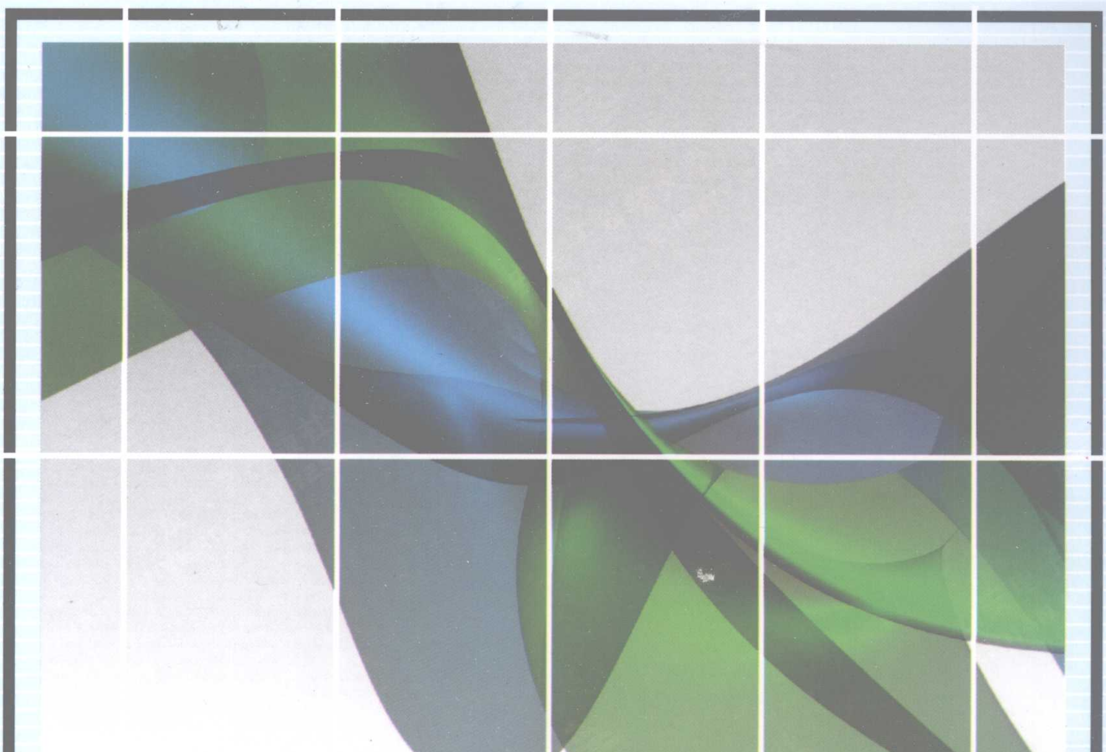
高等学校工科电子类规划教材

离散数学（第三版）

方世昌 编著

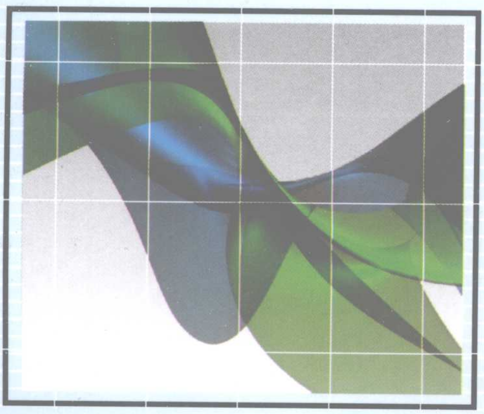


西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

XDUP 244900
封面设计 张维涛

COMPUTER 新世纪计算机类本科规划教材

- 计算机导论
- ● 离散数学（第三版）
- 程序设计基础与C语言
- C++程序设计语言 *
- 计算机操作系统（第三版）
- 数据结构——C语言描述（第二版）
- 计算机科学与技术导论



- 计算机网络（第三版）*
- 计算机系统结构（第四版）*
- 微型计算机原理与接口技术（第二版）*
- 编译原理基础（第二版）*
- 计算机系统安全（第二版）*
- 网络信息安全技术 *
- 现代数字系统设计
- PC汇编语言程序设计
- 计算机外部设备（第二版）
- 多媒体软件设计技术（第二版）*
- 算法设计与分析
- 组合数学（第二版）*
- 人工智能技术导论（第三版）*
- 软件工程（第二版）*
- 软件系统开发技术（第二版）
- 最新计算机专业英语

“*”为普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-5606-2157-9

9 787560 621579 >

定价：30.00元

高等学校工科电子类规划教材

离 散 数 学

（第三版）

方世昌　编著

西安电子科技大学出版社

2009

内 容 简 介

本书介绍计算机专业最需要的离散数学基础知识，共 8 章，内容包括数理逻辑、集合、二元关系、函数、无限集合、代数、格与布尔代数、图论等，并含有较多的与计算机科学和工程有关的例题和习题。本书适合作为高等理工科院校计算机科学、计算机工程和计算机应用专业本科学生的教材，也可供相关工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/方世昌编著. —3 版. —西安：西安电子科技大学出版社，2009.1
高等学校工科电子类规划教材
ISBN 978-7-5606-2157-9

Ⅰ. 离…　Ⅱ. 方…　Ⅲ. 离散数学—高等学校—教材　Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 179567 号

责任编辑　毛红兵　孟秋黎
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　西安文化彩印厂
版　　次　2009 年 1 月第 3 版　2009 年 1 月第 32 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张 21.375
字　　数　499 千字
印　　数　245 001～249 000 册
定　　价　30.00 元
ISBN 978-7-5606-2157-9/TP·1100

XDUP　2449003—32

第三版前言

教育部规定离散数学为精选基础课程，本书的取材、结构和表达形式均符合这一精神。自出版以来已发行20多万册，实践证明它能满足工科大学计算机等信息专业的需要，也符合现代科学的发展趋势，所以这次修订和第二版一样，仅作局部的修改和完善，主要体现在以下三点：

1. 图论内容略有增加，使图论知识更完整。这是为适应图论在其它学科中应用日益广泛的发展趋势。

2. 更换了参考文献。原列的图书在市场上已不存在，为了方便读者参阅现重新提供一些同类书籍，它们的基本内容和本书基本一致，只是叙述方式、深浅略有不同。

3. 对原书中读者反映较难理解或容易疏忽之处，增加了一些说明和例题，并对上一版少数印刷错误作了改正。

当然，第三版教材仍可能出现错误或不妥之处，欢迎读者提出批评和建议。

编　者

2008年11月20日

第二版前言

本书出版已 13 年了，经过全国众多院校的应用，证明本书的内容基本上符合工科大学计算机专业的需要，文字组织形式亦适合于教学和自学。所以这次修订仅作局部的变动。

1. 为适应计算机向高速、并行、多功能、网络化方向发展，内容有少量调整，增强了有利于这一方向的一些基础知识，删去了某些重要性有所下降的内容，如原 3.6 节相容关系。但总份量仍维持原水平，以免增加课时。

2. 部分内容的阐述(包括定理证明)作了改进，大多是为了更易读易懂，少数是由于时易境迁情况有所改变。

3. 原书存在一些缺点和错误，一一作了改正，希望不再出现。

当然，由于主客观原因，修订后的版本也会出现新的缺点和错误，仍希广大读者批评指正。

本修订稿承蒙西安电子科技大学武波老师审阅，提供了许多改进意见，在此表示感谢。

编者

1996 年 9 月

初 版 前 言

本教材系由电子工业部计算机与自动控制教材编审委员会工科电子类计算机教材编审小组评选审定，并推荐出版。由中国人民解放军通信工程学院方世昌编写，上海交通大学左孝凌担任主审。

教材介绍计算机专业最需要的离散数学基础知识，主要内容有数理逻辑、集合论、二元关系、函数、无限集合、代数系统、格与布尔代数、图论等。教材均按工科电子类计算机教材编审小组审定的大纲进行编写和审阅，故适合于工科大学计算机专业作为教材。

鉴于离散数学在现代科学中的重要性日益增加，它不仅是计算机专业的必修课程，也为其它某些专业和工程技术人员所必需。所以，书中内容的阐述较为详尽，力求深入浅出，适于自学。

教完全书约需 110 学时，毋需特殊先修知识，但在大学二、三年级开设较好。书中习题数量较多，可选做二分之一，但勿少于三分之一。

打 * 的节和小节大多是为了扩展知识的深广度而列入的，或为了某些专业特殊需要而列入。在课时不充裕的情况下，宜略去，不会影响后继内容的学习。

打 * 的习题是较难的题，供优秀学生选做，可不作要求。

本书在编写过程中得到南京工学院王能斌、杨祥金老师的指导和帮助，他们审阅了全部稿件，提出许多宝贵意见，在此表示诚挚的感谢。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编者

1983 年 12 月 24 日

符　号　表

逻　　辑

1. $\neg P$	非 P
2. $P \vee Q$	P 或 Q
3. $P \wedge Q$	P 并且 Q
4. $P \rightarrow Q$	P 蕴含 Q
5. $P \leftrightarrow Q$	P 等值于 Q
6. $P \Rightarrow Q$	P 永真蕴含 Q
7. $P \Leftrightarrow Q$	P 恒等于 Q
8. $\forall$	全称量词
9. $\exists$	存在量词
10. $\exists!$	存在唯一的……

集　　合

1. $a \in A$	a 是集合 A 的元素（a 属于 A）
2. $a \notin A$	a 不属于 A
3. $A \subseteq B$	集合 A 包含于集合 B 中
4. $A \subset B$	集合 A 真包含于集合 B 中
5. $\varnothing$	空集合
6. U	全集合（论述域）
7. $A \cup B$	集合 A 和集合 B 的并
8. $A \cap B$	集合 A 和集合 B 的交
9. $A - B$	集合 B 关于集合 A 的相对补
10. $\overline{A}$	集合 A 的绝对补
11. $\rho(A)$	A 的幂集合
12. $\bigcup_{i \in S} A_i$	$\{x \mid \exists i(i \in S \wedge x \in A_i)\}$
13. $\bigcap_{i \in S} A_i$	$\{x \mid \forall i(i \in S \rightarrow x \in A_i)\}$
14. $A \times B$	A 和 B 的笛卡尔乘积
15. $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i$	$A_i, \cdots, A_n$ 的笛卡尔乘积

16. $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$有序 n 重组

字 符 串 集 合

1. Σ	字母表
2. Λ	空串
3. $\| x \|$	串 x 的长度
4. Σ^+	字母表 Σ 上的所有非零有限长度的串的集合

5. Σ^* $\{\Lambda\}\cup\Sigma^+$
6. AB 连结积$\{xy \mid x\in A\wedge y\in B\}$
7. A^n $\{x_1x_2\cdots x_n \mid x_i\in A\}$
8. A^+ $\bigcup_{i\in I_+} A^i$
9. A^* $\bigcup_{i\in N} A^i$

数

1. $\lceil x\rceil$ x 的顶函数，即数 n，$x\leqslant n<x+1$
2. $\lfloor x\rfloor$ x 的底函数，即数 n，$x-1<n\leqslant x$
3. $\mathbf{N}$ 自然数集合$\{0,1,2,\cdots\}$
4. $\mathbf{I}$ 整数集合
5. $\mathbf{I}_+$ 正整数集合
6. $\mathbf{Q}$ 有理数集合
7. $\mathbf{Q}_+$ 正有理数集合
8. $\mathbf{R}$ 实数集合
9. $\mathbf{R}_+$ 正实数集合
10. (a,b) $\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge a<x<b\}$
11. $[a,b]$ $\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge a\leqslant x\leqslant b\}$
12. $(a,b]$ $\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge a<x\leqslant b\}$
13. $[a,b)$ $\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge a\leqslant x<b\}$
14. (a,∞) $\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge x>a\}$
15. $[a,\infty)$ $\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge x\geqslant a\}$
16. $\mathbf{N}_k$ $\{0,1,2,\cdots,k-1\}$

关 系 和 划 分

1. aRb a 对 b 有关系 R
2. $a\not R b$ a 对 b 没有关系 R
3. I_A 或 E_A 集合 A 上的相等关系
4. $\langle A,R\rangle$ 集合 A 上关系 R 的有向图
5. $R_1\cdot R_2$ R_1 和 R_2 的合成关系
6. R^n 关系 R 自身 n 次合成
7. $r(R)$ 关系 R 的自反闭包
8. $s(R)$ 关系 R 的对称闭包
9. $t(R)$ 关系 R 的传递闭包
10. $\widetilde{R}$ 关系 R 的逆关系
11. R^+ $t(R)$
12. R^* $rt(R)$
13. $\leqslant$ 偏序
14. $<$ 拟序

15. $a \equiv b(\mathrm{mod}\ k)$　a 与 b 模 k 等价
16. $[a]_R$　在等价关系 R 下，a 的等价类
17. π　划分
18. A/R　等价关系 R 诱导的 A 的划分
19. $\pi_1 + \pi_2$　划分 π_1 与 π_2 的和
20. $\pi_1 \cdot \pi_2$　划分 π_1 与 π_2 的积

函　数

1. $f(a)$　函数 f 对于自变元 a 的值
2. $f: A \to B$　具有前域 A 陪域 B 的函数 f
3. $f(A)$　在映射 f 下，集合 A 的象
4. $f \cdot g$　函数 g 和 f 的合成
5. A^B　从集合 B 到集合 A 的所有函数的集合
6. 1_A 或 I_A　A 上的恒等函数
7. f^{-1}　函数 f 的逆函数
8. $f^{-1}(A)$　在函数 f 下 A 的原象
9. $f|_A$　函数 f 到集合 A 的限制
10. Ψ_A　集合 A 的特征函数
11. $P_1 \Diamond P_2$　置换 P_1 和 P_2 右合成

