线性代数

leip@lzu.edu.cn
兰州大学 数学与统计学院

2017 年 10 月 25 日

第三章　　线性方程组

目录

目录

在第一章 §1.8 我们已经介绍了用行列式解线性方程组的克莱姆法则, 但是这种方法只能适用于方程个数与未知量个数相等, 并且系数矩阵的行列式不等于零的线性方程组. 本章我们将讨论一般线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

研究 (3.1) 的解的存在性、解的个数及解的结构等问题.
在中学数学中已经学过用消元法求解二元、三元一次方程组, 其基本思想就是从已知方程中, 通过加、减消元法, 得到含有较少未知量的方程组, 直至最后得到一个一元一次方程,然后再用代入消元法, 最终求出线性方程组的解. 这种方法也适合于一般的线性方程组, 下面就介绍如何用消元法求解一般线性方程组.
首先看一个具体的例子.

例3.1.1

解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

例3.1.1

解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3=2, \\ 2x_1+3x_2-x_3=3, \\ 2x_1+x_2-x_3=5. \end{cases}$$

解 把第一个方程的-1倍依次加到第二、第三个方程上得

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3=2, \\ x_2+2x_3=1, \\ -x_2+2x_3=3. \end{cases}$$

在新方程组中, 把第二个方程加到第三个方程上, 再用 $\frac{1}{4}$ 乘以第三个方程的两端得

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3=2, \\ x_2+2x_3=1, \\ x_3=1. \end{cases}$$

在新方程组中, 把第三个方程的 -2 倍、3 倍依次加到第二、第一个方程上得

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & & = & 5, \\ & x_2 & & = & -1, \\ & & x_3 & = & 1. \end{cases}$$

在新方程组中, 把第二个方程的 -2 倍加到第一个方程上, 再用 $\dfrac{1}{2}$ 乘以第一个方程得

$$\begin{cases} x_1 & & & = & \dfrac{7}{2}, \\ & x_2 & & = & -1, \\ & & x_3 & = & 1. \end{cases}$$

这样就得到方程组的解 $(\dfrac{7}{2}, -1, 1)^T$.

为方便起见, 我们称增广矩阵是阶梯阵(行简化阶梯阵)的线性方程组为阶梯型(简化阶梯型)方程组.

从上述解题过程可以看出, 用消元法解线性方程组就是对方程组进行初等变换, 把原方程组变成简化阶梯型方程组, 求得的解就是原方程组的解.

正如在第二章第 §2.5 节看到的那样, 初等变换把线性方程组变成同解线性方程组; 对方程组进行初等变换, 相当于对方程组的增广矩阵进行行初等变换. 因此, 用消元法解线性方程组的过程就是对方程组的增广矩阵进行初等行变换化成行简化阶梯阵的过程. 例 3.1.1 的求解过程用矩阵形式可以表示为

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

任意方程组都可以通过适当的初等变换化成简化阶梯型方程组. 因此, 消元法可以适用于一般的线性方程组, 其具体过程为:

1. 写出原方程组的增广矩阵;
2. 用行初等变换把增广矩阵化成阶梯阵(消元过程);
3. 继续施行行初等变换把阶梯阵化成行简化阶梯阵(回代过程);
4. 写出方程组的解.

下面我们介绍如何用消元法求解一般的线性方程组.
为讨论方便起见, 不妨设方程组 (3.1) 经过初等变换所得到的阶梯型方程组为(否则,适当调未知变量的顺序):

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n & = & d_1, \\
\qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n & = & d_2, \\
\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n & = & d_r, \\
0 & = & d_{r+1}, \\
0 & = & 0, \\
 & & \cdots\cdots \\
0 & = & 0.
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

其中 $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, r$. 此时 r 等于方程组 (3.1) 的系数矩阵的秩. (3.2) 中的 “$0 = 0$” 这样的恒等式可能出现, 也可能不出现, 去掉或加上它们不影响 (3.2) 的解.

下面分两种情形讨论 (3.2) 的解的情况.
情形1. (3.2) 中出现 “$0 = d_{r+1}$”, 且 $d_{r+1} \neq 0$. 此时, (3.2) 无解, 从而原方程组 (3.1) 无解.
情形2. (3.2) 中不出现 “$0 = d_{r+1}$” 这样的方程, 其中 $d_{r+1} \neq 0$. 易知, $r \leq n$. 分两种情况讨论.
(1) $r = n$, 这时 (3.2) 具有形式

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n & = & d_1, \\
\qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n & = & d_2, \\
\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n & = & d_n.
\end{cases}
$$

其中 $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 根据克莱姆法则, 方程组 (3.2), 也就是方程组 (3.1) 有唯一的解. 此时, 继续对上述方程组进行初等变换, 直到化成一个简化阶梯型方程组, 求出其唯一解(也可以用克莱姆法则求解).

(2) $r<n$, 这时 (3.2) 具有形式

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+c_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n &= d_1,\\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+c_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n &= d_2,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n &= d_r. \end{cases}$$

其中 $c_{ii}\neq 0$, $i=1,2,\cdots,r$. 把含 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 的项移到等式右端得

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r &= d_1-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n,\\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r &= d_2-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r &= d_r-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n. \end{cases} \tag{3.3}$$

由于 $c_{ii}\neq 0$, $i=1,2,\cdots,r$, 根据克莱姆法则, 任意给定 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 的一组取值, 由 (3.3) 可以唯一的求得一组 $x_1,\cdots,x_r$ 的值, 这样得到了 (3.2), 也就是 (3.1) 的一组解.

把方程组 (3.3) 的对应系数矩阵主元的未知量 $x_1, \cdots, x_r$ 称为其主未知量, 亦称为原方程组 (3.1) 的一组主未知量, 其余的未知量 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 称为 (3.3) 的自由未知量, 亦称为原方程组 (3.1) 的一组自由未知量. 由于自由未知量 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 可以有无穷多组取值, 因此方程组有无穷多解.

一般地, 由方程组 (3.3) 可以把 $x_1, \cdots, x_r$ 表示成 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 的表达式:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + b_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{1n}x_n, \\ x_2 = c_2 + b_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{2n}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = c_n + b_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{rn}x_n, \end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 为自由未知量.

称 (3.4) 为方程组 (3.1) 或 (3.3) 的一般解,即将每个主未知量用常数和自由未知量表示出来.

以上就是用消元法解线性方程组的全过程, 综合起来我们有

定理3.1.1

设线性方程组 (3.1) 经过初等变换化成阶梯型方程组 (3.2). 如果 $d_{r+1} \neq 0$, 那么方程组 (3.1) 无解. 如果 $d_{r+1} = 0$, 那么程组 (3.1) 有解, 此时, 若 $r = n$, 则方程组有唯一解; 若 $r < n$, 则方程组有无穷多解, 这无穷多解可以用一般解 (3.4) 的形式表示, 其中 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 为自由未知量.

目录

上一节介绍了解线性方程组的消元法, 并导出了线性方程组有解的判定定理 3.1.1. 本节我们将借助于矩阵与向量的方法, 揭示线性方程组解的存在性以及解的个数与方程组的系数矩阵及增广矩阵的内在关系, 给定理 3.1.1 一个简洁的表示形式.

