

随机摄动蚁群算法的收敛性及其数值特性分析

石立宝¹, 郝晋²¹香港大学电机电子工程学系, 香港; ²上海交通大学电气工程系, 上海 200030

摘要: 从随机优化技术出发, 针对基本蚁群算法, 提出了一种随机摄动蚁群优化算法。并从理论上对该算法的收敛性及一些相关特性进行了探索性分析, 指出该算法在有限迭代次数下以概率 $1-\varepsilon$ (ε 是一个很小的正数) 找到全局或局部最优解 (至少一次); 而且如果迭代时间足够长, 将以概率 1 收敛于全局或局部最优解。最后, 以 TSP 问题为例, 对该算法中若干参数的选取进行了仿真分析, 提出了具有普遍意义的参数选取方法, 并制定出各参数的最佳取值范围。

关键词: 蚁群算法; 收敛性分析; 转移概率; 停滞现象

文章编号: 1004-731X (2004) 11-2421-04

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

The Numerical Characteristics Analysis and Convergence Proof for Ant Colony Optimization Algorithm with Random Perturbation Behavior

SHI Li-bao¹, HAO Jin²¹Electrical & Electronic Engineering Department, Hong Kong University, Hong Kong;²Department of Electrical Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China

Abstract: A novel ant colony optimization algorithm with random perturbation behavior (RPACO) based on combination of general ant colony optimization and stochastic mechanism is developed in this paper. Some convergence properties for the proposed method are exploringly studied. In particular, we prove that for any small constant $\varepsilon > 0$, the approach will converge to an optimal solution at least once with probability $1-\varepsilon$ during the finite iterations and the probability tends to 1 for the enough large number of iterations. Furthermore, the empirical method of finding optimal parameter settings based on the TSP problem via simulating a large number of trials is used in this paper, and finally the optimal numeric area of parameters can be obtained. The effectiveness of the proposed method has been demonstrated on the corresponding numerical results.

Keywords: ant colony algorithm; convergence proof; transition probability; stagnation behavior

引言

蚁群优化算法 (Ant Colony Optimization Algorithm-ACO)^[1] 是模拟自然界中真实蚁群的觅食行为而形成的一种模拟进化算法。它采用有记忆的人工蚂蚁, 通过个体之间的信息交流与相互协作来找到从蚁穴到食物源的最短路径。目前蚁群算法在旅行推销商 (TSP)^[2]、指派 (Assignment Problem) 及 job-shop 调度等优化问题的应用中, 取得了一定的成功。众多研究已经证明蚁群算法具有很强的发现较好解的能力, 这是因为该算法不仅利用了正反馈原理, 在一定程度上加快进化进程, 而且是一种本质并行算法^[1,2]。但算法本身也存在一些缺陷, 如搜索时间较长, 而且容易出现停滞现象^[1]。本文对此问题进行了研究和探讨, 提出了一种随机摄动蚁群优化算法 (Ant Colony Optimization Algorithm with Random Perturbation Behavior, 简称 RPACO), 并从理论上对该算法的收敛性及一些相关特性进行了分析, 同时针对 TSP 问题, 对改进算法的参数选取进行了分析, 在大量数值仿真的基础

上提出了具有普遍意义的参数选取方法, 并基本确定了各参数的最佳取值范围。通过算例并与基本蚁群算法进行比较, 验证了该算法可以有效地提高算法的运算效率和计算精度。

1 随机摄动蚁群算法

为了便于理解, 以下对该算法的描述都是以求解平面上 n 个城市的 TSP 问题为例来进行的。

1.1 基本原理

前已述及, 基本蚁群优化算法的主要依据是信息正反馈原理和某种启发式算法的有机结合。基本蚁群算法中的转移概率公式^[1]则揭示了这一原理。它表明如果放到某条路径上的信息素越多且路径越短, 则该路径的转移概率越大, 那么该路径被蚂蚁选中的概率就越大, 类似于遗传算法中的“轮盘赌”法。鉴于这样一层物理含义, 本文设计如下更为简洁的转移策略:

$$C_{ij(k)}(t) = \begin{cases} \tau_{ij}(t)\eta_{ij}, & j \notin tabu_{(k)} \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad (1)$$

