第3卷第5期
2004年9月

杭州师范学院学报(自然科学版)
Journal of Hangzhou Teachers College(Natural Science Edition)

Vol. 3 No. 5
Sep. 2004

文章编号:1008－9403(2004)05－0395－05

蚁群算法在连续性空间优化问题中的应用

詹士昌

(杭州师范学院 理学院,杭州 浙江 310012)

摘　要:研究了一种可用于求解连续空间优化问题的蚁群算法策略.能提高最优解搜索过程的效率以及搜索状态的多样性和随机性,且不受优化目标函数是否连续、可微等因素的限制,为实际应用提供了途径.数值算例结果表明该搜索策略能较好地找到近似全局最优解.

关键词:蚁群算法;模拟进化算法;转移概率;函数优化

中图分类号:TP301.6　　　　**文献标识码**:A

0 引　言

蚁群算法是受自然界中真实蚁群集体行为的启发而提出的一种基于种群的模拟进化算法,属于带构造性特征的随机搜索算法[1].蚁群算法可以用于解决许多组合优化问题[2],只要在相应的问题中能实现用一个图表来表示将要解决的问题,能定义一种正反馈过程(如TSP问题中的残留信息),问题结构本身能提供解题用的启发式信息(如TSP问题中城市间的距离),并建立一定的约束机制(如TSP问题中已经访问过的城市列表)等,就可以很方便地应用蚁群算法的模型进行求解[3~4].在TSP问题中,每一个城市之间的距离是已知的,从任意一个城市到达下一城市,有哪些可供选择的城市也是已知的,当用蚁群算法解决TSP问题时,若蚂蚁处于某一城市,就可以直接利用最早由意大利学者Macro Dorigo等人提出的选择概率[5~6],确定应该选择的下一城市.但是,如果蚂蚁处于某城市时,有哪些城市可供选择是未知的,并且城市之间的距离也是未知的,在这种情况下,蚂蚁就无法直接应用文献[5～6]提供的选择概率作出路线选择的决策.比如在连续性变量空间优化问题中,若用蚁群算法来求最优解时,就会遇到上述的情况.

由于最初的蚁群算法起源于离散型的网络路径问题,每个蚂蚁在每个阶段所作的选择总是有限的,因而它对组合优化等离散优化问题很适用,而对线性和非线性规划等连续空间的优化问题的求解就不能直接应用.Bilchev等人曾在使用遗传算法解决工程设计中连续空间的优化问题时配合使用了蚁群算法,以对遗传算法所得到的初步结果进行精确化,取得了较好的效果[7].文献[8～10]提出了将解空间划分成若干子域,在蚁群搜索的每一次迭代中,首先由蚁群算法根据信息量求出解可能所在的子域,然后在该子域内进行地毯式搜索,从已有的解中确定最优解的具体值.

文章在借鉴文献[8～10]基本思想的基础上,对蚁群算法搜索策略进行了改进,该策略在全局上表现

收稿日期:2004-06-08

基金项目:杭州师范学院科研基金重点项目(项目编号2004XNZ04)

作者简介:詹士昌(1963－),男,浙江淳安人,杭州师范学院物理系副教授,研究方向为控制理论与系统优化.

为人工蚂蚁在某种先验知识和启发信息引导下的优化搜索,在局部上则采用了随机性的搜索策略.它能提高搜索的效率以及搜索状态的多样性和随机性. 数值算例表明该搜索策略能较为有效地找到近似全局最优解.

1 用于一维函数优化的蚁群算法模型[8~10]

为说明用于一般函数优化的蚁群算法模型的细节问题,先考察简单的一维函数的优化情况.设优化的问题为

$$\max Z = f(x), x \in [x_0, x_f]$$

其中 $f(x): R \to R$ 为已知的一维函数,$[x_0, x_f]$ 为实轴上的已知解空间.