对于线性方程组 (3.1), 记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \bar{A}=(A\vdots\beta)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

以及

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

这样方程组 (3.1) 可以改写成矩阵方程

$$AX=\beta,$$

或向量方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta. \tag{3.1}$$

线性方程组 (3.1) 有解的充分必要条件是向量 β 可以表示成向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的线性组合.
用矩阵秩的语言, 方程组 (3.1) 有解的条件可以叙述为:

这样方程组 (3.1) 可以改写成矩阵方程

$$AX = \beta,$$

或向量方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta. \tag{3.1}$$

线性方程组 (3.1) 有解的充分必要条件是向量 β 可以表示成向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的线性组合.
用矩阵秩的语言, 方程组 (3.1) 有解的条件可以叙述为:

定理3.2.1

线性方程组 (3.1) 有解的充分必要条件是其系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩, 即 $r(A) = r(\bar{A})$.

这样方程组 (3.1) 可以改写成矩阵方程

$$AX=\beta,$$

或向量方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta. \tag{3.1}$$

线性方程组 (3.1) 有解的充分必要条件是向量 β 可以表示成向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的线性组合.
用矩阵秩的语言, 方程组 (3.1) 有解的条件可以叙述为:

定理3.2.1

线性方程组 (3.1) 有解的充分必要条件是其系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩, 即 $r(A)=r(\bar{A})$.

证明 必要性. 设方程组 (3.1) 有解, 也就是说, 向量 β 可以被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表出. 因此向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$ 等价, 从而有相同的秩. 所以矩阵 A 与 $\bar{A}$ 有相同的秩.

充分性. 设矩阵 A 与 $\bar{A}$ 有相同的秩, 也就是说, 它们的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ 有相同的秩, 则向量 β 可以被$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出. 所以方程组 $AX = \beta$ 有解.

如果线性方程组 $AX = \beta$ 有解, 也就是说向量 β 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出, 那么

$$\begin{aligned} AX = \beta \text{ 有唯一解} \quad &\Leftrightarrow \quad \beta \text{ 可以被 } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 唯一的线性表出} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 线性无关} \\ &\Leftrightarrow \quad r(A) = n. \end{aligned}$$

于是我们有

充分性. 设矩阵 A 与 $\bar{A}$ 有相同的秩, 也就是说, 它们的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ 有相同的秩, 则向量 β 可以被$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出. 所以方程组 $AX = \beta$ 有解.

如果线性方程组 $AX = \beta$ 有解, 也就是说向量 β 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出, 那么

$$\begin{aligned} AX = \beta \text{ 有唯一解} \quad &\Leftrightarrow \quad \beta \text{ 可以被 } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 唯一的线性表出} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 线性无关} \\ &\Leftrightarrow \quad r(A) = n. \end{aligned}$$

于是我们有

定理3.2.2

设线性方程组 $AX = \beta$ 有解. 则

1. $AX = \beta$ 有唯一解的充分必要条件是 $r(A) = n$;
2. $AX = \beta$ 有无穷多解的充分必要条件是 $r(A) < n$.

☞ 线性方程组解的存在性的判定:

1. $AX=\beta$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow\ r(A)=r(A\vdots\beta)=n$;
2. $AX=\beta$ 有无穷多解 $\Longleftrightarrow\ r(A)=r(A\vdots\beta)<n$;
3. $AX=\beta$ 无解 $\Longleftrightarrow\ r(A)\neq r(A\vdots\beta)\ \Longleftrightarrow\ r(A)=r(A\vdots\beta)-1$.

☞ 线性方程组解的存在性的判定:

1. $AX=\beta$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow \quad r(A)=r(A\vdots\beta)=n$;
2. $AX=\beta$ 有无穷多解 $\Longleftrightarrow \quad r(A)=r(A\vdots\beta)<n$;
3. $AX=\beta$ 无解 $\Longleftrightarrow \quad r(A)\neq r(A\vdots\beta) \Longleftrightarrow \quad r(A)=r(A\vdots\beta)-1$.

1. 齐次线性方程组$AX=0$ 有唯一解(即只有零解) $\Longleftrightarrow \quad r(A)=n$;
2. 齐次线性方程组$AX=0$ 有无穷多解(即有非零解) $\Longleftrightarrow \quad r(A)<n$.

☞ 线性方程组解的存在性的判定:

1. $AX=\beta$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow \quad r(A)=r(A\vdots\beta)=n$;
2. $AX=\beta$ 有无穷多解 $\Longleftrightarrow \quad r(A)=r(A\vdots\beta)<n$;
3. $AX=\beta$ 无解 $\Longleftrightarrow \quad r(A)\neq r(A\vdots\beta) \quad \Longleftrightarrow \quad r(A)=r(A\vdots\beta)-1$.

1. 齐次线性方程组$AX=0$ 有唯一解(即只有零解) $\Longleftrightarrow \quad r(A)=n$;
2. 齐次线性方程组$AX=0$ 有无穷多解(即有非零解) $\Longleftrightarrow \quad r(A)<n$.

1. $AX=\beta$ 有唯一解 $\Rightarrow AX=0$ 有唯一解(即只有零解);
2. $AX=\beta$ 有无穷多解 $\Rightarrow AX=0$ 有无穷多解(即有非零解).
3. $AX=\beta$ 无解 $\Rightarrow AX=0$ 有无穷多解或有唯一解.

定理 3.1.1 和定理 3.2.1 所给出的方程组有解的条件是一致的. 事实上, 用消元法解线性方程组 (3.1) 的第一步就是用行初等变换把增广矩阵 $\bar{A}$ 化成阶梯阵. 这个阶梯阵在适当调整前 n 列的顺序之后具有形式(可能有零行, 也可能没有零行):

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ij} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, r$. 因为把这个阶梯阵的最后一列去掉所得到的矩阵, 就是线性方程组 (3.1) 的系数矩阵 A 经过初等变换所化成的阶梯阵, 因此 $r(A) = r(\bar{A})$ 的充分必要条件是 $d_{r+1} = 0$.

例3.2.1

问a 取何值时, 下面的方程组有解?

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1 \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=a \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1 \end{cases}$$

例3.2.1

问a 取何值时, 下面的方程组有解?

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = a \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$$

解 因为

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & a \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & a-2 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-2a \end{pmatrix},$$

所以, 当且仅当 $4-2a=0$, 即 $a=2$ 时, 方程组的系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩. 此时, 由于系数矩阵的秩等于 $2<4$, 所以方程组有无穷多解. 当且仅当 $a \neq 2$ 时, 系数矩阵的秩与增广矩阵的秩不相等, 方程组无解.

上一节介绍了求解线性方程组的消元法(实际上是初等变换法), 它是求解线性方程组, 特别是数字线性方程组的有效方法. 然而我们在处理文字型线性方程组时, 消元法并不总是有效. 根据克兰姆法则, 我们可以给出求解线性方程组的更具一般性的一个解法, 这个解法具有重要的理论价值.

设线性方程组 (3.1) 有解, 并且 $r(A) = r(\bar{A}) = r$. 则矩阵 A 存在 r 阶子式(当然也是 $\bar{A}$ 的 r 阶子式)不等于零. 不妨设 A 的左上角的 r 阶子式不等于零. 此时 $\bar{A}$ 的前 r 行就构成行向量组的一个极大无关组, 第$r+1, \cdots, m$ 行都可以被前 r 行线性表出. 因此方程组 (3.1) 与方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \tag{3.2}$$

同解.