令 $s = \arg \max_j (C_{ij(k)})$ 转移到的城市。 $\tau_{ij}(t)$ 表示 t 时刻在路径 ij 上的信息量。其更新遵循如下的全局信息更新原则:

$$\tau_{ij}(t+n) = \rho \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta \tau_{ij}$$

收稿日期: 2003-10-30 **修回日期:** 2004-03-01

基金项目: 中国博士后基金 (2003033302)

作者简介: 石立宝 (1971-), 男, 辽宁清原人, 博士, 研究方向为计算智能及其在电力系统运行与控制中的应用; 郝晋 (1978-), 女, 内蒙赤峰人, 蒙古, 博士生, 研究方向为电力系统稳定与控制。

$$\Delta \tau_{ij} = \sum_{k=1}^m \Delta \tau_{ij}(k)$$

$$\Delta \tau_{ij}(k) = \begin{cases} \frac{Q}{L_k}, & \text{若 蚂蚁 } k \text{ 走过路径 } ij \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad (2)$$

其中, ρ 表示信息残留的程度, 即信息素挥发系数, 一般 $\rho \in (0, 1)$; m 是蚁群中蚂蚁的数量; Q 为常数; L_k 为第 k 只蚂蚁在本次循环中所走过的路径的长度。

$\tau_{ij} \eta_{ij}$ 的物理含义为单位路径上的信息量。需要指出的是: 公式(1)中的 $C_{ij(k)}$ 不再是“转移概率”, 而是路径 ij 的“转移系数”, 蚂蚁总是选择转移系数最大的路径, 具有一定的确定性。此外, $C_{ij(k)}$ 是有量纲的, 但由于在计算过程中只取其相对值, 因此其对计算结果无影响。

由于迭代过程中, 路径 ij 上的信息量 τ_{ij} 在迭代过程不断更新, 因此在最初的几次迭代中, 为使较好路径上信息量的作用更明显, 本文提出一个“放大因子” γ 。初始几次迭代中, γ 取较大的值, 以提高算法的收敛性; 此外, 为防止算法早熟, 使 γ 的值在迭代过程中逐渐衰减。这里, 本文设计了倒指数关系曲线来描述 γ :

$$\gamma = e^{b/r} \quad (r = 1, 2, \dots, I_{\max} \quad b > 0) \quad (3)$$

式中, r —当前迭代次数; I_{\max} —最大迭代次数; b —尺度因子。由式(3)可知, 随着迭代次数的增大, γ 的值最终趋近于 1, 而系数 b 的大小决定了曲线趋近于 1 的快慢程度。

这样, 转移系数可表达为:

$$C_{ij(k)}(t) = \begin{cases} [\tau_{ij}(t)]^\gamma \eta_{ij}, & j \notin \text{tabu}_{(k)} \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad (4)$$

此外, 考虑到基本蚁群算法中易出现的停滞现象, 本文设计了一种摄动策略, 即进化到一定程度后增加一定的扰动, 以避免算法过早陷入停滞。最后, 本文设计了如下具有随机摄动特性的转移系数:

$$C_{ij(k)}(t) = \begin{cases} [\tau_{ij}(t)]^\alpha \eta_{ij} & U < p_m \quad j \notin \text{tabu}_k \\ [\tau_{ij}(t)]^\gamma \eta_{ij} & U \geq p_m \quad j \notin \text{tabu}_k \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (5)$$

式中, $p_m \in (0, 1)$ 称为随机变异率; U 是 $(0, 1)$ 中均匀分布的随机数。式(5)中, 当 p_m 取很小的值时, 即退化为式(4)。但当 p_m 取适当值时, 由于随机变异的作用, 可以避免蚂蚁的搜索陷入同一种模式, 提高解的多样性, 有利于进一步搜索全局最优解。

该模型将确定性选择与随机选择相结合, 确定性选择引导蚂蚁朝着最优方向搜索, 随机性选择导致计算转移系数时具有一定的随机性, 从而有效地避免了搜索陷入局部最优解。正是两者的共同作用才使 RPACO 具有更强的全局搜索能力。

1.2 收敛性分析

目前, 蚁群算法在很多 NP 难问题的应用中取得了一定

的成功, 但在理论分析方面仍有一定的欠缺。可以说, 蚁群算法相对于其鲜明的生物基础而言, 其数学基础要薄弱一些。文[3]对一种特别的蚁群算法—基于图的蚁群算法 (GBAS) 进行了收敛性分析, 但缺乏一定的数值仿真分析及比较; 文[4]从极限理论对另一种蚁群算法 $ACO_{gb, \tau_{\min}}$ 进行了收敛性分析, 但证明过程比较笼统, 并未计及算法中某些参数的影响。本文从上述文献的分析中得到一定的启发, 并针对所提出的算法 RPACO, 从理论上对其收敛性分析进行探索性的研究。

