化的垂直位移为

$$y(t) = 0.01 \sin[0.8\pi vt].$$

因为轮子在路面上运行, 因此对于机车主体来说, 它是一个简谐基础位移. 位移的频率为

$$\omega = 0.8\pi v = 0.8\pi \left(52 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 130.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

因此频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{130.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{28.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 4.62.$$

运用方程(3.27)可以计算出该机车的绝对位移振幅

$$\begin{aligned} X &= YT(4.62, 0.106) \\ &= (0.01 \text{ m}) \sqrt{\frac{1 + [2(0.106)(4.62)]^2}{[1 - (4.62)^2]^2 + [2(0.106)(4.62)]^2}} \\ &= 6.87 \times 10^{-4} \text{ m}. \end{aligned}$$

机车的加速度振幅为

$$A = \omega^2 X = \left(130.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 (6.87 \times 10^{-4} \text{ m}) = 11.7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

- 3.29 设 A 为题 3.28 中机车的绝对加速度振幅. 证明

$$\frac{A}{\omega_n^2 Y} = R(r, \zeta) = r^2 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},$$

其中 Y 为路面的振幅. 加速度振幅是 $\omega^2 X$, 其中 X 是机车的绝对位移振幅.

解 由方程(3.27)得到

$$\frac{\omega^2 X}{\omega^2 Y} = T(r, \zeta),$$

$$\omega_n^2 \frac{A}{\omega_n^2 \omega^2 Y} = T(r, \zeta),$$

$$\frac{A}{\omega_n^2 Y} = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} T(r, \zeta) = r^2 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}.$$

3.30 当 ζ 由题 3.28 得到后, 从题 3.29 中得到的曲线 $R(r, \zeta)$ 就为 r 的函数. 求当 R 得到最大和最小值时, 对应机车的速度分别为多大?

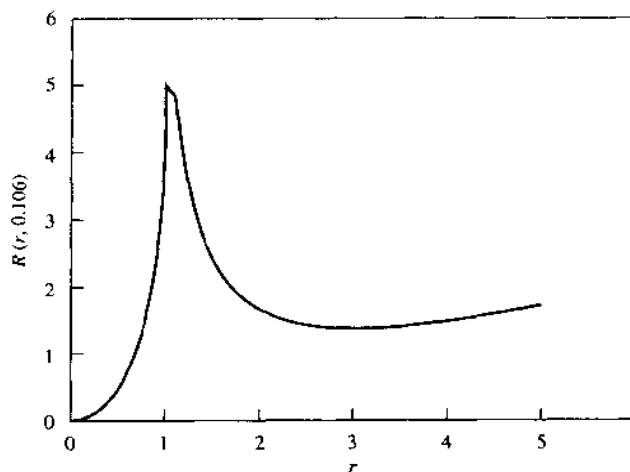


图 3.22

解 $R(r, 0.106)$ 的测绘曲线如图 3.22 所示. 对一个给定的 ζ , 对应 $R(r, \zeta)$ 的最大和最小值的 r 的值是可以通过设定 $dR^2/d\mu = 0$ 求得, 其中 $\mu = r^2$, 则有

$$R^2 = \frac{\mu^2 + 4\zeta^2\mu^3}{\mu^2 + (4\zeta^2 - 2)\mu + 1}.$$

对微分方程应用求导规则

$$\frac{dR^2}{d\mu} = \frac{(2\mu + 12\zeta^2\mu^2)[\mu^2 + (4\zeta^2 - 2)\mu + 1] - (\mu^2 + 4\zeta^2\mu^3)[2\mu + (4\zeta^2 - 2)]}{[\mu^2 + (4\zeta^2 - 2)\mu + 1]^2}.$$

设分子为零, 可推导出

$$4\zeta^2\mu^3 + (32\zeta^4 - 16\zeta^2)\mu^2 + (16\zeta^2 - 2)\mu + 2 = 0,$$

代入 $\zeta = 0.106$, 并整理得到

$$\mu^3 - 3.909\mu^2 - 40.5\mu + 44.5 = 0,$$

这个方程的正根为

$$\mu = 1.025, 8.109 \rightarrow r = 1.012, 2.862.$$

对所产生的最大和最小稳态振幅, 汽车的速度可由如下的式子所决定:

$$v = \frac{r\omega_g}{0.8\pi} = \frac{\left\{ 28.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right\} r}{0.8\pi} = 11.26r,$$

$$v_{\max} = 11.26(1.012) = 11.40 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{\min} = 11.26(2.862) = 32.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

3.31 对图 3.23 中所示的系统, 确定 $W(r, \zeta)$ 的形式, 并满足 $X/Y = W(r, \zeta)$, 问 W_{\max} 的最大值应为多少?

解 物块在任意时刻的隔离体图解如图 3.24 所示 力的总和为

$$(\sum F)_{\text{ext}} = (\sum F)_{\text{eff}},$$

可推出

$$\begin{aligned} -kx - c(\dot{x} - \dot{y}) &= m\ddot{x}, \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= c\dot{y} - c\omega Y \cos(\omega t), \\ \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x &= \frac{c}{m}\omega t \cos\omega t = 2\zeta\omega_n Y \cos\omega t, \end{aligned} \quad (3.55)$$

其中

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n}.$$

方程(3.55)是方程(3.4)带有激励方程(3.5)时的形式, 其中

$$F_0 = c\omega Y, \quad \phi = \frac{\pi}{2}.$$

因此, 用方程(3.10)可得稳态振幅为

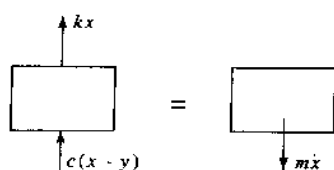


图 3.24

$$\begin{aligned} \frac{m\omega_n^2 X}{c\omega Y} &= M(r, \zeta), \\ \frac{m\omega_n^2 X}{2\zeta m\omega_n \omega Y} &= M(r, \zeta), \\ \frac{\omega_n X}{2\zeta \omega Y} &= M(r, \zeta), \end{aligned}$$

$$\frac{X}{Y} = M(r, \zeta) = 2\zeta r M(r, \zeta) = \frac{2\zeta r}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}.$$

对应 W 最大值的 r 的值可通过设定 $dW^2/dr=0$ 所得到. 应用微分方程的求导规则, 有

$$\frac{dW^2}{dr} = \frac{8\zeta^2 r [(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2] - 4\zeta^2 r^2 [2(1-r^2)(-2r) + 2(2\zeta r)(2\zeta)]}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^2}.$$

令 $dW^2/dr=0$ 可推出

$$2 - 2r^4 = 0 \rightarrow r = 1,$$

有

$$W_{\max} = 1.$$

3.32 求图 3.25 中所示系统中角振动的稳态振幅.

解 系统中的物块在任意时刻的隔离体图解如图 3.26 中所示. 所有力对 O 点之矩求和为

$$\begin{aligned} -k\left(\frac{3}{4}L\theta - y\right)\left(\frac{3}{4}L\right) - \frac{1}{4}cL\dot{\theta}\left(\frac{L}{4}\right) &= \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta} + \frac{1}{4}mL\dot{\theta}\left(\frac{1}{4}L\right), \\ \frac{7}{48}mL^2\ddot{\theta} + \frac{1}{16}cL^2\dot{\theta} + \frac{9}{16}kL^2\theta &= \frac{3}{4}kLY(t) = \frac{3}{4}kYL\sin\omega t. \end{aligned} \quad (3.56)$$

固有频率和阻尼比为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{9}{16}kL^2}{\frac{7}{48}mL^2}} = \sqrt{\frac{27k}{7m}} = \sqrt{\frac{27\left(2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)}{7(10\text{kg})}} = 277.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{\frac{1}{16}cL^2}{\frac{7}{48}mL^2},$$

$$\zeta = \frac{3c}{14m\omega_n} = \frac{3\left(400 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}\right)}{14(10\text{kg})\left(277.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)} = 0.0309.$$

方程(3.56)是方程(3.4)在激励方程(3.5)所示下的形式, 其中

$$F_0 = \frac{3}{4}kLY = \frac{3}{4}\left(2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(1.2\text{m})(0.01\text{m}) = 1800\text{N} \cdot \text{m},$$

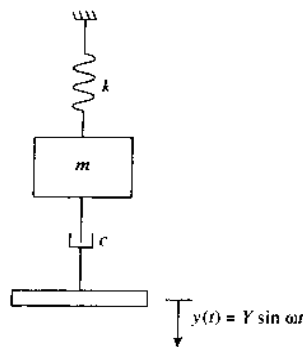


图 3.23

$$m_{eq} = \frac{7}{48} mL^2 = \frac{7}{48} (10\text{kg})(1.2\text{m})^2 = 2.1\text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

系统的频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{350 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{277.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1.26.$$

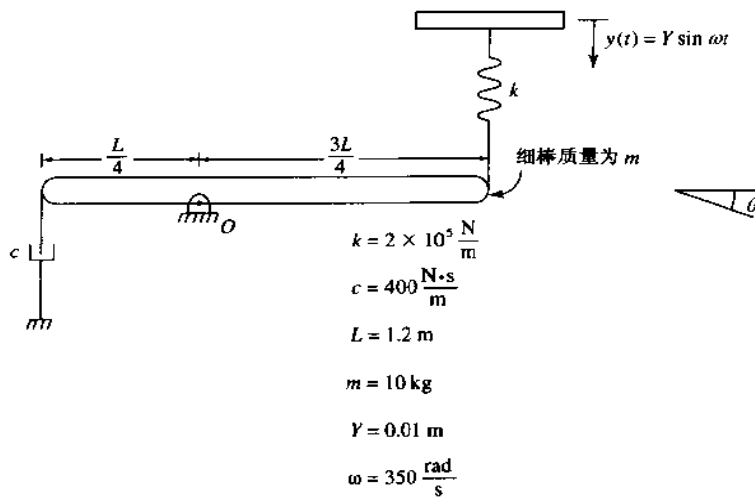


图 3.25

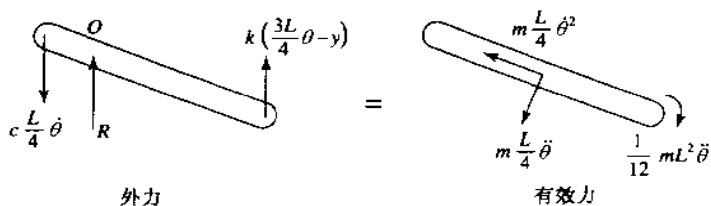


图 3.26

系统的放大因子为

$$M(1.26, 0.0309) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (1.26)^2]^2 + [2(0.0309)(1.26)]^2}} = 1.69.$$

应用方程(3.10)可求得稳态振幅为

$$\begin{aligned} \frac{m_{eq}\omega_n^2\Theta}{F_0} &= M(1.26, 0.0309), \\ \Theta &= \frac{F_0 M(1.26, 0.0309)}{m_{eq}\omega_n^2} = \frac{(1800\text{N} \cdot \text{m})(1.69)}{(2.1\text{kg} \cdot \text{m}^2) \left(277.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2} \\ &= 0.0188\text{rad} = 1.08^\circ. \end{aligned}$$

3.33 求图 3.27 中所示系统中机器的稳态振幅。

解 这个系统可以用质量 250 kg 的物块连在一个弹簧并置于有简谐运动的支承的模型来等效, 其弹簧刚度为

$$k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \left(210 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (4.1 \times 10^{-6} \text{m}^4)}{(1.8\text{m})^3} = 4.43 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

系统无阻尼, 具有如下的固有频率:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4.43 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{250 \text{ kg}}} = 42.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{35 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{42.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0.831$$

稳态振幅为

$$X = YT(0.831, 0) = \frac{0.005 \text{ m}}{1 - (0.831)^2} = 0.0162 \text{ m}$$

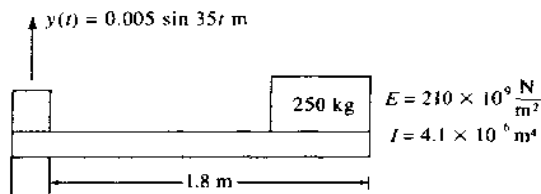


图 3.27

3.34 求图 3.28 中所示系统中的物块稳态振幅的近似值。

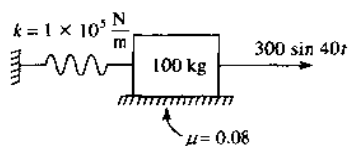


图 3.28

解 图 3.28 所示系统的固有频率和频率比为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{100 \text{ kg}}} = 31.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{31.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1.27$$

系统的受力比为

$$l = \frac{\mu mg}{F_0} = \frac{0.08(100 \text{ kg}) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{300 \text{ N}} = 0.262$$

放大因子由方程(3.43)所确定

$$M = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{4l}{\pi} \right)^2}{(1 - r^2)^2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{4(0.262)}{\pi} \right)^2}{[1 - (1.27)^2]^2}} = 1.538$$

稳态振幅为

$$X = \frac{F_0 X}{m \omega_n^2} = \frac{(300 \text{ N})(1.538)}{(100 \text{ kg}) \left(31.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2} = 4.61 \text{ mm}$$

3.35 当进行如图 3.29 中所示系统的自由振动测试时,在连续周期中的振幅比为 2.5 到 1。假定阻尼是黏性的,当机器以 2000 r/min 的转速运转时,由于受到 0.25 kg·m 的不平衡转矩的作用,求机器的响应。



图 3.29

解 系统的等效刚度,固有频率和频率比为

$$k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \left(200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (4.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(0.8 \text{ m})^3} = 5.27 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.27 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{125 \text{ kg}}} = 205.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\left\{ \frac{2000}{\text{min}} \cdot \frac{\text{r}}{\text{min}} \right\} \left\{ \frac{2\pi}{\text{r}} \right\} \left\{ \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right\}}{205.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1.02.$$

欠阻尼振动的对数减缩率为

$$\delta = \ln(2.5) = 0.916.$$

则黏性阻尼比可计算如下:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0.916}{\sqrt{4\pi^2 + (0.916)^2}} = 0.144.$$

注意题 3.15 的结果, 旋转不平衡转矩 $A = m_0 e$ 提供了一个频率平方的激励, 应用方程(3.17), 得

$$\begin{aligned} X &= \frac{m_0 e}{m} A(1.02, 0.144) \\ &= \frac{0.25 \text{ kg} \cdot \text{m}}{125 \text{ kg}} \frac{(1.02)^2}{\sqrt{[1 - (1.02)^2]^2 + [2(0.144)(1.02)]^2}} = 7.02 \text{ mm}. \end{aligned}$$

3.36 重解题 3.35. 设阻尼是迟滞的.

解 由方程(3.44), 从对数减缩率中来确定迟滞阻尼系数

$$h = \frac{\delta}{\pi} = \frac{\ln(2.5)}{\pi} = 0.292.$$

应用方程组(3.18)和(3.46)可得到稳态振幅, 计算如下:

$$\begin{aligned} X &= \frac{m_0 e}{m} \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + h^2}} \\ &= \frac{0.25 \text{ kg} \cdot \text{m}}{125 \text{ kg}} \frac{(1.02)^2}{\sqrt{[1 - (1.02)^2]^2 + (0.292)^2}} = 7.06 \text{ mm}. \end{aligned}$$

3.37 求图 3.30 中的周期激励的傅里叶系数表示.

解 图 3.30 所示的激励是一个周期为 0.04 s 的奇函数激励. 因此 $a_i = 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$, 傅里叶正弦系数可计算如下:

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \frac{2\pi i}{T} t dt \\ &= \frac{2}{0.04} \left[\int_0^{0.02} (-5000) \sin 50\pi i t dt + \int_{0.02}^{0.04} (5000) \sin 50\pi i t dt \right] \\ &= (50)(500) \left\{ \frac{-1}{50\pi i} \right\} [-\cos \pi i + \cos 0 + \cos 2\pi i - \cos \pi i] \\ &= -\frac{10\,000}{\pi i} [1 - (-1)^i]. \end{aligned}$$

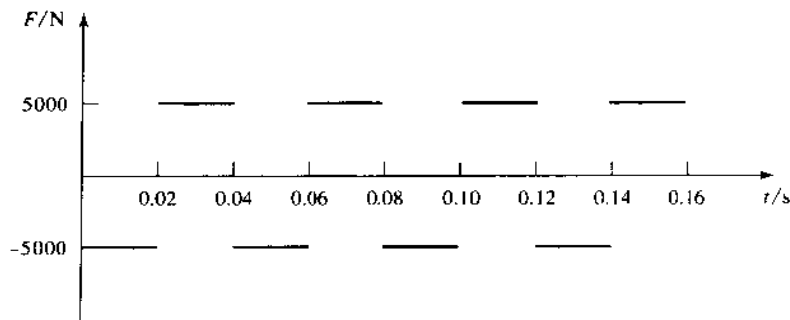


图 3.30

因此, $F(t)$ 的傅里叶级数可表示如下:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \frac{10\,000}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} [(1) - (-1)^i] \sin 50\pi i t \\
 &= -\frac{20\,000}{\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i} \sin 50\pi i t
 \end{aligned}$$

3.38 求图 3.31 中所示的激励的傅里叶级数表示。

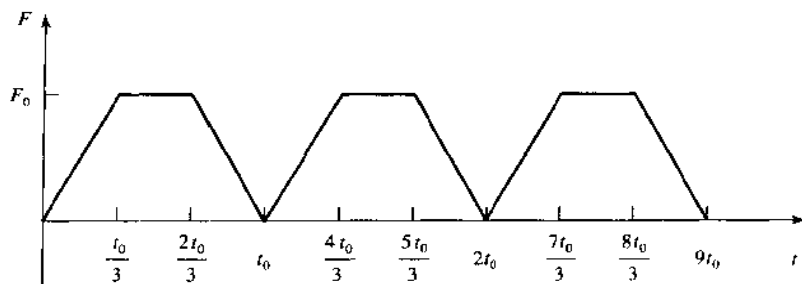


图 3.31

解 图 3.31 中的激励是一个周期为 t_0 的偶函数激励。因此 $b_i = 0, i = 1, 2, \dots$, 傅里叶余弦系数为

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} F(t) dt \\
 &= \frac{2}{t_0} \left[\int_0^{t_0/3} \left(\frac{3F_0}{t_0} \right) t dt + \int_{t_0/3}^{(2/3)t_0} F_0 dt + \int_{(2/3)t_0}^{t_0} 3F_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) dt \right] \\
 &= \frac{4}{3} F_0, \\
 a_i &= \frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} F(t) \cos \frac{2\pi i}{t_0} t dt \\
 &= \frac{2}{t_0} \left[\int_0^{(1/3)t_0} \left(\frac{3F_0}{t_0} \right) t \cos \frac{2\pi i}{t_0} t dt + \int_{(1/3)t_0}^{(2/3)t_0} F_0 \cos \frac{2\pi i}{t_0} t dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_{(2/3)t_0}^{t_0} 3F_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) \cos \frac{2\pi i}{t_0} t dt \right] \\
 &= \frac{3F_0}{i^2 \pi^2} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi i}{3} + \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi i}{3} - 1 \right) \\
 &= \begin{cases} -\frac{9F_0}{2i^2 \pi^2}, & i = 1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots, \\ 0, & i = 3, 6, 9, 12, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

因此, $F(t)$ 的傅里叶级数可表示为

$$F(t) = \frac{2}{3} F_0 - \frac{9F_0}{2\pi^2} \sum_{i=1,2,4,5,7,8}^{\infty} \frac{1}{i^2} \cos \frac{2\pi i}{t_0} t.$$

3.39 求图 3.32 中所示激励的傅里叶级数表示。

解 图 3.32 所示的激励既不是偶函数激励也不是奇函数激励, 它的周期为 0.04 s, 其傅里叶系数是

$$a_0 = \frac{2}{0.04} \left[\int_0^{0.01} (2000) dt + \int_{0.01}^{0.04} (0) dt \right] = 1000 \text{ N},$$

$$\begin{aligned}
 a_i &= \frac{2}{0.04} \left[\int_0^{0.01} (2000) \cos \frac{2\pi i}{0.04} t dt + \int_{0.01}^{0.04} (0) \cos \frac{2\pi i}{0.04} t dt \right] \\
 &= (50)(2000) \left(\frac{1}{50\pi i} \right) \left(\sin \frac{\pi}{2} i - \sin 0 \right) \\
 &= \frac{2000}{\pi i} \sin \frac{\pi}{2} i, \\
 b_i &= \frac{2}{0.04} \left[\int_0^{0.01} (2000) \sin \frac{2\pi i}{0.04} t dt + \int_{0.01}^{0.04} (0) \sin \frac{2\pi i}{0.04} t dt \right] \\
 &= (50)(2000) \left(\frac{-1}{50\pi i} \right) \left(\cos \frac{\pi}{2} i - \cos 0 \right) \\
 &= \frac{2000}{\pi i} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} i \right),
 \end{aligned}$$

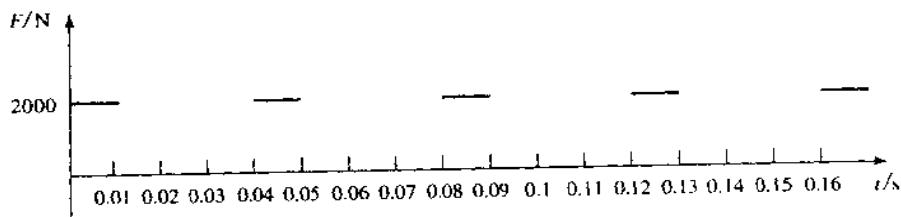


图 3.32

并且有

$$\begin{aligned}
 c_i &= \sqrt{a_i^2 + b_i^2} = \frac{2000}{\pi i} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{2} i + \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} i \right)^2} \\
 &= \frac{4000}{\pi i} \left| \sin \frac{\pi}{4} i \right|
 \end{aligned}$$

和

$$\kappa_i = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} i}{1 - \cos \frac{\pi}{2} i} \right).$$

因此, $F(t)$ 的傅里叶级数可表示如下:

$$F(t) = 500 + \frac{4000}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left| \sin \left(\pi \frac{i}{4} \right) \right| \sin(50\pi i + \kappa_i) t.$$

- 3.40** 质量为 200 kg 的压力机受到一个与时间有关的并且如题 3.39 和图 3.32 所示的激励。机器放在刚度为 1.8×10^7 N/m 的弹性机座上, 其阻尼比为 0.06。求机器的稳态响应和从平衡位置开始算起的最大位移的近似值。

解 系统的固有频率是

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.8 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{200 \text{ kg}}} = 300 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

应用方程(3.39)可得系统的响应为

$$x(t) = \frac{1}{1.8 \times 10^7} \left[500 + \frac{4000}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} i \right) \right| M(r_i, \zeta) \sin(50\pi i + \kappa_i - \phi_i) t \right],$$

其中

$$r_i = \frac{\omega_i}{\omega_n} = \frac{50\pi i}{300} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

并且

$$M(r_i, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - r_i^2)^2 + (0.12r_i)^2}}.$$

表 3.1 说明了响应的数值, 则有

$$x_{\max} < \frac{1}{1.8 \times 10^7} \left[500 - \sum_{i=1}^{\infty} c_i M(r_i, \xi) \right] = 3.34 \times 10^{-4} \text{ m}$$

表 3.1

i	ω_i	r_i	c_i	M_i	$c_i M_i$	κ_i	ϕ_i
1	157.1	0.523	900.2	1.37	1233	0.785	0.086
2	314.1	1.047	636.6	6.31	4017	0	-0.915
3	471.2	1.57	300	0.68	202.7	-0.785	-0.128
4	628.3	2.094	0	0.29	0	1.571	-0.074
5	785.4	2.672	179.8	0.17	30.7	0.785	-0.054
6	942.5	3.141	212.0	0.11	23.9	0	-0.042
7	1099.6	3.665	128.6	0.080	10.3	-0.785	0.035
8	1256.6	4.188	0	0.06	0	1.571	-0.030

补充习题

- 3.41 质量 100 kg 的机器和一个刚度为 $2 \times 10^5 \text{ N/m}$ 的弹簧相连接, 并且受到大小为 700 N, 周期为 0.1 s 的谐波激励. 求机器受迫振动的振幅.
答: 3.59 mm.
- 3.42 质量 185 kg 的机器置放在一个长度为 1.5 m 的简支梁的中央. 梁的弹性模量为 $210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 横截面惯性矩为 $3 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. 当机器受到一个大小为 $4 \times 10^4 \text{ N}$, 频率为 125 rad/s 的谐波激励时, 它的稳态振幅是多少?
答: 6.95 mm.
- 3.43 质量 45 kg 的机器被放置在一个弹性模量为 $210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 长为 2.5 m 的悬臂梁的末端. 当机器的转速为 40 rad/s 时, 受到一个大小为 1000 N 的谐波激励. 问当梁的横截面惯性矩为多少时, 机器的稳态振幅被限制在 15 mm 以内?
答: $I < 1.32 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ 或 $I > 3.44 \times 10^{-6} \text{ m}^4$.
- 3.44 图 3.33 所示系统中盘的转速为多少时, 盘扭转振动的稳态振幅小于 2° ?
答: $\omega < 275.1 \text{ rad/s}$ 和 $\omega > 463.4 \text{ rad/s}$.

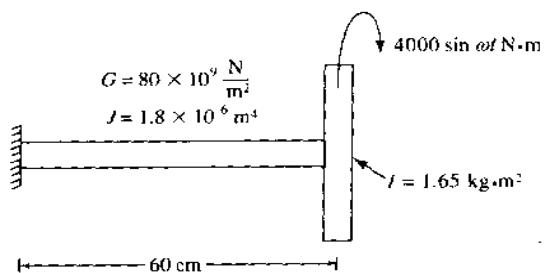


图 3.33

- 3.45 质量 50 kg 的机器置放在一个无阻尼隔振器上时, 受到频率为 125 Hz 的谐波激励, 测得它的稳态振幅为 1.8 mm. 当这个机器连接在两个串联的隔振器上时, 并受到同样的激励, 所测得稳态振幅为 1.2 mm. 问隔振器的刚度应是多少?
答: $1.54 \times 10^7 \text{ N/m}$.

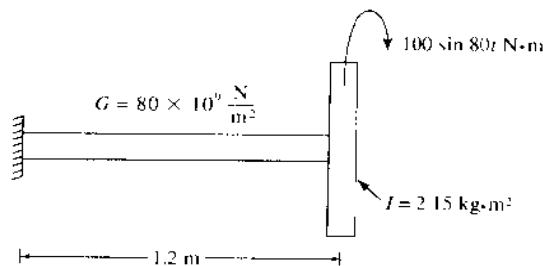


图 3.34

- 3.46 当图 3.34 中的轴受到一个如图所示的谐波激励时,产生了拍动周期为 0.082 s,问轴的直径应为多少?

答: 18.2 mm.

- 3.47 如果弹簧并联一个阻尼系数为 1200 N·s/m 的黏性阻尼器时,重解题 3.41.

答: 3.35 mm.

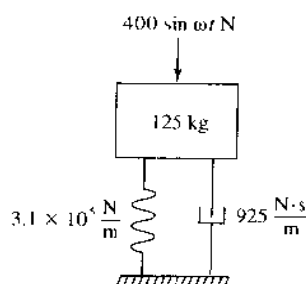


图 3.35

- 3.48 如果题 3.42 中的梁有一个黏性阻尼比 0.05 并且激励频率为 200 rad/s 时,重解题 3.42.

答: 22.7 mm.

- 3.49 当激励频率为多少时,图 3.35 中的机器的稳态振幅小于 1.5 mm?

答: $\omega < 18.7 \text{ rad/s}$ 和 $\omega > 67.5 \text{ rad/s}$.

- 3.50 如果 $\omega = 100 \text{ rad/s}$, $l = 20 \text{ cm}$,求图 3.36 中杆的角振动的稳态振幅是多少?

答: 1.7° .

- 3.51 如果 $\omega = 150 \text{ rad/s}$,求当图 3.36 中的杆的稳态振幅为 1° 时,杆的长度 l 为多少?

答: $l = 0.255 \text{ m}, 0.314 \text{ m}$.

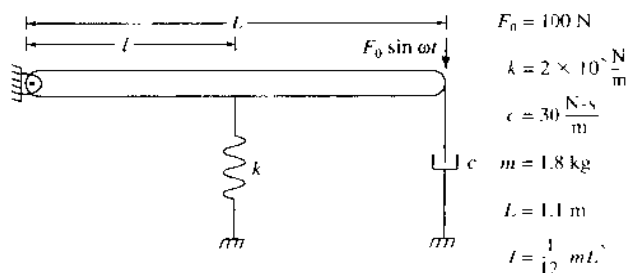


图 3.36

- 3.52 当图 3.37 中的系统受到一个大小为 100 N,且激励频率可变的谐波激励时,测得机器的最大稳态位移为 1.5 mm,问 c 的值应为多少?

答: 827.9 N·s/m.

- 3.53 问 c_c 的值为多少时图 3.38 中的系统的稳态振幅小于 1.5° ?

答: $c_c > 261.0 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$.

- 3.54 质量 65 kg 的电动机被放置在一个长 1.3 m,弹性模量为 $210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ 的钢制悬臂梁的末端,梁的横截面积惯性矩为 $1.3 \times 10^{-6} \text{ m}^4$.当电动机以 200 r/min 的转速运转时,在电动机的运转和梁的响应的相位差为 5° .假定为黏性阻尼,估算梁的阻尼比.

答: 0.146.

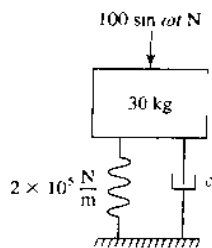


图 3.37

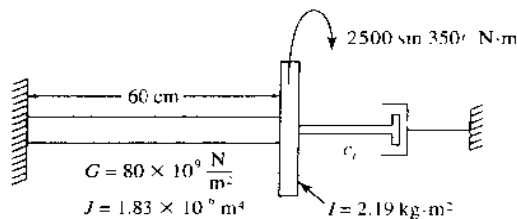


图 3.38

- 3.55 由方程(3.18)推导出方程(3.19).
- 3.56 质量 300 kg 的机器连接在刚度为 $3.1 \times 10^6 \text{ N/m}$ 、阻尼比为 0.06 的弹性基础上, 当机器的速度很大时, 受到一个频率平方激励, 机器的稳态振幅为 10 mm. 问当机器以低速运转时, 它的最大稳态振幅为多少?
答: 83.5 mm.
- 3.57 质量 100 kg 的机器具有 $0.25 \text{ kg} \cdot \text{m}$ 旋转不平衡转矩, 当它的转速为 2000 r/min 时, 它的稳态振幅为多少? 机器被放置在一个刚度为 $4.5 \times 10^6 \text{ N/m}$ 、阻尼比为 0.03 的隔振器上.
答: 37.9 mm.
- 3.58 当质量 75 kg 并具有旋转不平衡转矩的互动机的运转速度在增加时, 它的稳态振幅接近 1.78 mm. 问旋转不平衡的转矩为多少?
答: $0.134 \text{ kg} \cdot \text{m}$.
- 3.59 质量 400 kg 并具有旋转不平衡转矩的洗衣机的运转速度在 400 到 600 r/min. 如果洗衣机被放置在刚度为 $1 \times 10^6 \text{ N/m}$ 、阻尼比为 0.1 的弹性基础上时, 当洗衣机的转速超过它允许的转速范围时, 问它的最大稳态振幅为多少?
答: 5.65 mm.
- 3.60 如洗衣机的转速范围在 1000 到 1350 r/min 时, 重解题 3.59
答: 1.45 mm.
- 3.61 当题 3.59 中的洗衣机的转速为多少时, 它的稳态振幅小于 1.9 mm?
答: $\omega < 40.3 \text{ rad/s}$ 和 $\omega > 77.2 \text{ rad/s}$.
- 3.62 质量 80 kg 并具有 $0.2 \text{ kg} \cdot \text{m}$ 旋转不平衡转矩的压缩机, 置放在无阻尼弹性支承上. 问弹簧的刚度是多少时才能使压缩机在 300 到 600 r/min 的范围内的所有速度运转, 并保证稳态振幅小于 3.1 mm?
答: $k > 5.71 \times 10^5 \text{ N/m}$ 和 $k < 1.53 \times 10^4 \text{ N/m}$.
- 3.63 如果支承的阻尼比为 0.07, 重解题 3.62.
答: $k > 5.64 \times 10^5 \text{ N/m}$ 和 $k < 1.55 \times 10^4 \text{ N/m}$.
- 3.64 质量 500 kg 的物块连接在刚度为 $1.3 \times 10^5 \text{ N/m}$ 的弹簧及并联一个阻尼系数为 1800 N·s/m 黏性阻尼器上, 然后又与一个大质量地基相连接. 施加给地基的振幅为 2 mm, 频率为 15.0 rad/s 的谐波位移. 问物块相对于地基的位移的稳态振幅应为多少?
答: 6.98 mm.
- 3.65 问题 3.64 中的物块的绝对加速度的稳态振幅应为多少?
答: 1.85 m/s^2 .
- 3.66 质量 300 kg 的机动车经过一条轮廓近似为正弦曲线的公路, 曲线的振幅为 2.5 mm, 周期为 2.6 s. 应用题 3.28 中的简化悬浮系统模型来估计机动车以 30 m/s 的速度行驶时的加速度振幅. 其中, $k = 2.5 \times 10^5 \text{ N/m}$, $\zeta = 0.3$.
答: 4.31 m/s^2 .
- 3.67 用于实验室中数据采集和数据还原的电脑系统, 其质量 10 kg, 将其用螺栓固定在地板

的桌子上.由于旋转装置的运转,地板产生一个振幅为 0.2 mm , 频率为 30 Hz 的振动.如果桌子被模型化为一个刚度为 $1.3 \times 10^6 \text{ N/m}$ 阻尼比为 0.04 的系统,问电脑的稳态加速振幅是多少?

答: 9.77 m/s^2

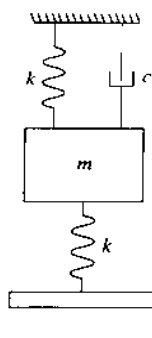


图 3.39

3.68 如果题 3.67 中的桌子假定为刚性的,求放置在电脑和桌子之间的无阻尼隔振器的最大刚度为多少时,电脑的稳态振幅才小于 6 m/s^2 ?

答: $1.63 \times 10^5 \text{ N/m}$.

3.69 对图 3.39 中所示的系统确定函数 $V(r, \zeta)$ 并使之满足 $X/Y = V(r, \zeta)$.

答: $V(r, \zeta) = \frac{1}{2} M(r, \zeta)$, $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{zmk}}$, $r = \omega \sqrt{\frac{m}{2k}}$.

3.70 如果图 3.39 中的系统和题 3.69 中的基础的运动频率是可变的,问物块的最大稳态振幅应是多少?

答: $\frac{Y}{4\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$.

3.71 质量 90 kg 的制动器放置在一个 1.5 m 长的悬臂钢梁的末端 ($E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $I = 1.53 \times 10^{-6} \text{ m}^4$), 给梁的基础一个振幅为 1.5 mm 的谐波激励.问频率为多少时,制动器的加速度被限制在 12 m/s^2 ?

答: $\omega > 72.5 \text{ rad/s}$ 或 $\omega < 47.7 \text{ rad/s}$.

3.72 如果梁的自由振动的振幅在 10 次循环内衰减为它原来值的 $1/3$, 重解题 3.42, 假定阻尼是迟滞的, 并激励频率为 200 rad/s .

答: 25.1 mm .

3.73 质量为 120 kg 的机器放置在一个长 85 cm ($E = 100 \times 10^9 \text{ N/m}^2$) 的铝质简支梁的中央 ($I = 4.56 \times 10^{-6} \text{ m}^4$). 当机器具有大小为 $0.68 \text{ kg}\cdot\text{m}$ 旋转不平衡转矩并以 485 rad/s 的转速运转时, 测得它的稳态振幅为 13.2 mm . 如果假定阻尼是迟滞的, 试求梁的迟滞阻尼系数.

答: 0.060 .

3.74 图 3.40 中的系统的稳态振幅是 1.21 mm . 问在物块和表面之间的摩擦系数应是多少?

答: 0.245 .

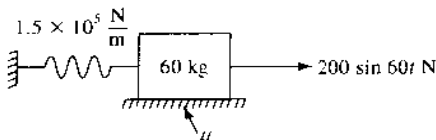


图 3.40

3.75 质量 200 kg 的压力机连在一个刚度为 $3.62 \times 10^6 \text{ N/m}$, 阻尼比为 0.1 的

弹性垫子上.压力机在工地的使用中,测得它的地面振动为

$$y(t) = 0.0014 \sin 100t + 0.0006 \sin(200t - 0.12) \text{ m}$$

试求压力机相对于地面的稳态位移.

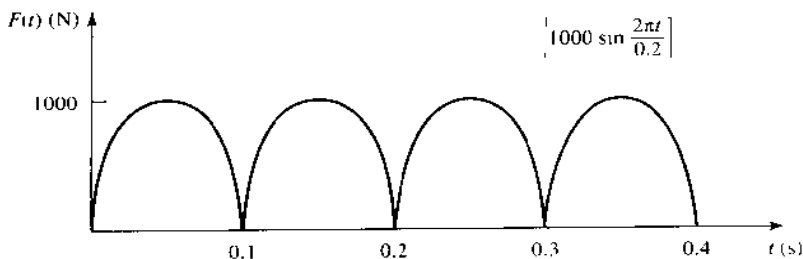


图 3.41

答: $0.00297 \sin(100t - 0.320) + 0.00048 \sin(200t - 2.78) \text{ m}$.

3.76 求图 3.41 中的周期激励的傅里叶级数表示.

答: $\frac{4000}{\pi} + \frac{4000}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \frac{1}{4l^2} \cos 20\pi l t$.

3.77 求图 3.42 中的周期激励的傅里叶级数表示.

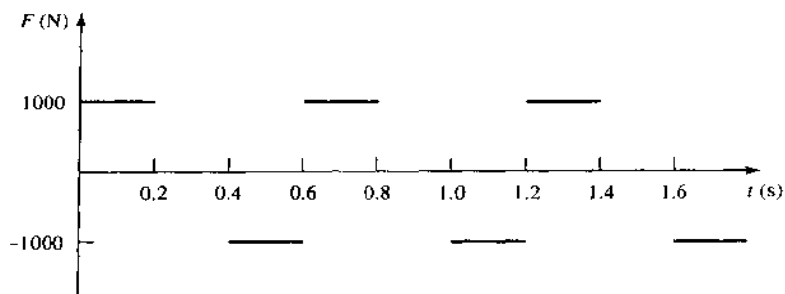


图 3.42

答: $\frac{3000}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sin \frac{10}{3} \pi i t$.

3.78 质量为 50 kg 重的物块和一个刚度为 $3.16 \times 10^6 \text{ N/m}$ 的弹簧及并联一个黏性阻尼器相连接, 系统的阻尼比为 0.12. 物块受到图 3.42 中的周期激励. 问物块在稳态时的最大近似位移应为多少?

答: 5.17 mm.

第四章 单自由度系统对任意激励的响应

§ 4.1 微分方程的一般形式

带有黏性阻尼的单自由度系统运动微分方程的一般形式为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{1}{m_{\text{eq}}}F(t), \quad (4.1)$$

§ 4.2 卷积积分

卷积积分提供了方程(4.1)并满足 $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$ 的一般解, 对任意的 $F(t)$, 其卷积响应为

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (4.2)$$

其中 $h(t)$ 是在 $t=0$ 时系统受到单位脉冲时的响应. 对欠阻尼的自由振动系统, 有

$$h(t) = \frac{1}{m_{\text{eq}}\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t, \quad (4.3)$$

其中

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (4.4)$$

是有阻尼的固有频率. 因此欠阻尼系统的响应为

$$x(t) = \frac{1}{m_{\text{eq}}\omega_d} \int_0^t F(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau. \quad (4.5)$$

§ 4.3 拉普拉斯变换解法

函数 $x(t)$ 的拉普拉斯变换式定义如下:

$$L\{x(t)\} = \bar{x}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt. \quad (4.6)$$

表 4.1 和表 4.2 是拉普拉斯变换和变换的性质.

表 4.1

序号	$f(t)$	$\bar{f}(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
4	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
5	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
6	$\delta(t-a)$	e^{-as}
7	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

表 4.2

属 性	公 式
变换定义	$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$
线性变换	$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\bar{f}(s) + \beta\bar{g}(s)$
导数的变换	$L\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n\bar{f}(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
第一变换理论	$L\{e^{-at}f(t)\} = \bar{f}(s+a)$
第二变换理论	$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}\bar{f}(s)$
逆变换	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(s)e^{st}ds$

由拉普拉斯变换的性质可将方程(4.1)变换成一个代数方程,它的解为

$$\bar{x}(s) = \frac{\frac{\bar{F}(s)}{m_{\text{eq}}} + (s + 2\zeta\omega_n)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (4.7)$$

当 $\zeta < 1$, 方程(4.7)的逆变换为

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[x(0)\cos\omega_d t + \frac{\dot{x}(0) + \zeta\omega_n x(0)}{\omega_d} \sin\omega_d t \right] + \frac{1}{m_{\text{eq}}} L^{-1} \left\{ \frac{\bar{F}(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right\}. \quad (4.8)$$

§ 4.4 单位脉冲函数和单位阶跃函数

单位脉冲函数 $\delta(t - t_0)$ 是在 $t = t_0$ 时作用在系统上产生单位脉冲的力的数学表示, 它的数学定义是

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0, \\ \infty, & t = t_0, \end{cases} \quad (4.9)$$

并且

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (4.10)$$

单位阶跃函数 $u(t - t_0)$ 通过如下的式子与单位脉冲函数相联系:

$$u(t - t_0) = \int_0^t \delta(\tau - t_0) d\tau, \quad (4.11)$$

推出

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0, \\ 1, & t > t_0. \end{cases} \quad (4.12)$$

在离散时间点, 激励力的数学表达式发生变化可用单位阶跃函数对它建立统一数学表达式.

一个重要的积分公式为

$$\int_0^t F(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = F(t_0) u(t - t_0). \quad (4.13)$$

§ 4.5 数值方法

当卷积积分提供了一种对任意的 $F(t)$ 求解方程(4.1)的解法时, 估价卷积积分的准确形式并不总是可能的. 有这样一种情况, 例如, 当 $F(t)$ 只能用经验来认识, 而不能用数学表达式来表示的时候. 在这些例子中, 应用数值方法就可解出方程(4.1)的近似解.

方程(4.1)的一种近似的数值解法是把卷积积分进行数值积分. 函数 $F(t)$ 能用内插函数 $\hat{F}(t)$ 的内插值来代替, 当方程(4.1)中的 $F(t)$ 被 $\hat{F}(t)$ 所代替时, 积分有一种准确形式的赋值. 内插函数经常被定义为分段函数. 也就是, 内插函数的形式在离散的时间点上是变化的.

方程(4.1)的近似数值解法的第二种形式是应用自启动的方法对方程(4.1)直接进行数值模拟. 例如: Adams 方法和 Runge-Kutta 方法.

§ 4.6 响应谱

设 t_0 是激励定义中的特征时间点, 设 F_0 是激励的最大值. 响应谱是无量纲参数 $(\omega_n t_0)/(2\pi)$ 对无量纲参数 $(m\omega_n^2 x_{\text{max}})/F_0$ 的绘制曲线. 对于任意的阻尼比也可绘制出响应谱.

例 题

- 4.1 用卷积积分法求解无阻尼单自由度系统受常力 F_0 作用时的响应, 系统固有频率为 ω_n , 质量为 m . 在 $t=0$ 时刻系统静止处于平衡位置.

解 取 $\zeta=0$, 把 $F(t)$ 代入方程(4.5)得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F_0 \sin\omega_n(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \cos\omega_n(t-\tau) \bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} (1 - \cos\omega_n t). \end{aligned}$$

- 4.2 用卷积积分法求解欠阻尼单自由度系统受常力 F_0 作用时的响应, 系统固有频率为 ω_n , 阻尼比为 ζ , 质量为 m . 在 $t=0$ 时刻系统静止处于平衡位置.

解 把 $F(t)$ 代入方程(4.5)得

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F_0 e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau.$$

令 $v=t-\tau$, 得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_d} \int_{v=t}^{v=0} e^{-\zeta\omega_n v} \sin\omega_d v (-dv) \\ &= -\frac{F_0}{m\omega_n^2} e^{-\zeta\omega_n v} (\zeta\omega_n \sin\omega_d v + \omega_d \cos\omega_d v) \bigg|_{v=0}^{v=t} \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t + \cos\omega_d t \right) \right]. \end{aligned}$$

- 4.3 用卷积积分法求解无阻尼单自由度系统受随时间变化的力 $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$ 作用时的响应, 系统固有频率为 ω_n , 质量为 m . 在 $t=0$ 时刻系统静止处于平衡位置.

解 把 $F(t)$ 代入方程(4.5)得

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F_0 e^{-\alpha\tau} \sin\omega_n(t-\tau) d\tau.$$

令 $v=t-\tau$, 得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n} \int_{v=t}^{v=0} e^{-\alpha(t-v)} \sin\omega_n v (-dv) \\ &= -\frac{F_0 e^{-\alpha t}}{m\omega_n} \int_{v=0}^{v=t} e^{\alpha v} \sin\omega_n v dv \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n(\alpha^2 + \omega_n^2)} e^{\alpha v} (\alpha \sin\omega_n v - \omega_n \cos\omega_n v) \bigg|_{v=0}^{v=t} \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n(\alpha^2 + \omega_n^2)} (\alpha \sin\omega_n t - \omega_n \cos\omega_n t + \omega_n e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

- 4.4 用卷积积分法求解无阻尼单自由度系统受简谐激励力 $F(t) = F_0 \sin\omega t$ (其中 $\omega \neq \omega_n$) 作用时随时间变化的响应, 系统固有频率为 ω_n , 质量为 m .

解 取 $\zeta=0$, 把 $F(t)$ 代入方程(4.5)得

把所给数据代入题 4.6 的结果可得

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \frac{36(100 \text{ N})}{7(20 \text{ kg})(1.4 \text{ m}) \left\{ 51.96 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \left[(1.20 \text{ s}^{-1})^2 + \left(51.96 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \right] \right\}} \\ &\quad \times (12.0 \sin 51.96t - 51.96 \cos 51.96t + 51.96 e^{-12t}) \\ &\approx 0.00149 \sin 51.96t - 0.00645 \cos 51.96t + 0.00645 e^{-12t}.\end{aligned}$$

令 $d\theta/dt = 0$ 可得最大值出现时的时间, 所以

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.0774 \cos 51.96t + 0.335 \sin 51.96t - 0.0774 e^{-12t} = 0.$$

利用试凑法可得

$$t = 0.0583 \text{ s}, \quad \theta_{\max} \approx 0.00996 \text{ rad}.$$

4.7 用卷积积分法求解单自由度无阻尼系统受如图 4.2 所示激励的响应.

解 当 $t < t_0$ 时

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F_0 \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t).\end{aligned}$$

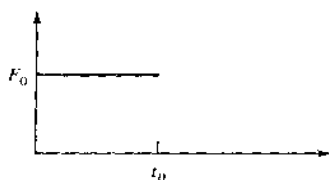


图 4.2

当 $t > t_0$ 时

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{m\omega_n} \int_0^{t_0} F_0 \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} [\cos \omega_n(t - t_0) - \cos \omega_n t].\end{aligned}$$

4.8 用卷积积分法求解单自由度无阻尼系统受如图 4.3 所示三角脉冲激励的响应.

解 当 $t < t_0/2$ 时

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t \left(2 \frac{F_0}{t_0} \right) \tau \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{2F_0}{m\omega_n^2 t_0} \left(t - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t \right);\end{aligned}$$

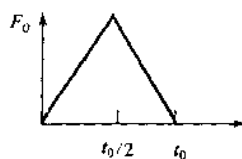


图 4.3

当 $t_0/2 \leq t < t_0$ 时

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{m\omega_n} \left[\int_0^{t_0/2} \left(2 \frac{F_0}{t_0} \right) \tau \sin \omega_n(t - \tau) d\tau + \int_{t_0/2}^t 2F_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_0} \right) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \right] \\ &= \frac{2F_0}{m\omega_n^2 t_0} \left\{ 1 - \frac{t}{t_0} + \frac{1}{\omega_n t} \left[2 \sin \omega_n \left(t - \frac{1}{2} t_0 \right) - \sin \omega_n t \right] \right\};\end{aligned}$$

当 $t \geq t_0$ 时

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{m\omega_n} \left[\int_0^{t_0/2} \left(2 \frac{F_0}{t_0} \right) \tau \sin \omega_n(t - \tau) d\tau + \int_{t_0/2}^{t_0} 2F_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_0} \right) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \right] \\ &= \frac{2F_0}{m\omega_n^2 t_0} \left[2 \sin \omega_n \left(t - \frac{1}{2} t_0 \right) - \sin \omega_n t - \sin \omega_n(t - t_0) \right].\end{aligned}$$

4.9 用单位阶跃函数建立如图 4.3 所示三角脉冲的统一的数学表达式.

解 三角激励的图解如图 4.4 所示, 由分段图解及单位阶跃函数的定义可得

$$\begin{aligned}x(t) &= 2F_0 \frac{t}{t_0} u(t) - 2F_0 \frac{t}{t_0} u\left(t - \frac{1}{2} t_0\right) \\ &\quad + 2F_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) u\left(t - \frac{1}{2} t_0\right) - 2F_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) u(t - t_0)\end{aligned}$$

$$= 2F_0 \left[\frac{t}{t_0} u(t) + \left(1 - 2\frac{t}{t_0} \right) u\left(t - \frac{1}{2}t_0\right) - \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) u(t - t_0) \right].$$

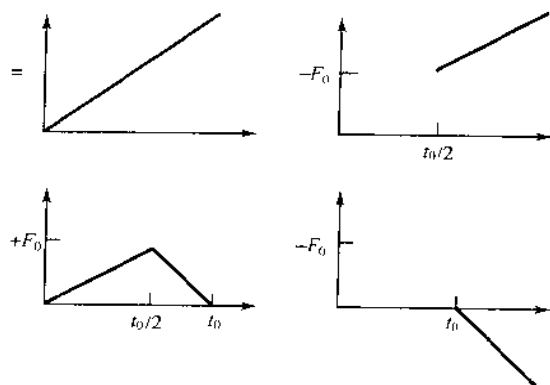


图 4.4

4.10 证明公式

$$\int_0^t u(\tau - t_0) g(t, \tau) d\tau = u(t - t_0) \int_{t_0}^t g(t, \tau) d\tau.$$

解 注意, 当 $\tau < t_0$ 时, 有 $u(\tau - t_0) = 0$. 当 $t < t_0$ 时, 被积式恒为零. 所以, 为使 $t > t_0$ 需有

$$\begin{aligned} \int_0^t u(\tau - t_0) g(t, \tau) d\tau &= \int_0^{t_0} u(\tau - t_0) g(t, \tau) d\tau + \int_{t_0}^t u(\tau - t_0) g(t, \tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t g(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^t u(\tau - t_0) g(t, \tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \int_{t_0}^t g(t, \tau) d\tau, & t > t_0 \end{cases} = u(t - t_0) \int_{t_0}^t g(t, \tau) d\tau.$$

4.11 利用题 4.9 及题 4.10 的结果, 建立无阻尼的单自由度系统受如图 4.3 所示三角脉冲激励时响应的统一数学表达式.

解 把题 4.9 建立的三角激励作用下的统一数学表达式代入卷积积分方程(4.5), 其中 $\zeta = 0$, 有

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t 2F_0 \left[\frac{\tau}{t_0} u(\tau) + \left(1 - 2\frac{\tau}{t_0} \right) u\left(\tau - \frac{1}{2}t_0\right) - \left(1 - \frac{\tau}{t_0} \right) u(\tau - t_0) \right] \sin\omega_n(t - \tau) d\tau.$$

利用题 4.10 的被积公式可得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2F_0}{m\omega_n} \left[u(t) \int_0^t \frac{\tau}{t_0} \sin\omega_n(t - \tau) d\tau + u\left(t - \frac{1}{2}t_0\right) \int_{(1/2)t_0}^t \left(1 - 2\frac{\tau}{t_0} \right) \sin\omega_n(t - \tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. - u(t - t_0) \int_{t_0}^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0} \right) \sin\omega_n(t - \tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

积分计算得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2F_0}{m\omega_n^2} \left\{ u(t) \left[\frac{t}{t_0} - \frac{1}{\omega_n t_0} \sin\omega_n t \right] + u\left(t - \frac{1}{2}t_0\right) \left[1 - 2\frac{t}{t_0} + \frac{2}{\omega_n t_0} \sin\omega_n \left(t - \frac{1}{2}t_0\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - u(t - t_0) \left[1 - \frac{t}{t_0} + \frac{2}{\omega_n t_0} \sin\omega_n(t - t_0) \right] \right\}. \end{aligned}$$

- 4.12 用卷积积分法及单位阶跃函数法,建立单自由度无阻尼系统受如图 4.5 所示激励的响应的统一数学表达式.

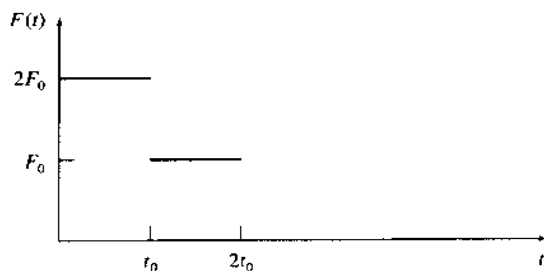


图 4.5

解 如图 4.5 所示激励的统一的数学表达式为

$$\begin{aligned} F(t) &= 2F_0[u(t) - u(t - t_0)] + F_0[u(t - t_0) - u(t - 2t_0)] \\ &= 2F_0u(t) - F_0u(t - t_0) - F_0u(t - 2t_0), \end{aligned}$$

代入卷积积分方程(4.5), 其中 $\xi = 0$, 得到

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n} \left\{ \int_0^t [2u(\tau) - u(\tau - t_0) - u(\tau - 2t_0)] \sin\omega_n(t - \tau) d\tau \right\} \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n} \left[2u(t) \int_0^t \sin\omega_n(t - \tau) d\tau - u(t - t_0) \int_{t_0}^t \sin\omega_n(t - \tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. - u(t - 2t_0) \int_{2t_0}^t \sin\omega_n(t - \tau) d\tau \right], \\ x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \{ u(t)(1 - \cos\omega_n t) - u(t - t_0)[1 - \cos\omega_n(t - t_0)] \\ &\quad - u(t - 2t_0)[1 - \cos\omega_n(t - 2t_0)] \}. \end{aligned}$$

- 4.13 求解单自由度无阻尼系统受矩形脉冲激励作用时响应的统一数学表达式, 系统的 $\omega_n = 100 \text{ rad/s}$, 质量为 10 kg , 脉冲的幅值为 2000 N , 历时 0.1 s , 在 $t = 0.25 \text{ s}$ 时冲量幅值为 $200 \text{ N}\cdot\text{s}$.

解 脉冲激励的数学表达式为

$$F(t) = 2000[u(t) - u(t - 0.1)] + 20\delta(t - 0.25),$$

代入方程(4.5), 其中 $\xi = 0$, 得到

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{(10 \text{ kg}) \left(100 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)} \left\{ 2000 \int_0^t [u(\tau) - u(\tau - 0.1)] \sin 100(t - \tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + 20 \int_0^t \delta(\tau - 0.25) \sin 100(t - \tau) d\tau \right\} \\ &= 2u(t) \int_0^t \sin 100(t - \tau) d\tau - 2u(t - 0.1) \int_{0.1}^t \sin 100(t - \tau) d\tau \\ &\quad + 0.02 \sin 100(t - 0.25) u(t - 0.25) \\ &= 0.02u(t)(1 - \cos 100t) - 0.02u(t - 0.1)[1 - \cos(100t - 10)] \\ &\quad + 0.02u(t - 0.25) \sin(100t - 25). \end{aligned}$$

- 4.14 用单位阶跃函数法建立如图 4.6 所示周期函数的无限级数的表达式.

解 图 4.6 所示激励的分段图解如图 4.7 所示, $F(t)$ 的单位阶跃函数的表达式为

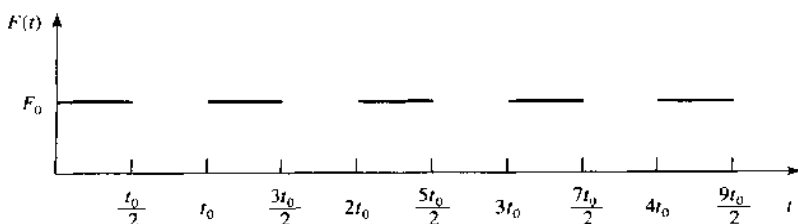


图 4.6

$$F(t) = F_0 \left[u(t) - u\left(t - \frac{1}{2}t_0\right) \right] + F_0 \left[u(t - t_0) - u\left(t - \frac{3}{2}t_0\right) \right] \\ + F_0 \left[u(t - 2t_0) - u\left(t - \frac{5}{2}t_0\right) \right] + \cdots +$$

可化为

$$F(t) = F_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ u(t - it_0) - u\left[t - \frac{1}{2}(2i+1)t_0\right] \right\}.$$

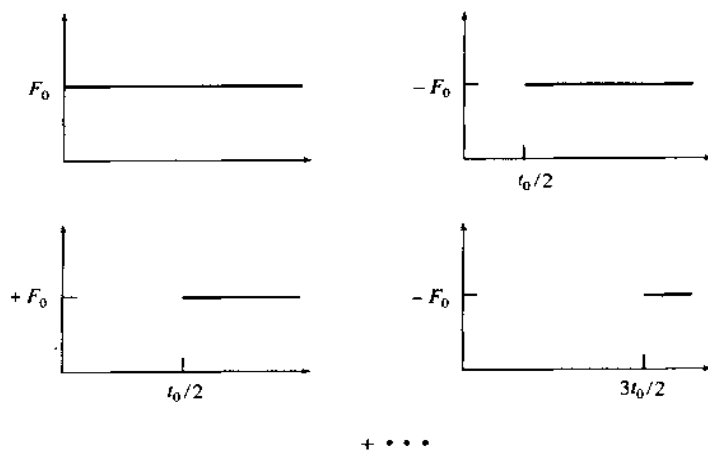


图 4.7

4.15 用卷积积分法建立单自由度无阻尼系统受如图 4.6 所示周期激励的统一数学表达式.

解 由题 4.14 建立的激励的数学形式代入卷积积分方程(4.5), 其中 $\zeta=0$, 得到

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ u(\tau - it_0) - u\left[\tau - \frac{1}{2}(2i+1)t_0\right] \right\} \sin\omega_n(t - \tau) d\tau$$

假定无限级数对一切时间 t 都收敛, 则积分和求和的顺序可以交换, 所以有

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \int_0^t u(\tau - it_0) \sin\omega_n(t - \tau) d\tau - \int_0^t u\left[\tau - \frac{1}{2}(2i+1)t_0\right] \sin\omega_n(t - \tau) d\tau \right\}.$$

由题 4.10 中建立的积分公式可得

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ u(t - it_0) \cos\omega_n(t - \tau) \Big|_{\tau=it_0}^{\tau=t} - u\left[t - \frac{1}{2}(2i+1)t_0\right] \right. \\ \left. \times \cos\omega_n(t - \tau) \Big|_{\tau=\frac{1}{2}(2i+1)t_0}^{\tau=t} \right\} \\ = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ u(t - it_0) [1 - \cos\omega_n(t - it_0)] - u\left[t - \frac{1}{2}(2i+1)t_0\right] \right.$$

$$\times \left\{ 1 - \cos \omega_n \left[t - \frac{1}{2}(2i-1)t_0 \right] \right\}.$$

4.16 用拉普拉斯变换法求解题 4.1.

解 激振力的拉普拉斯变换形式为

$$F(s) = F_0,$$

$$\bar{F}(s) = \frac{F_0}{s},$$

代入方程(4.7), 其中 $x(0)=0, \dot{x}=0, \zeta=0$, 得到

$$\bar{x}(s) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{s(s^2 + \omega_n^2)},$$

分解得

$$\bar{x}(s) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right).$$

利用逆变换的线性性质得

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} \left(L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right\} \right).$$

由表 4.1 的逆变换可得

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t).$$

4.17 用拉普拉斯变换法求解题 4.2.

解 激振力及其拉普拉斯变换为

$$F(t) = F_0,$$

$$\bar{F}(s) = \frac{F_0}{s},$$

代入方程(4.7), 其中 $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$, 得

$$\bar{x}(s) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)},$$

分解得

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{m\omega_n^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right).$$

完成分母二次的平方, 并利用逆变换的线性性质可得

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} \left(L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right\} \right. \\ \left. - \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} L^{-1} \left\{ \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right\} \right).$$

由表 4.2 中第一个变换理论得

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega_d^2} \right\} + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} L^{-1} \left\{ \frac{\omega_d}{s^2 + \omega_d^2} \right\} \right) \right].$$

由表 4.1 中变换对得

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \right].$$

4.18 用拉普拉斯变换法求解题 4.5.

解 题 4.5 的微分方程可写为

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = \frac{36F_0}{7mL} e^{-at},$$

其中

$$\omega_n = \sqrt{\frac{27k}{7m}}.$$

假定系统在 $t=0$ 时在平衡位置静止, 对微分方程进行拉普拉斯变换得

$$\bar{\theta}(s) = \frac{36F_0}{7mL} \frac{1}{(s+\alpha)(s+\omega_n^2)},$$

分解得

$$\bar{\theta}(s) = \frac{36F_0}{7mL(\alpha^2 + \omega_n^2)} \left(\frac{1}{s+\alpha} + \frac{\alpha-s}{s^2 + \omega_n^2} \right).$$

利用逆变换的线性性质得

$$\theta(t) = \frac{36F_0}{7mL(\alpha^2 + \omega_n^2)} \left(L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+\alpha} \right\} + \frac{\alpha}{\omega_n} L^{-1} \left\{ \frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right\} \right).$$

由表 4.1 得

$$\theta(t) = \frac{12F_0}{7mL(\alpha^2 + \omega_n^2)} \left(e^{-\alpha t} + \frac{\alpha}{\omega_n} \sin \omega_n t - \cos \omega_n t \right).$$

- 4.19** 用拉普拉斯变换法求解无阻尼单自由度系统受到如图 4.3 所示三角脉冲激励时的响应, 系统固有频率为 ω_n , 质量为 m , 初瞬时系统在平衡位置静止.

解 利用题 4.5 的结果, 三角脉冲的数学表达式为

$$F(t) = 2F_0 \left[\frac{t}{t_0} u(t) + \left(1 - 2\frac{t}{t_0} \right) u\left(t - \frac{1}{2}t_0\right) - \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) u(t - t_0) \right].$$

由第二变换理论及表 4.1, 其拉普拉斯变换为

$$\bar{F}(s) = 2\frac{F_0}{t_0} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2} e^{-s(t_0/2)} + \frac{1}{s^2} e^{-st_0} \right),$$

代入方程(4.7)得

$$\bar{x}(s) = \frac{2F_0}{mt_0} \frac{1 - 2e^{-s(t_0/2)} + e^{-st_0}}{s^2(s^2 + \omega_n^2)},$$

分解得

$$\bar{x}(s) = \frac{2F_0}{m\omega_n^2 t_0} (1 - 2e^{-s(t_0/2)} + e^{-st_0}) \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \right).$$

由第二变换理论及表 4.1 的变换对可得系统的响应, 即

$$x(t) = \frac{2F_0}{m\omega_n^2 t_0} \left\{ t - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t - 2u\left(t - \frac{1}{2}t_0\right) \left[\left(t - \frac{1}{2}t_0\right) - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n \left(t - \frac{1}{2}t_0\right) \right] \right. \\ \left. + u(t - t_0) \left[(t - t_0) - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n (t - t_0) \right] \right\}.$$

- 4.20** 用拉普拉斯变换法求解无阻尼单自由度系统受到如图 4.6 所示周期激励时的响应, 系统固有频率为 ω_n , 质量为 m , 初瞬时系统在平衡位置静止.

解 由题 4.16, 图 4.6 中的周期函数的数学表示为

$$F(t) = F_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left[u(t - it_0) - u\left(t - \frac{1}{2}(2i+1)t_0\right) \right].$$

由第二个变换理论得

$$\bar{F}(s) = \frac{F_0}{s} \sum_{i=0}^{\infty} (e^{-ist_0} - e^{-\frac{1}{2}(2i+1)st_0}).$$

把 $x(0)=0, \dot{x}(0)=0, \xi=0$, 代入方程(4.7)可得

$$\bar{x}(s) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{s(s^2 + \omega_n^2)} \sum_{i=0}^{\infty} [e^{-ist_0} - e^{-\frac{1}{2}(2i+1)st_0}] \\ - \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right) \sum_{i=1}^{\infty} [e^{-ist_0} - e^{-\frac{1}{2}(2i-1)st_0}].$$

应用第二变换理论进行逆变换运算得

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \sum_{i=0}^{\infty} \{ [1 - \cos \omega_n(t - it_0)] u(t - it_0) \} \\ - \left\{ 1 - \cos \omega_n \left[t - \frac{1}{2}(2i-1)t_0 \right] \right\} u \left[t - \frac{1}{2}(2i-1)t_0 \right].$$

- 4.21 应用拉普拉斯变换理论求解单自由度欠阻尼系统受到大小为 I 的冲量级数作用的响应, 系统阻尼比为 ζ , 固有频率为 ω_n , 质量为 m , 初瞬时, 系统在平衡位置静止, 并在 $t=0$ 开始作用脉冲, 且时间间隔为 t_0 .

解 激励的数学形式及其拉普拉斯变换为

$$F(t) = I \sum_{i=0}^{\infty} \delta(t - it_0),$$

$$\bar{F}(s) = I \sum_{i=0}^{\infty} e^{-ist_0},$$

代入方程(4.7), 其中 $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$, 得到

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= \frac{I}{m} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-ist_0} \\ &= \frac{I}{m} \frac{1}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-ist_0}. \end{aligned}$$

应用第二变换理论进行逆变换运算得

$$x(t) = \frac{I}{m\omega_d} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\zeta\omega_n(t-it_0)} \sin\omega_d(t-it_0) u(t-it_0).$$

- 4.22 设 $v = \dot{x}$. 改写方程(4.1), 得到系统的两个一次的微分方程. 其中 t 作为非独立变量, 并且 x 和 v 作为独立变量.

解 从 v 的定义可得

$$\dot{x} = v. \quad (4.14)$$

从方程(4.1), 得

$$\dot{v} = \frac{1}{m_{eq}} F(t) - 2\zeta\omega_n v - \omega_n^2 x. \quad (4.15)$$

方程(4.14)和(4.15)形成一套一次的同时满足的线性方程组来解出 x 和 v .

- 4.23 方程(4.1)的直接数值模拟通常将方程(4.1)成为两个一阶微分方程组, 正如题 4.22 中的一样. 求解题的时间间隔是离散的, 在不连续的时间间隔点上的独立变量可近似形成递推关系. 设 t_1, t_2, \dots , 是相等的时间间隔 Δt 上的离散点. 应用一阶泰勒级数展开的欧拉方法是一种来近似独立变量的时间导数的隐含的方法. 应用欧拉方法建立单自由度系统的递推关系.

解 设 $f(t)$ 是单变量的连续微分函数, 它的泰勒级数展开为

$$f(t + \Delta t) = f(t) + (\Delta t)\dot{f}(t) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\ddot{f}(t) + \frac{1}{6}(\Delta t)^3\ddot{\ddot{f}}(t) + \dots,$$

线性变换并整理,

$$\dot{f}(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} + O(\Delta t). \quad (4.16)$$

定义 $x_i = x(i\Delta t)$, $v_i = v(i\Delta t)$. 在 $t = t_i = i\Delta t$ 时, 把方程(4.16)代入题 4.22 中的方程组(4.14)和(4.15)时可推出

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} + O(\Delta t) = v_i,$$

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} + O(\Delta t) = \frac{1}{m_{eq}} F(t_i) - 2\zeta\omega_n v_i - \omega_n^2 x_i,$$

或者

$$x_{i+1} = x_i + (\Delta t)v_i + O(\Delta t),$$

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t \left(\frac{1}{m_{eq}} F(t_i) - 2\zeta\omega_n v_i - \omega_n^2 x_i \right) + O(\Delta t),$$

- 4.24 单自由度系统的质量为 10 kg, 固有频率为 100 rad/s, 阻尼比为 0.1 并受到大小为 100 N 的常外力作用, 试应用直接的欧拉方法求解. 系统静止时在平衡位置, 此时 $t=0$. 用时间增量为 0.001 s, 并对照题 4.2 的解法.

解 计算如表 4.3 中所示.

表 4.3

t_i	$x(t_i)$	$v(t_i)$	$F(t_i)/m$	$2\zeta\omega_n v_i$	$\omega_n^2 x_i$	$x(t_i + \Delta)$	$v(t_i + \Delta)$	$x(t)$ (精确值)
0	0	0	10	0	0	0	0.01	0
0.001	0	0.01	10	0.2	0	0.00001	0.0198	4.96E-06
0.002	0.00001	0.0198	10	0.396	0.1	2.98E-05	0.029304	1.97E-05
0.003	2.98E-05	0.029304	10	0.58608	0.298	5.91E-05	0.03842	4.38E-05
0.004	5.91E-05	0.03842	10	0.768398	0.59104	9.75E-05	0.04706	7.69E-05
0.005	9.75E-05	0.04706	10	0.94121	0.975239	0.000145	0.055144	0.000118
0.006	0.000145	0.055144	10	1.102881	1.445844	0.0002	0.062595	0.000168
0.007	0.0002	0.062595	10	1.251906	1.997284	0.000262	0.069346	0.000225
0.008	0.000262	0.069346	10	1.386922	2.623237	0.000332	0.075336	0.000288
0.009	0.000332	0.075336	10	1.506719	3.316699	0.000407	0.080513	0.000357
0.01	0.000407	0.080513	10	1.610251	4.070058	0.000488	0.084832	0.000431
0.011	0.000488	0.084832	10	1.696645	4.875184	0.000572	0.08826	0.000509
0.012	0.000572	0.08826	10	1.765208	5.723506	0.000661	0.090772	0.000591
0.013	0.000661	0.090772	10	1.815434	6.60611	0.000751	0.09235	0.000675
0.014	0.000751	0.09235	10	1.847003	7.513827	0.000844	0.092989	0.00076
0.015	0.000844	0.092989	10	1.859786	8.437328	0.000937	0.092692	0.000846
0.016	0.000937	0.092692	10	1.853844	9.367221	0.001029	0.091471	0.000932
0.017	0.001029	0.091471	10	1.829423	10.29414	0.001121	0.089348	0.001017
0.018	0.001121	0.089348	10	1.786951	11.20885	0.00121	0.086352	0.0011
0.019	0.00121	0.086352	10	1.727035	12.10233	0.001297	0.082522	0.001181
0.02	0.001297	0.082522	10	1.650448	12.96585	0.001379	0.077906	0.001258

4.25 对如下的积分求数值近似解:

$$I(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

解 积分式可写成如下的形式:

$$I(t_j) = \sum_{i=0}^j \alpha_i f(t_i) \Delta t, \quad (4.17)$$

其中 t_1, t_2, \dots, t_j 称为节点, 被积函数的中间值是可以估算的. α_i 的值对所应用的数字解法是特定的. 建立方程(4.17)的形式以使它能用来近似方程(4.2)的卷积积分.

