一般三次方程的简明新求根公式和根的判别法则

◎谢国芳 （浙江省诸暨中学 311800）

【摘要】本文推导出了远比卡丹公式简明快捷的可直接用来求解一般三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的新求根公式，进而又针对实系数的情形讨论了根的情况，得到了方便的根的判别法则.

【关键词】三次方程; 求根公式; 判别法; 判别式

一、一般三次方程的简化

对于一般形式的三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$（$a\neq 0$），两边同除以 a，即可化为首项系数为 1 的三次方程

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0.$$

作变量代换

$$x=y-\frac{b}{3a}. \tag{1}$$

可消去二次项，得

$$y^3+py+q=0. \tag{2}$$

其中 $p=-\dfrac{b^2-3ac}{3a^2}, q=-\dfrac{9abc-2b^3-27a^2d}{27a^3}.$ (3)

下面我们把形如式(2)的三次方程称为简约三次方程，并约定其一次项系数 $p\neq 0$.

二、简约三次方程的三角函数解法和求根公式

在方程(2)中作变量代换[1]

$$y=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos z. \tag{4}$$

利用三倍角公式 $\cos 3z=4\cos^3 z-3\cos z$，方程(2)变为

$$\cos 3z=\frac{-q/2}{(\sqrt{-p/3})^3}. \tag{5}$$

定义参数 $\chi=\dfrac{-q/2}{(\sqrt{-p/3})^3}.$ (6)

称之为三次方程 $y^3+py+q=0$ 的关键比(key ratio)，式(5)即

$$\cos 3z=\chi. \tag{7}$$

利用欧拉公式 $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$ (8)

可将方程(7)化为一个以 e^{3iz} 为元的二次方程

$(e^{3iz})^2-2\chi(e^{3iz})+1=0$，解得 $e^{3iz}=\chi\pm\sqrt{\chi^2-1}.$

定义参数 $W=\chi+\sqrt{\chi^2-1}$， 由上式可得 $e^{iz}=\sqrt[3]{W}$ 或 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{W}}$，再由式(8)，(4)即得方程 $y^3+py+q=0$ 的根为

$$y=\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\sqrt[3]{W}+\frac{1}{\sqrt[3]{W}}\right). \tag{9}$$

其中 $W=\chi+\sqrt{\chi^2-1}, \chi=\dfrac{-q/2}{(\sqrt{-p/3})^3}.$ (10)

复立方根 $\sqrt[3]{W}$ 的三个值正好对应于方程的三个根.

三、简约三次方程的另一个求根公式

定义参数 $\lambda=\dfrac{-q/2}{(\sqrt{p/3})^3}$， 亦称之为三次方程 $y^3+py+q=0$ 的关键比，对比 χ 的定义式(6)，若规定平方根的取值满足(参见注 1 和附录 1) $\sqrt{-p/3}=\mathrm{i}\sqrt{p/3}$， 则 $\chi=\mathrm{i}\lambda$，于是 $W=\chi+\sqrt{\chi^2-1}=\mathrm{i}\lambda+\sqrt{(\mathrm{i}\lambda)^2-1}=\mathrm{i}\lambda+\sqrt{-(\lambda^2+1)}=\mathrm{i}(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1})$.

定义参数 $Z=\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}$，则 $W=\mathrm{i}Z$，故 $\sqrt[3]{W}=e^{\pi i/6}\cdot\sqrt[3]{Z}$(参见附录 1)，代入式(9)可得

$$y=\sqrt{\frac{p}{3}}\left(e^{2\pi i/3}\cdot\sqrt[3]{Z}-\frac{1}{e^{2\pi i/3}\cdot\sqrt[3]{Z}}\right).$$

因为 $e^{2\pi i/3}$ 乘以立方根 $\sqrt[3]{Z}$ 的三个值后仍得到 $\sqrt[3]{Z}$ 的三个值，所以上式即

$$y=\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{Z}-\frac{1}{\sqrt[3]{Z}}\right). \tag{12}$$

其中 $Z=\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}$， $\lambda=\dfrac{-q/2}{(\sqrt{p/3})^3}.$ (13)