为实现蚁群算法的群体搜索过程,构造如下的转移概率准则:设 m 只人工蚂蚁,刚开始随机位于解空间$[x_0, x_f]$ 的 n 个等分区域的某些位置处,各个区域间蚂蚁的状态转移概率定义为

$$P_{ij} = \begin{cases} (\tau_j)^\alpha (\eta_{ij})^\beta, & 如果\ \eta_{ij} > 0 \\ 0, & 如果\ \eta_{ij} \leqslant 0 \end{cases} \quad i,j \in \{1,2,\cdots,n\}\ 且\ i \neq j \tag{2}$$

其中,τ_j 为区域 j 的吸引强度(相当于 TSP 问题中的路径信息素强度);期望值 η_{ij}(相当于 TSP 问题中的启发信息)定义为 $\eta_{ij} = f_{j\max} - f_{i\max}$,即蚁群在区域 j 与区域 i 目前已经搜索到的某处目标函数最大值的差值;给定参数 $\alpha, \beta > 0$ 为启发式因子,分别表示蚂蚁在运动过程中各个区域吸引强度 τ_j 及期望值 η_{ij} 在蚂蚁选择搜索区域中所起的不同作用.

区域 j 吸引强度的更新方程为

$$\tau_j(t+1) = \rho\tau_j(t) + \sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_j^k, j = 1,2,\cdots,n \tag{3}$$

$$\Delta\tau_j^k = \begin{cases} QL_j^k, & 如果\ L_j^k > 0 \\ 0, & 如果\ L_j^k \leqslant 0 \end{cases} \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{4}$$

式中,$\Delta\tau_j^k$ 反映蚂蚁 k 在本次循环中在区域 j 的局部搜索中吸引强度的增加;L_j^k 表示本次循环中蚂蚁 k 在区域 j 的局部搜索中目标函数值的变化量,定义为 $L_j^k = f(x_j^k) - f(x_{j0}^k)$,其中 x_j^k 为本次循环中蚂蚁 k 在区域 j 的局部随机搜索中的当前位置,x_{j0}^k 为本次循环中蚂蚁 k 在区域 j 的局部随机搜索中的初始位置;给定参数 $\rho \in (0,1)$,体现各个区域中吸引强度的持久性;给定参数 Q 为蚂蚁释放的信息素密度;算法中有关的初始值取为 $\tau_j(0) = C, \Delta\tau_j(0) = 0$.

于是函数 $f(x)$ 的寻优问题就借助于 m 只蚂蚁在 $x \in [x_0, x_f]$ 的 n 个等分区域间的不断地移动,以及一些区域内的局部随机搜索来进行,处在区域 i 中的蚂蚁 k 的转移及其搜索规则为:

$$j = \begin{cases} \arg \max\limits_{j \in \{1,\cdots,n\}} \{p_{ij}\},即进入第\ j\ 区域进行随机搜索 \\ 否则,在第\ i\ 区域内进行随机搜索 \end{cases} \tag{5}$$

可见,每只蚂蚁要么以上述规则从当前区域转移到其它区域中作局部随机搜索,要么在当前区域内进行局部随机搜索.一旦蚂蚁的群体数目足够大,上述的寻优方式就相当于一群蚂蚁对定义域$[x_0, x_f]$ 中的函数 $f(x)$ 进行有穷尽的且在先验知识引导下的随机搜索,并最终收敛到问题的全局最优解.

2 一维函数优化的局部搜索的策略

为了提高最优解搜索的效率和全局性,前提是要保证蚂蚁在各个区域内搜索过程中其搜索状态的多样性和随机性.为此,在最优解的搜索过程中蚂蚁 k 在区域 j 内的搜索位置 x_{j0}^k 及 x_j^k 必须具有随机选择的特性.在一维问题的区域搜索中,针对蚂蚁 k 在区域 j 内的搜索位置提出如下的随机选择策略

$$\begin{cases} x_j^k = x_0 + \dfrac{x_f - x_0}{n}(j - 1 + \gamma_j^k) & (6-1) \\ x_{j0}^k = x_0 + \dfrac{x_f - x_0}{n}(j - 1 + \gamma_{j0}^k) & (6-2) \end{cases}$$

其中,γ_{j0}^k,γ_j^k 为[0,1]间服从均匀分布、对应蚂蚁 k 在区域 j 内在本次循环中进行局部搜索时的随机数.