这里, 为不失一般性, 对该算法作如下处理: ①对于约束优化问题, 采用适当的方式将其化为无约束优化问题; ②采用优先策略, 即: 上一次迭代中获得的最优解将被保留下来; ③认为最终所找到的最优解不一定是全局最优解。

准则 1: 令 L_{\min} 为所要求解问题的最优值 (最短路径长度), 如果在 t_* 次迭代时, 找到最优解 X^* , 则对于 $\forall (i, j) \in X^*$ 路径上的信息量 τ_{ij}^* 在足够长的迭代次数下, 必有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{ij}^*(t) = \bar{\tau} = \frac{Q \cdot m}{(1 - \rho) \cdot L_{\min}} \quad (6)$$

特别, 对于任何路径 ij 上的信息量 τ_{ij} 在足够长的迭代次数下, 存在

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{ij}(t) \leq \bar{\tau} \quad (7)$$

证明: 如在第 t_* 次迭代时, 第一次找到最优解, 则在 $t_* + 1$ 次迭代时, 根据前述的全局信息更新原则, 对于属于该最优解中的任一条路径上的信息量 τ_{ij}^* 被更新为 $\rho \cdot \tau_{ij}^*(t_*) + Q \cdot m / L_{\min}$, 在 $t_* + 2$ 次迭代时为 $\rho^2 \cdot \tau_{ij}^*(t_*) + \rho \cdot Q \cdot m / L_{\min} + Q \cdot m / L_{\min}$, 依次类推, 经过 t 次迭代后, 信息量 τ_{ij}^* 被更新为

$$\tau_{ij}^*(t) = \rho^t \cdot \tau_{ij}^*(t_*) + \sum_{l=0}^{t-1} \rho^l \cdot \frac{Q \cdot m}{L_{\min}}$$

考虑到 $0 < \rho < 1$, 则在 $t \rightarrow \infty$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{ij}^*(t) = \frac{Q \cdot m}{(1 - \rho) \cdot L_{\min}} = \bar{\tau} \quad \text{式 (6) 证毕}$$

已知在 $t = 0$ 的初始时刻, 各条路径上的信息量相等, 设 $\tau_{ij}(0) = C$ (C 为常数)。在第一次迭代时, 根据信息量全局信息更新原则, 对于任何路径 ij 上的信息量 τ_{ij} 被更新为 $\rho \cdot \tau_{ij}(0) + \Delta \tau_{ij}^{(1)}$, 在第二次迭代时为 $\rho^2 \cdot \tau_{ij}(0) + \rho \cdot \Delta \tau_{ij}^{(1)} + \Delta \tau_{ij}^{(2)}$, 则经过 t 次迭代后信息量 τ_{ij} 被更新为

$$\tau_{ij}(t) = \rho^t \cdot \tau_{ij}(0) + \rho^{t-1} \cdot \Delta \tau_{ij}^{(1)} + \dots + \Delta \tau_{ij}^{(t)}$$

$$\leq \rho^t \cdot \tau_{ij}(0) + \sum_{l=0}^{t-1} \rho^l \cdot \frac{Q \cdot m}{L_{\min}}$$

则由式 (6) 可知, 存在

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{ij}(t) \leq \bar{\tau} \quad \text{证毕。}$$

准则 2: 对于任何路径 ij 上的信息量 τ_{ij} , 在有限的迭代次数下, 存在

$$\tau_{ij}(t) \geq \underline{\tau} = \rho^{I_{\max}} \cdot \tau_{ij}(0) \quad (I_{\max} \text{ 为最大迭代次数}) \quad (8)$$