基　数

1. $|A|$　集合 A 的基数
2. $\aleph_0$　$\mathbf{N}$ 的基数(读做阿列夫零)
3. c　$[0,1]$的基数

代数和布尔代数

1. $\langle A, \circ, \Delta, k \rangle$　具有载体 A，二元运算$\circ$，一元运算 Δ，常数 k 的代数
2. $+_k$　模 k 加法
3. $\times_k$　模 k 乘法
4. $A \times A'$　代数 A 和 A'的积代数
5. $A/\sim$　代数 A 在同余关系$\sim$下的商代数
6. $\mathrm{lub}(A)$　集合 A 的最小上界
7. $\mathrm{glb}(A)$　集合 A 的最大下界

图　论

1. $\langle V, E \rangle$　具有顶点集合 V 和边集 E 的图
2. $\langle a, b \rangle$　从结点 a 到结点 b 的有向边
3. (a, b)　从结点 a 到结点 b 的无向边
4. $[a, b]$　结点 a 和 b 之间的边
5. $\deg(v)$　顶点 v 的度数(次数)

6. $\delta(G)$ 无向图 G 的顶点的最小度数

7. $\Delta(G)$ 无向图 G 的顶点的最大度数

8. $W(i,j)$ 边$[i,j]$的权

9. $\omega(G)$ 无向图 G 的连通分图个数

10. $\gamma_0(G)$ 无向图 G 的支配数

11. $\alpha_0(G)$ 无向图 G 的点覆盖数

12. $\alpha_1(G)$ 无向图 G 的边覆盖数

13. $\beta_0(G)$ 无向图 G 的独立数

14. $\beta_1(G)$ 无向图 G 的匹配数

15. $\kappa_0(G)$ 无向图 G 的点连通度

16. $\kappa_1(G)$ 无向图 G 的边连通度

17. $\chi_0(G)$ 无向图 G 的(点)色数

18. $\chi_1(G)$ 无向图 G 的边色数

19. Φ 流

20. $(P,\bar{P})$ 割

目　录

第1章 数理逻辑

逻辑是研究推理的科学，分为形式逻辑和辩证逻辑。数理逻辑是用数学方法研究形式逻辑的一门科学，也就是用数学方法研究推理的科学。所谓数学方法，主要是指引进一套符号体系的方法，因此数理逻辑又叫符号逻辑。现代数理逻辑有 4 大分支：证明论、模型论、递归论和公理化集合论。我们介绍它们的共同基础——命题演算和谓词演算，即一般所谓的古典数理逻辑。

1.1 命题

1.1.1 基本概念

断言是一陈述语句。一个**命题**是一个或真或假而不能两者都是的断言[①]。如果命题是真，我们说它的**真值**为**真**；如果命题是假，我们说它的真值是**假**。

例 1.1-1 下述都是命题：

(1) 今天下雪；

(2) $3+3=6$；

(3) 2 是偶数而 3 是奇数；

(4) 陈涉起义那天，杭州下雨；

(5) 较大的偶数都可表为两个质数之和。

以上命题中，(1)的真值取决于今天的天气；(2)和(3)是真；(4)已无法查明它的真值，但它是或真或假的，故将它归属于命题；(5)目前尚未确定其真假，但它是有真值的，应归属于命题。

例 1.1-2 下述都不是命题：

(1) $x+y>4$。

(2) $x=3$。

(3) 真好啊！

(4) 你去哪里？

(1)和(2)是断言，但不是命题，因为它的真值取决于 x 和 y 的值。(3)和(4)都不是断言，所以不是命题。下边我们再看一个例子。

例 1.1-3 一个人说："我正在说谎"。

---

① 在一个系统中，命题的真值必须是真或假，则称系统的逻辑是**二值的**。它的特征"一个命题非真即假，反之亦然"，即是所知的排中律。我们所讨论的是**二值逻辑**，但亦有多于两个真值的逻辑系统。

他是在说谎还是在说真话呢？如果他讲真话，那么他所说的是真，也就是他在说谎。我们得出结论如果他讲真话，那么他是在说谎。另一方面，如果他是说谎，那么他说的是假；因为他承认他是说谎，所以他实际上是在说真话，我们得出结论如果他是说谎，那么他是讲真话。

从以上分析，我们得出他必须既非说谎也不是讲真话。这样，断言“我正在说谎”事实上不能指定它的真假，所以不是命题。这种断言叫**悖论**。

若一个命题已不能分解成更简单的命题，则这个命题叫**原子命题**或**本原命题**。例 1.1－1 中(1)、(2)、(4)、(5)都是本原命题，但(3)不是，因为它可写成“2 是偶数”和“3 是奇数”两个命题。

命题和本原命题常用大写字母 P、Q、R…表示。如用 P 表示“4 是质数”，则记为

P：4 是质数

1.1.2 命题联结词

命题和原子命题常可通过一些联结词构成新命题，这种新命题叫**复合命题**。例如

P：明天下雪

Q：明天下雨

是两个命题，利用联结词“不”、“并且”、“或(者)”等可分别构成新命题：

“明天不下雪”；

“明天下雪并且明天下雨”；

“明天下雪或者明天下雨”等。

即

“非 P”；

“P 并且 Q”；

“P 或 Q”等。

在代数式 $x+3$ 中，x、3 叫运算对象，$+$ 叫运算符，$x+3$ 表示运算结果。在命题演算中，也用同样的术语。联结词就是命题演算中的运算符，叫**逻辑运算符**或叫**逻辑联结词**。常用的联结词有以下 5 个。

1. *否定词* $\neg$

设 P 表示命题，那么“P 不真”是另一命题，表示为 $\neg P$，叫做 P 的**否定**，读做“非 P”。由排中律知：如果 P 是假，则 $\neg P$ 是真，反之亦然。所以否定词 $\neg$ 可以如表 1.1－1 所示定义。

表 1.1－1

P	$\neg P$
假	真
真	假

这张表叫**真值表**。定义运算符的真值表，可指明如何用运算对象的真值来决定一个应用运算符的命题的真值。真值表的左边列出运算对象的真值的所有可能组合，结果命题的真值列在最右边的一列。为了便于阅读，我们通常用符号 T(true)或 1 代表真，符号 F(false)或 0 代表假。一般在公式中采用 T 和 F，在真值表中采用 1 和 0。这样，以上真值表可写成表 1.1－2 所示的形式。

表 1.1－2

P	$\neg P$
0	1
1	0

例 1.1-4

(1) P: 4 是质数。

$\neg P$: 4 不是质数。或 4 是质数，不是这样。

(2) Q: 这些都是男同学。

$\neg Q$: 这些不都是男同学。(翻译成“这些都不是男同学”是错的。)

2. 合取词$\wedge$

如果 P 和 Q 是命题，那么“P 并且 Q”也是一命题，记为 $P\wedge Q$，称为 P 和 Q 的**合取**，读做“P 与 Q”或“P 并且 Q”。运算符$\wedge$定义如表 1.1-3 所示。从真值表可知 $P\wedge Q$ 为真，当且仅当 P 和 Q 俱真。

表 1.1-3

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.1-5 P: 王华的成绩很好，Q: 王华的品德很好。$P\wedge Q$: 王华的成绩很好并且品德很好。

3. 析取词$\vee$

如果 P 和 Q 是命题，则“P 或 Q”也是一命题，记作 $P\vee Q$，称为 P 和 Q 的**析取**，读做“P 或 Q”。运算符$\vee$定义如表 1.1-4 所示。从真值表可知 $P\vee Q$ 为真，当且仅当 P 或 Q 至少有一个为真。

表 1.1-4

P	Q	$P\vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例 1.1-6

(1) P: 今晚我写字，Q: 今晚我看书。

$P\vee Q$: 今晚我写字或看书。

“或”字常见的含义有两种：一种是“可兼或”，如例 1.1-6 中的或，它不排除今晚既看书又写字这种情况；一种是“排斥或”，例如“人固有一死，或重于泰山，或轻于鸿毛”中的“或”，它表示非此即彼，不可兼得。运算符$\vee$表示可兼或，排斥或以后用另一符号表达。

(2) P: 今年是闰年；Q: 今年她生孩子。

$P\vee Q$: 今年是闰年或者今年她生孩子。

逻辑运算符可以把两个无关的命题联结成一新命题，作如此规定是因为有关和无关的界线难以划分，而如此规定不会妨碍应用。

4. 蕴含词$\rightarrow$

如果 P 和 Q 是命题，那么“P 蕴含 Q”也是命题，记为 $P\rightarrow Q$，称为**蕴含式**，读做“P 蕴含 Q”或“如果 P，那么 Q”。运算对象 P 叫做**前提**、**假设**或**前件**，而 Q 叫做**结论**或**后件**。运算符定义如表 1.1-5 所示。

表 1.1-5

P	Q	$P\rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

命题 $P\rightarrow Q$ 是假，当且仅当 P 是真而 Q 是假。

例 1.1-7

(1) P: 天不下雨，Q: 草木枯黄。

$P\rightarrow Q$: 如果天不下雨，那么草木枯黄。

(2) R: G 是正方形，S: G 的四边相等。

$R\rightarrow S$: 如果 G 是正方形，那么 G 的四边相等。

(3) W：桔子是紫色的，V：大地是不平的。

$W \to V$：如果桔子是紫色的，那么大地是不平的。

在日常生活中用蕴含式来断言前提和结论之间的因果或实质关系，如例 1.1－7 中的(1)和(2)，这样的蕴含式叫**形式蕴含**。在命题演算中，一个蕴含式的前提和结论并不需要有因果和实质联系，这样的蕴含式叫**实质蕴含**，如例 1.1－7 中的(3)，桔子的颜色和大地的外形之间没有因果和实质关系存在，但蕴含式 $W \to V$ 是真，因为前提是假而结论是真。采用实质蕴含作定义，是因为在讨论逻辑和数学问题中，这不仅是正确的，而且应用方便。

蕴含式 $P \to Q$ 可以用多种方式陈述：

"若 P，则 Q"；

"P 是 Q 的充分条件"；

"Q 是 P 的必要条件"；

"Q 每当 P"；

"P 仅当 Q"等。

如例 1.1－7(2)中的 $R \to S$ 可陈述为"G 是正方形的必要条件是它的四边相等"。

给定命题 $P \to Q$，我们把 $Q \to P$，$\neg P \to \neg Q$，$\neg Q \to \neg P$ 分别叫做命题 $P \to Q$ 的**逆命题**、**反命题**和**逆反命题**。

5. 等值词↔

如果 P 和 Q 是命题，那么"P 等值于 Q"也是命题，记为 $P \leftrightarrow Q$，称为**等值式**，读做"P 等值于 Q"。运算符↔定义如表 1.1－6 所示。

表 1.1－6

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

比较表 1.1－5 和表 1.1－6 易知，如果 $P \leftrightarrow Q$ 是真，那么 $P \to Q$ 和 $Q \to P$ 俱真；反之如果 $P \to Q$ 和 $Q \to P$ 俱真，那么 $P \leftrightarrow Q$ 是真。由于这些理由，$P \leftrightarrow Q$ 也读做"P 是 Q 的充要条件"或"P 当且仅当 Q"。

从以上 5 个定义可看出，联结词之意义由其真值表唯一确定，而不由命题的含义确定。

使用以上 5 个联结词，可将一些语句翻译成逻辑式。翻译时为了减少圆括号(一般不用其它括号)的使用，我们作以下约定：

· 运算符结合力的强弱顺序为 ¬、∧、∨、→、↔，凡符合此顺序的，括号均可省去。

· 相同的运算符，按从左至右次序计算时，括号可省去。

· 最外层的圆括号可以省去。

例如：

$$(\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \to ((R \vee P) \vee Q))$$

可写成

$$\neg(P \wedge \neg Q \vee R) \to R \vee P \vee Q$$

但有时为了看起来清楚醒目，也可以保留某些原可省去的括号。

例 1.1－8

(1) 设 P 表示"他有理论知识"，Q 表示"他有实践经验"，则"他既有理论知识又有实践经验"可译为：$P \wedge Q$。

(2) 设 P：明天下雨，Q：明天下雪，R：我去学校，则

①"如果明天不是雨夹雪则我去学校"可写成

$$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$$

②"如果明天不下雨并且不下雪则我去学校"可写成

$$\neg P \wedge \neg Q \rightarrow R$$

③"如果明天下雨或下雪则我不去学校"可写成

$$P \vee Q \rightarrow \neg R$$

④"明天，我将雨雪无阻一定去学校"可写成

$$P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$

⑤"当且仅当明天不下雪并且不下雨时我才去学校"可写成

$$\neg P \wedge \neg Q \leftrightarrow R$$

(3) 用逻辑符表达"说小学生编不了程序，或说小学生用不了个人计算机，那是不对的"。

设 P：小学生会编程序，Q：小学生会用个人计算机，则上句可译为

$$\neg(\neg P \vee \neg Q)$$

(4) 用逻辑符表达"若不是他生病或出差了，我是不会同意他不参加学习的"。

设 P：他生病了，Q：他出差了，R：我同意他不参加学习，则上句可译为

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg R$$

或

$$P \vee Q \leftrightarrow R$$

翻译时要按逻辑关系翻译，而不能凭字面翻。例如，设 P：林芬做作业，Q：林芳做作业，则"林芬和林芳同在做作业"可译为 $P \wedge Q$，但"林芬和林芳是姐妹"就不能翻释成两个命题的合取，它是一个原子命题。

1.1.3 命题变元和命题公式

通常，如果 P 代表真值未指定的任意命题，我们就称 P 为命题变元；如果 P 代表一个真值已指定的命题，我们就称 P 为命题常元。但由于在命题演算中并不关心具体命题的涵义，只关心其真假值，因此，我们可以形式地定义它们。