对卷积积分, 方程(4.17)扩展为

$$x(t_j) = \sum_{i=0}^j \alpha_i F(t_i) h(t_j - t_i) \Delta t.$$

假定 $t_k = k \Delta t$, 则

$$x(t_j) = \sum_{i=0}^j \alpha_i F(i \Delta t) h[(j-i) \Delta t] \Delta t.$$

4.26 应用梯形规则, 题 4.25 中的方程(4.17)中的 α_i 值是 $\alpha_1 = \alpha_j = 0.5$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{j-1} = 1$. 试应用梯形规则求系统关于图 4.8 中的激励响应, 系统质量为 10 kg, 固有频率为 50 rad/s, 阻尼比为 0.05. 应用 $\Delta t = 0.01$ s, 并求 $x(0.01)$, $x(0.02)$, 和 $x(0.03)$ 的近似值.

解 注意到

$$\begin{aligned} h(k \Delta t) &= \frac{1}{m \omega_d} e^{-\zeta \omega_n k \Delta t} \sin(\omega_d k \Delta t), \\ &= 2.003 \times 10^{-3} e^{-0.025k} \sin(0.4995k) \\ h(0 \Delta t) &= 0, h(\Delta t) = 9.36 \times 10^{-4}, \end{aligned}$$

$$h(2\Delta t) = 1.56 \times 10^{-3}, h(3\Delta t) = 1.84 \times 10^{-3}$$

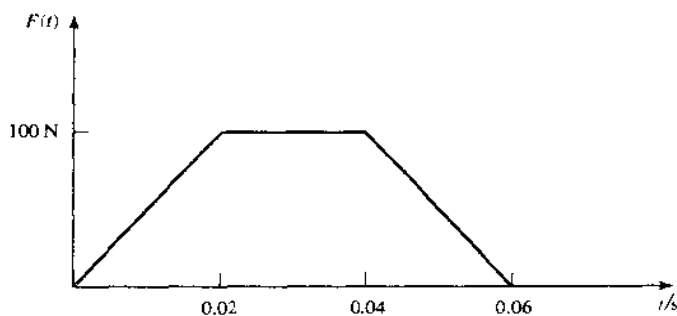


图 4.8

因此,应用梯形规则

$$\begin{aligned} x(0.01) &= [0.5F(0)h(\Delta t) + 0.5F(0.01)h(0)]\Delta t \\ &= [0.5(0)(9.36 \times 10^{-4}) + 0.5(50)(0)](0.01) = 0, \\ x(0.02) &= [0.5F(0)h(2\Delta t) + F(0.01)h(0) + 0.5F(0.02)h(0)]\Delta t \\ &= [0.5(0)(1.56 \times 10^{-3}) + (50)(9.36 \times 10^{-4}) + 0.5(100)(0)](0.01) \\ &= 4.68 \times 10^{-4} \text{ m}, \\ x(0.03) &= [0.5F(0)h(3\Delta t) + F(0.01)h(2\Delta t) + F(0.02)h(\Delta t) + 0.5F(0.03)h(0)]\Delta t \\ &= 1.72 \times 10^{-3} \text{ m}. \end{aligned}$$

4.27 定义 $t_j = j\Delta t$. 证明方程(4.5)能被改写为如下形式:

$$x(t_k) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t_k} \left[\sin\omega_d t_k \sum_{j=1}^k G_{1j} - \cos\omega_d t_k \sum_{j=1}^k G_{2j} \right],$$

其中,

$$\begin{aligned} G_{1j} &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} F(\tau) e^{\zeta\omega_n \tau} \cos\omega_d \tau d\tau, \\ G_{2j} &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} F(\tau) e^{\zeta\omega_n \tau} \sin\omega_d \tau d\tau. \end{aligned}$$

解 注意到

$$\sin\omega_d(t - \tau) = \sin\omega_d t \cos\omega_d \tau - \cos\omega_d t \sin\omega_d \tau.$$

把上面的三角形法则代入方程(4.5),并整理得到

$$x(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \left[\sin\omega_d t \int_0^t F(\tau) e^{\zeta\omega_n \tau} \cos\omega_d \tau d\tau - \cos\omega_d t \int_0^t F(\tau) e^{\zeta\omega_n \tau} \sin\omega_d \tau d\tau \right].$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^t g(\tau) d\tau &= \int_0^{t_1} g(\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} g(\tau) d\tau + \cdots + \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(\tau) d\tau \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} x(t_k) &= \frac{e^{-\zeta\omega_n t_k}}{m\omega_d} \left[\sin\omega_d t_k \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} F(\tau) e^{\zeta\omega_n \tau} \cos\omega_d \tau d\tau \right. \\ &\quad \left. - \cos\omega_d t_k \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} F(\tau) e^{\zeta\omega_n \tau} \sin\omega_d \tau d\tau \right]. \end{aligned}$$

- 4.28 求卷积积分的近似值的一种方法是内插分段函数 $F(t)$, 应用题 4.27 中的方程(4.17)来确定积分三角形函数中的内插次数. 假定 $F(t)$ 是用前面的常数内插, 则在区间 t_{j-1} 到 t_j 中的常量插值等价于 $F(t)$ 在区间的中点的估计值. 用前面分段函数 $F(t)$ 的恒定的内插法, 求解 G_{1j} 和 G_{2j} 的近似形式.

解 令 $F_j = F[(t_j + t_{j-1})/2]$, 则有

$$\begin{aligned} G_{1j} &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_j e^{\zeta \omega_n \tau} \cos \omega_d \tau d\tau \\ &= \frac{F_j(1-\zeta^2)}{\omega_d} \left[e^{\zeta \omega_n t_j} \left(\sin \omega_d t_j + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \cos \omega_d t_j \right) \right. \\ &\quad \left. - e^{\zeta \omega_n t_{j-1}} \left(\sin \omega_d t_{j-1} + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \cos \omega_d t_{j-1} \right) \right] \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} G_{2j} &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_j e^{\zeta \omega_n \tau} \sin \omega_d \tau d\tau \\ &= \frac{F_j(1-\zeta^2)}{\omega_d} \left[e^{\zeta \omega_n t_j} \left(-\cos \omega_d t_j + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \cos \omega_d t_j \right) \right. \\ &\quad \left. - e^{\zeta \omega_n t_{j-1}} \left(-\cos \omega_d t_{j-1} + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \cos \omega_d t_{j-1} \right) \right]. \end{aligned}$$

- 4.29 讨论方程(4.1)的每一种数值方法的近似解的优缺点. (a) 隐含的欧拉方法; (b) 四阶 Runge-Kutta 方法; (c) 应用题 4.26 中的梯形方法的卷积积分的数值积分方法; (d) 对 $F(t)$ 应用分段恒定的内插法来计算卷积积分的数值积分(题 4.28).

解 (a) 隐含欧拉方法仅仅对一阶是精确的. 应用这种方法可导出一对递推关系, 从它可解出近似值. 递推关系的应用有时常需要激励的估计值, 它不同于那些近似值可以获得的情况.

(b) 四阶 Runge-Kutta 方法对四阶是精确的. 它是一种显含的方法, 即它的递推关系被用来求解近似值. 然而, 它的应用需要经常估计激励的值, 不同于其他的近似值可以得到.

(c) 梯形方法是一种卷积积分的数值积分. 它提供了一种线性内插到两个节点的积分中去. 对在随后的逼近中, 它的应用不会导出递推关系. 由于近似值每次是必需的, 因此公式必须反复应用, 这是一种有效的算法容易推广.

(d) 激励被分段常数内插, 用适当的三角形函数相乘, 近似被积函数确切的积分. 应用这种方法的算法, 近似卷积积分并易于研究在于对任一时刻的响应的近似值, 能计算前一时刻的响应加上两次积分之间的近似值.

- 4.30 为了保护运送途中电脑, 常将电脑放置在有隔振器的汽车上. 汽车上的电脑的运动可模型化为单自由度的质量-弹簧黏性阻尼系统. 在移动的装载阶段, 汽车受到图 4.9 中的速度. 求电脑相对汽车的位移.

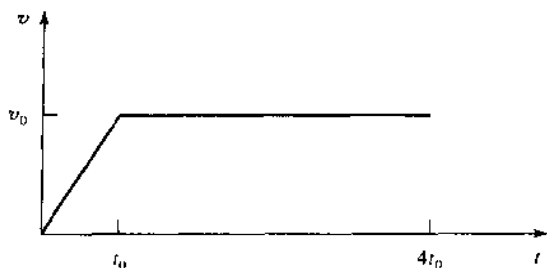


图 4.9

解 设 y 是汽车受到的加速度, 电脑相对汽车位移的微分方程如方程(3.24), 即

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2 z = -\ddot{y},$$

它的卷积积分解为

$$z(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau.$$

与时间相关的速度和加速度为

$$\dot{v} = v_0 \frac{t}{t_0} [u(t) - u(t-t_0)] - v_0 [u(t-t_0) - u(t-4t_0)],$$

$$\ddot{y} = \frac{dv}{dt} = \frac{v_0}{t_0} [u(t) - u(t-t_0)] + v_0 \frac{t}{t_0} [\delta(t) - \delta(t-t_0)] + v_0 [\delta(t-t_0) - \delta(t-4t_0)].$$

相对位移为

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{v_0}{\omega_d t_0} \left\{ \frac{1}{t_0} [u(\tau) - u(\tau-t_0)] + \frac{\tau}{t_0} [\delta(\tau) - \delta(\tau-t_0)] \right. \\ &\quad \left. + [\delta(\tau-t_0) - \delta(\tau-4t_0)] \right\} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{v_0}{\omega_d t_0} \left\{ \frac{u(t)}{\omega_n^2} [e^{-\zeta\omega_n t} (\zeta\omega_n \sin\omega_d t + \omega_d \cos\omega_d t) - \omega_d] \right. \\ &\quad \left. - \frac{u(t-t_0)}{\omega_n^2} [e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} (\zeta\omega_n \sin\omega_d(t-t_0) + \omega_d \cos\omega_d(t-t_0)) - \omega_d] \right. \\ &\quad \left. - t_0 u(t-4t_0) e^{-\zeta\omega_n(t-4t_0)} \sin\omega_d(t-4t_0) \right\}. \end{aligned}$$

4.31 建立受到图 4.2 中的矩形脉冲的无阻尼系统的响应谱.

解 受到矩形脉冲的单自由度系统的响应在题 4.7 中已经被计算出, 即为

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \begin{cases} 1 - \cos\omega_n t, & t < t_0, \\ \cos\omega_n(t-t_0) - \cos\omega_n t, & t > t_0. \end{cases}$$

无论是 $t < t_0$, 还是 $t > t_0$, 最大值依赖于系统的参数. 对 $t < t_0$, 产生最大响应或者在 $t = t_0$, 或者是当 $\cos\omega_n t = -1$ ($\omega_n t = \pi$). 因此, 如果 $t_0 < (\pi/\omega_n)$, 由于有 $t < t_0$, 最大值不能求得. 对 $t_0 > (\pi/\omega_n)$, 有

$$x_{\max} = \frac{2F_0}{m\omega_n^2}.$$

对 $t_0 < \pi/\omega_n$, 因为 $t > t_0$, x 在 $dx/dt = 0$ 时的一个 t 值时出现最大值. 因为 $t > t_0$ 时, 有

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m\omega_n^2} [-\omega_n \sin\omega_n(t-t_0) + \omega_n \sin\omega_n t],$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow \sin\omega_n t = \sin\omega_n(t-t_0).$$

它的解为

$$t = \frac{1}{2} \left[t_0 + \frac{(2n-1)\pi}{\omega_n} \right] \quad n = 1, 2, \dots$$

可导出

$$\frac{m\omega_n^2 x_{\max}}{F_0} = \begin{cases} 2 \sin \frac{\omega_n t_0}{2}, & t_0 < \frac{\pi}{\omega_n}, \\ 2, & t_0 > \frac{\pi}{\omega_n}. \end{cases}$$

如图 4.10 中所示.

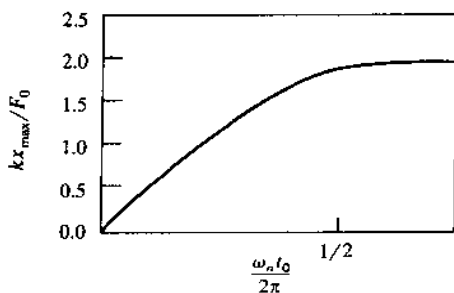


图 4.10

- 4.32 设计一种数字算法,用来求解具有黏性阻尼并受到任一激励的单自由度系统的响应谱.设定一种积分方法如欧拉方法或四阶 Runge-Kutta 方法,用来求解方程(4.1).

解 1. 通过引入如下的代换,方程(4.1)可化为无量纲的方程

$$x^* = \frac{m\omega_0^2 c}{F_0}, \quad t^* = \frac{\omega_0 t}{2\pi},$$

其中 F_0 是 $F(t)$ 的最大值.在这些无量纲的变换过程中,方程(4.1)可变为

$$\ddot{x}^* + 4\pi\zeta\dot{x}^* + 4\pi^2 x^* = \frac{4\pi^2}{F_0} F(t^*). \quad (4.18)$$

注意到固有周期的无量纲值为 1.

2. 定义 $\alpha = \omega_0/(2\pi)$, 由观察它能作为一个无量纲脉冲值. 设 α 范围为从 $\Delta\alpha$ 到 2.5, 增量为 $\Delta\alpha = 0.1$. 对 α 的每一个值,应用 Runge-Kutta 方法可解方程(4.18). 对一个特定的 α 值,时间增量和最后的时间在 Runge-Kutta 模拟中必须作出选择. 设定无量纲时间增量足够小是很重要的,这样,在脉冲期间和一个固有周期以外才有足够的积分段可用. 最终的时间也必须选的足够大,才能在脉冲周期以外和几个固有周期以外还能有效的进行积分. 注意到,因为 $\alpha < 1$, 脉冲期间小于固有周期. 对时间增量和最终的时间,可能的选择为

$$\Delta t^* = \frac{\alpha}{20}, \quad t_f^* = 2.5.$$

因为 $\alpha > 1$, 固有周期小于脉冲时间. 对时间增量和最终的时间,可能的选择为

$$\Delta t^* = \frac{1}{20}, \quad t_f^* = 2.5\alpha.$$

3. 对 α 的每一个值,建立方程(4.18)的数值模拟,它在第 2 步中已经描述了. 无量纲响应 x_{\max}^* 的最大值已经被记录了. 响应谱是 x_{\max}^* 对 α 的一条曲线.

- 4.33 由于打击和冲击,作用在结构上的外力经常被模拟为图 4.11 中的激励. 这种类型的激励对应不同的阻尼比的响应谱如图 4.12 中所示. 一个无阻尼系统,质量 1000 kg,刚度为 5×10^6 N/m 并受到一个 $F_0 = 1500$ N, $t_0 = 0.05$ s 爆炸冲击,请问结构的最大位移是多少?

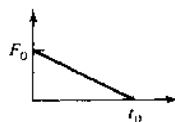


图 4.11

解 结构的固有频率为

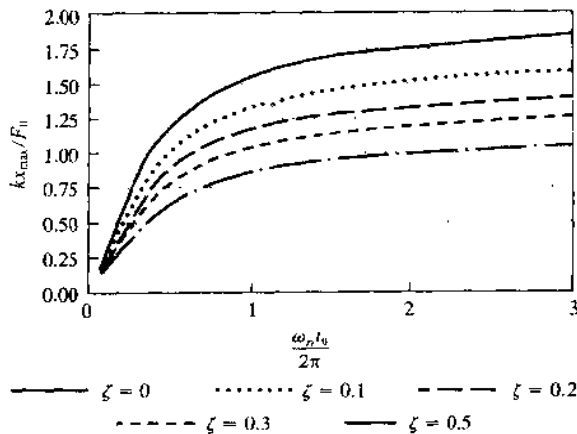


图 4.12

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5 \times 10^6 \text{ N/m}}{1000 \text{ kg}}} = 70.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

水平尺度的响应谱的无量纲参数的值为

$$\frac{\omega_n t_0}{2\pi} = \frac{\left(70.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(0.05 \text{ s})}{2\pi} = 0.563.$$

从图 4.12 中, 因为 $\zeta=0$, 得

$$\frac{kx_{\max}}{F_0} = 1.2.$$

从上可得出最大位移如下:

$$x_{\max} = \left(\frac{kx_{\max}}{F_0}\right) \frac{F_0}{k} = 1.2 \frac{5000 \text{ N}}{5 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 1.2 \text{ mm}.$$

- 4.34 图 4.13 中的系统, 受到图 4.11 中的冲击, 并且 $F_0 = 10,000 \text{ N}$, $t_0 = 0.1 \text{ s}$. 为使物块的最大位移小于 18 mm , 试问圆棒的直径应为多少?

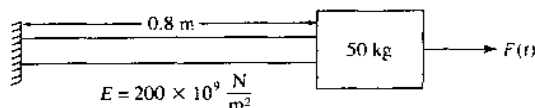


图 4.13

解 设 k 为系统的刚度, 要求 $x < 18 \text{ mm}$, 即为

$$\frac{kx_{\max}}{F_0} < \frac{k(0.018 \text{ m})}{10,000 \text{ N}} = 1.8 \times 10^{-6} k, \quad (4.19)$$

也有

$$\frac{\omega_n t_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{50 \text{ kg}}} \frac{0.1 \text{ s}}{2\pi} = 2.25 \times 10^{-3} \sqrt{k}. \quad (4.20)$$

由于 k 是未知的, 用图 4.12 中的响应谱的试凑法来确定 k 的允许值. 假定 $k = 5 \times 10^5 \text{ N/m}$, 由方程 (4.20) 得 $\omega_n t_0 / (2\pi) = 1.59$. 从这个响应谱可导出 $kx_{\max} / F_0 = 1.7$. 然而, 从方程 (4.20), 对 $k = 5 \times 10^5 \text{ N/m}$, kx_{\max} / F_0 允许的最大值是 0.9 . 检验方程组 (4.19) 和 (4.20) 表明 $\omega_n t_0 / (2\pi)$ 的增加比 kx_{\max} / F_0 所允许的最大值增加的要慢. 因此, k 的一个增加值被实验. 注意到, 如果 $k = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$, 应用方程 (4.20) 可导出 $\omega_n t_0 / (2\pi) = 2.25$. 响应谱为 $kx_{\max} / F_0 = 1.8$, 这与应用方程 (4.19) 是相同的. 因此, 如果 $k > 1 \times 10^6 \text{ N/m}$, 物块的最大位移小于 18 mm , 棒的最小面积可计算如下:

$$A = \frac{kL}{E} = \frac{\left(1 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(0.8 \text{ m})}{200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2.$$

因此, 最小直径为

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(4 \times 10^{-6} \text{ m}^2)}{\pi}} = 2.26 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

补充习题

- 4.35 应用卷积积分求解无阻尼单自由度系统的响应, 系统的质量为 m , 固有频率为 ω_n , 并受到一个形如 $F(t) = F_0 \sin \omega_n t$ 的激励. 在 $t=0$ 时, 系统静止在平衡位置.

答: $\frac{F_0}{2m\omega_n^2} \sin \omega_n t - \frac{F_0}{2m\omega_n} t \cos \omega_n t.$

- 4.36 应用卷积积分求无阻尼单自由度系统的响应, 系统受到一个形如 $F(t) = F_0(1 - e^{-\alpha t})$ 的激励. 在 $t=0$ 时, 系统静止在平衡位置.

答: $-\frac{F_0}{m\omega_n^2(\alpha^2 + \omega_n^2)} [\omega_n^2 e^{-\alpha t} - \alpha^2 - \omega_n^2 + \alpha^2 \cos \omega_n t + \alpha \omega_n \sin \omega_n t].$

- 4.37 应用卷积积分确定单自由度系统的响应, 系统的质量为 m , 阻尼比为 ζ , 固有频率为

ω_n , 并受到一个形如 $F(t) = F_0 \sin \omega t$ 的激励力, $\omega \neq \omega_n$. 在 $t=0$ 时, 系统静止在平衡位置.

答: $\frac{F_0}{m[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega\omega_n)^2]} [2\zeta\omega\omega_n(\cos\omega_n t - \cos\omega t) + (\omega_n^2 - \omega^2)(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin\omega_n t)]$.

4.38 应用卷积积分确定图 4.14 中的系统关于对时间相关的响应.

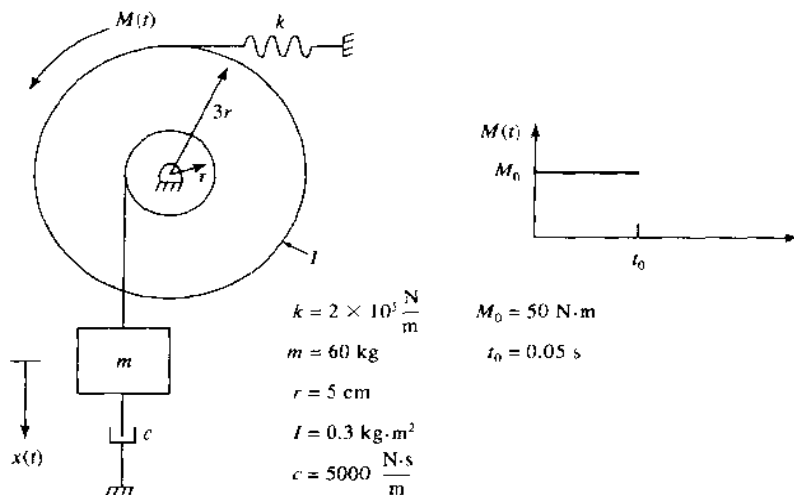


图 4.14

答: $0.0111[1 - e^{-13.9t}(0.140\sin 99.03t + \cos 99.03t)], \quad t < 0.05 \text{ s}$
 $0.0111e^{-13.9t}[0.140\sin 99.03t + \cos 99.03t - 0.280\sin(99.03t - 4.95) - 2.00\cos(99.03t - 4.95)], \quad t > 0.05 \text{ s}.$

4.39 无阻尼单自由度系统受到如图 4.15 的激励, 用卷积积分法求系统在 $t > t_0$ 时的响应.

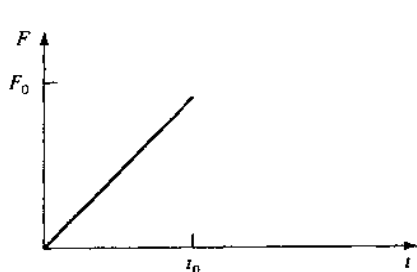


图 4.15

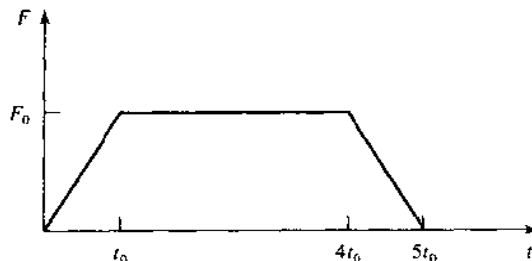


图 4.16

答: $\frac{F_0}{m\omega_n^2 t_0} \left[t_0 \cos \omega_n(t - t_0) + \frac{1}{\omega_n} \sin(t - t_0) - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t \right]$.

4.40 用单位阶跃函数求如图 4.16 激励的统一数学表达式.

答:

$$F_0 \frac{t}{t_0} u(t) + F_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) u(t - t_0) + F_0 \left(4 - \frac{t}{t_0} \right) u(t - 4t_0) + F_0 \left(5 - \frac{t}{t_0} \right) u(t - 5t_0).$$

4.41 用卷积积分法求无阻尼单自由度系统受到如图 4.16 所示激励的响应, 在 $t=0$ 时系统静止于平衡位置.

答: $\frac{F_0}{m\omega_n^2 t_0} \left[\left(t - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) u(t) - \left(t - t_0 - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n(t - t_0) \right) u(t - t_0) \right.$
 $\left. \left(t - 4t_0 - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n(t - 4t_0) \right) u(t - 4t_0) \right]$

$$\left\{ t - 5t_0 - t_0 \cos \omega_n(t - 5t_0) - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n(t - 5t_0) \right\} u(t - 5t_0) \Bigg\}.$$

- 4.42 用卷积积分法求无阻尼单自由度系统受到如图 4.17 所示激励的响应, 在 $t = 0$ 时系统静止于平衡位置.



图 4.17

答: $\frac{F_0}{m\omega_n^2 t_0} \left[\left(t - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) u(t) - \left(t - t_0 - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n(t - t_0) \right) u(t - t_0) \right].$

- 4.43 用拉普拉斯变换法求解题 4.35.

- 4.44 用拉普拉斯变换法求解题 4.37.

- 4.45 用拉普拉斯变换法求解题 4.41.

- 4.46 用拉普拉斯变换法求解题 4.42.

- 4.47 质量为 50 kg 的物块系在刚度为 2×10^6 N/m 的弹簧上, 物块承受的激励冲量在 $t = 0$ 时为 25 N·s, 在 $t = 0.1$ 时为 15 N·s, 则物块的最大位移为多少?

答: 6.28 mm.

- 4.48 用拉普拉斯变换法求解单自由度系统承受如图 4.18 所示周期激励的响应, 阻尼比为 ζ , 固有频率为 ω_n .

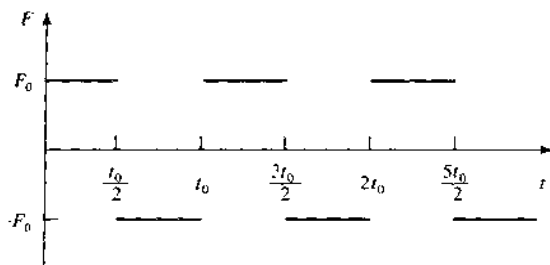


图 4.18

答: $\frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_n t \right) \right] u(t) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n(t-it_0)} \left[\cos \omega_n(t-it_0) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_n(t-it_0) \right] \right\} u(t-it_0).$

- 4.49 试求单自由度的无阻尼系统在承受如图 4.17 的激励响应谱方程.

答: $\frac{kx_{\text{静}}}{F_0} \left[1 + \frac{1}{\omega_n t_0} \sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_0)} \right].$

- 4.50 质量为 100 kg 的机器置于刚度为 5×10^5 N/m 的隔振器上, 当受到如图 4.17 所示激励时, 其最大位移为多少? 其中 $F_0 = 1000$ N, $t_0 = 0.11$ s.

答: 2.50 mm.

- 4.51 单自由度系统承受正弦脉冲的响应谱如图 4.19 所示. 质量为 25 kg 的物块系在刚度为 5×10^6 N/m 的弹簧上, 并受到大小为 1250 N, 作用时间为 0.02 s 的正弦脉冲, 问物块

的最大位移应为多少?

答: 0.4 mm.

- 4.52 质量为 200 kg 的机器放在阻尼比为 0.1 的隔振器上, 当机器受到幅值为 1000 N, 作用时间为 0.04 s 的正弦脉冲时, 隔振器的刚度在何范围时, 机器的位移不超过 2 mm. 正弦脉冲的响应谱如图 4.19 所示.

答: $k > 5 \times 10^5$ N/m.

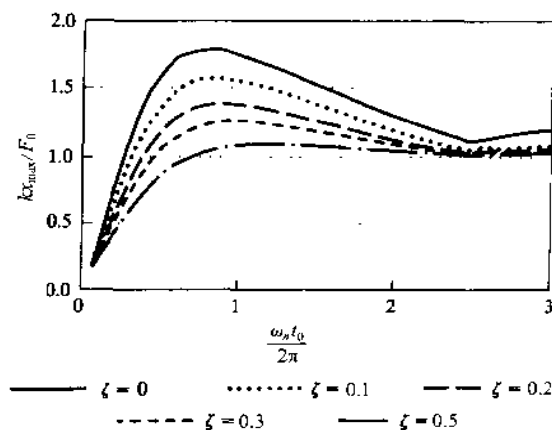


图 4.19

- 4.53 质量为 500 kg 的机器放在阻尼比为 0.05, 刚度为 3×10^5 N/m 的隔振器上, 开始时, 它承受如图 4.17 形式的激振, 其中 $t_0 = 0.1$ s, $F_0 = 5000$ N. 用卷积积分的数值积分的梯形规则估计机器位移的近似值, 取 $\Delta = 0.04$ s.
- 4.54 参考题 4.27 和 4.28 中引入的卷积积分的数值估算法, 如 $F(t)$ 是插入的冲量级数, 建立 G_{1j} 的表达式, 即在 t_j 到 t_{j+1} 之间, $F(t)$ 在 t_j^* 时插入幅值为 $F(t_j^*)\Delta t$ 的冲量, 其中 t_j^* 为间隔段的中点.
- 答: $F(t_j^*)\Delta t e^{-\zeta\omega_n(t-t_j^*)} \cos\omega_d(t-t_j^*)$.
- 4.55 用卷积积分的数值估算法, 估算一系在隔振器上的机器在承受激振 $F(t) = 1000 e^{-t^2}$ N 时的响应, 机器的质量为 250 kg, 隔振器的刚度为 2×10^6 N/m, 阻尼比为 0.05. 使用题 4.28 的方法.
- 4.56 用题 4.54 的插值方法求解题 4.55.

第五章 多自由度系统的自由振动

§ 5.1 拉格朗日方程

将 x_1, x_2, \dots, x_n 作为 n 个自由度系统的一套广义坐标, 系统的运动由 n 个微分方程表示, 其中广义坐标为因变量, 时间为自变量. 建立微分方程的一种方法, 即涉及到隔离体图解法, 是在任意瞬时对系统的隔离体应用守恒定律的一种方法.

还有一种能量法, 可用来建立多自由度系统振动的微分方程. 令 $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 作为系统在任意瞬时的势能, 令 $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ 作为系统在同一瞬时的动能. 拉氏函数 $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ 定义为

$$L = T - V. \quad (5.1)$$

拉格朗日函数可视为 $2n$ 个独立变量及广义坐标对时间导数的函数, 并设广义坐标是独立的. 令 $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ 是广义坐标的变分. 非保守力在广义坐标的变分上的虚功可以写成

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta x_i. \quad (5.2)$$

拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

应用拉格朗日方程可导出一组 n 个独立的微分方程.

§ 5.2 线性系统微分方程的矩阵公式

对于线性系统, 势能和动能具有平方形式

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j, \quad (5.4)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j. \quad (5.5)$$

对于独立的广义坐标, 如果只有粘性阻尼和外力为非保守力, 则虚功可表示为

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{x}_j \delta x_i + \sum_{i=1}^n F_i \delta x_i. \quad (5.6)$$

将方程(5.4)和(5.5)及虚功方程(5.6)应用到拉格朗日方程中, 得到

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}, \quad (5.7)$$

其中 \mathbf{M} 为 $n \times n$ 阶的质量矩阵, 元素为 m_{ij} , \mathbf{K} 为 $n \times n$ 阶的刚度矩阵, 元素为 k_{ij} , \mathbf{C} 为 $n \times n$ 阶的黏性阻尼矩阵, 元素为 c_{ij} , \mathbf{x} 为 $n \times 1$ 位移矢量, 元素为 x_i , \mathbf{F} 为 $n \times 1$ 阶力矢量, 元素为 F_i . 矩阵是对称阵, 如 $m_{ij} = m_{ji}$.

§ 5.3 刚度影响系数

刚度影响系数可用于顺序计算线性系统的刚度矩阵的各列. 假设系统在 $x_j = 1, x_i = 0$ 且 $i \neq j$ 时处于静止平衡状态. 刚度矩阵的第 j 列即刚度影响系数为 $k_{1j}, k_{2j}, \dots, k_{nj}$, 这些系数是作用在质点上的力, 而这些力与质点的用广义坐标描述的位移有关, 并用来维持系统在所处位置的平衡. 设这些力沿广义坐标的正方向时为正, 如果 x_i 为角坐标, 则 k_{ij} 为相应的力矩. 由麦可斯韦相互性关系表明 $k_{ij} = k_{ji}$.

§ 5.4 柔度矩阵

柔度矩阵 A 为刚度矩阵逆矩阵. 柔度影响系数可用于顺序计算线性系统的柔度矩阵的各列. 柔度矩阵的第 j 列元素是将单位力静止加于用 x_j 描述的质点位移时, 所导出的对应广义坐标值的第 j 列. 如果 x_j 为角坐标, 受到单位力矩作用. 相互性关系表明柔度矩阵为对称的, 即 $a_{ij} = a_{ji}$.

对于多数有限个自由度的结构系统, 柔度矩阵比刚度矩阵更容易计算. 一个线性的 n 个自由度系统的微分方程可用柔度矩阵写为

$$AM\ddot{x} + AC\dot{x} + x = AF. \quad (5.8)$$

§ 5.5 标准模态解

标准模态解的形式为

$$x = Xe^{i\omega t}, \quad (5.9)$$

代入方程(5.7), 其中 $C=0, F=0$, 可得到下列矩阵的特征值-特征矢量问题, 即对应固有频率 ω 和相应的模态矢量 X 为

$$M^{-1}KX = \omega^2 X. \quad (5.10)$$

固有频率即为 $M^{-1}K$ 的特征值的平方根, 可以令

$$\det|M^{-1}K - \omega^2 I| = 0 \quad (5.11)$$

或

$$\det|K - \omega^2 M| = 0. \quad (5.12)$$

如果知道柔度矩阵而不知刚度矩阵, 固有频率为 AM 的特征值的平方根的倒数, 由下列公式解得

$$\det|\omega^2 AM - I| = 0. \quad (5.13)$$

由方程(5.11)或(5.13)可得具有实系数且以 ω^2 为未知数的 n 阶代数方程. 既然 M 和 K 为对称阵, 则 n 个根为实根, 其代表系统的 n 个固有频率 $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$. 如果系统是稳定的, 则 K 是非负解的, 其根非负. 对应于零固有频率的是一个自由系统的刚体模态.

§ 5.6 模态正交性

令 X_i 和 X_j 作为 n 自由度系统模态矢量, 并分别对应的固有频率为 ω_i 和 ω_j , 这些模态遵循下列正交条件:

$$X_i^T M X_j = 0, \quad (5.14)$$

$$X_i^T K X_j = 0. \quad (5.15)$$

当模态矢量 X_i 作为 $M^{-1}K$ 或 AM 的特征矢量时, 只对积性常数是唯一的. 通过满足模态正交条件, 而使其达到唯一性的要求, 通常为

$$X_i^T M X_i = 1. \quad (5.16)$$

如果方程(5.16)作为正交条件, 则

$$X_i^T K X_i = \omega_i^2. \quad (5.17)$$

§ 5.7 矩阵迭代法

数值计算程序经常用于计算多自由度系统的固有频率. 矩阵迭代法是一个数值计算程序, 该程序从最小的固有频率开始, 并求解系统固有频率和模态. 令 u_0 为任意 $n \times 1$ 矢量. 则矢量求解顺序为

$$u_i = AM\tilde{u}_{i-1}, \quad \tilde{u}_i = \frac{u_i}{|u_i|_{\max}}. \quad (5.18)$$

收敛于 \mathbf{x}_1 , 即模态和其对应的最低阶固有频率. 同理, 元素 u_i 的最大绝对值 $|u_i|_{\max}$ 可收敛到 $1/\omega_1^2$. 利用矢量对质量矩阵的正交性, 矩阵迭代可用于确定所有能预先确定模态的高阶固有频率和模态.

§ 5.8 阻尼系统

有阻尼的多自由度系统的自由响应和受迫响应的求解远比无阻尼系统复杂, 有一种特殊情况相对容易解决即比例阻尼情况. 当有 α 和 β 常数存在时, 则

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M}. \quad (5.19)$$

对于比例阻尼, 标准模态解方程(5.9)可以应用. 如果 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 是无阻尼系统响应的固有频率, 则满足方程(5.9)的 ω 的大小为

$$\tilde{\omega}_i = i\omega_i \zeta_i \pm \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}, \quad (5.20)$$

其中模态阻尼比 ζ_i 为

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \left(\alpha \omega_i + \frac{\beta}{\omega_i} \right). \quad (5.21)$$

对于 \mathbf{C} 更一般的形式, 它写成方程(5.7)更方便如

$$\tilde{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{y} = 0, \quad (5.22)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

是 $2n \times 2n$ 的对称矩阵, 且

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

是 $2n \times 1$ 的列矢量. 设方程(5.23)的解为

$$\mathbf{y} = \Phi e^{-rt}, \quad (5.25)$$

r 的大小为 $\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}$ 的复数特征值, Φ 是对应特征矢量. 特征矢量满足正交关系

$$\Phi_i^T \tilde{\mathbf{M}} \Phi_j = 0, \quad i \neq j. \quad (5.26)$$

例 题

5.1 用隔离体图解法, 建立如图 5.1 所示系统运动的微分方程, 用 x_1, x_2, x_3 作为广义坐标.

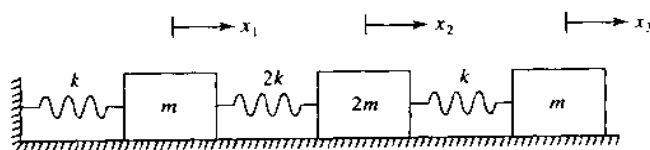


图 5.1

解 图 5.1 系统的每个物块在任意瞬时的隔离体图如图 5.2 所示, 对每个隔离体应用牛顿定律得

$$\begin{aligned} -kx_1 + 2k(x_2 - x_1) &= m\ddot{x}_1 \rightarrow m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - 2kx_2 = 0, \\ 2k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) &= 2m\ddot{x}_2 \rightarrow 2m\ddot{x}_2 - 2kx_1 + 3kx_2 - kx_3 = 0, \\ k(x_3 - x_2) &= m\ddot{x}_3 \rightarrow 2m\ddot{x}_3 - kx_2 + kx_3 = 0. \end{aligned}$$

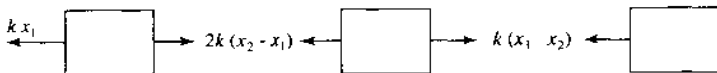


图 5.2

5.2 用隔离体图解法, 建立如图 5.3 所示系统的运动微分方程, 用 x 和 θ 作为广义坐标。

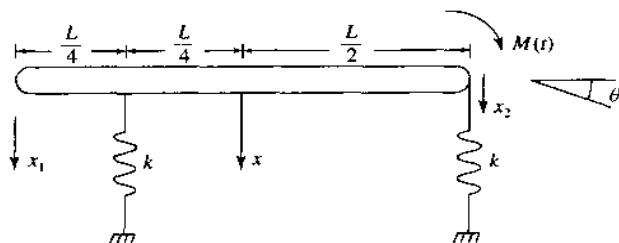


图 5.3

解 假定 θ 很小, 则杆在任意瞬时的隔离体图如图 5.4 所示, 杆上的所有力求和为

$$\begin{aligned} (\sum F)_{\text{ext}} &= (\sum F)_{\text{eff}}, \\ k\left(x - \frac{1}{4}L\theta\right) - k\left(x + \frac{1}{2}L\theta\right) &= m\ddot{x}, \\ m\ddot{x} + 2kx + \frac{1}{4}kL\theta &= 0. \end{aligned}$$

所有力关于对杆质心之矩求和为

$$\begin{aligned} (\sum M_G)_{\text{ext}} &= (\sum M_G)_{\text{eff}}, \\ M(t) + k\left(x - \frac{1}{4}L\theta\right)\frac{1}{4}L - k\left(x + \frac{1}{2}L\theta\right)\frac{1}{2}L &= I\ddot{\theta}, \\ I\ddot{\theta} + \frac{1}{4}kLx + \frac{5}{16}kL^2\theta &= M(t). \end{aligned}$$

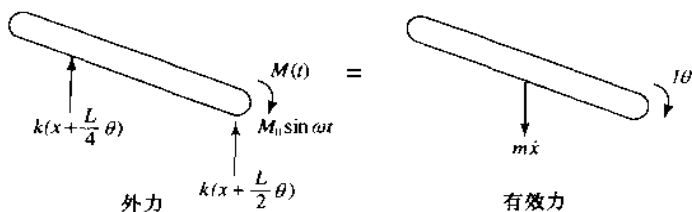


图 5.4

5.3 用拉格朗日方程建立如图 5.1 所示系统运动的微分方程, 用 x_1, x_2, x_3 作为广义坐标, 写出矩阵形式的微分方程。

解 系统在任意时刻的动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}2m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}2m\dot{x}_3^2.$$

系统在任意时刻的势能为

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}2k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2.$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}2m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}2m\dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}2k(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2.$$

利用拉格朗日方程可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (m\dot{x}_1) + [kx_1 + 2k(x_2 - x_1)(-1)] &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (2m\dot{x}_2) + [2k(x_2 - x_1)(1) + k(x_3 - x_2)(-1)] &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (2m\dot{x}_3) + [k(x_3 - x_2)(1)] &= 0.\end{aligned}$$

以矩阵形式写出为

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ 2k & 3k & k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.4 用拉格朗日方程建立如图 5.3 所示系统运动的微分方程, 用 x 和 θ 作为广义坐标, 以矩阵的形式写出微分方程.

解 系统在任意时刻的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2,$$

系统在任意时刻的势能为

$$V = \frac{1}{2} k \left(x - \frac{1}{4} L \theta \right)^2 + \frac{1}{2} k \left(x + \frac{1}{2} L \theta \right)^2,$$

拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k \left(x - \frac{1}{4} L \theta \right)^2 - \frac{1}{2} k \left(x + \frac{1}{2} L \theta \right)^2.$$

引入变量 δx 和 $\delta \theta$, 外力矩作的虚功为

$$\delta W = M(t) \delta \theta.$$

利用拉格朗日方程可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= Q_1, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (m\dot{x}) + \left[k \left(x - \frac{1}{4} L \theta \right) (1) + k \left(x + \frac{1}{2} L \theta \right) (1) \right] &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= Q_2, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (I\dot{\theta}) + \left[k \left(x - \frac{1}{4} L \theta \right) \left(-\frac{1}{4} L \right) + k \left(x + \frac{1}{2} L \theta \right) \left(\frac{1}{2} L \right) \right] &= M(t).\end{aligned}$$

以矩阵形式写出为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & \frac{1}{4} kL \\ \frac{1}{4} kL & \frac{5}{16} kL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M(t) \end{bmatrix}.$$

5.5 用拉格朗日方程建立如图 5.3 所示系统运动的微分方程, 用 x_1 和 x_2 作为广义坐标, 以矩阵的形式写出微分方程.

解 系统在任意时刻的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{L} \right)^2$$

系统在任意时刻的势能为

$$V = \frac{1}{2} k \left(\frac{3}{4} x_1 + \frac{1}{4} x_2 \right)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2.$$

拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{L} \right)^2 - \frac{1}{2} k \left(\frac{3}{4} x_1 + \frac{1}{4} x_2 \right)^2 - \frac{1}{2} k x_2^2.$$

引入变量 δx_1 和 δx_2 , 外力矩作的虚功为

$$\delta W = M(t) \delta \left(\frac{x_2 - x_1}{L} \right) = -\frac{1}{L} M(t) \delta x_1 + \frac{1}{L} M(t) \delta x_2.$$

利用拉格朗日方程可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left[m \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) + I \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{L} \right) \left(-\frac{1}{L} \right) \right] + k \left(\frac{3}{4} x_1 + \frac{1}{4} x_2 \right) \left(\frac{3}{4} \right) &= -\frac{1}{L} M(t), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} &= Q_2, \\ \frac{d}{dt} \left[m \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) + I \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{L} \right) \left(\frac{1}{L} \right) \right] + k \left(\frac{3}{4} x_1 + \frac{1}{4} x_2 \right) \left(\frac{1}{4} \right) + k x_2 &= \frac{1}{L} M(t). \end{aligned}$$

以矩阵形式写出为

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{4} + \frac{I}{L^2} & \frac{m}{4} - \frac{I}{L^2} \\ \frac{m}{4} - \frac{I}{L^2} & \frac{m}{4} + \frac{I}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{9}{16}k & \frac{3}{16}k \\ \frac{3}{16}k & \frac{17}{16}k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}M(t) \\ \frac{1}{L}M(t) \end{bmatrix}.$$

- 5.6 用拉格朗日方程建立如图 5.5 所示系统运动的微分方程, 用 x_1 和 x_2 和 θ 作为广义坐标, 以矩阵的形式写出微分方程.

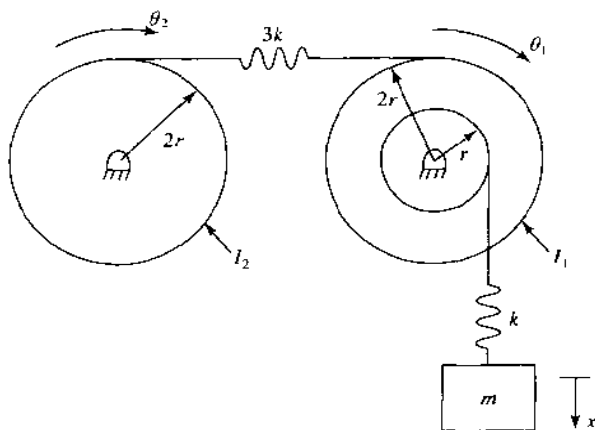


图 5.5

解 系统在任意时刻的动能为

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

系统在任意时刻的势能为

$$V = \frac{1}{2} k (x - r\theta_1)^2 + \frac{1}{2} 3k (2r\theta_1 - 2r\theta_2)^2.$$

拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (x - r\theta_1)^2 - \frac{1}{2} 3k (2r\theta_1 - 2r\theta_2)^2.$$

利用拉格朗日方程可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(I\dot{\theta}_1) + [k(x - r\theta_1)(-r) + 3k(2r\theta_1 - 2r\theta_2)(2r)] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(I_2\dot{\theta}_2) + 3k(2r\theta_1 - 2r\theta_2)(-2r) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + k(x - r\theta_1)(1) = 0.$$

以矩阵形式写出为

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13kr^2 & -12kr^2 & -kr \\ -12kr^2 & 12kr^2 & 0 \\ -kr & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.7 用拉格朗日方程建立如图 5.6 所示系统运动的微分方程, 用 θ_1 和 θ_2 作为广义坐标.

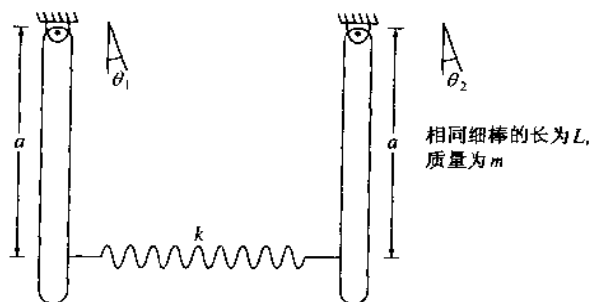


图 5.6

解 系统在任意时刻的动能为

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}L\dot{\theta}_1\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}L\dot{\theta}_2\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\dot{\theta}_2^2.$$

系统在任意时刻的势能为

$$V = -mg\frac{L}{2}\cos\theta_1 - mg\frac{L}{2}\cos\theta_2 + \frac{1}{2}k(a\sin\theta_2 - a\sin\theta_1)^2.$$

拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}_2^2 + mg\frac{L}{2}\cos\theta_1 + mg\frac{L}{2}\cos\theta_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}k(a\sin\theta_2 - a\sin\theta_1)^2. \end{aligned}$$

用拉格朗日方程可得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}_1\right) + \left[mg\frac{L}{2}\sin\theta_1 + k(a\sin\theta_2 - a\sin\theta_1)(-a\cos\theta_1)\right] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}_2\right) + \left[mg\frac{L}{2}\sin\theta_2 + k(a\sin\theta_2 - a\sin\theta_1)(a\cos\theta_2)\right] = 0.$$

线性化整理为

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}_1 + \left(mg\frac{L}{2} + ka^2\right)\theta_1 - ka^2\theta_2 = 0,$$

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}_2 - ka^2\theta_1 + \left(mg\frac{L}{2} + ka^2\right)\theta_2 = 0.$$

5.8 质量为 m , 半径为 r 的两个完全相同的圆盘只滚动不滑动, 如图 5.7 所示. 用拉格朗日方程建立系统运动的微分方程, 用 x_1 和 x_2 作为广义坐标.

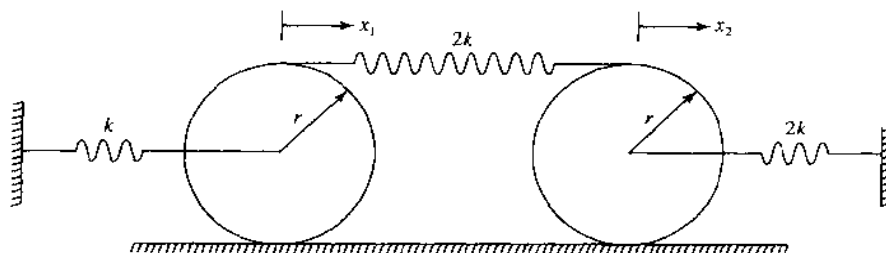


图 5.7

解 系统在任意时刻的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{\dot{x}_1}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{\dot{x}_2}{r} \right)^2.$$

系统在任意时刻的势能为

$$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} 2k x_2^2 + \frac{1}{2} 2k (2x_2 - 2x_1)^2.$$

拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} 2k x_2^2 - \frac{1}{2} 2k (2x_2 - 2x_1)^2.$$

利用拉格朗日方程可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} m \dot{x}_1 \right) + [k x_1 + 2k (2x_2 - 2x_1)(-2)] &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} m \dot{x}_2 \right) + [2k x_2 + 2k (2x_2 - 2x_1)(2)] &= 0. \end{aligned}$$

以矩阵形式写出为

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} m & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9k & -8k \\ -8k & 10k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.9 用拉格朗日方程建立如图 5.8 所示系统运动的微分方程, 用 x_1, x_2, x_3 作为广义坐标.

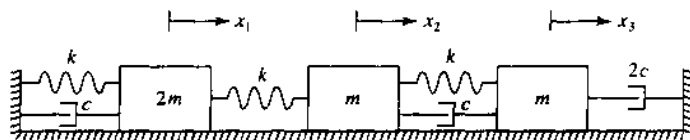


图 5.8

解 系统在任意时刻的动能为

$$T = \frac{1}{2} 2m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2.$$

系统在任意时刻的势能为

$$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k (x_3 - x_2)^2.$$

在系统的任意状态引入变量 $\delta x_1, \delta x_2$ 和 δx_3 , 黏性阻尼力作的功为

$$\begin{aligned} \delta W &= -c \dot{x}_1 \delta x_1 - c (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \delta (x_3 - x_2) - 2c \dot{x}_3 \delta x_3 \\ &= -c \dot{x}_1 \delta x_1 - (-c \dot{x}_3 + c \dot{x}_2) \delta x_2 - (-c \dot{x}_2 + 3c \dot{x}_3) \delta x_3. \end{aligned}$$

利用拉格朗日方程可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt} (2m\dot{x}_1) + [kx_1 + k(x_2 - x_1)(-1)] = -c\dot{x}_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = Q_2,$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}_2) + [k(x_2 - x_1)(1) + k(x_3 - x_2)(-1)] = -c\dot{x}_2 + c\dot{x}_3,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} = Q_3,$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}_3) + k(x_3 - x_2)(1) = c\dot{x}_2 - 3c\dot{x}_3.$$

以矩阵形式写出为

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & -c \\ -c & -c & 3c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

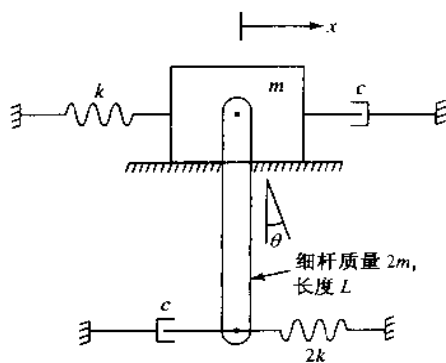


图 5.9

5.10 用拉格朗日方程建立如图 5.9 所示系统运动的微分方程, 用 x 和 θ 作为广义坐标.

解 系统在任意时刻的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} 2m \left(\dot{x} + \frac{1}{2} L \dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} 2m L^2 \dot{\theta}^2.$$

系统在任意时刻的势能为

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} 2k(x + L\theta)^2 - 2mg \frac{L}{2} \cos\theta.$$

系统在任意瞬时引入变量 δx 和 $\delta\theta$, 黏性阻尼力作的虚功为

$$\begin{aligned} \delta W &= -c\dot{x}\delta x - c(\dot{x} + L\dot{\theta})\delta(x + L\theta) \\ &= -c(2\dot{x} + L\dot{\theta})\delta x - cL(\dot{x} + L\dot{\theta})\delta\theta. \end{aligned}$$

利用拉格朗日方程可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left[m\dot{x} + 2m \left(\dot{x} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \right) (1) \right] + [kx + 2k(x + L\theta)(1)] = -2c\dot{x} - cL\dot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left[2m \left(\dot{x} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \right) \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{1}{12} 2m L^2 \dot{\theta} \right] + 2k(x + L\theta)(L) + mgL \sin\theta = -cL\dot{x} - cL^2 \dot{\theta}.$$

以矩阵形式写出为

$$\begin{bmatrix} 3m & mL \\ mL & \frac{2}{3}mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & cL \\ -cL & cL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & 2kL \\ 2kL & 2kL^2 + mgL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.11 用刚度影响系数建立如图 5.1 所示系统的刚度矩阵.

解 令 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$, 作用力如图 5.10(a) 所示, 由此可得矩阵的第一列. 令每个隔离体图的合力为零, 可得 $k_{11} = 3k, k_{21} = -2k, k_{31} = 0$. 令 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$, 作用力如图 5.10(b) 所示, 可得刚度矩阵的第二列. 令如图 5.10(b) 每个隔离体图的合力为零, 可得 $k_{12} = -2k, k_{22} = 3k, k_{32} = -k$. 令 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$, 作用力如图 5.10(c) 所示, 可得刚度矩阵的第三列. 令如图 5.10(c)

每个隔离体图的合力为零, 可得, $k_{13}=0$, $k_{23}=-k$, $k_{33}=k$, 所以刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

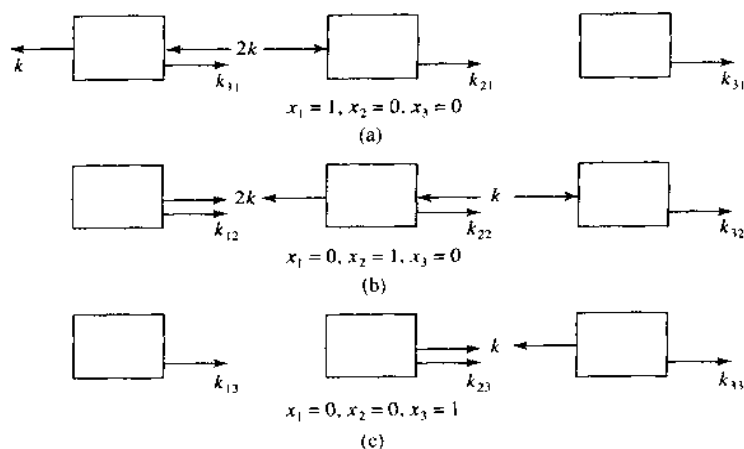


图 5.10

5.12 用刚度影响系数建立如图 5.3 所示系统的刚度矩阵. 用 x 和 θ 作为广义坐标.

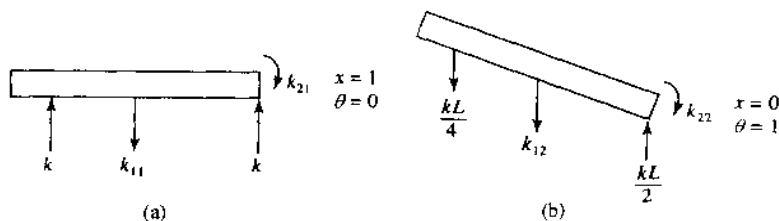


图 5.11

解 令 $x=1, \theta=0$, 作用力和力矩如图 5.11(a)所示, 可得刚度矩阵的第一列. 令合力为零, 可得 $k_{11}=2k$; 令对质心的力矩为零, 可得 $k_{21}+kL/4-kL/2=0 \rightarrow K_{21}=kL/4$. 令 $x=0, \theta=1$, 外力和力矩如图 5.11(b)所示, 可得矩阵的第二列. 令合力为零, 可得 $k_{12}=kL/4$; 令对质心的力矩为零, 可得 $k_{22} \cdot kL/2(L/2)-kL/4(L/4)=0 \rightarrow k_{22}=5kL^2/16$. 所以刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & \frac{1}{4}kL \\ \frac{1}{4}kL & \frac{5}{16}kL^2 \end{bmatrix}$$

5.13 用刚度影响系数建立如图 5.3 所示系统的刚度矩阵. 用 x_1 和 x_2 作为广义坐标.

解 令 $x_1=1, x_2=0$, 外加荷载如图 5.12(a)所示, 可得刚度矩阵的第一列. 令对每个杆端的力矩为零, 可得

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 - k_{21}(L) - \frac{3}{4}k\left(\frac{1}{4}L\right) \rightarrow k_{21} \\ &= -\frac{3}{16}k. \end{aligned}$$

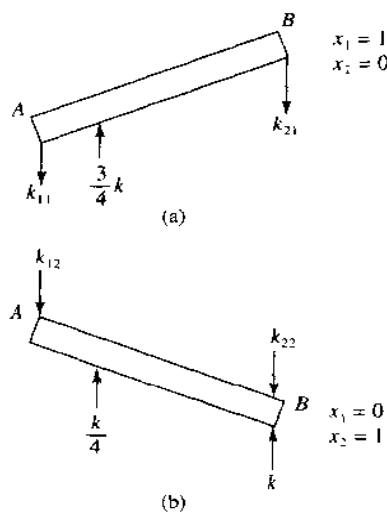


图 5.12

$$\sum M_B = 0 = k_{11}(L) - \frac{3}{4}k\left(\frac{3}{4}L\right) \rightarrow k_{11} = \frac{9}{16}k.$$

令 $x_1 = 0, x_2 = 1$, 外加荷载如图 5.12(b) 所示, 可得矩阵的第二列. 令对每个杆端的力矩为零, 可得

$$\sum M_A = 0 = k_{22}(L) - k(L) - \frac{1}{4}k\left(\frac{3}{4}L\right) \rightarrow k_{22} = \frac{17}{16}k,$$

$$\sum M_B = 0 = k_{12}(L) - \frac{1}{4}k\left(\frac{3}{4}L\right) \rightarrow k_{12} = \frac{3}{16}k.$$

所以刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{9}{16}k & \frac{3}{16}k \\ \frac{3}{16}k & \frac{17}{16}k \end{bmatrix}.$$

5.14 用刚度影响系数建立如图 5.5 所示系统的刚度矩阵. 用 x, θ_1 和 θ_2 作为广义坐标.

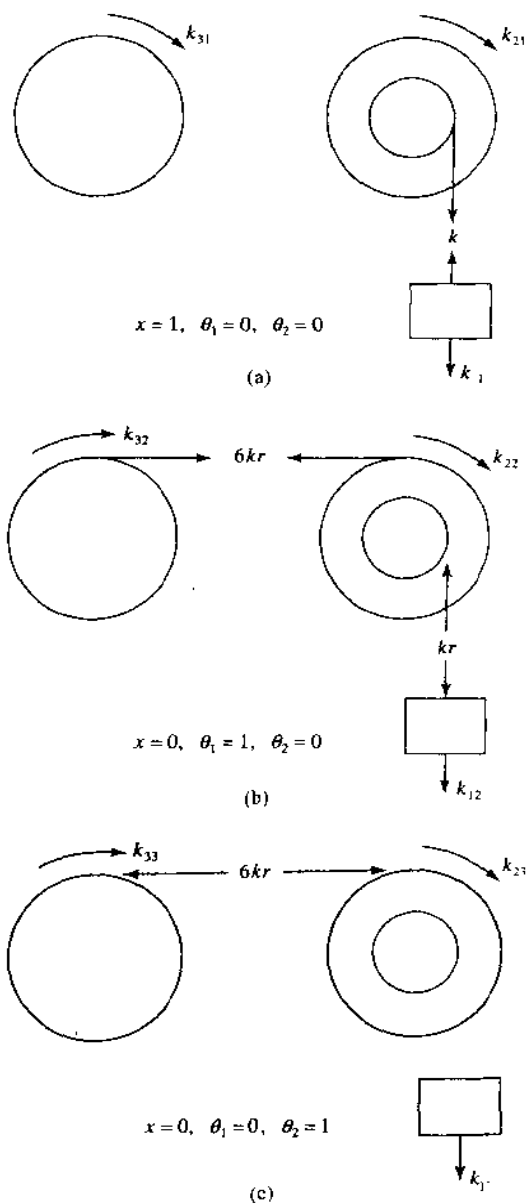


图 5.13

解 令 $x=1, \theta_1=0, \theta_2=0$, 外力和力矩如图 5.13(a) 所示, 令每个物体的合力和对支撑轴的力矩为零, 可得 $k_{11}=k, k_{21}=-kr, k_{31}=0$, 得矩阵的第一列. 令 $x=0, \theta_1=1, \theta_2=0$, 外力和力矩如图 5.13(b) 所示, 对每个隔离体图应用平衡方程可得 $k_{12}=-kr, k_{22}=13kr^2, k_{32}=-12kr^2$, 可得矩阵的第二列. 令 $x=0, \theta_1=0, \theta_2=1$, 外力和力矩如图 5.13(c) 所示, 对每个隔离体图应用平衡方程可得 $k_{13}=0, k_{23}=-12kr^2, k_{33}=12kr^2$, 可得矩阵的第三列, 所以刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -kr & 0 \\ -kr & 13kr^2 & -12kr^2 \\ 0 & -12kr^2 & 12kr^2 \end{bmatrix}.$$

5.15 用刚度影响系数建立如图 5.9 所示系统的刚度矩阵. 用 x 和 θ 作为广义坐标. 假定 θ 很小.

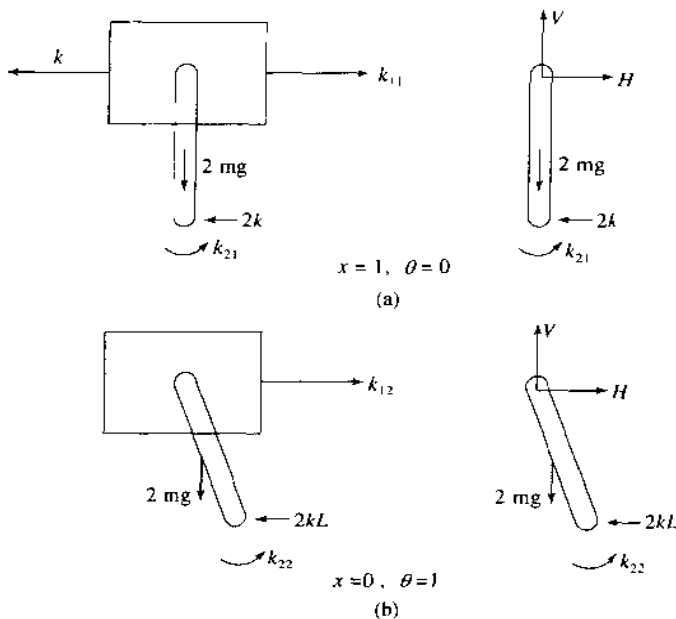


图 5.14

解 令 $x=1, \theta=0$, 作用在隔离体上的外力和力矩如图 5.14(a) 所示, 对隔离体图应用平衡方程可得 $k_{11}=3k, k_{21}=2kL$, 可得矩阵的第一列. 令 $x=0, \theta=1$, 作用在隔离体上的外力和力矩如图 5.14(b) 所示, 对隔离体图应用平衡方程可得 $k_{12}=2kL, k_{22}=2kL^2 + mgL$, 可得矩阵的第二列. 所以刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3k & 2kL \\ 2kL & 2kL^2 + mgL \end{bmatrix}.$$

5.16 用柔度影响系数建立如图 5.1 所示系统的柔度矩阵. 用 x_1, x_2, x_3 作为广义坐标.

解 通过对由 x_1 表示位移的物块施加一个单位载荷, 其他物块所得到的位移是柔度影响系数 a_{11}, a_{21} 和 a_{31} , 可以得到柔度矩阵的第一列. 将平衡方程运用在如图 5.15(a) 所示的隔离体后, 可以得到,

$$\begin{aligned} ka_{11} + 2k(a_{21} - a_{11}) + 1 &= 0, \\ -2k(a_{21} - a_{11}) + k(a_{31} - a_{21}) &= 0, \\ k(a_{31} - a_{21}) &= 0. \end{aligned}$$

联立方程解出

$$a_{11} = \frac{1}{k}, \quad a_{21} = \frac{1}{k}, \quad a_{31} = \frac{1}{k}.$$

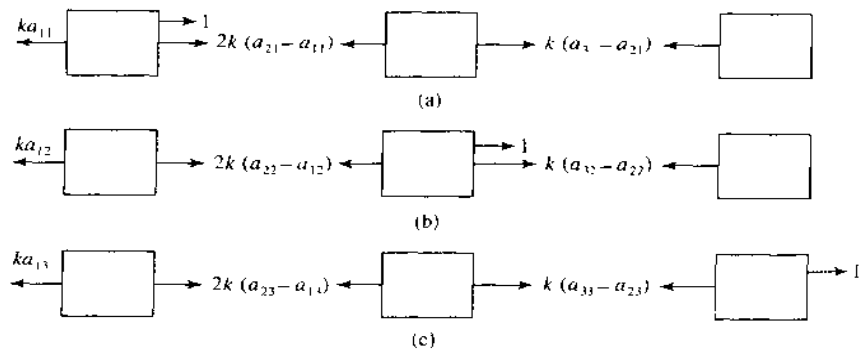


图 5.15

通过给中间物块施加一个单位载荷,并且对如图 5.15(b)所示的隔离体应用平衡方程,可以得到该柔度矩阵的第二列,

$$a_{12} = \frac{1}{k}, \quad a_{22} = \frac{3}{2k}, \quad a_{32} = \frac{3}{2k}.$$

通过给由 x_3 给出位移的物块施加一个单位载荷,并且对如图 5.15(c)所示的隔离体应用平衡方程,可以得到该柔度矩阵的第三列

$$a_{13} = \frac{1}{k}, \quad a_{23} = \frac{3}{2k}, \quad a_{33} = \frac{5}{2k}$$

因此,柔度矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} & \frac{3}{2k} & \frac{3}{2k} \\ \frac{1}{k} & \frac{3}{2k} & \frac{5}{2k} \end{bmatrix}.$$

5.17 由柔度影响系数建立如图 5.3 所示系统的柔度矩阵.

解 设 x 和 θ 为广义坐标,通过在杆的质心上施加一个单位载荷,并且设 $x = a_{11}$, $\theta = a_{21}$,可以得到柔度矩阵的第一列.对如图 5.16(a)所示的隔离体应用平衡方程,可以得到

$$\begin{aligned} \sum F = 0 &= 1 - k \left(a_{11} - \frac{L}{4} a_{21} \right) - k \left(a_{11} + \frac{L}{2} a_{21} \right), \\ \sum M_G = 0 &= k \left(a_{11} - \frac{L}{4} a_{21} \right) \frac{L}{4} - k \left(a_{11} + \frac{L}{2} a_{21} \right) \frac{L}{2} \end{aligned}$$

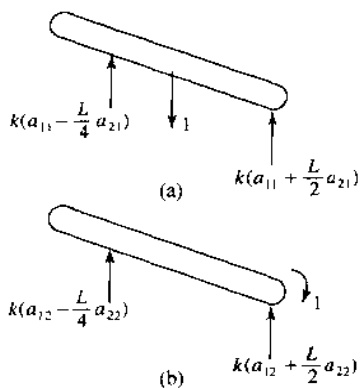


图 5.16

联立求解以上两个方程,得到

$$a_{11} = \frac{5}{9k}, \quad a_{21} = -\frac{4}{9kL}.$$

通过对该杆施加一个顺时针单位力矩,并对如图 5.16(b)所示的隔离体应用平衡方程,再联立求解出柔度影响系数,就可以得到柔度矩阵的第二列

$$a_{12} = -\frac{4}{9kL}, \quad a_{22} = \frac{32}{9kL^2}.$$

因此,柔度矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{9k} & \frac{4}{9kL} \\ -\frac{4}{9kL} & \frac{32}{9kL^2} \end{bmatrix}$$

5.18 用柔度影响系数建立如图 5.17 所示系统的柔度矩阵, 设 x_1 , x_2 和 θ 为广义坐标.

解 通过对用 x_1 表示位移的物块施加一个单位载荷, 可以得到柔度矩阵的第一列. 对如图 5.18 所示的隔离体运用平衡方程, 可以得到

$$\begin{aligned} \sum F = 0 &= 1 - k(a_{11} - ra_{21}), \\ \sum M_0 = 0 &= k(a_{11} - ra_{21})r - k(2ra_{21} - a_{31})(2r), \\ \sum F = 0 &= k(2ra_{21} - a_{31}). \end{aligned}$$

当联立求解上面的方程时, 出现不合理的结果 (例如, $1=0$). 这说明, 该柔度矩阵不存在. 这是因为系统是自由的, 并且刚度矩阵是奇异的.

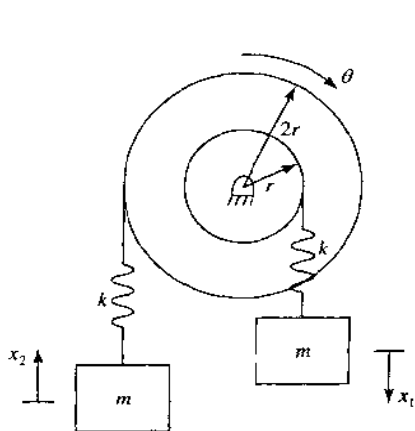


图 5.17

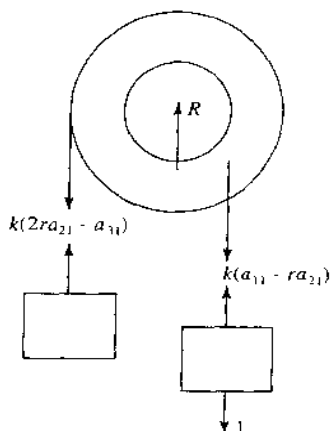


图 5.18

5.19 三台机器等距的放置在一个简支梁上, 该梁的弹性模量为 E , 质量惯性矩为 I . 试求如图 5.19 所示系统的三自由度模型的柔度矩阵.