当 $r=n$ 时, 方程组 (3.2) 有唯一解, 也就是 (3.1) 有唯一解. 用克莱姆法则可以求出唯一的解.
当时 $r<n$ 时, 将方程组 (3.2) 改写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n, \end{cases}$$

并把它视为 $x_1,\cdots,x_r$ 的一个方程组, 其系数行列式不等于零. 根据克兰姆法则, 可以解出$x_1,\ldots,x_r$:

$$\begin{cases} x_1=d_1'+c_{1,r+1}'x_{r+1}+\cdots+c_{1n}'x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=d_r'+c_{r,r+1}'x_{r+1}+\cdots+c_{rn}'x_n \end{cases}$$

其中 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 是自由未知量. 这就是方程组 (3.1) 的一般解.

本节主要内容1

- 线性方程组 $AX=\beta$ 有解的等价条件

  设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为系数矩阵 A 的列向量表示, 则下面几条等价:

  1. $AX=\beta$ 有解;
  2. 向量 β 可以被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出;
  3. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 等价;
  4. $r(A)=r(A\vdots\beta)$.

- 线性方程组的解法:

  1. 克莱姆法则. 仅适用于系数矩阵为方阵且行列式不为零(有唯一解)的情况. 计算量较大,主要用于低阶方程求解和理论证明.
  2. 消元法. 适用于任何情况,计算量较小,是比较有效的求解方法.
  3. 初等(行)变换法. 本质上与消元法相同,适用于任何情况,计算量较小,是比较有效的通用方法. 另外,若 $r(A)$ 已知,则还可利用行等价简化阶梯阵进行求解或理论证明.

本节主要内容2

线性方程组解的存在性的判定:

1. $AX=\beta$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow\ r(A)=r(A\vdots\beta)=n$;
2. $AX=\beta$ 有无穷多解 $\Longleftrightarrow\ r(A)=r(A\vdots\beta)<n$;
3. $AX=\beta$ 无解 $\Longleftrightarrow\ r(A)\neq r(A\vdots\beta)\ \Longleftrightarrow\ r(A)=r(A\vdots\beta)-1$.

1. 齐次线性方程组$AX=0$ 有唯一解(即只有零解) $\Longleftrightarrow\ r(A)=n$;
2. 齐次线性方程组$AX=0$ 有无穷多解(即有非零解) $\Longleftrightarrow\ r(A)<n$.

1. $AX=\beta$ 有唯一解 $\Rightarrow AX=0$ 有唯一解(即只有零解);
2. $AX=\beta$ 有无穷多解 $\Rightarrow AX=0$ 有无穷多解(即有非零解).
3. $AX=\beta$ 无解 $\Rightarrow AX=0$ 有无穷多解或有唯一解.

本节主要内容3

- 系数矩阵与增广矩阵的秩:
  1. $0 \le r(A) \le \min\{m, n\}$;
  2. $0 \le r(A \vdots \beta) \le \min\{m, n+1\}$;
  3. $r(A) \le r(A \vdots \beta) \le r(A) + 1$;
  4. $r(A) = m \Rightarrow r(A \vdots \beta) = m \Rightarrow AX = \beta$有解.
- 系数矩阵 A 为方阵,即 $m = n$ 时:
  1. $AX = 0$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow |A| \ne 0 \Longleftrightarrow AX = \beta$ 有唯一解;
  2. $AX = 0$ 有无穷多解 $\Longleftrightarrow |A| = 0 \Longleftrightarrow AX = \beta$ 有无穷多解或无解;
- 系数矩阵 A 行数少于列数,即 $m < n$ 时:
  1. $AX = 0$ 必有无穷多解,即解不唯一,有非零解 $(r(A) \le m < n)$;
  2. $AX = \beta$ 必不会有唯一解,即要么有无穷多解,要么无解.

目录

在解决了线性方程组解的存在性和解的个数问题之后, 本节我们进一步讨论线性方程组解的结构问题. 在方程组的解是唯一的情况下, 只需要把唯一解给出来即可, 当然没有什么结构问题. 在有无穷多个解的情况下, 所谓解的结构问题就是解与解的关系问题以及如何表示这无穷多个解的问题. 以下除非特别说明, 总假设所讨论的方程组都是有解的.

为了刻画一般线性方程组解的结构, 我们需要讨论其解之间的关系, 为此先考虑最简单的情况.

我们知道一个平面 π 的方程

$$ax+by+cz=d\ (a,b,c\text{ 不全为 }0) \tag{3.1}$$

是最简单的三元线性方程组, 平面 π 上的点的坐标就是方程组 (3.1) 的解. 反之, 以方程组 (3.1) 的解为坐标的点都在平面 π 上. 因此平面 π 上的所有点(坐标)构成了方程组 (3.1) 的解集合. 设方程组 (3.1) 的导出组

$$ax+by+cz=0 \tag{3.2}$$

对应的平面为 π_0. 则 π_0 过原点且与平面 π 平行(如图 1).

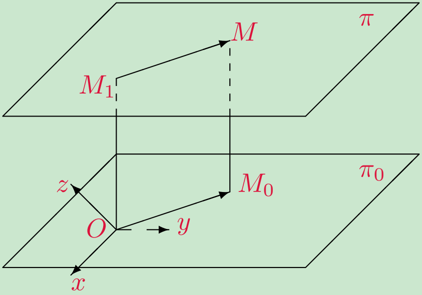
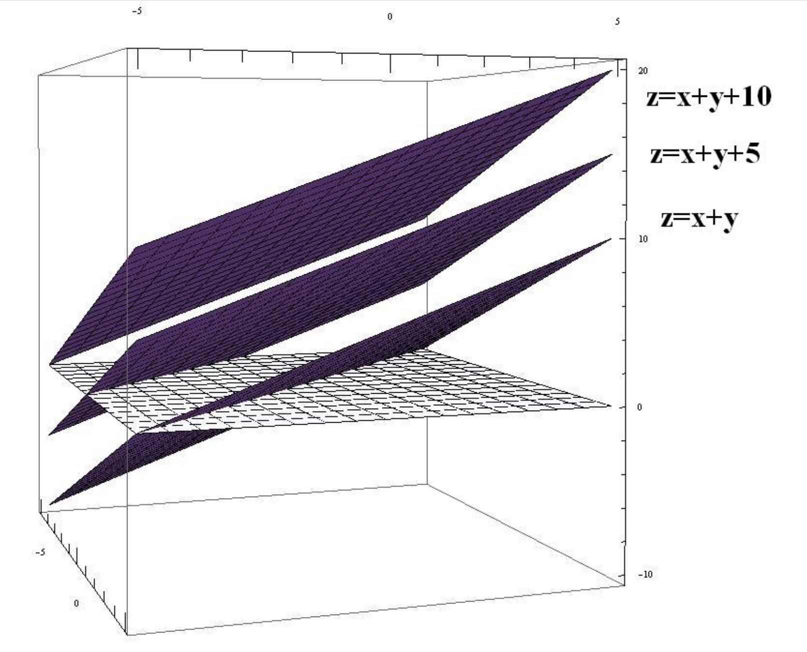


图1


-5
0
5
20
10
0
-10
-5
0
z=x+y+10
z=x+y+5
z=x+y

从图 1 可以看出: 若 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 π 上一点. 则
(1) 对于 π_0 上任意一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,
点 $M(x_1+x_0,y_1+y_0,z_1+z_0)$ 在 π 上;
(2) 对于 π 上任意一点 $M(x,y,z)$, 存在 π_0 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 使
得 $(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+(x_0,y_0,z_0)$.
简言之, $\pi=\pi_0+(x_1,y_1,z_1)$.