以"真"、"假"为其变域的变元，称为**命题变元**；T 和 F 称为**命题常元**。

习惯上把含有命题变元的断言称为命题公式。但这样描述过于表面，它没能指出命题公式的结构。因为不是由命题变元、联结词和一些括号组成的字符串都能成为命题公式，因此在计算机科学中常用以下定义。

单个命题变元和命题常元叫**原子公式**。由以下形成规则生成的公式叫**命题公式**(简称公式)：

① 单个原子公式是命题公式。

② 如果 A 和 B 是命题公式，则$(\neg A)$、$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$是命题公式。

③ 只有有限步地应用规则①和②生成的公式，才是命题公式。

这种定义叫归纳定义，也叫递归定义。由这种定义产生的公式叫**合式公式**。如何构成这种定义，以后将专门叙述。

命题公式的真假值一般是不确定的。当命题公式中所有的命题变元代以命题时，命题公式就变为命题。在不致产生混乱时，我们把命题公式也叫做命题。

例 1.1-9

(1) 说明$(P\to(P\vee Q))$是命题公式。

解 (i) P 是命题公式 根据规则①

(ii) Q 是命题公式 根据规则①

(iii) $(P\vee Q)$是命题公式 根据(i)、(ii)和规则②

(iv) $(P\to(P\vee Q))$是命题公式 根据(i)、(iii)和规则②

(2) 以下不是命题公式，因为它们不能由形成规则得出：

$\wedge Q$, $(P\to Q$, $P\to\wedge Q$, $((PQ)\wedge R)$

为了减少圆括号的使用，以后手写命题公式时，可按过去的约定省略。

下面举例说明命题公式真值表的构成方法。

例 1.1-10

(1) $\neg((P\vee Q)\wedge P)$的真值表如表 1.1-7 所示。

表 1.1-7

P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg((P\vee Q)\wedge P)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

(2) 两个命题公式如果有相同的真值，则称它们是**逻辑等价命题**。证明 $P\leftrightarrow Q$ 与 $P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$ 是逻辑等价命题。

证 列真值表，如表 1.1-8 所示。

表 1.1-8

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\leftrightarrow Q$	$P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

因后两列的真假值完全一致，所以它们是逻辑等价命题。

习　题

1. 设 P 是命题“天下雪”；Q 是命题“我去镇上”；R 是命题“我有时间”。

(1) 用逻辑符号写出以下命题：

① 如果天不下雪和我有时间，那么我去镇上。

② 我去镇上，仅当我有时间。

③ 天不下雪。

④ 天正在下雪，我没去镇上。

(2) 对下述命题用中文写出语句。

① $Q \leftrightarrow (R \wedge \neg P)$

② $R \wedge Q$

③ $(Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)$

④ $\neg (R \vee Q)$

2. 否定下列命题：

(1) 上海处处清洁。

(2) 每一个自然数都是偶数。

3. 说出下述每一命题的逆命题和逆反命题：

(1) 如果天下雨，我将不去。

(2) 仅当你去我将逗留。

(3) 如果 n 是大于 2 的正整数，则方程 $x^n + y^n = z^n$ 无正整数解(费尔马最后定理)。

(4) 如果我不获得更多帮助，我不能完成这个任务。

4. 给 P 和 Q 指派真值 T，给 R 和 S 指派真值 F，求出下列命题的真值：

(1) $P \vee Q \wedge R$

(2) $P \wedge Q \wedge R \vee \neg ((P \vee Q) \wedge (R \vee S))$

(3) $(\neg (P \wedge Q) \vee \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \vee \neg R) \wedge S$

(4) $\neg (P \wedge Q) \vee \neg R \vee ((Q \leftrightarrow \neg P) \rightarrow R \vee \neg S)$

(5) $(P \leftrightarrow R) \wedge (\neg Q \rightarrow S)$

(6) $P \vee (Q \rightarrow R \wedge \neg P) \leftrightarrow Q \vee \neg S$

5. 构成下列公式的真值表：

(1) $Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow P$

(2) $\neg (P \vee Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(3) $(P \vee Q \rightarrow Q \wedge R) \rightarrow P \wedge \neg R$

(4) $((\neg P \rightarrow P \wedge \neg Q) \rightarrow R) \wedge Q \vee \neg R$

6. 证明下列公式的真值与它们的变元值无关：

(1) $P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$

(2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$

(3) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

(4) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q)$

7. 用真值表证明如果 $P \leftrightarrow Q$ 是真，那么 $P \rightarrow Q$ 和 $Q \rightarrow P$ 都是真。反之，如果 $P \rightarrow Q$ 和 $Q \rightarrow P$ 都是真，那么 $P \leftrightarrow Q$ 是真。

8. 对 P 和 Q 的所有值，证明 $P \rightarrow Q$ 与 $\neg P \vee Q$ 有同样真值以及 $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ 总是真的。

9. 一个有两个运算对象的逻辑运算符，如果交换运算对象的次序，产生一逻辑等价命题，则该逻辑运算符称为可交换的。

(1) 确定下述逻辑运算符哪些是可交换的：$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$。

(2) 用真值表证明你的断言。

10. 设 $*$ 是具有两个运算对象的逻辑运算符，如果 $(x*y)*z$ 和 $x*(y*z)$ 逻辑等价，那么运算符 $*$ 是可结合的。

(1) 确定逻辑运算符 $\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$ 中哪些是可结合的。

(2) 用真值表证明你的断言。

11. 指出以下各式哪些不是命题公式，如果是命题公式，请说明理由：

(1) $(((\neg P)\rightarrow(P\wedge Q))\vee R)$

(2) $(PQ\vee R)$

(3) $P\wedge\vee R$

(4) $((Q\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow P)$

*12. 一个形容词如果不具有它所表示的性质，则称为"它谓的"(Heterological)，例如"单音节"(Monosyllabic)就是它谓的形容词，而"多音节"(Polysyllabic)就不是它谓的形容词，问"Heterological"是它谓的形容词吗？为什么这是悖论？

1.2 重言式

1.2.1 基本概念

对有 n 个命题变元的命题公式 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$，命题变元的真值有 2^n 种不同的组合。每一种组合叫做一种**指派**，一共有 2^n 种指派，这就是说真值表有 2^n 行。对应于每一指派，命题公式得到一确定的值，即命题公式成为具有真假值的命题，于是可能出现以下情况：

(1) 对应于所有指派，命题公式均取值真。这种命题公式叫**重言式**，或叫**永真式**，例如 $P\vee\neg P$。

(2) 对应于所有指派，命题公式均取值假。这种命题公式叫**矛盾式**，或叫**永假式**，例如 $P\wedge\neg P$。

(3) 不是永真式，也不是永假式，这种命题公式叫**偶然式**。

一个公式如果至少存在一个指派，使其值为真，则称此公式为**可满足的**；一个公式如果至少存在一个指派，使其值为假，则称此公式为**非永真**。

我们着重研究重言式，它最有用，因为它有以下特点：

(1) 重言式的否定是矛盾式，矛盾式的否定是重言式，所以研究其一就可以了。

(2) 重言式的合取、析取、蕴含、等值等都是重言式。这样，由简单的重言式可推出复杂的重言式。

(3) 重言式中有许多非常有用的恒等式和永真蕴含式。

1.2.2 恒等式

设 A: $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$，B: $B(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 是两个命题公式，这里 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不一定在两公式中同时出现。

如果 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则 A 与 B 对任何指派都有相同的真值。记为 $A\Leftrightarrow B$，叫做**逻辑恒等式**，读做"A 恒等于 B"。

容易看出，$A \Leftrightarrow B$ 不过是上节的"A 和 B 逻辑等价"的另一种描述方式而已。所以，$A \Leftrightarrow B$ 也读做"A 等价于 B"。请注意符号$\leftrightarrow$与符号$\Leftrightarrow$意义不同。$\leftrightarrow$是逻辑联结词，而$\Leftrightarrow$是表示 A 和 B 有逻辑等价这个关系的符号，它的作用相当于代数中的"="。

常用的逻辑恒等式见表 1.2－1，表中符号 P、Q 和 R 代表任意命题，符号 T 代表真命题，符号 F 代表假命题。

表 1.2－1 逻辑恒等式

E_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	双否定
E_2	$P \vee P \Leftrightarrow P$	$\vee$的等幂律
E_3	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	$\wedge$的等幂律
E_4	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	$\vee$的交换律
E_5	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	$\wedge$的交换律
E_6	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	$\vee$的结合律
E_7	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	$\wedge$的结合律
E_8	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow P \wedge Q \vee P \wedge R$	$\wedge$在$\vee$上的分配律
E_9	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\vee$在$\wedge$上的分配律
E_{10} E_{11}	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	德·摩根定律
E_{12} E_{13}	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	吸收律
E_{14}	$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	蕴含表达式
E_{15}	$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	等值表达式
E_{16}	$P \vee T \Leftrightarrow T$	
E_{17}	$P \wedge F \Leftrightarrow F$	
E_{18}	$P \vee F \Leftrightarrow P$	
E_{19}	$P \wedge T \Leftrightarrow P$	
E_{20}	$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$	排中律
E_{21}	$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$	矛盾律
E_{22}	$(P \wedge Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	输出律
E_{23}	$((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)) \Leftrightarrow \neg P$	归谬律
E_{24}	$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	逆反律

有些恒等式特别重要，例如 E_{14} 允许蕴含式用析取式表达，E_{10}、E_{11} 允许析取式和合取式互相表达，另外，E_{15}、E_{24} 也是常用的。表中所有公式都可用构造真值表证明。

1.2.3 永真蕴含式

如果 $A \rightarrow B$ 是一永真式，那么称为**永真蕴含式**，记为 $A \Rightarrow B$，读做“A 永真蕴含 B”[①]。常用的永真蕴含式如表 1.2－2 所示。

表 1.2－2 永真蕴含式

I_1	$P \Rightarrow P \vee Q$
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow P$
I_3	$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$
I_4	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$
I_5	$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$
I_6	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$
I_7	$(P \rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$
I_8	$((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)) \Rightarrow (P \wedge R \rightarrow Q \wedge S)$
I_9	$((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)) \Rightarrow (P \leftrightarrow R)$

永真蕴含式也可用真值表证明，但也可用以下办法证明：

(1) 假定前件是真，若能推出后件是真，则此蕴含式是真。

(2) 假定后件是假，若能推出前件是假，则此蕴含式是真。

例 1.2－1 证明 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

方法 1：设 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 是真，则 $\neg Q$、$P \rightarrow Q$ 是真。所以，Q 是假，P 是假。因而 $\neg P$ 是真。故 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$。

方法 2：设 $\neg P$ 是假，则 P 是真。以下分情况讨论。

(i) 若 Q 为真，则 $\neg Q$ 是假，所以 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 是假。

(ii) 若 Q 是假，则 $P \rightarrow Q$ 是假，所以 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 是假。

故 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$。

1.2.4 恒等式和永真蕴含式的两个性质

(1) 若 $A \Leftrightarrow B$、$B \Leftrightarrow C$，则 $A \Leftrightarrow C$；若 $A \Rightarrow B$、$B \Rightarrow C$ 则 $A \Rightarrow C$。

这一性质也可叙述为：逻辑恒等和永真蕴含都是传递的。前者留给读者自证，现证明后者。

证 $A \rightarrow B$ 永真；$B \rightarrow C$ 永真，所以

$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$ 永真。

由公式 I_6 得 $A \rightarrow C$ 永真，即 $A \Rightarrow C$。

(2) 若 $A \Rightarrow B$、$A \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow B \wedge C$。

证 A 是真时，B 和 C 都真，所以 $B \wedge C$ 也真。因此 $A \rightarrow B \wedge C$ 永真，则 $A \Rightarrow B \wedge C$。

---

① 许多课本中，→和⇒，↔和⇔采用同一符号，需从前后文看出含义。

1.2.5 代入规则和替换规则

1. 代入规则(Rule of Substitution)

一重言式中某个命题变元出现的每一处均代入以同一公式后，所得的仍是重言式。

这条规则之所以正确是由于重言式之值不依赖于变元的值的缘故。例如，

$$P\wedge\neg P\Leftrightarrow F$$

今以 $R\wedge Q$ 代 P 得 $(R\wedge Q)\wedge\neg(R\wedge Q)\Leftrightarrow F$，仍正确。它的思想就如同在代数中，若

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

则

$$(a+b)^2-(mn)^2=(a+b+mn)(a+b-mn)$$

一样。

代入后所得公式称为原公式的**代入实例**。对非重言式通常不作代入运算，特别是偶然式，因所得代入实例的性质不确定，没有用处。例如：

$$B:P\rightarrow Q$$

原是偶然式，若用 $R\vee\neg R$ 代换 B 中之 Q，得

$$A:P\rightarrow(R\vee\neg R)$$

却是重言式。

2. 替换规则(Rule of Replacement)

设有恒等式 $A\Leftrightarrow B$，若在公式 C 中出现 A 的地方替换以 B(**不必每一处**)而得到公式 D，则 $C\Leftrightarrow D$。

如果 A 是合式公式 C 中完整的一部分，且 A 本身是合式公式，则称 A 是 C 的**子公式**，规则中"公式 C 中出现 A"意指"A 是 C 的子公式"。这条规则的正确性是由于在公式 C 和 D 中，除替换部分外均相同，但对任一指派，A 和 B 的真值相同，所以 C 和 D 的真值也相同，故 $C\Leftrightarrow D$。