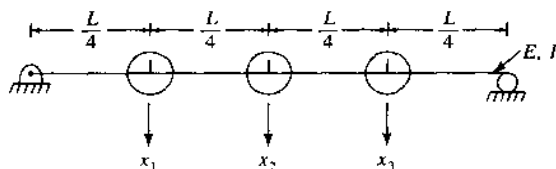


图 5.19

解 从简支梁的左侧起, 并在距左侧为 a 的点上施加一个集中单位载荷, 则沿梁上的 L 距离的中性轴挠度为

$$y(z) = \frac{L^3}{6EI} \left(1 - \frac{a}{L} \right) \left[\frac{a}{L} \left(2 - \frac{a}{L} \right) \frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L} \right)^3 \right],$$

其中 $z \leq a$. 柔度矩阵的第三列中的成分是由在 $a = 3L/4$ 处施加单位集中载荷, 而产生在各个机器的位移. 于是

$$y(z) = \frac{L^3}{24EI} \left[\frac{15z}{16L} - \left(\frac{z}{L} \right)^3 \right].$$

柔度影响系数为

$$a_{13} = y\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{7L^3}{768EI}, \quad a_{23} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{11L^3}{768EI}, \quad a_{33} = y\left(\frac{3}{4}L\right) = \frac{3L^3}{256EI}.$$

通过在 $u = L/2$ 处施加一个单位集中载荷, 可以得到柔度矩阵的第二列. 于是

$$y(z) = \frac{L^3}{12EI} \left[\frac{3}{4} \frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L}\right)^3 \right].$$

考虑到梁的互易性和对称性, 只需求出 a_{22} . 因此, 有

$$a_{22} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L^3}{48EI}.$$

由于互易性得到, $a_{32} = a_{23}$, 由于对称性得到, $a_{12} = a_{32}$. 接着, 由于对称性得到, $a_{11} = a_{33}$, 由于互易性得到, $a_{21} = a_{12}$ 和 $a_{31} = a_{13}$. 于是柔度矩阵为

$$\mathbf{A} = \frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{3}{256} & \frac{11}{768} & \frac{7}{768} \\ \frac{11}{768} & \frac{1}{48} & \frac{11}{768} \\ \frac{7}{768} & \frac{11}{768} & \frac{3}{256} \end{bmatrix}.$$

5.20 运用两个自由度来模型化一个两端固定的梁的振动, 该梁的长度为 L , 弹性模量为 E , 横截面的惯性矩为 I . 假设广义坐标为梁上等间距点的位移, 求该模型的柔度矩阵.

解 在距梁的左侧为 u 的点上施加一个集中单位载荷, 在梁上 z 处的离开中性轴的挠度为

$$y(z) = \frac{L^3}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{u}{L} \left(1 - \frac{u}{L}\right)^2 \left(\frac{z}{L}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{u}{L}\right)^2 \left(1 + 2 \frac{u}{L}\right) \left(\frac{z}{L}\right)^3 \right],$$

其中 $z \leq u$. 设 $u = 2L/3$, 可以得到柔度矩阵的第二列, 即

$$y(z) = \frac{L^3}{27EI} \left[\left(\frac{z}{L}\right)^2 - \frac{7}{6} \left(\frac{z}{L}\right)^3 \right]$$

于是, 有

$$a_{12} = y\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{11L^3}{4374EI}, \quad a_{22} = y\left(\frac{2}{3}L\right) = \frac{16L^3}{4374EI}.$$

由于互易性得到, $a_{12} = a_{21}$, 由于对称性得到, $a_{11} = a_{22}$. 因此

$$\mathbf{A} = \frac{L^3}{4374EI} \begin{bmatrix} 16 & 11 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}.$$

5.21 一个悬臂梁的一端放置一个惯性矩很大的机器. 因为其惯性矩很大, 所以在模型中应该考虑旋转的影响. 因此运用一个两个自由度的模型来表示, 该模型的广义坐标为 x , 机器的位移; θ , 梁末端弹性曲线的斜角. 若已知该梁的长度为 L , 弹性模量为 E , 横截面惯性矩为 I , 确定该模型的柔度矩阵.

解 首先考虑在梁的末端施加一个集中单位载荷. 由材料力学知, 梁末端的挠度为 $a_{11} = L^3/(3EI)$, 末端的斜角为 $a_{21} = L^2/(2EI)$. 若在梁的末端施加一个单位矩, 则梁末端的挠度为 $a_{12} = L^2/(2EI)$, 末端弹性曲线的斜角为 $a_{22} = L/(EI)$. 因此该模型的柔度矩阵为

$$\mathbf{A} = \frac{L}{EI} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3} & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

5.22 对于如图 5.20 所示的四自由度系统, 求其柔度矩阵.

解 设 x_1, x_2 和 x_3 为梁上各点的位移, 设 x_4 为通过弹簧与梁相连的物体的位移. 注意到, 若没有附加的弹簧质量系统, 该系统的柔度矩阵已由题 5.19 得到. 通过对第一个质点施加一个单位载荷, 可以求出柔度矩阵的第一列. 如图 5.21 所示, 将作用在物块隔离体上的力加起来, 可以表明弹簧的受力为零. 因此梁的挠度只由施加在梁上的单位力决定, 并且由题 5.19 可以得到柔度影响系数 a_{ij} , $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$. 同样, 有

$$a_{41} = a_{21}, \quad a_{42} = a_{22}, \quad a_{43} = a_{23}.$$

现在考虑施加在悬挂的物块上的单位载荷. 弹簧的受力为 1. 因此可以假想一个单位力施加在中间跨上来分析该梁, 即有

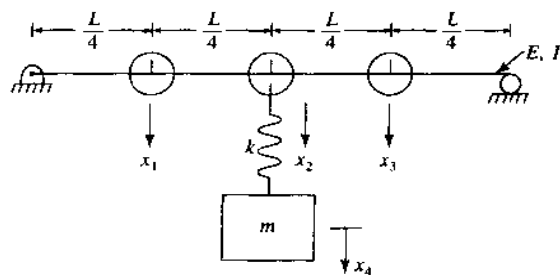


图 5.20

$$k(a_{44} - a_{24}) = 1 \rightarrow a_{44} = \frac{1}{4} + a_{24} - \frac{1}{k} + a_{22}.$$

然后用题 5.19 中的结果可得

$$A = \frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{3}{128} & \frac{11}{768} & \frac{7}{768} & \frac{11}{768} \\ \frac{11}{768} & \frac{1}{48} & \frac{11}{768} & \frac{1}{48} \\ \frac{7}{768} & \frac{11}{768} & \frac{3}{128} & \frac{11}{68} \\ \frac{11}{768} & \frac{1}{48} & \frac{11}{768} & \frac{1}{48} + \frac{EI}{kL^3} \end{bmatrix}.$$

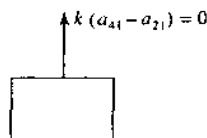


图 5.21

5.23 推导如图 5.22 所示三自由度无约束扭转系统的刚度矩阵。

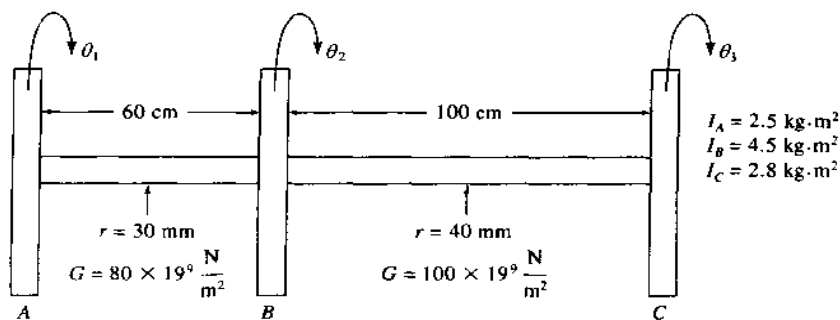


图 5.22

解 轴的扭转刚度为

$$k_{tAB} = \frac{J_{AB}G_{AB}}{L_{AB}} = \frac{\frac{\pi}{2}(0.03 \text{ m})^4 \left(80 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)}{0.6 \text{ m}} = 1.70 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}},$$

$$k_{tBC} = \frac{J_{BC}G_{BC}}{L_{BC}} = \frac{\frac{\pi}{2}(0.03 \text{ m})^4 \left(100 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)}{1.0 \text{ m}} = 4.02 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}.$$

刚度影响系数通常写作

$$K = \begin{bmatrix} k_{tAB} & -k_{tAB} & 0 \\ -k_{tAB} & k_{tAB} + k_{tBC} & -k_{tBC} \\ 0 & -k_{tBC} & k_{tBC} \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1.70 & -1.70 & 0 \\ 1.70 & 5.72 & -4.02 \\ 0 & -4.02 & 4.02 \end{bmatrix}.$$

5.24 两自由度系统运动的微分方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

求该系统的固有频率。

解 用方程(5.12)可以确定固有频率为

$$\begin{aligned} \det |K - \omega^2 M| &= 0, \\ \det \begin{vmatrix} 2k & k \\ -k & 3k \end{vmatrix} - \omega^2 \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} &= 0, \\ \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & k \\ -k & 3k - \omega^2 m \end{vmatrix} &= 0, \\ (2k - \omega^2 m)(3k - \omega^2 m) - (-k)(-k) &= 0, \\ m^2 \omega^4 - 5km\omega^2 + 5k^2 &= 0, \end{aligned}$$

此为关于求解 ω^2 的二次方程为

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{5km \pm \sqrt{25k^2 m^2 - 4(m^2)(5k^2)}}{2m^2}, \\ \omega &= \left[\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \right]^{1/2}, \\ \omega_1 &= 1.176 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 1.902 \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{aligned}$$

5.25 如果 $m = 5 \text{ kg}$, $I = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $L = 0.8 \text{ km}$, $k = 2 \times 10^9 \text{ N/m}$, 求如图 5.3 所示系统的固有频率。

解 将已知数据代入在题 5.4 中用 x 和 θ 作为广义坐标所得到的质量和刚度矩阵中可以得到

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 4 \times 10^5 & 4 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 & 4 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

用方程(5.12)可以计算出固有频率为

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} 4 \times 10^5 & 4 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 & 4 \times 10^4 \end{vmatrix} - \omega^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{vmatrix} &= 0, \\ \begin{vmatrix} 4 \times 10^5 - 5\omega^2 & 4 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 & 4 \times 10^4 - 0.5\omega^2 \end{vmatrix} &= 0, \\ (4 \times 10^5 - 5\omega^2)(4 \times 10^4 - 0.5\omega^2) - (4 \times 10^4)^2 &= 0, \\ 2.5\omega^4 - 4 \times 10^5 \omega^2 + 1.44 \times 10^{10} &= 0, \\ \omega &= \left[\frac{4 \times 10^5 \pm \sqrt{(4 \times 10^5)^2 - 4(2.5)(1.44 \times 10^{10})}}{2(2.5)} \right]^{1/2}, \\ \omega_1 &= 233.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_2 = 324.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

5.26 一根长为 6 m 的两端固定的梁, 距其左端 2 m 处放置一台 500 kg 的机器, 距其左端 4 m 处放置一台 375 kg 的机器。忽略梁的惯性影响, 如果 $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $I = 2.35 \times 10^{-6} \text{ m}^4$, 求该系统的固有频率。

解 用两自由度来模型化该系统, 广义坐标为两个机器的位移。用题 5.20 的结果, 并代入已知的量, 可以得到该模型的柔度矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1.68 \times 10^{-6} & 1.16 \times 10^{-6} \\ 1.16 \times 10^{-6} & 1.68 \times 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

建立该模型的质量矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 375 \end{bmatrix}.$$

用方程(5.13)可以计算出固有频率为

$$\begin{aligned} \det | \omega^2 A M - I | &= 0, \\ \det \left| 10^{-6} \omega^2 \begin{bmatrix} 1.68 & 1.16 \\ 1.16 & 1.68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 375 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 8.4 \times 10^{-4} \omega^2 - 1 & 4.35 \times 10^{-4} \omega^2 \\ 5.8 \times 10^{-4} \omega^2 & 6.3 \times 10^{-4} \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$2.77 \times 10^{-7} \omega^4 - 1.47 \times 10^{-3} \omega^2 + 1 = 0,$$

$$\omega = \left[\frac{1.47 \times 10^{-3} \pm \sqrt{(1.47 \times 10^{-3})^2 - 4(2.77 \times 10^{-7})(1)}}{2(2.77 \times 10^{-7})} \right]^{1/2},$$

$$\omega_1 = 28.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_2 = 67.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- 5.27 题 5.26 中的梁是由一种密度为 7800 kg/m^3 的材料制成的, 该梁的横截面积为 $4.36 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. 通过在节点处加上适当质量的质点来近似该梁的惯性影响, 求该系统的固有频率.

解 梁的总质量为

$$m_b = \rho A L = (7800 \text{ kg}) (4.36 \times 10^{-3} \text{ m}^2) (6 \text{ m}) = 204.0 \text{ kg}.$$

加在每个节点上的质量代替了梁的一段的质量. 对相邻质点来说, 节点邻域两边的边界是两节点的中间部. 靠近支撑节点的邻域的边界, 是节点与支撑间的中间部. 支撑端附近的质点的惯性忽略不计. 如果等价的包括其他各点, 则梁的惯性就会过分的近似. 因此, 对于这个模型来说, 加在每一个节点上的质量为 $m_b/3 = 68.0 \text{ kg}$. 因此质量矩阵变为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 568 & 0 \\ 0 & 443 \end{bmatrix}.$$

与题 5.26 中计算过程相似, 可以得到

$$\omega_1 = 26.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_2 = 62.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- 5.28 对于题 5.25 所示系统, 用 x 和 θ 作为广义坐标, 求模态矢量.

解 对一般的模态结果表明, 对每一个模态, 广义坐标值的比为常数. 设 X 为对每一个模态在任意时刻杆的质心的位移, Θ 为该时刻杆的角位移. 用题 5.25 的结果可以计算出模态为

$$\begin{bmatrix} 4 \times 10^5 - 5\omega^2 & 4 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 & 4 \times 10^4 - 0.5\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由上面的矩阵系统所代表的两个方程是相互联系的. 从上面的方程可得

$$(4 \times 10^5 - 5\omega^2)X + 4 \times 10^4 \Theta = 0,$$

$$\Theta = -\frac{4 \times 10^5 - 5\omega^2}{4 \times 10^4} X,$$

代入 $\omega = 233.9 \text{ rad/s}$, 可得 $\Theta = -3.16X$. 代入 $\omega = 324.5 \text{ rad/s}$, 可得 $\Theta = 3.16X$. 任意设 $X = 1$, 模态矢量为

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3.16 \end{bmatrix}.$$

- 5.29 使题 5.25 和题 5.28 中的杆的两端均有 1.8 mm 的离开平衡位置的位移, 并从静上释放该杆. 求产生运动的时间过程.

解 运用一般的模态解答可以得到对于齐次微分方程的 4 个相互独立的线性解. 最一般的解是所有齐次解的线性组合. 因此, 有

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{C}}_1 \mathbf{X}_1 e^{i\omega_1 t} + \tilde{\mathbf{C}}_2 \mathbf{X}_1 e^{-i\omega_1 t} + \tilde{\mathbf{C}}_3 \mathbf{X}_2 e^{i\omega_2 t} + \tilde{\mathbf{C}}_4 \mathbf{X}_2 e^{-i\omega_2 t}.$$

由欧拉恒等式将三角函数来代替复杂的指数函数, 即

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{X}_1 \cos \omega_1 t + C_2 \mathbf{X}_1 \sin \omega_1 t + C_3 \mathbf{X}_2 \cos \omega_2 t + C_4 \mathbf{X}_2 \sin \omega_2 t,$$

其中, C_1, C_2, C_3 和 C_4 是积分常数. 初始条件为

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.0018 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

应用该条件可以得到

$$x(0) = 0.0018 = C_1 + C_2,$$

$$\theta(0) = 0 = -3.16C_1 + 3.16C_3,$$

$$\dot{x}(0) = 0 = \omega_1 C_2 + \omega_2 C_4,$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 = -3.16\omega_1 C_2 + 3.16\omega_2 C_4.$$

解之可以得到 $C_1 = C_3 = 0.0009$, $C_2 = C_4 = 0$, 于是

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0009 \\ -0.00284 \end{bmatrix} \cos 233.9t + \begin{bmatrix} 0.0009 \\ 0.00284 \end{bmatrix} \cos 324.5t.$$

5.30 求如图 5.1 所示系统的固有频率.

解 固有频率为 $M^{-1}K$ 的特征值的平方根. 因此

$$M^{-1}K = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

特征值由下式计算:

$$\det |M^{-1}K - \lambda I| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3\frac{k}{m} - \lambda & -2\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{3k}{2m} - \lambda & -\frac{1}{2}\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{k}{m} & \frac{1}{2}\frac{k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$-\beta^3 + 5\beta^2 - \frac{9}{2}\beta + \frac{1}{2} = 0, \quad \beta = \lambda \frac{m}{k}.$$

该三次方程的解为 0.129, 1, 3.870. 因此固有频率为

$$\omega_1 = 0.359 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = 1.97 \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

5.31 确定如图 5.1 和题 5.30 中系统的模态矢量.

解 设 $X_i = [X_{i1} \ X_{i2} \ X_{i3}]^T$ 为与 ω_i 相应的模态矢量. 可以从中得到模态矢量的方程为

$$\begin{bmatrix} 3\phi - \lambda_i & -2\phi & 0 \\ -2\phi & \frac{3}{2}\phi - \lambda_i & -\frac{1}{2}\phi \\ 0 & -\frac{1}{2}\phi & \frac{1}{2}\phi - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ X_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中 $\phi = k/m$. 因为上面的方程不是惟一的, 所以只需要用两个量来确定模态. 因此, 任意选择 $X_{i2} = 1$. 于是得到

$$X_{i1} = \frac{2\phi}{3\phi - \lambda_i}, \quad X_{i3} = \frac{\phi}{2\left(\frac{1}{2}\phi - \lambda_i\right)}.$$

将从题 5.30 中得到的 λ_i 值代入可以得到

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.697 \\ 1 \\ 1.347 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} -2.298 \\ 1 \\ -0.1484 \end{bmatrix}.$$

5.32 用三自由度的模型来近似模拟简支梁, 并求第一阶固有频率.

解 通过在梁上的等间距节点上放置质点来近似该梁的惯性因素, 如图 5.23 所示. 由题 5.27 可以得到各质点的质量. 如果 m 为梁的质量, 那么

$$M = \frac{m}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

固有频率为 AM 特征值的平方根的转置. 因此, 用题 5.19 中的柔度矩阵, 即

$$\det | \mathbf{A}\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I} | = 0,$$

$$\frac{mL^3}{4(768)EI} \det \left| \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 9\phi - \lambda & 11\phi & 7\phi \\ 11\phi & 16\phi - \lambda & 11\phi \\ 7\phi & 11\phi & 9\phi - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \phi = \frac{mL^3}{3072EI},$$

$$-\beta^3 + 34\beta^2 - 78\beta + 28 = 0, \quad \beta = \frac{\lambda}{\phi}.$$

上面方程的解为 $\beta = 0.444, 2$ 和 31.556 . 第一阶固有频率为

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} = 9.866 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}.$$

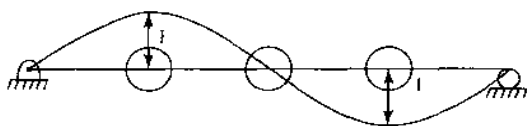


图 5.23

5.33 确定并画出题 5.32 中的梁的第二阶模态。

解 与 $\lambda = 2\phi$ 相对应的模态由下式确定:

$$\begin{bmatrix} 9\phi - 2\phi & 11\phi & 7\phi \\ 11\phi & 16\phi - 2\phi & 11\phi \\ 7\phi & 11\phi & 9\phi - 2\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \\ X_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

任意设 $X_{21} = 1$, 由上面方程组中的前两个方程得出

$$11X_{22} + 7X_{23} = -7,$$

$$14X_{22} + 11X_{23} = -11.$$

解之可得 $X_{22} = 0, X_{23} = -1$, 于是 $\mathbf{X}_2 = [1 \ 0 \ -1]^T$. 所画的模态如图 5.23 所示.

5.34 三个相等的质量为 m 的互连列车车厢如图 5.24 所示. 车厢之间互连处的刚度为 k . 描述这三个车厢的运动时间历程.

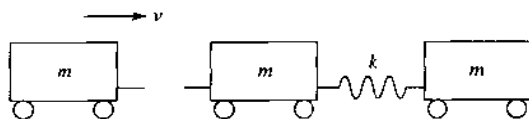


图 5.24

解 该系统运动的微分方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中 x_1, x_2 和 x_3 为该列车车厢的位移. 该系统的初始条件为

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

固有频率计算如下:

$$\det | \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} | = 0,$$

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ k & 2k & m\omega^2 - k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_3 = \sqrt{3\frac{k}{m}}.$$

模态确定如下:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

一般解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} (C_1 + C_2 t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(C_3 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_4 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \left(C_5 \cos \sqrt{3\frac{k}{m}} t + C_6 \sin \sqrt{3\frac{k}{m}} t \right).$$

应用初始条件得到

$$\begin{aligned} x_1(0) = 0 &= C_1 + C_2 - C_5, \\ x_2(0) = 0 &= C_1 + 2C_5, \\ x_3(0) = 0 &= C_1 - C_5 - C_5, \\ \dot{x}_1(0) = v &= C_2 + \sqrt{\frac{k}{m}} C_4 + \sqrt{3\frac{k}{m}} C_6, \\ \dot{x}_2(0) = 0 &= C_2 + 2\sqrt{3\frac{k}{m}} C_6, \\ \dot{x}_3(0) = 0 &= C_2 - \sqrt{\frac{k}{m}} C_4 - \sqrt{3\frac{k}{m}} C_6. \end{aligned}$$

解之得到

$$\begin{aligned} C_1 &= C_3 = C_5 = 0, \\ C_2 &= \frac{v}{3}, \quad C_4 = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad C_6 = -\frac{v}{6} \sqrt{\frac{m}{3k}}. \end{aligned}$$

因此, 有

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{v}{3} t + \frac{v}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t - \frac{v}{6} \sqrt{\frac{m}{3k}} \sin \sqrt{3\frac{k}{m}} t, \\ x_2(t) &= \frac{v}{3} t - \frac{v}{3} \sqrt{\frac{m}{3k}} \sin \sqrt{3\frac{k}{m}} t, \\ x_3(t) &= \frac{v}{3} t - \frac{v}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t - \frac{v}{6} \sqrt{\frac{m}{3k}} \sin \sqrt{3\frac{k}{m}} t. \end{aligned}$$

5.35 试求如图 5.22 所示的扭转系统的固有频率。

解 用由题 5.23 所得到的刚度矩阵来计算固有频率为

$$\begin{aligned} \det |\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| &= 0, \\ \begin{vmatrix} 1.70 \times 10^5 - 2.5\omega^2 & -1.70 \times 10^5 & 0 \\ 1.70 \times 10^5 & 5.72 \times 10^5 - 4.5\omega^2 & -4.02 \times 10^5 \\ 0 & -4.02 \times 10^5 & 4.02 \times 10^5 - 2.8\omega^2 \end{vmatrix} &= 0, \\ -31.5\omega^6 + 1.067 \times 10^7 \omega^4 - 6.696 \times 10^{11} \omega^2 &= 0, \\ \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 288.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_3 = 505.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

5.36 论证题 5.28 中的系统的模态的正交性。

解

$$\begin{aligned} X_1^T M X_2 &= [1 \quad -3.16] \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3.16 \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad -3.16] \begin{bmatrix} 5 \\ 1.58 \end{bmatrix} = (1)(5) + (-3.16)(1.58) \approx 0. \end{aligned}$$

5.37 论证题 5.30 中的系统的模态的正交性.

解

$$\begin{aligned} X_1^T M X_2 &= m [0.697 \quad 1 \quad 1.347] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= m [0.697 \quad 1 \quad 1.347] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= m [(0.697)(1) + (1)(2) + (1.347)(-2)] \approx 0, \\ X_1^T M X_3 &= m [0.697 \quad 1 \quad 1.347] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.298 \\ 1 \\ -0.1484 \end{bmatrix} \\ &= m [0.697 \quad 1 \quad 1.347] \begin{bmatrix} 2.298 \\ 2 \\ -0.2968 \end{bmatrix} \\ &= m [(0.697)(-2.298) + (1)(2) + (1.347)(-0.2968)] \approx 0, \\ X_2^T M X_3 &= m [-2.298 \quad 1 \quad -0.1484] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= m [-2.298 \quad 1 \quad -0.1484] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= m [(-2.298)(1) + (1)(2) + (-0.1484)(-2)] \approx 0. \end{aligned}$$

5.38 对于题 5.30 的系统, 求标准模态矢量.

解 分别通过用 $[X^T M X]^{1/2}$ 去除每一个模态矢量的各分量得到标准模态矢量 X . 因此, 对于题 5.30 的模态矢量, 有

$$\begin{aligned} X_1^T M X_1 &= [0.697 \quad 1 \quad 1.347] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.697 \\ 1 \\ 1.347 \end{bmatrix} \\ &= [0.697 \quad 1 \quad 1.347] \begin{bmatrix} 0.697m \\ 2m \\ 2.694m \end{bmatrix}, \\ &= (0.697)(0.697m) + (1)(2m) + (1.347)(2.694m) = 6.115m, \\ X_2^T M X_2 &= [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad 1 \quad -1] \begin{bmatrix} m \\ 2m \\ -2m \end{bmatrix} = (1)(m) + (1)(2m) + (-1)(-2m) = 5m, \\ X_3^T M X_3 &= [-2.298 \quad 1 \quad -0.1484] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.298 \\ 1 \\ -0.1484 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -2.298 & 1 & 0.1484 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.298m \\ 2m \\ 0.2968m \end{bmatrix} \\ = (-2.298)(-2.298m) + (1)(2m) + (0.1484)(-0.2968m) = 7.325m.$$

标准模态为

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{6.115m}} \begin{bmatrix} 0.697 \\ 1 \\ 1.347 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.2819 \\ 0.4044 \\ 0.5447 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{5m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.4472 \\ -0.4472 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X}_3 = \frac{1}{\sqrt{7.325m}} \begin{bmatrix} -2.298 \\ 1 \\ 0.1484 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} -0.8491 \\ 0.3695 \\ 0.0548 \end{bmatrix}.$$

5.39 一个二自由度系统质量矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 100 & 40 \\ 40 & 150 \end{bmatrix}.$$

该系统有一个标准模态: $\mathbf{X}_1 = [0.0341 \quad 0.0682]^T$, 求第二阶标准模态.

解 设第二模态为 $[1 \quad a]^T$, 满足正交性

$$\mathbf{X}_1^T \mathbf{M} \mathbf{X}_2 = 0 = [0.0341 \quad 0.0682] \begin{bmatrix} 100 & 40 \\ 40 & 150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} \\ = [0.0341 \quad 0.0682] \begin{bmatrix} 100 + 40a \\ 40 + 150a \end{bmatrix} \\ = (0.0341)(100 + 40a) + (0.0682)(40 + 150a) = 6.138 + 11.594a, \\ a = -0.529.$$

标准化模态

$$\mathbf{X}_2^T \mathbf{M} \mathbf{X}_2 = 0 = [1 \quad -0.529] \begin{bmatrix} 100 & 40 \\ 40 & 150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.529 \end{bmatrix} = 99.66.$$

标准模态为

$$\mathbf{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{99.66}} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.529 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0100 \\ -0.0530 \end{bmatrix}.$$

5.40 对于题 5.32 中的系统, 用矩阵迭代法, 并采用初试矢量 $\mathbf{u}_0 = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ 求此系统的第一阶固有频率及相应模态的近似解.

解 用由题 5.32 得到的迭代矩阵 \mathbf{AM} , 下面进行矩阵迭代法的过程:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{AM} \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 9\phi & 11\phi & 7\phi \\ 11\phi & 16\phi & 11\phi \\ 7\phi & 11\phi & 9\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9\phi \\ 11\phi \\ 7\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 0.8182 \\ 1 \\ 0.6364 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{AM} \tilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 9\phi & 11\phi & 7\phi \\ 11\phi & 16\phi & 11\phi \\ 7\phi & 11\phi & 9\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8182 \\ 1 \\ 0.6364 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.82\phi \\ 32\phi \\ 22.46\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 0.7131 \\ 1 \\ 0.7019 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{AM} \tilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 9\phi & 11\phi & 7\phi \\ 11\phi & 16\phi & 11\phi \\ 7\phi & 11\phi & 9\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7131 \\ 1 \\ 0.7019 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.33\phi \\ 31.57\phi \\ 23.31\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} 0.7389 \\ 1 \\ 0.7398 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{u}_4 = \mathbf{AM} \tilde{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} 9\phi & 11\phi & 7\phi \\ 11\phi & 16\phi & 11\phi \\ 7\phi & 11\phi & 9\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7389 \\ 1 \\ 0.7398 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.82\phi \\ 32.22\phi \\ 22.82\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_4 = \begin{bmatrix} 0.7073 \\ 1 \\ 0.7073 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{u}_5 = \mathbf{AM} \tilde{\mathbf{u}}_4 = \begin{bmatrix} 9\phi & 11\phi & 7\phi \\ 11\phi & 16\phi & 11\phi \\ 7\phi & 11\phi & 9\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7073 \\ 1 \\ 0.7073 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.32\phi \\ 31.56\phi \\ 22.32\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_5 = \begin{bmatrix} 0.7073 \\ 1 \\ 0.7073 \end{bmatrix}.$$

$$u_6 = AM\hat{u}_5 = \begin{bmatrix} 9\phi & 11\phi & 7\phi \\ 11\phi & 16\phi & 11\phi \\ -7\phi & 11\phi & 9\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 1 \\ -0.7073 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.31\phi \\ 31.56\phi \\ -22.31\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_6 = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 1 \\ -0.7071 \end{bmatrix}.$$

因此,迭代收敛于 $\lambda = 31.56\phi$, 并得到

$$X_1 = [0.07071 \quad 1 \quad 0.07071]^T,$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{31.56\phi}} = \frac{1}{\sqrt{31.56\left(\frac{mL^3}{3072EI}\right)}} = 9.866 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}.$$

5.41 用矩阵迭代求题 5.32 中系统的第二阶固有频率和模态.

解 设 $X_2 = [A \quad B \quad C]^T$, 正交性要求

$$X_2^T M X_1 = 0 = [A \quad B \quad C] \begin{bmatrix} \frac{m}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 1 \\ -0.7071 \end{bmatrix},$$

$$\frac{m}{4}(0.7071A + B + 0.7071C) = 0,$$

$$A = -1.414B - C.$$

第一阶模态正交化定义如下:

$$Q = \begin{bmatrix} 9\phi & 11\phi & 7\phi \\ 11\phi & 16\phi & 11\phi \\ 7\phi & 11\phi & 9\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1.414 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & -1.726\phi & -2\phi \\ 0 & 0.4460\phi & 0 \\ 0 & 1.102\phi & 2\phi \end{bmatrix}.$$

当用矩阵 Q 时, 矩阵迭代把迭代的正交性加到第一阶模态上, 因此迭代收敛到第二阶模态并得到第二阶固有频率. 选择 $u_0 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$, 则有

$$u_1 = Qu_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1.726\phi & -2\phi \\ 0 & 0.446\phi & 0 \\ 0 & 1.102\phi & 2\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\phi \\ 0 \\ 2\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$u_2 = Q\tilde{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1.726\phi & -2\phi \\ 0 & 0.446\phi & 0 \\ 0 & 1.102\phi & 2\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\phi \\ 0 \\ -2\phi \end{bmatrix}.$$

因此, 很清楚 $X_2 = [1 \quad 0 \quad -1]^T$, 而且

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{mL^3}{3072EI}\right)}} = 39.19 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}.$$

5.42 应用题 5.40 和题 5.41 的结果求题 5.32 中的系统的最高阶固有频率.

解 如果 $X_3 = [D \quad E \quad F]^T$, 那么与 X_1 正交, 需要 $D = -1.414E - F$. 与 X_2 正交, 需要

$$X_3^T M X_2 = 0 = [D \quad E \quad F] \begin{bmatrix} \frac{m}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{m}{4}(D - F) = 0 \Rightarrow D = F.$$

任意设定 $F = 1$ 可导出 $D = 1$ 和 $E = -1.414$. AM 的第三个特征值可用 $AMX_3 = \lambda_3 X_3$ 得到. 因此

$$\begin{bmatrix} 9\phi & 11\phi & 7\phi \\ 11\phi & 16\phi & 11\phi \\ 7\phi & 11\phi & 9\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1.414 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.446\phi \\ -0.624\phi \\ 0.446\phi \end{bmatrix}.$$

得 $\lambda_3 = 0.446$, 并且

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{0.446\phi}} = \frac{1}{\sqrt{0.446\left(\frac{mL^3}{3072EI}\right)}} = 82.99 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}.$$

5.43 用矩阵法求解题 5.30 系统的最高阶固有频率及相应的模态。

解 用矩阵 $M^{-1}K$ 作为迭代矩阵, 则矩阵迭代可确定最高阶固有频率. 用 $u_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ 和题 5.30 中 $M^{-1}K$, 及 $\phi = k/m$, 于是

$$u_1 = M^{-1}Ku_0 = \begin{bmatrix} 3\phi & -2\phi & 0 \\ -\phi & \frac{3}{2}\phi & -\frac{1}{2}\phi \\ 0 & -\frac{1}{2}\phi & \frac{1}{2}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\phi \\ -\phi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.3333 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$u_2 = M^{-1}K\tilde{u}_1 = \begin{bmatrix} 3\phi & -2\phi & 0 \\ -\phi & \frac{3}{2}\phi & -\frac{1}{2}\phi \\ 0 & -\frac{1}{2}\phi & \frac{1}{2}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.3333 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.667\phi \\ 1.5\phi \\ -0.1667\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4091 \\ 0.0455 \end{bmatrix},$$

$$u_3 = M^{-1}K\tilde{u}_2 = \begin{bmatrix} 3\phi & -2\phi & 0 \\ -\phi & \frac{3}{2}\phi & -\frac{1}{2}\phi \\ 0 & -\frac{1}{2}\phi & \frac{1}{2}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4091 \\ 0.0455 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.818\phi \\ 1.636\phi \\ 0.2273\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4285 \\ 0.0595 \end{bmatrix},$$

$$u_4 = M^{-1}K\tilde{u}_3 = \begin{bmatrix} 3\phi & -2\phi & 0 \\ -\phi & \frac{3}{2}\phi & -\frac{1}{2}\phi \\ 0 & -\frac{1}{2}\phi & \frac{1}{2}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4285 \\ 0.0595 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.859\phi \\ -1.674\phi \\ 0.2445\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4338 \\ 0.0636 \end{bmatrix},$$

$$u_5 = M^{-1}K\tilde{u}_4 = \begin{bmatrix} 3\phi & -2\phi & 0 \\ -\phi & \frac{3}{2}\phi & -\frac{1}{2}\phi \\ 0 & -\frac{1}{2}\phi & \frac{1}{2}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4338 \\ 0.0636 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.868\phi \\ -1.683\phi \\ -0.2487\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4351 \\ 0.0643 \end{bmatrix},$$

$$u_6 = M^{-1}K\tilde{u}_5 = \begin{bmatrix} 3\phi & -2\phi & 0 \\ -\phi & \frac{3}{2}\phi & -\frac{1}{2}\phi \\ 0 & -\frac{1}{2}\phi & \frac{1}{2}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4351 \\ 0.0643 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.870\phi \\ -1.685\phi \\ 0.2497\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4354 \\ 0.0652 \end{bmatrix},$$

$$u_7 = M^{-1}K\tilde{u}_6 = \begin{bmatrix} 3\phi & -2\phi & 0 \\ -\phi & \frac{3}{2}\phi & -\frac{1}{2}\phi \\ 0 & -\frac{1}{2}\phi & \frac{1}{2}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4354 \\ 0.0652 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.871\phi \\ -1.685\phi \\ 0.2503\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_7 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4353 \\ 0.0647 \end{bmatrix}.$$

迭代收敛于 $X_3 = [1 \ -0.4353 \ 0.0647]^T$, $\lambda_3 = 3.871\phi$, 可导出

$$\omega_3 = \sqrt{3.871\phi} = 1.967 \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

5.44 当 c 为何值时, 图 5.25 中系统的二自由度模型为欠阻尼系统?

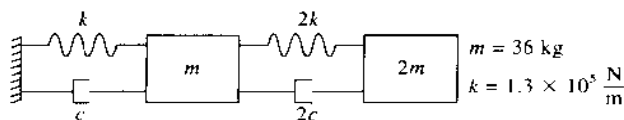


图 5.25

解 图 5.25 系统的运动微分方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & -2c \\ -2c & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

系统有黏性阻尼并比例为阻尼, 有 $\alpha = c/k$ 和 $\beta = 0$, 无阻尼的固有频率可通过如下来确定:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) &= 0, \\ \begin{bmatrix} 3k - m\omega^2 & -2k \\ -2k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} &= 0, \\ \omega_1 &= 0.5177 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 1.932 \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{aligned}$$

从方程(5.21), 因为 $\beta = 0$, 最高阶固有频率对应的模态有最大的阻尼比. 因此对 $\zeta_2 < 1$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha \omega_1 &< 1, \\ \frac{1}{2} \frac{c}{k} \left(1.932 \sqrt{\frac{k}{m}} \right) &< 1, \\ c &< 1.035 \sqrt{mk} = 1.035 \sqrt{\left(1.3 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) (36 \text{ kg})} = 2.24 \times 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}. \end{aligned}$$

5.45 求图 5.26 中系统的自由振动响应的一般式.

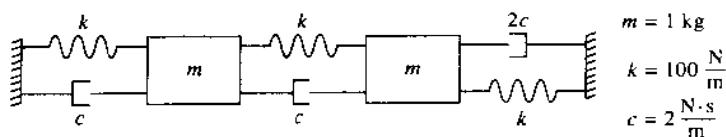


图 5.26

解 图 5.26 中系统的运动微分方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 3c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

方程(5.23)对应的 $2n \times 2n$ 的矩阵可写成如下的两个矩阵:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ m & 0 & 2c & -c \\ 0 & m & -c & 3c \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} -m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & 2k \end{bmatrix}.$$

下面矩阵对应的特征值 γ 可得到:

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 200 & -100 \\ -2 & 6 & -100 & 200 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

它从如下的方程得到:

$$\begin{bmatrix} 4 - \gamma & 2 & 200 & -100 \\ -2 & 6 - \gamma & -100 & 200 \\ -1 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} = 0.$$

由第三行的行展开可得行列式, 两个 3×3 的行列式的特征方程. 最后的方程为

$$\gamma^4 - 10\gamma^3 + 420\gamma^2 - 1600\gamma + 30\,000 = 0.$$

它的根为

$$\gamma = 1.502 \pm 9.912i, \quad 3.497 \pm 16.918i.$$

如果 $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3, X_4]^T$ 是 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 的特征值 $\gamma = \gamma_r \pm i\gamma_i$ 的对应特征矢量, 则 $\mathbf{X} = [X_3, X_4]^T$ 是模态矢量, 它有如下的形式 $\mathbf{X}_r \pm i\mathbf{X}_i$, 对应 γ 的一个一般解为

$$e^{\gamma t} [C_1(\mathbf{X}_r - \mathbf{X}_i) \cos \gamma_r t + C_2(\mathbf{X}_r + \mathbf{X}_i) \sin \gamma_r t]$$

在做了必要的计算后, 所得的解为

$$\begin{aligned} x = e^{-502t} & \left\{ C_1 \begin{bmatrix} 0.940 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 9.912t + C_2 \begin{bmatrix} 1.172 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 9.912t \right\} \\ & + e^{3.497i t} \left\{ C_3 \begin{bmatrix} 1.071 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 16.918t + C_4 \begin{bmatrix} 0.704 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 16.918t \right\}. \end{aligned}$$

补充习题

- 5.46 用隔离体图解法推导图 5.27 中的系统的运动微分方程, 令 x_1, x_2 和 x_3 作为广义坐标.

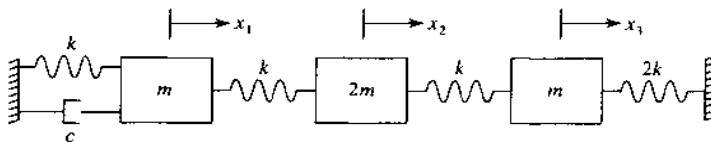


图 5.27

答:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 &= 0, \\ 2m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 &= 0, \\ m\ddot{x}_3 - kx_2 + 3kx_3 &= 0. \end{aligned}$$

- 5.47 用隔离体图解法推导图 5.28 中的系统的运动微分方程, 令 θ_1 和 θ_2 作为广义坐标.

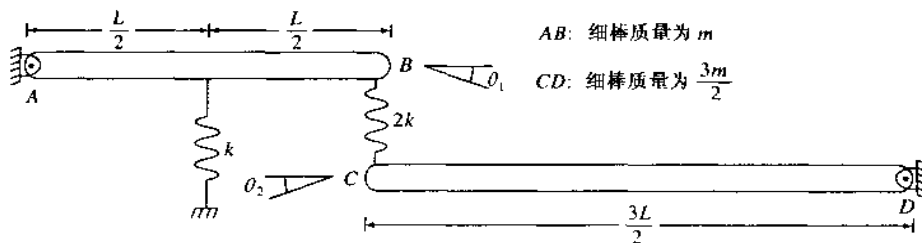


图 5.28

答:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta}_1 - \frac{9}{4} kL^2 \theta_1 - 3kL^2 \theta_2 &= 0, \\ \frac{9}{8} mL^2 \ddot{\theta}_2 - 3kL^2 \theta_1 - \frac{9}{2} kL^2 \theta_2 &= 0. \end{aligned}$$

- 5.48 用隔离体图解法推导图 5.29 中的系统的运动微分方程, 令 θ, x_1 和 x_2 作为广义坐标.

答:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta} + \frac{5}{4} kL^2 \theta - \frac{1}{2} kLx_1 - \frac{1}{2} F_1(t)L, \\ 2m\ddot{x}_1 - \frac{1}{2} kL\theta + 3kx_1 - 2kx_2 &= 0, \\ m\ddot{x}_2 - 2kx_1 + 2kx_2 &= F_2(t). \end{aligned}$$

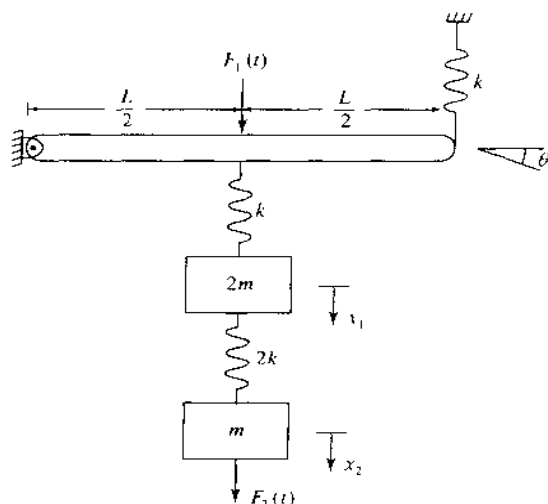


图 5.29

5.49 用拉格朗日方程推导图 5.27 中系统运动的微分方程, 令 x_1 , x_2 和 x_3 作为广义坐标.

答:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.50 用拉格朗日方程推导图 5.28 中系统运动的微分方程, 令 θ_1 和 θ_2 作为广义坐标. 假定 θ 很小, 将微分方程写成矩阵形式.

答:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} mL^2 & 0 \\ 0 & \frac{9}{8} mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{9}{4} kL^2 & 3kL^2 \\ -3kL^2 & \frac{9}{2} kL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.51 用拉格朗日方程推导图 5.29 中系统运动的微分方程, 令 θ , x_1 和 x_2 作为广义坐标.

答:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} mL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{4} kL^2 & -\frac{1}{2} kL & 0 \\ -\frac{1}{2} kL & 3k & -2k \\ 0 & -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} F_1(t)L \\ 0 \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

5.52 用拉格朗日方程推导图 5.30 中系统运动的微分方程, 令 θ_1 和 θ_2 作为广义坐标. 假定 θ_1 和 θ_2 很小.

答:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} mL^2 & 0 \\ 0 & \frac{9}{8} mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ka^2 + \frac{1}{2} mgl & ka^2 \\ -ka^2 & k(a^2 + \frac{9}{4} L^2) + \frac{3}{4} mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.53 用拉格朗日方程推导图 5.31 中系统运动的微分方程, 令 x 和 θ 作为广义坐标. 假定 θ 很小.

答:

$$\begin{bmatrix} 3m & \frac{1}{2} mL \\ \frac{1}{2} mL & \frac{1}{4} mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} kL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

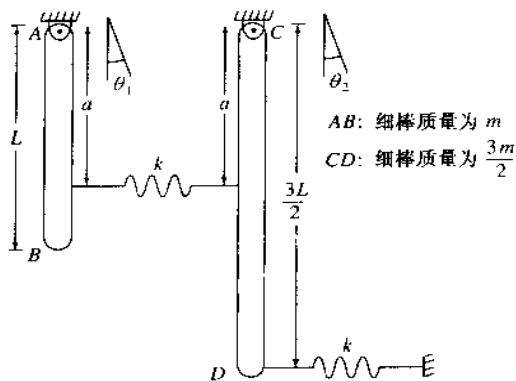


图 5.30

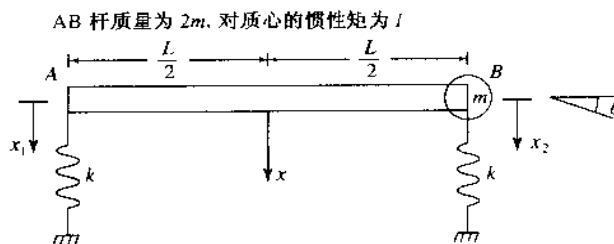


图 5.31

- 5.54 用拉格朗日方程推导图 5.31 中系统运动的微分方程, 令 x_1 和 x_2 作为广义坐标.
答:

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{2} + \frac{I}{L^2} & \frac{m}{2} - \frac{I}{L^2} \\ \frac{m}{2} - \frac{I}{L^2} & \frac{3m}{2} + \frac{I}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- 5.55 用拉格朗日方程推导图 5.32 中系统运动的微分方程, 令 x_1 , x_2 和 θ 作为广义坐标.
答:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9}mL^2 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{10}{9}kL^2 & \frac{1}{3}kL & \frac{2}{3}kL \\ -\frac{1}{3}kL & k & 0 \\ -\frac{2}{3}kL & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F(t) \end{bmatrix}.$$

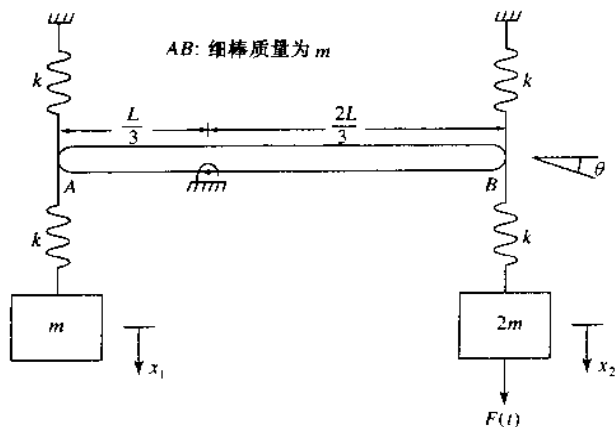


图 5.32

- 5.56 用拉格朗日方程推导图 5.33 中系统运动的微分方程, 令 x_1 和 x_2 作为广义坐标. 假定圆盘只滚动不滑动.

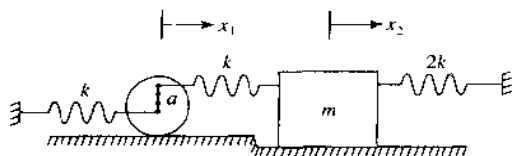


图 5.33

答:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k(2 + 2\frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2}) & -k(1 - \frac{a}{r}) \\ k(1 + \frac{a}{r}) & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- 5.57 用拉格朗日方程推导图 5.34 中系统运动的微分方程, 令 x_1 , x_2 和 θ 作为广义坐标.

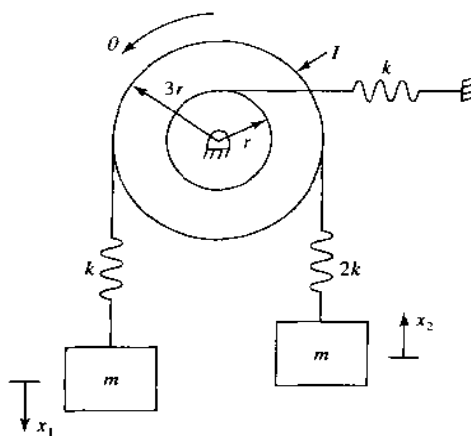


图 5.34

答:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -3kr \\ 0 & 2k & -6kr \\ -3kr & -6kr & 28kr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- 5.58 推导图 5.35 中系统运动的微分方程, 令 θ_1 和 θ_2 作为广义坐标.

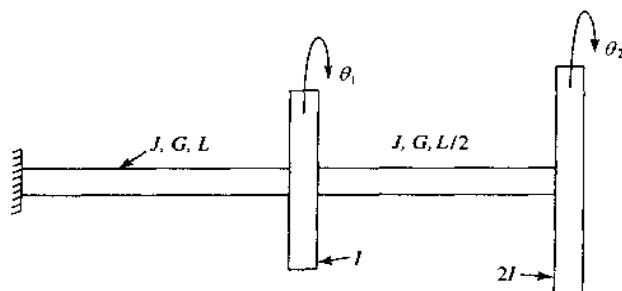


图 5.35

答:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \frac{JG}{L} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.59 推导图 5.36 中系统运动的微分方程, 令 θ_1, θ_2 和 r 作为广义坐标.

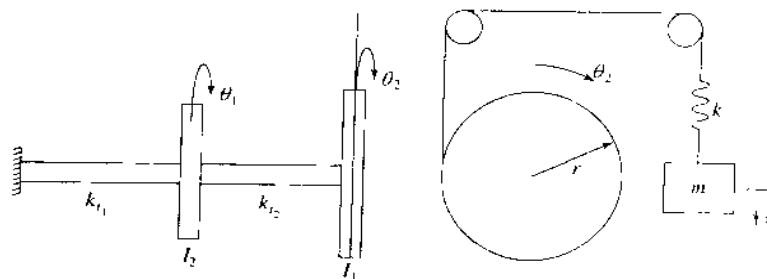


图 5.36

答:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} + k_{12} & -k_{11} & 0 \\ -k_{11} & k_{12} + kr^2 & -kr \\ 0 & kr & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.60 推导汽车的悬置系统的运动微分方程, 采用图 5.37 中的四自由度模型. 令 x_1, x_2, x_3 和 x_4 作为广义坐标.

答:

$$\begin{bmatrix} \frac{b^2 M + I}{(a+b)^2} & \frac{abM - I}{(a+b)^2} & 0 & 0 \\ \frac{abM + I}{(a+b)^2} & \frac{a^2 M + I}{(a+b)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 \\ -c_1 & 0 & c_1 + c_3 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_2 + c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & k_1 + k_3 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_2 + k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

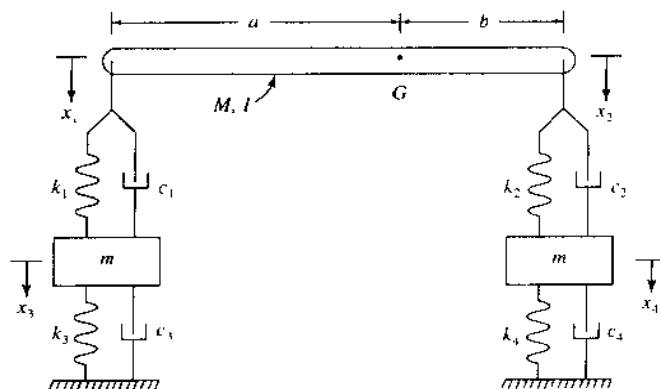


图 5.37

5.61 应用刚度影响系数推导图 5.27 中系统的刚度矩阵, 令 x_1, x_2 和 x_3 作为广义坐标.

答:

$$\begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ k & 2k & -k \\ 0 & k & 3k \end{bmatrix}.$$

- 5.62 应用刚度影响系数推导图 5.28 中系统的刚度矩阵, 令 θ_1 和 θ_2 作为广义坐标.
答:

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{4}kL^2 & -3kL^2 \\ -3kL^2 & \frac{9}{2}kL^2 \end{bmatrix}.$$

- 5.63 应用刚度影响系数推导图 5.30 中系统的刚度矩阵, 令 θ_1 和 θ_2 作为广义坐标.
答:

$$\begin{bmatrix} ka^2 + \frac{1}{2}mgL & -ka^2 \\ -ka^2 & k(a^2 + \frac{9}{4}L^2) + \frac{3}{4}mgL \end{bmatrix}.$$

- 5.64 应用刚度影响系数推导图 5.32 中系统的刚度矩阵, 令 x_1, x_2 和 θ 作为广义坐标.
答:

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{9}kL^2 & \frac{1}{3}kL & -\frac{2}{3}kL \\ \frac{1}{3}kL & k & 0 \\ -\frac{2}{3}kL & 0 & k \end{bmatrix}.$$

- 5.65 应用刚度影响系数推导图 5.35 中系统的刚度矩阵, 令 x_1 和 x_2 作为广义坐标.
答:

$$\frac{JG}{L} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- 5.66 应用柔度影响系数推导图 5.27 中系统的柔度矩阵, 令 x_1, x_2 和 x_3 作为广义坐标.
答:

$$\frac{1}{7k} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- 5.67 应用柔度影响系数推导图 5.28 中系统的柔度矩阵, 令 θ_1 和 θ_2 作为广义坐标.
答:

$$\frac{1}{kL^2} \begin{bmatrix} 4 & \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} & 2 \end{bmatrix}.$$

- 5.68 两个机器等间距的放在一个长为 L 的简支梁上. 梁的弹性模量为 E , 横截面积惯性矩为 I . 求二自由度模型系统的柔度矩阵, 将机器的位移作为广义坐标.
答:

$$\frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} 0.01646 & 0.0144 \\ 0.0144 & 0.01646 \end{bmatrix}.$$

- 5.69 两端固定的梁长为 L , 弹性模量为 E , 横截面积惯性矩为 I . 求将梁简化四自由度模型的柔度矩阵.
答:

$$\frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} 1.365 & 2.016 & 1.451 & 0.5013 \\ 2.016 & 4.608 & 3.925 & 1.451 \\ 1.451 & 3.925 & 4.608 & 2.016 \\ 0.5013 & 1.451 & 2.016 & 1.365 \end{bmatrix} 10^{-3}.$$

- 5.70 求图 5.38 中的系统的柔度矩阵.

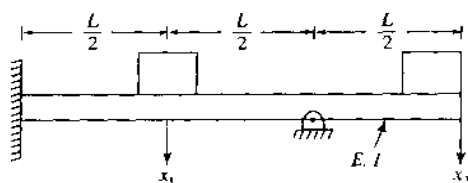


图 5.38

答:

$$\frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} 9.116 & 15.54 \\ -15.54 & 104.2 \end{bmatrix} 10^{-3}.$$

5.71 求图 5.39 中的系统的柔度矩阵.

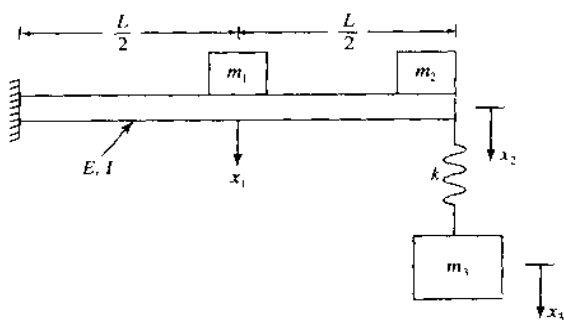


图 5.39

答:

$$\frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} 0.0417 & 0.1042 & 0.1042 \\ 0.1042 & 0.3333 & 0.3333 \\ 0.1042 & 0.3333 & \frac{EI}{kL^3} + 0.3333 \end{bmatrix}.$$

5.72 求二自由度系统的固有频率, 它所满足的微分方程为

$$\begin{bmatrix} 100 & 60 \\ 60 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30,000 & -10,000 \\ -10,000 & 20,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

答: 9.044 rad/s, 26.98 rad/s.

5.73 求题 5.72 中的系统的模态矢量.

答: $[0.04332 \quad 0.06342]^T$, $[0.111 \quad -0.08879]^T$.

5.74 证明题 5.72 中的系统的模态是正交的.

5.75 求图 5.28 中系统的固有频率.

答: $0.536 \sqrt{\frac{k}{m}}$, $3.23 \sqrt{\frac{k}{m}}$.5.76 求图 5.31 中系统的固有频率. 假定 $I = \frac{1}{12} mL^2$.答: $0.760 \sqrt{\frac{k}{m}}$, $1.521 \sqrt{\frac{k}{m}}$.

5.77 求图 5.35 中系统的固有频率.

答: $0.5176 \sqrt{\frac{IG}{IL}}$, $1.932 \sqrt{\frac{IG}{IL}}$.

5.78 求图 5.35 中的系统的模态矢量.

答: $[0.4597 \quad 0.6277]^T$, $[0.8881 \quad -0.3251]^T$.5.79 求题 5.68 中的系统的固有频率, 设两个机器的质量都为 m .

答: $5.692 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}, 22.03 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}.$

5.80 求图 5.29 中的系统的固有频率, 设 $k = 3 \times 10^5 \text{ N/m}$, $m = 15 \text{ kg}$, $L = 1.6 \text{ m}$.

答: $70.7 \text{ rad/s}, 244.9 \text{ rad/s}, 282.8 \text{ rad/s}.$

5.81 求图 5.32 中的系统的固有频率, 设 $k = 1.3 \times 10^5 \text{ N/m}$, $m = 2.6 \text{ kg}$, $L = 1.0 \text{ m}$.

答: $114.3 \text{ rad/s}, 215.3 \text{ rad/s}, 718.0 \text{ rad/s}.$

5.82 求题 5.81 中的系统的模态矢量.

答: $[0.487 \quad -0.220 \quad 0.680]^T, [-0.212 \quad 0.970 \quad 0.165]^T, [2.953 \quad 0.106 \quad -0.100]^T.$

5.83 证明题 5.82 中的系统模态矢量是正交的.

5.84 求图 5.39 中的系统的固有频率, 设 $L = 2 \text{ m}$, $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $I = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $k = 4 \times 10^5 \text{ N/m}$, $m_1 = 60 \text{ kg}$, $m_2 = 80 \text{ kg}$, $m_3 = 40 \text{ kg}$. 假定梁是无质量的.

答: $77.7 \text{ rad/s}, 147.3 \text{ rad/s}, 857.4 \text{ rad/s}.$

5.85 用三自由度模型求两端固定的梁的第一阶固有频率的近似值.

答: $22.3 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}, 59.62 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}, 97.4 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}.$

5.86 用三自由度模型求一端固定, 一端自由的梁的第一阶固有频率的近似值.

答: $3.346 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}, 18.86 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}, 46.77 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}.$

5.87 求图 5.37 中系统的固有频率. 如果 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, $a = 3 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $M = 200 \text{ kg}$,

$m = 30 \text{ kg}$, $I = 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $k_1 = k_2 = 4 \times 10^5 \text{ N/m}$, $k_3 = k_4 = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$.

答: $23.0 \text{ rad/s}, 44.3 \text{ rad/s}, 138.5 \text{ rad/s}, 188.8 \text{ rad/s}.$

5.88 用矩阵迭代法求题 5.82 中的系统的固有频率.

5.89 用矩阵迭代法求题 5.85 中的系统的固有频率.

5.90 用矩阵迭代法, 并用三自由度模型求两端固定的梁的第一阶固有频率.

答: $22.3 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}.$

5.91 求图 5.37 和题 5.87 中的系统的一般自由振动的响应, 设 $c_1 = c_2 = 2000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$,

$c_3 = c_4 = 500 \text{ N} \cdot \text{s/m}$.

答: $e^{-1.323t} (C_1 \cos 23.0t + C_2 \sin 23.0t) + e^{-4.906t} (C_3 \cos 44.0t + C_4 \sin 44.0t) + e^{-47.96t} (C_5 \cos 129.9t + C_6 \sin 129.9t) + e^{-89.1t} (C_7 \cos 166.4t + C_8 \sin 166.4t).$

5.92 求图 5.40 中的系统的一般自由振动的响应.

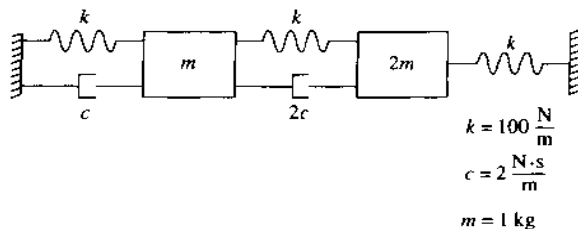


图 5.40

答: $e^{-0.268t} \left\{ C_1 \begin{bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 7.96t + C_2 \begin{bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 7.96t \right\} + e^{-0.373t} \left\{ C_3 \begin{bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 14.92t + C_4 \begin{bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 14.92t \right\}.$

5.93 如果模态矢量 \mathbf{X} 是根据方程(5.16)标准化的, 证明方程(5.17)是标准化形式.

5.94 设 \mathbf{X}_i 是 n 自由度系统的固有频率 ω_i 对应的模态矢量. 那么

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_i.$$

注意到, 如果 \mathbf{M} 是对称矩阵, 那么对任两个向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{v}

$$\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{u}$$

应用上面所给的条件, 推导方程(5.14)的正交关系.

第六章 多自由度系统的受迫振动

§ 6.1 一般系统

受外激作用的 n 自由度黏性阻尼线性系统的运动微分方程的矩阵形式是

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t). \quad (6.1)$$

用能量法求解微分方程, 则 \mathbf{M} , \mathbf{C} 和 \mathbf{K} 是对称的.

§ 6.2 简谐激励

如果

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{R}\sin\omega t + \mathbf{S}\cos\omega t, \quad (6.2)$$

则方程(6.1)的稳态解是

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}\sin\omega t + \mathbf{V}\cos\omega t, \quad (6.3)$$

其中 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 可以解得

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{U} - \omega\mathbf{C}\mathbf{V} = \mathbf{R} \quad (6.4)$$

和

$$\omega\mathbf{C}\mathbf{U} + (-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{V} = \mathbf{S}. \quad (6.5)$$

如果 $x_i(t) = X_i\sin(\omega t + \phi_i)$, 则

$$X_i = \sqrt{U_i^2 + V_i^2}. \quad (6.6)$$

§ 6.3 拉普拉斯变换解

令 $\bar{\mathbf{x}}(s)$ 是一般坐标的拉普拉斯变换矢量, $\bar{\mathbf{F}}(s)$ 是 $\mathbf{F}(t)$ 的拉普拉斯变换. 如果 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ 和 $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$, 则对方程(6)取拉氏变换, 并且解 $\bar{\mathbf{X}}(s)$ 满足

$$\mathbf{Z}(s)\bar{\mathbf{x}}(s) = \bar{\mathbf{F}}(s), \quad (6.7)$$

其中阻抗矩阵 $\mathbf{Z}(s)$ 定义为

$$\mathbf{Z}(s) = s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K}. \quad (6.8)$$

由方程(6.7)可解出 $\bar{\mathbf{X}}(s)$, 并由逆变换可得 $\mathbf{X}(t)$.

§ 6.4 比例阻尼系统的模态分析

令 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 是 n 自由度无阻尼系统的固有频率, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ 是与其对应的模态. 模态矩阵 \mathbf{P} 的第 i 列为 \mathbf{X}_i . 由模态矩阵的正交性表明

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} = \mathbf{I}, \quad (6.9)$$

其中 \mathbf{I} 是 $n \times n$ 阶单位矩阵

$$\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} = \mathbf{\Omega} = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2\}. \quad (6.10)$$

若黏性阻尼为比例阻尼, 则有

$$\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} = \mathbf{Z} = \text{diag}\{2\xi_1\omega_1, 2\xi_2\omega_2, \dots, 2\xi_n\omega_n\}. \quad (6.11)$$

用主坐标 \mathbf{p} 进行线性变换

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} \quad (6.12)$$

或

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{p}. \quad (6.13)$$

当 \mathbf{C} 具有方程(5.19)的形式, 主坐标为相应的变量, 则方程(6.1)可写成

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{Z}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{\Omega}\mathbf{p} = \mathbf{G}(t), \quad (6.14)$$

其中

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{P}^T \mathbf{F}, \quad (6.15)$$

则方程(6.14)所代表的微分方程被解耦, 并且形式为

$$\ddot{p}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{p}_i + \omega_i^2 p_i = G_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.16)$$

用主坐标变换, 使微分方程解耦的方法, 即为模态分析法. 卷积积分可用于求解每个主坐标, 即

$$p_i(t) = \frac{1}{\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}} \int_0^t e^{-\zeta_i \omega_i (t - \tau)} \sin \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} (t - \tau) G_i(\tau) d\tau. \quad (6.17)$$

§ 6.5 一般阻尼系统的模态分析法

在 n 自由度系统上, 作用黏性阻尼, 但阻尼矩阵不具有方程(5.19)的形式, 则模态分析法将有更复杂的形式. 利用方程(5.23)和(5.24), 重写方程(6.1)为

$$\tilde{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (6.18)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

是 $2 \times n$ 阶列向量. 定义 \mathbf{p} 是 $2n \times 2n$ 的矩阵, 其中第 i 列是 $\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}$ 正交特征向量 Φ_i , 即

$$\Phi_i^T \tilde{\mathbf{M}} \Phi_i = 1. \quad (6.20)$$

若使方程(6.18)解耦, 则主坐标为

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{y}. \quad (6.21)$$

用相关的变量, 则解耦的微分方程是

$$\ddot{\tilde{p}}_i - \gamma_i \dot{\tilde{p}}_i = \tilde{g}_i, \quad (6.22)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{F}}. \quad (6.23)$$

方程(6.22)的解是

$$\tilde{p}_i = \int_0^t \tilde{g}_i(\tau) e^{-\gamma_i(t-\tau)} d\tau. \quad (6.24)$$

例 题

6.1 求图 6.1 所示系统的稳态响应.

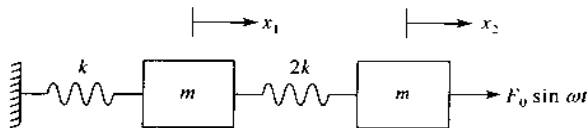


图 6.1

解 建立图 6.1 所示系统的运动微分方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \end{bmatrix} \sin \omega t.$$

由于系统无阻尼, 则 $\mathbf{S} = \mathbf{0}$, $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. 方程(6.4)简化为

$$\begin{bmatrix} 3k - m\omega^2 & -2k \\ -2k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \end{bmatrix}.$$

同时解出

$$U_1 = \frac{2kF_0}{(2k - m\omega^2)(3k - m\omega^2) - 4k^2}, \quad U_2 = \frac{(3k - m\omega^2)F_0}{(2k - m\omega^2)(3k - m\omega^2) - 4k^2}.$$

6.2 求图 6.2 所示系统的各个物块的稳态振幅。

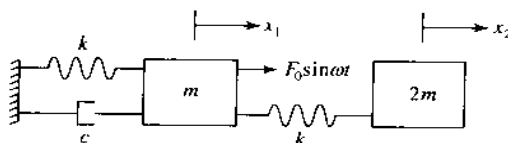


图 6.2

解 建立图 6.2 所示系统的运动微分方程

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \end{bmatrix} \sin \omega t$$

方程(6.4)和(6.5)成为

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - 2m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \omega c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & k \\ -k & k - 2m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

同时解出

$$U_1 = \frac{(k - 2m\omega^2)(k^2 - 5km\omega^2 + 2m^2\omega^4)F_0}{D}, \quad U_2 = \frac{k(k^2 - 5km\omega^2 + 2m^2\omega^4)F_0}{D},$$

$$V_1 = -\frac{\omega c(k - 2m\omega^2)^2 F_0}{D}, \quad V_2 = -\frac{k\omega c(k - 2m\omega^2)F_0}{D},$$

其中

$$D = k^4 + (k^2 c^2 - 10k^3 m)\omega^2 + (29k^2 m^2 - 4c^2 km)\omega^4 + (4c^2 m^2 + 20km^3)\omega^6 + 4m^4\omega^8.$$

物块的稳态振幅是

$$X_1 = \sqrt{U_1^2 + V_1^2} = \frac{(k - 2m\omega^2)F_0}{\sqrt{D}},$$

$$X_2 = \sqrt{U_2^2 + V_2^2} = \frac{kF_0}{\sqrt{D}}.$$

6.3 质量为 110 kg 的机器, 带有 0.45 kg·m 的不平衡转矩, 并置放在悬臂梁的自由端. 悬臂梁为钢制材料 ($E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$), 长 1.5 m, 梁的横截面积 $1.4 \times 10^{-2} \text{ m}^2$, 面积惯性矩为 $3.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. 机器在 200 Hz 工作. 用梁的三自由度模型, 求机器的稳态振幅的近似解.