为此,m 只蚂蚁在经历一次循环后对解空间中 n 个等分区域进行局部搜索时可能的初始位置及可能搜索到的新位置所构成的矩阵分别为

$$\boldsymbol{X}_0 = \begin{bmatrix} x_{10}^1,\cdots,x_{j0}^1,\cdots,x_{n0}^1 \\ x_{10}^2,\cdots,x_{j0}^2,\cdots,x_{n0}^2 \\ \cdots\cdots \\ x_{10}^k,\cdots,x_{j0}^k,\cdots,x_{n0}^k \\ \cdots\cdots \\ x_{10}^m,\cdots,x_{j0}^m,\cdots,x_{n0}^m \end{bmatrix},\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1^1,\cdots,x_j^1,\cdots,x_n^1 \\ x_1^2,\cdots,x_j^2,\cdots,x_n^2 \\ \cdots\cdots \\ x_1^k,\cdots,x_j^k,\cdots,x_n^k \\ \cdots\cdots \\ x_1^m,\cdots,x_j^m,\cdots,x_n^m \end{bmatrix} \tag{7}$$

上式矩阵 $\boldsymbol{X}$ 中的各个元素,若蚂蚁 k 在当前循环中对区域 j 进行了实际的搜索,则相应的矩阵元素由式(6-1)来确定,否则相应的矩阵元素由式(6-2)来确定,矩阵 $\boldsymbol{X}_0$ 中的各个元素则全部由式(6-2)来确定.

对应 m 只蚂蚁在经历一次循环后对解空间中 n 个等分区域可能搜索到的位置上目标函数值矩阵为

$$f(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} f_1^1,\cdots,f_i^1,\cdots,f_n^1 \\ f_1^2,\cdots,f_i^2,\cdots,f_n^2 \\ \cdots\cdots \\ f_1^k,\cdots,f_i^k,\cdots,f_n^k \\ \cdots\cdots \\ f_1^m,\cdots,f_i^m,\cdots,f_n^m \end{bmatrix},f(\boldsymbol{X}_0) = \begin{bmatrix} f_{10}^1,\cdots,f_{i0}^1,\cdots,f_{n0}^1 \\ f_{10}^2,\cdots,f_{i0}^2,\cdots,f_{n0}^2 \\ \cdots\cdots \\ f_{10}^k,\cdots,f_{i0}^k,\cdots,f_{n0}^k \\ \cdots\cdots \\ f_{10}^m,\cdots,f_{i0}^m,\cdots,f_{n0}^m \end{bmatrix} \tag{8}$$

在一次循环中 m 只蚂蚁在各个区域上进行局部搜索时可能搜索到的最大值,可由式(8)的矩阵 $f(\boldsymbol{X})$ 按列求极大值组成.保留各次循环中各个区域中已经搜索到的最大值构成如下的行向量

$$F = [f_{1\max},f_{2\max},\cdots,f_{n\max}] \tag{9}$$

同样,在一次循环中 m 只蚂蚁在各个区域上进行可能的局部搜索后对应各自的初始位置,目标函数值的变化量矩阵为

$$L = f(\boldsymbol{X}) - f(\boldsymbol{X}_0) \tag{10}$$

蚁群在进行上述的一次循环搜索后,根据式(9)(10)所得的可能搜索结果,便可以利用式(3)(4)来计算和更新各个区域的吸引强度,在此基础上根据式(2)便能确定在下一轮的循环中蚂蚁在各个区域间的状态转移概率.