应用这两条规则和已有的重言式可以得出新的重言式。

例如，对公式 E_4：$P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$，我们以 $A\wedge B$ 代 P，$\neg A\wedge\neg B$ 代 Q，就得出公式

$$A\wedge B\vee\neg A\wedge\neg B\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B\vee A\wedge B$$

以 $\neg A$ 代 P，$\neg A\wedge B\vee C$ 代 Q，得就出公式

$$\neg A\vee(\neg A\wedge B\vee C)\Leftrightarrow(\neg A\wedge B\vee C)\vee\neg A$$

……

对公式 E_{19}：$P\wedge T\Leftrightarrow P$，我们利用公式 $P\vee\neg P\Leftrightarrow T$，对其中的 T 作替换(注意不是代入，对命题常元不能代入)得公式

$$P\wedge(P\vee\neg P)\Leftrightarrow P$$

……

因此，我们可以说表 1.2－1 和表 1.2－2 中的字符 P、Q 和 R 不仅代表命题变元，而且可以代表命题公式，T 和 F 不仅代表真命题和假命题，而且可以代表重言式和永假式。用这样的观点看待表中的公式，应用就更方便了。

例 1.2－2

(1) 证明 $P\wedge\neg Q\vee Q\Leftrightarrow P\vee Q$。

证 $P\wedge\neg Q\vee Q$

$\Leftrightarrow Q\vee P\wedge\neg Q$	E_4
$\Leftrightarrow(Q\vee P)\wedge(Q\vee\neg Q)$	E_9
$\Leftrightarrow(Q\vee P)\wedge T$	E_{20}和替换规则
$\Leftrightarrow Q\vee P$	E_{19}
$\Leftrightarrow P\vee Q$	E_4

(2) 证明$(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\vee R)\Leftrightarrow P\vee Q\vee R$。

证 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\rightarrow(Q\vee R)$	E_{14}和替换规则
$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(Q\vee R)$	E_{14}
$\Leftrightarrow P\wedge\neg Q\vee(Q\vee R)$	E_{10}、E_1和替换规则
$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q\vee Q)\vee R$	E_6
$\Leftrightarrow P\vee Q\vee R$	例 1.2－2(1)和替换规则

(3) 试将语句“情况并非如此：如果他不来，那么我也不去。”化简。

解 设 P：他来，Q：我去，则上述语句可翻译为

$$\neg(\neg P\rightarrow\neg Q)$$

简化此公式：

$\neg(\neg P\rightarrow\neg Q)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg\neg P\vee\neg Q)$	E_{14}和替换规则
$\Leftrightarrow\neg\neg\neg P\wedge\neg\neg Q$	E_{10}
$\Leftrightarrow\neg P\wedge Q$	E_1和替换规则
$\Leftrightarrow Q\wedge\neg P$	E_5

化简后的语句是“我去了，而他不来”。

(4) 找出 $P\rightarrow(P\leftrightarrow Q)\vee R$ 的仅含$\wedge$和$\neg$两种联结词的等价表达式。

解 $P\rightarrow(P\leftrightarrow Q)\vee R$

$\Leftrightarrow P\rightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)\vee R$	E_{15}和替换规则
$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)\vee R$	E_{14}和替换规则
$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee P)\vee R$	E_9和替换规则
$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(T\vee\neg Q)\vee R$	E_2、E_{20}和替换规则
$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge T\vee R$	E_{16}和替换规则
$\Leftrightarrow\neg P\vee Q\vee R$	E_{19}和替换规则
$\Leftrightarrow\neg(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$	E_1，E_{11}

1.2.6 对偶原理

定义 1.2－1 设有公式 A，其中仅有联结词$\wedge$、$\vee$、$\neg$。在 A 中将$\wedge$、$\vee$、T、F 分别换以$\vee$、$\wedge$、F、T 得公式 A^*，则 A^* 称为 A 的**对偶公式**。

对 A^* 采取同样手续，又得 A，所以 A 也是 A^* 的对偶。因此，对偶是相互的。

例 1.2－3

(1) $\neg P \vee (Q \wedge R)$和$\neg P \wedge (Q \vee R)$互为对偶。

(2) $P \vee F$ 和 $P \wedge T$ 互为对偶。

定理 1.2－1 设 A 和 A^* 是对偶式。$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现于 A 和 A^* 中的所有命题变元，于是

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$

定理 1.2－1 的证明留待学了一般归纳法后再在 2.3 节中给出。但对具体的命题公式，不难连续应用德·摩根定律证得。如在例 1.2－3(1)中，

$$\begin{aligned}
A(P, Q, R) &\Leftrightarrow \neg P \vee Q \wedge R \\
\neg A(P, Q, R) &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q \wedge R) \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge \neg(Q \wedge R) \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \\
A^*(P, Q, R) &\Leftrightarrow \neg P \wedge (Q \vee R) \\
A^*(\neg P, \neg Q, \neg R) &\Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg R)
\end{aligned}$$

所以

$$\neg A(P, Q, R) \Leftrightarrow A^*(\neg P, \neg Q, \neg R)$$

定理 1.2－2 若 $A \Leftrightarrow B$，且 A、B 为由命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 及联结词$\wedge$、$\vee$、$\neg$构成的公式，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

证 $A \Leftrightarrow B$ 意味着

$$A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \leftrightarrow B(P_1, P_2, \cdots, P_n) \text{ 永真}$$

所以

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \leftrightarrow \neg B(P_1, P_2, \cdots, P_n) \text{ 永真}$$

由定理 1.2－1 得

$$A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \leftrightarrow B^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \text{ 永真}$$

因为上式是永真式，可以使用代入规则，以$\neg P_i$ 代 P_i，$1 \leqslant i \leqslant n$，得

$$A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \leftrightarrow B^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \text{ 永真}$$

所以，$A^* \Leftrightarrow B^*$。证毕。

本定理常称为**对偶原理**。

例 1.2－4 若$(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$，则由对偶原理得

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$$

定理 1.2－3 如果 $A \Rightarrow B$，且 A、B 为由命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 及联结词$\wedge$、$\vee$、$\neg$构成的公式，则 $B^* \Rightarrow A^*$。

证 $A \Rightarrow B$ 意味着

$$A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \rightarrow B(P_1, P_2, \cdots, P_n) \text{ 永真}$$

$$\neg B(P_1, P_2, \cdots, P_n) \rightarrow \neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \text{ 永真}$$

由定理 1.2－1 得

$$B^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \rightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \text{ 永真}$$

因为上式是永真式，可以使用代入规则，以$\neg P_i$ 代 P_i，$1 \leqslant i \leqslant n$，得

$$B^* \Rightarrow A^*$$

证毕

习　　题

1. 指出下列命题哪些是重言式，哪些是偶然式或矛盾式：

(1) $P\vee\neg P$

(2) $P\wedge\neg P$

(3) $P\rightarrow\neg(\neg P)$

(4) $\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$

(5) $\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)$

(6) $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg Q\rightarrow\neg P)$

(7) $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$

(8) $P\wedge(Q\vee R)\rightarrow(P\wedge Q\vee P\wedge R)$

(9) $P\wedge\neg P\rightarrow Q$

(10) $P\vee\neg Q\rightarrow Q$

(11) $P\rightarrow P\vee Q$

(12) $P\wedge Q\rightarrow P$

(13) $(P\wedge Q\leftrightarrow P)\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)$

(14) $((P\rightarrow Q)\vee(R\rightarrow S))\rightarrow((P\vee R)\rightarrow(Q\vee S))$

2. 对下述每一表达式，找出仅用 $\wedge$ 和 $\neg$ 的等价表达式，并尽可能简单：

(1) $P\vee Q\vee\neg R$

(2) $P\vee(\neg Q\wedge R\rightarrow P)$

(3) $P\rightarrow(Q\rightarrow P)$

对下述每一表达式，找出仅用 $\vee$ 和 $\neg$ 的等价表达式，并尽可能简单：

(4) $(P\wedge Q)\wedge\neg P$

(5) $(P\rightarrow(Q\vee\neg R))\wedge\neg P\wedge Q$

(6) $\neg P\wedge\neg Q\wedge(\neg R\rightarrow P)$

3. 用化简联结词 $\leftrightarrow$ 的左边成右边的方法，证明以下命题公式是重言式：

(1) $((P\wedge Q)\rightarrow P)\leftrightarrow T$

(2) $\neg(\neg(P\vee Q)\rightarrow\neg P)\leftrightarrow F$

(3) $(Q\rightarrow P)\wedge(\neg P\rightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow Q)\leftrightarrow P$

(4) $(P\rightarrow\neg P)\wedge(\neg P\rightarrow P)\leftrightarrow F$

4. 证明下列等价关系：

(1) $P\rightarrow(Q\rightarrow P)\Leftrightarrow\neg P\rightarrow(P\rightarrow\neg Q)$

(2) $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q)\Leftrightarrow(P\vee R\rightarrow Q)$

(3) $\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

(4) $\neg(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$

5. 使用恒等式证明下列各式，并写出与它们对偶的公式：

(1) $(\neg(\neg P\vee\neg Q)\vee\neg(\neg P\vee Q))\Leftrightarrow P$

(2) $(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)$

(3) $Q\vee\neg((\neg P\vee Q)\wedge P)\Leftrightarrow T$

6. 求出下列公式的最简等价式：

(1) $((P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P))\land R$

(2) $P\lor\neg P\lor(Q\land\neg Q)$

(3) $(P\land(Q\land S))\lor(\neg P\land(Q\land S))$

7. 证明下列蕴含式：

(1) $P\land Q\Rightarrow(P\to Q)$

(2) $P\Rightarrow(Q\to P)$

(3) $(P\to(Q\to R))\Rightarrow(P\to Q)\to(P\to R)$

8. 不构成真值表而证明下列蕴含式：

(1) $P\to Q\Rightarrow P\to P\land Q$

(2) $(P\to Q)\to Q\Rightarrow P\lor Q$

(3) $((P\lor\neg P)\to Q)\to((P\lor\neg P)\to R)\Rightarrow(Q\to R)$

(4) $(Q\to(P\land\neg P))\to(R\to(P\land\neg P))\Rightarrow(R\to Q)$

9. (1) 与非运算符(又叫悉菲(Sheffer)记号)用表 1.2 - 3 所示真值表定义，可看出

$$P\uparrow Q\Leftrightarrow\neg(P\land Q)$$

试证明：

① $P\uparrow P\Leftrightarrow\neg P$

② $(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q)\Leftrightarrow P\lor Q$

③ $(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q)\Leftrightarrow P\land Q$

表 1.2 - 3

P	Q	$P\uparrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(2) 或非运算符(又叫皮尔斯(Peirce)箭头)用表 1.2 - 4 所示真值表定义，它与 $\neg(P\lor Q)$ 逻辑等价。对下述每一式，找出仅用 $\downarrow$ 表示的等价式。

① $\neg P$

② $P\lor Q$

③ $P\land Q$

表 1.2 - 4

P	Q	$P\downarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

10. $\square$和 $*$ 是具有两个运算对象的逻辑运算符，如果 $P\square(Q*R)$和$(P\square Q)*(P\square R)$逻辑等价，那么说$\square$在 $*$ 上可分配。

(1) 用真值表证明 $\land$ 和 $\lor$ 互相可分配。

(2) $\land$、$\lor$ 和$\to$对自己可分配吗？

(3) 数的加法和乘法对自己可分配吗？

11. 对一个重言式使用代入规则后仍得重言式，对一个偶然式和矛盾式，使用代入规则后，结果如何？

对一个重言式，使用替换规则后是否仍得重言式？对一个偶然式和矛盾式，使用替换规则后，结果如何？

12. 求出下列各式的代入实例：

(1) $(((P\to Q)\to P)\to P)$；用 $P\to Q$ 代 P，用$((P\to Q)\to R)$代 Q。

(2) $((P\to Q)\to(Q\to P))$；用 Q 代 P，用 $P\land\neg P$ 代 Q。

1.3 范　　式

命题公式千变万化，这对研究其性质和应用带来困难。为此，我们有必要研究如何将命题公式转化为逻辑等价的标准形式问题，以简化研究工作并方便应用。这种标准形式就称为范式。

1.3.1 析取范式和合取范式

为叙述方便，我们把合取式称为积，析取式称为和。

定义 1.3-1 命题公式中的一些命题变元和一些命题变元的否定之积，称为**基本积**；一些命题变元和一些命题变元的否定之和，称为**基本和**。

例如，给定命题变元 P 和 Q，则 P、$\neg P\wedge Q$、$P\wedge Q$、$\neg P\wedge P$、$\neg Q\wedge P\wedge Q$ 等都是基本积，Q、$\neg Q\vee P$、$P\vee Q$、$P\vee\neg P$、$P\vee Q\vee\neg Q$ 等都是基本和。

基本积(和)中的子公式称为此基本积(和)的因子。

定理 1.3-1 一个基本积是永假式，当且仅当它含有 P、$\neg P$ 形式的两个因子。

证 充分性：$P\wedge\neg P$ 是永假式，而 $Q\wedge F\Leftrightarrow F$，所以含有 P 和 $\neg P$ 形式的两个因子的基本积是永假式。

必要性：用反证法。设基本积永假但不含 P 和 $\neg P$ 形式的两个因子，则给这个基本积中不带否定符的命题变元指派真值 T，给带有否定符的命题变元指派真值 F，得基本积的真值是 T，但这与假设矛盾。证毕。

定理 1.3-2 一个基本和是永真式，当且仅当它含有 P、$\neg P$ 形式的两个因子。

证明留给读者作练习。

定义 1.3-2 一个由基本积之和组成的公式，如果与给定的命题公式 A 等价，则称它是 A 的**析取范式**，记为

$$A\Leftrightarrow A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n,\qquad n\geqslant 1$$