四、一般三次方程的两个求根公式

为了把求根公式(9)和(12)推广到一般三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，只需把相应的简约三次方程 $y^3+py+q=0$ 的关键比 χ 和 λ 直接用系数 a,b,c,d 表出即可. 将由式(3)给出的 p,q 值代入 χ 和 λ 的定义式可得[2]

$$\chi=\frac{-q/2}{(\sqrt{-p/3})^3}=\frac{\dfrac{9abc-2b^3-27a^2d}{27a^3}}{2\left(\sqrt{\dfrac{b^2-3ac}{9a^2}}\right)^3}=\frac{9abc-2b^3-27a^2d}{2(\sqrt{b^2-3ac})^3},$$

$$\lambda=\frac{-q/2}{(\sqrt{p/3})^3}=\frac{9abc-2b^3-27a^2d}{2(\sqrt{-(b^2-3ac)})^3}.$$

定义 $D=b^2-3ac$，则

$$\chi=\frac{9abc-2b^3-27a^2d}{2(\sqrt{D})^3}, \lambda=\frac{9abc-2b^3-27a^2d}{2(\sqrt{-D})^3}.$$

我们可以把它们称为三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的关键比. 根据求根公式(9)和(12)，并注意到 $p=-\dfrac{D}{3a^2}$ 和 $x=y-\dfrac{b}{3a}$(参见式(1)，(3))，我们就得到了下面的结果.

定理 1(一般三次方程的求根公式 Ⅰ) 对于三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，定义参数

$$D=b^2-3ac,\quad \chi=\frac{9abc-2b^3-27a^2d}{2(\sqrt{D})^3},$$

$$W=\chi+\sqrt{\chi^2-1}. \tag{14}$$

则当 $D\neq 0$ 时它的根为[3]

$$x=\frac{-b+\sqrt{D}\left(\sqrt[3]{W}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{W}}\right)}{3a}. \tag{15}$$

设 $W=|W|e^{i\beta}$，$|W|$ 为复数 W 的模，$\beta=\arg W$ 为其幅角主值($-\pi<\beta\leqslant\pi$)，则 $\sqrt[3]{W}$ 的三个值为

$$\sqrt[3]{|W|}e^{i\beta/3},\quad \sqrt[3]{|W|}e^{i(\beta+2\pi)/3},\quad \sqrt[3]{|W|}e^{i(\beta-2\pi)/3}.$$

代入式(15)，并定义实参数 $\rho=\sqrt[3]{|W|}$，可得方程的三个根:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}\left(\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)\cos\dfrac{\beta}{3}+\mathrm{i}\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)\sin\dfrac{\beta}{3}\right)}{3a}, \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}\left(\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)\cos\left(\dfrac{\beta}{3}+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)\sin\left(\dfrac{\beta}{3}+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)}{3a}, \\ x_3=\dfrac{-b+\sqrt{D}\left(\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)\cos\left(\dfrac{\beta}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)\sin\left(\dfrac{\beta}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)}{3a}. \end{cases} \tag{16}$$

其中 $\rho=\sqrt[3]{|W|}$，$\beta=\arg W$，$W=\chi+\sqrt{\chi^2-1}$.

定理2(一般三次方程的求根公式Ⅱ) 对于三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，定义参数

$$D=b^2-3ac,\quad \lambda=\frac{9abc-2b^3-27a^2d}{2(\sqrt{-D})^3},$$

$$Z=\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}. \tag{17}$$

则当 $D\neq0$ 时它的根为 $x=\dfrac{-b+\sqrt{-D}\left(\sqrt[3]{Z}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{Z}}\right)}{3a}$. (18)

设 $Z=|Z|e^{\mathrm{i}\alpha}$，$|Z|$为复数 Z 的模，$\alpha=\arg Z$ 为其幅角主值($-\pi<\alpha\leqslant\pi$)，则$\sqrt[3]{Z}$的三个值为

$\sqrt[3]{|Z|}e^{\mathrm{i}\alpha/3}$，$\sqrt[3]{|Z|}e^{\mathrm{i}(\alpha+2\pi)/3}$，$\sqrt[3]{|Z|}e^{\mathrm{i}(\alpha-2\pi)/3}$.