❈ 用方程组的语言表述上面的事实就是: 方程组 $AX=\beta$ 的一个解与其导出组 $AX=0$ 的任意解之和都是方程组 $AX=\beta$ 的解. 反之, $AX=\beta$ 的任意解都等于其一个特解与其导出组 $AX=0$ 的某一个解之和.

对于直线(二元线性方程组)有类似的结果. 因此, 我们有理由期望这一结果对一般线性方程组也成立, 事实正是如此.

给定线性方程组
$$AX=\beta, \tag{3.3}$$
其导出组为
$$AX=0. \tag{3.4}$$

定理3.3.1

1. 方程组 $AX=\beta$ 的两个解 γ_1,γ_2 的差 $\gamma_1-\gamma_2$ 是其导出组 $AX=0$ 的解;
2. 方程组 $AX=\beta$ 的任意一个解 γ 与其导出组 $AX=0$ 的任意一个解 η 之和 $\gamma+\eta$ 仍是 $AX=\beta$ 的解;
3. 如果 γ_0 是方程组 $AX=\beta$ 的一个特解 (特定的解或特殊的解), 那么方程组 $AX=\beta$ 的任意一个解 γ 都可以表示成
$$\gamma=\gamma_0+\eta, \tag{3.5}$$
其中, η 是导出组 $AX=0$ 的某一个解. 也就是说, 对于方程组 $AX=\beta$ 的特解 γ_0, 当 η 取遍其导出组的所有解时, (3.5) 就给出了方程组 $AX=\beta$ 的全部解.

证明 (1) 设γ_1, γ_2 是 $AX=\beta$ 的任意两个解, 即

$$A\gamma_1=\beta,\ A\gamma_2=\beta.$$

则

$$A(\gamma_1-\gamma_2)=A\gamma_1-A\gamma_2=\beta-\beta=0.$$

因此 $\gamma_1-\gamma_2$ 是 $AX=0$ 的解.
(2) 设 γ_0 是 $AX=\beta$ 的一个解, η 是 $AX=0$ 的一个解, 即,

$$A\gamma_0=\beta,\ A\eta=0.$$

则

$$A(\gamma_0+\eta)=A\gamma_0+A\eta=\beta+0=\beta.$$

因此 $\gamma_0+\eta$ 是 $AX=\beta$ 的解.
(3) 设 γ_0 是 $AX=\beta$ 的一个特解, γ 是 $AX=\beta$ 的任意一个解. 则
由 (1) 知 $\eta=\gamma-\gamma_0$ 是 $AX=0$ 的解, 并且

$$\gamma=\gamma_0+\eta.$$

据 (2), 当 η 取遍 $AX=0$ 的所有解时, (3.5) 就给出了 $AX=\beta$ 的全部解.

推论3.3.2

设方程组 $AX=\beta$ 有解. 则它有唯一解的充分必要条件是其导出组 $AX=0$ 只有零解.

推论3.3.2

设方程组 $AX=\beta$ 有解. 则它有唯一解的充分必要条件是其导出组 $AX=0$ 只有零解.

证明 必要性. 设 γ 是 $AX=\beta$ 的一个解, η 是 $AX=0$ 的任一解. 则由定理 3.3.1 知 $\gamma+\eta$ 是 $AX=\beta$ 的一个解. 由于 $AX=\beta$ 的解是唯一的, 所以 $\gamma+\eta=\gamma$, 即, $\eta=0$, 从而 $AX=0$ 只有零解.
充分性. 设 γ_1,γ_2 是 $AX=\beta$ 的任意两个解. 则由定理 3.3.1知 $\gamma_1-\gamma_2$ 是 $AX=0$的解. 因为 $AX=0$ 只有零解, 所以 $\gamma_1-\gamma_2=0$, 即, $\gamma_1=\gamma_2$, 从而 $AX=\beta$ 的解唯一.

定理 3.3.1 告诉我们, 为了求出方程组 $AX=\beta$ 的所有解, 只需要求出其一个特解以及其导出组 $AX=0$ 的所有解. 因此要给出一般线性方程组的解的结构表示, 只需要给出其一个特解以及其导出组的解的结构表示. 接下来我们就考虑齐次线性方程组的解的结构问题.

受几何的启发, 对于齐次线性方程组 $AX = 0$, 我们有

定理3.3.3

设 η_1, η_2 是方程组 $AX = 0$ 的任意两个解, k_1, k_2 是任意两个数. 则$\eta_1 + \eta_2$ 和 $k_1\eta_1$ 仍是方程组 $AX = 0$ 的解. 或等价地, $k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ 仍是方程组 $AX = 0$ 的解, 即齐次线性方程组的任意两个解的任意线性组合仍是其解.

受几何的启发, 对于齐次线性方程组 $AX=0$, 我们有

定理3.3.3

设 η_1, η_2 是方程组 $AX=0$ 的任意两个解, k_1, k_2 是任意两个数. 则$\eta_1+\eta_2$ 和 $k_1\eta_1$ 仍是方程组 $AX=0$ 的解. 或等价地, $k_1\eta_1+k_2\eta_2$ 仍是方程组 $AX=0$ 的解, 即齐次线性方程组的任意两个解的任意线性组合仍是其解.

证明 设 η_1, η_2 是 $AX=0$ 的任意两个解, 即,

$$A\eta_1=0,\ A\eta_2=0.$$

则对任意数 k_1, k_2,

$$A(k_1\eta_1+k_2\eta_2)=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2=0.$$

因此 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$ 是 $AX=0$ 的解.

设 A 是数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵. 则由定理 3.3.2 知,齐次线性方程组 $AX=0$ 的解向量是 F^n 的一个子集合 W, W 关于向量的线性运算封闭. 如果 W 存在极大线性无关组, 那么这个极大线性无关组的所有线性组合就给出了齐次方程组的全部解.

为此,我们引入下面的定义.

定义3.3.4

齐次线性方程组 $AX=0$ 的一组解 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 称为其一个基础解系, 如果

1. $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关;
2. $AX=0$ 的任意一个解都能被 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 的线性表出.

为此,我们引入下面的定义.

定义3.3.4

齐次线性方程组 $AX=0$ 的一组解 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 称为其一个基础解系, 如果

1. $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关;
2. $AX=0$ 的任意一个解都能被 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 的线性表出.

- 齐次线性方程组的一个基础解系就是其解集合的一个极大线性无关组,
- 任何一个与某基础解系等价的线性无关(解)向量组都是其基础解系,
- 齐次线性方程组的基础解系不唯一.

定理3.3.5

设齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解. 则它存在有基础解系, 并且基础解系所含解的个数等于 $n-r$, 其中 n 等于矩阵 A 的列数, $r=r(A)$. (以下将看到,$n-r$也就是自由未知量的个数).

证明 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵且 $r(A)=r$. 不失一般性假设 A 的左上角的 r 阶子式不等于零. 于是方程组 $AX=0$ 与下面的方程组同解:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2r}x_r=-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n, \end{cases} \tag{3.6}$$

如果 $r=n$, 那么方程组没有自由未知量, 方程组 (3.6) 的右端全为零. 这时方程组只有零解, 当然不存在基础解系. 以下设 $r<n$.

