

# 浅谈利用拉格朗日中值定理证明不等式的方法

泰州职业技术学院 廖为鲲

[摘要] 拉格朗日中值定理是一个比较重要的微分中值定理, 本文通过例题说明如何利用拉格朗日中值定理证明不等式的方法。

[关键词] 不等式 拉格朗日中值定理

在高等数学中, 不等式的证明有很多方法, 其中利用拉格朗日中值定理证明不等式是一个比较重要的方法, 证明分为以下三个步骤:

1、若证明不等式中含有某函数的增量形式  $f(b)-f(a)$ , 则选取函数  $f(x)$  及相应区间  $[a, b]$ ;

2、 $f(x)$  在  $[a, b]$  上应用拉格朗日中值定理

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) (a<\xi<b)$$

3、由  $a<\xi<b$ , 对  $f'(\xi)$  进行适当放大, 缩小。

下面, 按照上述三个步骤, 通过例题说明如何利用拉格朗日中值定理证明不等式

例1 证明不等式  $na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a) (a>b>0, n>1)$

证明:

因为  $b^n-a^n$  是  $x^n$  的增量形式, 所以  $f(x)=x^n$

显然,  $f(x)=x^n$  在区间  $[a, b]$  上满足拉格朗日中值定理的条件, 所以

$$b^n-a^n=n\xi^{n-1}(b-a) (a<\xi<b)$$

因为  $a<\xi<b$ , 所以  $a^{n-1}<\xi^{n-1}<b^{n-1} (a>b>0, n>1)$ , 故有

$$na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)$$

例2 证明: 当  $x>0$  时, 有  $\frac{1}{x+1}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$

证明: 由于  $\ln(1+\frac{1}{x})=\ln\frac{x+1}{x}=\ln(x+1)-\ln x$ , 所以取  $f(t)=\ln t$ ,  $t\in[x, x+1]$

因为  $x>0$ , 所以, 显然  $f(t)=\ln t$  在  $[x, x+1]$  上满足拉格朗日中值定理的条件,

$$\text{故 } \ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{\xi}(x+1-x), x<\xi<x+1$$

因为  $x<\xi<x+1$ , 且  $x>0$ , 所以  $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x}$ , 故有

$$\frac{1}{x+1}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$$

例3 证明: 当  $e<x_1<x_2$  时,  $\frac{x_1}{x_2}<\frac{\ln x_1}{\ln x_2}$

证明: 由  $\frac{x_1}{x_2}<\frac{\ln x_1}{\ln x_2}$ , 得  $\frac{\ln x_2}{x_2}<\frac{\ln x_1}{x_1}$ , 即  $\frac{\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_1}{x_1}<0$

取  $f(x)=\frac{\ln x}{x}, x\in[x_1, x_2]$

显然,  $f(x)=\frac{\ln x}{x}$  在区间  $[x_1, x_2]$  上满足拉格朗日中值定理的条件,

$$\text{所以 } \frac{\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{1-\ln \xi}{\xi^2}$$

因为  $e<x_1<\xi<x_2$ , 所以  $\ln \xi>1$

$$\text{故有 } \frac{\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_1}{x_1}>0,$$

所以当  $e<x_1<x_2$  时,  $\frac{x_1}{x_2}<\frac{\ln x_1}{\ln x_2}$

## 参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.

[2] 同济大学应用数学系. 高等数学[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2000.

(上接第141页) 坐标频谱图见图6, 各模态频率具有一致的峰值22.5Hz, 该频率即为颤振频率, 风洞试验的颤振频率<sup>[7]</sup>为18Hz。结果表明, 两种方法对系统的中立稳定现象都做出了准确预测。

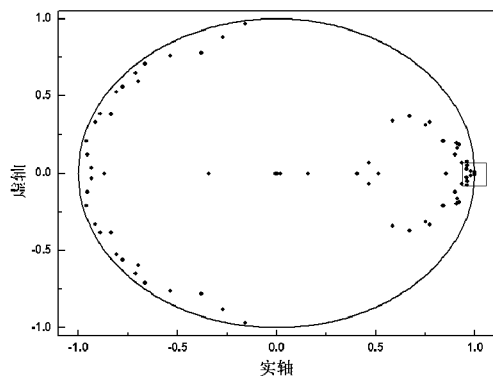


图4 机翼的根轨迹图

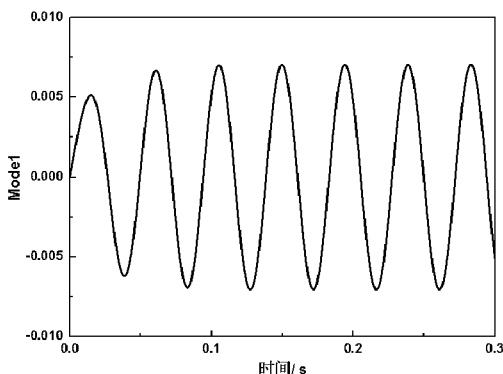


图5 模态1的时域响应图

## 3. 结论

基于非定常气动力降阶模型ROM, 耦合结构运动方程建立气动弹性降阶模型, 通过时域分析以及系统特征根求解可以快速评估气动弹性系统的稳定性。ROM将气动力与模态运动相联系, 利用CFD技术进

行气动力模型训练, 计算量小于CFD/CSD直接模拟的代价。算例选取了颤振分析标准模型AGARD 445.6机翼, 降阶模型预测的颤振结果与风洞试验数据相吻合。

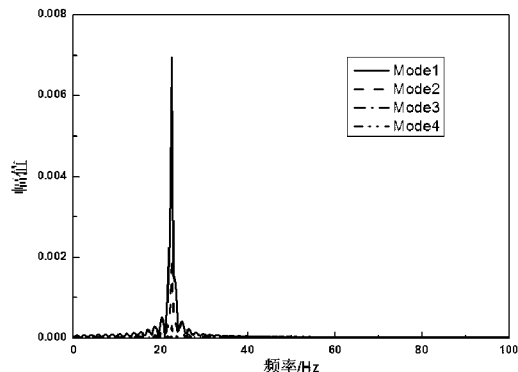


图6 颤振时各模态频谱图

## 参考文献

[1] 徐敏, 李勇, 曾宪昂等. 基于Volterra级数的非定常气动力降阶模型[J]. 强度与环境, 2007, 34(5): 22-28

[2] 李勇. 基于Volterra级数的非定常气动力和气弹性分析[D]. 西安: 西北工业大学, 2007

[3] Chen G., Li Y-m, Yan G-r. Nonlinear POD Reduced Order Model for Limit Cycle Oscillation Prediction[R]. AIAA 2010-2726, 2010

[4] Liu Xiaoyan, Wu Zhigang, Yang Chao. Aerodynamic Reduced-Order Models Based on Observer Techniques [R]. AIAA Paper 2010-2794, 2010.

[5] Lai K. L., Lum K-y. Reduced-Order Based Flutter Analysis for Complex Aeroelastic Systems[R]. AIAA 2008-6240, 2008

[6] Gordiner R., Melville R. Transonic Flutter Simulation Using an Implicit Aeroelastic Solver[J]. Journal of Aircraft, 2000, 37(5): 872-879

[7] Yates E. C. Jr. AGARD Standard Aeroelastic Configurations for Dynamic Response Candidate Configuration I.-Wing 445.6[R]. NASA-TM-100492, 1987