代入式(18)，并定义实参数 $\sigma=\sqrt[3]{|Z|}$，可得方程的三个根：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{-D}\left(\left(\sigma-\dfrac{1}{\sigma}\right)\cos\dfrac{\alpha}{3}+\mathrm{i}\left(\sigma+\dfrac{1}{\sigma}\right)\sin\dfrac{\alpha}{3}\right)}{3a}, \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{-D}\left(\left(\sigma-\dfrac{1}{\sigma}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\left(\sigma+\dfrac{1}{\sigma}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)}{3a}, \\ x_3=\dfrac{-b+\sqrt{-D}\left(\left(\sigma-\dfrac{1}{\sigma}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\left(\sigma+\dfrac{1}{\sigma}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)}{3a}. \end{cases} \tag{19}$$

其中 $\sigma=\sqrt[3]{|Z|}$，$\alpha=\arg Z$，$Z=\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}$.

注意求根公式Ⅰ和求根公式Ⅱ是等价的，在实际应用中，我们可以使用这两个求根公式中的任意一个求解(可视方便而定)，除了根的编号可能不同之外，得到的结果是完全相同的.

例1 解复系数三次方程 $x^3+\mathrm{i}x^2+x-\mathrm{i}=0$.

解(用求根公式Ⅰ) $D=b^2-3ac=(\mathrm{i})^2-3\times1\times1=-4$，

$$\chi=\frac{9abc-2b^3-27a^2d}{2(\sqrt{D})^3}=\frac{9\mathrm{i}-2\mathrm{i}^3-27\times(-\mathrm{i})}{2(\sqrt{-4})^3}=-\frac{19}{8},$$

$$W=\chi+\sqrt{\chi^2-1}=-\frac{19}{8}+\sqrt{\left(-\frac{19}{8}\right)^2-1}=-\frac{19-3\sqrt{33}}{8},$$

$\beta=\arg W=\pi$，$\rho=\sqrt[3]{|W|}=\sqrt[3]{\dfrac{19-3\sqrt{33}}{8}}\approx 0.604401892838194$，

代入式(16)，即得方程的三个根：

$$x_1=\frac{-\mathrm{i}+\sqrt{-4}\left(\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}{3}$$

$\approx 0.606290729207199+0.419643377607081\mathrm{i}$，

$x_2\approx-1.839286755214161\mathrm{i}$，

$x_3\approx-0.606290729207199+0.419643377607081\mathrm{i}$.

也可以用求根公式Ⅱ求解本题，所得结果的差别只是后两个根的编号不同.

五、一般实系数三次方程的求解和根的判别法则($D-\chi$ 判别法)

对于实系数三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，我们可以根据参数 $D=b^2-3ac$ 的值，选择使用求根公式Ⅰ和求根公式Ⅱ中较方便的一个求解，进而判定根的情况.

1. $D<0$ 的情形

当 $D=b^2-3ac<0$ 时，显然用求根公式Ⅱ求解比较方便，因为这时关键比 λ 为实数(参见式(17))，$Z=\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}$亦为实数，设其实立方根为 K，则$\sqrt[3]{Z}$的三个值为 K，$e^{2\pi\mathrm{i}/3}K$，$e^{-2\pi\mathrm{i}/3}K$，代入式(18)即得方程的三个根：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{-D}\left(K-\dfrac{1}{K}\right)}{3a}, \\ x_{2,3}=\dfrac{-b+\sqrt{-D}\left(K-\dfrac{1}{K}\right)\cos\dfrac{2\pi}{3}}{3a}\pm\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{-D}\left(K+\dfrac{1}{K}\right)\sin\dfrac{2\pi}{3}}{3a}. \end{cases} \tag{20}$$

其中 $K=\sqrt[3]{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}$，$\lambda=\dfrac{9abc-2b^3-27a^2d}{2(\sqrt{-D})^3}$，($\lambda\in\mathbf{R}$，$K\in\mathbf{R}$).