在方程组 (3.6) 中, $x_1,\cdots,x_r$ 是一组主未知量, $x_{r+1},\cdots,x_n$ 是一组自由未知量. 根据克莱姆法则, 对于自由未知量 $(x_{r+1},\cdots,x_n)$ 的任意一组取值 $(c_{r+1},\cdots,c_n)$, 代入到 (3.6) 中, 就唯一的决定了方程组 (3.6) 的一个解. 反之, (3.6) 的任一解都可以如此得到. 因此方程组 $AX=0$ 的任意两个解, 只要自由未知量的值完全相同, 这两个解就完全相等. 特别地, 如果 (3.6) 的一个解对应的自由未知量 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 的值都等于零, 那么这个解一定就是零解.

在 (3.6) 中我们分别用 $n-r$ 组数

$$(1,0,\cdots,0),\quad (0,1,\cdots,0),\quad \cdots,\quad (0,0,\cdots,1)$$

替换自由未知量 $(x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n)$, 就得到方程组 $AX=0$ 的 $n-r$ 个解:

$$\begin{cases} \eta_1=(c_{11},\cdots,c_{1r},1,0,\cdots,0)^T, \\ \eta_2=(c_{21},\cdots,c_{2r},0,1,\cdots,0)^T, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_{n-r}=(c_{n-r,1},\cdots,c_{n-r,r},0,0,\cdots,1)^T. \end{cases} \tag{3.7}$$

下面我们证明 (3.7) 就是 (3.6) 一个基础解系. 首先,比较它们的最后 $n-r$ 个分量, 得 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性无关.
再证方程组 (3.6) 的任一个解都可以被 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性表出. 设

$$\eta=(c_1,\cdots,c_r,c_{r+1},\cdots,c_n) \tag{3.8}$$

是 (3.6) 一个解. 由于 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 是 (3.6) 的解, 所以线性组合

$$c_{r+1}\eta_1+c_{r+2}\eta_2+\cdots+c_n\eta_{n-r} \tag{3.9}$$

也是 (3.6) 的一个解.

比较 (3.9) 和 (3.8) 最后的 $n-r$ 个分量得知它们对应的自由未知量有完全相同的值, 从而这两个解相等, 即

$$\eta = c_{r+1}\eta_1 + c_{r+2}\eta_2 + \cdots + c_n\eta_{n-r},$$

这就是说, 任意一个解 η 都能表示成 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 的线性组合.
综上所述, 我们就证明了 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$ 确为方程组 (3.6) 的一个基础解系, 从而也是方程组 $AX=0$ 的一个基础解系. 于是方程组 $AX=0$ 存在基础解系含有 $n-r$ 个解. 因为 $AX=0$ 的基础解系就是其解集合的极大线性无关组, 所以 $AX=0$ 的任意基础解系都含有 $n-r$ 个解.

从定理 3.3.3 的证明可以看出, 齐次线性方程组的基础解系含向量的个数等于该方程组的自由未知量的个数. 根据定理 3.3.3, 如果一个齐次线性方程组存在非零解, 那么它就存在基础解系, 并且其任意解都可以用基础解系的线性组合来给出. 这样我们就完全解决了齐次线性方程组的解的结构问题.

❋ 设$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是齐次方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系, 则其所有解为

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \ldots + k_{n-r}\eta_{n-r}$$

的形式, 其中 $k_1, \cdots, k_{n-r}$ 是任意常数. 这种用基础解系的任意线性组合表示齐次方程组的所有解的形式, 称为齐次方程组的通解.

由此根据定理 3.3.1 我们就可以给出一般方程组的通解的结构表示.

定理3.3.6

设方程组 $AX=\beta$ 有解. 如果 γ_0 是 $AX=\beta$的一个特解, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 是其导出组 $AX=0$ 的一个基础解系, 那么 $AX=\beta$ 的通解可以表示成

$$\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}$$

的形式, 其中 $k_1,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.

定理3.3.6

设方程组 $AX=\beta$ 有解. 如果 γ_0 是 $AX=\beta$的一个特解, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 是其导出组 $AX=0$ 的一个基础解系, 那么 $AX=\beta$ 的通解可以表示成

$$\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}$$

的形式, 其中 $k_1,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.

在实际求解线性方程组时, 利用初等变换可以简化上述定理 3.3.3 的证明中的求解过程, 并且可以把求非齐次方程组的特解与求齐次方程组的基础解系合并进行. 具体过程是：(假设方程组 $AX=\beta$ 有解)

(1) 利用行初等变换把矩阵 $\overline{A}=(A\vdots\beta)$ 化成行简化阶梯阵 $\overline{B}=(B\vdots\gamma)$,
(2) 求出 $BX=\gamma$ 的一个特解 γ_0 以及 $BX=0$ 的一个基础解系 $\eta_1,\cdots,\eta_s$,其中 $s=n-r(A)=n-r(B)$,
(3) $\gamma_0+k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s$, 其中 $k_1,\cdots,k_s$ 是任意常数, 就是方程组 $AX=\beta$ 的全部解.

例3.3.1

求下面的齐次线性方程组的一个基础解系.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 0, \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 13x_3 & + & 10x_4 & - & 7x_5 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 8x_4 & + & 2x_5 & = & 0, \end{array}\right.$$

例3.3.1

求下面的齐次线性方程组的一个基础解系.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 10x_4 - 7x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0, \end{cases}$$

解 因为

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 & -4 \\ 3 & -3 & 13 & 10 & -7 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{11}{3}x_3 - \frac{11}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5, \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{5}{3}x_5. \end{cases}$$

其中 x_3, x_4, x_5 为自由未知量.

由于方程组系数矩阵的秩等于 2, 因此其基础解系含 3 个解向量.
令 (x_3, x_4, x_5) 分别取 $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$ 代入到一般解中可得到方程组的三个解:

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

η_1, η_2, η_3 就是方程组的一个基础解系. 因此方程组的通解为:

$$\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3,$$

其中 k_1, k_2, k_3 是任意常数. (容易看出方程组的通解与一般解是等价的).

例3.3.2

求线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \end{cases}$$

的通解.

例3.3.2

求线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \end{cases}$$

的通解.

解 因为

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以方程组的系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩等于 3, 方程组有解, 并且原方程组与方程组

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5 = -\frac{1}{2}, \\ x_3 + 4x_5 = 3, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

同解. 在上面的方程组中令(自由未知量) $x_2 = 0, x_5 = 0$ 解的其一个特解 $\gamma_0 = (-\frac{1}{2}, 0, 3, 0, 0)^T$. 方程组的导出组的基础解系含有 2 个向量, 解得其一个基础解系为

$$\eta_1 = (1, 2, 0, 0, 0)^T, \ \ \eta_2 = (1, 0, -8, 0, 2)^T.$$

于是方程组的通解为

$$(-\frac{1}{2}, 0, 3, 0, 0)^T + k_1(1, 2, 0, 0, 0)^T + k_2(1, 0, -8, 0, 2)^T,$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

例3.3.3

讨论 λ 取什么值时, 下述方程组无解？有解？有唯一解？在有解的情况下求出其全部解.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

例3.3.3

讨论 λ 取什么值时, 下述方程组无解？有解？有唯一解？在有解的情况下求出其全部解.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

解 方程组的方程的个数等于未知量的个数, 可以用两种方法求解.