3 用于一维函数优化的蚁群算法描述及算法的终止准则

由以上算法模型分析可见,上述关于函数优化的思想较之于经典优化搜索方法中从一个孤立的初始点出发进行寻优的过程具有明显的优越性,而且不受优化函数(即目标函数)是否连续、是否可微等因素的限制,是一种全局优化方法.一维函数优化问题的蚁群算法实现过程可以用以下的伪代码来表述:

初始化:$n$cycle = 1,预置算法参数及解空间的分区数;

While($n$cycle < 预定的算法迭代次数)

{将 m 只蚂蚁随机放置于初始区域上;

for($k=0$;$k<=$;$k++$) 第 k 只蚂蚁以式(2)、(5)给出的概率规则转移或作局部搜索;

按公式(9)计算并存储各区域当前已经搜索到的目标函数最大值向量;

记录当前最好解 $x_{\max}$ 及最优值 $f(_{\max})$;

按公式(3)、(4)、(10)更新各区域的吸引强度 τ_j;

$n$cycle $=n$cycle $+1$;

if($\|x_{\max 2}-x_{\max 1}\|<\delta$) break;

}

输出最佳结果.

从蚁群搜索最优解的机理不难看到,算法中有关参数的不同选择对蚁群算法的性能有至关重要的影响,但其选取的方法和原则目前上没有理论上的依据,通常都是根据经验而定.文献[11]通过一系列的仿真实验,对蚁群算法有关参数的性能、作用以及最佳的选取原则进行了深入的实验研究.研究结果表明:基本蚁群算法中最优的算法参数组合为 $m=\sqrt{n}\sim n/2,\alpha=1\sim 5,\beta=1\sim 5,\rho=0.7$,总信息量 Q 对算法的性能没有明显的影响,在选取上可以不做特别的考虑,而区域的宽度(即解空间分区数 n 的大小)与所要求解的优化问题的特征及精度要求有关,若问题的局部最优点较为密集,全局最优解不易得到时,则可适当设置较小的区域宽度(即较多的解空间分区数),但在蚂蚁数量 m 的选取上,应适当考虑算法的时间复杂度因素.

4 数值算例及有关讨论

根据上述的一般函数优化的蚁群算法模型,选取两例一维的连续性变量空间函数进行了算法的仿真实验.实验中各算法参数的取值分别为:蚂蚁在各区域随机搜索中释放的信息素密度 $Q=1$,各区域吸引强度持久性系数 $\rho=0.7$,吸引强度启发式因子 $\alpha=1$,期望值启发式因子 $\beta=1$,函数解空间分区数 $n=10$,并使蚂蚁数量的变化为 $m\in\{2,5,9\}$,进行算法演化过程及其运算结果的仿真比较.

4.1 实例一

优化问题为 $\max f(x)=x^3+3x^2-9x,x\in[-5,2]$.由理论计算容易得到,该函数在解空间 $x\in[-5,2]$ 中有一个最优解为 -3,相应的最优值为27.应用以上所提出的一般函数优化蚁群算法进行求解,所得结果如表1所示.表1所示结果为10次优化求解结果的平均值.

4.2 实例二

优化问题为 $\max f(x)=x\sin(10\pi x)+2,x\in[-1,2]$.由理论计算容易得到,该函数在解空间 $x\in[-1,2]$ 中有一个最优解为1.85,相应的最优值为3.85.应用以上所提出的一般函数优化蚁群算法进行求解,所得结果如表2所示.表2所示结果为10次优化求解结果的平均值.

表1 本文算法对优化函数 $f_1=x^3+3x^2-9x$ 的优化求解结果

蚂蚁数	最优值	最优解	算法迭代次数
2	26.9991	−2.9875	68
5	26.9992	−2.9885	48
9	27.0000	−3.0004	14

表2 本文算法对优化函数 $f_2=x\sin(10\pi x)+2$ 的优化求解结果

蚂蚁数	最优值	最优解	算法迭代次数
2	3.8499	1.8512	80
5	3.8436	1.8478	60
9	3.8533	1.8533	13

5 算法性能分析及有关讨论

5.1 以上提出的蚁群算法模型,在全局上表现为人工蚂蚁在某种先验知识和启发信息引导下的优化搜索,在局部上则采用了随机性的搜索策略,能够充分发挥蚁群搜索的效率以及搜索状态的多样性和随机性.上述两则数值算例中,第一例的优化函数较为简单,在解空间中仅有一个局部最优点,第二例的优化函

数较为复杂,在解空间中分布有 17 个局部最优点.应用此模型进行最优解的求解,均能快速而有效地求得满足优化问题精度要求的、全局性的最优解.