显然 x_1 为实根，x_2，x_3 为共轭虚根.

2. $D>0$ 的情形

当 $D=b^2-3ac>0$ 时，显然用求根公式Ⅰ求解比较方便，因为这时关键比χ 为实数(参见式(14))，参数 $W=\chi+\sqrt{\chi^2-1}$的取值视$|\chi|$而定.

(1)若$|\chi|\geqslant1$，则 $W=\chi+\sqrt{\chi^2-1}$亦为实数，设其实立方根为 κ，则$\sqrt[3]{W}$的三个值为 κ，$e^{2\pi\mathrm{i}/3}\kappa$，$e^{-2\pi\mathrm{i}/3}\kappa$，代入式(15)即得方程的三个根：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}\left(\kappa+\dfrac{1}{\kappa}\right)}{3a}, \\ x_{2,3}=\dfrac{-b+\sqrt{D}\left(\kappa+\dfrac{1}{\kappa}\right)\cos\dfrac{2\pi}{3}}{3a}\pm\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{D}\left(\kappa-\dfrac{1}{\kappa}\right)\sin\dfrac{2\pi}{3}}{3a}. \end{cases} \tag{21}$$

其中 $\kappa=\sqrt[3]{\chi+\sqrt{\chi^2-1}}$，($\chi\in\mathbf{R}$，$|\chi|\geqslant1$，$\kappa\in\mathbf{R}$).

易见 x_1 为实根. 当$|\chi|>1$时，x_2，x_3 为共轭虚根. 当$|\chi|=1$，即$\chi=\pm1$时，$\kappa=\pm1$，x_2，x_3 为两个相等的实根.

(2)若$|\chi|<1$，设$\chi=\cos\theta$，($0<\theta<\pi$)，即 $\theta=\cos^{-1}\chi$，于是

$$W=\chi+\sqrt{\chi^2-1}=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=e^{\mathrm{i}\theta},$$

$\sqrt[3]{W}$的三个值为 $e^{\mathrm{i}\theta/3}$，$e^{\mathrm{i}(\theta+2\pi)/3}$，$e^{\mathrm{i}(\theta-2\pi)/3}$，代入式(15)即得方程的三个根：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}\cdot2\cos\dfrac{\theta}{3}}{3a}, \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}\cdot2\cos\left(\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{2\pi}{3}\right)}{3a}, \\ x_3=\dfrac{-b+\sqrt{D}\cdot2\cos\left(\dfrac{\theta}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\right)}{3a}. \end{cases} \tag{22}$$

其中 $\theta=\cos^{-1}\chi$，($\chi\in\mathbf{R}$，$|\chi|<1$). 显然 x_1，x_2，x_3 全都是实根，由 $0<\theta<\pi$ 可知

$$0<\frac{\theta}{3}<\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}<\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}<\pi,\ -\frac{2\pi}{3}<\frac{\theta}{3}-\frac{2\pi}{3}<-\frac{\pi}{3}.$$

因此

$\frac{1}{2}<\cos\frac{\theta}{3}<1$，$-1<\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}<\cos\left(\frac{\theta}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)<\frac{1}{2}$.

当 $a>0$ 时即可判定各根的范围如下:

$\frac{-b+\sqrt{D}}{3a}<x_1<\frac{-b+2\sqrt{D}}{3a}$，$\frac{-b-\sqrt{D}}{3a}<x_3<\frac{-b+\sqrt{D}}{3a}$，$\frac{-b-2\sqrt{D}}{3a}<x_2<\frac{-b-\sqrt{D}}{3a}$.

显然 $x_1>x_3>x_2$. 当 $a<0$ 时，上面三个不等式中的不等号反向，即 $x_1<x_3<x_2$.