方法一. 因为

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\lambda \neq 1, -2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\lambda + 2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{\lambda + 2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{\lambda + 2} \end{pmatrix}$$

所以 (1) 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, $r(A) = r(\overline{A}) = 3$, 方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\lambda+2} \\ x_2 = \dfrac{1}{\lambda+2} \\ x_3 = \dfrac{1}{\lambda+2} \end{cases}$$

.

(2) 当 $\lambda = -2$ 时, $r(A) = 2 \neq 3 = r(\overline{A})$, 方程组无解.
(3) 当 $\lambda = 1$ 时, $r(A) = r(\overline{A}) = 1$, 方程组有无穷多解, 一般解为

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3$$

其中 x_2, x_3 为自由未知量.
方法二. 因为

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

所以 (1) 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 方程组有唯一解, 其解见方法一.

(2) 当 $\lambda=-2$ 时, 利用矩阵的初等变换可以求得 $r(A)=2$, $r(\overline{A})=3$, 方程组无解.
(3) 当 $\lambda=1$ 时, 容易看出 $r(A)=r(\overline{A})=1$, 方程组有无穷多解. 此时原方程组与方程组

$$x_1+x_2+x_3=1$$

同解, 后者的一个特解 $\gamma_0=(1,0,0)$, 导出组的一个基础解系为

$$\eta_1=(-1,1,0)^T,\quad \eta_2=(-1,0,1)^T.$$

因此原方程组的通解为

$$\gamma=(1,0,0)^T+k_1(-1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.
最后我们利用方程组的理论解决一个关于向量的线性表出的问题.

例3.3.4

设有三维列向量

$$\alpha_1 = (a,1,1)^T, \alpha_2 = (1,a,1)^T, \alpha_3 = (1,2,2)^T, \beta = (1,a,2)^T.$$

问 a 取何值时，β 可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？可以唯一线性表出？不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？

例3.3.4

设有三维列向量

$$\alpha_1=(a,1,1)^T,\alpha_2=(1,a,1)^T,\alpha_3=(1,2,2)^T,\beta=(1,a,2)^T.$$

问 a 取何值时，β 可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？可以唯一线性表出？不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？

解 β 能否被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出等价于方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta \tag{3.10}$$

是否有解. 因为

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 2 & a\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2\\ 1 & a & 2 & a\\ a & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & a-1 & 0 & a-2\\ 0 & 0 & 1-2a & -1-a\end{pmatrix},$$

所以当 $a\neq 1$ 且 $a\neq\dfrac{1}{2}$ 时，方程组 (3.9) 有唯一的解，因此 β 可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表出.

当 $a=1$ 或 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，方程组 (3.9) 的系数矩阵的秩等于 2，增广矩阵的秩等于 3，方程组无解，所以 β 不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

本节主要内容1

- 齐次线性方程组 $AX=0$ 的解集合关于向量的加法和数乘封闭.

  设 η_1, η_2 是方程组 $AX=0$ 的任意两个解, k_1, k_2 是任意两个数. 则$\eta_1+\eta_2$ 和 $k_1\eta_1$ 仍是方程组 $AX=0$ 的解, 或等价地, $k_1\eta_1+k_2\eta_2$ 仍是方程组 $AX=0$ 的解. 换言之, 齐次线性方程组的任意有限个解的任意线性组合仍是其解.

- 设 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_t$ 是线性方程组 $AX=\beta$ 的 t 个解,且 $\beta \neq 0$. 则对 t 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_t$

$$\sum_{i=1}^{t} k_i\gamma_i$$

  也是 $AX=\beta$ 的解当且仅当

$$\sum_{i=1}^{t} k_i = 1.$$

本节主要内容2

- 齐次和非齐次线性方程组解之间的关系
  1. 方程组 $AX=\beta$ 的两个解 γ_1, γ_2 的差 $\gamma_1-\gamma_2$ 是其导出组 $AX=0$ 的解;
  2. 方程组 $AX=\beta$ 的任意一个解 γ 与其导出组 $AX=0$ 的任意一个解 η 之和 $\gamma+\eta$ 仍是 $AX=\beta$ 的解;
  3. 如果 γ_0 是方程组 $AX=\beta$ 的一个特解, 那么方程组 $AX=\beta$ 的任意一个解 γ 都可以表示成 $\gamma=\gamma_0+\eta$,其中η 是导出组 $AX=0$ 的某一个解.
- 齐次线性方程组的一个基础解系就是其解集合的一个极大线性无关组.
- 设齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解. 则它有基础解系, 并且基础解系所含解的个数和自由未知量的个数相等, 都等于 $n-r$, 其中 n 为矩阵 A 的列数或未知数的个数, $r=r(A)$ 也等于独立方程的个数.

本节主要内容3

- 设$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系, 则其通解为

$$\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \ldots + k_{n-r}\eta_{n-r},$$

  其中 $k_1, \cdots, k_{n-r}$ 是任意常数,$r = r(A)$.

- 非齐次线性方程组的通解等于其一个特解加上其导出组的通解.

  设 γ_0 是 $AX=\beta$的一个特解, 而 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是其导出组 $AX=0$ 的一个基础解系, 那么 $AX=\beta$ 的通解为

$$\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \ldots + k_{n-r}\eta_{n-r}$$

  的形式, 其中 $k_1, \cdots, k_{n-r}$ 是任意常数.

本节主要内容4

- 求解非齐次线性方程组 $AX=\beta$:
  1. 求特解的方法：只需在 $AX=\beta$ 中将自由变量任取一组值,最简单的如 $(0,0,\cdots,0)$；
  2. 求通解的方法: 只需在 $AX=0$ 中将自由变量任取 $n-r(A)$ 组数,使得它们构成的向量组是线性无关的, 最简单的如取 $n-r(A)$ 维基本行向量组:

$$(1,0,0,\cdots,0,0),(0,1,0,\cdots,0,0),\cdots,(0,0,0,\cdots,0,1);$$

本节主要内容5

- 关于未定元 x 的实系数多项式

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

有因式 $x-x_0$ 当且仅当 $P(x_0)=0$.

- 有理系数多项式方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

可能的有理根只能为

$$x=\pm\frac{d}{c},$$

其中 d,c 分别为 a_0 和 a_n 的正因子.

- 分解(有理)因式的方法: 试商法.

目录

1. 矩阵秩的定义

设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$,A中非零子式的最大阶数称为A的秩,记为$r(A)$或r
一个向量组的所有极大无关组都含有相同个数的向量,这个数称为是该向量组的秩.

矩阵A秩的等价定义:

1. A中非零子式的最大阶数;
2. A的行向量组的秩,即行空间的维数,又称行秩;
3. A的列向量组的秩,即列空间的维数,又称列秩;
4. 线性方程组$Ax=0$中独立方程的个数.

特别

1. 若$r(A)=m=n$,则称方阵A为满秩阵;
2. 若$r(A)=n$,则称矩阵A为列满秩阵;
3. 若$r(A)=m$,则称矩阵A为行满秩阵.