这里 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是基本积。

任何一个命题公式都可求得它的析取范式，这是因为命题公式中出现的 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 可用 $\wedge$、$\vee$ 和 $\neg$ 表达，括号可通过德·摩根定律和 $\wedge$ 在 $\vee$ 上的分配律消去。但一个命题公式的析取范式不是唯一的，我们把其中运算符最少的称为**最简析取范式**。

如果给定的公式的析取范式中每个基本积都是永假式，则该式也必定是永假式。

例 1.3-1

(1) 求 $P\wedge(P\rightarrow Q)$ 的析取范式。

解

$$\begin{aligned}P\wedge(P\rightarrow Q)&\Leftrightarrow P\wedge(\neg P\vee Q)\\&\Leftrightarrow P\wedge\neg P\vee P\wedge Q\qquad ①\end{aligned}$$

$P\wedge(P\rightarrow Q)$ 不是永假式，因为其析取范式中，后一个基本积非永假。

如果需要求出最简的析取范式，那么①式还可化简成

$$\begin{aligned}P\wedge(P\rightarrow Q)&\Leftrightarrow F\vee P\wedge Q\\&\Leftrightarrow P\wedge Q\end{aligned}$$

$P\wedge Q$ 是 $P\wedge(P\rightarrow Q)$ 的最简析取范式。求最简析取范式的方法有卡诺图法和奎因—麦克劳

斯基方法等，详见有关“数字逻辑”的教材，这里不多叙述。

(2) 求$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$的最简析取范式。

解

$$\begin{aligned}&\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)\\&\Leftrightarrow(\neg(P\vee Q)\wedge(P\wedge Q))\vee((P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q))\\&\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)\vee((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))\\&\Leftrightarrow Q\wedge\neg P\vee P\wedge\neg Q\end{aligned}$$

定义 1.3－3 一个由基本和之积组成的公式，如果与给定的命题公式 A 等价，则称它是 A 的**合取范式**，记为

$$A\Leftrightarrow A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n,\ n\geqslant1$$

这里 A_1，A_2，…，A_n 是基本和。

任何一个命题公式都可求得它的合取范式，这是因为命题公式中出现的$\rightarrow$和$\leftrightarrow$可用$\wedge$、$\vee$和$\neg$表达，否定号可通过德·摩根定律深入到变元上，再利用$\vee$在$\wedge$上的分配律可化成合取范式。一个公式的合取范式也不是唯一的，其中运算符最少的称为**最简合取范式**。可利用卡诺图等方法求得最简合取范式。

如果给定的公式的合取范式中每个基本和都是永真式，则该式也必定是永真式。

例 1.3－2

(1) 证明$Q\vee P\wedge\neg Q\vee\neg P\wedge\neg Q$是永真式。

解

$$\begin{aligned}&Q\vee P\wedge\neg Q\vee\neg P\wedge\neg Q\\&\Leftrightarrow Q\vee(P\vee\neg P)\wedge\neg Q\\&\Leftrightarrow(Q\vee P\vee\neg P)\wedge(Q\vee\neg Q)\end{aligned}$$

在$Q\vee P\wedge\neg Q\vee\neg P\wedge\neg Q$的合取范式中，每一个基本和都是永真式，所以它是永真式。

(2) 求$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$的最简合取范式。

解 记$A\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$，则

$$\begin{aligned}\neg A&\Leftrightarrow\neg(\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q))\\&\Leftrightarrow\neg(\neg(P\vee Q)\wedge P\wedge Q\vee(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q))\\&\Leftrightarrow\neg((P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q))\\&\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q\vee P\wedge Q\end{aligned}$$

所以，$A\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$。

1.3.2 主析取范式和主合取范式

定义 1.3－4 在 n 个变元的基本积中，若每一个变元与其否定不同时存在，而两者之一必出现一次且仅出现一次，则这种基本积叫**极小项**。

n 个变元可构成 2^n 个不同的极小项。例如 3 个变元 P、Q、R 可构造 8 个极小项。我们把命题变元看成 1，命题变元的否定看成 0，那么每一极小项对应一个二进制数，因而也对应一个十进制数。对应情况如下：

$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$ ——0 0 0——0

$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$ ——0 0 1——1

$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$ ——0 1 0——2

$\neg P \wedge Q \wedge R$ ——0 1 1——3

$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ ——1 0 0——4

$P \wedge \neg Q \wedge R$ ——1 0 1——5

$P \wedge Q \wedge \neg R$ ——1 1 0——6

$P \wedge Q \wedge R$ ——1 1 1——7

我们把对应的十进制数当作足标，用 m_i 表示这一项，即

$$m_0 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$
$$m_1 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$
$$m_2 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge \neg R$$
$$m_3 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$m_4 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$
$$m_5 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$$
$$m_6 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \neg R$$
$$m_7 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R$$

一般地，n 个变元的极小项是：

$$m_0 \Leftrightarrow \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3 \wedge \cdots \wedge \neg P_n$$
$$m_1 \Leftrightarrow \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3 \wedge \cdots \wedge P_n$$
$$\vdots$$
$$m_{2^n-1} \Leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n$$

定义 1.3－5 一个由极小项之和组成的公式，如果与给定的命题公式 A 等价，则称它是 A 的**主析取范式**。

任何一个命题公式都可求得它的主析取范式，这是因为任何一个命题公式都可求得它的析取范式，而析取范式可化为主析取范式。例如

$$\begin{aligned}
A &\Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R) \vee (P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge R \\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \\
&\qquad \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge \\
&\qquad R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \\
&\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \\
&\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)
\end{aligned}$$

下面我们考察一个命题公式的主析取范式和它的真值表的关系。

前边讲过每一极小项和它的足标的二进制数一一对应，因而和一种指派一一对应，例如有三个变元时，

极小项　　　足标　　　指派

$P \wedge \neg Q \wedge R$——1 0 1——1、0、1

当且仅当将对应的指派代入该极小项，该极小项的值才为 1。因此，在命题公式的主析取范式中，诸极小项都与真值表中相应指派处的该公式的真值 1 相对应，反之亦然。

对照上例和表 1.3－1 所示的真值表，容易验证这一点。

表 1.3－1

P	Q	R	$P\wedge Q\vee R$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

一个命题公式的真值表是唯一的，因此一个命题公式的主析取范式也是唯一的。两个命题公式如果有相同的主析取范式，那么这两个命题公式是逻辑等价的。

例 1.3－3 证明$\neg P\vee Q$和$P\rightarrow((P\rightarrow Q)\wedge\neg(\neg Q\vee\neg P))$二式逻辑等价。

证 $\neg P\vee Q\Leftrightarrow\neg P\wedge(Q\vee\neg Q)\vee Q\wedge(P\vee\neg P)$

$\Leftrightarrow\neg P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q\vee P\wedge Q$

$P\rightarrow((P\rightarrow Q)\wedge\neg(\neg Q\vee\neg P))$

$\Leftrightarrow\neg P\vee((\neg P\vee Q)\wedge(Q\wedge P))$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg P\wedge Q\wedge P)\vee(Q\wedge Q\wedge P)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee P\wedge Q$

$\Leftrightarrow\neg P\wedge(Q\vee\neg Q)\vee P\wedge Q$

$\Leftrightarrow\neg P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q\vee P\wedge Q$

所以，二式逻辑等价。

定义 1.3－6 在 n 个变元的基本和中，若每一个变元与其否定不同时存在，而二者之一必出现一次且仅出现一次，则这种基本和叫**极大项**。

n 个变元可构成 2^n 个不同的极大项。类似于(但不同于)极小项的记法，它们是：

$$M_0\Leftrightarrow P_1\vee P_2\vee\cdots\vee P_n$$
$$M_1\Leftrightarrow P_1\vee P_2\vee\cdots\vee\neg P_n$$
$$M_2\Leftrightarrow P_1\vee P_2\vee\cdots\vee\neg P_{n-1}\vee P_n$$
$$\vdots$$
$$M_{2^n-1}\Leftrightarrow\neg P_1\vee\neg P_2\vee\cdots\vee\neg P_n$$

这里是将命题变元对应于 0，命题变元的否定对应于 1，恰与极小项记法相反，例如 3 个变元的极大项是这样对应的

极大项　　　足标　　　指派

$P\vee\neg Q\vee R$——0 1 0——0、1、0

其目的是当且仅当将极大项的对应指派代入该极大项时，才使该极大项的真值为 0，这样可使今后许多运算得到方便。

定义 1.3－7 一个由极大项之积组成的公式，如果与给定的命题公式 A 等价，则称

它是 A 的**主合取范式**。

任何一个命题公式都可求得它的主合取范式，这是因为任何一个命题公式都可求得它的合取范式，而合取范式可化为主合取范式。例如

$$
\begin{aligned}
A &\Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \\
&\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \\
&\Leftrightarrow (P \vee R \vee Q \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee R \vee P \wedge \neg P) \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \\
&\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \\
&\Leftrightarrow \pi(0,2,4)
\end{aligned}
$$

在命题公式的主合取范式中，诸极大项都与真值表中相应指派处的该公式的真值 0 相对应。反之亦然。对照上边的真值表和本例容易验证这一点。

一个命题公式的真值表是唯一的，因此一个命题公式的主合取范式也是唯一的。两个命题公式如果有相同的主合取范式，那么这两个命题公式是逻辑等价的。

一个命题公式的主析取范式和主合取范式紧密相关，在它们的简记式中，代表极小项和极大项的足标是互补的，即两者一起构成 0，1，2，…，2^n-1 诸数。例如，若有

$$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

则

$$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow \pi(0,2,4)$$

下面列出极小项和极大项性质，它们都很容易证明，这里不再赘述。

(1) $m_i \wedge m_j \Leftrightarrow F$，$(i \neq j)$

(2) $M_i \vee M_j \Leftrightarrow T$，$(i \neq j)$

(3) $\bigvee\limits_{i=0}^{2^n-1} m_i \Leftrightarrow T$

(4) $\bigwedge\limits_{i=0}^{2^n-1} M_i \Leftrightarrow F$

(5) $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$

(6) $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

1.3.3 主析取范式的个数

一般地说，n 个变元的命题公式，其数量是无限的，但每一个命题公式都与其主析取范式等价。如果两个命题公式有相同的主析取范式，那么我们说这两个命题公式是属于一个等价类的。属于一个等价类的命题公式，当然是互相等价的。现在要研究含有 n 个命题变元的命题公式有多少个等价类，或有多少个不同的主析取范式，或有多少个不同的真值表。

当 $n=1$ 时，极小项有 $2^1=2$ 个，即 P、$\neg P$。主析取范式有：

$f_1 \Leftrightarrow F$ 没有极小项

$f_2 \Leftrightarrow P$

$f_3 \Leftrightarrow \neg P$

$f_4 \Leftrightarrow P \vee \neg P$ 全部极小项

当 $n=2$ 时，极小项有 $2^2=4$ 个，即 $\neg P \wedge \neg Q$、$\neg P \wedge Q$、$P \wedge \neg Q$、$P \wedge Q$。主析取范

式有：

$$f_1 \Leftrightarrow F \qquad f_9 \Leftrightarrow \neg P\wedge Q\vee P\wedge\neg Q$$
$$f_2 \Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q \qquad f_{10} \Leftrightarrow \neg P\wedge Q\vee P\wedge Q$$
$$f_3 \Leftrightarrow \neg P\wedge Q \qquad f_{11} \Leftrightarrow P\wedge\neg Q\vee P\wedge Q$$
$$f_4 \Leftrightarrow P\wedge\neg Q \qquad f_{12} \Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q\vee\neg P\wedge Q\vee P\wedge\neg Q$$
$$f_5 \Leftrightarrow P\wedge Q \qquad f_{13} \Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q\vee\neg P\wedge Q\vee P\wedge Q$$
$$f_6 \Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q\vee\neg P\wedge Q \qquad f_{14} \Leftrightarrow \neg P\wedge Q\vee P\wedge\neg Q\vee P\wedge Q$$
$$f_7 \Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q\vee P\wedge\neg Q \qquad f_{15} \Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q\vee P\wedge\neg Q\vee P\wedge Q$$
$$f_8 \Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q\vee P\wedge Q \qquad f_{16} \Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q\vee\neg P\wedge Q\vee P\wedge\neg Q\vee P\wedge Q$$

共 $2^{2^2}=16$ 个。以此类推，n 个命题变元可构造 2^{2^n} 个不同的主析取范式(包括 F)。这个数字增长非常快，如 $n=3$ 时 $2^{2^3}=256$，$n=4$ 时 $2^{2^4}=65\ 536$。

主合取范式和主析取范式是一一对应的，因此，n 个命题变元也可构造 2^{2^n} 个不同的主合取范式(包括 T)。

习　　题

1. 对任一指派，为什么 m_i 和 m_j 不能同时为真？为什么 M_i 和 M_j 不能同时为假？这里 $i\neq j$。

2. 求下列各式的主合取范式：

(1) $P\wedge Q\wedge R\vee\neg P\wedge Q\wedge R\vee\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$

(2) $P\wedge Q\vee\neg P\wedge Q\vee P\wedge\neg Q$

(3) $P\wedge Q\vee\neg P\wedge Q\wedge R$

3. 求下列各式的主析取范式和主合取范式：

(1) $(\neg P\vee\neg Q)\to(P\leftrightarrow\neg Q)$

(2) $P\vee(\neg P\to(Q\vee(\neg Q\to R)))$

(3) $(P\to Q\wedge R)\wedge(\neg P\to(\neg Q\wedge\neg R))$

(4) $P\wedge\neg Q\wedge S\vee\neg P\wedge Q\wedge R$

1.4　联结词的扩充与归约

前边我们定义了 5 种联结词，现在研究联结词可否扩充和可否减少这类问题。

1.4.1　联结词的扩充

1. 一元运算

根据上节讨论，一个命题变元只有 4 种主析取范式，也就是说只有 4 种真值表(如表 1.4 - 1 所示)，因此，最多只能定义 4 种运算，但除否定外，永假、永真、恒等作为运算意义不大。所以，一般不再定义其它一元运算。