解 悬臂梁的三自由度模型的柔度矩阵, 使用第 5 章的方法用等距离点确定, 即为

$$A = 10^{-8} \begin{bmatrix} 5.95 & 14.9 & 23.8 \\ 14.9 & 47.6 & 83.3 \\ 23.8 & 83.3 & 160.7 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{N}}.$$

梁的质量是

$$m_b = \rho AL = \left(7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) (1.4 \times 10^{-2} \text{ m}^2) (1.5 \text{ m}) = 163.8 \text{ kg}.$$

梁分成三个质量块加在三个节点, 则质量矩阵是

$$\begin{bmatrix} \frac{m_b}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_b}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_b}{6} + M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 54.6 & 0 & 0 \\ 0 & 54.6 & 0 \\ 0 & 0 & 137.3 \end{bmatrix} \text{ kg}.$$

由不平衡转矩引起的简谐激励的大小是

$$F_0 = m_0 e \omega^2 = (0.45 \text{ kg} \cdot \text{m}) \left\{ 200 \frac{\text{周}}{\text{s}} \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{周}} \right\}^2 = 7.11 \times 10^5 \text{ N}.$$

力矢量是

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.11 \times 10^5 \sin 1257t \end{bmatrix}.$$

此模型的微分方程是

$$\begin{aligned} \mathbf{AM}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} &= \mathbf{AF}, \\ 10^{-8} \begin{bmatrix} 5.95 & 14.9 & 23.8 \\ 14.9 & 47.6 & 83.3 \\ 23.8 & 83.3 & 160.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 54.6 & 0 & 0 \\ 0 & 54.6 & 0 \\ 0 & 0 & 137.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 10^{-8} \begin{bmatrix} 5.95 & 14.9 & 23.8 \\ 14.9 & 47.6 & 83.3 \\ 23.8 & 83.3 & 160.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.11 \times 10^5 \end{bmatrix} \sin 1257t, \\ 10^{-8} \begin{bmatrix} 324.9 & 813.5 & 3267.7 \\ 813.5 & 2599.0 & 11,437.1 \\ 1299.5 & 4548.2 & 22,064.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 10^{-8} \begin{bmatrix} 1.692 \times 10^7 \\ 5.992 \times 10^7 \\ 1.143 \times 10^8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

将所设的稳态解 $\mathbf{x} = [U_1 \ U_2 \ U_3]^T \sin 1257t$ 代入上式, 得代数方程如下:

$$\begin{bmatrix} -4.13 & -12.85 & 51.63 \\ -12.85 & -40.06 & -180.7 \\ -20.53 & -71.86 & 347.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.169 \\ 0.592 \\ 1.143 \end{bmatrix},$$

得到解是

$$U_1 = 1.32 \times 10^{-3}, \quad U_2 = -4.30 \times 10^{-4}, \quad U_3 = -3.28 \times 10^{-3}.$$

则机器的稳态振幅是 3.28 mm.

- 6.4 辅助系统是由质量 m_2 的物块, 与一连接主系统的刚度为 k_2 的弹簧组成, 如图 6.3 所示. 如果参数 k_2 和 m_2 选择的合适, 则此辅助系统可用于减少振动. 证明, 如

$$\sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \omega,$$

则主系统的稳态振幅为零.

解 建立系统的运动微分方程是

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

由方程(6.4)得到

$$\begin{bmatrix} \omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

U_1 的解是

$$U_1 = \frac{F_0(k_2 - m_2\omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2}.$$

显然, 如果 $\frac{k_2}{m_2} = \omega^2$, 则 $U_1 = 0$.

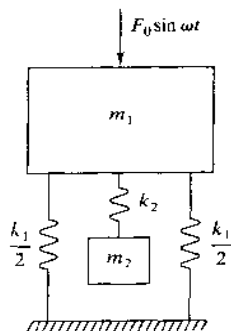


图 6.3

6.5 用拉普拉斯变换的方法求解题 6.2. 设系统平衡位置即 $t=0$ 时静止, 且有 $m=1 \text{ kg}$, $k=100 \text{ N/m}$, $c=2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 和 $\omega=10 \text{ rad/s}$.

解 题 6.2 系统的阻抗矩阵是

$$Z(s) = \begin{bmatrix} s^2 - 2s + 200 & -100 \\ -100 & 2s^2 + 100 \end{bmatrix},$$

且逆变换是

$$Z^{-1}(s) = \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} s^2 + 50 & 50 \\ 50 & \frac{1}{2}(s^2 + 2s + 200) \end{bmatrix},$$

其中

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 250s^2 + 100s + 5000 \\ = [(s + 0.136)^2 + 21.96][(s + 0.864)^2 + 226.8].$$

力矢量的拉普拉斯变换是

$$\bar{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{10F_0}{s^2 + 100} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

位移矢量的拉普拉斯变换是

$$\bar{x} = Z^{-1}F(s) = \frac{F_0}{(s^2 + 100)D(s)} \begin{bmatrix} 10(s^2 + 50) \\ 500 \end{bmatrix}$$

得到拉普拉斯坐标的解是

$$\bar{x}_1(s) = F_0 \left[\frac{-4.95 \times 10^{-4}s + 4.95 \times 10^{-2}}{s^2 + 100} + \frac{-2.33 \times 10^{-4}s + 1.74 \times 10^{-2}}{(s + 0.136)^2 + 21.96} \right. \\ \left. + \frac{7.28 \times 10^{-4}s - 6.57 \times 10^{-2}}{(s + 0.864)^2 + 226.8} \right], \\ \bar{x}_2(s) = F_0 \left[\frac{4.95 \times 10^{-4}s - 4.95 \times 10^{-2}}{s^2 + 100} - \frac{1.11 \times 10^{-4}s - 3.11 \times 10^{-2}}{(s + 0.136)^2 + 21.96} \right. \\ \left. + \frac{3.83 \times 10^{-4}s + 1.77 \times 10^{-2}}{(s + 0.864)^2 + 226.8} \right].$$

由逆变换得到

$$x_1(t) = F_0 [-4.95 \times 10^{-4} \cos 10t + 4.95 \times 10^{-3} \sin 10t \\ + e^{-0.136t} (-2.33 \times 10^{-4} \cos 4.69t + 3.72 \times 10^{-3} \sin 4.69t) \\ + e^{-0.864t} (7.28 \times 10^{-4} \cos 15.07t - 4.36 \times 10^{-3} \sin 15.07t)], \\ x_2(t) = F_0 [4.95 \times 10^{-4} \cos 10t - 4.95 \times 10^{-3} \sin 10t \\ + e^{-0.136t} (-1.11 \times 10^{-4} \cos 4.69t + 6.63 \times 10^{-3} \sin 4.69t) \\ + e^{-0.864t} (-3.83 \times 10^{-4} \cos 15.07t + 1.18 \times 10^{-3} \sin 15.07t)].$$

6.6 用拉普拉斯变换的方法, 求图 6.4 所示系统的 $x_1(t)$. 设系统在平衡位置 $t=0$ 时静止.

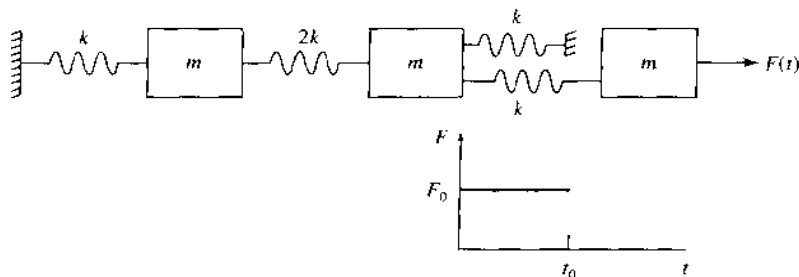


图 6.4

解 建立图 6.4 系统的运动微分方程是

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & 2k & 0 \\ -2k & 4k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0[u(t) - u(t - t_0)] \end{bmatrix}.$$

系统的阻抗矩阵是

$$\mathbf{Z}(s) = \begin{bmatrix} ms^2 + 3k & -2k & 0 \\ -2k & ms^2 + 4k & -k \\ 0 & -k & ms^2 + k \end{bmatrix},$$

并且逆变换是

$$\mathbf{Z}^{-1}(s) = \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} m^2s^4 + 5ms^2k + 3k^2 & 2k(ms^2 + k) & 2k^2 \\ 2k(ms^2 + k) & (ms^2 + 3k)(ms^2 + k) & k(ms^2 + k) \\ 2k^2 & k(ms^2 + 3k) & m^2s^4 + 7ms^2 + 8k^2 \end{bmatrix},$$

其中

$$D(s) = m^3s^6 + 8m^2s^4k + 14ms^2k^2 - 5k^3.$$

力矢量的拉普拉斯变换是

$$\bar{\mathbf{F}}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F_0}{s}(1 - e^{-st_0}) \end{bmatrix},$$

则有

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{Z}^{-1}\bar{\mathbf{F}}(s) = \frac{1}{sD(s)} \begin{bmatrix} 2k^2 \\ k(ms^2 + 3k) \\ m^2s^4 + 7ms^2 + 8k^2 \end{bmatrix} F_0(1 - e^{-st_0}).$$

分解得到

$$\bar{x}_1(s) = 2 \frac{k^2}{m^3} \left[\frac{0.2}{s} - \frac{0.297s}{s^2 + 0.4818 \frac{k}{m}} + \frac{0.106s}{s^2 + 1.820 \frac{k}{m}} + \frac{0.00874s}{s^2 + 5.698 \frac{k}{m}} \right] F_0(1 - e^{-st_0}).$$

使用第二变换理论,求逆变换得到

$$\begin{aligned} x_1(t) = 2F_0 \frac{k^2}{m^3} & \left\{ \left[0.2 - 0.297 \cos 0.694 \sqrt{\frac{k}{m}} t + 0.106 \cos 1.395 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right. \right. \\ & \left. \left. + 0.00874 \cos 2.387 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right] u(t) - \left[0.2 - 0.297 \cos 0.694 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right. \right. \\ & \left. \left. + 0.106 \cos 1.395 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) + 0.00874 \cos 2.387 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right] u(t - t_0) \right\}. \end{aligned}$$

6.7 导出方程(6.14). 使用主坐标为对应的变量重写方程(6.1), 并将方程(6.13)代入方程(6.1), 得到

$$\mathbf{M}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\mathbf{P}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{p} = \mathbf{F}.$$

解 将上式前乘以 \mathbf{P}^T , 得

$$\mathbf{P}^T\mathbf{M}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{P}^T\mathbf{C}\mathbf{P}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{p} = \mathbf{P}^T\mathbf{F}.$$

由方程(6.9), (6.10), (6.11)和(6.15), 上式变成

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{Z}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{\Omega}\mathbf{p} = \mathbf{G}.$$

6.8 求图 5.3 系统的广义坐标与主坐标的关系. 设题 5.4 中, 有 $I = \frac{mL^2}{12}$.

解 系统的固有频率由下式求出, 即

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & \frac{1}{4}kL \\ \frac{1}{4}kL & \frac{5}{16}kL^2 - \frac{1}{12}mL^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\omega_1 = 1.28 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 2.03 \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

再确定模态, 由

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & \frac{1}{4}kL \\ \frac{1}{4}kL & \frac{5}{16}kL^2 - \frac{1}{12}mL^2\omega^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

并解出

$$\Theta = \frac{-4(2k - m\omega^2)}{kL},$$

得到

$$\mathbf{X}_1 = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.42 \\ L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 8.42 \\ L \end{bmatrix}.$$

由模态的正交性, 得

$$\mathbf{X}_1^T \mathbf{M} \mathbf{X}_1 = 1 = C_1^2 \begin{bmatrix} 1 & (-1.42) \\ L & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.42 \\ L \end{bmatrix} \rightarrow C_1 = \frac{0.925}{\sqrt{m}},$$

$$\mathbf{X}_2^T \mathbf{M} \mathbf{X}_2 = 1 = C_2^2 \begin{bmatrix} 1 & 8.42 \\ L & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8.42 \\ L \end{bmatrix} \rightarrow C_2 = \frac{0.380}{\sqrt{m}}.$$

因此得标准模态矩阵及其逆矩阵为

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.925 & 0.380 \\ -1.31 & 3.20 \\ L & L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0.925 & -0.110L \\ 0.378 & 0.268L \end{bmatrix}.$$

最后得到主坐标与广义坐标的关系为

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x} = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0.925 & 0.110L \\ 0.378 & 0.268L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}.$$

6.9 使用模态分析法, 求图 5.3 系统的响应.

解 设题 5.4 和题 6.8 中

$$M(t) = M_0[1 - u(t - t_0)].$$

矢量 $\mathbf{G}(t)$ 可确定, 即

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}^T \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.925 & \frac{1.31}{L} \\ 0.380 & -\frac{3.20}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ M(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} -\frac{1.31}{L}M(t) \\ \frac{3.20}{L}M(t) \end{bmatrix}.$$

由主坐标表示的微分方程为

$$\ddot{p}_1 + 1.644 \frac{k}{m} p_1 = \frac{-1.31}{\sqrt{m}L} M_0[1 - u(t - t_0)],$$

$$\ddot{p}_2 + 4.104 \frac{k}{m} p_2 = \frac{3.20}{\sqrt{m}L} M_0[1 - u(t - t_0)],$$

应由卷积积分求出主坐标是

$$\begin{aligned} p_1(t) &= -\frac{1}{1.28 \sqrt{\frac{k}{m}}} \int_0^t \frac{-1.31}{\sqrt{m}L} M_0[1 - u(\tau - t_0)] \sin\left(1.28 \sqrt{\frac{k}{m}}(t - \tau)\right) d\tau \\ &= \frac{0.797 \sqrt{m}}{kL} M_0 \left\{ \left[1 - \cos\left(1.282 \sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right] u(t) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[1 - \cos \left(1.282 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right) \right] u(t - t_0) \Bigg], \\
p_2(t) &= \frac{1}{2.03 \sqrt{\frac{k}{m}}} \int_0^t \frac{3.20}{\sqrt{mL}} M_0 [1 - u(\tau - t_0)] \sin \left[2.03 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - \tau) \right] d\tau \\
&= \frac{0.777 \sqrt{m}}{kL} M_0 \left[\left[1 - \cos \left(2.03 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \left[1 - \cos \left(2.03 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right) \right] \right] \Bigg].
\end{aligned}$$

计算得到广义坐标为

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{m}} [0.925 p_1(t) + 0.380 p_2(t)] \\
&= \frac{M_0}{kL} \left\{ \left[0.442 - 0.737 \cos \left(1.28 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + 0.295 \cos \left(2.03 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] u(t) \right. \\
&\quad \left. - \left\{ 0.442 - 0.737 \cos \left[1.28 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 0.295 \cos \left[2.03 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right] \right\} u(t - t_0) \right\}, \\
\theta &= \frac{1}{\sqrt{m}} L [-1.31 p_1(t) + 3.20 p_2(t)] \\
&= \frac{M_0}{kL^2} \left\{ \left[3.53 - 1.04 \cos \left(1.28 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - 2.47 \cos \left(2.03 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] u(t) \right. \\
&\quad \left. - \left[3.53 - 1.04 \cos \left[1.28 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2.47 \cos \left[2.03 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right] \right] u(t - t_0) \right\}.
\end{aligned}$$

6.10 图 5.1 系统的右边物块, 在 $t=0$ 时, 作用大小为 F_0 的常力, 使用模态分析法, 求系统的运动方程。

解 由题 5.30、5.31 和 5.38, 得系统的固有频率和标准模态矩阵为

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 0.359 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = 1.97 \sqrt{\frac{k}{m}}, \\
\mathbf{P} &= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.282 & 0.447 & -0.849 \\ 0.404 & 0.447 & 0.370 \\ 0.545 & 0.447 & 0.055 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

力矢量是

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0 \end{bmatrix}.$$

由计算得

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}^T \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.282 & 0.404 & 0.545 \\ 0.447 & 0.447 & 0.447 \\ -0.849 & 0.370 & -0.055 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.545 F_0 \\ -0.447 F_0 \\ -0.055 F_0 \end{bmatrix}.$$

主坐标表示的微分方程变为

$$\ddot{p}_1 + 0.129 \frac{k}{m} p_1 = 0.545 \frac{F_0}{\sqrt{m}},$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_2 &= \frac{k}{m} p_2 = -0.447 \frac{F_0}{\sqrt{m}}, \\ \ddot{p}_3 &+ 3.88 \frac{k}{m} p_3 = -0.055 \frac{F_0}{\sqrt{m}}.\end{aligned}$$

主坐标的解是

$$\begin{aligned}p_1(t) &= 4.23 \frac{\sqrt{m}}{k} F_0 \left(1 - \cos 0.359 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ p_2(t) &= -0.447 \frac{\sqrt{m}}{k} F_0 \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ p_3(t) &= -0.0142 \frac{\sqrt{m}}{k} F_0 \left(1 - \cos 1.97 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right).\end{aligned}$$

计算出广义坐标解的形式为

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{m}} [0.282 p_1(t) + 0.447 p_2(t) + 0.849 p_3(t)] \\ &= \frac{F_0}{k} \left(1.005 - 1.193 \cos 0.359 \sqrt{\frac{k}{m}} t + 0.200 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right. \\ &\quad \left. - 0.0121 \cos 1.97 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ x_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{m}} [0.404 p_1(t) + 0.447 p_2(t) + 0.370 p_3(t)] \\ &= \frac{F_0}{k} \left(1.504 - 1.708 \cos 0.359 \sqrt{\frac{k}{m}} t + 0.200 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right. \\ &\quad \left. + 0.00525 \cos 1.97 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ x_3(t) &= \frac{1}{\sqrt{m}} [0.545 p_1(t) - 0.447 p_2(t) - 0.055 p_3(t)] \\ &= \frac{F_0}{k} \left(2.506 - 2.305 \cos 0.359 \sqrt{\frac{k}{m}} t + 0.200 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right. \\ &\quad \left. + 0.000781 \cos 1.97 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right).\end{aligned}$$

6.11 用模态分析法, 重解题 6.3.

解 由题 6.3 得柔度矩阵 A 和质量矩阵 M , 固有频率由 AM 的特征值的平方根得到, 标准模态矩阵的列就是对应的正交特征向量, 由计算得到

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 63.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_2 = 572.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_3 = 1660 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\ P &= \begin{bmatrix} 0.0123 & 0.0768 & 0.111 \\ 0.0423 & 0.1034 & -0.0764 \\ 0.0807 & -0.0262 & 0.00923 \end{bmatrix}, \\ G = P^T F &= \begin{bmatrix} 0.0123 & 0.0423 & 0.0807 \\ 0.0768 & 0.1034 & -0.0262 \\ 0.111 & -0.0764 & 0.00923 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.11 \times 10^5 \end{bmatrix} \sin 1257t \\ &= \begin{bmatrix} 5.74 \times 10^4 \\ -1.86 \times 10^4 \\ 6.57 \times 10^3 \end{bmatrix} \sin 1257t.\end{aligned}$$

因此用主坐标表示的微分方程是

$$\begin{aligned}\ddot{p}_1 + 4.06 \times 10^3 p_1 &= 5.74 \times 10^4 \sin 1257t, \\ \ddot{p}_2 + 3.28 \times 10^5 p_2 &= -1.86 \times 10^4 \sin 1257t, \\ \ddot{p}_3 + 2.76 \times 10^6 p_3 &= 6.57 \times 10^3 \sin 1257t.\end{aligned}$$

稳态响应是

$$p_1(t) = \frac{5.75 \times 10^4}{4.06 \times 10^3 - (1257)^2} \sin 1257t = -3.65 \times 10^{-2} \sin 1257t,$$

$$p_2(t) = \frac{-1.86 \times 10^4}{3.58 \times 10^5 - (1257)^2} \sin 1257t = 1.52 \times 10^{-2} \sin 1257t,$$

$$p_3(t) = \frac{6.75 \times 10^3}{2.76 \times 10^6 - (1257)^2} \sin 1257t = 5.57 \times 10^{-4} \sin 1257t.$$

确定 x_3 的稳态响应为

$$x_3 = 0.0807 p_1 + 0.0262 p_2 + 0.00923 p_3 = -3.28 \times 10^{-3} \sin 1257t.$$

6.12 实验测得题 6.3 和题 6.11 的第一、二阶模态的模态阻尼比是 0.04 和 0.15. 重解题 6.11, 并设其为比例阻尼.

解 如果阻尼为比例的, 则阻尼比的形式为

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \left[\alpha \omega_i + \frac{\beta}{\omega_i} \right].$$

将实验的阻尼比和由题 6.11 计算的固有频率代入, 得到

$$0.04 = \frac{1}{2} (63.7\alpha + 0.0157\beta),$$

$$0.15 = \frac{1}{2} (572.3\alpha + 0.00157\beta)$$

联立求解, 得 $\alpha = 5.15 \times 10^{-4}$ 和 $\beta = 2.91$, 则

$$\zeta_3 = \frac{1}{2} [(5.15 \times 10^{-4})(1660) + (2.91)(6.02 \times 10^{-4})] = 0.428.$$

由方程(6.16), 建立主坐标表示的微分方程是

$$\ddot{p}_1 + 5.01\dot{p}_1 + 4.06 \times 10^3 p_1 = 5.74 \times 10^4 \sin 1257t,$$

$$\ddot{p}_2 + 171.7\dot{p}_2 + 3.28 \times 10^5 p_2 = -1.86 \times 10^4 \sin 1257t,$$

$$\ddot{p}_3 + 1421\dot{p}_3 + 3.76 \times 10^6 p_3 = 6.57 \times 10^3 \sin 1257t.$$

得稳态解为

$$p_i(t) = \frac{G_i}{\omega_i^2} M(r_i, \zeta_i) \sin(1257t - \phi_i),$$

其中

$$r_i = \frac{1257}{\omega_i}, M(r_i, \zeta_i) = \frac{1}{\sqrt{(1 - r_i^2)^2 + (2\zeta_i r_i)^2}},$$

$$\phi_i = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta_i r_i}{1 - r_i^2} \right)$$

作为例子, 如

$$r_1 = \frac{1257}{63.7} = 19.73,$$

$$M(r_1, \zeta_1) = \frac{1}{\sqrt{(1 - 19.73^2)^2 + [2(0.04)(19.73)]^2}} = 2.58 \times 10^{-3},$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{2(0.04)(19.73)}{1 - (19.73)^2} \right) = 3.137.$$

最后计算得到

$$r_2 = 2.197, \quad M(2.197, 0.15) = 0.258, \quad \phi_2 = 2.97,$$

$$r_3 = 0.757, \quad M(0.757, 0.428) = 1.289, \quad \phi_3 = 0.988.$$

因此, 有

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \left(\frac{5.75 \times 10^4}{4.06 \times 10^3} \right) (2.58 \times 10^{-3}) \sin(1257t - 3.137) \\ &= 3.65 \times 10^{-2} \sin(1257t - 3.137), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(t) &= \left(\frac{-1.86 \times 10^4}{3.28 \times 10^5} \right) (0.258) \sin(1257t - 2.97) \\ &= -1.46 \times 10^{-2} \sin(1257t - 2.97), \end{aligned}$$

$$p_3(t) = \left(\frac{6.57 \times 10^3}{2.76 \times 10^6} (1.289) \sin(1257t - 0.988) \right. \\ \left. - 3.07 \times 10^{-3} \sin(1257t - 0.988) \right).$$

由模态分析得到

$$x_3(t) = 0.0807 p_1(t) - 0.0262 p_2(t) + 0.00924 p_3(t) \\ = 2.95 \times 10^{-3} \sin(1257t - 3.137) + 3.83 \times 10^{-4} \sin(1257t - 2.97) \\ + 2.84 \times 10^{-5} \sin(1257t - 0.988).$$

由三角函数恒等式可重写为

$$x_3(t) = -3.31 \times 10^{-3} \sin 1257t + 1.03 \times 10^{-4} \cos 1257t,$$

并且得稳态振幅为

$$X_3 = \sqrt{(-3.31 \times 10^{-3})^2 + (1.03 \times 10^{-4})^2} = 3.31 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

- 6.13** 题 5.34 中的用挂钩连接的三节车厢并在平衡的位置静止. 左车受到大小为 I 的冲量作用, 求挂车的运动规律.

解 建立系统的运动微分方程是

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I\delta(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由题 5.34 计算出的固有频率为

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{3\frac{k}{m}}.$$

将题 5.34 的模态标准化, 由此得模态矩阵为

$$P = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix},$$

因此

$$G = P^T F = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I\delta(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} \frac{I}{\sqrt{6m}} \delta(t).$$

主坐标表示的微分方程为

$$\ddot{p}_1 = \frac{I}{\sqrt{3m}} \delta(t), \\ \ddot{p}_2 + \frac{k}{m} p_2 = \frac{I}{\sqrt{2m}} \delta(t), \\ \ddot{p}_3 + 3\frac{k}{m} p_3 = -\frac{I}{\sqrt{6m}} \delta(t).$$

满足初始条件 $p_i(0) = 0$ 和 $\dot{p}_i(0) = 0$ 的主坐标的解是

$$p_1(t) = \frac{I}{\sqrt{3m}} tu(t), \\ p_2(t) = \frac{I}{\sqrt{2m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} tu(t), \\ p_3(t) = \frac{I}{\sqrt{6m}} \sin \sqrt{3\frac{k}{m}} tu(t).$$

由方程(6.13), 得到 $x_i(t)$ 的坐标为

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}} p_1 + \frac{1}{\sqrt{2m}} p_2 - \frac{1}{\sqrt{6m}} p_3 \\ = \left(\frac{I}{3m} t + \frac{I}{2m} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{I}{6m} \sin \sqrt{3\frac{k}{m}} t \right) u(t),$$

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{3m}}p_1 + \frac{2}{\sqrt{6m}}p_3 \\
 &= \left(\frac{I}{3m}t - \frac{2I}{6m}\sin\sqrt{3\frac{k}{m}}t \right) u(t), \\
 x_3(t) &= \frac{1}{\sqrt{3m}}p_1(t) - \frac{1}{\sqrt{2m}}p_2(t) - \frac{1}{\sqrt{6m}}p_3(t) \\
 &= \left(\frac{I}{3m}t - \frac{I}{2m}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{I}{6m}\sin\sqrt{3\frac{k}{m}}t \right) u(t).
 \end{aligned}$$

6.14 重解题 6.13. 设将每个挂钩模拟为刚度为 k 的弹簧和一个平行的阻尼系数 c 的阻尼器.

解 建立系统的运动微分方程是

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I\delta(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

阻尼是比例的, 且 $\alpha = c/k$ 和 $\beta = 0$, 则有

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = \frac{c}{2k} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \quad \zeta_3 = \frac{c}{2k} \sqrt{3\frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{3}c}{2\sqrt{mk}}.$$

得到主坐标表示的微分方程是

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_1 &= \frac{I}{\sqrt{3m}}\delta(t), \\
 \dot{p}_2 + \frac{c}{m}p_2 + \frac{k}{m}p_2 &= \frac{I}{\sqrt{2m}}\delta(t), \\
 \dot{p}_3 + 3\frac{c}{m}p_3 + 3\frac{k}{m}p_3 &= -\frac{I}{\sqrt{6m}}\delta(t).
 \end{aligned}$$

主坐标的解是

$$\begin{aligned}
 p_1(t) &= \frac{I}{\sqrt{3m}}tu(t), \\
 p_2(t) &= -\frac{I}{\sqrt{2m}\omega_2} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta_2^2}} e^{-(c/2m)t} \sin(\omega_2 \sqrt{1-\zeta_2^2}t) u(t), \\
 p_3(t) &= -\frac{I}{\sqrt{6m}\omega_3} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta_3^2}} e^{-(3c/2m)t} \sin(\omega_3 \sqrt{1-\zeta_3^2}t) u(t).
 \end{aligned}$$

由模态分析法得到

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{\sqrt{3m}}p_1 + \frac{1}{\sqrt{2m}}p_2 - \frac{1}{\sqrt{6m}}p_3, \\
 x_2 &= \frac{1}{\sqrt{3m}}p_1 + \frac{2}{\sqrt{6m}}p_3, \\
 x_3 &= \frac{1}{\sqrt{3m}}p_1 - \frac{1}{\sqrt{2m}}p_2 - \frac{1}{\sqrt{6m}}p_3.
 \end{aligned}$$

6.15 简化为四个自由度模型的悬浮系统如图 6.5 所示. 这是一个由于道路颠簸车辆的横向运动的模型, 前轮在 $t=0$ 作用一个大小为 I 的冲量, 在 $t=0.05$ s 作用在后轮一个大小为 I 的冲量, 求运动的响应.

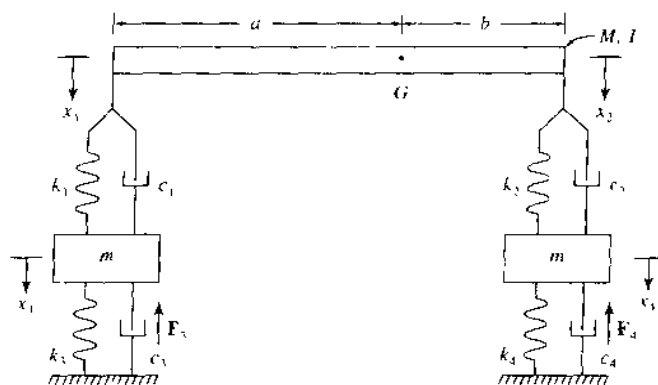
解 在瞬时系统的动能是

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}M \left(\frac{b\dot{x}_1 + a\dot{x}_2}{a+b} \right)^2 + \frac{1}{2}I \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{a+b} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_4^2.
 \end{aligned}$$

任意瞬时系统的势能是

$$V = \frac{1}{2}k_1(x_3 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_4 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_3x_3^2 + \frac{1}{2}k_4x_4^2.$$

非保守力在系统铅直运动位移上作功是



$$\begin{aligned}
 a &= 3 \text{ m} & m &= 30 \text{ kg} \\
 b &= 1 \text{ m} & M &= 200 \text{ kg} \\
 k_1 &= k_2 = 4 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} & c_1 &= c_2 = 3200 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \\
 k_3 &= k_4 = 1 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} & c_3 &= c_4 = 800 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \\
 I &= 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned}$$

图 6.5

$$\begin{aligned}
 \delta W &= -I\delta(t)\delta x_1 - I\delta(t-0.05)\delta x_4 - c_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_1)\delta(x_3 - x_1) \\
 &\quad - c_2(\dot{x}_4 - \dot{x}_2)\delta(x_4 - x_2) - c_3\dot{x}_3\delta x_3 - c_4\dot{x}_4\delta x_4.
 \end{aligned}$$

由拉格朗日方程得到

$$\begin{bmatrix} \frac{Mh^2 + I}{(a+b)^2} & \frac{Mab - I}{(a+b)^2} & 0 & 0 \\ \frac{Mab - I}{(a+b)^2} & \frac{Ma^2 + I}{(a+b)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_2 \\ -c_1 & 0 & c_1 + c_3 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & c_2 + c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_2 \\ k_1 & 0 & k_1 + k_3 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_2 + k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I\delta(t) \\ -I\delta(t-0.05) \end{bmatrix},$$

代入已知量, 得质量、阻尼、刚度矩阵为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 25 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & 125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}, & \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 3200 & 0 & 3200 & 0 \\ 0 & 3200 & 0 & -3200 \\ -3200 & 0 & 4000 & 0 \\ 0 & -3200 & 0 & 4000 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 4 \times 10^5 & 0 & -4 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 4 \times 10^5 & 0 & -4 \times 10^5 \\ 4 \times 10^5 & 0 & 5 \times 10^5 & 0 \\ 0 & -4 \times 10^5 & 0 & 5 \times 10^5 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

刚度矩阵与刚度矩阵成比例, 即 $a = 0.008 \text{ s}$. 因此, 模态矩阵可使无阻尼系统的微分方程解耦. 固有频率是 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 的特征值的平方根, 并且模态矩阵的列是标准化的模态. 由第五章的方法, 可得到

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= 23.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \omega_2 &= 44.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\
 \omega_3 &= 138.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \omega_4 &= 188.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.
 \end{aligned}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.0187 & 0.147 & 0.0074 & 0.167 \\ 0.0791 & -0.0347 & -0.0313 & -0.0395 \\ 0.0154 & 0.133 & 0.0390 & -0.117 \\ -0.0654 & -0.0315 & 0.165 & 0.0277 \end{bmatrix}$$

因此

$$G = P^T K^{-1} P = \begin{bmatrix} 0.0154\delta(t) + 0.0654\delta(t - 0.05) \\ 0.133\delta(t) - 0.0315\delta(t - 0.05) \\ 0.0390\delta(t) + 0.165\delta(t - 0.05) \\ -0.177\delta(t) + 0.0277\delta(t - 0.05) \end{bmatrix}$$

由计算得模态阻尼比为

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} a\omega_1 = 0.092, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2} a\omega_2 = 0.177,$$

$$\zeta_3 = \frac{1}{2} a\omega_3 = 0.554, \quad \zeta_4 = \frac{1}{2} a\omega_4 = 0.755.$$

建立主坐标表示的微分方程是

$$\ddot{p}_1 + 4.23\dot{p}_1 + 5.29 \times 10^2 p_1 = -0.154I\delta(t) - 0.0654I\delta(t - 0.05),$$

$$\ddot{p}_2 + 15.68\dot{p}_2 + 1.96 \times 10^3 p_2 = 0.133I\delta(t) + 0.0315I\delta(t - 0.05),$$

$$\ddot{p}_3 + 153.5\dot{p}_3 + 1.92 \times 10^4 p_3 = 0.0390I\delta(t) - 0.165I\delta(t - 0.05),$$

$$\ddot{p}_4 + 285.8\dot{p}_4 + 3.56 \times 10^4 p_4 = 0.117I\delta(t) - 0.0277I\delta(t - 0.05).$$

由方程(6.17)的卷积积分得到

$$p_1(t) = -Ie^{-2.12t} [6.73 \times 10^{-3} \sin(22.9t)u(t) + 3.18 \times 10^{-3} \sin(22.9t - 1.145)u(t - 0.05)],$$

$$p_2(t) = -Ie^{-7.84t} [3.05 \times 10^{-3} \sin(43.6t)u(t) - 1.07 \times 10^{-3} \sin(43.6t - 2.18)u(t - 0.05)],$$

$$p_3(t) = -Ie^{-76.7t} [3.38 \times 10^{-4} \sin(115.3t)u(t) + 6.62 \times 10^{-2} \sin(115.3t - 5.77)u(t - 0.05)],$$

$$p_4(t) = -Ie^{-142.5t} [9.45 \times 10^{-4} \sin(123.8t)u(t) - 2.79 \times 10^{-1} \sin(123.8t - 6.19)u(t - 0.05)].$$

计算得到广义坐标为

$$x_1(t) = 0.0187p_1(t) + 0.147p_2(t) - 0.0074p_3(t) + 0.167p_4(t),$$

$$x_2(t) = 0.0791p_1(t) - 0.0347p_2(t) - 0.0313p_3(t) - 0.0395p_4(t),$$

$$x_3(t) = 0.0154p_1(t) + 0.133p_2(t) + 0.0390p_3(t) - 0.117p_4(t),$$

$$x_4(t) = 0.00654p_1(t) - 0.0315p_2(t) + 0.165p_3(t) + 0.0277p_4(t).$$

- 6.16 求图 6.6 系统对时间的响应. 系统在 $t = 0$ 时, 静止在平衡位置, 并在左边物块上作用大小 $0.5 \text{ N}\cdot\text{s}$ 的冲量, 接着在 $t = 0.01 \text{ s}$ 时又作用 $0.5 \text{ N}\cdot\text{s}$ 的冲量. 系统自由振动的响应由题 5.45 已求出.

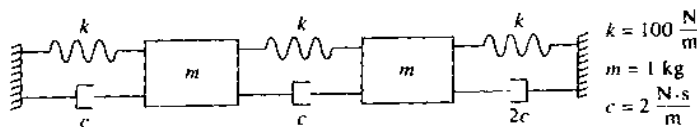


图 6.6

解 建立系统的运动微分方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5\delta(t) + 0.5\delta(t - 0.01) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

因为黏性阻尼不是比例的,因此用模态分析的一般方法, $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}$ 的特征值是

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 1.502 - 9.912i, & \gamma_2 &= 1.502 + 9.912i, \\ \gamma_3 &= 3.49 - 16.918i, & \gamma_4 &= 3.49 + 16.918i.\end{aligned}$$

设 $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}$ 的特征向量为

$$\Phi_i = [\gamma_i \quad -\gamma_i z_i \quad 1 \quad z_i]^T,$$

因此确定特征向量的问题成为

$$\begin{bmatrix} 4 - \gamma_i & -2 & 200 & -100 \\ -2 & 6 - \gamma_i & -100 & 200 \\ -1 & 0 & -\gamma_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\gamma_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma_i \\ -\gamma_i z_i \\ 1 \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由此求出

$$z_i = \frac{200 - 4\gamma_i + \gamma_i^2}{100 - 2\gamma_i},$$

并解得

$$\begin{aligned}z_1 &= 0.9898 - 0.100i, & z_2 &= 0.9898 + 0.100i, \\ z_3 &= -1.009 - 0.175i, & z_4 &= -1.009 + 0.175i.\end{aligned}$$

利用 $\Phi_i^T \tilde{\mathbf{M}} \Phi_i = 1$ 使模态标准化,模态矩阵的列就是标准的模态.计算得到

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0.886 + 1.34i & 0.886 - 1.34i & 1.29 + 1.63i & 1.29 - 1.63i \\ 1.01 + 1.23i & 1.01 - 1.23i & -1.02 - 1.88i & -1.02 + 1.88i \\ 0.119 - 0.107i & 0.119 + 0.107i & 0.0774 - 0.0925i & 0.0774 + 0.0925i \\ 0.107 - 0.118i & 0.107 + 0.118i & -0.0946 + 0.0797i & -0.0946 - 0.0797i \end{bmatrix},$$

则

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0.119 - 0.107i \\ 0.119 + 0.117i \\ 0.0774 - 0.0925i \\ 0.0774 + 0.0925i \end{bmatrix} [0.5\delta(t) + 0.5\delta(t - 0.01)].$$

应用方程(6.24)得到

$$\begin{aligned}p_1(t) &= 0.5(0.119 - 0.107i)[e^{-(1.502-9.912i)t}u(t) \\ &\quad + e^{-(1.502+9.912i)(t-0.01)}u(t-0.01)], \\ p_2(t) &= 0.5(0.119 + 0.107i)[e^{-i(1.502+9.912i)t}u(t) \\ &\quad + e^{-i(1.502-9.912i)(t-0.01)}u(t-0.01)], \\ p_3(t) &= 0.5(0.0774 - 0.0925i)[e^{(3.49-16.918i)t}u(t) \\ &\quad + e^{-(3.49+16.918i)(t-0.01)}u(t-0.01)], \\ p_4(t) &= 0.5(0.0774 + 0.0925i)[e^{-(3.49+16.918i)t}u(t) \\ &\quad + e^{-(3.49-16.918i)(t-0.01)}u(t-0.01)].\end{aligned}$$

注意到 $x_1 = y_3$ 和 $x_2 = y_4$, 因此有

$$\begin{aligned}x_1 &= (0.119 - 0.107i)p_1 + (0.119 + 0.107i)p_2 \\ &\quad + (0.0074 - 0.0925i)p_3 + (0.0774 + 0.0925i)p_4, \\ x_2 &= (0.107 - 0.118i)p_1 + (0.107 + 0.118i)p_2 \\ &\quad + (-0.0946 + 0.0797i)p_3 + (-0.0946 - 0.0797i)p_4.\end{aligned}$$

使用代数合成和欧拉恒等式得到

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{-1.502t} \{ [0.0256\cos(9.912t) - 0.0253\sin(9.912t)]u(t) \\ &\quad + (0.0260\cos(9.912t - 0.099) \\ &\quad - 0.0257\sin(9.912t - 0.099))u(t - 0.01) \} \\ &\quad + e^{3.49i} \{ 0.0145\cos(16.918t) - 0.0143\sin(16.918t) \}u(t) \\ &\quad + [0.0151\cos(16.918t - 0.169)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0.0148 \sin(16.918t - 0.169)]u(t - 0.01); \\
x_2(t) = & e^{-1.502t} \{ [0.0254 \cos(9.912t) - 0.0252 \sin(9.912t)]u(t) \\
& + (0.0257 \cos(9.912t - 0.099) \\
& + 0.0259 \sin(9.912t - 0.099))u(t - 0.01) \} \\
& + e^{-3.49t} \{ [(0.0153 \cos(16.918t) - 0.0150 \sin(16.918t)]u(t) \\
& + [0.0158 \cos(16.918t - 0.169) \\
& - 0.0155 \sin(16.918t - 0.169)]u(t - 0.01) \}.
\end{aligned}$$

补充习题

- 6.17 求图 6.7 所示系统中的 60 kg 物块的稳态振幅. 设 $F(t) = 250 \sin 40t$.

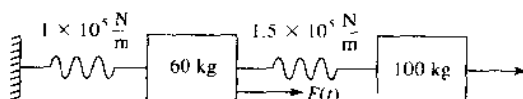


图 6.7

答: 1.04×10^{-4} m.

- 6.18 求图 6.8 所示系统中的 100 kg 物块的稳态振幅. 设 $\omega = 80$ rad/s.

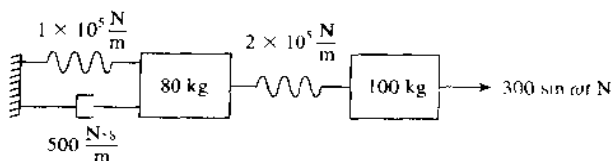


图 6.8

答: 1.27×10^{-3} m.

- 6.19 求图 6.8 中的 100 kg 物块的稳态振幅小于 1 mm 时, ω 的值为多大?

答: $\omega > 81.0$ rad/s.

- 6.20 求图 6.9 中的 60 kg 物块的稳态振幅.

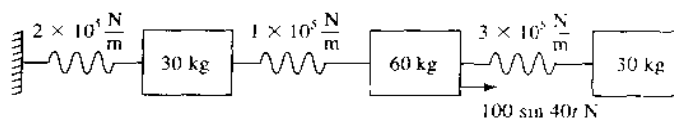


图 6.9

答: 1.08×10^{-3} m.

- 6.21 图 6.10 中的 k 值为多大, 才能使杆的角振动的稳态振幅为零?

答: 1×10^5 N/m.

- 6.22 用拉普拉斯变换的方法求解题 6.17.

答: 1.04×10^{-4} m.

- 6.23 用拉普拉斯变换的方法求图 6.7 中 60 kg 物块的位移. 设 $F(t) = 250[u(t) - u(t - 0.1)]$.

答: $[2.5 \times 10^{-3} - 1.87 \times 10^{-3} \cos(21.96t) - 6.29 \times 10^{-4} \cos(72.0t)]u(t) - [2.5 \times 10^{-3} - 1.87 \times 10^{-3} \cos(21.96t - 2.196) - 6.29 \times 10^{-4} \cos(72.0t - 7.2)]u(t - 0.1)$.

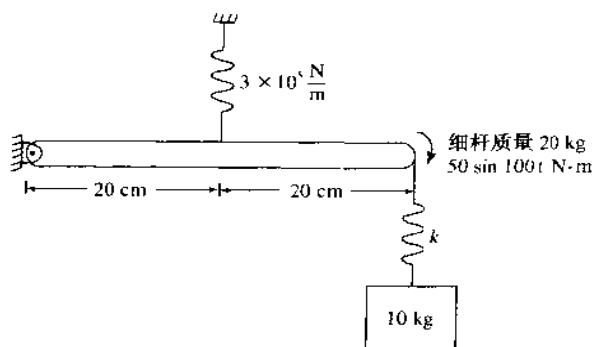


图 6.10

- 6.24 $10e^{-5t}$ N·m 的力矩作用在图 5.28 系统的最上面的杆上, 使用拉普拉斯变换的方法, 求下面杆对时间的响应. 设 $L = 1$ m, $k = 100$ N/m, $m = 10$ kg.

答: $7.38 \times 10^{-5} e^{-0.5t} + 2.87 \times 10^{-3} \sin(1.693t) - 9.40 \times 10^{-5} \cos(1.693t)$
 $9.88 \times 10^{-6} \sin(10.23t) + 2.02 \times 10^{-5} \cos(10.23t).$

- 6.25 用模态分析法求解题 6.24.

- 6.26 用模态分析法求解题 6.20.

- 6.27 用模态分析法求图 5.1 系统的稳态响应. 设最左边物块上作用力为 $F_0 \sin 1.5 \sqrt{\frac{k}{m}} t$.

答: $x_1 = 0.245 \frac{F_0}{k} \sin 1.5 \sqrt{\frac{k}{m}} t$, $x_2 = -0.406 \frac{F_0}{k} \sin 1.5 \sqrt{\frac{k}{m}} t$, $x_3 = 0.116 \frac{F_0}{k} \sin 1.5 \sqrt{\frac{k}{m}} t$.

- 6.28 用模态分析法求解图 6.11 系统的最左边圆盘的角振动的稳态振幅. 设中间盘上作用扭矩为 $50 \sin 30t$ N·m.

$$k_{t_1} = 1.2 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}, \quad k_{t_2} = 8.7 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}, \quad k_{t_3} = 5 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}.$$

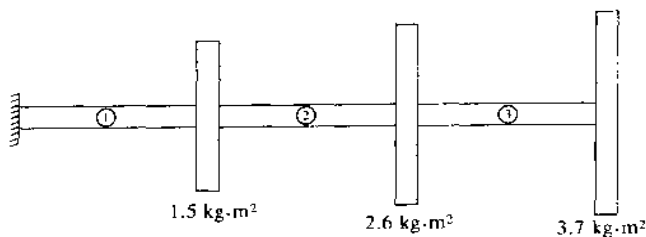


图 6.11

答: 4.46×10^{-4} rad.

- 6.29 三台质量均为 20 kg 的机器, 沿全长 2 m 的简支梁等间距放置. 梁的弹性模量为 200×10^9 N/m², 截面积惯性矩为 1.35×10^{-6} m⁴. 左支承附近的机器有大小为 $0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}$ 的不平衡转矩, 并转速为 100 rad/s. 求中间跨度上的机器的稳态振幅.

答: 0.0028 m.

- 6.30 重解题 6.29. 设系统具有阻尼, 且阻尼比不小于 0.04. 阻尼矩阵与柔度矩阵成正比.

答: 0.0028 m.

- 6.31 使用模态分析法求图 6.12 系统中 60 kg 质量块的稳态振幅.

答: 1.68×10^{-4} m.

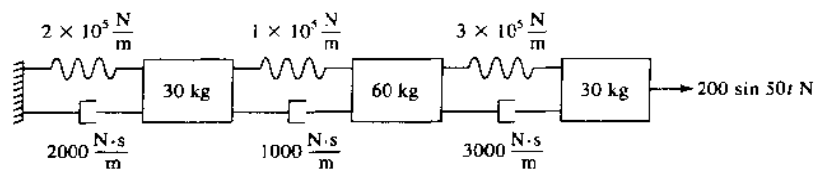


图 6.12

- 6.32 使用模态分析法, 求图 6.13 系统的 $x_1(t)$. 设最左边物块, 在 $t=0$ 时作用有大小为 $1 \text{ N}\cdot\text{s}$ 的冲量, 在 $t=0.1 \text{ s}$ 时, 最右边物块上作用有大小为 $1.5 \text{ N}\cdot\text{s}$ 的冲量.

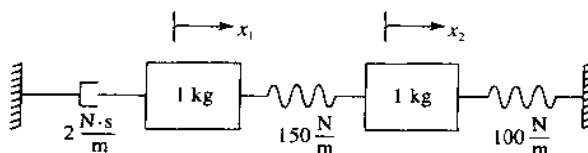


图 6.13

$$\begin{aligned}
 \text{答: } & e^{-0.660t} \{ [-2.56 \times 10^{-3} \cos(6.647t) + 1.02 \times 10^{-1} \sin(6.47t)] u(t) \\
 & + [-4.11 \times 10^{-3} \cos(6.647t - 0.665) \\
 & + 1.64 \times 10^{-1} \sin(6.647t - 0.665)] u(t - 0.1) \} \\
 & + e^{-0.339t} \{ [2.96 \times 10^{-3} \cos(18.893t) \\
 & - 1.79 \times 10^{-2} \sin(18.893t)] u(t) \\
 & + [3.91 \times 10^{-2} \sin(18.893t - 1.89) \\
 & + 3.91 \times 10^{-2} \sin(18.893t - 1.89)] u(t - 0.1) \}.
 \end{aligned}$$

第七章 连续系统的振动

所谓连续或分布参数的系统是具有遍布整个系统的连续分布的惯性的系统. 连续系统所遵循的运动学特性是空间与时间变量的函数. 连续系统振动由偏微分方程所描述.

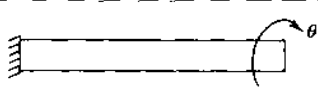
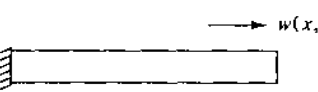
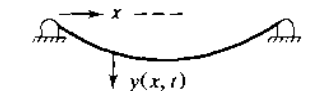
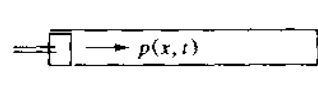
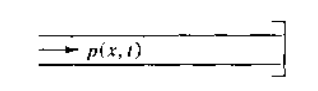
§ 7.1 波动方程

一维定常系统的自由振动是由波动方程所决定的

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (7.1)$$

其中 x 是空间坐标; $u(x, t)$ 是系统中质点的位移, 系统的平衡位置由 x 决定; 并且 c 是波速, 即系统波动传播的速度. 振动由波动方程决定, 系统的波速可由表 7.1 查出.

表 7.1

问题	示意图	波动方程	波速
圆轴扭转 振动		$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$	$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ G 为剪切模量 ρ 为密度
杆的纵向 振动		$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$	$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ E 为弹性模量 ρ 为密度
张紧压力 波动		$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$	$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ T 为张力 μ 为线密度
气体压力 波动		$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$	$c = \sqrt{kRT}$ k 为比热率 R 为气体常数 T 为温度
刚性管中水 锤的波动		$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$	$c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$ k 为液体扩张模量 ρ 为密度

§ 7.2 波动方程的解

方程(7.1)的一般解可表示为

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (7.2)$$

其中 f 和 g 是单变量的任意函数.

§ 7.3 标准模态解

方程(7.1)的标准模态解是

$$u(x, t) = X(x)e^{i\omega t}, \quad (7.3)$$

其中 ω 是系统的固有频率, $X(x)$ 是与固有频率对应的模态. 将方程(7.3)代入方程(7.1), 得

$$c^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + \omega^2 X = 0. \quad (7.4)$$

方程(7.4)的一般解是

$$X(x) = C_1 \cos \frac{\omega}{c} x + C_2 \sin \frac{\omega}{c} x, \quad (7.5)$$

其中 C_1 和 C_2 是积分常量. 在符合具体系统的边界条件下, 方程(7.5)是满足固有频率的特征方程.

连续系统的固有频率无限多, 但仍可数的. 由边界条件可导出 C_1 和 C_2 的关系, 从而确定模态. 令 $X_i(x)$ 和 $X_j(x)$ 为分别对应固有频率的模态, 模态满足正交条件, 对大部分系统有

$$\int_0^L X_i(x) X_j(x) dx = 0, \quad (7.6)$$

其中 L 连续系统的长度. 标准化模态应满足

$$\int_0^L X_i^2(x) dx = 1. \quad (7.7)$$

§ 7.4 梁的横向振动方程

均质弹性梁, 其密度为 ρ , 横截面积为 A , 材料弹性模量为 E , 截面对中性轴的惯性矩为 I . 则梁横向自由振动 $w(x, t)$ 的偏微分方程是

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (7.8)$$

方程(7.8)中, 略去了轴上载荷的影响和剪切变形及截面绕中性轴转动惯量的影响. 则标准模态解为

$$w(x, t) = X(x) e^{i\omega t}. \quad (7.9)$$

将上式代入方程(7.8), 得

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \frac{\rho A}{EI} \omega^2 X = 0, \quad (7.10)$$

则方程(7.10)的解为

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x, \quad (7.11)$$

其中

$$\lambda = \left(\frac{\rho A}{EI} \omega^2 \right)^{1/4}. \quad (7.12)$$

应用具体问题的边界条件, 导出特征方程, 解出无限多、但可数的固有频率. 同方程(7.6)相同, 其模态也应满足正交条件.

§ 7.5 模态叠加法

模态叠加法用于确定连续系统由初始条件或外部激励下的响应. 也可以求解由波动方程或梁的方程所决定的自由振动. 设 $u(x, t)$ 为系统对时间响应. 并且固有频率 $\omega_1, \omega_2, \dots$ 和与之对应的标准模态 $X_1(x), X_2(x), \dots$, 则模态叠加公式为

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) X_k(x), \quad (7.13)$$

其中 $p_k(t)$ 需要确定. 如果 $F(x, t)$ 不是均匀的, 则在微分方程中应展成为

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) X_k(x), \quad (7.14)$$

其中

$$C_k(t) = \int_0^L F(x, t) X_k(x) dx. \quad (7.15)$$

将方程(7.13)和(7.14)代入由 $u(x, t)$ 决定的偏微分方程, 再将所得方程乘以 $X_i(x)$, 并在积分区间 0 到 L 上积分. 使用该正交性条件得到关于 p_k 的解耦的常微分方程.

§ 7.6 瑞利商

对于由波动方程决定的自由振动的连续系统, 令 $f(x)$ 为满足边界条件的任意连续函数, 则瑞利商函数由下式决定:

$$R(f) = \frac{\int_0^l g(x) \left(\frac{df}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^l m(x) f(x)^2 dx + \sum_{i=1}^n m_i f(x_i)^2}, \quad (7.16)$$

其中 $g(x)$ 和 $m(x)$ 是关于系统几何的惯性特征和弹性特征的已知函数. 对于杆的纵向振动, $g(x) = EA(x)$, $m(x) = \rho A(x)$; 对于轴的扭转振动, $g(x) = GJ(x)$ 和 $m(x) = \rho I(x)$. 方程 (7.16) 的分母中是关于对所有离散质量的求和. 瑞利商满足的条件是, 当且仅当 $f(x)$ 是系统的模态. 在这种情形下

$$R[X_i(x)] = \omega_i^2, \quad (7.17)$$

则 $R(f)$ 的最小值是 ω_1^2 .

关于梁的振动问题的瑞利商是

$$R(f) = \frac{\int_0^l EI \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \rho A f(x)^2 dx + \sum_{i=1}^n m_i f(x_i)^2}. \quad (7.18)$$

§ 7.7 瑞利-里兹法

瑞利-里兹法是用能量的方法求连续系统固有频率、模态和关于力的响应的近似解. 令 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 满足系统几何边界条件的 n 维线性无关的函数 (对波动方程的零阶导数和对梁的方程的零阶和一阶导数). 对于自由振动问题, 近似模态如下形式:

$$X(x) = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x). \quad (7.19)$$

将方程 (7.19) 代入波动方程或梁的方程, 可获得方程组, 即

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} - \omega^2 \beta_{ij}) c_j = 0, \quad (7.20)$$

其中 α_{ij} 和 β_{ij} 的形式可由表 7.2 给出. 由方程 (7.20) 所表示的方程组的系数矩阵的行列式设为零, 则解出关于 ω^2 的 n 次解.

表 7.2

种 类	α_{ij}	β_{ij}
杆的纵向振动	$\int_0^l EA \left(\frac{d\phi_i}{dx} \right) \left(\frac{d\phi_j}{dx} \right) dx$ + $\sum_{i=1}^n k_i \phi_i(x_i) \phi_j(x_i)$	$\int_0^l \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx$ + $\sum_{i=1}^n m_i \phi_i(x_i) \phi_j(x_i)$
轴的扭转振动	$\int_0^l GJ \left(\frac{d\phi_i}{dx} \right) \left(\frac{d\phi_j}{dx} \right) dx$ + $\sum_{i=1}^n k_i \phi_i(x_i) \phi_j(x_i)$	$\int_0^l \rho I \phi_i(x) \phi_j(x) dx$ + $\sum_{i=1}^n m_i \phi_i(x_i) \phi_j(x_i)$
梁的横向振动	$\int_0^l EI \left(\frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \phi_j}{dx^2} \right) dx$ + $\sum_{i=1}^n k_i \phi_i(x_i) \phi_j(x_i)$	$\int_0^l \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx$ + $\sum_{i=1}^n m_i \phi_i(x_i) \phi_j(x_i)$

提示: x_i 表示离散刚度所连接的质量元素的位置

例 题

7.1 直径为 20 mm 的钢轴 ($G = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$) 中, 扭转波速是多大?

解 由轴中扭转波速可由表 7.1 查出

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{80 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} = 3.20 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

7.2 试导出均质杆的纵向自由振动的偏微分方程.

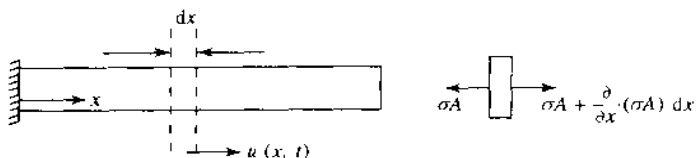


图 7.1

解 研究杆的纵向微元 dx 段, 如图 7.1 所示. 微元上每个截面的力是分布在截面上的法向应力, 如果应力 σ 均匀作用在截面上, 则合力是 σA . 由泰勒级数展开得

$$\sigma(x+dx)A(x+dx) = \sigma(x)A(x) + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma A)dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma A)(dx)^2 + \cdots +$$

对微元应用牛顿定律得到

$$\begin{aligned} \sigma(x)A(x) - \frac{\partial}{\partial x}(\sigma A) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma A)(dx)^2 + \cdots &= \sigma(x)A(x) \\ &= \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx. \end{aligned}$$

略去高阶微量得

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma A) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (7.21)$$

由胡克定律得应力与应变的关系为

$$\sigma = E\epsilon,$$

其中法应变由位移决定为

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x},$$

并代入方程(7.21), 得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

如果杆是均质的等截面的, 则上式简化为

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

7.3 求长为 L 的均质等截面轴扭转振动的固有频率和模态. 其中轴的密度为 ρ , 截面的极惯性矩为 J , 且轴为一端固定, 一端自由.

解 由轴 $\theta(x, t)$ 决定的扭转振动为

$$\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}.$$

对固定端有

$$\theta(0, t) = 0.$$

自由端无剪力, 得

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = 0.$$

利用标准模态解 $\theta(x, t) = X(x)e^{i\omega t}$, 上述条件为

$$X(0) = 0, \quad \frac{dX}{dx}(L) = 0.$$

对方程(7.5)应用第一边界条件, 得到

$$X(0) = 0 = C_1.$$

对方程(7.5)应用第二边界条件, 得到

$$\frac{dX}{dx}(L) = 0 = C_2 \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} L.$$

如果 $C_2 = 0$ 或者 $\omega = 0$, 则有 $X(x) = 0$. 因此, 系统的固有频率解出

$$\cos \frac{\omega}{c} L = 0,$$

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

相对应的模态是

$$X_n(x) = C_n \sin \left[\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right].$$

适用于任何 C_n 的非零解.

- 7.4** 求长为 L 的均质杆纵向振动的特征方程. 杆的弹性模量为 E , 密度为 ρ , 杆一端固定, 一端自由, 且自由端附于一质量 m .

解 系统的运动偏微分方程是

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

$x=0$ 的一端为固定, 则有

$$u(0, t) = 0.$$

$x=L$ 的边界条件是由质点的隔离体图应用牛顿定律得到, 如图 7.2 所示

$$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) \leftarrow \boxed{} = \boxed{} \rightarrow m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t)$$

图 7.2

$$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t).$$

对标准模态解 $u(x, t) = X(x)e^{i\omega t}$ 应用边界条件得到

$$x(0) = 0, \quad EA \frac{dX}{dx}(L) = m\omega^2 X(L).$$

对方程(7.5)应用 $x=0$ 的边界条件, 得 $C_1=0$; 再应用 $x=L$ 及 $C_1=0$ 的条件得到

$$EA\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cos \left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L \right) = m\omega^2 \sin \left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L \right),$$

$$\sqrt{\rho E} \frac{A}{m} = \omega \tan \left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L \right).$$

上面特征方程的解就是系统的固有频率.

- 7.5** 船的螺旋桨是长为 20 m, 直径 10 cm 的钢轴 ($E = 210 \times 10^9$ N/m, $\rho = 7800$ kg/m³). 轴一端固定, 另一端连接 500 kg 的螺旋桨. 求螺旋桨轴系的纵向振动的前 3 阶固有频率是多大?

解 用题 7.4 的系统模拟螺旋桨系统. 则由特征方程得到固有频率为

$$\frac{A}{m} \sqrt{\rho E} = \omega \tan \left\{ \omega L \sqrt{\frac{\rho}{E}} \right\},$$

$$\frac{\rho AL}{m} = \phi \tan \phi,$$

其中

$$\phi = \omega L \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \omega (20 \text{ m}) \sqrt{\frac{7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{210 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}} = 3.85 \times 10^{-3} \omega,$$

并且

$$\frac{\rho AL}{m} = \left(\frac{7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{500 \text{ kg}} \right) \frac{\pi (0.05 \text{ m})^2 (20 \text{ m})}{500 \text{ kg}} = 2.45.$$

特征方程的前三个解是

$$\phi_1 = 1.137, \quad \phi_2 = 3.725, \quad \phi_3 = 6.637.$$

由此得到

$$\omega_1 = 295.3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_2 = 967.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_3 = 1724.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

7.6 传输线长 15 m, 其线密度是 5 kg/m, 且传输线横向振动的第一阶固有频率是 100 rad/s, 求传输线中张力是多大? 假设为简支.

解 由传输线横向振动 $u(x, t)$ 所表示的偏微分方程是

$$\frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

由于为简支, 则两端横向运动受到限制, 即

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$

设标准模态解为 $u(x, t) = X(x)e^{i\omega t}$, 则边界条件得

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0.$$

方程(7.5)应用 $X(0) = 0$, 得 $C_1 = 0$; 再由 $X(L) = 0$, 得到

$$C_2 \sin \left(\omega L \sqrt{\frac{\mu}{T}} \right) = 0.$$

关于非零解出现的第一阶 ω 是

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

重新整理为

$$T = \frac{\omega_1^2 L^2 \mu}{\pi^2}.$$

代入已知量和 $\omega_1 = 100 \text{ rad/s}$, 得

$$T = \frac{\left(100 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 (15 \text{ m})^2 \left(5 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \right)}{\pi^2} = 1.14 \times 10^6 \text{ N}.$$

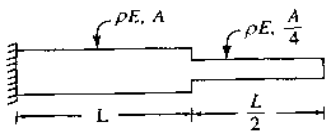


图 7.3

7.7 求图 7.3 系统的关于固有频率的特征方程.

解 令 $u_1(x, t)$ 是左杆的位移, $u_2(x, t)$ 是右杆的位移, 则关于 $u_1(x, t)$ 和 $u_2(x, t)$ 的偏微分方程是

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}.$$

边界条件是

$$u_1(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} \left(\frac{3}{2} L, t \right) = 0.$$

二杆连接处的位移必须是连续的,即

$$u_1(L, t) = u_2(L, t).$$

在二杆连接处的每个杆的截面上法向分布应力的合力是相等的,即

$$EA \frac{\partial u_1}{\partial x}(L, t) = E \frac{A}{4} \frac{\partial u_2}{\partial x}(L, t).$$

由模态解 $u_1(x, t) = X_1(x)e^{i\omega t}$, $u_2(x, t) = X_2(x)e^{i\omega t}$ 得到

$$X_1(x) = C_1 \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right) + C_2 \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right),$$

$$X_2(x) = C_3 \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right) + C_4 \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right),$$

并且

$$X_1(0) = 0, \quad \frac{dX_2}{dx}\left(\frac{3}{2}L\right) = 0,$$

$$X_1(L) = X_2(L), \quad \frac{dX_1}{dx}(L) = \frac{1}{4} \frac{dX_2}{dx}(L).$$

应用边界条件,得

$$X_1(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0,$$

$$\frac{dX_2}{dx}\left(\frac{3}{2}L\right) = 0 \rightarrow C_4 = C_3 \tan\left(\frac{3}{2}\phi\right), \quad \phi = L\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}},$$

$$X_1(L) = X_2(L) \rightarrow C_2 = C_3 \left(\cot\phi + \tan\frac{3}{2}\phi\right),$$

$$\frac{dX_1}{dx}(L) = \frac{1}{4} \frac{dX_2}{dx}(L) \rightarrow 4\cos\phi \left(\cot\phi + \tan\frac{3}{2}\phi\right) = -\sin\phi + \cos\phi \tan\frac{3}{2}\phi.$$

7.8 求图 7.4 系统的纵向振动的第一阶固有频率.

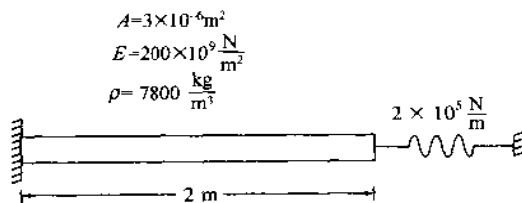


图 7.4

解 由杆的纵向位移 $u(x, t)$ 表示的微分方程是

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

由于 $x=0$ 是固定的,则有

$$u(0, t) = 0.$$

杆右端法向应力的合力必定等于在任意瞬时弹簧力,即

$$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -ku(L, t).$$

将边界条件应用模态解 $u(x, t) = X(x)e^{i\omega t}$, 得到

$$X(0) = 0, \quad EA \frac{dX}{dx}(L) = -kX(L).$$

由方程(7.5)应用 $X(0)=0$, 得 $C_1=0$, 再由方程(7.5)的第二边界条件, 得

$$EA\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L\right) = -k \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L\right),$$

$$\frac{EA}{k} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega = -\tan\left(\omega L \sqrt{\frac{\rho}{E}}\right),$$

$$\frac{EA}{kL} \phi = -\tan\phi, \quad \phi = \omega L \sqrt{\frac{\rho}{E}}.$$

代入已知数值,得

$$1.5\phi = \tan\phi$$

满足方程的最小解是 $\phi = 1.907$, 因此得

$$\omega_1 = \frac{\phi_1}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{1.907}{2 \text{ m}} \sqrt{\frac{200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} = 4.83 \times 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

7.9 证明题 7.3 的模态, 满足方程(7.6)所表示的正交条件.

解 令 ω_i 和 ω_j 为题 7.3 系统的不等的两个固有频率及与其对应的模态 $X_i(x)$ 和 $X_j(x)$. 这些模态和固有频率满足以下方程:

$$\frac{d^2 X_i}{dx^2} + \frac{\omega_i^2}{c^2} X_i = 0, \quad (7.22)$$

$$X_i(0) = 0, \quad \frac{dX_i}{dx}(L) = 0,$$

$$\frac{d^2 X_j}{dx^2} + \frac{\omega_j^2}{c^2} X_j = 0, \quad (7.23)$$

$$X_j(0) = 0, \quad \frac{dX_j}{dx}(L) = 0.$$

将方程(7.22)乘以 X_j 并从 0 到 L 积分, 得

$$\int_0^L X_j(x) \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx + \frac{\omega_i^2}{c^2} \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx = 0.$$

再次对第一个积分进行积分得到

$$\begin{aligned} X_j(0) \frac{dX_i}{dx}(0) - X_j(L) \frac{dX_i}{dx}(L) - X_i(0) \frac{dX_j}{dx}(0) + X_i(L) \frac{dX_j}{dx}(L) \\ + \int_0^L X_i(x) \frac{d^2 X_j}{dx^2} dx + \frac{\omega_j^2}{c^2} \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx = 0. \end{aligned}$$

应用边界条件, 得到

$$\int_0^L X_i \frac{d^2 X_j}{dx^2} dx + \frac{\omega_j^2}{c^2} \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx = 0. \quad (7.24)$$

由方程(7.23), 得

$$\frac{d^2 X_j}{dx^2} = -\frac{\omega_j^2}{c^2} X_j,$$

并代入方程(7.24)得到

$$\frac{1}{c^2} (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx = 0.$$

由于 $\omega_i \neq \omega_j$, 因此方程(7.6)满足.

7.10 推证题 7.4 的模态满足正交条件.

解 令 ω_i 和 ω_j 为题 7.4 系统的不等的两个固有频率及与之相对应的模态 X_i 和 X_j . 这些固有频率和模态满足的方程是

$$\frac{d^2 X_i}{dx^2} + \frac{\rho}{E} \omega_i^2 X_i = 0, \quad (7.25)$$

$$X_i(0) = 0, \quad EA \frac{dX_i}{dx}(L) = m\omega_i^2 X_i(L),$$

$$\frac{d^2 X_j}{dx^2} + \frac{\rho}{E} \omega_j^2 X_j = 0, \quad (7.26)$$

$$X_j(0) = 0, \quad EA \frac{dX_j}{dx}(L) = m\omega_j^2 X_j(L).$$

将方程(7.25)乘以 X_j 并从 0 到 L 积分, 得

$$\int_0^l X_i(x) \frac{d^2 X_j}{dx^2} dx + \omega_i^2 \int_0^l X_i(x) X_j(x) dx = 0.$$

将第一部分的积分进行再次积分, 得到

$$\begin{aligned} X_j(L) \frac{dX_i}{dx}(L) - X_j(0) \frac{dX_i}{dx}(0) - X_i(L) \frac{dX_j}{dx}(L) + X_i(0) \frac{dX_j}{dx}(0) \\ + \int_0^l X_i(x) \frac{d^2 X_j}{dx^2} dx + \frac{\rho}{E} \omega_i^2 \int_0^l X_i(x) X_j(x) dx = 0. \end{aligned}$$

对上式使用边界条件, 得

$$\begin{aligned} \frac{m}{EA} \omega_i^2 X_i(L) X_j(L) - \frac{m}{EA} \omega_j^2 X_i(L) X_j(L) \\ + \int_0^l X_i \frac{d^2 X_j}{dx^2} dx + \frac{\rho}{E} \omega_i^2 \int_0^l X_i(x) X_j(x) dx = 0. \end{aligned}$$

将上式应用方程(7.26)并整理得到

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \left[\frac{m}{EA} X_i(L) X_j(L) + \frac{\rho}{E} \int_0^l X_i(x) X_j(x) dx \right] = 0.$$

由于 $\omega_i \neq \omega_j$, 则正交条件是

$$\frac{m}{\rho A} X_i(L) X_j(L) + \int_0^l X_i(x) X_j(x) dx = 0.$$

- 7.11 求长为 L 的均质等截面简支梁的固有频率. 梁的弹性模量为 E , 密度 ρ , 横截面积为 A , 惯性矩为 I .

解 简支梁的横向自由振动 $w(x, t)$ 的边值问题, 可由方程(7.8)决定

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0,$$

$$w(L, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0.$$

对边界条件应用模态解 $w(x, t) = X(x)e^{i\omega t}$ 得到

$$X(0) = 0, \quad \frac{d^2 X}{dx^2}(0) = 0,$$

$$X(L) = 0, \quad \frac{d^2 X}{dx^2}(L) = 0.$$

对方程(7.11), 在 $x=0$ 处应用边界条件, 得

$$X(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_3 = 0,$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2}(0) = 0 \rightarrow -\lambda^2 C_1 + \lambda^2 C_3 = 0,$$

由此确定 $C_1 = C_3 = 0$. 再应用 $x=L$ 处的边界条件, 得

$$X(L) = 0 \rightarrow C_2 \sin \lambda L + C_4 \sinh \lambda L = 0,$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2}(L) = 0 \rightarrow -\lambda^2 C_2 \sin \lambda L + \lambda^2 C_4 \sinh \lambda L = 0.$$

得到上式的非零解, 当且仅当有

$$\sin \lambda L = 0, \quad C_4 = 0,$$

因此, 有

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

则由方程(7.12), 得固有频率为

$$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- 7.12 求一端铰支一端自由梁的特征方程.