2. 矩阵秩的性质设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,
   1. 矩阵A的秩$r(A)\geq r\Leftrightarrow A$中有一个$r$阶子式不为0;
   2. 矩阵A的秩$r(A)\leq r\Leftrightarrow A$中的所有$r+1$阶子式(若存在)都等于0;
   3. 矩阵A的秩$r(A)=r\Leftrightarrow A$中有一个r阶子式不为0,且所有$r+1$阶子式(若存在)都等于0;
   4. $0\leq r(A)\leq \min\{m,n\}$;
   5. $r(A^T)=r(A)$;
   6. $r(A)=0\Leftrightarrow A=0$;
   7. 若S,T分别为m阶n和可逆阵,则$r(SA)=r(AT)=r(SAT)=r(A)$;
   8. 初等变换不改变矩阵的秩;且矩阵的初等行(列)变换不改变其列(行)向量组的线性关系;
   9. $r(A)=r\Leftrightarrow$ 存在m阶可逆阵S和n和可逆阵T,使

      $$SAT=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

      (称为矩阵A的等价标准形).
   10. 两个同型矩阵A,B等价$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$;

11. $r(kA) = \begin{cases} r(A), & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$, 特别, $r(-A) = r(A)$;
12. $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$;
13. 设B为$n \times l$阵, 则

$$\begin{aligned} r(AB) &\leq \min\{r(A), r(B)\}, \\ r(AB) &\geq r(A) + r(B) - n, \end{aligned}$$

特别,当$AB = 0$时, $r(A) + r(B) \leq n$;
14. $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$;
15. $r\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$;
16. $r((A, B)) \leq r(A) + r(B)$;
17. 若A列满秩,则$r(AB) = r(B)$,若B行满秩,则$r(AB) = r(A)$;
18. ;

3. 矩阵秩的求法或证法

   1. 初等变换法. 将矩阵A通过初等变换(行、列可混用)化为阶梯矩阵B,则$r(A)$等于阶梯阵B的非零行的数目;
   2. 子式法. $r(A)$是A中非零子式的最大阶数;
   3. 解线性方程组法. 利用 $r(A)=n-s$,其中 n 为未知变元的个数,s 为自由变元的个数.
   4. 综合法. 综合应用初等变换、子式,甚至向量组的秩等方法.

1. 设矩阵A是$m\times n$阵, B是$m\times l$阵,证明

$$\max\{r(A),r(B)\}\leq r((A,B))\leq r(A)+r(B).$$

证明: 设矩阵A,B的列向量表示分别是: $A=(\alpha_1\cdots\alpha_n),B=(\beta_1\cdots\beta_l)$. 并设这两个列向量组的极大线性无关级分别为$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s}$和
其中, $s=r(A),t=r(B)$.
考察$A,B,(A,B)$的列向量组有: 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\cdots,\beta_l$ 是向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\ \beta_1,\cdots,\beta_l$的部分向量组,且向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\ \beta_1,\cdots,$
价.
取这些向量组的秩有:

$$r(A),r(B)\leq r((A,B))\leq s+t=r(A)+r(B).$$

考察$A,B,(A,B)$的列空间有:

$$[\alpha_1,\cdots,\alpha_n],[\beta_1,\cdots,\beta_l]\subseteq[\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\ \beta_1,\cdots,\beta_l]=[\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s},\beta_{j_1}$$

取这些空间的维数有:

$$r(A), r(B) \leq r((A, B)) \leq s+t = r(A)+r(B).$$

2. 设矩阵A, B都是$m\times n$阵,证明

$$r(A\pm B)\leq r(A)+r(B).$$

证法(一): 设矩阵A, B的列向量表示分别是: $A=(\alpha_1\cdots\alpha_n), B=(\beta_1\cdots\beta_l)$. 并设这两个列向量组的极大线性无关组分别为$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s}$和
其中, $s=r(A), t=r(B)$.
考察$A, B, A+B$的列空间有:

$$[\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n]\subseteq[\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\ \beta_1,\cdots,\beta_l]=[\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s},\beta_{j_1},\cdots$$

取这些空间的维数有:

$$r(A+B)\leq s+t=r(A)+r(B),$$

取B为$-B$即得

$$r(A-B)\leq r(A)+r(-B)=r(A)+r(B),$$

证法(二): 首先,设$r(A)=s, r(B)=t$,则经初等变换有

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_{s+t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此,

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} I_{s+t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = s+t = r(A)+r(B),$$

再由分块矩阵的乘法可得

$$A+B = (A \quad B)\begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix} = (I_m \quad I_m)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix},$$

因为矩阵乘积的秩不大于每一个因子的秩,所以

$$r(A+B) \leq r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A)+r(B).$$

证法(三): 对分块矩阵做初等变换得

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix},$$

注意到$A+B$是上述分块矩阵的子块,而子块的秩不会大于该矩阵的秩,所以,

$$r(A+B) \le r\begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A)+r(B).$$

3. 设矩阵A为$m\times n$阵,B为$n\times m$阵,且$m>n$, 证明$|AB|=0$.

证法(一): 通过添加0将A,B都扩充为m阶方阵:

$$C=(A\quad 0)_{m\times m},\ D=\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix}_{m\times m},$$

则由分块矩阵的乘法得: $CD=AB$, 因此

$$|AB|=|CD|=|C||D|=0\times 0=0.$$

证法(二): 因为AB是m阶方阵,所以要证$|AB|=0$,只需证$r(AB)<m$.

由于

$$r(A),r(B)\le\min\{m,n\}=n,$$

所以

$$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}=n<m.$$

4. 矩阵A为$m\times n$阵,B为$n\times l$阵,证明

$$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n.$$

证法一: 对分块矩阵做初等变换,得

$$r\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} I & -B \\ A & 0 \end{pmatrix},$$

而

$$r\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} = n+r(AB),$$

$$r\begin{pmatrix} I & -B \\ A & 0 \end{pmatrix} \geq r(A)+r(-B) = r(A)+r(B),$$

所以

$$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n.$$

证法二: 设$r(A)=r$,则存在可逆阵S和T,使

$$SAT=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故

$$SAB=SATT^{-1}B=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}B=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}C$$
$$=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $C=T^{-1}B=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$,$C_1$ 为 C 的前 r 行.

所以

$$r(AB)=r(SAB)=r\begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix}=r(C_1)\geq r(C)-(n-r)$$
$$=r+r(C)-n=r(A)+r(B)-n.$$

5. 矩阵A为$m\times n$阵,B为$n\times l$阵,若$AB=0$,证明

$$r(A)+r(B)\le n.$$

证法一: 由$r(AB)=0$及矩阵乘积的秩的不等式:

$$r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$$

即得.

证法二: 利用线性方程组的结论: $dim(N(A))=n-r(A)$, 其中 $N(A)=\{X\in F^n|AX=0\}$.

记矩阵B的列向量表示为$(\beta_1\cdots\beta_l)$.

由$AB=0$知,B的所有列 β_i 都是$AX=0$的解,

故$R(B)=[\beta_1,\cdots,\beta_l]\subseteq N(A)$.

因此

$$r(B)=dim(R(B))\le dim(N(A))=n-r(A),$$

即

$$r(A)+r(B)\le n.$$

6. 设A是n方阵($n \geq 2$),证明:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1. \end{cases}$$

证明: (1)当$r(A) = n$时, 矩阵A可逆,从而$|A| \neq 0$, 在等式$AA^* = |A|I$两边取行列式可得

$$|A| \cdot |A^*| = |AA^*| = \big||A|I\big| = |A|^n,$$

因为$|A| \neq 0$,所以$|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$,故$r(A^*) = n$.
(2)当$r(A) = n-1$时, A中至少有一个$n-1$阶子式不为0,那么A^*中至少有一个元素不为0,所以$r(A^*) \geq 1$.