表 1.4 - 1

P	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	永假	恒等	否定	永真

2. 二元运算

根据上节的讨论，两个变元有 16 种真值表，如表 1.4 - 2 所示。

表 1.4 - 2

P	Q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
		永假	或非	蕴含否定	蕴含否定	合取	P非	Q非	等值	异或	恒等Q	恒等P	与非	蕴含	析取	蕴含	永真
		**	△	△	△	*	*	*	*	△	**	**	△	*	*	*	**

注：表中 * 表示已定义，* * 表示意义不大，△表示可再定义。

除 f_5、f_6、f_7、f_8、f_{13}、f_{14}、f_{15}已定义外，f_1、f_{10}、f_{11}、f_{16}作为运算意义不大，只需再定义以下 4 个：

f_{12}与非：$P\uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P\wedge Q)$

f_2 或非：$P\downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P\vee Q)$

f_9 排斥或(异或)：$P\oplus Q \Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P\wedge\neg Q\vee\neg P\wedge Q$

f_3、f_4 蕴含否定：$P \nrightarrow Q \Leftrightarrow \neg(P\rightarrow Q)$

1.4.2 联结词的归约

9 个联结词是否都必要？显然不是的，只用$\wedge$、$\vee$、$\neg$三个联结词构造的式子，就足以把一切命题公式等价地表示出来。

根据德·摩根定律：$\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q$，$\neg(P\vee Q) \Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q$，所以，$\wedge$和$\vee$中去掉一个也足以把一切命题公式等价地表示出来。

定义 1.4 - 1 一个联结词集合，用其中联结词构成的式子足以把一切命题公式等价地表达出来，则这个联结词集合称为**全功能的**。

由以上讨论易知，包含$\wedge$、$\vee$、$\neg$的任一联结词集合都是全功能的。$\{\wedge, \neg\}$、$\{\vee, \neg\}$是全功能联结词集合。值得注意的是，$\{\uparrow\}$、$\{\downarrow\}$也是全功能集合。容易证明$\{\rightarrow, \neg\}$、$\{\nrightarrow, \neg\}$、$\{\rightarrow, F\}$、$\{\nrightarrow, T\}$也是全功能集合①。但$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$及其子集都不是全功能联结词集合，$\{\neg\}$、$\{\leftrightarrow, \neg\}$、$\{\oplus, \neg\}$等也不是全功能联结词集合。下面扼要说明这些为什么不是全功能的联结词集合。

(1) $\{\wedge, \vee\}$，因为对命题 P 进行$\wedge$和$\vee$运算，不管怎样组合和反复，总不能得到$\neg P$。

(2) $\{\neg\}$，因为$\neg$是一元运算，表达不了二元运算。

① T 和 F 不是联结词，插在这里只是为了教学方便。

(3) {↔, ¬}，证明如下：

证 设 $f(P, Q)$表示仅用命题变元 P 和 Q 及联结词↔、¬构成的任意的命题公式。现证明对 P、Q 的 4 种指派，$f(P, Q)$的真值只能是表 1.4 - 3 中的 8 种结果之一。

表 1.4 - 3

P	Q	$f(P, Q)$							
		1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0

① 在未运算前，P 和 Q 的值属于表中结果 3 和 4，即属于 8 种之一。

② 以上 8 种结果任两种(包括自己对自己)经↔运算，仍得以上 8 种结果之一。

③ 以上 8 种结果，任一种经¬运算，仍得以上 8 种结果之一。

所以，对 P、Q 的 4 种指派，经反复用↔和¬运算，只能得出以上 8 种结果之一，即 $f(P, Q)$的真值只能是表中 8 种结果之一。但以上 8 种结果都是偶数个 1，而 $P\vee Q$ 是 3 个 1，所以不能用 $f(P, Q)$表达 $P\vee Q$，故{↔，¬}不是全功能集合。

一般地说，要判断联结词集合 A 是不是全功能的，只需选一个全功能联结词集合 B，一般选{∨，¬}或{∧，¬}，若 B 中每一联结词都能用 A 中的联结词表达，则 A 是全功能的，否则 A 不是全功能的。

*1.4.3 其它主范式

前边介绍了主析取范式和主合取范式，联结词扩充后，也可由极小项和联结词⊕构成主异或范式，由极大项和联结词↔构成主等值范式。例如

$P\wedge Q\vee R$

$\Leftrightarrow P\wedge Q\wedge R\vee P\wedge Q\wedge\neg R\vee P\wedge\neg Q\wedge R\vee\neg P\wedge Q\wedge R\vee\neg P\wedge\neg Q\wedge R$

$\Leftrightarrow P\wedge Q\wedge R\oplus P\wedge Q\wedge\neg R\oplus P\wedge\neg Q\wedge R\oplus\neg P\wedge Q\wedge R\oplus\neg P\wedge\neg Q\wedge R$ ①

$P\wedge Q\vee R$

$\Leftrightarrow(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(P\vee Q\vee R)\leftrightarrow(P\vee\neg Q\vee R)\leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)$ ②

因为对任一指派，任两个不同的极小项 m_i 和 m_j 不可能同时为真，因此 $m_i\vee m_j$ 与 $m_i\oplus m_j$ 是等价的，故由主析取范式可转写成主异或范式。类似地，任两个不同的极大项 M_i 和 M_j 不可能同时为假，因此 $M_i\wedge M_j$ 和 $M_i\leftrightarrow M_j$ 是等价的，故主合取范式可转写成主等值范式。主异或范式和主等值范式也是唯一的。

习　题

1. 仅用↑表达 $P\rightarrow Q$；再用↓表达它。

2. 仅用$\downarrow$表达$P\uparrow Q$；仅用$\uparrow$表达$P\downarrow Q$。

3. 记$P\uparrow(Q\wedge\neg(R\downarrow P))$为$A(P, Q, R)$，求出它的对偶式$A^*(P, Q, R)$，再求出$A$和$A^*$的仅含联结词$\wedge$、$\vee$、$\neg$的等价式。

4. 试证明下列等价式：

$$\neg(P\uparrow Q)\Leftrightarrow\neg P\downarrow\neg Q$$
$$\neg(P\downarrow Q)\Leftrightarrow\neg P\uparrow\neg Q$$

5. 写出一个仅含$\uparrow$且等价于$P\wedge(Q\leftrightarrow R)$的公式来。

6. 试证明$\{\vee\}$、$\{\rightarrow\}$不是全功能联结词集合。

7. 证明$\{\neg, \rightarrow\}$、$\{\not\rightarrow, T\}$是全功能联结词集合。

8. 证明$\{\oplus, \neg\}$不是全功能联结词集合。

9. 证明联结词$\uparrow$和$\downarrow$是可交换的，但不可结合。

10. 证明联结词$\oplus$可交换，可结合，且$\wedge$在$\oplus$上可分配。

11. 证明联结词$\leftrightarrow$可交换，可结合，且$\vee$在$\leftrightarrow$上可分配。

1.5 推理规则和证明方法

1.5.1 推理规则

像前几节那样研究命题演算，本质上和简单的开关代数一样，简单的开关代数是命题演算的一种应用。现在，我们从另一角度研究命题演算，即从逻辑推理角度来理解命题演算。

先考察 4 个推理的例子，在每一例子中，横线上的是前提，横线下的是结论。右侧是例子的逻辑符表示。

设x属于实数，P：x是偶数，Q：x^2是偶数。

例 1.5－1

如果x是偶数，则x^2是偶数。	前提	$P\rightarrow Q$
x是偶数。		P
x^2是偶数。	结论	所以Q

例 1.5－2

如果x是偶数，则x^2是偶数。	$P\rightarrow Q$
x^2是偶数。	Q
x是偶数。	所以P

例 1.5－3

如果x是偶数，则x^2是偶数。	$P\rightarrow Q$
x不是偶数。	$\neg P$
x^2不是偶数。	所以$\neg Q$

例 1.5－4

如果x是偶数，则x^2是偶数。	$P\rightarrow Q$
x^2不是偶数。	$\neg Q$
x不是偶数。	所以$\neg P$

根据我们的数学知识知道，例 1.5－1 和例 1.5－4 的推理是正确的，而例 1.5－2 和例 1.5－3 的推理是不正确的。由此可见，有研究推理规则的必要。推理规则是正确推理的依据，而正确推理对任何一门科学都是重要的。

例 1.5－1 中，若不管命题的具体涵义，那么它所应用的推理规则就是

$$\frac{\begin{array}{c}P\to Q\\ P\end{array}}{\text{所以}\,Q}\qquad P,\ P\to Q\ \text{推得}\ Q\text{①}\qquad P\wedge(P\to Q)\Rightarrow Q$$

中间部分是左侧规则的另一种写法，右侧是此推理规则所对应的永真蕴含式（参看表 1.2－2）。从这个永真蕴含式可看出，它正是代表“如果 P 并且 $P\to Q$ 是真，则 Q 是真”的意义，这里 P 和 Q 表示任意命题。所以，它恰好代表左侧的推理规则。这条推理规则叫**假言推理**，从形式上看结论 Q 是从 $P\to Q$ 中分离出来的，所以又叫**分离规则**。它是推理规则中最重要的一条。

对任一永真蕴含式 $A\Rightarrow B$ 来说，如果前提 A 为真，则可保证 B 为真，因此不难看出，任一个永真蕴含式都可作为一条推理规则。例如，$\neg P\wedge(P\vee Q)\Rightarrow Q$ 代表以下规则，叫做**析取三段论**。

$$\frac{\begin{array}{c}P\vee Q\\ \neg P\end{array}}{\text{所以}\,Q}\qquad \text{或}\ \neg P,\ P\vee Q\ \text{推得}\ Q$$

下边举一个例子，说明这条推理规则是正确的。

设 P：他在钓鱼，Q：他在下棋。

$$\frac{\begin{array}{c}\text{他在钓鱼或下棋}\\ \text{他不在钓鱼}\end{array}}{\text{所以他在下棋}}\qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}P\vee Q\\ \neg P\end{array}}{\text{所以}\,Q}$$

这样，就可给出以下定义：

定义 1.5－1 若 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\Rightarrow C$，则称 C 是 H_1，H_2，…，H_n 的**有效结论**。

特别地，若 $A\Rightarrow B$，则称 B 是 A 的有效结论。

定义说明：若 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\Rightarrow C$，则从 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$ 推出 C，这样的推理是正确的。但注意推理正确不等于结论为真，结论的真假还取决于前提 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$ 的真假，前提为真时，结论 C 为真；前提为假时，C 可能真也可能假，这就是定义中只说 C 是 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$ 的有效结论而不说是正确结论的原因。“有效”是指结论的推出是合乎推理规则的。

例 1.5－2 所以错误，是 $Q\wedge(P\to Q)\to P$ 不是永真蕴含式，不能用作推理规则，换言之，P 不是 Q 和 $P\to Q$ 的有效结论。这种错误叫做**肯定后件的错误**。

例 1.5－3 所以错误，其理由类似于例 1.5－2，这种错误叫做**否定前件的错误**。

最常用的推理规则见表 1.5－1。

---

① 推得，许多课本中仍用“⇒”符号，本书也如此。这里为了与永真蕴含区分，暂用中文“推得”写出。作为“推得”意义而使用“⇒”的符号，仍读作蕴含。

表 1.5-1　最常用的推理规则

推理规则	重言式形式	名　字
$\dfrac{P}{\text{所以 } P\vee Q}$	$P\Rightarrow P\vee Q$	加法式
$\dfrac{P\wedge Q}{\text{所以 } P}$	$P\wedge Q\Rightarrow P$	简化式
$\dfrac{P\to Q \quad P}{\text{所以 } Q}$	$P\wedge(P\to Q)\Rightarrow Q$	假言推理
$\dfrac{\neg Q \quad P\to Q}{\text{所以 } \neg P}$	$\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$	拒取式
$\dfrac{P\vee Q \quad \neg P}{\text{所以 } Q}$	$(P\vee Q)\wedge\neg P\Rightarrow Q$	析取三段论
$\dfrac{P\to Q \quad Q\to R}{\text{所以 } P\to R}$	$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow P\to R$	前提三段论
$\dfrac{P \quad Q}{\text{所以 } P\wedge Q}$		合取式
$\dfrac{(P\to Q)\wedge(R\to S) \quad P\vee R}{\text{所以 } Q\vee S}$	$(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(P\vee R)\Rightarrow Q\vee S$	构造性二难推理
$\dfrac{(P\to Q)\wedge(R\to S) \quad \neg Q\vee\neg S}{\text{所以 } \neg P\vee\neg R}$	$(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(\neg Q\vee\neg S)\Rightarrow\neg P\vee\neg R$	破坏性二难推理

一个恒等式 $A\Leftrightarrow B$，就是 $A\Rightarrow B$ 和 $B\Rightarrow A$ 同时成立的意思，所以恒等式也是推理规则。常用作推理规则的恒等式已列于表 1.2-1 中。