解 铰支—自由梁, 即 $x=0$ 铰支, $x=L$ 自由. 此梁的自由振动的边值问题由方程(7.8)给出

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L, t) = 0.$$

对边界条件应用模态解 $w(x, t) = X(x)e^{i\omega t}$, 得到

$$X(0) = 0, \quad \frac{d^2 X}{dx^2}(0) = 0,$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2}(L) = 0, \quad \frac{d^3 X}{dx^3}(L) = 0.$$

对方程(7.11), 应用 $x=0$ 处的边界条件, 得

$$X(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_3 = 0,$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2}(0) = 0 \rightarrow \lambda^2 C_1 + \lambda^2 C_3 = 0.$$

由此解出 $C_1 = C_3 = 0$, 再应用 $x=L$ 处的边界条件, 得

$$\frac{d^2 X}{dx^2}(L) = 0 \rightarrow -\lambda^2 C_2 \sin \lambda L + \lambda^2 \sinh \lambda L = 0,$$

$$\frac{d^3 X}{dx^3}(L) = 0 \rightarrow -\lambda^3 C_2 \cos \lambda L + \lambda^3 C_4 \cosh \lambda L = 0.$$

上式存在非零通解的条件是, 当且仅当系数矩阵为零, 即

$$-\sin \lambda L \cosh \lambda L + \sinh \lambda L \cos \lambda L = 0,$$

得到

$$\tan \lambda L = \tanh \lambda L.$$

求解上面特征方程, 并由方程(7.12), 得到系统的固有频率. 存在非零模态的最小解是 $\lambda = 0$.

7.13 求图 7.5 系统的前三阶固有频率.

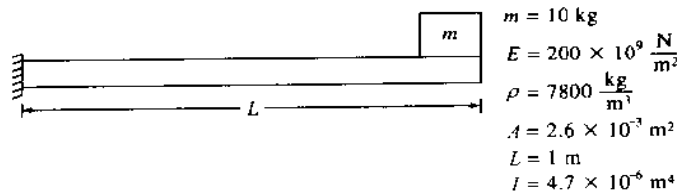


图 7.5

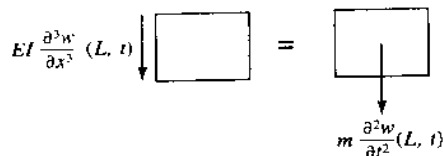


图 7.6

解 图 7.5 系统的自由振动可由方程(7.8)

决定. 由于梁在 $x=0$ 处固定, 则有

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0.$$

$x=L$ 处的边界条件, 由对物块隔离体应用牛顿定律确定, 见图 7.6, 得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0 \quad EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L, t) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(L, t).$$

对边界条件应用模态解 $w(x, t) = X(x)e^{i\omega t}$, 得

$$X(0) = 0, \quad \frac{dX}{dx}(0) = 0,$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2}(L) = 0, \quad EI \frac{d^3 X}{dx^3} = -m\omega^2 X.$$

对方程(7.11)应用边界条件, 得

$$X(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_3 = 0,$$

$$\frac{dX}{dx}(0) = \lambda C_2 + C_4 = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2}(L) = 0 \rightarrow -\lambda^2 \cos \lambda L C_1 - \lambda^2 \sin \lambda L C_2 - \lambda^2 \cosh \lambda L C_3 + \lambda^2 \sinh \lambda L C_4 = 0, \\ \frac{EI}{m} \frac{d^3 X}{dx^3}(L) = -\omega^2 X(L) \rightarrow \left(\frac{\rho A}{m} \sin \lambda L + \lambda \cos \lambda L \right) C_1 + \left(-\frac{\rho A}{m} \cos \lambda L + \lambda \sin \lambda L \right) C_2 \\ + \left(\frac{\rho A}{m} \sinh \lambda L + \lambda \cosh \lambda L \right) C_3 + \left(-\frac{\rho A}{m} \cosh \lambda L + \lambda \sinh \lambda L \right) C_4 = 0, \end{aligned}$$

其中 ω^2 由方程(7.12)所表示. 以上方程代表了关于 C_1, C_2, C_3 和 C_4 的四个齐次线性方程组. 若存在非零解, 当且仅当系统的参数矩阵等于零. 令其等于零, 并简化得

$$(1 + \cos \phi \cosh \phi) + \frac{m\phi}{\rho AL} (\cos \phi \sinh \phi - \cosh \phi \sin \phi) = 0, \quad \phi = \lambda L.$$

注意到

$$\frac{m}{\rho AL} = \frac{10 \text{ kg}}{\left(7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) (2.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2) (1 \text{ m})} = 0.493.$$

特征方程的三个最小解是

$$\phi_1 = 1.423, \quad \phi_2 = 4.113, \quad \phi_3 = 7.192.$$

由方程(7.12)计算的固有频率为

$$\begin{aligned} \omega_i = \phi_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} = \phi_i^2 \sqrt{\frac{\left(200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (4.7 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{\left(7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) (2.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2) (1 \text{ m})^4}} = 215.3 \phi_i^2, \\ \omega_1 = 486.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_2 = 3.642 \times 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_3 = 1.114 \times 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

7.14 论证悬臂梁的模态满足方程(7.6)的正交条件.

解 令 ω_i 和 ω_j 为悬臂梁的两个不等的固有频率, 及与之对应的模态 X_i 和 X_j . 这些固有频率和模态满足的方程是

$$\frac{d^4 X_i}{dx^4} - \frac{\rho A}{EI} \omega_i^2 X_i = 0, \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} X_i(0) = 0, \quad \frac{dX_i}{dx}(0) = 0, \\ \frac{d^2 X_i}{dx^2}(L) = 0, \quad \frac{d^3 X_i}{dx^3}(L) = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{d^4 X_j}{dx^4} - \frac{\rho A}{EI} \omega_j^2 X_j = 0, \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} X_j(0) = 0, \quad \frac{dX_j}{dx}(0) = 0, \\ \frac{d^2 X_j}{dx^2}(L) = 0, \quad \frac{d^3 X_j}{dx^3}(L) = 0. \end{aligned}$$

将方程(7.27)乘以 X_j , 并沿 0 到 L 积分, 得

$$\int_0^L X_j \frac{d^4 X_i}{dx^4} dx - \frac{\rho A}{EI} \omega_i^2 \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx = 0.$$

对第一个积分再进行四次积分, 得到

$$\begin{aligned} X_j(L) \frac{d^3 X_i}{dx^3}(L) - X_i(0) \frac{d^3 X_j}{dx^3}(0) - \frac{dX_j}{dx}(L) \frac{d^2 X_i}{dx^2}(L) \\ + \frac{dX_j}{dx}(0) \frac{d^2 X_i}{dx^2}(0) + \frac{d^2 X_j}{dx^2}(L) \frac{dX_i}{dx}(L) - \frac{d^2 X_j}{dx^2}(0) \frac{dX_i}{dx}(0) \\ - \frac{d^3 X_j}{dx^3}(L) X_i(L) + \frac{d^3 X_j}{dx^3}(0) X_i(0) + \int_0^L X_i \frac{d^4 X_j}{dx^4} dx \end{aligned}$$

$$\frac{\rho A}{EI} \omega_i^2 \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx.$$

再应用边界条件之后,并简化得

$$\int_0^L X_i \frac{d^4 X_j}{dx^4} dx - \frac{\rho A}{EI} \omega_i^2 \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx$$

上式由方程(7.28),并整理得

$$\frac{\rho A}{EI} (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx = 0.$$

由于 $\omega_i \neq \omega_j$, 则正交条件得证.

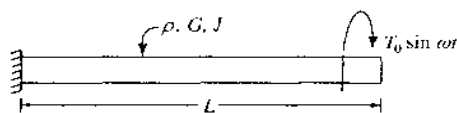


图 7.7

7.15 求图 7.7 所示轴端部的稳态振幅.

解 图 7.7 系统的运动所决定的方程是

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \\ \theta(0, t) = 0, \end{aligned}$$

$$JG \frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = T_0 \sin \omega t.$$

设稳态响应为

$$\theta(x, t) = Q(x) \sin \omega t.$$

将上式代入偏微分方程及其边界条件,得到关于 $Q(x)$ 的如下方程:

$$\frac{G}{\rho} \frac{d^2 Q}{dx^2} + \omega^2 Q = 0,$$

$$Q(0) = 0,$$

$$JG \frac{dQ}{dx}(L) = T_0.$$

微分方程的解是

$$Q(x) = C_1 \cos \left[\omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} x \right] + C_2 \sin \left[\omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} x \right].$$

由边界条件得到

$$Q(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0,$$

$$JG \frac{dQ}{dx}(L) = T_0 \rightarrow C_2 = \frac{T_0}{\omega J \sqrt{\rho G} \cos \left[\omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} L \right]}.$$

因此,轴端部的稳态振幅是

$$Q(L) = C_2 \sin \left[\omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} L \right] = \frac{T_0}{\omega J \sqrt{\rho G}} \tan \left[\omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} L \right].$$

7.16 图 7.5 中梁的端部物块是小型往复式机器. 其工作频率是 100 rad/s. 求机器的稳态振幅. 设机器的不平衡旋转力矩是 0.15 kg·m.

解 除了 $x=L$ 处的第二边界条件之外,系统响应的数学问题,与题 3.13 是相同的. $x=L$ 处的边界条件,应由机器的隔离体图应用牛顿定理确定,如图 7.8 所示,即

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L, t) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(L, t) + m_0 e \omega^2 \sin \omega t.$$

设稳态解为

$$w(x, t) = Q(x) \sin \omega t.$$

将解代入偏微分方程并同时利用边界条件,得到

$$EI \frac{d^4 Q}{dx^4} - \omega^2 \rho A Q = 0,$$

$$Q(0) = 0, \quad \frac{dQ}{dx}(0) = 0,$$

$$\frac{d^2 Q}{dx^2}(L) = 0, \quad EI \frac{d^3 Q}{dx^3}(L) = -m\omega^2 Q(L) + m_0 e \omega^2.$$

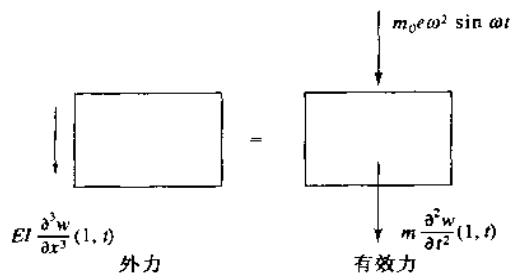


图 7.8

微分方程的解是

$$Q(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x,$$

式中

$$\beta = \left(\frac{\omega^2 \rho A}{EI} \right)^{1/4} = \left[\frac{\left(\frac{100 \text{ rad}}{\text{s}} \right)^2 \left(\frac{7800 \text{ kg}}{\text{m}^3} \right) (2.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}{\left(200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (4.7 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} \right]^{1/4} = 0.682.$$

由边界条件得到

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0, \\ C_2 + C_4 &= 0, \\ -\cos \beta L C_1 - \sin \beta L C_2 + \cosh \beta L C_3 + \sinh \beta L C_4 &= 0, \\ \left(\frac{\beta m}{\rho A} \cos \beta L + \sin \beta L \right) C_1 + \left(\frac{\beta m}{\rho A} \sin \beta L - \cos \beta L \right) C_2 \\ + \left(\frac{\beta m}{\rho A} \cosh \beta L + \sinh \beta L \right) C_3 + \left(\frac{\beta m}{\rho A} \sinh \beta L + \cosh \beta L \right) C_4 &= \frac{m_0 e \beta}{\rho A}. \end{aligned}$$

代入数值, 上面二方程变为

$$\begin{aligned} -0.776 C_1 - 0.630 C_2 + 1.242 C_3 + 0.736 C_4 &= 0, \\ 0.891 C_1 - 0.564 C_2 + 1.153 C_3 + 1.489 C_4 &= 5.04 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

联立方程, 并解出

$$C_1 = 1.82 \times 10^{-3}, \quad C_2 = -2.69 \times 10^{-3}, \quad C_3 = -1.82 \times 10^{-3}, \quad C_4 = 2.69 \times 10^{-3}.$$

机器的稳态振幅是

$$Q(L) = C_1 \cos \beta L + C_2 \sin \beta L + C_3 \cosh \beta L + C_4 \sinh \beta L = 5.60 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

7.17 扭矩 T 作用在题 7.3 轴的一端, 然后突然移去, 求轴扭转振动的运动方程.

解 移去扭矩将会引起轴的扭转振动. 沿轴的轴线的质点的初始角位移是由于扭矩 T 作用在轴的端部而引起的静位移, 即为初始条件

$$\theta(x, 0) = \frac{T x}{J G}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

固有频率和模态是

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{(2i-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \\ X_i(x) &= C_i \sin \left[\frac{(2i-1)\pi x}{2L} \right], \end{aligned}$$

其标准化模态由方程(7.7)决定为

$$\begin{aligned} \int_0^L X_i^2(x) dx &= 1 = \int_0^L C_i^2 \sin^2 \left[\frac{(2i-1)\pi x}{2L} \right] dx, \\ C_i &= \sqrt{\frac{2}{L}}. \end{aligned}$$

扭转振动的全解是

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right] (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t).$$

由初速度条件得到 $B_i = 0$; 再由初位移条件得

$$\frac{T_x}{JG} = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right] A_i.$$

将上式乘以 $X_j(x)$, 其中 j 是任意的, 并从 0 到 L 积分, 得到

$$\frac{T}{JG} \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L x \sin\left[\frac{(2j-1)\pi x}{2L}\right] dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{L} A_i \int_0^L \sin\left[\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right] \sin\left[\frac{(2j-1)\pi x}{2L}\right] dx$$

模态正交性表明, 对于 $i \neq j$ 的相关的极限式不等于零, 则

$$\begin{aligned} A_j &= \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{T}{JG} \int_0^L x \sin\left[\frac{(2j-1)\pi x}{2L}\right] dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{TL^2}{\pi^2 JG} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^2}. \end{aligned}$$

因此, 得扭矩响应是

$$\theta(x, t) = \frac{8TL}{\pi^2 JG} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} \sin\left[\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right] \sin\left[\frac{(2i-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{G}{\rho}} t\right].$$

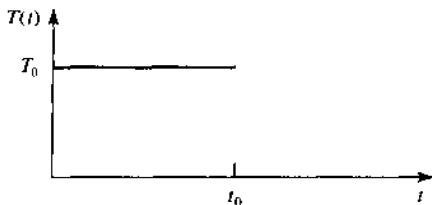


图 7.9

7.18 图 7.9 所示的关于时间的扭矩, 作用在圆截面轴的中间. 其轴长 L , 剪力模量 G , 密度为 ρ , 极惯性矩为 J . 轴一端固定一端自由. 试用模态叠加法求轴关于时间扭矩的响应.

解 扭转振动的偏微分方程是

$$\begin{aligned} GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + T_0 [u(t) - u(t-t_0)] \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \\ = \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

由题 7.3, 得轴的固有频率和标准模态为

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{(2n-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ X_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right]. \end{aligned}$$

由方程(7.14), 将激励展成模态的级数, 并有

$$\begin{aligned} C_k &= \int_0^L T_0 [u(t) - u(t-t_0)] \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{2L}\right] dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} T_0 \sin\left[\frac{(2k-1)\pi x}{2L}\right] [u(t) - u(t-t_0)]. \end{aligned} \quad (7.30)$$

$\theta(x, t)$ 展成如方程(7.13)形式的模态级数, 并将之代入方程(7.29), 再由方程(7.30)得到

$$GJ \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) \frac{d^2 X_k}{dx^2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) X_k(x) = \rho J \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) X_k(x),$$

有

$$\frac{d^2 X_k}{dx^2} = -\omega_k^2 \frac{L}{G} X_k.$$

因此, 得

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\rho J \dot{p}_k + \rho J \omega_k^2 p_k - C_k) X_k = 0.$$

上式对任意 j , 乘以 $X_j(x)$, 并从 0 到 L 积分, 由模态的正交性得到

$$\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{T_0}{\rho J} \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{4}\right] [u(t) - u(t-t_0)].$$

上面方程的解可由卷积积分得到

$$\rho_k(t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{T_0}{\rho \omega_k^2} \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{4} \right] \{ (1 - \cos \omega_k t) u(t) - [1 - \cos \omega_k(t - t_0)] u(t - t_0) \}.$$

7.19 利用模态叠加法, 求图 7.10 系统对时间的响应.

解 对于简支梁的固有频率和标准模态是

$$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}},$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

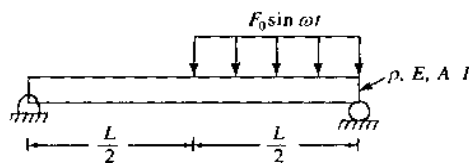


图 7.10

建立梁的运动微分方程为

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial w^2}{\partial t^2} = F_0 \sin(\omega t) u\left(x - \frac{L}{2}\right). \quad (7.31)$$

由方程(7.14), 将激励展成模态级数, 有

$$C_k = \int_0^L F_0 \sin(\omega t) u\left(x - \frac{L}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{k\pi x}{L} dx$$

$$= \sqrt{2L} \frac{F_0}{k\pi} \sin \omega t \left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos(k\pi) \right]$$

$$= B_k \sin \omega t,$$

$$B_k = \sqrt{2L} \frac{F_0}{k\pi} \begin{cases} 1, & k = 1, 3, 5, \dots, \\ -2, & k = 2, 6, 10, \dots, \\ 0, & k = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$$

横向位移展成 $\sum \rho_k(t) X_k(x)$ 并将之代入方程(7.31), 得到

$$EI \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(t) \frac{d^4 X_k}{dx^4} + \rho A \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\rho}_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) X_k(x).$$

注意到

$$\frac{d^4 X_k}{dx^4} = \omega_k^2 \frac{\rho A}{EI} X_k,$$

整理得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\rho A (\ddot{\rho}_k + \omega_k^2 \rho_k) - C_k] X_k(x) = 0.$$

上式乘以 $X_j(x)$, 并从 0 到 L 积分. 再由模态的正交性得

$$\ddot{\rho}_k + \omega_k^2 \rho_k = B_k \sin \omega t.$$

根据 $\rho_k(0) = 0$, $\dot{\rho}_k(0) = 0$ 和 $\omega \neq \omega_k$, 则得方程的解为

$$\rho_k(t) = \frac{B_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_k} \sin \omega_k t \right).$$

7.20 由模态叠加法, 求图 7.11 系统的响应.

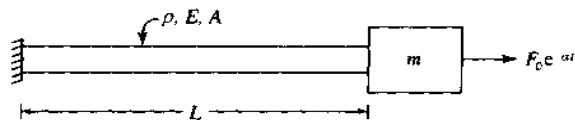


图 7.11

解 图 7.11 系统运动所遵循的方程是

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

再由

$$u(0, t) = 0, \\ -EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + F_0 e^{-at} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t),$$

系统的固有频率和模态已由题 7.4 解出. 将模态叠加方程(7.13)代入微分方程并由边界条件得

$$\frac{E}{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{d^2 X_k}{dx^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{p}_k X_k, \\ -EA \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dX_k}{dx}(L) \dot{p}_k(t) + F_0 e^{-at} = m \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{p}_k X_k(L).$$

注意到

$$\frac{d^2 X_k}{dx^2} = -\omega_k^2 \frac{\rho}{E} X_k, \\ \frac{dX_k}{dx}(L) = \frac{m}{EA} \omega_k^2 X_k(L),$$

得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k) X_k = 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} (\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k) X_k(L) = \frac{F_0}{m} e^{-at}.$$

将第一个方程对于任意的 j 乘以 $X_j(x)$, 并从 0 到 L 积分; 第二个方程乘以 $mX_j(L)/(\rho A)$, 再由二方程相加, 得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k) \left[\frac{m}{\rho A} X_j(L) X_k(L) + \int_0^L X_j(x) X_k(x) dx \right] = \frac{X_j(L)}{\rho A} F_0 e^{-at}.$$

对于此问题, 利用模态正交性, 对于相应的 $k=j$ 的求和式中不为零, 导出题 7.10 的结果, 即

$$\ddot{p}_j + \omega_j^2 p_j = C_j F_0 e^{-at},$$

其中

$$C_j = \frac{\frac{1}{\rho A} X_j(L)}{\frac{m}{\rho A} X_j^2(L) + \int_0^L X_j^2(x) dx} \\ = \frac{\frac{1}{\rho A} \sin\left(\omega_j \sqrt{\frac{\rho}{E}} L\right)}{\frac{m}{\rho A} \sin^2\left(\omega_j \sqrt{\frac{\rho}{E}} L\right) + \frac{L}{2} - \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{4\omega_j} \sin\left(2\omega_j \sqrt{\frac{\rho}{E}} L\right)}.$$

由 $p_j(0) = 0$ 和 $\dot{p}_j(0) = 0$, 得 $p_j(t)$ 的解为

$$p_j(t) = \frac{C_j F_0}{\omega_j^2 + a^2} \left(e^{-at} - \cos \omega_j t + \frac{a}{\omega_j} \sin \omega_j t \right).$$

7.21 利用瑞利商及试算函数

$$u(x) = B \sin \frac{\pi x}{L},$$

求图 7.12 系统的第一阶固有频率的近似值.

解 图 7.12 的扭转系统的瑞利商的形式为

$$R(u) = \frac{\int_0^L JG \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho I u^2(x) dx + I u^2\left(\frac{2}{3}L\right)} = \frac{\int_0^L JG \left[B \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]^2 dx}{\int_0^L \rho I B^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + I B^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \\ = \frac{\frac{\pi^2 G I B^2}{2L}}{\frac{\rho I B^2 L}{2} + \frac{3 I B^2}{2}}.$$

因此, 系统的第一阶固有频率即为上边界, 即

$$\omega_1 \leq \left[\frac{\pi^2 G}{\rho L^2 + \frac{3IL}{J}} \right]^{1/2}$$

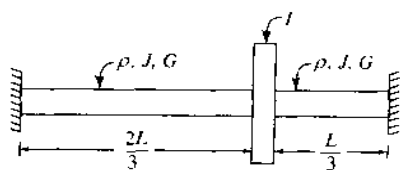


图 7.12

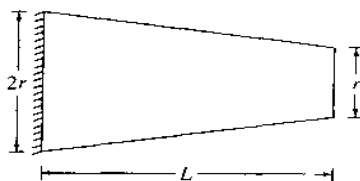


图 7.13

7.22 如图 7.13 所示, 系统是一个圆形变截面杆. 试利用瑞利商, 求此系统纵向运动的第一阶固有频率的近似值.

解 试算函数为

$$u(x) = B \sin \frac{\pi x}{2L}$$

满足边界条件 $u(0) = 0$ 和 $\frac{du(L)}{dx} = 0$. 杆的截面的几何特性是

$$r(x) = r \left(1 - \frac{x}{2L} \right),$$

$$A(x) = \pi r^2 \left(1 - \frac{x}{2L} \right)^2.$$

对试算函数, 由瑞利商的形式得

$$\begin{aligned} R(u) &= \frac{\int_0^L EA(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho A(x) u^2(x) dx} = \frac{\int_0^L E \pi r^2 \left(1 - \frac{x}{2L} \right)^2 \left[\frac{\pi}{2L} \cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right]^2 dx}{\int_0^L \rho \pi r^2 \left(1 - \frac{x}{2L} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2L} \right) dx} \\ &= \frac{0.9017 E \pi r^2}{0.2157 L^2 \rho \pi r^2} = 4.205 \frac{E}{\rho L^2}. \end{aligned}$$

因此, 对于纵向振动的第一阶固有频率即为上界

$$\omega_1 < \frac{2.05}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

7.23 用瑞利-里兹法, 估算图 7.13 系统的前二阶固有频率. 使用一端固定, 一端自由的等截面杆的前两阶模态为试算函数.

解 固定-自由的等截面杆的前二阶模态由题 7.3 给出

$$\phi_1(x) = \sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right), \quad \phi_2(x) = \sin \left(\frac{3\pi x}{2L} \right).$$

因此, 瑞利-里兹法的近似模态为

$$u(x) = C_1 \sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right) + C_2 \sin \left(\frac{3\pi x}{2L} \right).$$

应用瑞利-里兹法得方程(7.20)形式的两个方程, 有

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \int_0^L EA(x) \left(\frac{d\phi_i}{dx} \right) \left(\frac{d\phi_j}{dx} \right) dx, \\ \beta_{ij} &= \int_0^L \rho A(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx, \end{aligned}$$

则此题系数为

$$\alpha_{11} = \int_0^L E \pi r^2 \left(1 - \frac{x}{2L} \right)^2 \left[\frac{\pi}{2L} \cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right]^2 dx = \frac{0.9017 E \pi r^2}{L},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} = \alpha_{21} &= \int_0^L E \pi r^2 \left(1 - \frac{x}{2L} \right)^2 \left[\frac{\pi}{2L} \cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \left[\frac{3\pi}{2L} \cos \left(\frac{3\pi x}{2L} \right) \right] dx \\
&= \frac{0.6094 E \pi r^2}{L}, \\
\alpha_{22} &= \int_0^L E \pi r^2 \left(1 - \frac{x}{2L} \right)^2 \left[\frac{3\pi}{2L} \cos \left(\frac{3\pi x}{2L} \right) \right]^2 dx = \frac{6.664 E \pi r^2}{L}, \\
\beta_{11} &= \int_0^L \rho \pi r^2 \left(1 - \frac{x}{2L} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2L} \right) dx = 0.2157 \rho \pi r^2 L, \\
\beta_{12} = \beta_{21} &= \int_0^L \rho \pi r^2 \left(1 - \frac{x}{2L} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \sin \left(\frac{3\pi x}{2L} \right) dx = 0.0697 \rho \pi r^2 L, \\
\beta_{22} &= \int_0^L \rho \pi r^2 \left(1 - \frac{x}{2L} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{3\pi x}{2L} \right) dx = 0.28322 \rho \pi r^2 L.
\end{aligned}$$

代入并简化, 方程(7.20)变为

$$\begin{aligned}
(0.9017 - 0.2157\phi)C_1 + (0.6094 - 0.0697\phi)C_2 &= 0, \\
(0.6094 - 0.0697\phi)C_1 + (6.664 - 0.2833\phi)C_2 &= 0,
\end{aligned}$$

其中

$$\phi = \left(\frac{\rho L^2}{E} \right) \omega^2.$$

以上方程存在非零解的条件是, 当且仅当, 系统的系数行列式为零, 则有

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0.9017 - 0.2157\phi & 0.6094 - 0.0697\phi \\ 0.6094 - 0.0697\phi & 6.664 - 0.2833\phi \end{vmatrix} &= 0, \\
(0.9017 - 0.2157\phi)(6.664 - 0.2833\phi) - (0.6094 - 0.0697\phi)^2 &= 0, \\
0.0562\phi^2 - 1.608\phi + 5.637 &= 0.
\end{aligned}$$

上面二次方程的解是 $\phi = 4.093, 24.53$, 从而得到

$$\omega_1 = 2.0228 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}, \quad \omega_2 = 4.949 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}.$$

7.24 用瑞利-里兹法估算图 7.14 的扭转系统的前二阶固有频率. 用三次多项式作为估算函数.

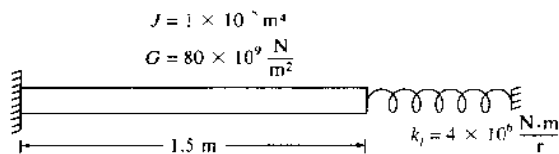


图 7.14

解 应用瑞利-里兹法使用的估算函数, 只满足几何边界条件(即边界条件只从几何因素考虑). 对于固定-自由轴, 满足边界条件的多项式是

$$\phi_1(x) = x^3 - 3L^2x, \quad \phi_2(x) = x^2 - 2Lx.$$

利用方程(7.20)中的系数为

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} &= \int_0^L JG \left(\frac{d\phi_i}{dx} \right) \left(\frac{d\phi_j}{dx} \right) dx + k_t \phi_i(L) \phi_j(L), \\
\beta_{ij} &= \int_0^L \rho J \phi_i(x) \phi_j(x) dx,
\end{aligned}$$

得到系数的值为

$$\alpha_{11} = \int_0^L JG (3x^2 - 3L^2)^2 dx + k_t (L^3 - 3L^3)^2 = 2.114 \times 10^8,$$

$$\alpha_{12} = \int_0^L JG(3x^2 - 3L^2)(2x - 2L)dx = k_f(L^3 - 3L^3)(L^2 - 2L^2) = 6.379 \times 10^7,$$

$$\alpha_{13} = \int_0^L JG(2x - 2L)^2 dx + k_f(L^2 - 2L^2) = 2.115 \times 10^7,$$

$$\beta_{11} = \int_0^L \rho J(x^3 - 3L^2x)^2 dx = 2.589,$$

$$\beta_{12} = \int_0^L \rho J(x^3 - 3L^2x)(x^2 - 2Lx)dx = 0.903,$$

$$\beta_{22} = \int_0^L \rho J(x^2 - 2Lx)^2 dx = 0.3159,$$

则方程(7.20)变成

$$(2.114 \times 10^8 - 2.589\omega^2)C_1 + (6.379 \times 10^7 - 0.903\omega^2)C_2 = 0,$$

$$(6.379 \times 10^7 - 0.903\omega^2)C_1 + (2.115 \times 10^7 - 0.3157\omega^2)C_2 = 0.$$

满足非零解的条件,当且仅当系数矩阵的行列式等于零,则得到

$$0.001369\omega^4 - 6.2533 \times 10^6\omega^2 + 4.0195 \times 10^{14} = 0.$$

最后解出

$$\omega_1 = 8076 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_2 = 66430 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

7.25 用瑞利-里兹法估算两端固定的等截面梁的前二阶固有频率.

解 用下列满足所有边界条件的估算函数:

$$\phi_1(x) = x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2, \quad \phi_2(x) = x^5 - 3L^2x^3 + 2L^3x^2.$$

瑞利-里兹法的估算模态是

$$w(x) = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x).$$

满足方程(7.20)的系数形式是

$$\alpha_{ij} = \int_0^L EI \left(\frac{d^2\phi_i}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2\phi_j}{dx^2} \right) dx,$$

$$\beta_{ij} = \int_0^L \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx.$$

利用建议的估算函数,计算系数为

$$\alpha_{11} = \int_0^L EI(12x^2 - 12Lx + 2L^2)^2 dx = 0.8EIL^5,$$

$$\alpha_{12} = \int_0^L EI(12x^2 - 12Lx + 2L^2)(20x^3 - 18L^2x + 4L^3) dx = 2EIL^6,$$

$$\alpha_{22} = \int_0^L EI(20x^3 - 18L^2x + 4L^3)^2 dx = 5.1428EIL^7,$$

$$\beta_{11} = \int_0^L \rho A(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2)^2 dx = 0.001587\rho AL^9,$$

$$\beta_{12} = \int_0^L \rho A(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2)(x^5 - 3L^2x^3 + 2L^3x^2) dx = 0.003968\rho AL^{10},$$

$$\beta_{22} = \int_0^L \rho A(x^5 - 3L^2x^3 + 2L^3x^2)^2 dx = 0.0099567\rho AL^{11},$$

代入方程(7.20)并整理得

$$(0.8 - 0.001587\phi)C_1 + (2 - 0.003968\phi)C_2 = 0,$$

$$(2 - 0.003968\phi)C_1 + (5.1428 - 0.0099567\phi)C_2 = 0,$$

其中

$$\phi = \omega^2 \frac{\rho A L^4}{EI}.$$

以上方程存在非零解的条件是, 当且仅当系数矩阵的行列式为零, 则解得

$$(0.8 - 0.001589\phi)(5.1428 - 0.0099567\phi) - (2 - 0.003968\phi)^2 = 0,$$

$$5.63 \times 10^{-8}\phi^2 - 2.549 \times 10^{-4}\phi + 0.11424 = 0.$$

上式的解为 504.09 和 4028.23, 最后得到

$$\omega_1 = 22.4 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}, \quad \omega_2 = 63.47 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}.$$

补 充 习 题

- 7.26 传输线中的张力是 15 000 N, 线密度是 4.7 kg/m. 求需用多长时间, 波移动通过 30 m 长的传输线?

答: 0.531 s.

- 7.27 推导出均质等截面杆纵向振动的偏微分方程.

答:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

- 7.28 推导出张紧的绳或线横向振动的偏微分方程.

答:

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

- 7.29 5 m 长的钢制 ($G = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$) 环形轴, 内直径是 20 mm, 外直径是 30 mm. 轴为一端固定一端自由, 求该轴扭转振动的第一阶固有频率.

答: 1006 rad/s.

- 7.30 求题 7.29 中的轴纵向振动的第一阶固有频率.

答: 1590 rad/s.

- 7.31 将转动的惯量为 1.85 kg/m^2 滑轮安装在 80 cm 钢轴的一端 ($G = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$), 轴的直径为 30 cm. 求滑轮扭转振动的前二阶固有频率是多大?

答: 4655 rad/s, 15 000 rad/s.

- 7.32 求图 7.15 的杆纵向振动的特征方程.



图 7.15

答:

$$\frac{EA}{k} \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \tan \left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L \right).$$

- 7.33 求题 7.32 中系统的前二阶固有频率. 设 $E = 150 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho = 5000 \text{ kg/m}^3$, $A = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $L = 1.6 \text{ m}$, $k = 3.1 \times 10^6 \text{ N/m}$.

答: $5.82 \times 10^3 \text{ rad/s}$, $1.63 \times 10^4 \text{ rad/s}$.

7.34 求图 7.16 的系统的特征方程.

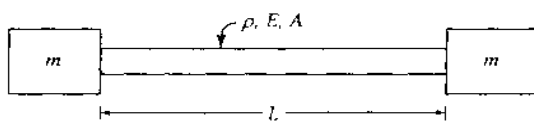


图 7.16

答:

$$\omega \tan \left(\sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega L \right) - \frac{2m\omega^2 A}{m^2 \omega^2 - \rho E A^2} \sqrt{\frac{\rho E}{A}} = 0.$$

7.35 证明题 7.32 的系统的模态满足正交条件方程(7.6).

7.36 推导题 7.34 的系统的模态所满足的正交条件.

答:

$$\rho A \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx + m X_i(L) X_j(L) + m X_i(0) X_j(0) = 0.$$

7.37 推导悬臂梁的特征方程.

答:

$$\cosh \phi \cos \phi = -1, \quad \phi = \left(\frac{\omega^2 \rho A L^4}{EI} \right)^{1/4}.$$

7.38 推导两端自由梁的特征方程.

答:

$$\cosh \phi \cos \phi = 1, \quad \phi = \left(\frac{\omega^2 \rho A L^4}{EI} \right)^{1/4}.$$

7.39 推导梁一端固定, 另一端连接刚度为 k 的弹簧的特征方程.

答:

$$\phi^3 (\cosh \phi \cos \phi + 1) - \beta (\cos \phi \sinh \phi - \cosh \phi \sin \phi) = 0, \\ \phi = \left(\frac{\omega^2 \rho A L^4}{EI} \right)^{1/4}, \quad \beta = \frac{k L^3}{EI}.$$

7.40 求题 7.29 系统横向振动的第一阶固有频率.

答: 6.41 rad/s.

7.41 梁的一端固定, 另一端连接一个质量可略, 但转动惯量 \tilde{I} 很大的一个圆盘. 求此梁的特征方程.

答:

$$\cos \phi \cosh \phi + \beta (\sin \phi \cosh \phi + \cos \phi \sinh \phi) = -1, \\ \phi = \left(\frac{\omega^2 \rho A L^4}{EI} \right)^{1/4}, \quad \beta = \frac{\tilde{I}}{\rho A L^3}.$$

7.42 证明题 7.37 的系统的模态满足方程(7.6)的正交条件.

7.43 推导题 7.41 系统的模态所满足的正交条件.

答:

$$\int_0^L X_i(x) X_j(x) dx + \beta X_i(L) X_j(L) = 0.$$

7.44 求图 7.17 圆盘的角振动的稳态振幅.

答:

$$\frac{T_0 L \sin \phi}{JG (\phi \cos \phi - \beta \phi^2 \sin \phi)}, \quad \beta = \frac{I}{\rho J L}, \quad \phi = \omega L \sqrt{\frac{\rho}{G}}.$$

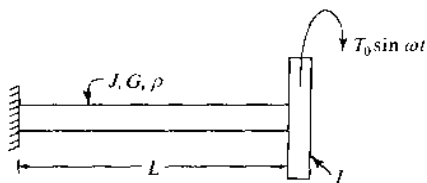


图 7.17

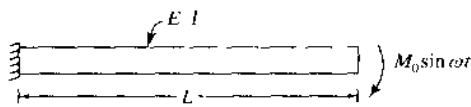


图 7.18

7.45 求图 7.18 梁的端部的稳态振幅.

答:

$$\frac{M_0(1 + \sinh^2 \beta L - \sin \beta L \sinh \beta L)}{EI\beta^2(1 + \cosh \beta L \cos \beta L)}, \quad \beta = \left(\frac{\omega^2 \rho A}{EI} \right)^{1/4}.$$

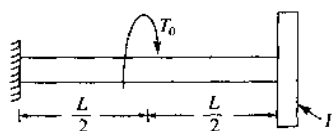


图 7.19

7.46 扭矩 T_0 作用在图 7.19 轴的中部. 求突然移去扭矩后, 轴扭振振动用时间表示的数学形式.

答:

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left(\omega_n \sqrt{\frac{\rho}{G}} x \right) \sin \omega_n t,$$

$$A_n = \frac{T_0}{JG} \frac{\frac{G}{\rho \omega_n^2} \sin \left(\omega_n \frac{L}{2} \sqrt{\frac{\rho}{G}} \right) \cdot \frac{J_z}{2 \omega_n} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \cos \left(\omega_n \sqrt{\frac{\rho}{G}} L \right)}{\frac{1}{2} \left[L - \frac{J_z}{2 \omega_n} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \sin \left(\omega_n \sqrt{\frac{\rho}{G}} L \right) \right]},$$

$$\sqrt{\rho G} \frac{J_z}{L} = \omega_n \tan \left(\omega_n \sqrt{\frac{\rho}{G}} L \right).$$

7.47 用模态叠加法求题 7.31 系统中, 在 $t=0$ 时作用角冲量 H 的滑轮的响应.

答:

$$\frac{2H}{\rho I} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\omega_k \sqrt{\frac{\rho}{G}} L \right)}{L - \frac{1}{2 \omega_k} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \sin \left(2 \omega_k \sqrt{\frac{\rho}{G}} L \right)} \sin \left(\omega_k \sqrt{\frac{\rho}{G}} x \right) \sin \omega_k t.$$

7.48 用模态叠加法求图 7.20 系统的响应.

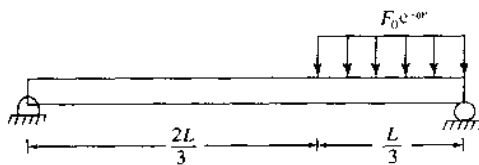


图 7.20

答:

$$\frac{2}{\pi} F_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2/3)k\pi - \cos k\pi}{k(\omega_k^2 + \alpha^2)} \left(e^{-\alpha t} - \cos \omega_k t + \frac{\alpha}{\omega_k} \sin \omega_k t \right) \sin \frac{k\pi x}{L},$$

$$\omega_k = k^2 \pi^2 \left(\frac{EI}{\rho AL^4} \right)^{1/4}.$$

7.49 简支梁作用一个大小为 I 的集中载荷, 并在 $t=0$ 时, 载荷作用在梁的左端, 然后沿梁以速度 v 移动. 求梁用 p_k 表示的微分方程.

答:

$$\ddot{p}_k + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 p_k = I \sqrt{\frac{2}{L}} \left[u(t) - u \left(t - \frac{L}{v} \right) \right] \sin \left(\frac{k\pi vt}{L} \right).$$

7.50 用瑞利商估算图 7.21 的系统的纵向振动的第一阶固有频率. 使用

$$\phi(x) = \sin \frac{\pi x}{2L}$$

作为估算函数.

答:

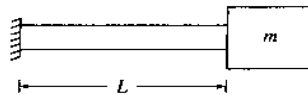


图 7.21

$$\omega < \sqrt{\frac{L^2 EA}{4 \rho A L^2 + 8 m L}}.$$

7.51 利用瑞利商并由估算函数

$$\phi(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$$

估算一简支梁并在中点有一集中质量的系统的第一阶固有频率.

答:

$$\omega < \sqrt{\frac{EI \pi^4}{\rho A L^4 + 2 m L^3}}.$$

7.52 利用瑞利-里兹法并由估算函数

$$\phi_1(x) = L^3 x - 2 L x^3 + x^4, \quad \phi_2(x) = \frac{7}{3} L^4 x - \frac{10}{3} L^2 x^3 + x^5$$

估算等截面简支梁的第一阶固有频率.

答:

$$9.877 \left(\frac{EI}{\rho^2 L} \right)^{1/4}.$$

7.53 利用瑞利-里兹法并由估算函数

$$\phi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{L}, \quad \phi_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{L}$$

估算图 7.22 系统的第一阶固有频率.

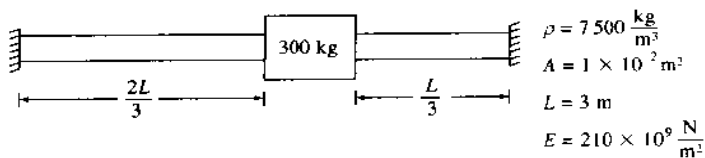


图 7.22

答: $3.01 \times 10^3 \text{ rad/s}$

第八章 振动控制

振动控制就是设计或改善一种系统,使它能够抑制不希望产生的振动或减小传输的力或运动,包括惯性、强度、阻尼的设计,甚至包括含有自由度数目在内的构造体系的设计。

§ 8.1 隔振器

隔振器是用来保护机座,使其在机器运行过程中免受大的冲击,或用来保护机器,使其避免因由于机座运动而引起的大加速度。如图 8.1 所示,弹簧与黏性阻尼器并联组合就构成了一个隔振器。如果机器在激励 $F(t)$ 作用下,产生的位移为 $x(t)$,则通过隔振器传送到支座的力为

$$F_f = kx + c\dot{x}. \quad (8.1)$$

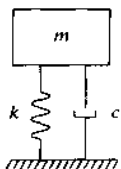


图 8.1

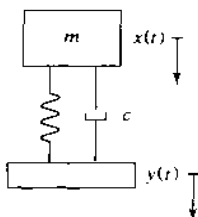


图 8.2

如果图示 8.2 系统的基础位移为 $y(t)$,那么传递到质量为 m 的机器的加速度为

$$\ddot{x} = -\frac{c\dot{z} + kz}{m}, \quad (8.2)$$

其中 $z(t)$ 是机器相对基础的位移,等于隔振器的总位移。

由上述可知,这两种隔振问题的类型是相似的,并且分析这两个问题时运用的是同一理论。

§ 8.2 简谐激励的隔振

图 8.2 所示的机器受到简谐激励 $F(t) = F_0 \sin \omega t$ 作用的稳态响应是

$$x(t) = X \sin(\omega t - \phi), \quad (8.3)$$

其中

$$X = \frac{F_0}{m\omega_n^2} M(r, \zeta) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}. \quad (8.4)$$

$r = \omega/\omega_n$ 是频率比,那么传递到图 8.1 所示机器基础上的力可由式(8.1)及式(8.4)得到

$$F_f = F \sin(\omega t - \lambda), \quad (8.5)$$

其中

$$F_f = F_0 T(r, \zeta) = F_0 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}, \quad (8.6)$$

并且

$$\lambda = \tan^{-1} \frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2}. \quad (8.7)$$

函数 $T(r, \zeta)$ 称为传递比,其关系曲线如图 8.3 所示。注意到,只有当 $T < 1$ 时,才会产生隔振。因此在图 8.3 中,只有当 $r > \sqrt{2}$ 时,才会对简谐激励产生隔振。

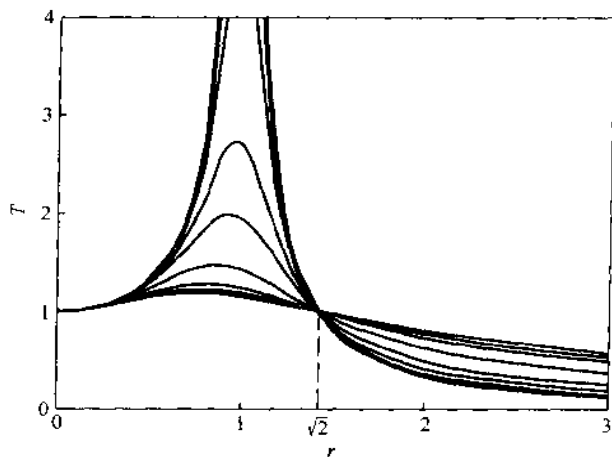


图 8.3

§ 8.3 冲击隔振

考虑一个激励 $F(t)$, 这个激励有参数 F_0 (可能是其最大值) 和一个时间历程 (可能是激励的过程) t_0 . 对 $F(t)$ 的位移谱是一个以 kx_{\max}/F_0 为纵坐标, 以 $\omega_n t_0/2\pi$ 为横坐标的无量纲化图形, 力谱是一个以 $F_{T\max}/F_0$ 为纵坐标, 以 $\omega_n t_0/2\pi$ 为横坐标的图形. 力谱与无阻尼系统的位移谱相同, 力谱和位移谱应用于瞬时激励的设计和分析.

§ 8.4 脉冲隔振

如果一个系统受到非常短的脉冲, 那么在确定最大位移和最大传递力时, 这个脉冲的形状就可以不予考虑. 如果脉冲时间 t_0 与系统的周期 T 相比非常短时, 作用于弹性系统的激励就可以作为一个脉冲激励, 在这种条件下, 重要的量是作用于该系统的总的冲量

$$I = \int_0^{t_0} F(t) dt. \quad (8.8)$$

由脉冲引起速度的变化为

$$v = \frac{I}{m} \quad (8.9)$$

设计隔振器就是为了保护底座, 使底座不受大的脉冲力的冲击, 通过隔振器而传递到底部的最大力的无量纲表达式为

$$Q(\zeta) = \frac{F_{T\max}}{m v \omega_n} = \begin{cases} e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}) \arctan[\sqrt{1-\zeta^2}(1-4\zeta^2)/(\zeta(3-4\zeta^2))]}], & \zeta < 0.5, \\ 2\zeta, & \zeta > 0.5. \end{cases} \quad (8.10)$$

由图 8.4 可以看出, $Q(\zeta)$ 最小时, 曲线比较平坦, 当 $\zeta = 0.24$ 时, 其约等于 0.81.

隔振器对脉冲激励的效率为

$$E(\zeta) = \frac{\frac{1}{2} m v^2}{F_{T\max} x_{\max}} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}) \arctan[\zeta \sqrt{1-\zeta^2}(4-8\zeta^2)/(8\zeta^2-8\zeta^4-1)]}], & \zeta < 0.5, \\ \frac{1}{4} e^{(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}) \arctan[(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)]}, & \zeta > 0.5. \end{cases} \quad (8.11)$$

对 $\zeta = 0.4$ 时, $E(\zeta)$ 有最大值为 0.96. 注意: 只有当采取函数值在 0 到 π 之间时, 才能用式 (8.10) 和 (8.11) 计算.

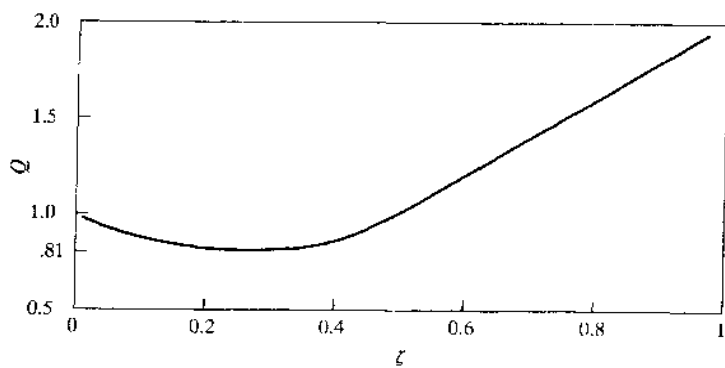


图 8.4

§ 8.5 减振器

当系统受到简谐激励并且其激励频率与系统的固有频率接近时,就会发生大振幅稳态振动.我们可以通过增加一个减振器改变系统的结构以减小稳态的振幅,该减振器是一个辅助的质量—弹簧系统,如图 8.5.安装减振器使系统增加了一个自由度,并且使系统的固有频率远离激励频率.新系统的较低的固有频率比原主系统的固有频率低,然而,较高的固有频率又比原系统的固有频率高.

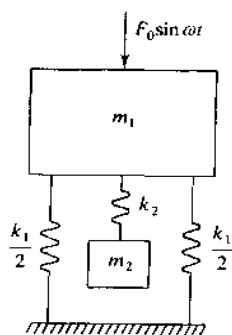


图 8.5

如果原主系统受到一个力大小为 F_0 , 频率为 ω 的简谐激励作用时,在装有减振器的情况下主质量块的稳态振幅为

$$X_1 = \frac{F_0}{k_1} \left[\frac{1}{r_1^2 r_2^2 - r_2^2} - \frac{1 - r_2^2}{(1 + \mu) r_1^2 + 1} \right], \quad (8.12)$$

减振器质量块稳态的振幅为

$$X_2 = \frac{F_0}{k_1} \left[\frac{1}{r_1^2 r_2^2 - r_2^2} - \frac{1}{(1 + \mu) r_1^2 + 1} \right], \quad (8.13)$$

其中

$$r_1 = \frac{\omega}{\omega_{11}}, \quad \omega_{11} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad (8.14)$$

$$r_2 = \frac{\omega}{\omega_{22}}, \quad \omega_{22} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad (8.15)$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}. \quad (8.16)$$

如式(8.12)和图 8.6 所示,如果 $r_2 = 1$,主质量的稳态振幅为 0,在这种条件下

$$X_2 = \frac{F_0}{k_2}. \quad (8.17)$$

当把减振器安装到带有简谐激励的系统中,并且把减振器的频率调整到激励频率时,在系统中装有减振器的那一点的稳态振动为 0.

§ 8.6 阻尼减振器

把阻尼减振器加于减振器中,其目的在于解决无阻尼减振器中的两个问题:

(a) 由于两自由度系统的较低的固有频率,比减振器调整的频率要低,在起动时会发生大振幅振动.

(b) 如图 8.6 所示,由于主质量的速度与调整的速度稍稍有些偏离时,稳态振幅将会变化

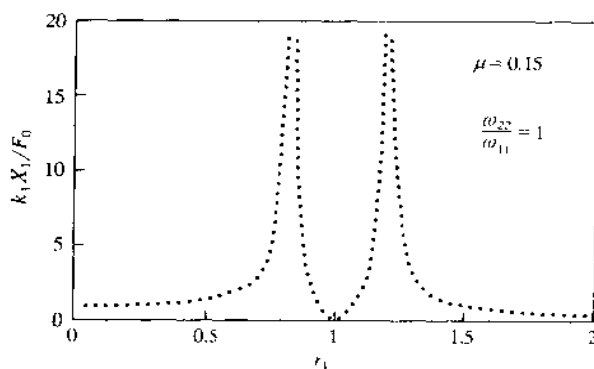


图 8.6

很大,因而,当机器变速运动时,不能使用减振器。

当黏性阻尼加于减振器中,如图 8.7 所示,其主质量块稳态振幅为

$$X_1 = \frac{F_0}{k_1} \sqrt{\frac{(2\zeta r_1 q)^2 + (r_1^2 - q^2)^2}{\{r_1^4 - [1 + (1 + \mu)q^2]r_1^2 + q^2\} + (2\zeta r_1 q)^2[1 - r_1^2(1 + \mu)]^2}}, \quad (8.18)$$

其中

$$q = \frac{\omega_{22}}{\omega_{11}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{k_2 m_2}}. \quad (8.19)$$

在图 8.8 中给出方程(8.18)的几个参数值。

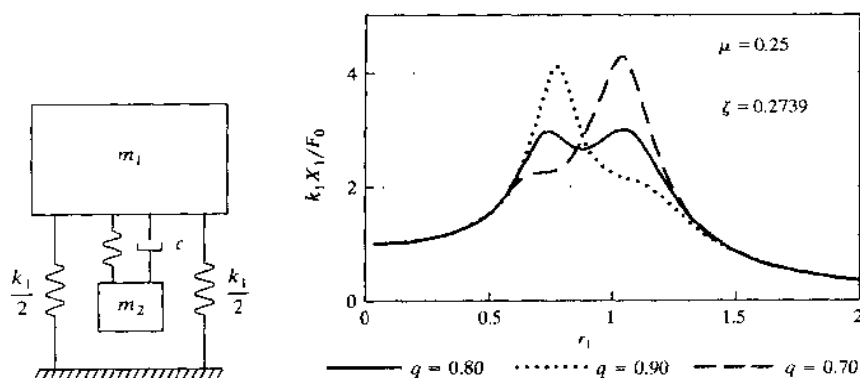


图 8.7

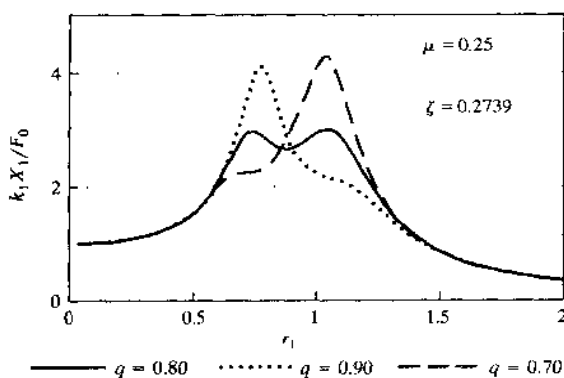


图 8.8

最佳阻尼比是指在主质量相同时,频率响应曲线的波峰处的阻尼比,它引起一个更大的运行范围,其值为

$$\zeta_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)}}. \quad (8.20)$$

§ 8.7 Houdaille 阻尼减振器

如图 8.9 所示一个 Houdaille 阻尼减振器,用在发动机曲轴等需要在很大的速度范围内进行减振的旋转装置中。减振器位于轴相连的轴套里,套中含有黏性液体和可以在套中自由转动的物质,如果轴受到 $M_0 \sin \omega t$ 的简谐激励,那么当减振器安装到轴上,它们扭转振动的稳态振幅为

$$\theta_1 = \frac{M_0}{k_t} \sqrt{\frac{4\zeta^2 + r^2}{4\zeta^2(r^2 + \mu r^2 - 1)^2 + (r^2 - 1)^2 r^2}}, \quad (8.21)$$

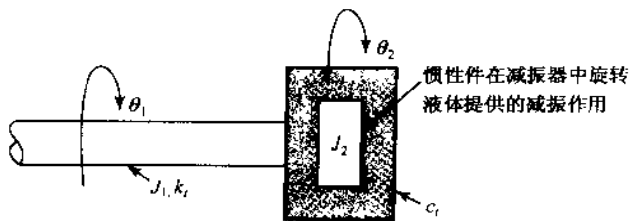


图 8.9

$$r = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{k_t}{J_1}}}, \quad \zeta = \frac{c}{2J_2 \sqrt{\frac{k_t}{J_1}}}, \quad \mu = \frac{J_2}{J_1}. \quad (8.22)$$

最佳阻尼比是在波峰处振幅最小时的阻尼比, 为

$$\zeta_{opt} = \frac{1}{\sqrt{2(\mu+1)(\mu+2)}}. \quad (8.23)$$

如果式(8.23)的阻尼比用于 Houdaille 阻尼减振器的设计中, 则

$$\Theta_{max} = \frac{M_0}{k_t} \left(\frac{\mu+2}{\mu} \right), \quad (8.24)$$

并且在

$$r = \sqrt{\frac{2}{2+\mu}} \quad (8.25)$$

时发生.

§ 8.8 旋转

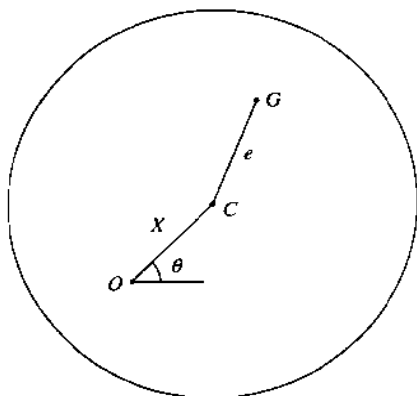


图 8.10

当与转轴相连的机器的转子质心与轴线不在一条直线上时, 就会发生旋转现象. 轴的运动以及转子的偏心距都会导致在转子处产生不平衡惯性力, 这种惯性力使轴偏离中心线并引起轴的弯曲, 图 8.10 示出了一种回旋运动, 对于同周期的回旋运动, 即旋转速度与轴的角速度相同, 轴线与其中心线的距离即回转振幅为

$$\frac{X}{e} = \Lambda(r, \zeta) = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}, \quad (8.26)$$

其中 \$e\$ 是转子的偏心距, \$\zeta\$ 是轴的阻尼比, \$r = \omega/\omega_n\$, \$\omega_n\$ 是转子与轴系的固有频率.

例 题

8.1 对一质量为 200 kg, 转速为 100 r/min 的电扇, 其隔振效率为 81%, 问所需的无阻尼减振器的最大刚度是多少?

解 若隔振效率为 81%, 其最大传递比为 0.19. 利用方程(8.6), 其中 \$\zeta=0\$, 并且注意, 只有当 \$r > \sqrt{2}\$ 时才有意义, 即

$$0.19 \geq \frac{1}{r^2 - 1},$$

解得 \$r \geq 2.50\$, 允许的系统最大固有频率为

$$\omega_n = \frac{\omega}{r_{\min}} = \frac{1}{2.50} \left(1000 \frac{\text{r}}{\text{min}} \right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{r}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 41.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

因而隔振器的最大刚度为

$$k = m\omega_n^2 = (200 \text{ kg}) \left(41.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 3.51 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

- 8.2 为一个转速为 1500~2000 r/min 的泵提供效率为 75% 的隔振,问所用无阻尼隔振器的最小静变形应为多少?

解 对 75% 的隔振效率,其传递比为 0.25,利用方程(8.6)其中 $\zeta=0$,并且注意,只有当 $r>\sqrt{2}$ 时才有意义,即

$$0.25 = \frac{1}{r^2 - 1},$$

解得 $r=2.24$.从图 8.3 可看出,速度越高,隔振效率越好.因此,如果转速为 1500 r/min 时就能获得 75% 的隔振效果,它比以更高的转速获得相同的隔振效果好,因而最大固有频率为

$$\omega_n = \frac{\omega}{r} = \frac{\left(1500 \frac{\text{r}}{\text{min}} \right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{r}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right)}{2.24} = 70.25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

最小静变形是

$$\Delta_{st} = \frac{g}{\omega_n^2} = \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\left(70.25 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2} = 1.99 \text{ mm}.$$

- 8.3 一个质量为 150 kg 的缝纫机,其工作转速为 1200 r/min,并受一个 0.45 kg·m 的不平衡力矩作用,求需用最大刚度为多少的无阻尼隔振器才能使传到机器底座的力小于 2000 N?

解 激振频率和激振力分别为

$$\omega = \left(1200 \frac{\text{r}}{\text{min}} \right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{r}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 125.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$F_0 = m_0 e \omega^2 = (0.45 \text{ kg} \cdot \text{m}) \left(125.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 7.11 \times 10^3 \text{ N}.$$

使传递的力小于 2000 N 时所需的最大传递比

$$T = \frac{F_T}{F_0} = \frac{2000 \text{ N}}{7.11 \times 10^3 \text{ N}} = 0.281,$$

利用式(8.6),其中 $\zeta=0$,并且注意 $T<1$,只有 $r>1$ 时才有意义

$$0.281 = \frac{1}{r^2 - 1} \rightarrow r = 2.134,$$

则最小固有频率和最大刚度为

$$\omega_n = \frac{\omega}{r} = \frac{125.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2.134} = 58.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$k = m\omega_n^2 = (150 \text{ kg}) \left(58.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 5.20 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

- 8.4 一个质量为 20 kg 的实验器材安装在桌子上,该桌子与实验室的地板用螺栓相连接,测量结果显示由于附近的泵以 2000 r/min 速度工作,桌子有一个 0.25 mm 的稳态位移,用最大刚度为多少的一个无阻尼隔振器放在器材与桌子之间才能使器材的加速度小于 0.4 m/s²?

解 激振频率为 2000 r/min=209.4 rad/s,则桌子的加速度为

$$\omega^2 Y = \left(209.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 (0.00025 \text{ m}) = 10.97 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

所需的传递比为

$$T = \frac{A_{\max}}{\omega^2 Y} = \frac{4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10.97 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.365.$$

最小频率比计算为

$$0.365 = \frac{1}{r^2 - 1} \rightarrow r = 1.93.$$

最大固有频率和隔振器的刚度分别为

$$\omega_n = \frac{\omega}{r} = \frac{209.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{1.93} = 108.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$k = m\omega_n^2 = (20 \text{ kg}) \left(108.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 2.35 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

- 8.5 一个质量为 100 kg 的涡轮机以 2000 r/min 的速度转动, 如果把它放在并联的四个相同的弹簧上, 每个弹簧的刚度为 $3 \times 10^5 \text{ N/m}$, 则涡轮机获得的隔振效率为多少?

解 并联弹簧组的等效刚度

$$k_{eq} = 4k = 4 \left(3 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) = 1.2 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

当涡轮机放在弹簧上时, 系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.2 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{100 \text{ kg}}} = 109.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

转速为 $2000 \text{ r/min} = 209.5 \text{ rad/s}$, 频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{209.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{109.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1.912.$$

传递比为

$$T = \frac{1}{r^2 - 1} = \frac{1}{(1.912)^2 - 1} = 0.376,$$

则隔振效率为

$$100(1 - T) = 62.4\%.$$

- 8.6 如果用相同的加载系统, 若要获得 81% 的隔振效率, 需对题 8.5 的涡轮机如何进行处理?

解 在题中 81% 的隔振效率需要的最小频率比为 2.50, 因而对 8.5 题的系统, 最大固有频率为

$$\omega_n = \frac{\omega}{r} = \frac{209.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2.50} = 83.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

由于像题 8.5 那样同样加载, 所以只有当质量增加时, 固有频率才会减小, 所需质量为

$$m = \frac{k}{\omega_n^2} = \frac{1.2 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{\left(83.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2} = 170.9 \text{ kg}.$$

因此想要获得 81% 的隔振效率, 只需再给涡轮机再加上 70.9 kg 的质量.

- 8.7 举出一个隔振器加阻尼效果不佳的例子, 举出两个加阻尼后有利的例子.

解 从图 8.3 可以看出, 在隔振范围内 ($r > \sqrt{2}$) 在无阻尼隔振器上可以获得最好的隔振效果. 因此, 加阻尼的不利方面就是为了获得相同的隔振效果需一个较大的频率比.

由于隔振作用范围发生在 $r > 1$ 的情况下, 在起动过程中会发生共振, 加上阻尼会减小最大起动振幅.

加上黏性阻尼会使隔振器产生较小的位移.

- 8.8 一个阻尼比为 ζ 的隔振器能获得的传递比为 $T > 1$, 求能获得合适的隔振效果所需的最

小频率比的表达式,并用 ζ 和 T 表示.

解 由方程(8.6)可知, T 、 r 及 ζ 的关系为

$$T = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2 r^2}{r^4 + (4\zeta^2 - 2)r^2 + 1}}.$$

对上式进行平方后整理得

$$r^4 + \left[4\zeta^2 \frac{T^2 - 1}{T^2} - 2 \right] r^2 + \frac{T^2 - 1}{T^2} = 0.$$

上式是 r^2 的二次方程式,用二次方公式解得

$$r^2 = 1 - 2\zeta^2 \left(\frac{T^2 - 1}{T^2} \right) \pm \sqrt{\left[2\zeta^2 \left(\frac{T^2 - 1}{T^2} \right) - 1 \right]^2 - \left(\frac{T^2 - 1}{T^2} \right)}.$$

由于 $T < 1$, 只有选择“+”号时,才能使 r^2 为止,所以允许的最小频率比为

$$r = \sqrt{1 - 2\zeta^2 \left(\frac{T^2 - 1}{T^2} \right) + \sqrt{\left[2\zeta^2 \left(\frac{T^2 - 1}{T^2} \right) - 1 \right]^2 - \left(\frac{T^2 - 1}{T^2} \right)}}.$$

8.9 如果阻尼比为 0.1, 解题 8.1.

解 利用题 8.8 的结果 $\zeta = 0.1$ 和 $T = 0.19$, 得

$$\begin{aligned} r &= \left[1 - 2(0.1)^2 \left[\frac{(0.19)^2 - 1}{(0.19)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left\{ 1 - 2(0.1)^2 \left[\frac{(0.19)^2 - 1}{(0.19)^2} \right] \right\}^2 - \left[\frac{(0.19)^2 - 1}{(0.19)^2} \right]} \right]^{1/2} \\ &= 2.63. \end{aligned}$$

因此为达到最大固有频率所允许的最大刚度为

$$\begin{aligned} \omega_n = \frac{\omega}{r} &= \frac{\left(1000 \frac{\text{r}}{\text{min}} \right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{r}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right)}{2.63} = 39.82 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\ k - m\omega_n^2 &= (200 \text{ kg}) \left(39.82 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 3.17 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \end{aligned}$$

8.10 如果阻尼比为 0.08 时, 求 8.3 题的解.

解 由 8.3 题, 所需传递比为 0.281, 利用题 8.8 的结果, $\zeta = 0.08$ 和 $T = 0.281$, 得

$$\begin{aligned} r &= \left[1 - 2(0.08)^2 \left[\frac{(0.281)^2 - 1}{(0.281)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left\{ 2(0.08)^2 \left[\frac{(0.281)^2 - 1}{(0.281)^2} \right] - 1 \right\}^2 - \left[\frac{(0.281)^2 - 1}{(0.281)^2} \right]} \right]^{1/2} \\ &= 2.18. \end{aligned}$$

当达到最大固有频率时, 隔振器的最大刚度为

$$\begin{aligned} \omega_n = \frac{\omega}{r} &= \frac{125.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2.18} = 57.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\ k - m\omega_n^2 &= (150 \text{ kg}) \left(57.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 4.99 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \end{aligned}$$

8.11 题 8.10 中系统的最大起动振幅和稳态振幅分别为多少?

解 由第三章可知振幅与放大系数的关系式为

$$X = \frac{F_0}{k} M(r, \zeta) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}.$$

由题 8.3 和题 8.10 计算得到代数值, 使得稳态的振幅为

$$X = \frac{7.11 \times 10^3 \text{ N}}{4.99 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}} \frac{1}{\sqrt{[1 - (2.18)^2]^2 + [2(0.08)(2.18)]^2}} = 3.78 \text{ mm}$$

放大因子的最大值为

$$M_{\max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}.$$

因而在起动时,最大振幅为

$$X_{\max} = \frac{F_0}{k} M_{\max} = \frac{7.11 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{4.99 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}} \frac{1}{2(0.08) \sqrt{1-(0.08)^2}} = 8.93 \text{ mm}.$$

- 8.12 通过确定题 8.3 系统的 k 与 ζ 的值来设计一隔振器,使它的最大起动振幅为 30 mm,传递的最大力为 3000 N.

解 通过确定 k 和 c 的值来设计隔振器,需满足两个条件,最大起动振幅为 30 mm,即

$$0.03 \text{ m} > \frac{7.11 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{2\zeta k \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad (8.27)$$

并且传递的最大力必须小于 3000 N,即

$$3000 \text{ N} > 7.11 \times 10^3 \text{ N} \sqrt{\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}. \quad (8.28)$$

式(8.27)利用 r 的形式表示,其中 $k = m\omega^2/r$, 结果为

$$0.03 > \frac{7.11 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{(150 \text{ kg}) \left(125.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2} \frac{r^2}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (8.29)$$

必须同时满足式(8.28)和(8.29).通过试算法,式(8.28)和(8.29)有许多解,其中一解是 $r = 1.98$ 和 $\zeta = 0.20$,由此解得 $X_{\max} = 0.03 \text{ m}$ 和 $F_T = 2998 \text{ N}$,故

$$k = \frac{m\omega^2}{r} = 6.05 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

- 8.13 若使用 8.12 题设计的隔振器,需给机器增加多大的质量才能使其稳态振幅小于 3 mm?

解 稳态振幅计算为

$$X = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}.$$

k 固定,当机器质量增大时,固有频率减小,因而频率比增大,用题 8.12 计算得到的值为

$$0.03 \text{ m} = \frac{7.11 \times 10^3 \text{ N}}{6.05 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+[2(0.08)r]^2}}.$$

若 $r = 2.21$ 时,得

$$m = \frac{k}{\omega_n^2} = \frac{kr^2}{\omega^2} = \frac{\left(6.05 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) (2.21)^2}{\left(125.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2} = 187.0 \text{ kg}.$$

因而需给机器增加质量 37.0 kg.

- 8.14 若隔振器的阻尼比为 0.13,求解题 8.4.

解 由题 8.4 决定的所需传递比为 $T = 0.365$.由题 8.8 中方程求后的结果 $T = 0.365$ 和 $\zeta = 0.13$ 得

$$\begin{aligned} r &= \left\{ 1 - 2(0.13)^2 \left[\frac{(0.365)^2 - 1}{(0.365)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left\{ 1 - 2(0.13)^2 \left[\frac{(0.365)^2 - 1}{(0.365)^2} \right] \right\}^2 - \left[\frac{(0.365)^2 - 1}{(0.365)^2} \right]} \right\}^{1/2} \\ &= 2.011. \end{aligned}$$

确定的最大固有频率和隔振器的最大刚度为

$$\omega_n = \frac{\omega}{r} = \frac{209.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2.011} = 104.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$k = m\omega_n^2 = (20 \text{ kg}) \left(104.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 2.17 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

8.15 对题 8.14 设计的隔振器, 实验仪器的稳态振幅为多少? 在隔振器中最大变形为多少?

解 用第三章的理论, 实验仪器稳态振幅为

$$X = YT(r, \zeta) = YT(2.011, 0.13) = (0.00025 \text{ m})0.365 \\ = 9.13 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

隔振器最大变形量及仪器与桌子之间的相对位移的稳态振幅相同.

$$Z = YA(2.011, 0.13) \\ = (0.00025) \frac{(2.011)^2}{\sqrt{[1 - (2.011)^2]^2 + [2(0.13)(2.011)]^2}} \\ = 3.27 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

8.16 一个 200 kg 的涡轮机在 1000 N 和 2000 r/min 的速度之间运转, 涡轮受有一个 0.25 kg·m 的不平衡转矩, 要使传递到涡轮机底座的最大力为 1000 N, 所需无阻尼隔振器的刚度为多少?

解 不平衡转矩提供给机器一个频率平方激励, 形式为

$$F_0 = m_0 e \omega^2.$$

因而传递的力的形式为

$$F_r = m_0 e \omega^2 T(r, \zeta).$$

当 r 在 $\sqrt{2}$ 以上增加时, $T(r, \zeta)$ 减小, 然而, 由于 F_r 也与 ω^2 成正比, 因此, 传递的力随着 ω 的增加而减小, 直达到最小值.