另一方面,由$r(A)=n-1$知$|A|=0$,从而

$$AA^*=|A|I=0,$$

根据秩的性质(即若n阶矩阵A,B满足$AB=0$,则$r(A)+r(B)\le n$)知

$$r(A^*)\le n-r(A)=1,$$

因此,$r(A^*)=1$.

(3)当$r(A)=n-1$时, A的所有$n-1$阶子式全为0,因此$A^*=0$,从而$r(A^*)=0$.

综(1),(2),(3)结论得证.

7. 设p个n阶方阵之积为0,即$A_1A_2\dots A_p=0$,证明:

$$r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_p)\le(p-1)n.$$

证明: 由矩阵乘积的秩的性质,得

$$\begin{aligned}0&=r(A_1A_2\cdots A_p)\\&\ge r(A_1)+r(A_2\cdots A_p)-n\\&\ge r(A_1)+r(A_2)+r(A_3\cdots A_p)-2n\\&\ge r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_p)-(p-1)n.\end{aligned}$$

所以, $r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_p)\le(p-1)n$.

8. 设n阶矩阵A满足$A^2 = I$,证明: $r(I+A)+r(I-A)=n$.

证法一: 由于

$$(I+A)(I-A) = I - A^2 = 0,$$

故

$$r(I+A)+r(I-A) \le n.$$

又

$$n = r(2I) = r(I+A+I-A) \le r(I+A)+r(I-A).$$

所以

$$r(I+A)+r(I-A) = n.$$

证法二: 设$I-A$的列向量表示为

$$I-A=(\beta_1\cdots\beta_n).$$

由于

$$(I+A)(I-A)=I-A^2=0,$$

故$I-A$的所有列β_i都是线性方程组

$$(I+A)x=0$$

的解,即

$$R(I-A)=[\beta_1,\cdots,\beta_n]\subseteq N(I+A).$$

下证$N(I+A)\subseteq R(I-A)$.
任取$y\in N(I+A)$,即$(I+A)y=0$,则

$$y=\frac{1}{2}(2y-0)=\frac{1}{2}(2Iy-(I+A)y)=\frac{1}{2}(I-A)y,$$

亦即

$$y \in R(I - A).$$

因此,

$$N(I+A)=R(I-A),$$

取维数有

$$n-r(I+A)=r(I-A).$$

如: 令

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

$$I+A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1+\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&1-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ I-A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&1+\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

则$N(I+A)=[(0,1,0,0)^T,(0,0,1-\sqrt{2},1)^T]$

9. 设n阶矩阵A满足$A^2=A$,证明: $r(A)+r(I-A)=n$.

证法一: 由于

$$A(I-A)=A-A^2=0,$$

故

$$r(A)+r(I-A)\le n.$$

又

$$n=r(I)=r(A+I-A)\le r(A)+r(I-A).$$

所以

$$r(A)+r(I-A)=n.$$

证法二: 设$I-A$的列向量表示为

$$I-A=(\beta_1\cdots\beta_n).$$

由于

$$A(I-A)=A-A^2=0,$$

故$I-A$的所有列B_i都是

$$Ax=0$$

的解,即

$$R(I-A)=[\beta_1,\cdots,\beta_n]\subseteq N(A).$$

下证$N(A)\subseteq R(I-A)$.

下证$N(A) \subseteq R(I-A)$.

任取$y \in N(A)$,即

$$Ay = 0 \qquad ,$$

则

$$y = y - 0 = Iy - Ay = (I-A)y,$$

亦即

$$y \in R(I-A).$$

因此,

$$N(A) = R(I-A),$$

取维数有

$$n - r(A) = r(I-A).$$

10. 设A, B为$m \times n$和$n \times l$阵, 证明
    1. 若$r(A) = n$,则$r(AB) = r(B)$;
    2. 若$r(B) = n$,则$r(AB) = r(B)$.

证法一: (1)由矩阵的秩的性质知,

$$r(AB) \leq r(B)$$

且

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

因此,当$r(A) = n$时有

$$r(AB) = r(B).$$

(2)同(1)可证.

证法二: 由$r(A)=n$知,必存在可逆阵S使

$$SA=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},$$

其中A_1为n阶可逆阵, 则

$$\begin{aligned} r(AB) &= r(SAB) = r(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} B) \\ &= r\begin{pmatrix} A_1B \\ A_2B \end{pmatrix} \geq r(A_1B) = r(B). \end{aligned}$$

再由$r(AB)\leq r(B)$得

$$r(AB)=r(B).$$

11. 设A是$m \times n$实矩阵,b是m维实列向量,证明:
   1. $r(A^TA) = r(A) = r(AA^T)$;
   2. 线性方程组$(A^TA)x = A^Tb$一定有解.

证明: (1)转化为线性方程组进行讨论:
首先,显然有 $AX = 0$ 的解是都 $A^TAX = 0$ 的解,即

$$N(A) \subseteq N(A^TA) \subseteq R.$$

反之,若实向量X满足

$$A^TAX = 0,$$

两端左乘X^T得

$$X^TA^TAX = 0,$$

再记 $Y = AX = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \in R^n$,则

$$0 = (AX)^T(AX) = Y^TY = \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

因此,

$$y_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n,$$

亦即

$$Y = AX = 0.$$

这表明 $A^TAX = 0$ 的解也都是 $AX = 0$ 的解,即

$$N(A^TA) = N(A),$$

故

$$n - r(A) = n - r(A^TA),$$

亦即

$$r(A^TA) = r(A).$$

再有

$$r(A^TA) = r(A) = r(A^T) = r((A^T)^TA^T) = r(AA^T).$$

(2)因为

$$r(A^T) = r(A^TA) \le r(A^TA, A^Tb) = r(A^T(A,b)) \le r(A^T),$$

所以

$$r(A^TA) = r(A^TA, A^Tb).$$

因此线性方程组

$$(A^TA)x = A^Tb$$

一定有解.
或利用

$$r(A^TA) = r(A^T) = r(A^T, A^Tb) = r(A^TA, A^Tb).$$

注: 若A不是实矩阵,则上面(1)中的结论不成立, 如取$A = (1, i)$或 $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则$r(A^TA) = 0 \ne 1 = r(A)$.

12 设A是$m \times n$ $(n < m)$实矩阵,b是m维实列向量. 若$Ax = b$有唯一解,证明: $A^T A$为可逆阵,并求此唯一解.

证明: 反证法. 假设$A^T A$为不可逆矩阵,则

$$|A^T A| = 0,$$

于是$(A^T A)x = 0$有非零解,任取其一非零解x_0,于是

$$0 = x_0^T 0 = x_0^T (A^T A) x_0 = (Ax_0)^T (Ax_0),$$

因而

$$Ax_0 = 0.$$

又设$Ax = b$的唯一解为x_1,则

$$A(x_1 + x_0) = Ax_1 + Ax_0 = b + 0 = b,$$

亦即$x_1 + x_0 \neq x_1$是$Ax = b$的另一解. 矛盾. 因此$A^T A$为可逆阵.

再由$Ax = b$得

$$A^T Ax = A^T b,$$

而$A^T A$是可逆阵,故其唯一解为$x = (A^T A)^{-1} A^T b)$.

注: 因A为$m \times n \ (n < m)$实矩阵,它没有逆矩阵,故其解$x \neq A^{-1} b$.