永真蕴含式和恒等式都是重言式，对其中的变元可应用代入规则，所以代入规则也是推理规则。

下面再介绍两条规则：

(1) 规则 P：在推导的任何步骤上都可以引入前提。

(2) 规则 T：在推导中，如果前面有一个或多个公式永真蕴含 S，则可把 S 引进推导过程。

这两条规则一般都认为是理所当然的，而不作为规则单独提出，但为了提高我们思维的缜密性，以便划清允许或不允许的操作，笔者认为有必要列出。

例 1.5-5

(1) 考虑下述论证：

如果这里有球赛，则通行是困难的。

如果他们按时到达，则通行是不困难的。

他们按时到达了。

所以这里没有球赛。

前 3 个断言是前提，最后一断言是结论，要求我们从前提推出结论。

设 P：这里有球赛，Q：通行是困难的，R：他们按时到达。该论证能表达如下：

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ R \to \neg Q \\ \underline{\quad R \quad} \\ \text{所以} \quad \neg P \end{array}$$

用蕴含式表达，则是

$$(P \to Q) \land (R \to \neg Q) \land R \to \neg P \qquad ①$$

要证明式①是永真蕴含式，可用真值表证明，通常叫真值表技术，也可利用 1.2 节中的方法或恒等式推导的方法证明，这些方法前边都已讲过，这里不再重复。现在应用推理规则证明该论证是正确的。

证

步骤	断言(真)	根据
1	R	P，前提 3
2	$R \to \neg Q$	P，前提 2
3	$\neg Q$	T，1，2，I_3
4	$P \to Q$	P，前提 1
5	$\neg Q \to \neg P$	T，4，E_{24}
6	$\neg P$	T，3，5，I_3

列出前提和结论叫论证(Argument)，它未必是有效的。证明(Proof)则是有效论证的展开，从上例可看出，它由一系列公式(叫公式序列)组成，它们或者是前提，或者是公理，或者是居先公式的结论，这些结论都必须根据推理规则得出。

也可以把证明看做是由一系列语句(断言)组成的，推理规则就是证明必须遵循的句法规则。

(2) 证明 $R \lor S$ 是前提 $C \lor D$，$C \to R$，$D \to S$ 的有效结论。

证

步骤	断言	根据
1	$C \lor D$	P
2	$\neg C \to D$	T，1，E_{14}，E_1
3	$D \to S$	P
4	$\neg C \to S$	T，2，3，I_6
5	$C \to R$	P
6	$\neg R \to \neg C$	T，5，E_{24}
7	$\neg R \to S$	T，4，6，I_6
8	$R \lor S$	T，7，E_1，E_{14}

上述证明过程本质上和数学中所见过的一致，不过这里每一语句都是形式化的，并且都是根据推理规则得出的。这样，就不容易产生推理错误，可确保我们无误地构造出有效论证的证明。若论证是不正确的，则不能构造出这样的证明，反之亦然。掌握这种形式方法，对提高我们的逻辑分析能力极为重要。

1.5.2 证明方法

定理常见的形式是“P 当且仅当 Q”，“如果 P，那么 Q”。而前者又相当于 $P \to Q$ 并且 $Q \to P$，所以归根结底，定理的主要形式是 $P \to Q$。至于其它形式，诸如：$\neg P$ 形式，只需证明 P 是假；$P \wedge Q$ 形式，只需证明 P、Q 俱真；$P \vee Q$ 形式，可转化为 $\neg P \to Q$ 形式。

我们主要从策略意义上说明如何证明 $P \to Q$ 形式的命题，具体的技巧，仍需通过例题来学习。

1. 无义证明法

证明 P 是假，那么 $P \to Q$ 是真。

2. 平凡证明法

证明 Q 是真，那么 $P \to Q$ 是真。

无义证明法和平凡证明法应用的次数较少，但对有限的或特殊的情况，它们常常是重要的，在以后各章中，我们将指出许多这方面的例子。

3. 直接证明法

假设 P 是真，如果能推得 Q 是真，则 $P \to Q$ 是真。

4. 间接证明法

因 $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$，对 $\neg Q \to \neg P$ 进行直接证明，即假设 Q 假，如果能推得 P 是假，则 $\neg Q \to \neg P$ 是真，也就是 $P \to Q$ 是真。

这个证明法也叫**逆反证明法**。

例 1.5－6

(1) 定理：如果 $4x+6y=97$，那么 x 或 y 不是整数。

证 $4x+6y=97$，可改写为 $2x+3y=\frac{97}{2}$。$2x+3y$ 不是整数，所以 x 或 y 不是整数。这是直接证明法。

(2) 一个**完全数**是一个整数，它等于它的所有因子(除本身外)的和。如 6 是一个完全数，因为 $6=1+2+3$，同样 28 也是。

定理：一个完全数不是一个质数。

证 其逆反如下：一个质数不是一个完全数。假设 P 是一质数，那么 $P \geqslant 2$ 并且 P 恰有两个因子 1 和 P，所以小于 P 的所有因子的总和是 1。这得出 P 不是一个完全数。

这是间接证明法。

5. $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \to Q$ 形式命题的证明

可用直接证明法或间接证明法。因 $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \to Q$ 的逆反是 $\neg Q \to \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \cdots \vee \neg P_n$，用间接证明法时，只需证明至少有一个 i 值，使 $\neg Q$ 蕴含 $\neg P_i$ 是真即可。这也可以说是间接证明法的推广。

6. $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \to (P \to Q)$形式命题的证明

根据公式 E_{22}，$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \to (P \to Q)$等价于 $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge P \to Q$，所以，只需证明

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge P \to Q$$

这个方法叫 **CP 规则**，也叫**演绎定理**，因 P 移作前提，常使证明简化，所以经常应用。

例 1.5－7 如果 A 参加球赛，则 B 或 C 也将参加球赛。如果 B 参加球赛，则 A 不参加球赛。如果 D 参加球赛，则 C 不参加球赛。所以，A 若参加球赛，则 D 不参加球赛。

解 设 A：A 参加球赛，B：B 参加球赛，C：C 参加球赛，D：D 参加球赛。要证明的是 $A \to \neg D$ 可从 $A \to B \vee C$，$B \to \neg A$，$D \to \neg C$ 推出。

步骤	断言	根据
1	$A \to B \vee C$	P
2	A	P(附加前提)
3	$B \vee C$	T，1，2，I_3
4	$B \to \neg A$	P
5	$A \to \neg B$	T，4，E_{24}，E_1
6	$\neg B$	T，2，5，I_3
7	C	T，3，6，I_5
8	$D \to \neg C$	P
9	$C \to \neg D$	T，8，E_{24}，E_1
10	$\neg D$	T，7，9，I_3
11	$A \to \neg D$	CP

7. $(P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n) \to Q$ 形式命题的证明

因为

$$\begin{aligned} & P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n \to Q \\ & \Leftrightarrow \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \cdots \wedge \neg P_n \vee Q \\ & \Leftrightarrow (\neg P_1 \vee Q) \wedge (\neg P_2 \vee Q) \wedge \cdots \wedge (\neg P_n \vee Q) \\ & \Leftrightarrow (P_1 \to Q) \wedge (P_2 \to Q) \wedge \cdots \wedge (P_n \to Q) \end{aligned}$$

所以，欲证 $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n \to Q$ 永真，只需证明对每一 i，$P_i \to Q$ 成立。这种证明方法叫**分情况证明**。

例 1.5－8 试证记作"$\sqcup$"的二元运算"max"是可结合的，即对任何整数 a、b 和 c，$(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)$。

证 对任意 3 整数 a、b、c，下列 6 种情况之一必须成立：

$a \geqslant b \geqslant c$，$a \geqslant c \geqslant b$，$b \geqslant a \geqslant c$，$b \geqslant c \geqslant a$，$c \geqslant a \geqslant b$ 或 $c \geqslant b \geqslant a$。

情况 1：$a \geqslant b \geqslant c$，那么

$$(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup c = a$$

$$a \sqcup (b \sqcup c) = a \sqcup b = a$$

所以 $(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)$

其它情况类似可证。

8. 反证法(归谬法)

设公式 H_1，H_2，…，H_m 中的原子命题变元是 P_1，P_2，…，P_n，如果给 P_1，P_2，…，P_n 以某一指派，能使 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 具有真值 T，则称命题公式集合 $\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ **是一致的**，否则称为**非一致的**。这个定义也可这样叙述：

若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow R \wedge \neg R$，则 $\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 是非一致的，否则是一致的。

定理 1.5-1 设 $\{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ 是一致的，C 是一命题公式，如果 $\{H_1, H_2, \cdots, H_n, \neg C\}$ 非一致，则能从 H_1，H_2，…，H_n 推出 C。

证 因为 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C \Rightarrow R \wedge \neg R$，所以，$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$ 永假，但 $\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 是一致的，所以使 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ 为真的指派使 $\neg C$ 为假，因此 C 为真。故

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$$

这一定理说明，欲证 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$，只需证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C \Rightarrow R \wedge \neg R$。这种证明法叫**反证法**，又叫**归谬法**。其中 $\neg C$ 叫**假设前提**。

例 1.5-9 证明 $\neg(P \wedge Q)$ 是 $\neg P \wedge \neg Q$ 的有效结论。

证 把 $\neg\neg(P \wedge Q)$ 作为假设前提。

步骤	断言	根据
1	$\neg\neg(P \wedge Q)$	P，假设前提
2	$P \wedge Q$	T，1，E_1
3	P	T，2，I_2
4	$\neg P \wedge \neg Q$	P
5	$\neg P$	T，4，I_2
6	$P \wedge \neg P$	T，3，5，合取式

所以

$$\neg P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$$

反证法有时使证明很方便，但它不是必不可少的证明法，总可以用 CP 规则代替它，因为若已证得

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C \Rightarrow R \wedge \neg R$$

则由 CP 规则得

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow \neg C \rightarrow R \wedge \neg R$$

但

$$\neg C \rightarrow R \wedge \neg R \Rightarrow C$$

由前提三段论得

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$$

常见的证明方法介绍暂时就到这里，还有一些常见证明方法，诸如数学归纳法，构造

性证明法等，我们将在后继章节的方便之处再作陆续介绍。

*1.5.3 推理的其它问题

本节讨论由给定的公理 H_1，H_2，…，H_n 可推出多少推论。

我们是在把原子命题当作不可分解的整体的前提下讨论这一问题的，若前提不成立，结论当然也失去意义。

把公理用∧联结起来，求出所得式子的主合取范式，随意地取出若干个极大项并用∧联结之，这样得出的式子，便是推论。因为主合取范式为真，其每一合取项为真，因此，若干个合取项之积也是真，所以它是这些公理的推论。

如果有 m 个合取项，可得 2^m-1 个(0 个合取项不包括在内)不同的推论。

例如，以 P 及 $P\to Q$ 作公理时

$$
\begin{aligned}
P \wedge (P \to Q) &\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)
\end{aligned}
$$

于是可作出以下推论

$P\vee Q$、$P\vee\neg Q$、$\neg P\vee Q$、$(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$、$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)$、$(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q)$、$(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q)$

例 1.5-10

(1) 设P：速度的加法定律是真，

Q：在恒星系中光以等速沿各方向传播，

R：在地球上光以等速沿各方向传播。

首先我们有数学定理：$P\wedge Q\to\neg R$，即“如果速度的加法定理是真而且在恒星系中光以等速沿各方向传播，那么地球上光传播的速度不能沿各方向都相等。”

其次，根据物理实验，知 Q 和 R 是真。

因此我们有下列公理：

$$P\wedge Q\to\neg R,\ Q,\ R$$

$$
\begin{aligned}
(P\wedge Q\to\neg R)\wedge Q\wedge R \Leftrightarrow & (\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R) \\
& \wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee R)
\end{aligned}
$$

这里有一推论为

$$(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\Leftrightarrow\neg P$$

因此得出结论：速度的加法定理是不真的。

(2) 由任意两个互相矛盾的公理可以推出随意一个定理。

设 P 和 $\neg P$ 是公理，Q 是随意一个命题，那么

$$
\begin{aligned}
P \wedge \neg P &\Leftrightarrow (P \vee Q \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q \wedge \neg Q) \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)
\end{aligned}
$$

其中一个推论是

$$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)\Leftrightarrow Q$$

即

$$P \wedge \neg P\Rightarrow Q$$

习　题

1. 用真值表证明表 1.5－1 给出的下列推理规则的重言式形式都是重言式：

（1）拒取式。

（2）析取三段论。

（3）建设性二难推理。

（4）破坏性二难推理。

2. H_1，H_2，…是前提，C 是结论，用真值表技术证明下述论证的有效性：

（1）H_1：$P \to Q$，C：$P \to P \wedge Q$

（2）H_1：$\neg P \vee Q$，H_2：$\neg(Q \wedge \neg R)$，H_3：$\neg R$，C：$\neg P$

3. H_1，H_2，…是前提，C 是结论，用真值表判断下列结论是否有效：

（1）H_1：$P \to Q$，H_2：$\neg Q$，C：P

（2）H_1：$P \vee Q$，H_2：$P \to R$，H_3：$Q \to R$，C：R

（3）H_1：$P \to (Q \to R)$，H_2：$P \wedge Q$，C：R

（4）H_1：$\neg P$，H_2：$P \vee Q$，C：$P \wedge Q$

4. 给出一个指派，证明以下结论是非有效的：

（1）前提是 $A \leftrightarrow B$、$B \leftrightarrow (C \wedge D)$、$C \leftrightarrow (A \vee E)$、$A \vee E$，结论是 $A \wedge E$。

（2）前提是 $A \leftrightarrow (B \to C)$、$B \leftrightarrow (\neg A \vee \neg C)$、$C \leftrightarrow (A \vee \neg B)$、$B$，结论是 $A \vee C$。