由上述可以看到, 如果设计的隔振器能够在最低运转速度时获得充分的隔振效果, 我们必须在最高运转速度时检查传递的力, 最后, 在最低转速时

$$F_0 = m_0 e \omega^2 = (0.25 \text{ kg} \cdot \text{m}) \left(104.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 2740 \text{ N},$$

$$T = \frac{1000 \text{ N}}{2740 \text{ N}} = 0.365 = \frac{1}{r^2 - 1} \rightarrow r = 1.93,$$

$$\omega_n = \frac{\omega}{r} = \frac{104.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{1.93} = 54.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

以较高的运行速度进行检验

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{209.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{54.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 3.86$$

$$F_r = m_0 e \omega^2 \frac{1}{r^2 - 1} = \frac{(0.25 \text{ kg} \cdot \text{m}) \left(209.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2}{(3.86)^2 - 1} = 789 \text{ N}.$$

因此, 隔振器的设计满足下值时, 符合要求

$$k = m\omega_n^2 = (200 \text{ kg}) \left(54.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 5.88 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

8.17 当隔振器的阻尼比为 0.1 时, 计算题 8.16.

解 计算过程同题 8.16. 设 $T(r, 0.1) = 0.365$, 利用在题 8.8 中得到的等式, 得

$$r = \left\{ 1 - 2(0.1)^2 \left[\frac{(0.365)^2 - 1}{(0.365)^2} \right] \right. \\ \left. + \sqrt{\left\{ 2(0.1)^2 \left[\frac{(0.365)^2 - 1}{(0.365)^2} \right] - 1 \right\}^2 + \left[\frac{(0.365)^2 - 1}{(0.365)^2} \right]^2} \right\}^{1/2} \\ = 1.98,$$

$$\omega_n = \frac{\omega}{r} = \frac{104.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{1.98} = 52.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

以较高的速度检验传递的力

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{209.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{52.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 3.95,$$

$$F_r = m_0 e \omega^2 T(3.95, 0.1)$$

$$= (0.25 \text{ kg} \cdot \text{m}) \left[209.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]^2 \sqrt{\frac{1 + [(0.1)(3.95)]^2}{[1 - (3.95)^2]^2 + [2(0.1)(3.95)]^2}}$$

$$= 955 \text{ N}.$$

因此, 当 k 满足以下值时, 可以使用该隔振器

$$k = m \omega_n^2 = (200 \text{ kg}) \left[52.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]^2 = 5.60 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

- 8.18 装有题 8.17 设计的隔振器的涡轮机以较高速度转动时, 即运转速度为 2500 r/min, 重解题 8.17.

解 传递的力经计算得

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{261.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{52.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 4.95,$$

$$F_r = m_0 e \omega^2 T(4.95, 0.1)$$

$$= (0.25 \text{ kg} \cdot \text{m}) \left[261.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]^2 \sqrt{\frac{1 + [2(0.1)(4.95)]^2}{[1 - (4.95)^2]^2 + [2(0.1)(4.95)]^2}}$$

$$= 1025 \text{ N},$$

因而该隔振器不能使用. 为了在全运转速度范围内获得充分隔振, 不能设计这样的隔振器.

- 8.19 测量结果显示题 8.4 桌子振动最剧烈的两个零件: 一个是频率为 100 rad/s, 长为 0.25 mm 的零件, 另一个是频率为 150 rad/s, 长为 0.4 mm 的零件, 有一个隔振器刚度为 $8 \times 10^4 \text{ N/m}$, 阻尼比为 0.1, 若安装此隔振器, 试问仪器是否能有大小超过 6 m/s^2 的加速度?

解 设 $r = 100/\omega_n$, 那么 $150/\omega_n = 1.5r$. 仪器加速度的上限为

$$\begin{aligned} a &\leq (0.00025 \text{ m}) \left[100 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]^2 T(r, 0.1) \\ &\quad + (0.0004 \text{ m}) \left[150 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]^2 T(1.5r, 0.1) \\ &= 0.25 \sqrt{\frac{1 + [2(0.1)r]^2}{(1 - r^2)^2 + [2(0.1)r]^2}} \\ &\quad + 9 \sqrt{\frac{1 + [2(0.1)(1.5r)]^2}{[1 - (1.5r)^2]^2 + [2(0.1)(1.5r)]^2}} \\ &= 2.5 \sqrt{\frac{1 + 0.04r^2}{r^4 - 1.96r^2 + 1}} + 9 \sqrt{\frac{1 + 0.09r^2}{5.0625r^4 - 4.41r^2 + 1}}. \end{aligned}$$

安装上题所给的隔振器后, 得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{20 \text{ kg}}} = 63.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad r = \frac{100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{63.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1.58,$$

而且最大加速度计算得 3.86 m/s^2 , 因此, 此隔振器有效.

- 8.20 如果题 8.1 中的隔振器为液力隔振系统, 并且为迟滞阻尼, 其阻尼系数为 0.2, 求解题 8.1.

解 对带有液力阻尼作用的系统来说, 传递比的适当形式为

$$T_n(r, h) = \sqrt{\frac{1 + h^2}{(1 - r^2)^2 + h^2}},$$

那么, $h = 0.2$ 的隔振器对 81% 的隔振率来说

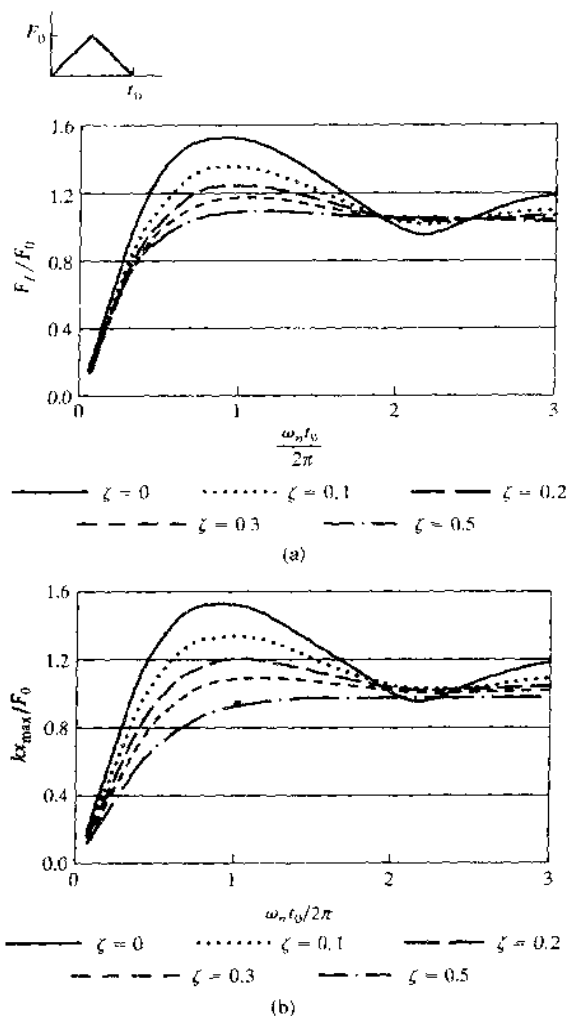


图 8.11

$$0.19 = \sqrt{\frac{1 + (0.2)^2}{(1 - r^2)^2 + (0.2)^2}} = \sqrt{\frac{1.04}{r^4 - 2r^2 + 1.04}},$$

$$(0.19)^2(r^4 - 2r^2 + 1.04) = 1.04.$$

解得 $r = 2.52$, 因此最大允许固有频率为

$$\omega_n = \frac{\omega}{r} = \frac{104.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2.52} = 41.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

由此, 隔振器的最大刚度计算得

$$k = m\omega_n^2 = (200 \text{ kg}) \left(41.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 3.45 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

从题 8.12 到题 8.25 表明: 在测试过程中, 质量为 150 kg 的汽车模型受到一个三角形脉冲, 它的力和位移谱如图 8.11 所示.

- 8.21** 如果模型安装在一个刚度为 $5.4 \times 10^5 \text{ N/m}$, 阻尼系数为 0.1 的隔振器上, 则对一个大小为 2500 N, 持续时间为 12 s 的脉冲, 传递的最大力和模型的最大位移是多少?

解 系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.4 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{150 \text{ kg}}} = 60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

在频谱的横坐标参数的值是

$$\frac{\omega_n t_0}{2\pi} = \frac{\left[60 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] (0.12 \text{ s})}{2\pi} = 1.15.$$

从力谱看, $F_T/F_0 = 1.30$, 因此

$$F_T = 1.30 F_0 = 1.30 (2500 \text{ N}) = 3250 \text{ N}.$$

从位移谱看, $kx_{\text{max}}/F_0 = 1.35$, 因此

$$x_{\text{max}} = 1.35 \frac{F_0}{k} = \frac{1.35(2500 \text{ N})}{5.4 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 6.25 \text{ mm}.$$

- 8.22 对一个大小为 2500 N, 持续时间为 0.1 s 的脉冲, 所传递的最大力小于 2000 N 的隔振器, 其最大刚度应为多少?

解 假设 $F_1/F_0 = 2000/2500 = 0.8$, 从力谱看, 它在横坐标上对应的坐标为 0.3, 因此

$$\frac{\omega_n t_0}{2\pi} = 0.3, \quad \omega_n = \frac{0.3(2\pi)}{0.12 \text{ s}} = 15.71 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

允许的最大刚度为

$$k = m\omega_n^2 = (150 \text{ kg}) \left(15.71 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 3.70 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

- 8.23 装有题 8.22 中设计的隔振器的模型的最大位移是多少?

解 横坐标为 0.3, $kx_{\text{max}}/F_0 = 0.8$, 因此

$$x_{\text{max}} = 1.35 \frac{F_0}{k} = \frac{0.8(2500 \text{ N})}{3.70 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0.054 \text{ m}.$$

- 8.24 若模型安装在刚度为 $5.4 \times 10^5 \text{ N/m}$, 阻尼比为 0.14 的隔振器上, 如脉冲信号的力为 3000 N, 持续时间为 0.01 s, 则传递的力的最大值为多少?

解 在隔振器上的模型的固有频率为 60 rad/s; 因此固有周期为 0.105 s, 由于脉冲持续时间比固有周期要小, 需假设一个短过程脉冲信号, 脉冲量是力—时间图中的整个区域面积, 即

$$I = \int_0^{0.01 \text{ s}} F(t) dt = 2 \frac{1}{2} (0.005 \text{ s}) (3000 \text{ N}) = 15 \text{ N} \cdot \text{s}.$$

由式(8.10), $Q(0.14) = 0.848$, 因此

$$F_1 = 0.848 I \omega_n = 0.848 (15 \text{ N} \cdot \text{s}) \left(60 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) = 7.63 \times 10^2 \text{ N}.$$

- 8.25 在题 8.24 的条件下, 模型的最大位移是多少?

解 由于脉冲的作用, 减小的速度是

$$v = \frac{I}{m} = \frac{15 \text{ N} \cdot \text{s}}{150 \text{ kg}} = 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

由式(8.11), $E(0.14) = 1.39$, 注意余切函数的范围从 0 到 π , 于是

$$x_{\text{max}} = 1.39 \frac{\frac{1}{2} m v^2}{F_T} = 1.39 \frac{\frac{1}{2} (150 \text{ kg}) \left(0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{763 \text{ N}} = 1.37 \text{ mm}.$$

- 8.26 300 kg 重的锻锤的 120 kg 重的锤头从 1.3 m 高的地方落下, 为锤子设计一个隔振器, 使它最大传递力小于 15000 N, 并且其最大位移是最小值。

解 在冲击地面时, 锤子的速度为

$$v_h = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (1.3 \text{ m})} = 5.05 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

根据动量定理, 确定由于冲击力而使机器速度减小的速度为

$$v_m = \frac{m_h v_h}{m} = \frac{(120 \text{ kg}) \left(5.05 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)}{300 \text{ kg}} = 2.02 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

对一个确定的传递力, 取 $\zeta = 0.4$ 时, 得最大位移的最小值, 所以固有频率为

$$\frac{F_T}{m v \omega_n} = Q(0.4),$$

$$\omega_n = \frac{F_T}{m v Q(0.4)} = \frac{15\,000 \text{ N}}{(300 \text{ kg}) \left(2.02 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (0.88)} = 28.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

因此允许的最大刚度为

$$k = m \omega_n^2 = (300 \text{ kg}) \left(28.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 2.37 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

- 8.27 一个质量为 200 kg 的机器与一个刚度为 $4 \times 10^5 \text{ N/m}$ 的弹簧相连. 在运转过程中, 机器受到一个大小为 500 N , 频率为 50 rad/s 的简谐激励, 设计一个无阻尼减振器, 使得主质量块的稳态振幅为 0 , 减振器质量块的稳态振幅小于 2 mm .

解 当减振器的频率调整到共振频率时, 机器的稳态振幅为 0 . 因此

$$r_2 = 1 \rightarrow \omega_{22} = \omega \rightarrow \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \omega.$$

在这种条件下, 减振器质量的稳态振幅可由式(8.17)得

$$0.002 \text{ m} \geq \frac{F_0}{k_2} \rightarrow k_2 \geq \frac{500 \text{ N}}{0.002 \text{ m}} = 2.5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

用最小允许刚度, 所需减振器的质量为

$$m_2 = \frac{k_2}{\omega^2} = \frac{2.5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{\left(50 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2} = 100 \text{ kg}.$$

因此减振器的刚度为 $2.5 \times 10^5 \text{ N/s}$, 质量为 100 kg .

- 8.28 求带有减振器的题 8.27 所示的系统的固有频率是多少?

解 带有减振器的两自由度系统的固有频率值是 ω 时, 使得式(8.12)的分母为零. 因此质量比为 $\mu = 100/200 = 0.5$, 于是

$$r_1^2 r_2^2 - r_2^2 - 1.5 r_1^2 + 1 = 0,$$

$$\frac{\omega^4}{\omega_{11}^2 \omega_{22}^2} - \omega^2 \left(\frac{1.5}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} \right) + 1 = 0,$$

$$\omega^4 - (1.5 \omega_{22}^2 + \omega_{11}^2) \omega^2 + \omega_{11}^2 \omega_{22}^2 = 0.$$

当 $\omega_{22} = 50 \text{ rad/s}$, 并且

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{200 \text{ kg}}} = 44.72 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

代入数值得

$$\omega^4 - 5.75 \times 10^3 \omega^2 + 5 \times 10^6 = 0,$$

用解二次方程得 ω^2 , 取正的平方根得

$$\omega_1 = 32.698 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_2 = 68.42 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- 8.29 当泵以 500 r/min 工作并提供动力给管道系统时, 管道系统就会产生共振. 当转速为 500 r/min , 质量为 5 kg 的减振器安装到泵上时, 测得系统的新的固有频率为 380 和 674 r/min , 管道系统的固有频率和它的等效质量是多少?

解 系统有固有频率与 ω 的值对应, ω 使式(8.12)的分母为 0 , 用式(8.14)和(8.15)得

$$\omega^4 - [\omega_{11}^2 + (1 + \mu) \omega_{22}^2] \omega^2 + \omega_{11}^2 \omega_{22}^2 = 0, \quad (8.30)$$

有

$$\omega_{22} = 500 \text{ r/min} = 52.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

用式(8.30), 且 $\omega = 380 \text{ r/min} = 39.8 \text{ rad/s}$, 得

$$2.51 \times 10^6 + 1.17 \times 10^4 \omega_{11}^2 - 4.35 \times 10^6(1 - \mu) = 0.$$

对 $\omega = 624 \text{ r/min} = 65.3 \text{ rad/s}$, 用式(8.30)可得

$$1.82 \times 10^7 - 1.51 \times 10^3 \omega_{11}^2 - 1.17 \times 10^7(1 - \mu) = 0.$$

前两个方程联立解得

$$\omega_{11} = 49.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \mu = 0.225.$$

因此管道系统的固有频率为 49.2 rad/s , 等效质量为

$$m_1 = \frac{m_2}{\mu} = \frac{5 \text{ kg}}{0.225} = 22.2 \text{ kg}.$$

8.30 重新设计在题 8.29 中的减振器, 使得系统的固有频率一个小于 350 r/min , 一个大于 650 r/min .

解 应用题 8.29 中的方程(8.30), 其中 $\omega = 350 \text{ r/min} = 36.7 \text{ rad/s}$, $\omega_{11} = 49.2 \text{ rad/s}$, $\omega_{22} = 52.4 \text{ rad/s}$, 得 $\mu = 0.414$. 用题 8.29 中的方程(8.30), 其中 $\omega = 650 \text{ r/min} = 68.1 \text{ rad/s}$, 用 ω_{11} , ω_{22} 同样的值得 $\mu = 0.330$. 因此, 为了使带有减振器的系统的固有频率一个小于 350 r/min , 一个大于 650 r/min , 需要的减振器的质量至少为

$$m_2 = \mu m_1 = (0.414)(22.8 \text{ kg}) = 9.19 \text{ kg},$$

则减振器的刚度为

$$k_2 = m_2 \omega_{22}^2 = (9.19 \text{ kg}) \left(52.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 2.52 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

8.31 质量为 100 kg 的机器放在一个长度为 3 m 的简支梁上. 梁的弹性模量为 $200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 惯性矩为 $1.3 \times 10^{-6} \text{ N/m}^4$, 机器在工作过程中受到一个大小为 5000 N , 速度为 $600 \sim 700 \text{ r/min}$ 的简谐激励. 设计一个无阻尼减振器使得机器在以各种速度运转时, 其稳态振幅均小于 3 mm .

解 梁的刚度为

$$k = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48 \left(200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (1.3 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(3 \text{ m})^3} = 4.62 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

系统的固有频率是

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{4.62 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{100 \text{ kg}}} = 68.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

假设在这个速度时, 消除了稳态振动, 则

$$\omega_{11} = \omega_{22} = 68.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

由式(8.12), 对 $r < 1$, 分子为正, 分母为负, 因此, 对 $\omega = 600 \text{ r/min} = 62.8 \text{ rad/s}$, 且 $r_1 = r_2 = 62.8/68.0 = 0.923$ 时, 为使 $X_1 < 3$, 得

$$0.003 \text{ m} = \frac{5000 \text{ N}}{4.62 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}} \frac{1 - (0.923)^2}{(0.923)^2(0.923)^2 - (0.923)^2 - (1 + \mu)(0.923)^2 + 1}.$$

解得 $\mu = 0.652$. 对 $r > 1$, 式(8.12)中的分子、分母均为负, 因此, 对 $\omega = 700 \text{ r/min} = 73.3 \text{ rad/s}$, 且 $r_1 = r_2 = 73.3/68.0 = 1.078$, 得

$$0.003 \text{ m} = \frac{5000 \text{ N}}{4.62 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}} \frac{1 - (1.078)^2}{(1.078)^2(1.078)^2 - (1.078)^2 - (1 + \mu)(1.078)^2 + 1}.$$

解得 $\mu = 0.525$. 由于计算的质量比, 代表的是在运转范围的限制内小于 3 mm 的振幅的最小质量比, 所以必须选择较大的质量比, 故

$$\mu = 0.652, \quad m_2 = \mu m_1 = (0.652)(100 \text{ kg}) = 65.2 \text{ kg},$$

$$k_2 = m_2 \omega_{22}^2 = (65.2 \text{ kg}) \left(68.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 3.014 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

- 8.32 如果一个最佳设计的有阻尼减振器用于题 8.31 的系统中, 质量比为 0.25, 在转速为 600 r/min 时, 机器的稳态振幅为多少?

解 由式(8.20)将最佳的减振器调整为

$$q = \frac{1}{1 + \mu} = \frac{1}{1 + 0.25} = 0.8.$$

由式(8.20)计算得最佳阻尼比为

$$\zeta = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}} = \sqrt{\frac{3(0.25)}{8(1+0.25)}} = 0.274.$$

由式(8.18), 其中 $r_1 = 0.923$, $F_0 = 5000 \text{ N}$, $k_1 = 4.62 \times 10^5 \text{ N/m}$, 以及 ζ 上述值, 计算得 $X_1 = 2.9 \text{ cm}$.

- 8.33 一个质量为 300 kg 的机器放在长为 1.8 m 的悬臂梁末端. 梁的弹性模量为 $200 \times 10^9 \text{ N/m}$, 惯性矩为 $1.8 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, 当机器以 1000 r/min 速度运转时, 稳态振幅为 0.8 mm. 当一个质量为 30 kg, 阻尼系数为 $650 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, 刚度 $1.5 \times 10^5 \text{ N/m}$ 的减振器加到悬臂梁的末端时, 机器的稳态振幅为多少?

解 梁的刚度是

$$k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \left(200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (1.8 \times 10^{-5} \text{ m}^4)}{(1.8 \text{ m})^3} = 1.85 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

系统的固有频率为

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.85 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{300 \text{ kg}}} = 78.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

对 $\omega = 1000 \text{ r/min} = 104.7 \text{ rad/s}$ 的频率比为

$$r_1 = \frac{\omega}{\omega_{11}} = \frac{104.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{78.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1.33.$$

在加减振器之前, 由稳态振幅计算得受迫力幅为

$$\begin{aligned} F_0 &= k_2 X_1 (r_1^2 - 1) = \left(1.85 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) (0.0008 \text{ m}) [(1.33)^2 - 1] \\ &= 1.14 \times 10^3 \text{ N}. \end{aligned}$$

减振器的固有频率为

$$\omega_{22} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{1.5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{30 \text{ kg}}} = 70.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

因此减振器的设计参数为

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{30 \text{ kg}}{300 \text{ kg}} = 0.1, \quad q = \frac{\omega_{22}}{\omega_{11}} = \frac{70.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{78.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0.90,$$

$$\zeta = \frac{c}{2 \sqrt{m_2 k_2}} = \frac{650 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}}{2 \sqrt{\left(1.5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) (30 \text{ kg})}} = 0.153.$$

把上述值代入式(8.18), 得 $X_1 = 9.08 \times 10^{-4} \text{ m}$.

- 8.34 一个发动机的惯性矩为 $3.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, 固有频率为 100 Hz, 设计一个 Houdaille 有阻尼减振器, 使得发动机的最大放大因子为 4.8.

解 在最佳有阻尼减振器设计中, 发动机的最大放大因子为 4.8, 代入式(8.24)得

$$4.8 = \frac{\mu+2}{\mu}, \quad \mu = 0.526.$$

由式(8.23)得最佳阻尼比

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2(1.526)(2.526)}} = 0.360.$$

由式(8.22)得出 Houdaille 有阻尼减振器的设计参数为

$$J_2 = \mu J_1 = (0.526)(3.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) = 1.84 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$c = 2\zeta J_2 \omega_n = 2(0.360)(1.84 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \left(100 \frac{\text{周}}{\text{s}} \right) \left(\frac{2\pi \text{rad}}{\text{周}} \right) \\ = 832 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}.$$

- 8.35** 题 8.34 的发动机在运行过程中受到一个大小为 $100 \text{ N} \cdot \text{m}$, 频率为 110 Hz 的简谐扭矩的作用, 使用如题 9.34 形式的 Houdaille 有阻尼减振器, 试问发动机的稳态振幅是多少?

解 频率比是

$$r = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{110 \text{ Hz}}{100 \text{ Hz}} = 1.1.$$

由式(8.21)得

$$\Theta_1 = \frac{M_0}{J_1 \omega_1^2} \sqrt{\frac{4\zeta^2 + r^2}{4\zeta^2(r^2 + \mu r^2 - 1)^2 + (r^2 - 1)^2 r^2}} \\ = \frac{100 \text{ N} \cdot \text{m}}{(3.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \left[100(2\pi) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]^2} \\ \times \sqrt{\frac{4(0.360)^2 + (1.1)^2}{4(0.360)^2[(1.1)^2 + 0.536(1.1)^2 - 1]^2 + [(1.1)^2 - 1]^2(1.1)^2}} \\ = 1.4 \times 10^{-4} \text{ rad}.$$

- 8.36** 一个质量为 40 kg 的转子, 偏心距为 1.2 cm , 将它安装在带有刚度为 $3.2 \times 10^5 \text{ N/mm}$, 阻尼比为 0.07 的轴系上, 当转子以 1000 r/min 运转时, 求它的旋转振幅为多少?

解 轴的固有频率是

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3.2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}{40 \text{ kg}}} = 89.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

频率比是

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\left(1000 \frac{\text{r}}{\text{min}} \right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right)}{89.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1.17.$$

通过式(8.27)计算得旋转振幅为

$$X = \frac{(0.012 \text{ m})(1.17)^2}{\sqrt{[1 - (1.17)^2]^2 + [2(0.07)(1.17)]^2}} = 4.07 \text{ cm}.$$

- 8.37** 一个发动机飞轮的偏心距为 1.2 cm , 质量为 40 kg , 若阻尼比为 0.05 , 当发动机在 $1000 \sim 2000 \text{ r/min}$ 转速范围内运转, 其旋转振幅均小于 1.2 mm , 求发动机轴承所需的刚度为多大?

解 Δ 的最大允许值为

$$\Delta_{\max} = \frac{X_{\max}}{e} = \frac{1.2 \text{ mm}}{1.2 \text{ cm}} = 0.1,$$

则由式(8.26)得

$$0.1 < \frac{r^2}{\sqrt{r^4 - 1.99r^2 + 1}}, \\ r < 0.302$$

因此以各种速度运转时 $r < 0.302$, 由于最大运转速度是 $2000 \text{ r/min} = 209.4 \text{ rad/s}$

$$\omega_n > \frac{209.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{0.302} = 693 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

所以轴承的最小刚度为

$$k = m\omega_n^2 = (40 \text{ kg}) \left(693 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 1.93 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

补充习题

- 8.38** 当一个质量为 350 kg 的缝纫机以 2100 r/min 速度运转时, 求提供缝纫机 81% 的隔振效率的无阻尼隔振器所需最大刚度为多少?
答: $2.70 \times 10^6 \text{ N/m}$.
- 8.39** 一个质量为 200 kg 的泵, 在 1000 和 1500 r/min 速度之间运转, 若一个无阻尼隔振器的隔振效率为 81% , 求隔振器的最大刚度是多少?
答: $5.06 \times 10^5 \text{ N/m}$.
- 8.40** 若题 8.38 中隔振器的阻尼比为 0.1 , 求题 8.38 的解.
答: $2.44 \times 10^6 \text{ N/m}$.
- 8.41** 若题 9.38 中隔振器的阻尼比为 0.08 , 求题 8.39 的解.
答: $4.87 \times 10^5 \text{ N/m}$.
- 8.42** 一个质量为 50 kg 的压缩机以 200 rad/s 的速度运转, 一个隔振器的刚度为 $1.3 \times 10^6 \text{ N/m}$, 阻尼比为 0.1 , 为了提供压缩机 68% 的隔振效率, 求附加在压缩机上的质量块的最小值为多大?
答: 91.7 kg .
- 8.43** 一个质量为 200 kg 的滚子, 在以 1000 r/min 转速运行时, 产生一个大小为 5000 N 的简谐力, 为了使传递的力小于 2000 N , 所需阻尼比为 0.12 的隔振器的最小静变形为多少?
答: 3.33 mm .
- 8.44** 当隔振器的静变形为最小值时, 求题 8.43 系统的稳态振幅.
答: 3.08 mm .
- 8.45** 一个质量为 45 kg 的流体测量仪表安装在实验室的桌子上, 经测量知周围振动的主频率为 250 rad/s , 这个频率的振幅为 0.8 mm . 要满足传递给仪表的加速度为 5 m/s^2 , 所需阻尼比为 0.1 的隔振器的最大刚度为多少?
答: $7.01 \times 10^4 \text{ N/m}$.
- 8.46** 一个质量为 60 kg 的发动机以 12000 r/min 速度运转, 受有一个 $0.2 \text{ kg} \cdot \text{m}$ 的不平衡转矩, 试问一个阻尼比为 0.1 的隔振器是否能够使传递的力限制为 1000 N , 使稳态振幅限制为 3 mm .
答: 不能. 隔振器把传递的力限制为 1000 N 所允许的最大刚度为 $2.27 \times 10^5 \text{ N/m}$. 而如果刚度小于这个值, 则稳态振幅将始终大于 3 mm .
- 8.47** 通过使用阻尼比为 0.1 的隔振器来获得 1000 N 的传递力, 在这种条件下为了使稳态振幅为 3 mm , 需在题 8.46 的发动机上加一个最小质量为多少的质量块?
答: 12.8 kg .
- 8.48** 当把 12.8 kg 的质量块加在题 8.47 中的发动机上时, 若需限制传递的力为 1000 N , 则要求阻尼比为 0.1 的隔振器的最大刚度为多少?
答: $2.75 \times 10^5 \text{ N/m}$.
- 8.49** 题 8.48 系统的最大起动振幅为多少?
答: 0.16 m .

8.50 如果隔振器有阻尼系数为 0.15 的迟滞阻尼, 求题 8.4 的解.

答: $2.33 \times 10^5 \text{ N/m}$.

8.51 为了使题 8.19 的仪器受到的加速度小于 6 m/s^2 , 需阻尼比为 0.1 的隔振器的最大刚度为多少?

答: $1.08 \times 10^5 \text{ N/m}$.

从题 8.52 到题 8.56 的系统受到的一个脉冲信号, 如图 8.12 所示, 这个脉冲信号的力和位移的频谱见图 8.13.

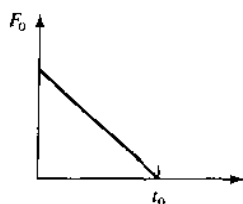


图 8.12

8.52 一个质量为 50 kg 的机器安放在四个并联的弹簧上, 每个弹簧的刚度均为 $3 \times 10^5 \text{ N/m}$. 当机器受到一个形如图 8.12 所示的激励作用时, 求最大的传递力(激励中的 $F_0 = 1200 \text{ N}$, $t_0 = 0.05 \text{ s}$).

答: 2040 N .

8.53 求题 8.52 中机器的最大位移.

答: 1.7 mm .

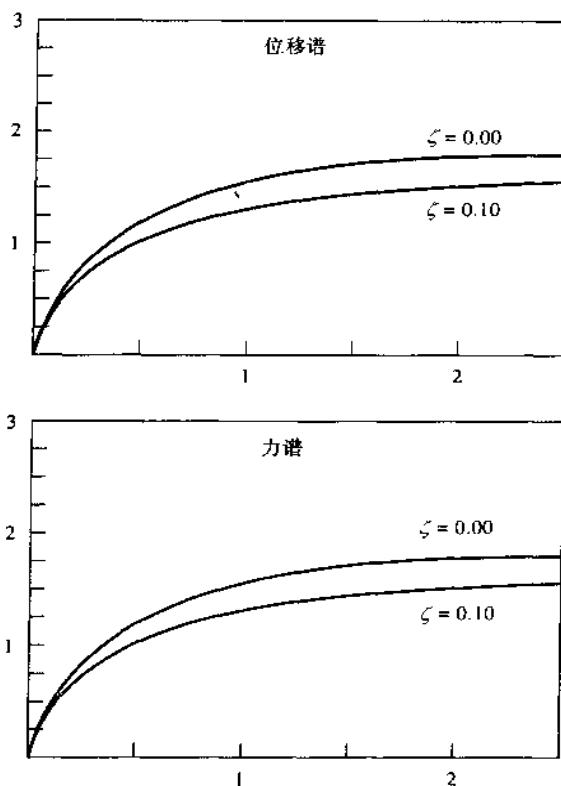


图 8.13

8.54 一个质量为 100 kg 的机器受到一个如图 8.12 所示 $F_0 = 1500 \text{ N}$, $t_0 = 0.04 \text{ s}$ 的激励, 要使传递给机器的最大力为 1125 N , 求阻尼比为 0.1 的隔振器的最大刚度.

答: $2.22 \times 10^5 \text{ N}$.

8.55 一个质量为 150 kg 的机器受到一个如图 8.12 所示, $F_0 = 2000 \text{ N}$, $t_0 = 0.06 \text{ s}$ 的激励, 要使机器的最大位移是 0.2 mm , 求阻尼比为 0.1 的隔振器的最小刚度.

答: $1 \times 10^6 \text{ N/m}$.

8.56 一个质量为 200 kg 的机器受到一个如图 8.12 所示 $F_0 = 2000 \text{ N}$, $t_0 = 0.05 \text{ s}$ 的激励, 要

使传递给机器的最大力为 1500 kg, 机器的最大位移为 6 mm, 求阻尼比为 0.1 的隔振器的刚度取值范围.

答: $2 \times 10^5 \text{ N/m} < k < 2.84 \times 10^5 \text{ N/m}$.

- 8.57 一个质量为 200 kg 的机器安装在等效刚度为 $1 \times 10^5 \text{ N/m}$, 阻尼系数为 $1500 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 的弹簧上. 在运转过程中, 机器受到一个大小为 $75 \text{ N}\cdot\text{s}$ 的冲量作用. 求由于冲量作用传递给机器底座的最大的力.

答: $1.59 \times 10^3 \text{ N}$.

- 8.58 题 8.57 中机器的最大位移是多少?

答: 11.62 mm.

- 8.59 在运转过程中, 一个质量为 65 kg 的机器受到一个大小为 $100 \text{ N}\cdot\text{s}$ 的冲量信号的作用. 求隔振器的刚度和阻尼系数为多大时, 才能使得传递的力为 4000 N, 并使机器的最大位移为最小.

答: $k = 1.34 \times 10^5 \text{ N/m}$, $c = 2.36 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{s/m}$.

- 8.60 一个质量为 50 kg 的机器放在刚度为 $1 \times 10^5 \text{ N/m}$ 的桌子上, 在运行过程中, 机器受到一个大小为 1200 N, 速度为 45 rad/s 的激励作用. 机器在运行过程中, 要消除其稳态振动, 则质量为 5 kg 的减振器所需刚度为多少?

答: $1.01 \times 10^4 \text{ N/m}$.

- 8.61 题 8.60 系统中减振器的稳态振幅为多少?

答: 11.9 cm.

- 8.62 带有减振器的题 8.60 所示系统的固有频率是多少?

答: 38.3 rad/s , 52.5 rad/s .

- 8.63 当安装减振器时, 若题 8.60 机器的稳态振幅小于 5 mm, 则接近 45 rad/s 的频率范围为多少?

答: $44.1 \text{ rad/s} \leq \omega \leq 45.9 \text{ rad/s}$.

- 8.64 一个质量为 10 kg 的无阻尼减振器, 频率调整为 100 rad/s . 当把它安装到刚度为 $5 \times 10^6 \text{ N/m}$ 的单自由度结构中, 此结构的最低固有频率为 85.44 rad/s . 求此结构的较高固有频率为多大?

答: 103 rad/s .

- 8.65 一个质量为 15 kg 的无阻尼减振器, 频率调整到 250 rad/s , 把它放在一个质量为 150 kg, 底座刚度为 $1 \times 10^7 \text{ N/m}$ 的机器上. 当频率为 250 rad/s 时, 减振器的振幅为 3.9 mm, 求频率为 275 rad/s 时机器的振幅.

答: $9.01 \times 10^{-4} \text{ m}$.

- 8.66 一个质量为 50 kg 的机器放在一个 1.5 m 的简支梁的中跨上, 梁的弹性模量为 $210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 惯性矩为 $1.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. 当机器以 3000 r/min 转动时, 其稳态振幅为 1.2 cm. 试设计一个无阻尼减振器, 使得机器在 2900 和 3100 r/min 之间转动时, 其稳态振幅均小于 2 mm.

答: 一个非惟一设计: 2.77 kg , $2.77 \times 10^9 \text{ N/m}$.

- 8.67 如果一个最佳设计的质量为 15 kg 的有阻尼减振器, 用于题 8.66 的系统中, 求以 3000 r/min 运转时, 机器的稳态振幅.

答: 3.39 mm.

- 8.68 一个质量为 20 kg 的机器安装在刚度为 $1.3 \times 10^6 \text{ N/m}$ 的底座上, 求一个质量为 4 kg 的有阻尼减振器的最佳设计刚度和阻尼系数?

答: $1.81 \times 10^4 \text{ N/m}$, $134.3 \text{ N}\cdot\text{s/m}$.

- 8.69 若机器上带有题 8.68 设计的减振器, 且受有 $0.5 \text{ kg}\cdot\text{m}$ 的不平衡转矩, 求机器在以 85 rad/s 速度运转时, 其稳态振幅为多少?

答:0.0925 m.

- 8.70 一个质量为 110 kg 的机器受到一个大小为 1500 N 的激励的作用. 该机器安装在刚度为 3×10^6 N/m 的底座上. 要使最佳设计的有阻尼减振器的最大振幅为 3 mm, 求其质量和阻尼系数.

答:44 kg, 5624 N·s/m.

- 8.71 当把最佳设计的有阻尼减振器安装在题 8.70 的机器中, 求机器在 180 rad/s 速度运转时, 其稳态振幅为多大?

答:1.21 mm.

- 8.72 一个发动机的质量惯性矩为 $3.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 将其安装在刚度为 $1.45 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ 的轴上. 如果作用的力矩大小为 $1000 \text{ N} \cdot \text{m}$, 当在发动机上安装一个质量惯性矩为 $1.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的最佳设计的 Houdaille 有阻尼减振器时, 求发动机在 2000 r/min 速度运转时的稳态振幅.

答:1.60°.

- 8.73 一个质量为 12 kg 的转子其重心到几何中心的距离为 1.2 cm, 这个转子安装在轴上, 且弹性轴承的刚度为 $1.4 \times 10^5 \text{ N}/\text{m}$, 假设阻尼比为 0.05, 当转子以 1500 r/min 运转时, 求扭转振幅为多大?

答:2.26 cm.

第九章 有限元法

有限元法是用来求连续振动系统近似解的方法.有限元法是在可以分成有限个离散单元的连续系统中对瑞利-里兹(Rayleigh-Ritz)方法的应用.设位移函数是两个元素之间的位移,选择位移函数时要满足几何边界条件(即位移和转角),且使单元之间满足必要的连续性.对于杆要求有连续的位移就足够了.而对于梁来说在单元的边界处位移和转角必须具有连续性.

§ 9.1 一般方法

令 l 代表单元的长度,定义局部坐标 $\xi: 0 \leq \xi \leq l$. 令 $u(\xi, t)$ 代表单元的位移,并满足连续性条件,如果 u_1, u_2, \dots, u_k 代表单元的自由度(端位移、转角等),则

$$u(\xi, t) = \sum_{i=1}^k \phi_i(\xi) u_i(t), \quad (9.1)$$

其中 $\phi_i(\xi)$ 称为形状函数,已知位移并由式(9.1)可以得到单元的势能,其二次形式为

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u}, \quad (9.2)$$

其中 $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_k]^T$, \mathbf{k} 是局部刚度矩阵或单元矩阵,单元的动能由式(9.1)计算得到,二次形式为

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}, \quad (9.3)$$

其中 \mathbf{m} 是局部质量矩阵或单元质量矩阵.

有限元模型的自由度总数是 $n = (\text{单元的数目}) \times (\text{每个单元的自由度数})$, 即几何边界条件的数据.定义总位移矢量为 $\mathbf{U} = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n]^T$, 其中 U_1, U_2, \dots, U_n 代表不确定模型的位移,系统的总势能的二次形式为

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}, \quad (9.4)$$

其中 \mathbf{K} 是总刚度矩阵,是通过将各个局部刚度矩阵叠加在一起得到的,系统的总动能的二次形式为

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}, \quad (9.5)$$

其中 \mathbf{M} 是总质量矩阵,由各个局部质量矩阵叠加得到.

连续系统自由振动的微分方程可以近似写成

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (9.6)$$

通过运用第五章的方法求得有限元的固有频率和模态的近似值,即,固有频率的近似值是 $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ 特征值的平方根,而模态形式是由它们的特征向量求得的.

§ 9.2 受迫振动

如果 $F(x, t)$ 代表作用于连续系统随时间变化的外力,则由外力引起总位移的变化所做的总功为

$$\begin{aligned} \sigma W &= \int_0^l F(x, t) \delta u(x, t) dx \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(t) \delta U_i, \end{aligned} \quad (9.7)$$

应用拉格朗日方程得微分方程的近似形式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (9.8)$$

其中 $\mathbf{F} = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_l]^T$. 运用第六章的方法(模态分析等)可以近似得到系统的受迫响应.

§ 9.3 杆元

一个杆元的局部自由度是单元的端位移, 如图 9.1. u_1 代表单元的左端位移($\xi=0$), u_2 代表单元的右端位移($\xi=l$), 则对杆元的来说, 有限元的近似值为

$$u(\xi, t) = \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)u_1(t) + \frac{\xi}{l}u_2(t). \quad (9.9)$$

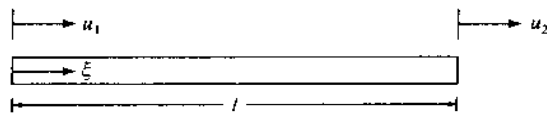


图 9.1

单元体的势能为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2). \quad (9.10)$$

由常数 E 和 A 求得单元刚度矩阵为

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.11)$$

单元体的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\rho Al}{3} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_1\dot{u}_2 + \dot{u}_2^2). \quad (9.12)$$

由常数 ρ 和 A 求得单元体质量矩阵为

$$\mathbf{m} = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (9.13)$$

§ 9.4 梁元

一个只承受横向振动的梁有四个自由度, 即在梁的两端分别有位移和转角, 如图 9.2 所示. $u_1(t)$ 表示在 $\xi=0$ 处的位移, $u_2(t)$ 表示在 $\xi=0$ 处的转角, $u_3(t)$ 表示 $\xi=l$ 处的位移, $u_4(t)$ 表示在 $\xi=l$ 处的转角, 则梁元位移有限元表达式可以写成

$$u(\xi, t) = \left(1 - 3\frac{\xi^2}{l^2} + 2\frac{\xi^3}{l^3}\right)u_1 + \left(\frac{\xi}{l} - 2\frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\xi^3}{l^3}\right)lu_2 + \left(3\frac{\xi^2}{l^2} - 2\frac{\xi^3}{l^3}\right)u_3 + \left(-\frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\xi^3}{l^3}\right)lu_4. \quad (9.14)$$

梁元的势能为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi. \quad (9.15)$$

由常数 E 和 I 得单元的刚度矩阵为

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ -6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (9.16)$$

由式(9.12)得动能, 对定值 ρ 和 A 得质量矩阵为

$$m = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (9.17)$$

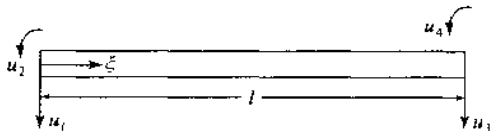


图 9.2

例 题

9.1 求杆元的单元刚度矩阵.

解 由式(9.9)得杆元的位移, 且

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{l}u_1 + \frac{1}{l}u_2 - \frac{1}{l}(u_2 - u_1)\xi,$$

代入势能公式(9.10)中, 得

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{EA}{l^2} (u_2 - u_1)^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2} \frac{EA}{l^2} (u_2 - u_1)^2 \int_0^l d\xi \\ &= \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{EA}{l} [u_2 u_1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因此单元刚度矩阵由式(9.11)可解得.

9.2 用一个单元有限元模型来近似计算一端固定一端自由的均匀杆的第一阶固有频率.

解 一端固定杆的单元有限元模型只有一个自由度, 即自由端的位移, 由式(9.9)和式(9.13)

且 $u_1 = 0$ 可得到模型的势能和动能

$$V = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} u_2^2, \quad T = \frac{1}{2} \frac{\rho A l}{3} \dot{u}_2^2.$$

用能量法建立微分方程来近似计算杆自由端的位移

$$\frac{\rho A l}{3} \ddot{u}_2 + \frac{EA}{l} u_2 = 0,$$

$$\ddot{u}_2 + \frac{3E}{\rho l^2} u_2 = 0.$$

第一阶固有频率的近似值为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3E}{\rho l^2}}.$$

9.3 试求一端固定一端自由的均匀杆, 其四元素有限元模型的总刚度矩阵和总质量矩阵.

解 一端固定杆的四元素有限元模型如图

9.3 所示, 从整体上说模型有 4 个自由度, 总刚度和总质量矩阵都是 4×4 矩阵, 并通过势能与动能

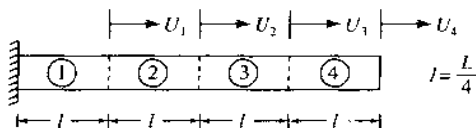


图 9.3

相加而获得. 在写微分方程式时, 它们将乘以总位移矢量 $U = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^T$, 让它对时间求两次导数, 形式如下所示(注: 小写 u 's 对应局部坐标, 大写 U 's 对应总坐标).

单元体 1: $u_1 = 0, u_2 = U_1$. 则用总位移矢量表示为

$$V = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} U_1^2 = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix},$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho Al}{6} 2 \dot{U}_1^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho Al}{6} [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dot{U}_3 \ \dot{U}_4] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix}$$

单元体 2: $u_1 = U_1, u_2 = U_2$

$$V = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{EA}{l} [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix},$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho Al}{6} [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\rho Al}{6} [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dot{U}_3 \ \dot{U}_4] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix}.$$

单元体 3: $u_1 = U_2, u_2 = U_3$

$$V = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} [U_2 \ U_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{EA}{l} [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix},$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho Al}{6} [\dot{U}_2 \ \dot{U}_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\rho Al}{6} [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dot{U}_3 \ \dot{U}_4] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix}.$$

单元体 4: $u_1 = U_3, u_2 = U_4$

$$V = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} [U_3 \ U_4] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{EA}{l} [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix},$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho Al}{6} [\dot{U}_3 \ \dot{U}_4] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\rho A l}{6} [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dot{U}_3 \ \dot{U}_4] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix}.$$

总势能为

$$V = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}.$$

总动能为

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho A l}{6} [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dot{U}_3 \ \dot{U}_4] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix}.$$

因此, 四自由度模型的矩阵和质量矩阵为

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

9.4 一个单端固定的均匀杆, 用一个四自由度模型来近似计算该杆的前两阶固有频率和模态, 并比较有限元形状和精确模型形状。

解 固有频率近似取 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 特征值的均方根, 用第五章的方法和在题 9.3 中得到的总质量和总刚度矩阵, 则前两阶固有频率是

$$\omega_1 = \frac{0.395}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \omega_2 = \frac{1.247}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

注意到, l 代表有单元体长度等于 $L/4$, 其中 L 代表杆的总长, 用 L 表示得

$$\omega_1 = \frac{1.581}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \omega_2 = \frac{4.987}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

相应的特征向量为

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0.112 \\ 0.207 \\ 0.270 \\ 0.292 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0.299 \\ 0.229 \\ -0.124 \\ -0.324 \end{bmatrix}.$$

此解代表模型的总位移。

两个精确的前两阶固有频率和相应的模型为

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad u_1(x) = \sin \frac{\pi x}{2L},$$

$$\omega_2 = \frac{3\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad u_2(x) = \sin \frac{3\pi x}{2L}.$$

第一个固有频率的近似值的误差为 0.66%, 第二个为 5.8%, 近似模态形状的图形见图 9.4, 其中最大位移设为 1。

9.5 用一个两单元体有限元模型近似计算图 9.5 系统的第一阶固有频率。

解 杆被分成等长度的两个部分, $l = L/2$, 如图 9.6 所示。在总坐标系中, 截面面积为

$$A(x) = \pi r^2 \left[1 - \frac{x}{2L} \right]^2.$$

由于面积随单元体的长度而变化, 所以必须通过式 (9.9) 中的杆元来得到单元体的刚度矩阵和质量矩阵。

考虑单元体 1: $\xi = x$, $u_1 = 0$, $u_2 = U_1$

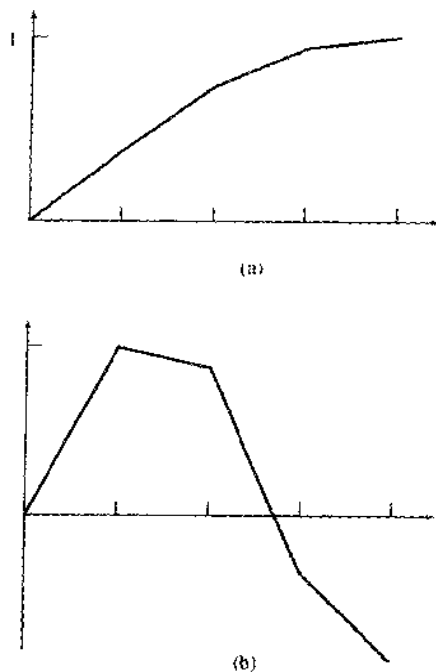


图 9.4

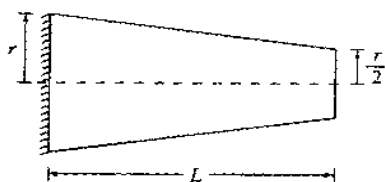


图 9.5

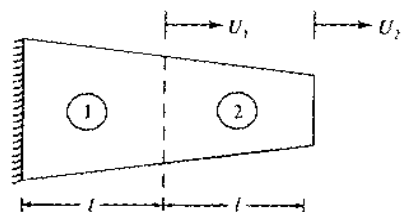


图 9.6

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (u_2^2 - u_1^2) \int_0^l E \pi r^2 \left(1 - \frac{\xi}{4l} \right)^2 d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \frac{37}{48} \frac{E \pi r^2}{l} (u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2), \\
 T &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho \pi r^2 \left(1 - \frac{\xi}{4l} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{\xi}{l} \right) \dot{u}_1 + \frac{\xi}{l} \dot{u}_2 \right]^2 d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\rho \pi r^2 l}{480} (141 \dot{u}_1^2 + 123 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + 106 \dot{u}_2^2).
 \end{aligned}$$

因此, 单元体的质量矩阵和刚度矩阵为

$$k_1 = \frac{37}{48} \frac{E \pi r^2}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_1 = \frac{\rho \pi r^2 l}{480} \begin{bmatrix} 141 & 61.5 \\ 61.5 & 106 \end{bmatrix}.$$

考虑单元体 2: $\xi = x - l$, $u_1 = U_1$, $u_2 = U_2$

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (u_2 - u_1)^2 \int_0^l E \pi r^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\xi}{4l} \right)^2 d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \frac{19}{48} \frac{E \pi r^2}{l} (u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2), \\
 T &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho \pi r^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\xi}{4l} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{\xi}{l} \right) \dot{u}_1 + \frac{\xi}{l} \dot{u}_2 \right]^2 d\xi
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\rho \pi r^2 l}{480} (76 \dot{u}_1^2 + 63 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + 51 \dot{u}_2^2).$$

单元体 2 的质量矩阵和刚度矩阵为

$$k_2 = \frac{19}{48} \frac{E \pi r^2}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_2 = \frac{\rho \pi r^2 l}{480} \begin{bmatrix} 76 & 31.5 \\ 31.5 & 51 \end{bmatrix}.$$

总质量和总刚度矩阵形式为

$$\mathbf{K} = \frac{E \pi r^2}{48l} \left\{ \begin{bmatrix} 37 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19 & 19 \\ -19 & 19 \end{bmatrix} \right\} = \frac{E \pi r^2}{48l} \begin{bmatrix} 56 & -19 \\ -19 & 19 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \frac{E \pi r^2 l}{480} \left\{ \begin{bmatrix} 106 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 76 & 31.5 \\ 31.5 & 51 \end{bmatrix} \right\} = \frac{\rho \pi r^2 l}{480} \begin{bmatrix} 182 & 31.5 \\ 31.5 & 51 \end{bmatrix}.$$

固有频率近似是 $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ 特征根的均方根, 得

$$\omega_1 = \frac{1.03}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{2.06}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \omega_2 = \frac{2.83}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{5.66}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

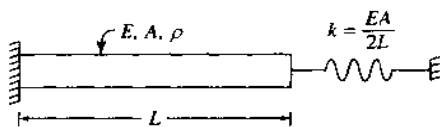


图 9.7

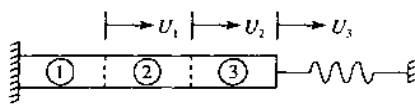


图 9.8

9.6 用三单元体有限元模型来近似计算图 9.7 所示系统的固有频率和模态。

解 把杆三等分, $l = L/3$, 如图 9.8 所示。由式(9.11)得单元体 1, 2 的刚度矩阵, 由式(9.13)得三个单元体的质量矩阵。要考虑弹簧的影响, 则需对单元体 3 的刚度矩阵进行修正, 单元体 3 以局部坐标的形式表示为

$$V = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2) + \frac{1}{2} \frac{EA}{6l} u_3^2 = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (u_1^2 - 2u_1 u_2 + \frac{7}{6} u_2^2).$$

因此, 单元体的刚度矩阵为

$$k_3 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{7}{6} \end{bmatrix}.$$

与题 9.3 类似, 质量矩阵和总刚度矩阵由叠加得到

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{7}{6} \end{bmatrix}.$$

固有频率近似是 $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ 特征根的均方根, 第一阶固有频率的近似值为

$$\omega_1 = \frac{0.622}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{1.867}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

9.7 用二单元体有限元模型近似计算图 9.9 所示扭转系统的第一阶固有频率。

解 将系统分成等长的两部分, $l = L/2$ 。扭转系统的质量矩阵和刚度矩阵形式与轴系统的矩阵形式相似, 对于一个没有离散刚度元素的均匀单元(单元 1 和单元 2)

$$k = \frac{JG}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

对于一个没有离散惯性元素的均匀单元体(单元 1)

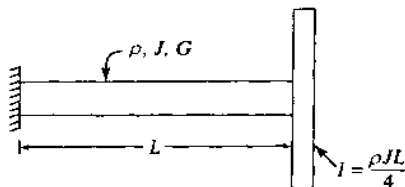


图 9.9

$$\mathbf{m} = \frac{\rho J l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

单元体 2 的动能是

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho J \left[\left(1 - \frac{\xi}{l} \right) \dot{u}_1 + \frac{\xi}{l} \dot{u}_2 \right]^2 d\xi - \frac{1}{2} J \dot{u}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho J l}{6} (2\dot{u}_1^2 + 2\dot{u}_1\dot{u}_2 + 2\dot{u}_2^2) + \frac{1}{2} \frac{\rho J l}{2} \dot{u}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho J l}{6} (2\dot{u}_1^2 + 2\dot{u}_1\dot{u}_2 + 5\dot{u}_2^2). \end{aligned}$$

因此, 单元体的质量矩阵为

$$\mathbf{m}_2 = \frac{\rho J l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

由题 9.3 的解题过程得总质量和总刚度矩阵为

$$\mathbf{M} = \frac{\rho J l}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{JG}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

固有频率的近似值是 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 特征值的均方根, 为

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{0.639}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \frac{1.278}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \\ \omega_2 &= \frac{2.155}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \frac{4.31}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \end{aligned}$$

9.8 用二单元体有限元模型建立图 9.10 所示系统的受迫振动的微分方程.

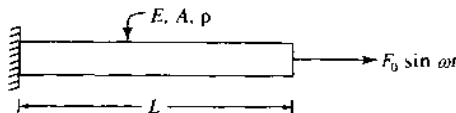


图 9.10

解 图 9.10 系统的二单元体有限元模型的总质量和总刚度矩阵为

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

外力做的功为

$$\delta W = \int_0^l \left[\left(1 - \frac{\xi}{l} \right) \delta U_1 + \frac{\xi}{l} \delta U_2 \right] F_0 \sin \omega t \delta(\xi - l) d\xi = F_0 \sin \omega t \delta U_2.$$

因此, 微分方程式为

$$\frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{bmatrix} + \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \sin \omega t \end{bmatrix}.$$

9.9 求式(9.14)的推导过程.

解 未承受横向载荷的梁中, 单元体横向静挠度满足

$$\frac{d^4 u}{d\xi^4} = 0,$$

积分解得

$$u(\xi) = C_1 \xi^3 + C_2 \xi^2 + C_3 \xi + C_4. \quad (9.18)$$

通过在 $\xi=0$ 和 $\xi=l$ 两种条件下确定转角和横向挠度得到常数 C_1, C_2, C_3, C_4 , 最后, 用图 9.2 中的符号, 记为

$$u(0) = u_1, \quad u(l) = u_3, \quad \frac{du}{d\xi}(0) = u_2, \quad \frac{du}{d\xi}(l) = u_4. \quad (9.19)$$

把式(9.19)的条件代入(9.18)中, 得

$$u(0) = 0 \rightarrow C_4 = u_1,$$

$$\frac{du}{d\xi}(0) = u_2 \rightarrow C_3 = u_2,$$

$$u(l) = u_3 \rightarrow C_1 l^3 + C_2 l^2 + C_3 l + C_4 = u_3,$$

$$\frac{du}{d\xi}(l) = u_4 \rightarrow 3C_1 l^2 + 2C_2 l + C_3 = u_4$$

联立解前边方程组中后两个方程式得

$$C_1 = \frac{1}{l^3}(2u_1 - lu_2 - 2u_3 + lu_4),$$

$$C_2 = \frac{1}{l^2}(-3u_1 - 2lu_2 + 3u_3 - lu_4).$$

将确定的常数代入(9.18)中,整理得式(9.14).

9.10 推导出在等直梁元局部质量矩阵中的 m_{34} 元素.

解 由式(9.14)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & \left(1 - 3\frac{\xi^2}{l^2} + 2\frac{\xi^3}{l^3}\right) \dot{u}_1 + \left(\frac{\xi}{l} - 2\frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\xi^3}{l^3}\right) l \dot{u}_2 \\ & + \left(3\frac{\xi^2}{l^2} - 2\frac{\xi^3}{l^3}\right) \dot{u}_3 + \left(-\frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\xi^3}{l^3}\right) l \dot{u}_4. \end{aligned}$$

将上述表达式代入式(9.12)中,单元质量矩阵中 m_{34} 的项为

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^l \rho A \left(3\frac{\xi^2}{l^2} - 2\frac{\xi^3}{l^3}\right) \dot{u}_3 \left(-\frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\xi^3}{l^3}\right) l \dot{u}_4 d\xi \\ &= 2\rho A l \dot{u}_3 \dot{u}_4 \int_0^1 \left(-3\frac{\xi^4}{l^4} + 5\frac{\xi^5}{l^5} - 2\frac{\xi^6}{l^6}\right) d\xi \\ &= 2\rho A l \dot{u}_3 \dot{u}_4 \left(-\frac{3}{5} + \frac{5}{6} - \frac{2}{7}\right) \\ &= -\frac{11}{105} \rho A l^2 \dot{u}_3 \dot{u}_4. \end{aligned}$$

将动能的二次方程式展开,它包含 $2m_{34}\dot{u}_3\dot{u}_4$ 项,从而

$$m_{34} = -\frac{11}{210} \rho A l.$$

9.11 用一单元体有限元模型来近似计算一个单端固定的等直梁的第一阶固有频率和模态.

解 在固定端转角和位移为0,即 $u_1 = u_2 = 0$,因此,单端固定梁的单元体有两个自由度.设 $u_3 = u_4 = 0$,消去式(9.16)和(9.17)单元质量和刚度矩阵中的第一、二行和列,就得到梁的总质量、总刚度矩阵

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}.$$

固有频率的近似值是 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 的特征值均方根,为

$$\omega_1 = 3.53 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}.$$

特征向量对应第一阶模态 $\mathbf{u} = [1 \quad 1.378/L]^T$,因此由式(9.14)得模态近似形状为

$$\begin{aligned} u(x) &= 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} + \left(-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right) L \left(\frac{1.378}{L}\right) \\ &= 1.622 \frac{x^2}{L^2} - 0.622 \frac{x^3}{L^3}, \end{aligned}$$

由图 9.11 所示.

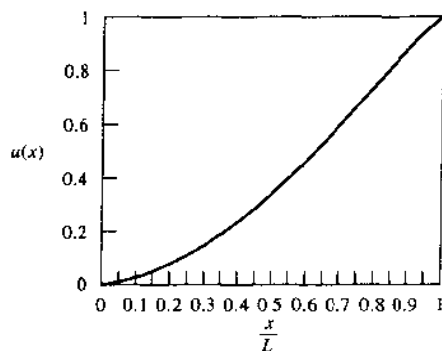


图 9.11

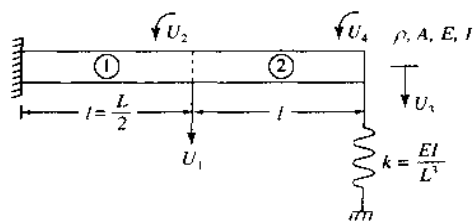


图 9.12

9.12 试用二单元体有限元模型近似求解如图 9.12 所示系统的总刚度矩阵。

解 图 9.12 所示梁的二单元体模型有四个自由度, 即图示的总节点位移。对单元体 1: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = U_1$, $u_4 = U_2$ 。单元刚度矩阵为

$$K_1 = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & 0 & 0 \\ -6l & 4l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对单元体 2: $u_1 = U_1$, $u_2 = U_2$, $u_3 = U_3$, $u_4 = U_4$ 。由于弹簧产生的势能, 必须对单元体 2 的刚度矩阵进行修改, 则

$$V_2 = \frac{1}{2} k u_3^2 = \frac{1}{2} \frac{EI}{L^3} u_3^2 - \frac{1}{2} \frac{EI}{8l^3} u_3^2$$

对单元体 2 的单元刚度矩阵为

$$K_2 = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ 12 & -6l & 12.125 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

因此, 总刚度矩阵为

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 12 & 6l \\ 0 & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12.125 & 6l \\ -6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

9.13 试用一单元体有限元模型近似计算如图 9.13 所示系统的质量矩阵。

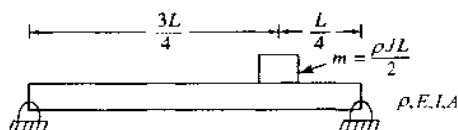


图 9.13

解 对简支梁, 用一单元体有限元模型得 $u_1 = u_2 = 0$ 。由式(9.14)在 $\xi = 3L/4$ 处, 得

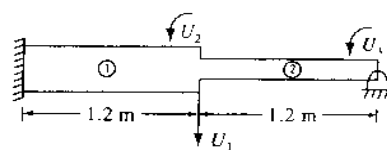
$$\begin{aligned} u\left(\frac{3}{4}L\right) &= \left[\frac{3}{4} - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3\right]Lu_2 \\ &\quad + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3\right]Lu_4 \\ &\quad - \frac{L}{64}(3u_2 - 9u_4). \end{aligned}$$

J 是物块的动能为

$$T_b = \frac{1}{2} m \left[\frac{L}{64} (3\dot{u}_2 - 9\dot{u}_4) \right]^2 \\ - \frac{1}{2} \frac{mL^2}{4096} (9\dot{u}_2^2 - 54\dot{u}_2\dot{u}_4 + 81\dot{u}_4^2).$$

在整体系统中, $U_1 = u_2$, $U_2 = u_4$, 则总质量矩阵为

$$M = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 4L^2 & -3L^2 \\ -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{\rho AL^3}{2(4096)} \begin{bmatrix} 9 & -27 \\ -27 & 81 \end{bmatrix} \\ = \rho AL^3 \begin{bmatrix} 0.0106 & -0.0104 \\ -0.0104 & 0.0194 \end{bmatrix}.$$



9.14 用二单元体有限元模型近似计算图 9.14 所示系统的前两阶固有频率。

$$I_1 = 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \quad I_2 = 8.8 \times 10^{-7} \text{ m}^4, \\ A_1 = 2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2, \quad A_2 = 8.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2,$$

解 当使用二单元体模型, 并且有一个单元体被包住了时, 该系统有三个自由度, 如图 9.14 所示。

单元体 1: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = U_1$, $u_4 = U_2$, 单元体的质量和刚度矩阵为

$$E_1 = E_2 = 200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \\ \rho_1 = \rho_2 = 7500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

图 9.14

$$k_1 = \frac{\left(200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (1.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(1.2 \text{ m})^3} \begin{bmatrix} 12 & 6(1.2) & -12 & 6(1.2) \\ 6(1.2) & 4(1.2)^2 & -6(1.2) & 2(1.2)^2 \\ 12 & -6(1.2) & 12 & -6(1.2) \\ 6(1.2) & 6(1.2)^2 & 6(1.2) & 4(1.2)^2 \end{bmatrix} \\ = 10^6 \begin{bmatrix} 2.08 & 1.25 & -2.08 & 1.25 \\ 1.25 & 1.0 & -1.25 & 0.500 \\ 2.08 & -1.25 & 2.08 & -1.25 \\ 1.25 & 0.500 & -1.25 & 1.0 \end{bmatrix}, \\ m_1 = \frac{\left(7500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) (2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2) (1.2 \text{ m})}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22(1.2) & 54 & -13(1.2) \\ 22(1.2) & 4(1.2)^2 & 13(1.2) & -3(1.2)^2 \\ 54 & 13(1.2) & 156 & -22(1.2) \\ -13(1.2) & -3(1.2)^2 & -22(1.2) & 4(1.2)^2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 8.02 & 1.36 & 2.77 & -0.802 \\ 1.36 & 0.296 & -0.802 & -0.222 \\ 2.77 & 0.802 & 8.02 & 1.36 \\ -0.802 & -0.222 & -1.36 & -0.296 \end{bmatrix}.$$

单元体 2: $u_1 = U_1$, $u_2 = U_2$, $u_3 = 0$, $u_4 = U_3$, 该单元体的质量和刚度矩阵为

$$k_2 = \frac{\left(200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (8.8 \times 10^{-7} \text{ m}^4)}{(1.2 \text{ m})^3} \begin{bmatrix} 12 & 6(1.2) & -12 & 6(1.2) \\ 6(1.2) & 4(1.2)^2 & 6(1.2) & 2(1.2)^2 \\ -12 & -6(1.2) & 12 & -6(1.2) \\ 6(1.2) & 2(1.2)^2 & -6(1.2) & 4(1.2)^2 \end{bmatrix} \\ = 10^6 \begin{bmatrix} 1.22 & 0.733 & -1.22 & 0.733 \\ 0.733 & 0.586 & -0.733 & 0.293 \\ -1.22 & 0.733 & 1.22 & -0.733 \\ 0.733 & 0.293 & -0.733 & 0.586 \end{bmatrix}, \\ m_2 = \frac{\left(7500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) (8.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2) (1.2 \text{ m})}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22(1.2) & 54 & -13(1.2) \\ 22(1.2) & 4(1.2)^2 & 13(1.2) & 3(1.2)^2 \\ 54 & 13(1.2) & 156 & 22(1.2) \\ -13(1.2) & -3(1.2)^2 & -22(1.2) & 4(1.2)^2 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 2.84 & 0.480 & 0.983 & -0.284 \\ 0.480 & 0.105 & 0.284 & -0.0786 \\ 0.983 & 0.284 & 2.84 & 0.480 \\ 0.284 & -0.0786 & -0.480 & 0.105 \end{bmatrix}$$

总矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= 10^6 \begin{bmatrix} 2.09 & -1.25 & 0 \\ 1.25 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 10^6 \begin{bmatrix} 1.22 & 0.733 & 0.733 \\ 0.733 & 0.586 & 0.293 \\ -0.733 & 0.293 & 0.586 \end{bmatrix} \\ &\quad - 10^6 \begin{bmatrix} 3.31 & 0.517 & 0.733 \\ -0.517 & 1.586 & 0.293 \\ 0.733 & 0.293 & 0.586 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 8.02 & 1.36 & 0 \\ -1.36 & 0.296 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.84 & 0.480 & -0.284 \\ 0.480 & 0.105 & 0.0786 \\ 0.284 & 0.0786 & 0.105 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} 10.86 & -0.880 & 0.284 \\ 0.880 & 0.401 & -0.0786 \\ -0.284 & -0.0786 & 0.105 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

固有频率约等于 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 特征值的均方根, 经计算得前两阶固有频率为 $\omega_1 = 404.7 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 1524 \text{ rad/s}$.

9.15 用三单元体有限元模型来建立图 9.15 所示系统受迫振动的微分方程.

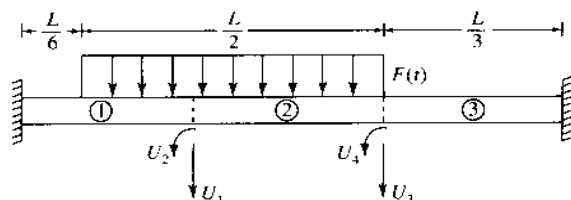


图 9.15

解 图 9.15 所示一端固定, 一端自由的梁, 其三单元体模型有四个自由度, 总坐标如图 9.15 所示, 对每个单元体, 总坐标与局部坐标的关系为

单元体 1: $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = U_1, u_4 = U_2$,

单元体 2: $u_1 = U_1, u_2 = U_2, u_3 = U_3, u_4 = U_4$,

单元体 3: $u_1 = U_3, u_2 = U_4, u_3 = 0, u_4 = 0$

通过将每个单元体的质量和刚度矩阵叠加到总质量和总刚度矩阵, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{EI}{l^3} \left\{ \begin{bmatrix} -12 & 6l & 0 & 0 \\ -6l & 4l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6l \\ 0 & 0 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 24 & 0 \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \frac{\rho A l}{420} \left\{ \begin{bmatrix} 156 & -22l & 0 & 0 \\ -22l & 4l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 156 & 22l \\ 0 & 0 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 312 & 0 \\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

其中 $l = L/3$.

由分布载荷而做的功为

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \int_{l/2}^l F(\xi) \left[\left(3 \frac{\xi^2}{l^2} - 2 \frac{\xi^3}{l^3} \right) \delta U_1 + \left(-\frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\xi^3}{l^3} \right) l \delta U_2 \right] d\xi \\
 &\quad + \int_0^{l/2} F(\xi) \left[\left(1 - 3 \frac{\xi^2}{l^2} + 2 \frac{\xi^3}{l^3} \right) \delta U_1 + \left(\frac{\xi}{l} - 2 \frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\xi^3}{l^3} \right) l \delta U_3 \right. \\
 &\quad \left. + \left(3 \frac{\xi^2}{l^2} - \frac{\xi^3}{l^3} \right) \delta U_3 + \left(-\frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\xi^3}{l^3} \right) l \delta U_4 \right] d\xi \\
 &= F(t) \left[\frac{29}{32} l \delta U_1 + \frac{5}{192} l^2 \delta U_2 + \frac{3}{4} l \delta U_3 - \frac{1}{12} l^2 \delta U_4 \right].
 \end{aligned}$$

图 9.15 所示系统的三单元体有限元的微分方程为

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 312 & 0 \\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_3 \\ \ddot{U}_4 \end{bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 24 & 0 \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \\
 - \begin{bmatrix} \frac{29}{32} l \\ \frac{5}{192} l^2 \\ \frac{3}{4} l \\ -\frac{1}{12} l^2 \end{bmatrix} F(t).
 \end{aligned}$$

补充习题

9.16 推导均匀杆元的单元质量矩阵, 即式(9.13).