特别, 当找到最优解 X^* 时, 对于 $\forall (i, j) \in X^*$ 路径上的信息量 τ_{ij} 在足够长的迭代次数下, 存在

$$\tau_{ij}(t) \rightarrow \underline{\tau} \quad (9)$$

证明: 根据信息量的全局信息更新原则, 考虑到一种极端的情况, 即至少存在这样一条路径, 从初始迭代开始没有任何一只蚂蚁走过该路径, 经过最大迭代次数 I_{\max} 后, 该路径上的信息量为 $\rho^{I_{\max}} \cdot \tau_{ij}(0)$ 。显然, 对于任何路径 ij 上的信息量 τ_{ij} , 在有限的迭代次数下, 存在

$$\tau_{ij}(t) \geq \underline{\tau} = \rho^{I_{\max}} \cdot \tau_{ij}(0) \quad \text{式 (8) 证毕}$$

当找到最优解 X^* 时, 则对于 $\forall (i, j) \in X^*$ 路径在随后的迭代过程中不会再有蚂蚁走过, 因此其相应的信息量 τ_{ij} 将在 ρ 的作用下逐渐减少, 经过 t 次迭代后为必有 $\rho^t \cdot \tau_{ij}(t_*) \rightarrow \underline{\tau}$, 证毕。

准则 1 和准则 2 说明了对于任何路径 ij 上的信息量 $\tau_{ij} \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ 。

准则 3: 如果在第 t_* 次迭代时, 找到最优解 X^* , 那么一定存在 $t_s = \rho/(1-\rho)$, 使得 $\forall t > t_* + t_s$, 有

$$\tau_{ij}^*(t) > \tau_{ij}^*(t_*) \quad (10)$$

其中, $\forall (i, j) \in X^*$, $\forall (i', j') \in X \cap (i', j') \notin X^*$ 。

证明: 由准则 1 可知, 在找到最优解 X^* 后, 经过 t 次迭代, 对于 $\forall (i, j) \in X^*$ 路径上的信息量 τ_{ij}^* , 存在

$$\tau_{ij}^*(t_* + t) = \rho^t \cdot \tau_{ij}^*(t_*) + \sum_{l=0}^{t-1} \rho^l \cdot \frac{Q \cdot m}{L_{\min}}$$

$\because \rho^{t-1} > \rho^t$ ($0 < \rho < 1$), 有

$$\tau_{ij}^*(t_* + t) > t \cdot \rho^{t-1} \cdot \frac{Q \cdot m}{L_{\min}}$$

由准则 2 和准则 1 可知, 当找到最优解 X^* 后, 对于 $\forall (i', j') \notin X^*$ 路径上的信息量 $\tau_{i'j'}$, 再经过 t 次迭代, 存在

$$\tau_{i'j'}^*(t_* + t) = \rho^t \cdot \tau_{i'j'}^*(t_*) < \rho^t \cdot \frac{Q \cdot m}{(1-\rho) \cdot L_{\min}}$$

如若 $\tau_{ij}^*(t) > \tau_{i'j'}^*(t)$ 成立, 则必满足条件

$$t \cdot \rho^{t-1} \cdot \frac{Q \cdot m}{L_{\min}} > \rho^t \cdot \frac{Q \cdot m}{(1-\rho) \cdot L_{\min}}$$

即

$$t > \frac{\rho}{1-\rho} = t_s \quad \text{证毕}$$

定理: 令 $P^*(t)$ 为 RPACO 算法在 t 次迭代时至少一次找到最优解 (全局或局部) 时的概率, 则在有限迭代次数下, 存在

$$P^*(t) \geq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ 是一个很小的正数}) \quad (11)$$

特别, 如果迭代时间足够长, 将有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^*(t) = 1 \quad (12)$$

证明: 根据准则 1 和准则 2, 可以确保进行由式 (5) 产生任何可行解 (包括最优解)。设 $P_s^1(t)$ 为式 (5) 在条件

$U < p_m$ 下选中带有最大信息量路径的概率; $P_s^2(t)$ 为式 (5) 在条件 $U \geq p_m$ 下选中带有最大信息量路径的概率。根据全概率公式, 在经过 t 次迭代时, 由式 (5) 选中带有最大信息量路径的概率 $P_s(t)$ 为

$$P_s(t) = (1 - p_m) \cdot P_s^1(t) + p_m \cdot P_s^2(t)$$

这里, 考虑一种极端的情况: 对于任意给定的随机变异率 $p_m \in (0, 1)$, 式 (5) 始终在条件 $U < p_m$ 下产生可行解。由此可知, 对于任何可行解 (其中包括最优解 X^*), 都能以一概率 $\bar{p} \geq (1 - p_m) \cdot \bar{P}_s^1 > 0$, $\bar{P}_s^1 = \max\{P_s^1(t) | t < +\infty\}$ 产生。考虑到经过 t 次迭代, 至少有一只蚂蚁可以找到最优解, 可以得到

$$P^*(t) \geq \bar{P}^*(t) = 1 - (1 - \bar{p})^t$$

特别, t 足够大时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^*(t) = 1 \quad \text{证毕。}$$