3. $D=0$ 的情形

当 $D=b^2-3ac=0$ 时，方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 可以配成完全立方求解，两边同除以 a，再利用 $c=\frac{b^2}{3a}$ 可将它改写为 $\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3=\left(\frac{b}{3a}\right)^3-\frac{d}{a}$.

$$\text{解得}\begin{cases}x_1=\dfrac{-b+\sqrt[3]{b^3-27a^2d}}{3a},\\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt[3]{b^3-27a^2d}\cdot\omega}{3a},\\ x_3=\dfrac{-b+\sqrt[3]{b^3-27a^2d}\cdot\omega^2}{3a}.\end{cases}\qquad(23)$$

其中 ω 为三次单位根($\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\omega^2=\overline{\omega}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$). 易见当 $b^3\neq27a^2d$ 时，x_1 为实根. x_2，x_3 为共轭虚根. 当 $b^3=27a^2d$ 时，$x_1=x_2=x_3=-\frac{b}{3a}$，即方程有一个三重实根 $-\frac{b}{3a}$.

4. 一般实系数三次方程的根的判别法则($D-\chi$ 判别法)

综上所述，我们就得到了如下的判别一般实系数三次方程的根的法则，我们可以把它称为 $D-\chi$ 判别法，参数 $D=b^2-3ac$(注意它和二次方程判别式的相似性)可称为第一判别式(first discriminant)，它和关键比 $\chi=\frac{9abc-2b^3-27a^2d}{2(\sqrt{D})^3}$ 合在一起就能简单快捷地判定实系数三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的根的情况，并决定相应的最便捷的求根公式:

(1) 当 $D=b^2-3ac<0$ 时[4]，方程有一个实根和两个共轭虚根.

可用求根公式(20)求解.

(2) 当 $D=b^2-3ac>0$，$|\chi|>1$ 时，方程亦有一个实根和两个共轭虚根.

可用求根公式(21)求解.

(3) 当 $D=b^2-3ac>0$，$|\chi|=1$ 时，方程有一个两重实根和一个单重实根.

仍可用求根公式(21)求解，也可以用三角求根公式(22)求解.

(4) 当 $D=b^2-3ac>0$，$|\chi|<1$ 时，方程有三个互异的实根.

可用三角求根公式(22)求解.

(5) 当 $D=b^2-3ac=0$，$b^3\neq27a^2d$ 时[5]，方程亦有一个实根和两个共轭虚根.

可配成完全立方或用式(23)求解.

(6) 当 $D=b^2-3ac=0$，$b^3=27a^2d$ 时[6]，方程有一个三重实根 $-\frac{b}{3a}$.

例2 判别方程 $27x^3-2x^2+8x-4=0$ 根的情况并求解.

解 $D=b^2-3ac=(-2)^2-3\times27\times8=-644$，由 $D<0$ 可知该方程有一个实根和两个共轭虚根，可用求根公式(20)求解.

$$\lambda=\frac{9abc-2b^3-27a^2d}{2(\sqrt{-D})^3}=\frac{9\times27\times(-2)\times8-2\times(-2)^3-27\times27^2\times(-4)}{2\cdot(\sqrt{644})^3}\approx2.290292896392045,$$

$$K=\sqrt[3]{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}\approx1.685620470846232,$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{-D}\left(K-\frac{1}{K}\right)}{3a}=\frac{2+\sqrt{644}\left(K-\frac{1}{K}\right)}{3\times27}\approx0.366928020961414,$$

$$x_{2,3}=\frac{2-\sqrt{644}\cdot\frac{1}{2}\left(K-\frac{1}{K}\right)}{3\times27}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{644}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(K+\frac{1}{K}\right)}{3\times27}\approx-0.146426973443670\pm0.618313639592831\mathrm{i}.$$

例3 判别方程 $x^3-0.276x^2+0.0136x-0.00043=0$ 根的情况并求其实根.