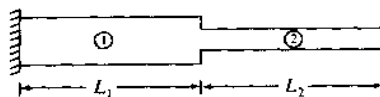
9.17 用一单元体有限元模型来估算图 9.7 所示系统的第一阶固有频率.

$$\text{答: } \frac{3}{L} \sqrt{\frac{E}{2\rho}}.$$

9.18 试用一单元体有限元模型来估算一个两端均自由的轴的第一阶非零扭转固有频率.

$$\text{答: } \frac{2}{L} \sqrt{\frac{3G}{\rho}}.$$

9.19 用二单元体有限元模型来估算图 9.16 所示系统的第一阶固有频率.



$$E_1 = E_2 = 200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 7500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$A_1 = 1.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \quad A_2 = 8.7 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$L_1 = 65 \text{ cm} \quad L_2 = 80 \text{ cm}$$

图 9.16

答: $6.68 \times 10^3 \text{ rad/s}$.

- 9.20 如图 9.17 所示系统由均匀杆和附加质量块组成, 用三单元体模型推导图示系统的总刚度矩阵.

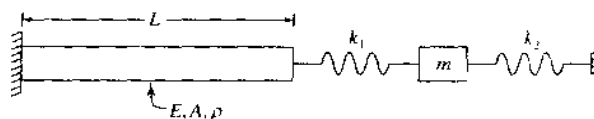


图 9.17

答:

$$\begin{bmatrix} \frac{6EA}{L} & -\frac{3EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{3EA}{L} & \frac{6EA}{L} & \frac{3EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3EA}{L} & \frac{6EA}{L} + k_1 & -k_1 \\ 0 & 0 & -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

- 9.21 推导题 9.20 中系统的总质量矩阵.

答:

$$\begin{bmatrix} \frac{2\rho AL}{9} & \frac{\rho AL}{18} & 0 & 0 \\ \frac{\rho AL}{18} & \frac{2\rho AL}{9} & \frac{\rho AL}{18} & 0 \\ 0 & \frac{\rho AL}{18} & \frac{\rho AL}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

- 9.22 如图 9.18 所示系统, 用一个单元体代替一个杆, 建立此模型, 估算该系统的第一阶固有频率.

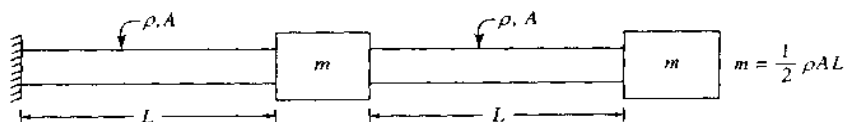


图 9.18

答: $\frac{0.755}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

- 9.23 图 9.19 所示轴, 承受一个随时间变化的均匀分布的扭转载荷, 试用二单元体建立轴模型, 推导该轴的运动微分方程.

答:

$$\begin{bmatrix} \frac{\rho J L}{3} & \frac{\rho J L}{12} \\ \frac{\rho J L}{12} & \frac{\rho J L}{6} + J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4JG}{L} & \frac{2JG}{L} \\ -\frac{2JG}{L} & \frac{2JG}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} T_0 L e^{i\omega t}$$

- 9.24 求在等直梁元的刚度矩阵中的元素 k_{13} .

答: $-\frac{12EI}{l^3}$.

- 9.25 求在等直梁元的质量矩阵中的元素 m_{12} .

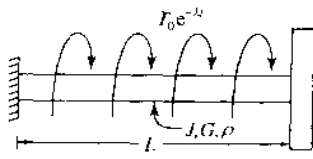


图 9.19

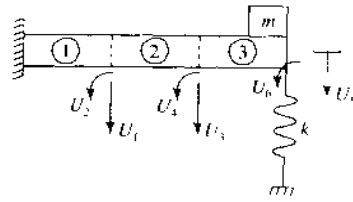


图 9.20

答: $\frac{11\rho AL^2}{210}$.

9.26 求梁的一单元体模型的第一阶固有频率.

答: $10.95 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$.

9.27 求图 9.20 所示系统的总质量矩阵.

答:

$$\frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13l & 0 & 0 \\ 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l \\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13l & 156 + \frac{420m}{\rho AL} & -22l \\ 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix}.$$

9.28 求图 9.20 所示系统的总刚度矩阵.

答:

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 + \frac{kl^2}{EI} & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}.$$

9.29 用两个长度相同的单元体建模, 估算一个有固定铰的等值梁前二阶固有频率.

答: $15.56 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}, \quad 58.41 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}.$

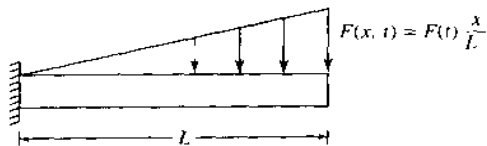


图 9.21

9.30 由两单元体对梁建模, 求图 9.21 所示系统的运动微分方程.

答:

$$\frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -\frac{13}{2}L \\ 0 & 2L^2 & \frac{13}{2}L & \frac{3}{4}L^2 \\ 54 & \frac{13}{2}L & 156 & -11L \\ -\frac{13}{2}L & \frac{3}{4}L^2 & -11L & L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \tilde{U}_4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 12 & 3L \\ 0 & 2L^2 & -3L & \frac{L^2}{2} \\ 12 & -3L & 12 & -3L \\ 3L & \frac{L^2}{2} & -3L & L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} \frac{L}{4} \\ \frac{L^2}{12} \\ \frac{17}{80}L \\ -\frac{L^2}{60} \end{bmatrix} F(t),
\end{aligned}$$

第十章 非线性系统

§ 10.1 与线性系统的差异

线性系统与非线性系统的一些不同之处在于：

1. 非线性系统的运动是由一个非线性微分方程控制的, 但是很多非线性方程都不存在精确解.
2. 一个非线性系统可能不只一个平衡点, 而平衡点可能是稳定的, 也可能是不稳定的.
3. 一个非线性系统是否存在稳态运动取决于初始条件.
4. 非线性系统的自由振动周期由初始条件决定, 这就意味着自由振动的频率依赖于自由振动的振幅.
5. 非线性系统的共振出现在激发频率不同于系统的线性固有频率处, 在一个三维非线性系统中, 当激发频率为系统线性固有频率的 $1/3$ 时, 产生超谐共振, 当激发频率为系统线性固有频率近三倍时, 产生亚谐共振.
6. 线性叠加原理不能用来分析受多频激励的非线性系统, 共振的组合是对应于激发频率的近似组合.
7. 对应于固有频率的近似组合, 在多自由度的连续系统中存在内共振.
8. 在非线性系统中, 周期激励可能会引起非周期响应. 由于一些特定的参数值, 这种混沌运动出现在很多非线性系统中.

§ 10.2 定性分析

状态平面或相位平面是速度和位移在整个运动过程中的关系曲线, 通过在平衡点的邻域内将控制微分方程线性化, 可以检验平衡点的性质及其稳定性(见题 10.2), 平衡点的各种类

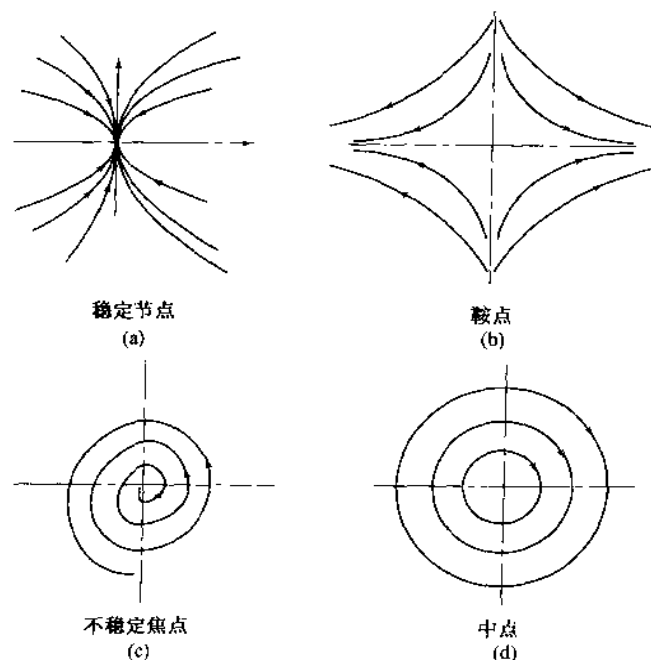


图 10.1

型如图 10.1 所示.

§ 10.3 达芬方程

达芬方程

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + x + \epsilon x^3 = F \sin \tau t \quad (10.1)$$

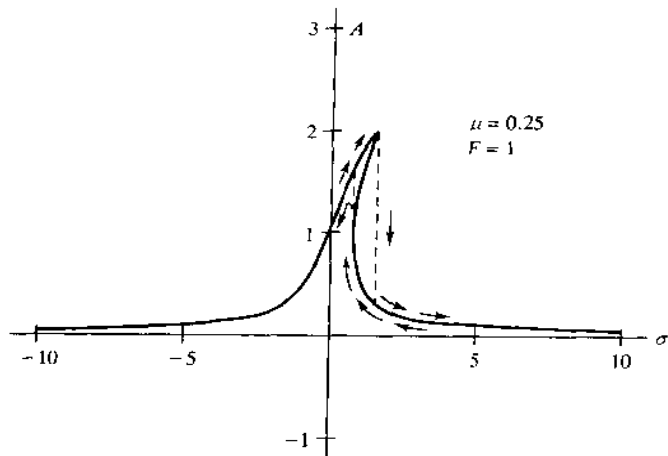


图 10.2

是一个无量纲方程. 它作为一个模型可用于求解三维非线性系统. 如果 ϵ 为正, 则表示一个硬弹簧的响应; 如果 ϵ 为负, 则表示一个软弹簧系统的响应. 一个系统自由振动的幅频关系由达芬方程决定, 它可以用扰动方法近似表示为

$$\omega = 1 + \frac{3}{8}\epsilon A^2 + O(\epsilon^2), \quad (10.2)$$

其中 ω 是固有频率的无量纲化(对于线性系统 $\omega = 1$), A 是振幅, 分析共振附近达芬方程的受迫响应可以设

$$r = 1 + \epsilon\sigma, \quad (10.3)$$

则稳态振幅的定义方程就可近似表示为

$$4A^2 \left[\mu^2 + \left(\sigma - \frac{3}{8}A^2 \right)^2 \right] = F^2. \quad (10.4)$$

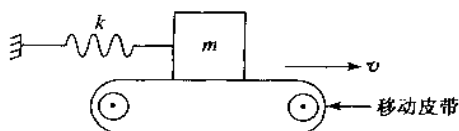


图 10.3

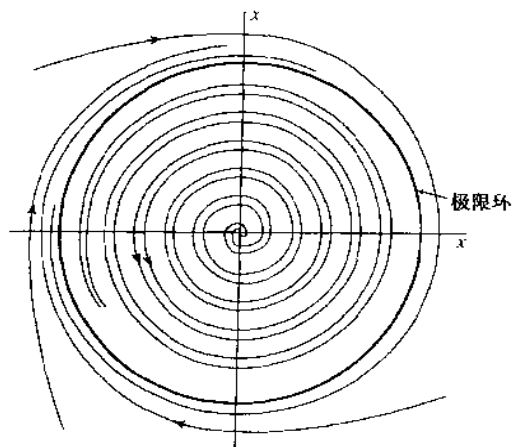


图 10.4

方程(10.4)在图 10.2 中的关系曲线表示为 $\epsilon > 0$ 时中枢曲线和跳跃现象, 对于给定的 σ 值, 方程(10.4)有三个正实解, 因为 A^2 引起了三种可能的稳态运动, 中间解是不稳定的, 引起跳跃现象.

§ 10.4 自激振动

自激振动是由系统运动而引起的振动, 它是由非线性形式的阻尼引起的, 这里的阻尼项在给定的运动范围内是负值. 图 10.3 所示的动力系统表现的就是负阻尼, 而振幅却不断变大, 范德波尔方程就是某些自激系统的一个模型, 即

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \quad (10.5)$$

图 10.4 所示的相平面就表示了范德波尔振子自由振动的一个极限环.

例 题

10.1 单摆运动的非线性方程的无量纲化形式为

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0.$$

- (i) 推导定义运动相平面的广义方程;
- (ii) 求在 $\theta = 0, \dot{\theta} = 1$ 条件下的轨线;
- (iii) 单摆的最大摆角是多少?

解 (i) 令 $v = \dot{\theta}$, 则

$$\dot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = v \frac{dv}{d\theta}.$$

从而微分方程就可写成

$$v \frac{dv}{d\theta} + \sin\theta = 0,$$

对 θ 求积分, 则得

$$\frac{1}{2}v^2 - \cos\theta = C,$$

其中 C 是一个积分常数.

- (ii) 要求当 $\theta = 0$ 时, $v = 1$, 则 $C = -\frac{1}{2}$, 从而解出 v

$$v = \sqrt{2\cos\theta - 1}.$$

- (iii) 当 $v = 0$ 时, 最大摆角 $\theta = 60^\circ$.

10.2 令 $x = x_0$ 代表非线性系统的平衡位置, 取 $x = x_0 + \Delta x$ 来分析在平衡点邻域内系统的运动. 通过在平衡点处线性化微分方程, 来确定平衡点的类型及其稳定性.

解 设控制微分方程的形式为

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0.$$

若 $x = x_0$ 代表一个平衡点, 则 $f(x_0, 0) = 0$. 将 $x = x_0 + \Delta x$ 代入微分方程, 得

$$\Delta\ddot{x} + f(x_0 + \Delta x, \Delta\dot{x}) = 0.$$

用泰勒级数展开, 得

$$\Delta\ddot{x} + f(x_0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x_0, 0)\Delta\dot{x} + \cdots = 0.$$

加上平衡条件并略去高阶项线性化得

$$\Delta\ddot{x} + \alpha\Delta\dot{x} + \beta\Delta x = 0,$$

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x_0, 0), \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0).$$

方程的解可记为

$$\Delta x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

其中 λ_1 和 λ_2 是方程 $\lambda^2 + 2\lambda + \beta = 0$ 的根, 平衡点的类型及其稳定性讨论如下:

- (1) 若 λ_1 或 λ_2 其一有正实部, 则从平衡点出发的扰动无限大, 故解不稳定.
- (2) 若 λ_1 和 λ_2 都是正实数且同号, 则平衡点为节点(稳定或不稳定).
- (3) 若 λ_1 和 λ_2 是实数且异号, 则平衡点为鞍点(不稳定).
- (4) 若 λ_1 和 λ_2 为共轭复数, 则平衡点为焦点(稳定或不稳定).
- (5) 若 λ_1 和 λ_2 都是纯虚数, 则平衡点是中点.

10.3 确定摆动方程所有平衡点的类型及其稳定性.

解 单摆的运动的非线性微分方程为

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0.$$

采用题 10.2 中的符号, 得

$$f(\theta, \dot{\theta}) = \sin\theta,$$

且

$$f(\theta_0, 0) = 0 \rightarrow \sin\theta_0 = 0 \rightarrow \theta_0 = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

现在, 令

$$\theta = n\pi + \Delta\theta,$$

将其代入微分方程, 得

$$\Delta\ddot{\theta} + \sin(n\pi + \Delta\theta) = 0.$$

用泰勒级数展开, 且保留线性项得

$$\Delta\ddot{\theta} + \cos(n\pi)\Delta\theta = 0,$$

$$\Delta\ddot{\theta} + (-1)^n\Delta\theta = 0.$$

利用题 10.2 中的符号, 则上述方程的广义解为

$$\Delta\theta = C_1 e^{(-1)^{(n-1)/2}t} + C_2 e^{(-1)^{(n-1)/2}t},$$

$$\lambda_1 = (-1)^{(n-1)/2}, \quad \lambda_2 = -(-1)^{(n-1)/2}.$$

因此, 对于奇数 n , λ_1 和 λ_2 都是实数且异号, 这些平衡点就是鞍点; 对于偶数 n , λ_1 和 λ_2 都是纯虚数, 这些平衡点就是中点.

10.4 摆动的相平面示意图.

解 根据题 10.3 结论得到的相平面示意图如图 10.5 所示.

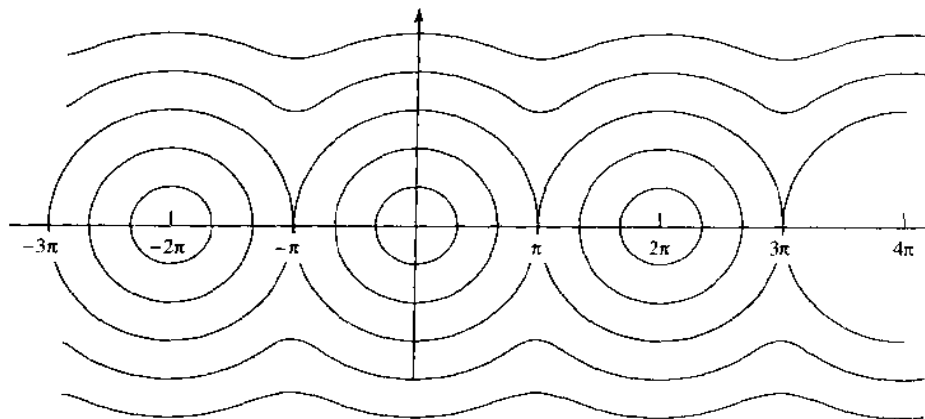


图 10.5

10.5 质点在图 10.6 所示的旋转抛物线上运动的微分方程为

$$(1 + 4p^2x^2)\ddot{x} + (2gp - \omega^2)x + 4p^2x\dot{x}^2 = 0.$$

若 $\omega = 10 \text{ rad/s}$, 求 p 为何值时, 平衡点 $x=0$ 是鞍点?

解 采用题 10.2 中的符号, 得

$$f(r, \dot{x}) = \frac{2kp - \omega^2}{1 + 4p^2 x^2} x + \frac{4p^2}{1 + 4p^2 x^2} x \dot{x}^2.$$

注意到 $x = 0$ 的确是一个平衡点, 检验在其邻域内相平面轨线的运动, 令

$$x = \Delta x,$$

采用题 10.2 中的符号, 得

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(0, 0) = 0,$$

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2kp - \omega^2.$$

从而相平面轨线在 $x = 0$ 附近的微分方程为

$$\Delta \dot{x} + (2kp - \omega^2) \Delta x = 0.$$

当

$$2kp < \omega^2$$

时, 平衡点是一个鞍点, 因此, 当 $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 时, 则

$$p < \frac{\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2}{2 \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = 5.10 \text{ m}^{-1}.$$

从题 10.6~题 10.8, 题 10.11 和题 10.12 都是指图 10.7 中的系统而言的.

弹簧的力与位移的关系为

$$F = k_1 y - k_3 y^3, \quad k_1 = 1 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad k_3 = 1 \times 10^{12} \frac{\text{N}}{\text{m}},$$

其中 y 是从弹簧原长时量取的.

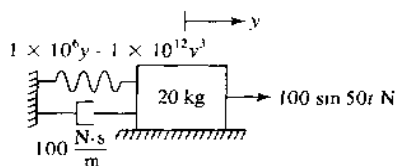


图 10.7

10.6 设 $x = y/\Delta$, 其中 y 是弹簧从未伸缩时的位移, 且 $\Delta = mg/k_1$, 用方程 (10.1) 的形式写出图 10.7 中所示系统运动的微分方程, 并求出 ϵ , μ , F 和 r .

解 对质量块应用牛顿定律, 其微分方程为

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_1 y - k_3 y^3 = F_0 \sin \omega t. \quad (10.6)$$

线性化系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = \sqrt{\frac{1 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{20 \text{ kg}}} = 223.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

且

$$\Delta = \frac{mg}{k_1} = \frac{(20 \text{ kg}) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{1 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 1.96 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

设

$$\tau = \omega_n t,$$

有

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega_n \frac{d}{d\tau}.$$

用无量纲化变量, 改写方程 (10.6) 为

$$m\omega_n^2 \Delta \frac{d^2 x}{d\tau^2} + c\omega_n \Delta \frac{dx}{d\tau} + k_1 \Delta x - k_3 \Delta^3 x^3 = F_0 \sin \frac{\omega}{\omega_n} \tau,$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{c}{m\omega_n} \frac{dx}{d\tau} + x - \frac{k_3}{k_1} \Delta^2 x^3 = \frac{F_0}{k_1 \Delta} \sin \frac{\omega}{\omega_n} \tau.$$

方程(10.1)形式中的各量如下:

$$\epsilon = -\frac{k_3}{k_1}\Delta^2 = -\frac{1 \times 10^{12} \frac{\text{N}}{\text{m}}}{1 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}} (1.96 \times 10^{-4} \text{m})^2 = -0.0384,$$

$$\mu = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{100 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}}{2(20 \text{ kg}) \left(223.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)} = 0.0112,$$

$$F = \frac{F_0}{k_1 \Delta} = \frac{F_0}{mg} = \frac{100 \text{ N}}{(20 \text{ kg}) \left(9.81 \frac{\text{N}}{\text{s}^2} \right)} = 0.510,$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{150 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{223.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0.671.$$

10.7 确定图 10.7 中系统的平衡点的性质及其稳定性.

解 用题 10.2 中的符号, 则

$$f(x, \dot{x}) = 2\mu\dot{x} + x + \epsilon x^3,$$

从而

$$f(x, 0) = 0 = x + \epsilon x^3 \rightarrow x = 0, \pm \sqrt{-\frac{1}{\epsilon}}.$$

注意到

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 2\mu, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 3\epsilon x^2.$$

首先考虑平衡点 $x=0$:

$$\alpha = 2\mu, \beta = 1 \rightarrow \Delta\ddot{x} + 2\mu\Delta\dot{x} + \Delta x = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1} = -0.0112 \pm 0.999i.$$

因为 λ 的值是实部的共轭复数, 所以平衡点 $x=0$ 是一个稳定的焦点.

由于 ϵ 是负值, 系统还有两个平衡点 $x = \pm \sqrt{-1/\epsilon}$. 在任一情况下,

$$\alpha = 2\mu, \quad \beta = 1 + 3\mu \left(-\frac{1}{\epsilon} \right) = -2,$$

$$\Delta\ddot{x} + 2\mu\Delta\dot{x} - 2\Delta x = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{2 + \mu^2} = 1.413, -1.415.$$

因此这两个平衡点是鞍点, 且不稳定.

10.8 令 $\mu=0$, 试求固有周期的积分表达式.

解 设初始条件为 $t=0$ 时, $x=x_0, \dot{x}=0$. 当 $\mu=0$ 时自由振动的达芬方程为

$$\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0.$$

定义 $v = \dot{x}$, 则

$$v \frac{dv}{dx} + x + \epsilon x^3 = 0.$$

对 x 积分, 得

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\epsilon}{4}x^4 = C.$$

代入初始条件求得 v 为

$$v = \pm \sqrt{x_0^2 + \frac{\epsilon}{2}x_0^4 - x^2 - \frac{\epsilon}{2}x^4}.$$

由于 $v = dx/dt$, 则

$$dt = \frac{dx}{\pm \sqrt{x_0^2 + \frac{\epsilon}{2}x_0^4 - x^2 - \frac{\epsilon}{2}x^4}}.$$

$\frac{1}{4}$ 周期就是物块从初始条件返回(平衡位置) $x=0$ 所用的时间. 在这期间速度是负值, 因此, 从 x_0 到 0 积分, 得

$$T = 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 + \frac{\epsilon}{2}x_0^4 - x^2 - \frac{\epsilon}{2}x^4}}.$$

10.9 用线性扰动法求在 $F=0$ 时达芬方程的三次近似解.

解 设

$$x = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2). \quad (10.7)$$

将方程(10.7)代入不受力的达芬方程, 得

$$\ddot{x}_0 + \epsilon \ddot{x}_1 + \cdots + x_0 + \epsilon x_1 + \cdots + \epsilon(x_0 + \epsilon x_1 + \cdots)^3 = 0,$$

$$\ddot{x}_0 + x_0 + \epsilon(\ddot{x}_1 + x_1 + x_0^3) + O(\epsilon^2) = 0.$$

设系数是 ϵ 的方幂都趋于零, 则得

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \rightarrow x_0 = A \sin(t + \phi),$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -x_0^3 \rightarrow \ddot{x}_1 + x_1 = -A^3 \sin^3(t + \phi).$$

根据三角恒等式, 得

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{A^3}{4}[3\sin(t + \phi) - \sin 3(t + \phi)],$$

$$x_1 = \frac{3}{8}A^3 \cos(t + \phi) - \frac{A^3}{32}\sin 3(t + \phi).$$

因此,

$$x(t) = A \sin(t + \phi) + \epsilon \left[\frac{3}{8}A^3 \cos(t + \phi) - \frac{A^3}{32}\sin 3(t + \phi) \right] + O(\epsilon^3).$$

10.10 由题 10.9 求得的解不是周期性的, 应如何修正, 为什么?

解 由题 10.8 可以知道非线性系统的固有周期是取决于初始条件的. 在题 10.9 中的扰动解中没有给出这种依赖关系, 真正的响应可以在相同周期的线性系统中得到, 要修正该解, 需要引入依赖于振幅的时间量

$$t = w(1 + \epsilon \lambda_1 + \epsilon^2 \lambda_2 + \cdots).$$

上述表达式可以在线性展开前引入, 在这种情况下称之为 Linstedt-Poincare 方法; 也可以在将非周期的线性展开变成周期性之后引入, 后者称之为重整化方法, 在任一情况下, 都可得到结论

$$t = w \left(1 - \frac{3}{8}\epsilon A^2 + \cdots \right),$$

$$x = A \sin(t + \phi) - \epsilon \frac{A^3}{32} \sin 3(t + \phi) + \cdots.$$

10.11 将图 10.7 所示系统中的物块放置距平衡点 1.0 mm 处后释放, 试求其合成运动的周期.

解 采用题 10.6 中的无量纲化方法, 初始条件为

$$x(0) = \frac{0.001 \text{ m}}{1.96 \times 10^{-4} \text{ m}} = 5.10, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

将初始条件代入由题 10.10 后得到的两项展开函数, 并由题 10.5 中得到的 $\epsilon = -0.0384$, 得

$$\phi = \frac{\pi}{2},$$

$$x(0) = A \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon A^3}{32} \sin \frac{3\pi}{2},$$

$$5.10 = A - 0.0012A^3 \rightarrow A = 5.28.$$

无量纲频率为

$$w = 1 + \frac{3}{8}\epsilon A^2 = 1 + \frac{3}{8}(-0.0384)(5.28)^2 = 0.599.$$

有量纲频率和周期分别为

$$\omega_n = 0.599 \left(223.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) - 133.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow \tau = 0.074 \text{ s}.$$

10.12 用扰动方法来逼近图 10.7 系统的受迫响应.

解 为了避免符号混淆, 设 $\delta = \varepsilon$, 由于阻尼是很小的, 它经过非线性整理, 最后得

$$\mu = \delta \xi \rightarrow \xi = \frac{\mu}{\delta} = \frac{0.0112}{0.0384} = 0.292,$$

则方程变为

$$\ddot{x} + 0.584 \dot{x} + x - \delta x^3 = 0.510 \sin 0.671 t.$$

设线性扰动解为

$$x(t) = x_0(t) + \delta x_1(t),$$

代入微分方程, 并令系数为 δ 的方程都趋于零, 得

$$\dot{x}_0 + x_0 = 0.510 \sin 0.671 t,$$

$$x_0 = \frac{0.510}{1 - (0.671)^2} \sin 0.671 t = 0.928 \sin 0.671 t,$$

$$\dot{x}_1 + x_1 = -0.584 \dot{x}_0 + x_0^3$$

$$= -0.364 \cos 0.671 t + 0.799 \sin^3 0.671 t$$

$$= -0.364 \cos 0.671 t + 0.599 \sin 0.671 t - 0.200 \sin 2.103 t,$$

$$x_1(t) = -\frac{0.364}{1 - (0.671)^2} \cos 0.671 t + \frac{0.599}{1 - (0.671)^2} \sin 0.671 t$$

$$- \frac{0.200}{1 - (2.013)^2} \sin 2.103 t$$

$$= -0.662 \cos 0.671 t + 1.09 \sin 0.671 t + 0.0655 \sin 2.103 t.$$

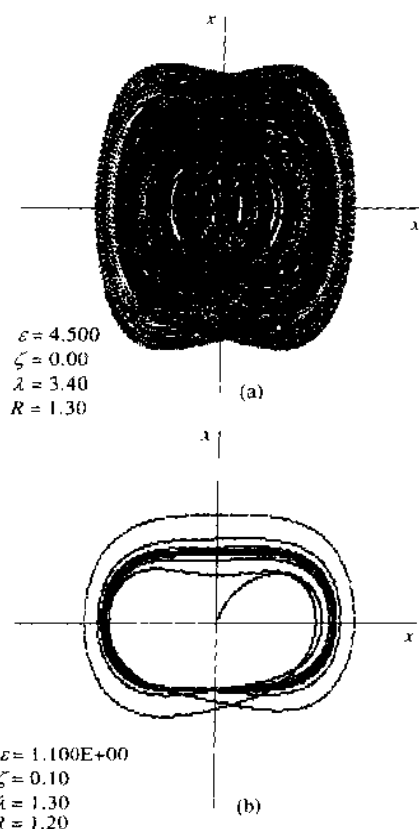


图 10.8

10.13 讨论采用何种定性工具以确定一个非线性系统的运动是否为混沌运动.

解 (a) 对于混沌运动, 相平面内的抛物线轨迹是不能被它自己重复的. (b) 若在整个运动过程的频谱分析中, 有连续的频谱, 则运动是混沌的. (c) 若对响应进行定时采样, 则混沌运动的采样响应也是随机性.

10.14 应用龙格-库塔方法求得各种不同参数值下达芬方程的相平面, 如图 10.8 所示, 问这些运动中哪些是混沌的?

解 因为图 10.8(a) 中的运动图形都无法辨认, 所以它是混沌运动. 图 10.8(b) 中的运动由于经过一个初始的过渡周期之后趋于稳态, 故它不会是混沌的.

10.15 用龙格-库塔方法求出达芬方程的 Poincaré 映射, 如图 10.9 所示.

解 Poincaré 映射是对相平面定时采样的结果, 对每个 Poincaré 映射的运动解释如下:

(a) 由于 Poincaré 映射是一些明显的无

规则点的集合,故运动可能是混沌的。

(b) 因为 Poincaré 映射是一条闭合的曲线,所以是周期性运动,但样本频率与活动频率不相对应。

(c) Poincaré 映射只含有三个点,且运动是周期性的,因此运动周期是采样周期的二倍。

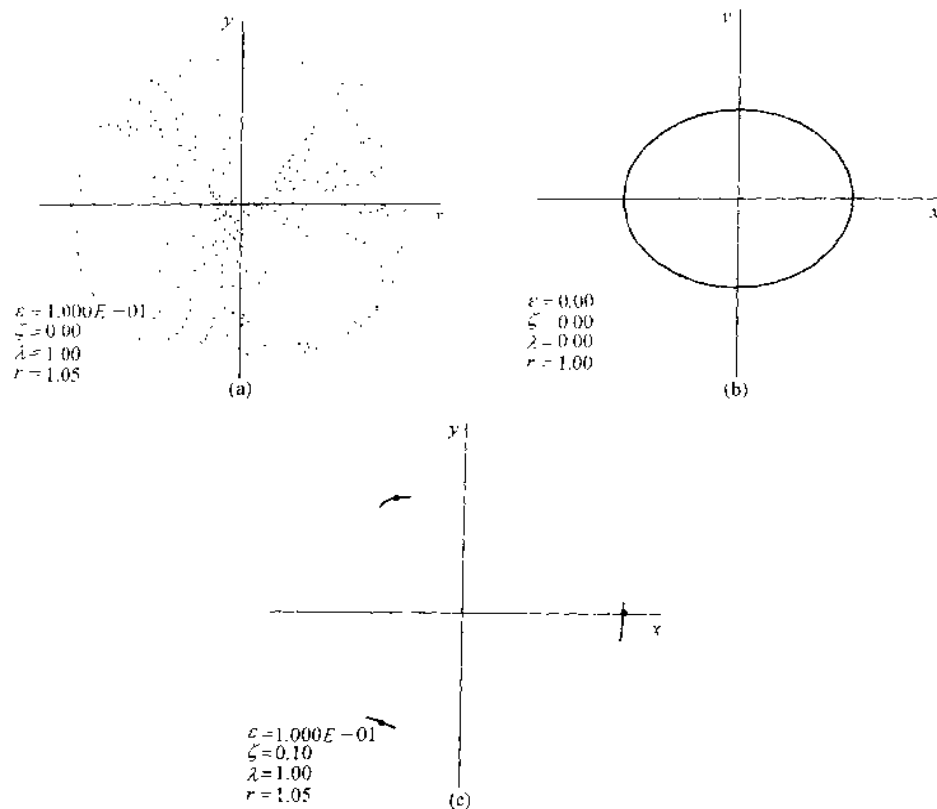


图 10.9

10.16 用范德波尔方程来定性分析极限环现象。

解 当 x 很小时, 范德波尔方程中的放大系数 μ 是负值, 从而能量都是由系统自激运动提供的, 它使得响应不断增强。但是当 x 增加到 1 时, 阻尼系数就变成正值了, 能量随之开始耗散, 运动开始衰减。由于自激振幅逐渐衰减就形成了极限环, 极限环还取决于初始条件。

10.17 如何用平均法或格莱克法来逼近极限环的振幅。

解 设 $F(x, \dot{x})$ 为系统的非保守力, 这些力作用于在运动一周时所做的功为

$$W = \int F(x, \dot{x}) dx = \int F(x, \dot{x}) \dot{x} dt.$$

如果系统产生一个极限环, 则非保守力作用于每一周上的总功都为零。设系统无量纲化后的线性周期为 2π , 则

$$\int_0^{2\pi} F(x, \dot{x}) \dot{x} dt = 0. \quad (10.8)$$

用格莱克方法解得响应为

$$x(t) \approx A \sin t,$$

代入积分方程(10.7)中, 计算积分, 就可得到极限环振幅 A 的近似值。

10.18 用平均法来逼近系统的极限环, 其无量纲化微分方程为

$$\ddot{x} + \alpha(\dot{x}^2 + x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

解 用题 10.17 的方法, 设 $x(t) = A \sin t$, 则得

$$\begin{aligned} F(x, \dot{x}) &= \alpha(\dot{x}^2 + x^2 - 1)\dot{x}, \\ \int_0^{2\pi} F(A \sin t, A \cos t) A \cos t dt &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \alpha[A^2 \cos^2 t + A^2 \sin^2 t - 1](A \cos t)^2 dt &= 0, \\ \alpha(A^2 - 1)A^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt &= 0, \\ \pi\alpha(A^2 - 1)A^2 &= 0, \\ A &= 1. \end{aligned}$$

补充习题

10.19 求系统相平面轨线的广义方程, 微分方程为

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x \cos x = 0.$$

答:

$$\dot{x} = \sqrt{C - x^2 - 2\varepsilon x \sin x - 2\cos x}.$$

10.20 求系统相平面轨线的广义方程, 微分方程为

$$\ddot{x} + x - \alpha x = 0.$$

答:

$$\dot{x} = \sqrt{C - x^2 + \frac{2}{3}\alpha x^3}.$$

10.21 求题 10.20 系统的平衡点并确定其类型.

答: $x = 0$ 是中心; $x = \alpha$ 是鞍点.

10.22 画出题 10.20 系统的相平面示意图.

10.23 求系统的平衡点并确定其类型, 微分方程为

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0.$$

答:

$x = 0, \xi < 1$ 时, 稳定焦点,
 $\xi > 1$ 时, 稳定节点,
 $x = -1/\varepsilon$ 是鞍点.

10.24 求系统的平衡点并确定其类型, 微分方程为

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} - x + \varepsilon x^3 = 0.$$

答:

$x = 0$ 是鞍点;
 $x = \pm \sqrt{1/3}, \xi < \sqrt{2}$ 时, 稳定焦点,
 $\xi > \sqrt{2}$ 时, 稳定节点.

10.25 推导非线性系统运动周期的积分表达式, 微分方程为

$$\ddot{\theta} + \sin(1 - \cos\theta) = 0.$$

当 $\theta = \theta_0$ 时, $\dot{\theta} = 0$.

答:

$$T = 4 \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{-\frac{1}{2}\cos 2\theta_0 + 2\cos\theta_0 + \frac{1}{2}\cos 2\theta - 2\cos\theta}}.$$

10.26 质量为 50 kg 的物块固连在弹簧上, 弹簧的力与位移关系式为

$$F = 2000x + 6000x^3,$$

x 的单位为 m, F 的单位为 N, 物块被拉至 25 cm 处释放, 求由此引起的振动周期是多少?

答: 0.907 s.

10.27 用扰动的方法求系统的近似响应(保留两项), 微分方程为

$$\ddot{x} + \mu \varepsilon \dot{x} + x + \varepsilon x^2 = F \sin \omega t.$$

答:

$$\begin{aligned} & \frac{F}{1 - \omega^2} \sin \omega t + \varepsilon \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{F}{1 - \omega^2} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{1 - 4\omega^2} \cos 2\omega t \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\mu \omega F}{(1 - \omega^2)^2} \cos \omega t \right]. \end{aligned}$$

10.28 用格莱克方法来逼近范德波尔方程极限环的振幅.

答: 2.

10.29 解释图 10.2 中的跳跃现象.

10.30 讨论如何用傅里叶变换来确定一个响应是否为混沌.

第十一章 计算机应用

振动分析往往离不开数值分析和计算,电子计算机应用于人工计算的场所,以处理振动分析的很多冗长而乏味的工作,计算机数学被用来完成沉闷的数值分析,但是,使用者必须搞清楚计算步骤的顺序,并会调用结果。

本章的重点就是振动分析软件的应用,知道怎样使用高级程序语言(譬如 C、PASCAL 或 FORTRAN)来编程是非常重要的,并且要用这些语言编程解决许多振动问题。在本书各章中所作的分析都可以利用应用软件在个人电脑上完成。

有限元法,对于估算解决连续振动系统问题是非常有效的,特别是当精确的数值解很难求得时,详见第九章。但为了说明简明起见,在此列举实例不超过四个单元,当用到更多单元时,计算机实质上只能得到一个数值解。在大规模有限元建模过程中将遇到很多困难,这包括从总质量矩阵和总刚度矩阵的有效建立方法到相应微分方程的解所用到的模型分析。因此,大规模有限元程序正在逐步发展完善,其中一些已经很有效地应用于个人电脑了,但是通常都需要预加工处理和后信息处理程序,这些已经超出了本书的范围。

§ 11.1 振动专用应用软件

专门用于振动的应用软件已经出现了,这些程序都在软件包 VIBES 中,还附有 Kelly 编著的机械振动原理的 McGraw-Hill 文本,此文本包含模拟单自由度和多自由度系统的自由和受迫响应的程序。VIBES 中还有其他各种程序,如闭路的数值积分程序,形成力和位移谱的分析程序;完成对连续系统的模型分析程序,以及设计隔振器和减振器的帮助程序。这些文件很多都是可执行程序,只有少数几个需要用户提供 BASIC 程序,以应用于各种激励引起的响应。

§ 11.2 电子表格程序

电子表格允许建立各种变量和参数之间的关系,并且在列表形式上发生变化。电子表格还能对输出/显示的结果进行图形处理。当参数值发生变化时,电子表格中的数据和图形会自动更新,因此,在诸如设计应用等各种假设条件下,电子表格是一种非常有用的工具。当今非常流行的电子表格有:Lotus 发展公司的 Lotus 1-2-3;Microsoft 公司的 Excel;Borland 公司的 Paradox,还有 WordPer 公司的 Quatro Pro。

§ 11.3 电子记事本

当使用电子记事本时,结果将显示在计算机屏幕上,就好像他(或她)正在用笔、纸似的。电子记事本有:Mathsoft 公司的 Mathcad 和 The Math Works,以及 Inc. 公司的能完成各种复杂计算集的 MATLAB。电子记事本有其内部算法,它可以让用户迅速完成各种复杂运算。电子记事本还能自动更新,因此当某一参数值改变时,与此参数相关的所有子序列都被重新计算。电子记事本也有图形处理功能,并能执行有限的符号程序。

§ 11.4 符号处理程序

符号处理程序如 MAPLE V, MACSYMA, 以及 Mathematica, 符号处理的例子有,对一个变量求导,定义积分,分解小数部分,求方程解的参数表达式。计算机代数软件也用来求线性代数和微分方程解决的问题。

例 题

- 11.1 用 VIBES 绘图作出质量为 100 kg, 固有频率为 100 rad./s, 阻尼比为 0.3 且受激励为 $F(t) = 1000 \sin 125t$ N 的单自由度系统的响应。

解 用 VIBES 的 FORCED 程序来显示图 11.1 所示的响应, 与此同时, 也将激励绘出以作参照, 图示说明瞬态响应趋于稳态响应, 图示也反映了激励和响应之间的不同周期和相位差。

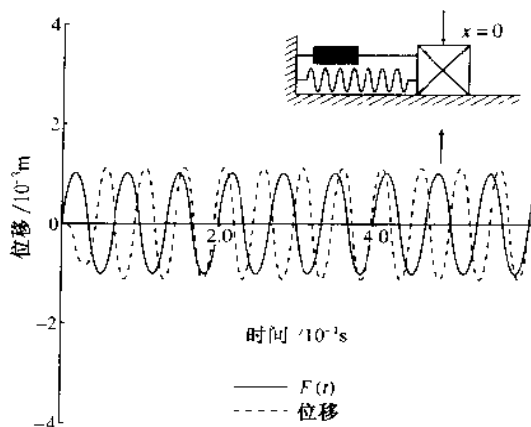


图 11.1

- 11.2 用 VIBES 程序来近似模拟一端固定的均匀梁的固有频率和模态振型, 取四个自由度来模拟此梁。

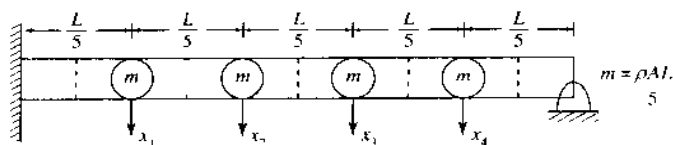


图 11.2

解 这个四自由度模型如图 11.2 所示, 通过 VIBES 的 BEAM 程序来建立柔度矩阵。在本例中, 将梁的单位特征值都输入程序 BEAM 中, 各数值再乘上 L^3/EI 则得到柔度矩阵的各元素。程序 BEAM 的输出结果见图 11.3。然后用 VIBES 的 MITER 程序重复使用矩阵确定一个多自由度系统的固有频率和标准模态振型, 再用由程序 BEAM 得到的柔度矩阵及质量矩阵作为输入, 得

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \rho A L.$$

```

长度 = 1 m,
弹性模量 = 1 m/s2
转动惯量 = 1 m4
节点位置为:
X(1) = .2 m
X(2) = .4 m
X(3) = .6 m
X(4) = .8 m

A(1,1) = 1.621E - 03 m/N
A(1,2) = 2.784E - 03 m/N
A(1,3) = 2.603E - 03 m/N
A(1,4) = 1.525E - 03 m/N
A(1,1) = 2.784E - 03 m/N
A(1,2) = 6.912E - 03 m/N
A(1,3) = 7.381E - 03 m/N
A(1,4) = 4.523E - 03 m/N
A(1,1) = 2.603E - 03 m/N
A(1,2) = 7.381E - 03 m/N
A(1,3) = 9.792E - 03 m/N
A(1,4) = 6.624E - 03 m/N
A(1,1) = 1.525E - 03 m/N
A(1,2) = 4.523E - 03 m/N
A(1,3) = 6.624E - 03 m/N
A(1,4) = 5.461E - 03 m/N

```

图 11.3

再次使用单位特征值, 则图 11.4 中所示的本例由程序 *MITER* 得到的数据就无量纲化了. 无量纲化的固有频率的近似值, 就是由这些值再乘上 $EI/\rho A L^4$ 得到, 由程序 *MITER* 确定的模态振型再由质量矩阵进行标准化.

一个四自由度模型梁的柔度矩阵.

梁的要素如下:

```

控制修改命令为 ERR = 0
模态 1 的固有频率为 1.541E + 01
相应的标准模态, 形状为
1  .4558122
2  1.206697
3  1.505346
4  1.034433

模态 2 的固有频率为 4.969E + 01
相应的标准模态, 形状为
1  -1.076292
2  -1.314738
3  .4244277
4  1.390295

模态 3 的固有频率为 1.005E + 02
相应的标准模态, 形状为
1  1.465718
2  -.2379109
3  -1.111364
4  1.248975

模态 4 的固有频率为 1.518E + 02
相应的标准模态, 形状为
1  1.218811
2  1.326117
3  1.148331
4  -.6611273

```

图 11.4

11.3 用 VIBES 确定图 11.5 中梁的前三阶固有频率和模态振型.

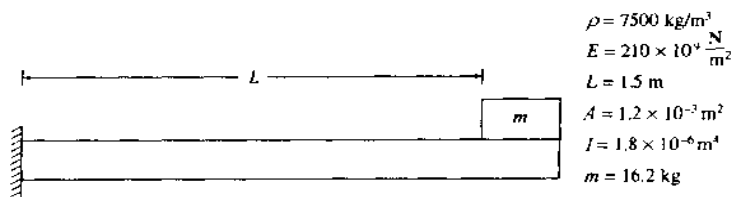


图 11.5

解 用 VIBES 的 CFREQ 程序来确定这个连续系统的固有频率和模态, 注意 $\beta = m / \rho A L$, 则由程序 CFREQ 计算得到的固有频率和模态分别见图 11.6 和图 11.7.

有附属质量的悬臂梁的固有频率和模态振型($\beta = 1.200$)

梁的要素:

质量密度 = $7.500\text{E}+03 \text{ kg/m}^3$

弹性模量 = $2.100\text{E}+11 \text{ N/m}^2$

长度 = $1.500\text{E}+00 \text{ m}$

面积 = $1.200\text{E}-03 \text{ m}^2$

转动惯量 = $1.800\text{E}-06 \text{ N/m}^4$

模态数	无量纲化频率	固有频率 (rad/s)	标准化常数
1	1.83	167.03	0.712E+00
2	20.11	1831.36	0.520E+00
3	59.61	5429.45	0.472E+00

图 11.6

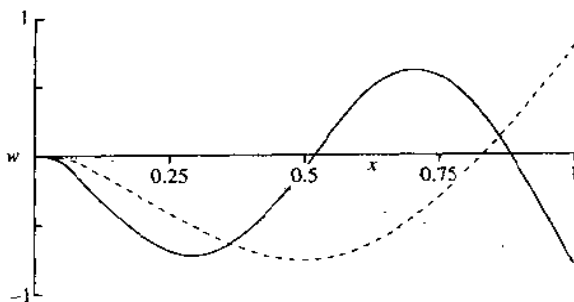


图 11.7

11.4 一台重为 100 kg 的往复机, 工作转速为 250 r/min, 并有一个不平衡转矩为 $0.5 \text{ kg}\cdot\text{m}$, 求当阻尼比为 0.1, 传递力不超过 5000 N 的隔振器的最大刚度为多少? 在工作过程中, 该隔振器的最大静变形为多少? 隔振器的最大变形为多少? 用 Mathcad 程序计算.

解 在电子记事本中使用程序 Mathcad 完成如下步骤(见图 11.8). 采用第八章介绍的方法. 注意到 m 不能用作变量名表示质量, 因为 Mathcad 已经规定它代表米的单位. 另外, e 也不能用作变量名表示偏心距, 因为在 Mathcad 中它被用作自然对数的底. 当发现一个单方程有根时, Mathcad 需要对该根设初值.

习题 11.4 的解

参数值

$m = 100 \text{ kg}$

$\omega = 250 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$\xi = 0.1$

$m_0 = 10 \text{ kg}$

$e = 0.05 \text{ m}$

机器质量

转速

阻尼比

不平衡质量

偏心距

$$F_{\max} = 5000 \text{ N}$$

最大允许力

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

重力加速度

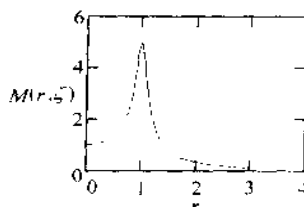
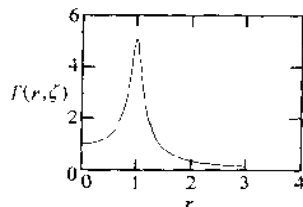
定义函数

$$M(r, \xi) = \frac{1}{[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{放大系数}$$

$$T(r, \xi) = \left[\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \right] \quad \text{传递比}$$

函数图

$$r = 0, 0.02, 3.0$$



习题解答

$$F_0 = m_0 \text{ecc} \omega^2 \quad F_0 = 3.125 \times 10^4 \text{ N}$$

激励振幅

$$T_{\max} = \frac{F_{\max}}{F_0} \quad T_{\max} = 0.16$$

最大传递力

$$r_R = 3.2$$

 r 的最小初值

$$r_1 = \text{root}(T(r_R, \xi) - T_{\max}, r_R)$$

 r 的最小解

$$r_1 = 0.8603$$

允许的最小频率化

$$\omega_n = \frac{\omega}{r_1} \quad \omega_n = 8.7404 \times 10^1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

允许的最大固有频率

$$k = m \omega_n^2 \quad k = 7.6394 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

隔振器允许的最大刚度

$$\Delta = \frac{g}{\omega_n^2} \quad \Delta = 1.2841 \times 10^{-3} \text{ m}$$

隔振器的最小静偏差

$$x_{\max} = \frac{F_0}{k} M(r_1, \xi), \quad x_{\max} = 5.6783 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \text{隔振器的最大偏差}$$

图 11.8

11.5 一个质量为 100 kg 的结构固有频率为 100 rad/s, 阻尼比为 0.05, 所受激励形如下:

$$F(t) = 12500e^{-1.5t} \text{ N}$$

用程序 Mathcad 求系统的响应(采用闭路积分)。

解 Mathcad 采用龙倍格(Romberg)积分表来估算其某些积分的值。Mathcad 设定的数值积分的误差为 0.001, 这个误差因用户不同而异。

现给出两种求解方法(见图 11.9 和图 11.10), 第一种方法是直接法, 它是在整个时间段内对每一个 t 值从 0 到 t 积分; 间接法就是借用习题 4.27 的结论, 将闭路积分写成两个积分的和。根据这个公式, 可以直接用到前面的积分结果, 并仅对新的时间段进行积分运算。

习题 11.5 的解在一闭路积分的数值构造。

系统参数

$$m = 100 \text{ kg}$$

系统质量

$$\omega_n = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

固有频率

$$\xi = 0.05$$

阻尼比

激励

$$F_0 = 12500 \text{ N}$$

$$F(t) = F_0 \exp\left\{-1.5 \frac{1}{\text{s}} t\right\}$$

脉冲响应

$$\omega_d = \omega_n(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}$$

有阻尼的固有频率

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} (\zeta\omega_n t) \sin(\omega_d t)$$

在 $t=0$ 时假如单位脉冲系统的响应

闭路积分式

$$x(t) = \int_{t_1}^{t_2} F(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$t = 0 \text{ s}, 0.001 \text{ s}, 0.3 \text{ s}$$

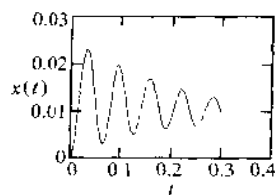


图 11.9

习题 11.5 的另一解法——用习题 4.27 的方法.

系统参数

$$m = 100 \text{ kg}$$

$$\omega = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\zeta = 0.05$$

$$\omega_d = \omega_n(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_d = 99.875 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$F_0 = 12500 \text{ N}$$

激励

$$F(t) = F_0 \exp\left\{-1.5 \frac{1}{5t} \right\}$$

$$i = 1:2:300$$

$$t_i = i \cdot 0.001 \text{ s}$$

$$h_1(t) = \frac{1}{m\omega_d} \exp(\zeta\omega_n t) \cos(\omega_d t)$$

$$h_2(t) = \frac{1}{m\omega_d} \exp(\zeta\omega_n t) \sin(\omega_d t)$$

$$G_{1_1} = 0 \text{ m}, \quad G_{2_0} = 0 \text{ m}$$

$$G_{1_i} = G_{1_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) h_1(\tau) d\tau, \quad G_{2_i} = G_{2_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) h_2(\tau) d\tau$$

$$x_i = \exp(-\zeta\omega_n t_i) (\sin(\omega_d t_i) G_{1_i} - \cos(\omega_d t_i) G_{2_i})$$

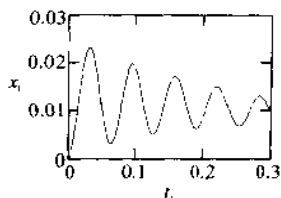


图 11.10

11.6 用 Mathcad 确定图 11.11 所示系统的固有频率和标准模态.

解 用 Mathcad 求得的固有频率和模态如图 11.12 所示. 注意到固有频率是 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 特征值的平方根, 模态就是相应的特征向量. 模态由质量矩阵进行标准化, 注意若无特殊说明, Mathcad 都令矩阵的第一行或第一列的下标为 0. 此外, 要注意的是尽管 $q = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$ 是一个标量, 但由于它是由矩阵变换产生的, 所以 Mathcad 认为它是一个一行或一列的矩阵, 从而在运算时它必须要注明下标, 写作 $q_{0,0}$.

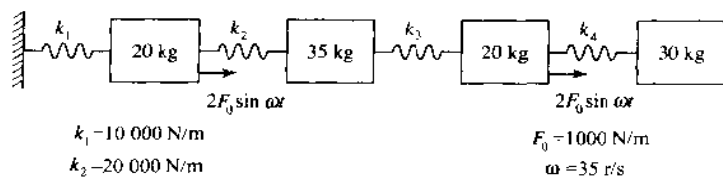


图 11.11

11.6 的解法——四自由度系统的固有频率和模态振型.

质量矩阵

刚度矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2000 & -10000 & 0 & 0 \\ 10000 & 30000 & -20000 & 0 \\ 0 & -20000 & 40000 & -20000 \\ 0 & 0 & -20000 & 20000 \end{bmatrix}$$

质量矩阵的逆矩阵

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.029 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.033 \end{bmatrix}$$

$$D = M^{-1}K$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \times 10^3 & -500 & 0 & 0 \\ -285.714 & 857.143 & 571.429 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^3 & 2 \times 10^3 & -1 \times 10^3 \\ 0 & 0 & -666.667 & 666.667 \end{bmatrix}$$

D 的特征值

$$\lambda = \text{特征值}(D) \quad \lambda = \begin{bmatrix} 2.665 \times 10^3 \\ 1.22 \times 10^3 \\ 589.073 \\ 49.733 \end{bmatrix}$$

固有频率

$$\omega_1 = (\lambda_3)^{\frac{1}{2}} \quad \omega_1 = 7.052$$

$$\omega_2 = (\lambda_2)^{\frac{1}{2}} \quad \omega_2 = 24.271$$

$$\omega_3 = (\lambda_1)^{\frac{1}{2}} \quad \omega_3 = 34.924$$

$$\omega_4 = (\lambda_0)^{\frac{1}{2}} \quad \omega_4 = 51.627$$

标准化的模态振型

$$X_1 = \text{特征值}(D, \lambda_3)$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.259 \\ 0.491 \\ 0.565 \\ 0.61 \end{bmatrix}$$

$$q = X_1^T M X_1$$

$$q = 27.347$$

$$X_1 = \frac{X_1}{\sqrt{q_{0.0}}}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.049 \\ 0.094 \\ 0.108 \\ 0.117 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \text{特征值}(D, \lambda_2)$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} -0.614 \\ -0.504 \\ 0.07 \\ 0.603 \end{bmatrix}$$

$$q = X_2^T M X_2$$

$$q = 27.457$$

$$X_2 = \frac{X_2}{\sqrt{q_{0.0}}}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} -0.117 \\ -0.096 \\ 0.013 \\ 0.115 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \text{特征值}(D, \lambda_1)$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} -0.873 \\ 0.383 \\ 0.193 \\ -0.233 \end{bmatrix}$$

$$q = X_3^T M X_3$$

$$q = 22.747$$

$$X_3 = \frac{X_3}{\sqrt{q_{0.0}}}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} -0.183 \\ 0.08 \\ 0.04 \\ -0.049 \end{bmatrix}$$

$$X_4 = \text{特征值}(D, \lambda_0)$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 0.09 \\ -0.299 \\ 0.901 \\ -0.301 \end{bmatrix}$$

$$q = X_4^T M X_4$$

$$q = 22.245$$

$$X_4 = \frac{X_4}{\sqrt{q_{0.0}}}$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 0.019 \\ -0.063 \\ 0.191 \\ -0.064 \end{bmatrix}$$

图 11.12

11.7 用 Mathcad 完成图 11.12 所示系统的模态分析来确定其稳态响应。

解 第六章中的模态分析步骤写在电子记事本中,如图 11.13 所示。模态矩阵通过标准化形成标准模态振型,得到向量 $G = P^T F$,主坐标下的微分方程为

$$\ddot{p}_i + \omega_i^2 p_i = G_i \sin \omega t.$$

主坐标下的稳态响应为

$$p_i = \frac{G_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \sin \omega t,$$

则初始广义坐标为

$$X = P p.$$

习题 11.7 的解法——固有频率的标准模态振型由题 11.6 计算得到。

模态矩阵

$$P_1 = \text{增广}(X_1, X_2)$$

$$P_2 = \text{增广}(X_3, X_4)$$

$$P = \text{增广}(P_1, P_2)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.049 & -0.117 & -0.183 & 0.019 \\ 0.094 & -0.096 & 0.08 & -0.063 \\ 0.108 & 0.013 & 0.04 & 0.191 \\ 0.117 & 0.115 & 0.049 & -0.064 \end{bmatrix}$$

激励向量

$$F = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 2000 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega = 35, \quad G = P^T F, \quad G = \begin{bmatrix} 265.487 \\ -90.305 \\ -102.007 \\ 401.193 \end{bmatrix}.$$

主坐标下的稳态振幅

$$P_0 = \frac{G_0}{\omega_1^2 - \omega^2}$$

$$p_0 = 0.226$$

$$P_1 = \frac{G_1}{\omega_2^2 - \omega^2}$$

$$p_1 = 0.142$$

$$P_2 = \frac{G_2}{\omega_3^2 - \omega^2}$$

$$p_2 = 0.16$$

$$P_3 = \frac{G_3}{\omega_4^2 - \omega^2}$$

$$p_3 = 0.279$$

广义坐标下的稳态振幅

$$r = P p$$

$$r = \begin{bmatrix} -0.052 \\ -0.04 \\ 0.037 \\ 0.036 \end{bmatrix}$$

图 11.13

11.8 杆长 2.9 m,且一端固定,一端自由。其杆的 $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho = 7100 \text{ kg/m}^3$,当用 4 个元素模拟该杆时,试用 Mathcad 的有限元法来估算杆的纵向振动的固有频率。

解 有 4 个元素的一端固定,一端自由的杆的模型的总质量矩阵和总刚度矩阵根据习题 9.3 确定,注意为了方便起见,在 Mathcad 运算中,都采用这些矩阵的无量纲化形式,如图 11.14 所示。

习题 11.8 的解法——梁的有限元模型

总质量矩阵

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

总刚度矩阵

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = M^{-1} K$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.608 & -0.433 & 0.124 & -0.031 \\ -0.433 & 0.732 & -0.495 & 0.124 \\ 0.124 & -0.495 & 0.856 & -0.464 \\ -0.062 & 0.247 & -0.928 & 0.732 \end{bmatrix}$$

D 的特征值

λ 特征值(D)

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1.788 \\ 0.855 \\ 0.259 \\ 0.026 \end{bmatrix}$$

计算固有频率

$$E = 210 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\rho = 7100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$L = 29 \text{ m}$$

$$c = \sqrt{\frac{6E}{\rho \left(\frac{L}{4}\right)^2}}$$

$$\omega = c \lambda^{1/2}$$

$$\omega_1 = c(\lambda_3)^{1/2}$$

$$\omega_2 = c(\lambda_2)^{1/2}$$

$$\omega_3 = c(\lambda_1)^{1/2}$$

$$\omega_4 = c(\lambda_0)^{1/2}$$

$$c = 1.837 \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_1 = 2.965 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = 9.353 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_3 = 1.699 \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_4 = 2.457 \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

图 11.14

11.9 一台质量为 1500 kg 的机器安装在刚度系数为 $2 \times 10^7 \text{ N/m}$ 的基础上,当机器工作转速为 1000 r/min 时,它的振幅为 7.3 mm.现要求为这台机器设计一个减振器来消去它在 1000 r/min 时的稳态振动,用 Mathcad 设计并达到以下要求:

(i)求消去机器在转速为 1000 r/min 时的稳态振动的无阻尼减振器的刚度和质量,要求减振器的稳态振幅小于 1.5 mm.

(ii)求带有减振器系统的固有频率.

(iii)要求当转速在 1000 r/min 附近范围内,机器的稳态振幅小于 2 mm.

解 Mathcad 记事本使用第八章中介绍的方程如图 11.15 所示.请注意以下对解的几点说明:

(1)弧度是一个 Mathcad 的定义单位,而转数则不是,因此在方程中使用 rev 必须先对它进行声明.(2)当加上减振器后,两个自由度系统的固有频率,一个比 ω_{22} 小,一个则比 ω_{22} 大.根函数用迭代方法来求根,对于一个多根函数,它通常都收敛与最接近根的初值点.(3)一个不佳的频率初值在 $X_1 = 2 \text{ mm}$ 处可能会导致根函数的迭代不收敛,这是因为在固有频率附近还有大的复合函数.

习题 11.9 的解法——隔振器设计

$$m_1 = 1500 \text{ kg}$$

主系统的质量

$$k_1 = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

主系统的刚度

$$\text{rev} = 2\pi \text{ rad}$$

单位变换

$$\omega = 1000 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}, \quad \omega = 104.72 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \text{ 转速}$$

$$X = 0.0073 \text{ m}$$

没有隔振器时主系统的稳态响应

$$X_{2\text{max}} = 0.0015 \text{ m}$$

隔振器的最大振幅

$$X_{1\text{max}} = 0.002 \text{ m}$$

有隔振器时主系统的最大振幅

计算

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_{11} = 115.47 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

主系统的固有频率

$$\omega_{22} = \omega, \quad \omega_{22} = 104.72 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

隔振器的固有频率

$$F_0 = k_1 X \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{11}} \right)^2 \right], \quad F_0 = 6.962 \cdot 10^3 \text{ N}$$

激励幅值

隔振器设计

$$k_2 = \frac{F_0}{X_{2\text{max}}}, \quad k_2 = 4.462 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

隔振器刚度

$$m_2 = \frac{k_2}{\omega_{22}^2}, \quad m_2 = 423.259 \text{ kg}$$

隔振器质量

计算固有频率

$r_1(\omega) = \frac{\omega}{\omega_{11}}$	主系统的频率比
$r_2(\omega) = \frac{\omega}{\omega_{22}}$	隔振器的频率比
$\mu = \frac{m_2}{m_1}$	质量比
$D(r_1, r_2, \mu) = r_{12}r_{22} - r_{22} - (1 + \mu)r_{12} + 1$	固有频率就是 $D=0$ 时 ω 的值
$\omega_k = 95 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	较低固有频率
$\omega_1 = \text{root}[D(r_1(\omega_k), r_2(\omega_k), \mu), \omega_k]$	最低固有频率
$\omega_1 = 85.227 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	
$\omega_k = 145 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	较高固有频率
$\omega_2 = \text{root}[D(r_1(\omega_k), r_2(\omega_k), \mu), \omega_k]$	最高固有频率
$\omega_2 = 141.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	
确定转速范围	
$X_1(r_1, r_2, \mu) = \frac{1 - r_{22}}{r_{12}r_{22} - r_{22} - (1 + \mu)r_{12} + 1} \frac{F_0}{k_1}$	没有隔振器时系统的稳态振幅
$\text{TOL} = 0.0000001$	设定求根过程的误差
$\omega_k = 90 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	较低转速点的初值
$\omega_1 = \text{root}(X_{1\max} + X_1(r_1(\omega_k), r_2(\omega_k), \mu), \omega_k)$	当 $X_1 < X_{\max}$ 的最低转速
$\omega_1 = 88.612 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	
$\omega_k = 135 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	
$\omega_2 = \text{root}(X_{1\max} + X_1(r_1(\omega_k), r_2(\omega_k), \mu), \omega_k)$	当 $X_1 < X_{\max}$ 的最高转速
$\omega_2 = 136.271 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	

图 11.15

11.10 用拉普拉斯变换和 MAPLE V 程序求解单自由度质量-弹簧系统受图 11.16 所示激励时的响应, 初始条件为 $t=0$, 系统处于平衡位置。

解 图 11.6 所示出的激励表达式为

$$F(t) = F_0 e^{-\alpha t} \left[u(t) - u\left(t - \frac{1}{\alpha}\right) \right].$$

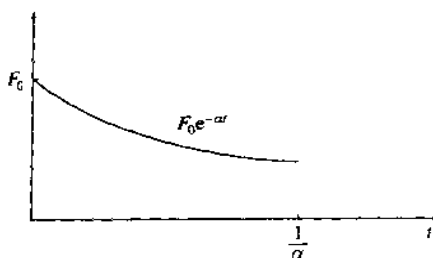


图 11.16

在 MAPLE V 中, 整个文本用到的单位化函数都是指 Heaviside 函数, 用拉普拉斯选择命令

dsolve 来求解微分方程时采用的是拉普拉斯变换法。在这种情况下(图 11.17), 返回的解是 MAPLE V 所不能求逆的一个反变换形式。值得注意的是, MAPLE V 应用的是第一变换定理, 若 Heaviside 函数的拉普拉斯变换已知, 就可以应用变换定理, 因此用 MAPLE V 的结论得系统的响应为

$$y(t) = \frac{F_0}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t - \cos \omega t + e^{-\alpha t} \right) - \alpha e^{-1} u\left(t - \frac{1}{\alpha}\right) \left\{ \frac{1}{2\alpha^2 \omega^2 + \alpha^4 + \omega^4} \left[(\alpha^2 + \omega^2) e^{-\alpha(t-(1/\alpha))} + (\alpha \omega + \alpha^3) \sin\left(\omega\left(t - \frac{1}{\alpha}\right)\right) - (\alpha^2 + \omega^2) \cos\left(\omega\left(t - \frac{1}{\alpha}\right)\right) \right] \right\}.$$

习题 11.10 的解法——拉普拉斯变换求解单自由度系统的响应

建立

```
> readlib(Heaviside);
```

```
proc(x). .end
```

激励

```
> F := t - F0 * exp(alpha * t) * (Heaviside(t) - Heaviside(t - 1/alpha));
```

$$F := t \rightarrow F0e^{-at} \left[\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{a}\right) \right]$$

微分方程

$$> \text{eq} := (D@@2)(y)(t) + \text{omega}^2 * y(t) = F(t);$$

$$\text{eq} := D^{(2)}(y)(t) + \omega^2 y(t) = F0e^{-at} \left[\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{a}\right) \right]$$

用拉普拉斯变换求得的微分方程的解

$$> \text{dsolve}(\text{eq}, y(t), \text{laplace});$$

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{y(0)\omega^2 \cos(\omega t)}{\%1} + \frac{y'(0)a^2 \cos(\omega t)}{\%1} \\ & + \frac{D(y)(0)\omega \sin(\omega t)}{\%1} + \frac{D(y)(0)t^2 \sin(\omega t)}{\%1\omega} \\ & + \frac{F0a \sin(\omega t)}{\%1\omega} - \frac{F0 \cos(\omega t)}{\%1} + \frac{F0e^{-at}}{\%1} \\ & + L^{-1} \left(\frac{F0L \left(-\text{Heaviside}\left(\frac{at-1}{a}\right), t, s+a \right) s}{s^3 + s^2a + \omega^2s + \omega^2a}, s, t \right) \\ & + L^{-1} \left(\frac{F0L \left(-\text{Heaviside}\left(\frac{at-1}{a}\right), t, s+a \right) a}{s^3 + s^2a + \omega^2s + \omega^2a}, s, t \right) \end{aligned}$$

$$\%1 := a^2 + \omega^2$$

初始条件:

$$> \text{subs}(y(0)=0, D(y)(0)=0), \text{eq};$$

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{F0a \sin(\omega t)}{(a^2 + \omega^2)\omega} - \frac{F0 \cos(\omega t)}{a^2 + \omega^2} + \frac{F0e^{-at}}{a^2 + \omega^2} \\ & + L^{-1} \left(\frac{F0L \left(-\text{Heaviside}\left(\frac{at-1}{a}\right), t, s+a \right) s}{s^3 + s^2a + \omega^2s + \omega^2a}, s, t \right) \\ & + L^{-1} \left(\frac{F0L \left(-\text{Heaviside}\left(\frac{at-1}{a}\right), t, s+a \right) a}{s^3 + s^2a + \omega^2s + \omega^2a}, s, t \right) \end{aligned}$$

注意以下几点:

$$(1) L(\text{Heaviside}(t - 1/a)) = \exp(-s/a)/s;$$

(2) 用 $s + a$ 代替上面的 s 得

$$\exp(-s/a - 1) = \exp(-1) \exp(-s/a)/(s + a);$$

$$(3) s^3 + a * s^2 + \omega^2 * s + \omega^2 * a = (s + a) (s^2 + \omega^2)$$

$$(s^2 + \omega^2)$$

则逆变换为

$$> \text{Invlapce}(\exp(-s/\text{alpha})/((s + \text{alpha})^2 * (s^2 + \text{omega}^2)), s, t);$$

$$\begin{aligned} \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{a}\right) \left(\frac{2}{\%1} \frac{ae^{-a\left(t - \frac{1}{a}\right)}}{\%1} + \frac{\left(t - \frac{1}{a}\right)e^{-a\left(t - \frac{1}{a}\right)}}{a^2 + \omega^2} - \frac{\omega \sin\left(\omega\left(t - \frac{1}{a}\right)\right)}{\%1} \right. \\ \left. + \frac{a^2 \sin\left(\omega\left(t - \frac{1}{a}\right)\right)}{\%1\omega} - \frac{2}{\%1} \frac{a \cos\left(\omega\left(t - \frac{1}{a}\right)\right)}{\%1} \right), \end{aligned}$$

$$\%1 := 2a^2\omega^2 + \omega^4 + a^4.$$

$$> \text{Invlapce}(\exp(-s/a) * s/((s + a)^2 * (s^2 + \omega^2)), s, t);$$

$$\begin{aligned} \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{a}\right) \left(\frac{2}{\%1} \frac{\omega^2 e^{-a\left(t - \frac{1}{a}\right)}}{\%1} + \frac{a^2 e^{-a\left(t - \frac{1}{a}\right)}}{\%1} - \frac{\left(t - \frac{1}{a}\right)e^{-a\left(t - \frac{1}{a}\right)}a}{a^2 + \omega^2} \right. \\ \left. + \frac{\omega a \sin\left(\omega\left(t - \frac{1}{a}\right)\right)}{\%1} - \frac{\omega^2 \cos\left(\omega\left(t - \frac{1}{a}\right)\right)}{\%1} + \frac{a^2 \cos\left(\omega\left(t - \frac{1}{a}\right)\right)}{\%1} \right) \end{aligned}$$

$$\%1 := -2a^2\omega^2 + \omega^4 + a^4$$

>

图 11.17

11.11 m 取何值时, 图 11.18 所示系统的固有频率会在 $60 \sim 80 \text{ rad}$ 之间? 用 MAPLE V 进行代数运算.