1.3 参数选取方法和范围

RPACO 算法中参数 α, ρ, Q, p_m, b 的选取对于算法的收敛性影响较大。对于上述参数, 目前解析法还难以确定其最佳组合。一般来说, 上述参数可通过反复试凑得到, 显然这对算法的计算效率和收敛性将产生不利影响。为此, 本文通过大量的数字仿真总结出一种较为有效的参数选取方法:

(1) 大量实验发现: 参数 α 和 Q 的取值范围较大, 而参数 ρ 和 p_m 取值相对固定 (在 0~1 之间)。因此, 首先随机设定一组 ρ 和 p_m 的值来调整 α 和 Q , 得到较理想的解。

(2) 在基本确定 α 和 Q 之后, 反过来调整变量 ρ 和 p_m , 寻找更好的解。

此后, 在 (2) 得到 ρ 和 p_m 的基础上, 在转到 (1) 以得到更好的 α 和 Q , 如此反复, 最终确定出一组较为理想的参数组合。为使本算法能更方便地求解实际问题, 文进一步分析了各参数对算法收敛性的影响。这里只考虑直接或间接影响转移系数公式计算的参数: α, ρ, Q, b, p_m 。蚂蚁数通常设置为城市数。本文以 bayes29^[5] (29 个城市, 406 条线路) TSP 为例, 对每个参数作了多次实验以考察各参数对算法性能的影响。实验时, 每次只调整某一参数, 同时其它参数保持不变。所有实验中, 设置最大迭代次数为 1000 次。

参数的默认值为:

$$\alpha = 0.2, \rho = 0.7, Q = 50, b = 2, p_m = 0.1。$$

各参数取不同值时的实验结果见图 1~5。

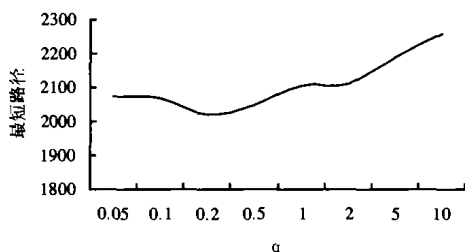
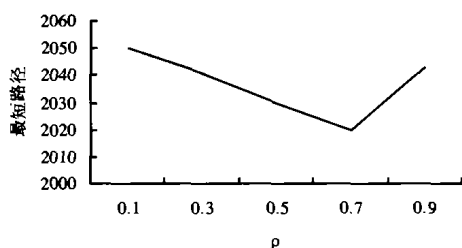
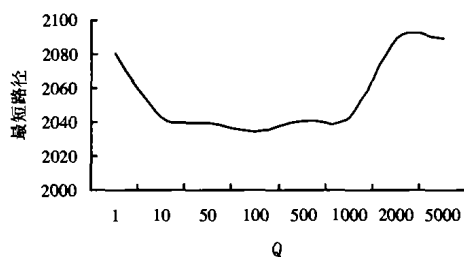
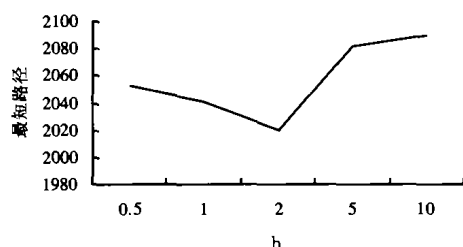
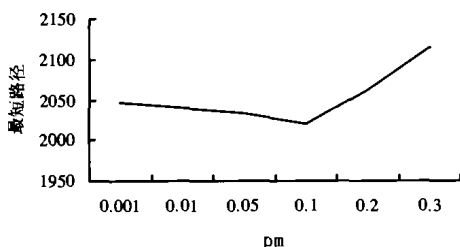
应用前述方法, 综合分析以上仿真结果, 得出了以下各参数的最佳取值范围 (具有一定的普遍意义):

(1) α 的取值在 0.1~5 之间;