解 $D=b^2-3ac=(-0.276)^2-3\times0.0136=0.035376$，

$$\chi=\frac{9abc-2b^3-27a^2d}{2(\sqrt{D})^3}=\frac{9\times(-0.276)\times0.0136-2\times(-0.276)^3-27\times(-0.00043)}{2(\sqrt{0.035376})^3}\approx1.493662011245495,$$

由 $D>0$，$\chi>1$ 可知该方程有一个实根和两个共轭虚根，可用求根公式(21)求解.

$$\kappa=\sqrt[3]{\chi+\sqrt{\chi^2-1}}\approx1.375628929048766,$$

$$\text{实根 }x_1=\frac{-b+\sqrt{D}\left(\kappa+\frac{1}{\kappa}\right)}{3a}=\frac{0.276+\sqrt{0.035376}\left(\kappa+\frac{1}{\kappa}\right)}{3}\approx0.223820634031594.$$

例4 判别方程 $x^3-0.5856x^2+0.072x-0.002=0$ 根的情况并求解.

解 $D=b^2-3ac=(-0.5856)^2-3\times0.072=0.12692736$，

$$\chi=\frac{9abc-2b^3-27a^2d}{2(\sqrt{D})^3}=\frac{9\times(-0.5856)\times0.072-2\times(-0.5856)^3-27\times(-0.002)}{2(\sqrt{0.12692736})^3}\approx0.842186183431575,$$

由 $D>0$，$|\chi|<1$ 可知该方程有三个互异的实根，可用三角求根公式(22)求解.

$$\theta=\cos^{-1}\chi\approx0.569471258300053,$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}\cdot2\cos\frac{\theta}{3}}{3a}=\frac{0.5856+\sqrt{0.12692736}\cdot2\cos\frac{\theta}{3}}{3}$$

$\approx 0.428446125903143$,

$$x_2=\frac{0.5856+\sqrt{0.12692736}\cdot 2\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}{3}$$

$\approx 0.039765810249773$,

$$x_3=\frac{0.5856+\sqrt{0.12692736}\cdot 2\cos\left(\frac{\theta}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}{3}$$

$\approx 0.117388063847084$.

【注解】

[1] 注意复数的平方根有两个值(它们相差一个符号),本文中的所有平方根都可以取其两个值中的任意一个值,最终得到的解是完全相同的(除了根的编号可能不同之外),这可以称为方根取值的自由性原则,它的原理其实就隐含在下面对各求根公式的推导过程中,因为我们对其中出现的平方根都没有限定它取哪一个值,即它可以取任意一个值. 在实际应用中,为了方便计算,可约定各求根公式中的平方根全都取主值(参见附录1).

[2] 对于任意非零复数 a,我们总可以选取平方根 $\sqrt{-\left(\frac{b^2-3ac}{9a^2}\right)}$ 的一个值使得它满足 $\sqrt{-\left(\frac{b^2-3ac}{9a^2}\right)}=\frac{\sqrt{-(b^2-3ac)}}{3a}$(因为 $\left(\frac{\sqrt{-(b^2-3ac)}}{3a}\right)^2=-\left(\frac{b^2-3ac}{9a^2}\right)$,所以 $\frac{\sqrt{-(b^2-3ac)}}{3a}$ 必为 $\sqrt{-\left(\frac{b^2-3ac}{9a^2}\right)}$ 的一个值),参见附录1和注1.

[3] 当 $D=0$ 时方程的根由式(23)给出(其中的系数可取复数值).

[4] 即当关键比 χ 为虚数时.

[5] 即当关键比 χ 的分母为0而分子不为0时.

[6] 即当关键比 χ 的分母和分子都为0时.

附录1 复数的方根及其性质

设 $|Z|$ 为复数 z 的模,θ 为其幅角主值($-\pi<\theta\leqslant\pi$),其 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$ 的一般值为

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i(\theta+2k\pi)/n}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),(k\in\mathbf{Z}),$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,上式正好给出 n 个不同的值,我们可以把 $k=0$ 对应的值即 $\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\theta/n}$ 称为 $\sqrt[n]{z}$ 的主值. 易见复数的方根有下面的性质:

$\sqrt[n]{z_1z_2}=\sqrt[n]{z_1}\cdot\sqrt[n]{z_2}$.

鉴于复数方根的多值性,上式中等号的意义是等式两边的值的集合相同,更具体地说,我们可以对它作如下更精细的解释:

(1) $\sqrt[n]{z_1}$ 的任意一个值和 $\sqrt[n]{z_2}$ 的任意一个值相乘都是 $\sqrt[n]{z_1z_2}$ 的一个值.