5.2　从两例的仿真结果还可以看到,以上关于一般函数优化问题的蚁群算法,其算法性能与优化函数的特征没有直接关系,因而优化问题本身的函数特征(如函数的连续性、可微性、多极值点等)不会影响算法的性能及其求解结果.

5.3　能对算法性能产生影响的主要是有关的算法参数的设置[11],特别解空间的分区数 n 和参与搜索的蚂蚁群体数 m,它们与最优解搜索的效率、求解精度以及解的全局性等性能紧密相关.由于 m 只蚂蚁作一次循环搜索所要进行的状态转移或区域内的随机搜索操作的总次数为 $n \cdot m$,相应的计算时间复杂度为 $O(n^2 \cdot m)$,当优化问题的求解精度较高时,采用蚁群算法模型的求解效率较低.因而,在精度要求较高的优化问题中有必要探讨出一种更有效的蚁群算法模型,或将其它的启发式优化方法与蚁群算法中的协同模型进行适当地集成[3,7],以提高优化问题最优解的搜索效率.

5.4　作为一种带有构造性特征的随机搜索优化方法,蚁群算法的应用前景和影响将会越来越广泛和深远.但是蚁群算法的研究时间毕竟不长,有许多课题尚待研究和解决[12].它的发展还远没像遗传算法、模拟退火算法等那样形成系统的分析方法和坚实的数学基础,多数研究成果都只是基于大量实验的数据分析,其中各种算法参数的选取也比较复杂,需要从算法理论方面予以解决.

参考文献:

[1]马　良.来自昆虫世界的寻优策略—蚂蚁算法[J].自然杂志,1999,21(3):161~163.

[2]张纪会,高齐圣,徐心和.自适应蚁群算法[J].控制理论与应用,2000,17(1):1~8.

[3]郑肇葆.协同模型与遗传算法的集成[J].武汉大学学报(信息科学版),2001,26(5):381~386.

[4]Dorigo M. Caro G D, Gambardella L M. Ant Algorithms for Discrete Optimization[J]. Artificial Life, 1999, 5(3): 137~172.

[5]Dorigo M, Gambardella L M. Ant colony system: A Cooperative Learning Approach to the Tavelling Salesman Problem[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 1996, 1(1): 53~66.

[6]Dorigo M, Maniezzo Vittorio, Colorni Alberto. The System: Optimization by a Colony of Cooperrating Agents[J]. IEEE Transactions on Systems. Man and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 1996, 26(1): 29~41.

[7]Bilchev G and Parmee I C. Searching Heavily Constrained Design Spaces[A]. In: Proc. of 22nd Int. Conf. Computer Aided Design'95 [C]. Yelta: Ukraine, 1995: 230~235.

[8]马　良.全局优化的一种新方法[J].系统工程与电子技术,2000,22(9):61~63.

[9]魏　平,熊伟清.用于一般函数优化的蚁群算法[J].宁波大学学报,2001,14(4):52~55.

[10]陈　崚,沈　洁,秦　玲.蚁群算法求解连续空间优化问题的一种方法[J].软件学报,2002,13(12):2317~2323.

[11]詹士昌,徐　婕,吴　俊.蚁群算法的参数选择[J].科技通报,2003,19(5):381~386.

[12]Gutjahr W J. A Graph-based Ant System and Its Convergence[J]. Future Generation Computer System, 2000, 16: 837~888.

The application of ant colony algorithm in the continuous space optimization problems

ZHAN Shi-chang

(Department of Physics, Hangzhou Teachers Colloge, Hangzhou 310012, China)

Abstract: In this paper, a new type of ant colony algorithm's explorative strategy which can be applied to solve the continuous space optimization problems was studied. This new strategy could promote the efficiency, the diversity and the stochasty of exploration process, and it can also avoid the restrictions about the optimization problem's functions whether they are continuous or differential. A feasible way is presented for applying the ant colony algorithm to practice. The numerical results demonstrates that the approximate optimization result for whole domain can be available efficiently.

Key words: ant colony algorithm; simulated evolutionary algorithm; transition probability; function optimization