5. 对下列每一个前提集合，列出能得到的恰当结论和应用于这一情况的推理规则。

（1）我是肥的或者瘦的，我无疑不是瘦的。

（2）如果我跑，我喘气。我没有喘气。

（3）如果他做这个事，那么他的手是脏的。他的手是脏的。

（4）天气是晴朗或阴暗，天气晴朗使我愉快而天气阴暗使我烦恼。

（5）如果考试及格了，那么我很高兴。如果我很高兴，那么我的饭量增加。我的饭量减少。

6. 对下述每一论证构造一个证明，给出所有必须增加的断言，指出用于每一步的推理规则。

（1）煤或大米将涨价，不是这种情况。如果铁路中断运输，那么煤将涨价。因此，铁路不会中断运输。

（2）从语句“今天下雨或明天后天都下雨”和“明天不下雨或后天不下雨而今天下雨”可推出“今天下雨”。

（3）如果李敏来通信工程学院，若王军不生病，则王军一定去看望李敏。如果李敏出差到南京，那么李敏一定来通信工程学院。王军没有生病。所以，如果李敏出差到南京，王军一定去看望李敏。

7. 补充所缺的断言去证实下述论证：

$$
\begin{array}{l}
P \wedge Q \to R \wedge S \\
(T \to Q) \wedge (S \to U) \\
(W \to P) \wedge (T \to U) \\
\neg R \\
\hline
\text{所以 } W \to \neg T
\end{array}
$$

8. 确定下列论证哪些是有效的，为有效论证构造证明。对非有效论证，表明为什么结论不能从前提得出。

(1)
$$\begin{array}{r} A\wedge B \\ A\rightarrow C \\ \hline \text{所以 } C\wedge B \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} A\vee B \\ A\rightarrow C \\ \hline \text{所以 } C\vee B \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r} A\rightarrow B \\ A\rightarrow C \\ \hline \text{所以 } C\rightarrow B \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{l} A\rightarrow B\vee C \\ D\rightarrow \neg C \\ B\rightarrow \neg A \\ A \\ D \\ \hline \text{所以 } B\wedge\neg B \end{array}$$

9. 确定下列哪些是有效论证，对有效论证构造证明。对非有效论证描述其谬误。

(1) 如果今天是星期二，那么我有一次计算方法测验或物理测验。如果物理老师生病，那么没有物理测验。今天是星期二并且物理老师生病。所以，我有一次计算方法测验。

(2) 如果 $f(x)$是三角函数，那么 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上连续。$|f(x)|\leqslant 1$ 的必要条件是 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上连续。所以，如果 $f(x)$是三角函数，那么若 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上连续，则$|f(x)|\leqslant 1$。

(3) 如果张小三的手沾满了鲜血，那么他杀了人，张小三手很清洁。所以，张小三没有杀人。

10. 仅使用 E_4、E_5、E_8、E_{18}、E_{21}、I_2 证明 $\neg P\wedge(P\vee Q)\Rightarrow Q$。

11. 证明下列论证的有效性：

(1) $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow C)$，$\neg(B\wedge C)$，$D\vee A$ 推得 D

(2) $P\rightarrow Q$，$(\neg Q\vee R)\wedge\neg R$，$\neg(\neg P\wedge S)$推得 $\neg S$

(3) $P\wedge Q\rightarrow R$，$\neg R\vee S$，$\neg S$ 推得 $\neg P\vee\neg Q$

(4) $B\wedge C$，$(B\leftrightarrow C)\rightarrow(H\vee G)$推得 $G\vee H$

(5) $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$，$R\wedge S$，$Q\wedge T$ 推得 R

12. 证明下列结论：

(1) $\neg P\vee Q$，$\neg Q\vee R$，$R\rightarrow S\Rightarrow P\rightarrow S$

(2) $P\rightarrow Q\Rightarrow P\rightarrow P\wedge Q$

(3) $P\vee Q\rightarrow R\Rightarrow P\wedge Q\rightarrow R$

(4) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$，$Q\rightarrow(R\rightarrow S)\Rightarrow P\rightarrow(Q\rightarrow S)$

13. 试说明“从假的前提出发，能证明任意命题”。

14. 证明下列前提集合是非一致的。

(1) $P\rightarrow Q$，$P\rightarrow R$，$Q\rightarrow\neg R$，P，由此证明

$$(P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow\neg R)\wedge P\Rightarrow M$$

(2) $A\rightarrow(B\rightarrow C)$，$D\rightarrow(B\wedge\neg C)$，$A\wedge D$，由此证明

$$[A\rightarrow(B\rightarrow C)]\wedge[D\rightarrow(B\wedge\neg C)]\wedge(A\wedge D)\Rightarrow I$$

15. 证明下列各式的有效性：

(1) $R\rightarrow\neg Q$，$R\vee S$，$S\rightarrow\neg Q$，$P\rightarrow Q$ 推得 $\neg P$

(2) $S\rightarrow\neg Q$，$S\vee R$，$\neg R$，$\neg R\leftrightarrow Q$ 推得 $\neg P$

(3) $\neg(P\to Q)\to\neg(R\vee S)$，$((Q\to P)\vee\neg R)$，$R$ 推得 $P\leftrightarrow Q$

1.6 谓词和量词

在命题演算中，原子命题是演算的基本单位，不再对原子命题进行分解。故无法研究命题内部的成分、结构及其逻辑特征。例如：

"所有的人总是要死的"

"苏格拉底是人"

"所以苏格拉底是要死的"

凭直觉这个**苏格拉底论证**是正确的，但无法用命题演算表达出来。为了深入研究形式逻辑中的推理问题，所以有必要将命题演算扩充而引入谓词演算。我们首先介绍谓词和量词概念。

1.6.1 谓词

首先考察几个例子。

例 1.6-1

(1) 5 是质数	x 是质数
(2) 张明生于北京	x 生于 y
(3) $7=3\times 2$	$x=y\times z$

右侧是每个例子的模式，"是质数"刻画 x 的性质，"生于"刻画 x 和 y 的关系，"$\cdots=\cdots\times\cdots$"刻画 x、y、z 的关系。

我们把"5""张明""北京" "7" "3" "2"叫做**个体**，代表个体的变元叫**个体变元**。刻画个体的性质或几个个体间关系的模式叫**谓词**。"是质数" "生于" "$\cdots=\cdots\times\cdots$"都是谓词。谓词一般用大写字母 P，Q，R，…表示，个体用小写字母 a，b，c，…表示。

单独的个体和谓词不能构成命题，故不能将它们分开以表示命题。设 F 表示"是质数"，则"x 是质数"表示为 $F(x)$；G 表示"生于"，则"x 生于 y"表示为 $G(x, y)$；H 表示"$\cdots=\cdots\times\cdots$"，则"$x=yz$"表示为 $H(x, y, z)$。$F(x)$、$G(x, y)$、$H(x, y, z)$等叫**谓词命名式**，简称谓词。

表示 n 个个体间关系(性质看做一元关系)的谓词称为 **n 元谓词**。例如上述 $F(x)$是一元谓词，$G(x, y)$、$H(x, y, z)$分别是二、三元谓词。一般 n 元谓词记作 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

一般谓词用设定的字母表示，常用的谓词则用特定的符号表示。例如：

$x<y$，可写成$<(x, y)$或 $L(x, y)$(L 表示小于)

$x=yz$，可写成$=(x, y, z)$(要事先说明)

但最常用的仍写成 $x<y$，$x=yz$，称为谓词的**中缀记法**。不管怎样记法，变元的次序是重要的，例如$<(x, y)$与$<(y, x)$不一样。

一个字母代表一特定谓词，例如 F 代表"是质数"，则称此字母为**谓词常元**。若字母代表任意谓词，则称此字母为**谓词变元**。我们通常不加区分，但一般从上下文可看出它的含义。

谓词命名式中个体变元的取值范围叫做**论述域**或**个体域**。容易看出，空集不能作为论

述域，所以，以后谈到论述域都至少有一个个体。例 1.6－1(1)的论述域是正整数，(3)的论述域是实数，(2)中 x 的变域是人类，y 的变域是地名集，所以论述域分别是人类和地名集。

个体的涵义十分广泛，任何事物都可作为个体。因此常见的函数 $\sin x$、xy…的值 $\sin 45°$、2×3…都可作为个体。此时对应于这些函数值的个体变元，就是该函数了。请看以下例子。

例 1.6－2 给定等式 $xy+z=0$，如果用谓词 P 表示"…×…＋…＝0"，可记为 $P(x, y, z)$，是三元谓词，因为它有三个空位，x、y、z 分别是它的三个个体变元；如果用谓词 P 表示"…＋…＝0"，可记为 $P(xy, z)$，是二元谓词，因为它有两个空位，其中变数 xy 是一个个体变元，z 是另一个个体变元；如果用谓词 P 表示"…＝0"，可记为 $P(xy+z)$，是一元谓词，因为它仅有一个空位，它的个体变元是函数 $xy+z$。

由此例可看出什么是个体变元，取决于相应谓词的涵义。

谓词命名式中，若谓词是常元，个体变元代以论述域中的某一个体，就成为一个命题。例如 $F(5)$是真，$F(4)$是假，G(张明，北京)是真(假定张明生于北京)，所以谓词命名式是一个命题函数。

在例 1.6－2 中，将等式表示为 $P(x, y, z)$，若取定 x 为 3，即 $P(3, y, z)$，可改记为 $P'(y, z)$成为二元谓词，再取定 y 为 4，即 $P'(4, z)$，可改记为 $P''(z)$，成为一元谓词，再取定 z 为 5，即$P''(5)$，可改记为 P'''而成为命题。可见命题是 0 元谓词，所以谓词是命题概念的扩充，命题是谓词的一种特殊情况。

1.6.2 量词

为了表达全称判断和特称判断，有必要引入量词。量词有两个：全称量词和存在量词。

1. 全称量词

$\forall x$ 读做"对一切 x"、"对任一 x"或"对每一 x"，这里 $\forall$ 是**全称量词**，x 标记 $\forall$ 所作用的个体变元。

$\forall xP(x)$表示"对一切 x，$P(x)$是真"；

$\forall x\neg P(x)$表示"对一切 x，$\neg P(x)$是真"；

$\neg\forall xP(x)$表示"并非对一切 x，$P(x)$是真"；

$\neg\forall x\neg P(x)$表示"并非对一切 x，$\neg P(x)$是真"。

2. 存在量词

$\exists x$ 读做"存在一 x"、"对某些 x"或"至少有一 x"。这里 $\exists$ 是**存在量词**，x 标记 $\exists$ 所作用的个体变元。它的意思是肯定存在一个，但不排斥多于一个。

$\exists xP(x)$表示"有一 x 使 $P(x)$是真"；

$\exists x\neg P(x)$表示"有一 x，使 $\neg P(x)$是真"；

$\neg\exists xP(x)$表示"至少存在一 x 使 $P(x)$是真，并非这样"；

$\neg\exists x\neg P(x)$表示"至少存在一 x 使 $\neg P(x)$是真，并非这样"。

在谓词 $P(x)$，$Q(x, y)$，…的前边加上全称量词 $\forall x$ 或存在量词 $\exists x$，说成是变元 x 被**全称量化或存在量化**。下述断言中的 y 被全称量化或存在量化。

例 1.6－3

(1) $\forall y(y<y+1)$

(2) $\forall y(y=3)$

(3) $\exists y(y<y+1)$

(4) $\exists y(y=3)$

如果论述域是整数，则(1)是真，(2)是假，(3)和(4)是真。

下面说明量化的作用。

设 $F(x)$表示"x 是质数"，将谓词 $F(x)$变为命题有两种方法，第一种是将 x 取定一个值，例如 4，那么 $F(4)$是命题(假)，这种方法的本质是给变元以约束。第二种是将谓词量化，例如 $\forall xF(x)$(假)，$\exists xF(x)$(真)，这种方法的本质也是给变元以约束，不过约束方法不一样。所以量化的作用是约束变元。

量化后所得命题的真值与论述域有关，例如 $\exists y(y=3)$，如果论述域是正整数，这一命题是真，如果论述域是大于 4 的整数，则这一命题是假。

对不同的个体变元，用不同的论述域是可以的，但有时，不同的个体变元一起讨论时，用不同的论述域甚感不便，于是我们设想有一个集合，它不仅包括谓词中各个体变元的所有个体域，而且还含有其它个体，我们称它为**全总个体域**。用了全总个体域以后，个体变元取值范围一致了，但不同论述对象需用不同的特性谓词加以再刻画。我们通过例子说明这一点。

设 $F(x)$表示"x 是不怕死的"，$D(x)$表示"x 是要死的"，$M(x)$表示"x 是人"。

如果论述域是全人类，则

"人总是要死的"译为 $\forall xD(x)$；

"有些人不怕死"译为 $\exists xF(x)$。

如果是全总个体域，则分别译为

$$\forall x(M(x)\rightarrow D(x)) \quad ①$$

$$\exists x(M(x)\wedge F(x)) \quad ②$$

①式等价于 $\forall x(\neg M(x)\vee D(x))$，所以①可以表达为"对一切 x，如果 x 是人，则 x 是要死的"；也可表达为"对一切 x，x 不是人，或是要死的"。各概念间的关系如图 1.6－1 所示。

②式可表达为"存在一些 x，x 是人并且是不怕死的"。各概念间的关系如图 1.6－2 所示。

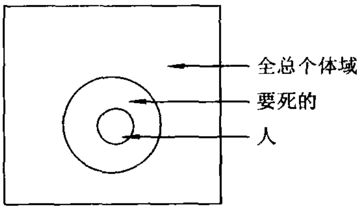


图 1.6－1

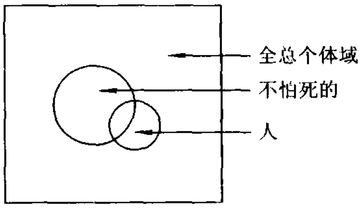


图 1.6－2