(2) 固定 $\sqrt[n]{z_1}$ 的一个值,当 $\sqrt[n]{z_2}$ 取遍其所有值(共 n 个)时,乘积 $\sqrt[n]{z_1}\cdot\sqrt[n]{z_2}$ 取遍 $\sqrt[n]{z_1z_2}$ 的所有值.

(3) $\sqrt[n]{z_1z_2}$ 的任意一个值都可以表示为 $\sqrt[n]{z_1}$ 的任意一个值和 $\sqrt[n]{z_2}$ 的一个值的乘积.

【参考文献】

(美)迪克森(L. E. Dickson)著. 黄缘芳译. 代数方程式论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.

(上接124页)

例8 已知 $a=2-\sqrt{3}$,化简求值:$\frac{1-2a+a^2}{a-1}-\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}-\frac{1}{a}$.

解析 原式 $=\frac{(a-1)^2}{a-1}-\frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}-\frac{1}{a}$

$=\frac{(a-1)^2}{a-1}-\frac{|a-1|}{a(a-1)}-\frac{1}{a}$.

$\because a=2-\sqrt{3}<1$,

$\therefore$ 原式 $=\frac{(a-1)^2}{a-1}-\frac{(1-a)}{a(a-1)}-\frac{1}{a}=a-1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=a-1=2-\sqrt{3}-1=1-\sqrt{3}$.

点评 此题关键是抓住 $a=2-\sqrt{3}<1$,将 $\sqrt{(a-1)^2}$ 化简为 $1-a$,否则将会非常容易出错.

3. 没有字母取值范围时需分类讨论

例9 已知 $xy=3$,那么 $x\sqrt{\frac{y}{x}}+y\sqrt{\frac{x}{y}}$ 的值________.

解析 因为 $xy=3$ 且 $\frac{y}{x}\geqslant 0,\frac{x}{y}\geqslant 0$,所以 $x>0,y>0$ 和 $x<0,y<0$ 都符合题意. 需分两种情况讨论,现提供两种不同解法:

解法一 直接化简

①若 $x>0,y>0$,原式 $=x\sqrt{\frac{xy}{x^2}}+y\sqrt{\frac{xy}{y^2}}=x\cdot\frac{\sqrt{xy}}{x}+y\cdot\frac{\sqrt{xy}}{y}=2\sqrt{xy}=2\sqrt{3}$.

②若 $x<0,y<0$,原式 $=x\sqrt{\frac{xy}{x^2}}+y\sqrt{\frac{xy}{y^2}}=x\cdot\frac{\sqrt{xy}}{-x}+y\cdot\frac{\sqrt{xy}}{-y}=-2\sqrt{xy}=-2\sqrt{3}$.

解法二 先平方,再开方.

$$\left(x\sqrt{\frac{y}{x}}+y\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2=\left(x\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2+2\cdot x\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot y\sqrt{\frac{x}{y}}+\left(y\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2=xy+2xy+xy=4xy=12.$$

①若 $x>0,y>0$,则 $x\sqrt{\frac{y}{x}}+y\sqrt{\frac{x}{y}}>0$,原式 $=2\sqrt{3}$.

②若 $x<0,y<0$,则 $x\sqrt{\frac{y}{x}}+y\sqrt{\frac{x}{y}}<0$,原式 $=-2\sqrt{3}$.

所以应填:$\pm 2\sqrt{3}$.

点评 此题条件只告诉我们 x,y 同号,所以必须分两种情况讨论,学生往往只注意第一种情况,从而漏解,所以解题时思维要缜密谨慎.

综上所述,二次根式的有关问题解决中,必须要注意每一条法则所含的字母取值范围,只有正确并熟练地运用这些条件才能确保解题的正确性. 教学时教师应立足基本知识点,善于将题目归类,总结解题方法,让学生熟悉各种题型的解题技巧,同时还要引导学生对错题进行反思和总结,提高解题能力.