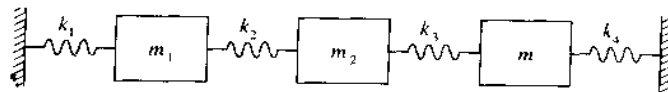


图 11.18

解 MAPLE V 的工作图如下(见图 11.19),固有频率是 $M^{-1}K$ 特征值的平方根,计算机代数在解这种质量矩阵没有给定值的问题时非常好用,它采用参数形式建立 $M^{-1}K$ 的特征多项式.需要注意的是,由于 $f(\lambda, m)$ 中的 m 是线性的,所以当 $f(\lambda, m) = 0$ 时,对每一个 λ ,只存在惟一的一个 m 值与其对应.这个函数从 $\lambda = (60 \text{ rad/s})^2 = 3600$ 到 $\lambda = (80 \text{ rad/s})^2 = 6400$ 之间的关系曲线表明该函数的最大值和最小值在时间段的起点和终点(见图 11.20),因此,对应于固有频率在 $60 \sim 80 \text{ rad/s}$ 之间,应有

$$57.19 \text{ kg} < m < 138.23 \text{ kg}.$$

习题 11.11 的解法——用 MAPLE V

定义

```
>k1:=1*10^5;          k1:=100000
>k2:=1.2*10^5;         k2:=120000.0
>k3:=1.8*10^5;         k3:=180000.0
>k4:=1.35*10^5;        k4:=135000.00
>m1:=125;              m1:=125
>m2:=150;              m2:=150
>with(linalg);
```

Warning: new definition for norm

Warning: new definition for trace

[BlockDiagonal, GramSchmidt, jordanBlock, Wronskian, add, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, bend, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselem, fibonacci, frobenius, gausselem, gaussjord, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, range, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stack, submatrix, subvector, subbasis, swapcol, swaprow, sylvest, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector]

质量矩阵

```
>M:=matrix(3,3,[m1,0,0],[0,m2,0],[0,0,m]);
```

$$M = \begin{bmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

刚度矩阵

```
>K:=matrix(3,3,[[k1+k2,-k2,0],[-k2,k2+k3,-k3],[0,-k3,k3+k4]]);
```

$$K = \begin{bmatrix} 220000.0 & -120000.0 & 0 \\ -120000.0 & 300000.0 & -180000.0 \\ 0 & -180000.0 & 315000.00 \end{bmatrix}$$

```
>g:=multiply(inverse(M),K);
```

$$B = \begin{bmatrix} 1760.0000000 & -960.0000000 & 0 \\ -800.0000000 & -2000.0000000 & -1200.0000000 \\ 0 & -180000.0 \frac{1}{m} & 315000.00 \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

B 的特征多项式,是特征值的平方.

```
>charpoly(B,lambd);
```

$$(\lambda^3 m - 315000.00 \lambda^2 - 3760.0000000 \lambda^2 m + .968400000001 - .4867200000010^{12})/m$$

```
>f:=lambd,m>lambd^3*m-15000*lambd^2-3760*lambd^2*m+.9684*10^9*lambd+.2752*
```

```
>10^7*lambd*m-.4687*10^12;
```

$$f = (\lambda, m) \rightarrow \lambda^3 m - 315000 \lambda^2 - 3760 \lambda^2 m + 0.9684000000010^9 \lambda + .27520000000010^7 m \lambda - .48670000000010^{12}$$

```
>g:=lambd>solve(f(lambd,m)=0,m);
```

$$g := \lambda \rightarrow \text{solve}(f(\lambda, m) = 0, m)$$

```
>g(lambd);
```

$$-1 \frac{315000 \lambda^2 + .968400000010^9 \lambda - .48670000000010^{12}}{\lambda^3 - 3760 \lambda^2 + 27520000010^7 \lambda}$$

```

> plot(g(lambda), lambda = 3600..6400, m = 0.200);
> g(3600);
138.2327410
> g(6400);
57.18886782

```

图 11.19

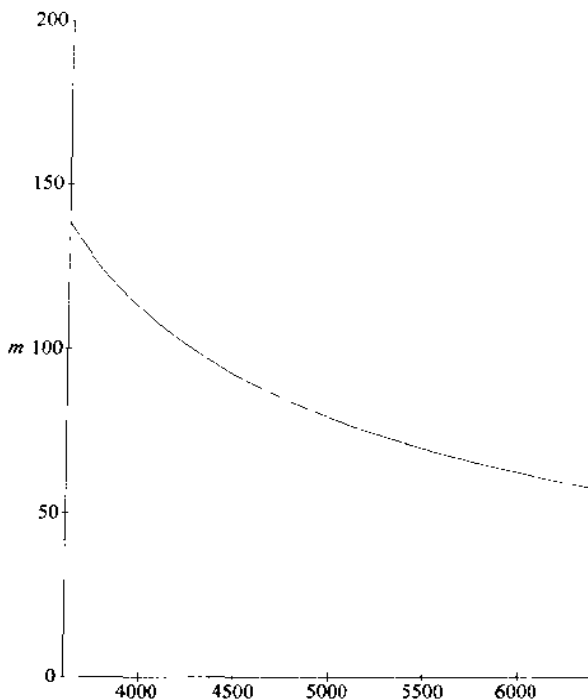


图 11.20

11.12 现有一个在中跨上放了集中质量 m 的简支梁, 试用瑞利-里兹法和试算函数

$$\phi_1(x) = L^3x - 2Lx^3 + x^4, \quad \phi_2(x) = \frac{7}{3}L^4x - \frac{10}{3}L^2x^3 + x^5$$

来估计该梁的第一阶固有频率, 用计算机代数辅助处理.

解 应用 MAPLE V 估算该梁的第一阶固有频率, 做法见图 11.21. 瑞利-里兹法的应用说明见第七章, 因此求得的第一阶固有频率为

$$\omega_1 = 96 \sqrt{\frac{42EI}{3968\rho AL^4 + 7875mL^3}}$$

习题 11.12 的解法——用瑞利-里兹法估算具有集中质量的简支梁

试算函数

```
> phil := x -> L^3 * x - 2 * L * x^3 + x^4;
```

```
phil := x -> [L^3 * x - 2 * L * x^3 + x^4]
```

```
> phi2 := x -> 7/3 * L^4 * x - 10/3 * L^2 * x^3 + x^5;
```

```
phi2 := x -> [7/3 * L^4 * x - 10/3 * L^2 * x^3 + x^5]
```

试算函数的导数

```
> d1 := x -> diff(phil(x), x);
```

```
d1 := x -> diff(phil(x), x)
```

```
> d1(x);
```

```
L^3 - 6 * L * x^2 + 4 * x^3
```

```
> d2 := x -> diff(phi2(x), x);
```

```

>d2(x);
d2 := x → diff(phi2(x), x)

>d1_2 := x → diff(d1(x), x);
d1_2 := x → diff(d1(x), x)

>d1_2(x);
- 121.x + 12.x^2

>d2_2 := x → diff(d2(x), x);
d2_2 := x → diff(d2(x), x)

>d2_2(x);
201.x + 20.x^3

积分估算
>a1 := int(EJ * d1_2(x) * d1_2(x), x = 0..L);
a1 :=  $\frac{24}{5}EIL^5$ 

>a12 := int(EI * d1_2(x) * d2_2(x), x = 0..L);
a12 := 12EIL^6

>a22 := int(r - I * d2_2(x) * d2_2(x), x = 0..L);
a22 :=  $\frac{640}{21}EI L^7$ 

>b11 := int(rho * A * phi1(x) * phi1(x), x = 0..L) + m * phi1(L/2) * phi1(L/2);
b11 :=  $\frac{31}{630}\rho A L^9 + \frac{256}{512}mL^8$ 

>b12 := int(rho * A * phi1(x) * phi2(x), x = 0..L) + m * phi1(L/2) * phi2(L/2);
b12 :=  $-\frac{31}{252}\rho AL^{11} + \frac{125}{512}mL^9$ 

>b22 := int(rho * A * phi2(x) * phi2(x), x = 0..L) + m * phi2(L/2) * phi2(L/2);
b22 :=  $\frac{640}{2079}\rho AL^{11} + \frac{625}{1025}mL^{10}$ 

>with(linalg);
[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, Wronskian, add, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, back-
sub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond,
copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, do, dot, eigenvals, eigenvecs, entermatrix, e
qual, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, frobenius, gausselim, gaussjord, genmatrix, grad, hadamard, hermite,
hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, inrbasis, inverse, ismth, iszero, jacobian, jordan, kernel,
laplacian, leastsqrs, lnsolve, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog,
permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, range, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref,
scalarmul, singularvals, smith, stack, submatrix, subvector, subbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace,
transpose, vandermonde, vecpotent, vecdim, vector]
系数矩阵
>D:=matrix(2,2,[[a11-omega^2*b11,a12-omega^2*b12],[a12-omega^2*b12,a22-omega^2*b22]]);

$$D = \begin{bmatrix} \frac{24}{5}EIL^5 - \omega^2 \left( \frac{31}{630}\rho AL^9 + \frac{256}{512}mL^8 \right) & 12EIL^6 - \omega^2 \left( \frac{31}{252}\rho AL^{10} + \frac{125}{512}mL^9 \right) \\ 12EIL^6 - \omega^2 \left( \frac{31}{252}\rho AL^{10} + \frac{125}{512}mL^9 \right) & \frac{640}{21}EIL^7 - \omega^2 \left( \frac{640}{2079}\rho AL^{11} + \frac{625}{1025}mL^{10} \right) \end{bmatrix}$$

>f:= - omega; >det(D);

$$f = \omega \cdot \det(D)$$

>f(omega);

$$\frac{16}{7}EI^2L^{12} - \frac{362}{14553}EIL^{15}\omega^2\rho A - \frac{125}{2688}EIL^{15}\omega_{2m} + \frac{31}{2095632}\omega^4\rho^2A^2L^{20} + \frac{125}{4257792}\omega^4\rho AL^{19}m$$

>solve(f(omega)=0,omega);

```

$$12 \frac{\sqrt{11} \sqrt{EI}}{I^2 \sqrt{\rho} \sqrt{A}}, -12 \frac{\sqrt{11} \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho} \sqrt{A}}, 96 \frac{\sqrt{42} L^{3/2} \sqrt{39681 \rho A + 7872 m} \sqrt{EI}}{39681 \rho A + 7875 m L^3} \\ - 96 \frac{\sqrt{42} L^{3/2} \sqrt{39681 \rho A + 7872 m} \sqrt{EI}}{39681 \rho A + 7875 m L^3}$$

图 11.21

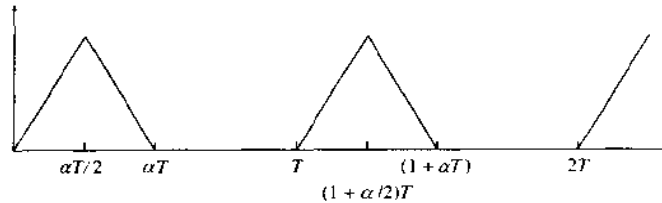


图 11.22

11.13 用 MAPLE V 求图 11.22 所示周期函数的傅里叶级数表达式.

解 用 MAPLE V 求图 11.22 所示周期函数的傅里叶级数表达式为

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t), \quad \omega_i = \frac{2\pi i}{T},$$

傅里叶系数由 MAPLE V 求得 (见图 11.23).

习题 11.13 的解法——傅里叶级数

$F(t) = f_1(t)$ for $0 < t < \alpha * T/2$, $f_2(t)$ for $\alpha * T/2 < t < \alpha * T$, and 0 for $\alpha * T < t < T$
 $> f_1 := t \rightarrow 2 * F * t / (\alpha * T);$

$$f_1: t \rightarrow 2 \frac{F_1}{\alpha T}$$

$> f_2 := t \rightarrow 2 * F * (1 - t / (\alpha * T));$

$$f_2: t \rightarrow 2F \left(1 - \frac{t}{\alpha T} \right)$$

$> a_0 := 2/T * (\text{int}(f_1(t), t = 0 .. \alpha * T/2) + \text{int}(f_2(t), t = \alpha * T/2 .. \alpha * T));$

$$a_0 := F\alpha$$

频率项

$> \omega := i \rightarrow 2 * \pi * i / T;$

$$\omega = i \rightarrow 2 \frac{\pi i}{T}$$

余弦系数

$> a_i := 2/T * (\text{int}(f_1(t) * \cos(\omega(i) * t), t = 0 .. \alpha * T/2) + \text{int}(f_2(t) * \cos(\omega(i) * t), t = \alpha * T/2 .. \alpha * T));$
 $> i;$

$$a_{-1} := \left(\frac{1}{2} \frac{T(\cos(\pi\alpha) + \pi \sin(\pi\alpha)\alpha)F}{\pi^2 i^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{TF}{\pi^2 i^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\cos(2\pi\alpha)TF}{\pi^2 i^2 \alpha} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{T(\pi \sin(\pi\alpha)\alpha - \cos(\pi\alpha)\alpha)F}{\pi^2 i^2 \alpha} \right) / T$$

化简

$$= \frac{F(-2\cos(\pi\alpha) + 1 + \cos(2\pi\alpha))}{\pi^2 i^2 \alpha}$$

正弦系数

$> b_i := 2/T * (\text{int}(f_1(t) * \sin(\omega(i) * t), t = 0 .. \alpha * T/2) + \text{int}(f_2(t) * \sin(\omega(i) * t), t = \alpha * T/2 .. \alpha * T));$
 $> i;$

$$b_{-1} := \left(-\frac{1}{2} \frac{T(-\sin(\pi\alpha) - \pi \cos(\pi\alpha)\alpha)F}{\pi^2 i^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\sin(2\pi\alpha)TF}{\pi^2 i^2 \alpha} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{T(\pi \cos(\pi\alpha)\alpha + \sin(\pi\alpha)\alpha)F}{\pi^2 i^2 \alpha} \right) / T$$

化简

$$\frac{F(2\sin(\pi\alpha)) - \sin(2\pi\alpha)}{\pi^2\alpha^2}$$

图 11.23

- 11.14 一个质量为 m 的冲床在运行过程中受到一个形如图 11.22 所示的激励, 试用电子表格为该冲床设计一个阻尼系数为 ζ 的隔振器, 使得最大传递力小于 F_{all} , 并用电子表格确定当使用隔振器时, 冲床的最大位移, 以及阻尼比为 0.1 时隔振器的最大刚度, 已知 $m = 1000 \text{ kg}$, $\alpha = 0.2$, $T = 0.1 \text{ s}$, $F_0 = 20\,000 \text{ N}$, $F_{\text{all}} = 3000 \text{ N}$.

解 ① $F(t)$ 的另一种傅里叶级数表达式为

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sin(\omega_i t + \kappa_i), \quad c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad \kappa_i = \tan^{-1}\left(\frac{b_i}{a_i}\right).$$

令 $r_i = \omega_i / \omega_n$, 则最大位移的上限为

$$x_{\max} < \frac{1}{m\omega_n^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\sqrt{(1-r_i^2)^2 + (2\zeta r_i)^2}}.$$

同理, 最大传递力的上限为

$$F_{\max} < \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r_i)^2}{(1-r_i^2)^2 + (2\zeta r_i)^2}}.$$

计算最大位移和传递力的电子表格见图 11.24. 由于 $c_{14}M_{14}$ 只有于 c_1M_1 的 0.02%, $c_{14}T_{14}$ 只有于 c_1M_1 的 0.15%, 所以在傅里叶级数求值运算中取了前十四项, 隔振器的刚度是作为一个参数输入电子表格中的, 当刚度值输入时, 传递力就计算出来了. 如果传递力超过了 3000 N, 隔振器的刚度就要降低, 当输入一个新的刚度值时, 电子表格就会自动更新计算, 当隔振器的刚度为 1 190 870 N/m 时, 传递力为 3000 N.

习题 11.14 的解法——周期激励隔振器的设计

参数	计算值								
m	1000	kg		ω_n	34.50906	rad/s			
r	0.2			F_{\max}	3000.001	N			
T	0.1 s	x_max		0.000389	m				
a	0.2								
F_0	20000	N							
F_{all}	3000	N							
k	1190875	N/m							

频率和索引	频率比	傅里叶级数				放大系数	传递力		
i	ω_i	r_i	a_i	b_i	c_i	M_i	T_i	$c_i * M_i$	$c_i * T_i$
1	62.83185	1.820735	3130.997	2274.802	3870.125	0.412043116	0.509737846	1594.658	1972.749
2	125.6637	3.64147	1081.733	3329.231	3500.561	0.08099443	0.143102488	283.5259	500.939
3	188.4956	5.462205	-910.784	2803.105	2947.359	0.034580126	0.083091015	101.92	244.899
4	251.3274	7.282941	-1853.58	1346.702	2291.147	0.0191855	0.059091949	43.9558	135.3883
5	314.1593	9.103675	1521.14	199E-13	1621.139	0.012201394	0.046075904	19.78015	74.69544
6	376.9911	10.92441	-823.812	598.534	1019.287	0.008444277	0.037853387	8.598701	38.54563
7	439.823	12.74515	-167.287	-514.856	541.3516	0.006191213	0.03216465	3.351624	17.41239
8	502.6548	14.56588	67.6083	-208.077	218.7851	0.004733834	0.02798428	1.035692	6.122542
9	565.4867	16.38662	38.55428	28.084	47.77932	0.0037369	0.024777477	0.178547	1.183851
10	628.3185	18.20735	0	0	0	0.003024914	0.022238972	0	0
11	691.1504	20.02809	25.87601	18.80002	31.9845	0.002498723	0.020173203	0.07992	0.54523
12	753.9822	21.84882	30.04813	92.47864	97.2378	0.002098851	0.018462656	0.204088	1.795268
13	816.8141	23.66956	-48.5033	149.2778	156.9599	0.001787859	0.017021293	0.280622	2.571651
14	979.8459	25.49029	-151.312	109.9349	187.0324	0.001541224	0.015789894	0.288259	2.953222

图 11.24

- 11.15 一个汽车悬挂系统的简化模型如图 11.25 所示,当汽车行驶在一条如图 11.26 所示的近似为正弦曲线的公路时,试设计一个电子表格程序来估算车厢相对于轮子的位移幅度,车厢的加速度位移,以及车速在 0~80 m/s 间时车厢的绝对加速度。

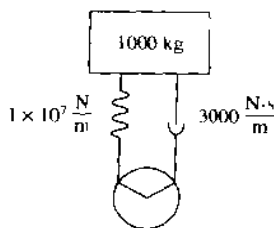


图 11.25

解 激振频率为

$$\omega = \frac{2\pi v}{d}$$

相对位移、绝对位移和绝对加速度的方程式分别为

$$Z = h \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$X = h \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$A = \omega^2 X$$

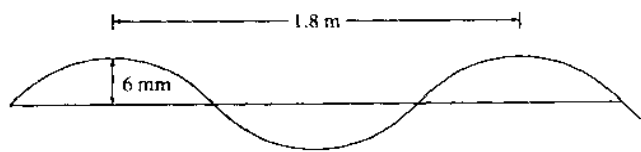


图 11.26

设计一个电子表格程序,建立针对不同速度的振幅计算表,并有该程序作出它们的关系曲线(见图 11.27)。

习题 11.15 的解法——周期激励的汽车悬挂系统

参数			计算值			
m	1000	kg	ω	n=	100	rad/s
k	10000000	N/m	θ	=	0.15	
c	3000	N·s/m				
h	0.006	m				
d	1.8	m				

v (m/s)	ω (rad/s)	r	denom	Z (m)	X (m)	$\omega^2 * X$ (m/s ² * 2)
0	0	0	1	0	0.006	0
1	3.4906585	0.034907	0.998836	7.32E-06	0.006007	0.073197
2	6.98131701	0.069813	0.995346	2.94E-05	0.006029	0.293864
3	10.4719755	0.10472	0.989533	6.65E-05	0.006066	0.665262
4	13.962634	0.139626	0.981399	0.000119	0.006119	1.192947
5	17.4532925	0.174533	0.970951	0.000188	0.006188	1.884964
6	20.943951	0.20944	0.958197	0.000275	0.006274	2.752131
7	24.4346095	0.244346	0.943148	0.00038	0.006379	3.80843
8	27.925268	0.279253	0.925816	0.000506	0.006503	6.071541
9	31.4159265	0.314159	0.906218	0.000653	0.00666	6.563546
10	34.906585	0.349066	0.884375	0.000827	0.006822	8.311864
11	38.3972435	0.383972	0.860312	0.001028	0.00702	10.35042
12	41.887902	0.418879	0.834061	0.001262	0.00725	12.72134
13	45.3785606	0.453786	0.805664	0.001634	0.007516	15.47699
14	48.8692191	0.488692	0.77517	0.001849	0.007823	18.68284
15	52.3698776	0.523599	0.742647	0.002215	0.008178	22.42122
16	55.8605361	0.558505	0.708178	0.002643	0.008591	26.79634
17	59.3411946	0.593412	0.671876	0.003145	0.009071	31.94108

18	62.8318531	0.628319	0.83389	0.003737	0.009632	38.02581
19	66.3225116	0.663225	0.594421	0.00444	0.010292	45.26991
20	69.8131701	0.698132	0.553747	0.005281	0.01107	53.95559
21	73.3038286	0.733038	0.51226	0.006294	0.011993	64.44205
22	76.7944871	0.767945	0.470521	0.00752	0.013086	77.17239
23	80.2861456	0.802851	0.42935	0.009008	0.014374	92.6521
24	83.7758041	0.837758	0.389956	0.010799	0.015865	111.3456
25	87.2664626	0.872665	0.354119	0.012903	0.017514	133.3803
26	90.7571211	0.907571	0.324374	0.015236	0.019171	167.9048
27	94.2477796	0.942478	0.304021	0.01753	0.020509	182.1758
28	97.7384381	0.977384	0.296606	0.019324	0.021081	201.3781
29	101.229097	1.012291	0.304693	0.020179	0.02058	210.89
30	104.719755	1.047198	0.328682	0.020019	0.019134	209.8317
31	108.210414	1.082104	0.366891	0.019149	0.017194	201.3302
32	111.701072	1.117011	0.41672	0.017965	0.015185	189.4659
33	115.191731	1.151917	0.475704	0.016736	0.013345	177.0735
34	118.682389	1.186824	0.541926	0.015595	0.011752	165.5395
35	122.773048	1.22173	0.614016	0.014586	0.010407	155.3435
36	125.663706	1.256637	0.691029	0.013711	0.009279	146.5314
37	129.154365	1.291544	0.772312	0.012959	0.008332	138.9792
38	132.645023	1.32645	0.857407	0.012312	0.007532	132.5154
39	136.135682	1.361357	0.945994	0.011755	0.006851	126.971
40	139.62634	1.396263	1.037838	0.011271	0.006268	122.1969
41	143.116999	1.43117	1.132769	0.010849	0.005764	118.0677
42	146.607657	1.466077	1.230658	0.010479	0.005326	114.4796
43	150.098316	1.500983	1.331409	0.010153	0.004942	111.3479
44	153.588974	1.53589	1.434946	0.009464	0.004604	108.603
45	157.079633	1.570796	1.541211	0.009606	0.004304	106.1882
46	160.570291	1.605703	1.650157	0.009375	0.004036	104.0566
47	164.06096	1.640609	1.761747	0.009167	0.003796	102.1696
48	167.551608	1.676516	1.875951	0.008979	0.00358	100.4949
49	171.042267	1.710423	1.992743	0.008809	0.003384	99.00563
50	174.532926	1.745329	2.112104	0.008653	0.003207	97.67915
51	178.023584	1.780236	2.234017	0.008512	0.003045	96.49627
52	181.514242	1.815142	2.358467	0.008382	0.002897	95.44069
53	185.004901	1.850049	2.485443	0.008263	0.002761	94.49845
54	188.495559	1.884956	2.614954	0.008153	0.002636	93.65755
55	191.986218	1.919862	2.746931	0.008051	0.002521	92.90764
56	195.476876	1.954769	2.881427	0.007957	0.002414	92.23972
57	198.967535	1.989675	3.018416	0.007869	0.002315	91.64596
58	202.458193	2.024582	3.157892	0.007788	0.002223	91.11946
59	205.948852	2.059489	3.29985	0.007712	0.002137	90.65423
60	209.43951	2.094395	3.444286	0.007641	0.002057	90.24493

61	212.930169	2.129302	3.591195	0.007575	0.001983	89.88685
62	216.420827	2.164208	3.740676	0.007513	0.001912	89.57581
63	219.911486	2.199115	3.892423	0.007455	0.001847	89.30807
64	223.402144	2.234021	4.046736	0.0074	0.001785	89.0803
65	226.892803	2.268928	4.203512	0.007348	0.001727	88.88951
66	230.383461	2.303835	4.362748	0.0073	0.001672	88.73301
67	233.87412	2.338741	4.524443	0.007254	0.00162	88.60837
68	237.384778	2.373648	4.688595	0.00721	0.001571	88.51339
69	240.855437	2.408554	4.855202	0.007169	0.001525	88.4451
70	244.346095	2.443461	5.024254	0.00713	0.001481	88.40459
71	247.836754	2.478368	5.195779	0.007093	0.001439	88.3875
72	251.327412	2.513274	5.369745	0.007058	0.001399	88.39304
73	254.818071	2.548181	5.546162	0.007025	0.001362	88.41995
74	258.308729	2.583087	5.725028	0.006993	0.001326	88.46695
75	261.799388	2.617994	5.906344	0.006963	0.001292	88.53289
76	265.290046	2.6529	6.090108	0.006934	0.001259	88.61572
77	268.780705	2.687807	6.276319	0.006906	0.001228	88.71745
78	272.271353	2.722714	6.464977	0.00688	0.001198	88.83419
79	275.762022	2.75762	6.656081	0.006855	0.00117	88.96008
80	279.25268	2.792527	6.849631	0.006831	0.001143	89.11236
81	282.743339	2.827433	7.045626	0.006808	0.001117	89.27232
82	285.233997	2.86234	7.244065	0.006786	0.001092	89.44527
83	289.724656	2.897247	7.444948	0.006765	0.001068	89.63061
84	293.215314	2.932153	7.648276	0.006745	0.001045	89.82775
85	296.705973	2.96706	7.854046	0.006725	0.001023	90.03615
86	300.196631	3.001965	8.06226	0.006707	0.001002	90.25531

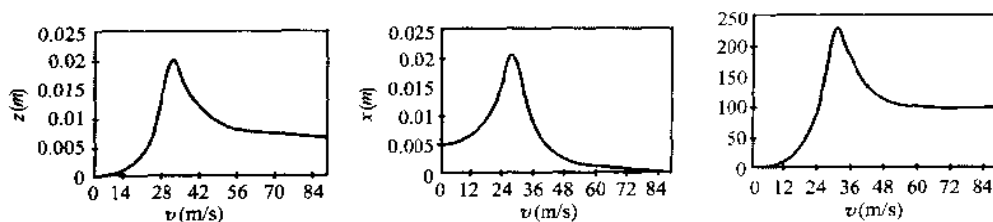


图 11.27

- 11.16 设计一个电子表格程序,采用对分段脉冲进行回路积分的数值积分,估算习题4.27和4.28.用该程序估算单自由度质量($m = 100 \text{ kg}$)-弹簧($k = 10\,000 \text{ N/m}$)-阻尼($c = 150 \text{ N}\cdot\text{s/m}$)系统受激励

$$F(t) = 1000e^{-1.5t^2} \text{ N}$$

时的响应.

解 解法见图 11.28 和 11.29.

习题 11.16 的解法——用电子表格进行的回路积分数值运算

参数					计算值				
m=	100	kg			$\omega_n=$	100	rad/s		
k=	10000	N/m			$\theta=$	0.075			
c=	150	N-s/m			$\omega_d=$	9.971835	rad/s		
DELTA t=	1.8	m			r=	0.075212			
t	F	exp	cos	sin	G_1	sum G_1	G_2	sim G_2	x
0	1000	1	1	0	0	0	0	0	0
0.01	999.9625	1.007528	0.995032	0.099553	10.02056	10.02056	0.500657	0.500657	0.000497
0.02	999.6626	1.015113	0.980178	0.198117	9.992627	20.01319	1.506557	2.007215	0.001973
0.03	999.0629	1.022755	0.955586	0.294713	9.860809	29.874	2.511138	4.518352	0.004399
0.04	998.1642	1.030455	0.921499	0.38838	9.625148	39.49914	3.503384	8.021737	0.007736
0.05	996.9671	1.038212	0.878257	0.478189	9.286883	48.78603	4.472281	12.49402	0.011935
0.06	995.4728	1.046028	0.826289	0.563247	8.84845	57.63448	5.406947	17.90096	0.016941
0.07	993.6825	1.053903	0.766111	0.642709	8.313466	65.94794	6.296767	24.19773	0.022691
0.08	991.598	1.061837	0.698321	0.715784	7.6867	73.63464	7.131525	31.32926	0.029115
0.09	989.221	1.06983	0.623594	0.781749	6.974025	80.60867	7.901528	39.23078	0.036137
0.1	986.5537	1.077884	0.54267	0.839946	6.182362	86.79103	8.597731	47.82852	0.043676
0.11	983.5985	1.085999	0.456355	0.889798	5.319603	92.11063	9.211854	57.04037	0.051646
0.12	980.358	1.094174	0.365506	0.930809	4.394525	96.50516	9.736483	66.77685	0.059959
0.13	976.835	1.102411	0.271025	0.962572	3.416696	99.92185	10.16517	76.94202	0.068524
0.14	973.0328	1.110711	0.173851	0.9847/2	2.356359	102.3182	10.49252	87.43454	0.077249
0.15	968.9546	1.119072	0.074951	0.997187	1.34432	103.6625	10.71426	98.1488	0.086041
0.16	964.6041	1.127497	-0.02469	0.999695	0.271817	103.9343	10.8273	108.9761	0.094807
0.17	959.9851	1.135985	-0.12409	0.99227	-0.80961	103.1247	10.82977	119.8059	0.103457
0.18	955.1017	1.144537	-0.22226	0.974987	-1.88825	101.2365	10.72107	130.5269	0.111902
0.19	949.958	1.153153	-0.31822	0.948017	-2.95238	98.28411	10.50186	141.0288	0.120056
0.2	944.5586	1.161834	-0.41102	0.911627	-3.99038	94.29372	10.17407	151.2029	0.127838
0.21	938.9083	1.170581	-0.49973	0.86518	-4.9909	89.30282	9.740873	160.9438	0.135169
0.22	933.0117	1.179393	-0.58348	0.812127	5.94297	83.35985	9.206664	170.1504	0.14198
0.23	926.8741	1.188272	-0.66143	0.750006	-6.83615	76.5237	8.577001	178.7274	0.148203
0.24	920.5007	1.197217	-0.73281	0.680432	-7.66065	68.86305	7.858546	186.586	0.153779
0.25	913.8969	1.20623	-0.79691	0.604098	-8.40746	60.45559	7.058982	193.6449	0.158658
0.26	907.0683	1.215311	-0.85309	0.521762	-9.06844	51.38715	6.186925	199.8319	0.162793
0.27	900.0207	1.22446	-0.9008	0.434242	-9.63643	41.75072	5.251822	205.0837	0.166148
0.28	892.76	1.233678	-0.93955	0.342408	-10.1053	31.6454	4.263837	209.3475	0.168694
0.29	885.2922	1.242965	-0.96897	0.247172	-10.4702	21.17522	3.233726	212.5813	0.170412
0.3	877.6236	1.252323	-0.98876	0.14948	10.7272	10.44801	2.172714	214.754	0.171287
0.31	869.7604	1.26175	-0.99873	0.050302	-10.8739	-0.42588	1.092353	215.8463	0.171318
0.32	861.7091	1.271249	-0.99878	0.04937	-10.909	11.3349	0.004387	215.8507	0.170508
0.33	853.4763	1.280819	-0.9889	-0.14856	-10.8324	-22.1673	-1.07939	214.7713	0.168869
0.34	845.0686	1.290462	0.9692	-0.24627	-10.6456	-32.8129	-2.14727	212.624	0.166422
0.35	836.4927	1.300176	0.93987	-0.34154	10.351	-43.1638	-3.18779	209.4363	0.163195
0.36	827.7555	1.309964	-0.9012	-0.43341	-9.95228	-53.1161	-4.18983	205.2464	0.159223
0.37	818.8638	1.319826	-0.85358	-0.52097	-9.45448	-62.5706	-5.1428	200.1036	0.154547
0.38	809.8247	1.329762	-0.79747	-0.60336	-8.86356	-71.4342	-6.0367	194.0669	0.149216
0.39	800.6451	1.339773	-0.73344	-0.67975	-8.18656	-79.6207	6.8623	187.2046	0.143283
0.4	791.3321	1.349859	-0.66213	-0.74939	-7.43145	-87.0522	-7.61117	179.5935	0.130807
0.41	781.8929	1.360021	-0.58423	-0.81158	-6.60702	-93.6592	-8.27586	171.3176	0.129851
0.42	772.3345	1.370259	-0.50054	-0.86572	-5.72278	-99.382	-8.84991	162.4677	0.122481
0.43	762.6642	1.380575	0.41187	-0.91124	-4.78883	-104.171	-9.32798	153.1397	0.114767
0.44	752.889	1.390968	-0.3191	-0.94772	-3.81574	-107.987	-9.70583	143.4339	0.106781
0.45	743.0161	1.40144	-0.22317	-0.97478	-2.81446	-110.801	-9.98043	133.4535	0.098597
0.46	733.0528	1.41199	-0.12502	-0.99215	-1.79608	-112.597	-10.15	123.3035	0.090289

0.47	723.0062	1.42262	-0.02562	0.99967	0.77182	-113.369	10.2138	113.0897	0.081932
0.48	712.8833	1.433329	0.074024	0.99726	0.247192	-113.122	10.1725	102.9172	0.073598
0.49	702.6914	1.44412	0.172937	-0.98493	1.250016	111.872	-10.0279	92.88924	0.06536
0.5	692.4374	1.454991	0.270131	0.96282	2.226035	-109.646	9.783	83.10624	0.057289
0.51	682.1283	1.465945	0.364641	0.93115	3.165078	-106.481	-9.44171	73.66453	0.049451
0.52	671.7712	1.476981	0.455528	-0.89022	4.057534	-102.423	-9.00917	64.65536	0.041911
0.53	661.3729	1.4881	0.54189	0.84045	4.894462	97.5286	-8.49141	56.16395	0.034728
0.54	650.9402	1.499303	0.622867	-0.78233	5.667686	91.8609	7.89537	48.26858	0.027959
0.55	640.4799	1.51059	0.697656	-0.71643	6.369879	-85.491	7.22875	41.03983	0.021653
0.56	629.9987	1.521962	0.765513	0.64342	6.994644	-78.4964	-6.49993	34.53991	0.015857
0.57	619.5031	1.533419	0.825765	-0.56401	7.536568	70.9598	-5.71788	28.82203	0.010609
0.58	608.9997	1.544963	0.877812	0.479	7.991275	62.9685	-4.89199	23.93004	0.005943
0.59	598.4948	1.556594	0.921138	-0.38924	8.35546	54.6131	4.03202	19.89802	0.001887
0.6	587.9946	1.568312	0.955312	-0.2956	8.626907	45.9862	3.1479	16.75011	-0.00154
0.61	577.5054	1.580119	0.979994	-0.19903	8.8045	37.1817	2.24968	14.50043	0.00432
0.62	567.0332	1.592014	0.994939	-0.10048	8.888212	28.2935	1.34736	13.15307	0.00645
0.63	556.5838	1.603999	1	-0.00093	8.879085	-19.4144	0.45079	12.70228	0.00793
0.64	546.1632	1.616074	0.995124	0.098629	8.779197	10.6352	0.430459	13.13274	0.00876
0.65	535.7769	1.628241	0.980362	0.197207	8.591618	-2.04356	1.287169	14.41991	-0.00895
0.66	525.4304	1.640498	0.955859	0.293825	8.32035	6.276788	2.110618	16.53053	0.00853
0.67	515.1292	1.652848	0.92186	0.387524	7.970258	14.24705	2.892651	19.42318	0.00751
0.68	504.8785	1.665291	0.878701	0.477373	7.546998	21.79404	3.625771	23.04895	-0.00593
0.69	494.6833	1.677828	0.826812	0.562479	7.056925	28.85097	4.303216	27.35217	-0.00382
0.7	484.5486	1.690459	0.766708	0.641997	6.507007	35.35798	4.919016	32.27118	0.00121
0.71	474.4792	1.703185	0.698986	0.715135	5.904724	41.2627	5.468054	37.73924	0.001842
0.72	464.4797	1.716007	0.62432	0.781169	5.257966	46.52066	5.946099	43.68534	0.005299
0.73	454.5545	1.728925	0.54345	0.839441	4.574929	51.09559	6.34984	50.03518	0.009107
0.74	444.708	1.741941	0.457181	0.889373	3.864011	54.9596	6.676902	56.71208	0.013213
0.75	434.9442	1.755055	0.36637	0.930469	3.133703	58.09331	6.925845	63.63792	0.017564
0.76	425.2672	1.768267	0.271919	0.96232	2.392488	60.4858	7.096164	70.73409	0.022102
0.77	415.6809	1.781579	0.174766	0.98461	1.648737	62.13453	7.188266	77.92235	0.026771
0.78	406.1887	1.794991	0.075877	0.997117	0.910615	63.04515	7.203439	85.12579	0.031512
0.79	396.7942	1.808504	-0.02377	0.999718	0.185985	63.23113	7.143814	92.26961	0.036268
0.8	387.5007	1.822119	-0.12317	0.992385	-0.51767	62.71346	7.012316	99.28192	0.040983
0.81	378.3114	1.835836	0.22136	0.975193	-1.19335	61.52011	6.812604	106.0945	0.0456
0.82	369.2293	1.849657	-0.31734	0.948312	-1.83455	59.68556	6.549007	112.6435	0.050067
0.83	360.257	1.863581	-0.41017	0.912009	-2.43541	57.25015	6.226449	118.87	0.054333
0.84	351.3974	1.877611	-0.49893	0.866644	2.99068	54.25947	5.850377	124.7204	0.05835
0.85	342.6528	1.891746	-0.58273	0.812669	-3.49582	50.76364	5.426675	130.147	0.062072
0.86	334.0256	1.905987	-0.66073	0.75062	-3.94701	46.81664	4.961579	135.1085	0.065459
0.87	325.518	1.920336	-0.73218	0.681113	4.34117	42.47547	4.461595	139.5702	0.068473
0.88	317.1319	1.934792	-0.79635	0.604838	-4.67598	37.79949	3.933408	143.5036	0.071082
0.89	308.8692	1.949358	-0.85261	0.522555	-4.94989	32.8496	3.383798	146.8874	0.073257
0.9	300.7315	1.964033	-0.90039	0.435079	5.1621	27.6875	2.819552	149.707	0.074976
0.91	292.7204	1.978819	-0.93923	0.343281	-5.31254	22.37496	2.247387	151.9544	0.07622
0.92	284.8372	1.993716	-0.96874	0.248072	-5.40186	16.9731	1.67387	153.6282	0.076976
0.93	277.0832	2.008725	-0.98863	0.150398	-5.43139	11.54171	1.10534	154.7336	0.077236
0.94	269.4594	2.023847	-0.99869	0.05123	-5.40309	6.138616	0.547846	155.2814	0.076997
0.95	261.9668	2.039083	-0.99883	-0.04845	-5.31953	0.819088	0.007082	155.2885	0.076262
0.96	254.6061	2.054433	-0.98904	-0.14764	-5.1838	-4.36471	-0.51167	154.7768	0.075037
0.97	247.3781	2.069899	-0.96943	0.24537	-4.99948	-9.36418	1.00359	153.7732	0.073336
0.98	240.2831	2.085482	0.94019	-0.34066	-4.77056	14.1347	-1.46434	152.3089	0.071174
0.99	233.3216	2.101182	-0.9016	-0.43257	-4.50142	18.6362	-1.89014	150.4188	0.068573
1	226.4938	2.117	-0.85406	-0.52018	-4.19668	-22.8328	-2.27775	148.141	0.065559

图 11.28

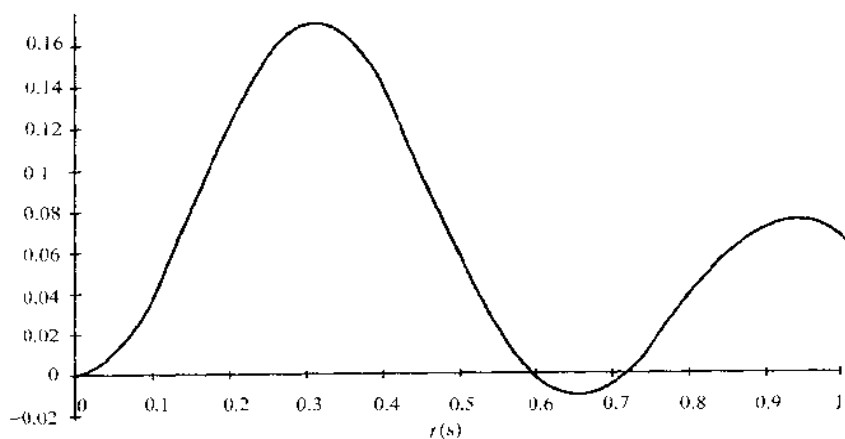


图 11.29

补充习题

- 11.17 用 VIBES 或其他振动软件包为一个阻尼比为 0.2, 受三角形脉冲激励的系统设计一个力谱程序。
- 11.18 用 VIBES 或其他振动软件包编程估算图 11.30 所示系统的第一阶固有频率, 要求取三个自由度对该梁建模。
- 11.19 若图 11.30 系统中机器以 200 rad/s 转速运行时, 产生 $0.45 \text{ kg}\cdot\text{m}$ 的不平衡转矩, 用 VIBES 或其他振动软件包编程求系统此时的响应。
- 11.20 一个汽车悬挂系统可以用一个 $m = 1000 \text{ kg}$, $k = 1.3 \times 10^7 \text{ N/m}$ 及 $\zeta = 0.7$ 的单自由度系统来模拟, 用 VIBES 或其他振动软件包编程计算当汽车遇到一个 20 cm 深的凹坑时, 该系统的过冲。
- 11.21 一个质量为 10 kg, 刚度为 $1 \times 10^6 \text{ N/m}$ 的单自由度系统置于摩擦系数为 $\mu = 0.14$ 的表面上, 若将它拉至距离平衡位置 3 mm 处释放, 试用 VIBES 或其他振动软件包编程模拟该系统的自由振动。

在求解习题 11.22 ~ 11.29 时, 要求用电子记事本完成计算, 它们都是针对图 11.20 所示系统而言的, 当机器的转速为 200 r/min 时, 会产生一个大小为 $0.45 \text{ kg}\cdot\text{m}$ 的不平衡转矩。

- 11.22 采用以机器位移为广义坐标的单自由度系统来对该梁建模, 确定在这种位置处梁的等效刚度, 用对梁的惯性因素的近似方法求等效质量, 以及系统的固有频率。
- 11.23 当用四个自由度系统对该梁建模时, 求其柔度矩阵。

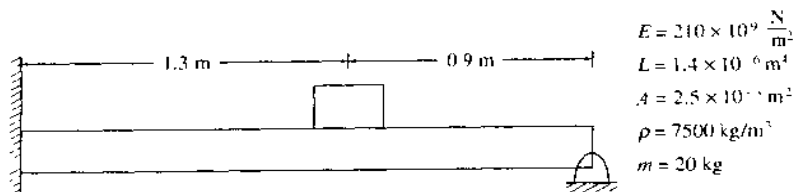


图 11.30

- 11.24 当用四个自由度系统对该梁建模时, 估算其固有频率和标准模态。

11.25 当用四个自由度系统对该梁建模时, 估计算机器的稳态振幅。

11.26 用瑞利-里兹法及试算函数

$$\phi_1(x) = \frac{3}{2}L^2x^3 - \frac{5}{2}L^2x^3 + x^4,$$

$$\phi_2(x) = \frac{7}{2}L^3x^3 - \frac{9}{2}L^2x^3 + x^5,$$

估算系统的第一阶固有频率。

11.27 用瑞利-里兹法及习题 11.26 中的试算函数估计算机器的稳态振幅。

11.28 当用三单元的有限元模型对该梁建模时, 估算其固有频率。

11.29 当用三单元的有限元模型对该梁建模时, 估计算机器的稳态振幅。

11.30 用电子记事本解超越方程求一端固定, 一端自由等直梁的前三阶固有频率, 并作出相应的模态图形。

11.31 用电子记事本解习题 8.25。

11.32 若 $\zeta = 0.15$, $\omega = 195 \text{ r/min}$, 用电子记事本解习题 11.4。

11.33 若习题 11.5 系统受激励

$$F(t) = 1000 \tanh(0.1t)$$

作用时, 用电子记事本对该系统进行回路积分数值求解。

用计算机代数解答习题 11.34~11.40。

11.34 推导梁元的局部质量矩阵单元, 即式(9.17)。

11.35 求图 11.31 所示系统的固有频率, 用给定的参数符号表示。

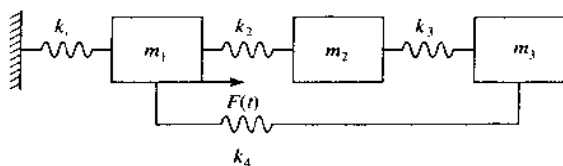


图 11.31

11.36 若 $F(t) = F_0 \sin \omega t$, 求图 11.31 所示系统中质量块 m_1 的频率响应方程。

11.37 用拉普拉斯变换法求单自由度无阻尼系统受图 11.32 所示激励时的响应。

11.38 若图 11.31 所示系统中 $F(t)$ 如图 11.32 所示, 用拉普拉斯变换法求该系统的响应。

11.39 用闭路积分法确定质量为 m , 固有频率为 ω_n , 阻尼比为 ζ 的单自由度系统受图 11.32 所示激励时的响应。

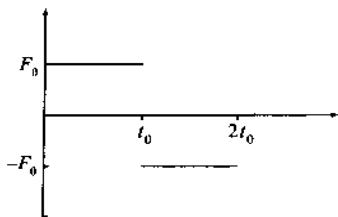


图 11.32

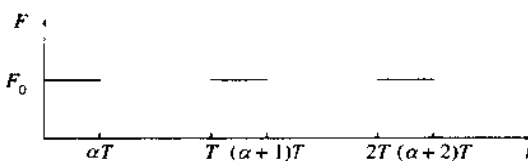


图 11.33

11.40 求图 11.33 所示激励的傅里叶系数。

11.41 设计一个电子表格程序求解习题 11.14。设机器所受激励如图 11.33 所示, 其中 $T = 0.1 \text{ s}$, $\alpha = 0.3$, $F_0 = 21\,000 \text{ N}$ 。

11.42 设计一个电子表格程序确定当一个系统加上有阻尼减振器时, 该系统的频率响应。并用该程序分析习题 11.9, 设在机器上加上一个质量比为 0.15 的最佳有阻尼减振器。

- 11.43 设计一个类似于习题 11.16 中的电子表格程序来确定当系统有形如习题 11.15 中的激励时的响应。
- 11.44 设计一个电子表格程序,使用欧拉数值方法来估算单自由度系统的受迫响应,并用该程序来确定质量为 150 kg,固有频率为 210 rad/s,阻尼比为 0.05 的系统受激励为 $F(t) = 1200t^{3/2}e^{-1.5t}$ 时的响应。
- 11.45 设计一个电子表格程序,使用四阶龙格-库塔方法来确定单自由度系统的受迫响应,并用该程序来求习题 11.44 中系统的响应。

参 考 文 献

Kelly, S G. Fundamentals of Mechanical Vibrations. New York: McGraw Hill, 1993

附录 配套的 Schaum 的电子指导性语言 (Electronic Tutor) 中的屏幕采样实例

本书配有 Schaum 的电子指导性语言,是用 Mathcad[®] 编写的,它用来帮你更快更好地掌握本书的内容. Electronic Tutor 使用 Mathcad 计算软件在 LIVE-MATH 环境下,可以让你通过屏幕直接访问本书中提供的约 100 多道习题解答,同时还有理论答案总结和电子交互参考及超级链接,以后的页数就显示了 Electronic Tutor 中的屏幕采样实例,它将帮你了解这个电子学习工具的各种强大功能,将这些屏幕显示与本书前面相关习题的解答相比较(在每道习题的开头都列出了相应的页数),看看二者是如何相互补充的.

在配套的 Schaum's Electronic Tutor 中,你会发现一道给定习题解答的所有相同文字,图表和公式方程都同时显示在你的计算机屏幕上. 在后面的篇幅中,你将看到所有的数学表达都采用相似的符号,包括单位在内,你可能会注意到 Schaum 的外形轮廓的打印和 Electronic Tutor 格式上的不同,这种设计是为了激发你和材料的相应作用,并向你展示解答令人深思习题的其他方法.

当你在看后面内容时,若发现屏幕上显示的内容完全相互影响,请记住每一个数字,公式和图表,你可以改变习题中的起始参数值,看看新计算出来的输出图表;你也可以改变其中任一方程,并会立即看到数值计算对解的影响,你看到的每一个方程、图表和数字都可以作为现成的实验;每一个被收录的习题答案都可以作为一个“活”的工作表格,你可以对其进行修改来解答更多的相关题目,从而 Electronic Tutor 可帮你学习并保留本书所教的内容,同时你也可以把它当成一个解题工具来用.

在 Schaum's Outline 所有外形轮廓上都印有如右图所示的 Mathcad 标记符号,它说明哪些习题可以在 Electronic Tutor 中找到.

如果想更多地了解配套的 Electronic Tutor,包括系统设备在内,请看后面的封页.

欠阻尼系统的响应和过冲

(Schaum 的机械振动,习题解答 2.21, 2.22 和 2.23, P51 ~ 52)

说明 对于一个欠阻尼系统,过冲定义为系统在第一个半周期结束时的最大位移,且系统初始速度为零,有初始位移.

(a) 当系统的最小阻尼比为多大时才能使其过冲不超过 5%?

(b) 为一个空载质量为 m 的汽车设计一个悬挂系统,根据乘客、货物及燃料估算它的最大加载质量为 m_p . 当汽车空载时,其静位移是 Δ ,为了使汽车在空载和满载时的最大过冲不超过 5%,求系统的最小阻尼系数是多少?

(c) 前面(b)部分是用(b)部分所决定的最小阻尼系数来设计汽车的悬挂系统的,现求当汽车装载的乘客、燃料及货物总质量为 m ,并遇到一个高为 h 的坡时的过冲?

系统参数

$m = 2000 \text{ kg}$, 汽车的空载质量.

$\Delta = 3.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, 空载时的静位移.

[®] Mathcad 见 Inc. 的数学软件的注册商标.

$m_p = 1000 \text{ kg},$	乘客、货物及燃料的质量.
$m_1 = 220 \text{ kg},$	(c)部分的乘客、货物及燃料的质量.
$h = 5.5 \cdot 10^{-2} \text{ m},$	坡的高度.
$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$	重力加速度.

解 (a) 阻尼系统的自由振动响应为

$$x = A \exp(-\zeta \omega_n t) \sin(\omega_d t + \phi_d),$$

其中 ζ 是系统的阻尼比, ω_n 是其固有频率, ω_d 是有阻尼的固有频率, A 和 ϕ_d 是积分常数, 若 x_0 是系统的初始位移, 则

$$x_0 = A \sin(\phi_d).$$

在第一个半周期结束点处距平衡点的位移为

$$x_A = -x\left(\frac{T_d}{2}\right),$$

$$x_h = A \exp\left(-\zeta \omega_n \frac{T_d}{2}\right) \sin\left(\omega_d \frac{T_d}{2} + \phi_d\right).$$

因为

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}, \quad \sin(\pi + \phi_d) = -\sin(\phi_d),$$

所以

$$x_h = x_0 \exp\left(-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right).$$

对 5% 的过冲

$$x\left(\frac{T_d}{2}\right) = -0.05x_0,$$

$$0.05 = \exp\left(-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right).$$

解出 ζ 为

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln(0.05)^2}{\pi^2 + \ln(0.05)^2}}, \quad \zeta = 0.69.$$

(b) 悬挂所需的刚度为

$$k = \frac{m}{\Delta}, \quad k = 6.329 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

由(a)的结果可知, 只有阻尼比小于 0.69 时过冲才小于 5%, 系统的刚度是固定的, 但是质量是变化的, 它取决于乘客、燃料和货物. 如果阻尼系数也是固定的, 则质量越大, 阻尼比也越大 ($\zeta = c/[2(mk)^{1/2}]$), 因此, 为了使各种装载条件下的过冲都小于 5%, 汽车在满载时的阻尼比必须小于 0.69.

$$c = 2\zeta \sqrt{(m + m_p) \cdot k}, \quad c = 1.902 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

(c) 系统加载时的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{(m + m_1)}}, \quad \omega_n = 53.394 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

系统的阻尼比为

$$\zeta_1 = \frac{c}{2\sqrt{(m + m_1)k}}, \quad \zeta_1 = 0.082.$$

根据(a)部分得过冲为

$$x_h = h \exp\left(-\frac{\zeta_1 \pi}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\right), \quad x_h = 8.072 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

扩展 将过冲表示成对总质量的关系函数, 并绘出图像, 其中质量的变化区间为从空载到满载.

$i = 0, 1, 20,$ 计算从质量到质量 + m_p 的质量, 取增加步长为 $m_p/20$,

$$m_{S_i} = m + \frac{i}{20} m_P,$$

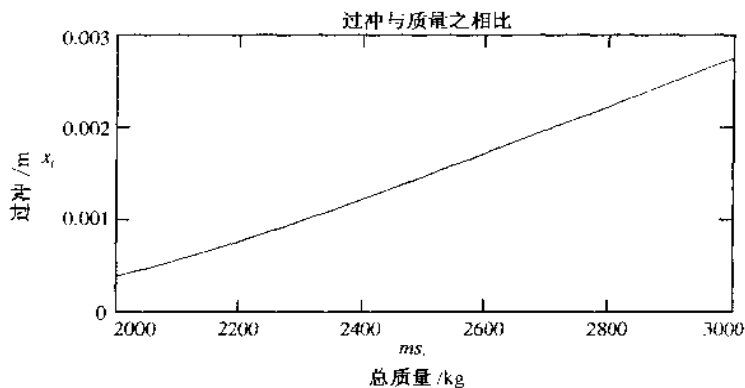
$$\omega_i = \sqrt{\frac{k}{m_{S_i}}},$$

不同质量下的固有频率,

$$\zeta_i = \frac{c}{2\sqrt{m_{S_i}k}},$$

不同质量下的阻尼比.

$$x_i = h \exp\left[-\frac{\zeta_i \pi}{\sqrt{1 - (\zeta_i)^2}}\right] \quad \text{过冲}$$

深入研究(1) 将过冲表示为阻尼比在 $0 < \zeta < 1$ 之间的函数并作图.(2) 将过冲表示成阻尼周期的函数并绘图. 设刚度固定, 阻尼比在 $0 \sim 1$ 之间变化.**有阻尼和无阻尼系统对简谐激励的响应**

(Schaum 的机械振动, 习题解答 3.4 和 3.8)

说明 质量为 m 的机器放在长为 L 的悬臂梁的末端, 弹性模量为 E , 横截面积惯性矩为 I , 当机器工作时产生一个大小为 F_0 的简谐力. 问转速为多大时机器的稳态振幅小于 X_{\max} , 若

(a) 系统的模型为一个无阻尼的单自由度系统?

(b) 梁的模型为一个黏性阻尼比为 ζ 的单自由度系统?**系统** $m = 45 \text{ kg}$,

机器质量.

参数 $E = 200 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$,

梁的弹性模量.

 $I = 1.6 \times 10^{-5} \text{ m}^4$,

梁的截面惯性矩.

 $L = 1.6 \text{ m}$,

梁长.

 $F_0 = 125 \text{ N}$,

激振力大小.

 $X_{\max} = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$

最大稳态振幅.

 $\zeta = 0.08$,

(b) 部分的阻尼比.

解

(a) 系统的模型为单自由度系统, 等效刚度就是: 一端固定, 一端自由的梁在端点处的刚度

$$k = \frac{3EI}{L^3}, \quad k = 2.334 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

若忽略梁的惯性, 则机器自由振动的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_n = 228.218 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

为了使稳态振幅小于 X_{\max} , 最大放大因子为

$$M_{\max} = \frac{m\omega_n^2 \cdot X_{\max}}{F_0}, \quad M_{\max} = 3.75.$$

放大因子与频率比及阻尼比的关系式为

$$M(r, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}.$$

对无阻尼系统 $\zeta=0$, 有两个 r 值满足 $M(r, 0) = M_{\max}$. 先找当 $r < 1$ 时的值

$$\begin{aligned} r &= 0.8, & \text{对 } r < 1 \text{ 时的初值.} \\ r_1 &= \text{root}(M(r, 0) - M_{\max}, r), & r_1 = 0.856, & \text{ } r \text{ 的解.} \\ \omega_1 &= r_1 \omega_n, & \omega_1 = 195.434 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \text{ } X < X_{\max}, \text{ 对于 } \omega < \omega_1. \end{aligned}$$

现在对于 $r > 1$

$$\begin{aligned} r &= 1.2, & \text{对 } r > 1 \text{ 时的初值.} \\ r_2 &= \text{root}(M(r, 0) - M_{\max}, r), & r_2 = 1.125, & \text{ } r \text{ 的解.} \\ \omega_2 &= r_2 \omega_n, & \omega_2 = 256.851 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \text{ } X < X_{\max}, \text{ 对于 } \omega < \omega_2. \end{aligned}$$

(b) 黏性阻尼比 ζ

$$\begin{aligned} r &= 0.8, & \text{对 } r < 1 \text{ 时的初值.} \\ r_1 &= \text{root}(M(r, \zeta) - M_{\max}, r), & r_1 = 0.879, & \text{ } r \text{ 的解.} \\ \omega_1 &= r_1 \omega_n, & \omega_1 = 195.434 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \text{ } X < X_{\max}, \text{ 对于 } \omega < \omega_1. \\ r &= 1.2, & \text{ } r > 1 \text{ 时的初值.} \\ r_2 &= \text{root}(M(r, \zeta) - M_{\max}, r), & r_2 = 1.096, & \text{ } r \text{ 的解.} \\ \omega_2 &= r_2 \omega_n, & \omega_2 = 250.099 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \text{ } X < X_{\max}, \text{ 对于 } \omega < \omega_2. \end{aligned}$$

若你使用的 MAHCAD 版本有符号功能, 可以采用另外一种解法.

首先安装符号信息处理软件, 放大因子 M 可用符号表示为 r 或 ζ 的函数, [Ctrl] = 用来代表相同符号.

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},$$

$$\left[\begin{aligned} &\sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{-4\zeta^2 - 4\zeta^4 + \frac{1}{M^2}}} \\ &- \sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{-4\zeta^2 + 4\zeta^4 + \frac{1}{M^2}}} \\ &\sqrt{1-2\zeta^2 - \sqrt{-4\zeta^2 + 4\zeta^4 + \frac{1}{M^2}}} \\ &- \sqrt{1-2\zeta^2 - \sqrt{-4\zeta^2 + 4\zeta^4 + \frac{1}{M^2}}} \end{aligned} \right],$$

现在选择 M 方程式中的变量 r , 从“符号”, 菜单中选“变量求解”, r 的用 M 和 ζ 表示的四个解如左图所示。在一个阵列中, 由于第二和第四个解是第一和第三个解的相反数, 没有意义。

第一个解的第三个解都是 M 和 ζ 的函数, 它们是通过将其复制在写字板上并转换成右旋函数建立的。第三个解中的 r 值较小, 它等于 r_1 , 而第一解则等于 r_2 。

$$\begin{aligned} r_1(M, \zeta) &= \sqrt{1-2\zeta^2 - \sqrt{-4\zeta^2 + 4\zeta^4 + \frac{1}{M^2}}}, \\ r_2(M, \zeta) &= \sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{-4\zeta^2 + 4\zeta^4 + \frac{1}{M^2}}}. \end{aligned}$$

习题的解通过计算机函数求得, 其中

$$\begin{aligned} M_{\max}, \zeta &= 0 \text{ 及 } \zeta = 0.08, \\ \zeta &= 0, r_1(M_{\max}, \zeta) = 0.856, r_2(M_{\max}, \zeta) = 1.125, \\ \zeta &= 0.08, r_1(M_{\max}, \zeta) = 0.879, r_2(M_{\max}, \zeta) = 1.096. \end{aligned}$$

以上求得的值与先前用求根函数所得的结果相同。对 $\omega < \omega_n$ 的转速上限和 $\omega > \omega_n$ 的转速下限也与前面

所得相同.这种方法用于确定 ζ 在一定范围的转速十分有效.

深入研究

(1) 作图表示转速范围的上限与 ζ 的关系, 对 $r < 1$ 及 $r_0 < \zeta < 0.7$.

(2) 作图在 $r > 1$ 时的转速范围下限与梁长的函数图. 梁长 $1 \text{ m} < L < 4 \text{ m}$, 设 $\zeta = 0.08$, 其他所有从技术上均已给定.

三自由度系统的固有频率和模态振型

(Schaum's 的机械振动, 习题解答 5.30, 5.31 和 5.38)

说明 求以下系统的固有频率和标准模态

系统 给定

参数 $m = 1 \text{ kg}$.

$$k = \frac{1 \text{ N}}{\text{m}}.$$

解 这个三自由度系统的质量和刚度矩阵分别为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \cdot \text{kg} & 0 \cdot \text{kg} \\ 0 \cdot \text{kg} & 2m & 0 \cdot \text{kg} \\ 0 \cdot \text{kg} & 0 \cdot \text{kg} & 2m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ -2k & 3k & -k \\ 0 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} & -k & k \end{bmatrix}.$$

质量矩阵的逆矩阵计算为

$$\mathbf{M}_{\text{inv}} = \frac{1}{(4 \text{ m}^2)} \begin{bmatrix} 4 \text{ m}^2 & 0 \cdot \text{kg}^2 & 0 \cdot \text{kg}^2 \\ 0 \cdot \text{kg}^2 & 2 \text{ m}^2 & 0 \cdot \text{kg}^2 \\ 0 \cdot \text{kg}^2 & 0 \cdot \text{kg}^2 & 2 \text{ m}^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{\text{inv}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ kg}^{-1}.$$

固有频率是 $\mathbf{M}_{\text{inv}} \mathbf{K}$ 特征值的平方根, 最后

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}_{\text{inv}} \mathbf{K}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ s}^{-2},$$

$$\omega_1 = \text{特征值}(\mathbf{D}), \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} 3.871 \\ 1 \\ 0.129 \end{bmatrix} \text{ s}^{-2}.$$

因此, 固有频率为

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_{21}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_{21}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\omega_{20}},$$

$$\omega_1 = 0.359 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_2 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_3 = 1.967 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

模态振型是 $\mathbf{M}_{\text{inv}} \mathbf{K}$ 特征矢量

$$\mathbf{E} = \text{特征值}(\mathbf{D}), \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0.915 & -0.577 & -0.383 \\ -0.399 & -0.577 & 0.55 \\ 0.059 & 0.577 & -0.742 \end{bmatrix}.$$

模态矢量分别为 \mathbf{u} , \mathbf{v} 和 \mathbf{w} , 其中

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}^{<1>}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{E}^{<2>}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{E}^{<3>},$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.383 \\ 0.55 \\ 0.742 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ -0.577 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.915 \\ -0.399 \\ 0.059 \end{bmatrix}.$$

模态振型通过质量矩阵标准化

$$c_1 = u^T M u, \quad c_2 = v^T M v, \quad c_3 = w^T M w.$$

标准化振型为

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{c_{100}}} u, & v_n &= \frac{1}{\sqrt{c_{200}}} v, & w_n &= \frac{1}{\sqrt{c_{300}}} w, \\ c_1 &= 1.853 \text{ kg}, & c_2 &= 1.667 \text{ kg}, & c_3 &= 1.162 \text{ kg}, \\ u_n &= \begin{bmatrix} 0.282 \\ 0.404 \\ 0.545 \end{bmatrix} \text{ kg}^{-0.5}, & v_n &= \begin{bmatrix} 0.4447 \\ 0.447 \\ -0.447 \end{bmatrix} \text{ kg}^{-0.5}, & w_n &= \begin{bmatrix} 0.849 \\ -0.37 \\ 0.055 \end{bmatrix} \text{ kg}^{-0.5}. \end{aligned}$$

用这种方法求得的解用于 Schaum 纲要的机械振动中,然而 Mathcad 还有一个功能,就是确定形如 $Kx = \lambda Mx$ 的广义特征值问题的特征值和特征向量.则固有频率就是特征值的平方根,模态振型就是标准化的特征向量,但用这项功能时,矩阵 K 必须是无量纲化的.最后

$$\begin{aligned} M1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, & K1 &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \omega_3 &= \text{特征值}(K1, M1), & \omega_3 &= \begin{bmatrix} 3.871 \\ 1 \\ 0.129 \end{bmatrix}, \\ E1 &= \text{特征值}(K1, M1), & E1 &= \begin{bmatrix} 0.915 & -0.577 & -0.383 \\ -0.399 & -0.577 & -0.55 \\ 0.059 & 0.577 & -0.742 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

注意:返回的特征矢量是用 genvecs 计算的,没有通过质量矩阵标准化.

扩展 用标准化的特征矢量验证模态振型的正交有限元.

$$\begin{array}{lll} u_n^T M u_n = 1 & u_n^T M v_n = 0 & u_n^T M w_n = 0 \\ v_n^T M u_n = 0 & v_n^T M v_n = 1 & v_n^T M w_n = 0 \\ w_n^T M u_n = 0 & w_n^T M v_n = 0 & w_n^T M w_n = 1 \end{array}$$

深入研究

(1)通过数值计算说明模态对刚度矩阵也是正交的.

(2)通过数值证明 $u_n^T K u_n = \omega_1^2$.

无阻尼减振器设计

(Schaum's 的机械振动,习题解答 8.27 和 8.2)

说明 质量为 m 的机器与刚度为 k_1 的弹簧相连,机器在运转过程中受到一个大小为 F_0 ,频率为 ω 的简谐激励.

(a) 设计最小质量的无阻尼减振器的刚度和质量,要求当机器的转速为 ω 时,机器的稳态振幅为 0,减振器的稳态振幅小于 $X_{2\max}$.

(b) 装有减振器系统的固有频率为多大?

系统 $m_1 = 200 \text{ kg}, \quad k_1 = 4 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad F_0 = 500 \text{ N},$

$$\omega = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad X_{2\max} = 0.002 \text{ m}.$$

主系统的固有频率为

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_{11} = 44.721 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

解 (a) 当减振器调至激励频率时,主质量的稳态振幅为 0.这时减振器质量的稳态振幅为

$$X_2 = \frac{F_0}{k_2},$$

整理得

$$k_2 = \frac{F_0}{X_2}.$$

当 $X_2 < X_{2\max}$ 时, 减振器最小刚度为

$$k_2 = \frac{F_0}{X_{2\max}}, \quad k_2 = 2.5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

为了使 $X_1 = 0$, 必须使减振器的固有频率 $\omega_{22} = (k_2/m_2)^{1/2}$ 等于激振频率 ω . 因为 k_2 和 m_2 的比值是固定的, 因此, 要想使减振器取最小质量, 则就应该取最小允许刚度, 这就得到

$$m_2 = \frac{k_2}{\omega^2}, \quad m_2 = 100 \text{ kg}.$$

(b) 质量比为

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad \mu = 0.5.$$

减振器的固有频率就是使式(8.12)分母为 0 的频率, 得到下式:

$$\omega_{22} = \omega, \quad f(\omega) = \omega^4 - [(1 + \mu)\omega_{22}^2 + \omega_{11}^2]\omega^2 + \omega_{11}^2\omega_{22}^2.$$

固有频率就是满足 $f(\omega) = 0$ 的 ω 值, 当加上减振器后, 系统有两个固有频率, $\omega_1 < \omega_{11}$, $\omega_2 > \omega_{11}$

$$\omega = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \text{初始值.}$$

$$\omega_1 = \text{root}(f(\omega), \omega), \quad \omega_1 = 32.679 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

$$\omega_1 = 80 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \text{初始值.}$$

$$\omega_2 = \text{root}(f(\omega), \omega), \quad \omega_2 = 68.426 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

扩展 装上减振器后, ω 取何值时, 减振器的稳态振幅小于 X_{\max} ?

$$X_{1\max} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

减振器的稳态振幅用 ω 表示为

$$r_1(\omega) = \frac{\omega}{\omega_{11}}, \quad r_2(\omega) = \frac{\omega}{\omega_{22}},$$

$$X_1(\omega) = \frac{F_0}{k_2} \frac{1 - r_2(\omega)^2}{[r_1(\omega)^2 r_2(\omega)^2 - r_2(\omega)^2 - (1 + \mu)r_1(\omega)^2 + 1]}.$$

分析表明, 上式分母在 $\omega_1 < \omega < \omega_2$ 时为负, 分子在 $\omega_1 < \omega_{22}$ 时为正; 在 $\omega > \omega_{22}$ 时为负, 因此 ω 的大致范围满足 $\omega_a < \omega < \omega_b$, 其中

$$X_1(\omega_a) = X_{1\max}, \quad X_1(\omega_b) = X_{1\max},$$

TOL = 0.000001, 误差值 TOL = 0.001 对本题不够精确. 试用下面的误差值进行计算, 看看结果有何不同. 误差 TOL 越小, 结果的精度越高.

$$\omega = 42 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\omega_a = \text{root}(X_{1\max} - X_1(\omega), \omega), \quad \omega_a = 40.442 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\omega = 54 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\omega_b = \text{root}(X_{1\max} - X_1(\omega), \omega), \quad \omega_b = 61.238 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

(1) 设计一个无阻尼减振器, 要求对所有在 35~65 rad/s 之间的转速, 主系统的稳态振幅都减至 2 mm.

(2) 重解上述的扩展问题, 若激励为频率的平方激励, 由不平衡旋转力矩引起, 即 $F_0 = 0.2\omega^2$.