(2) 变量 $\rho \times \tau$ 的物理含义为残留的信息量, 这里推荐 ρ 的取值范围为 0.5~0.8;

(3) Q 的取值与初始路径的信息量有关, 这里给出确定 Q 的算法: $Q = \rho L_k \tau_{ij}(0)$ 。在第一次迭代完成后, 可根据任一只蚂蚁的路径长度来确定 Q 的大概取值;

(4) 尺度因子 b 的取值范围为 0.5~2;

图 1 α 对算法收敛性的影响图 2 ρ 对算法收敛性的影响图 3 Q 对算法收敛性的影响图 4 b 对算法收敛性的影响图 5 p_m 对算法收敛性的影响

(5) 随机变异率 p_m 取值通常较小, 一般小于 0.1。

2 算例分析

为了检验 RPACO 的性能, 本文对 gr24、bayes29 以及 gr48TSP 问题^[5]分别进行了计算, 并将计算结果与 BACO 进行了比较, 环境参数设置见表 1, 仿真结果见表 2。表 1 中环境参数都是针对各自较好的环境参数。对于如此选择的参数, 在 PII400 微机、Visual C++环境下运行 BACO、RPACO, 进化代数设为 1000 代。

表 1 环境参数设置

TSP	BACO				RPACO				
	α	β	ρ	Q	α	ρ	p_m	b	Q
24	1.0	5.0	0.5	100	0.5	0.8	0.1	2	100
29	1.5	4.0	0.6	100	0.2	0.8	0.1	2	100
48	1.5	4.0	0.6	100	0.5	0.8	0.1	2	100

表 2 仿真结果及比较

TSP	BACO		RPACO	
	时间(s)	最短路径	时间(s)	最短路径
24	100	1298	61	1264
29	160	2040	96	2020
48	600	5494	367	5256

从表 2 中可以看出, 计算同样规模的问题, RPACO 所需时间约为 BACO 的 0.6 倍, 并且得到的最优解要优于 BACO 得到的解。图 6 给出了解算 bayes29 TSP 问题过程中两种算法分别取较好参数时的最好解的收敛曲线。

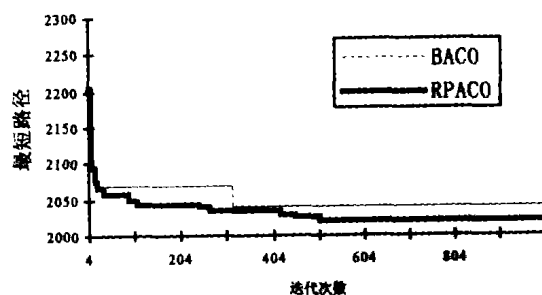


图 6 两种算法动态优化曲线

3 结论

本文从随机优化技术出发, 提出了采用倒指数曲线来描述的放大因子, 设计出了相应的随机选择策略和扰动策略, 构造出一种新颖的随机摄动蚁群优化算法。并从理论上对该算法的收敛特性及其相关特性进行了试探性的研究和探讨。此外, 还对该算法的参数选取进行了分析和探讨, 在大量数值仿真的基础上总结出了具有普遍意义的参数选取方法, 考察了参数不同取值对算法收敛性的影响, 并基本确定了各参数的最佳取值范围。数值算例说明随机摄动蚁群优化算法能有效地防止算法陷入停滞, 与基本蚁群算法相比, 具有更强的逃脱局部极值的全局优化能力, 有效地提高了计算效率。

参考文献:

- [1] M. Dorigo, Vittorio Maniezzo, Alberto Colomi. Ant System Optimization by a Colony of Cooperating Agents[J]. IEEE Trans on System, Man and Cybernetics-Part B, 1996, 26 (1): 29-41.
- [2] M. Dorigo and L. M. Gambardella. Ant colony system: A cooperative learning approach to the traveling salesman problem[J]. IEEE Trans. Evol. Comput., 1997, 1(1): 53-66.
- [3] Walter J. Gutjahr. A Graph-based Ant System and its convergence[J]. Future Gener. Comput. Syst., 2000, 16(8): 873-888.
- [4] Thomas Stützle and M. Dorigo. A Short Convergence Proof for a Class of Ant Colony Optimization Algorithms[J]. IEEE Trans. Evol. Comput., 2002, 6(4): 358-365.
- [5] The universidad nacional Archive[EB/OL], <http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/TSPBIB>.