



离散数学

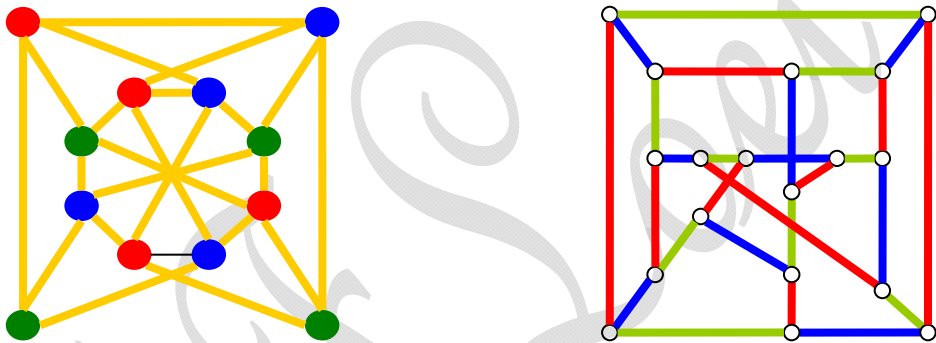
习
题
解

Wind & Moon Press
Canton, 2008.2

离散数学/耿素云, 屈婉玲编著. 2 版.
—北京: 高等教育出版社, 2004. 1
(ISBN 7-04-013317-2)

习题解

华南农业大学 2007 学年第二学期用



千言万语不及一张图
----佚名

超链接

习题一 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31

习题二 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

习题三 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

习题四 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

习题五 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25

习题六 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45

习题七 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50

习题八 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28

习题九 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40

习题十 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40

习题十一 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40

习题十二 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40

习题十三 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40

习题十四 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50

习题十五 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22

习题十六 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35

习题十七 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43

习题十八 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23

习题一

1.1. 略

1.2. 略

1.3. 略

1.4. 略

1.5. 略

1.6. 略

1.7. 略

1.8. 略

1.9. 略

1.10. 略

1.11. 略

1.12. 将下列命题符号化, 并给出各命题的真值:

(1) $2+2=4$ 当且仅当 $3+3=6$.(2) $2+2=4$ 的充要条件是 $3+3\neq 6$.(3) $2+2\neq 4$ 与 $3+3=6$ 互为充要条件.(4) 若 $2+2\neq 4$, 则 $3+3\neq 6$, 反之亦然.(1) $p\leftrightarrow q$, 其中, $p: 2+2=4$, $q: 3+3=6$, 真值为 1.(2) $p\leftrightarrow\neg q$, 其中, $p: 2+2=4$, $q: 3+3=6$, 真值为 0.(3) $\neg p\leftrightarrow q$, 其中, $p: 2+2=4$, $q: 3+3=6$, 真值为 0.(4) $\neg p\leftrightarrow\neg q$, 其中, $p: 2+2=4$, $q: 3+3=6$, 真值为 1.

1.13. 将下列命题符号化, 并给出各命题的真值:

(1) 若今天是星期一, 则明天是星期二.

(2) 只有今天是星期一, 明天才是星期二.

(3) 今天是星期一当且仅当明天是星期二.

(4) 若今天是星期一, 则明天是星期三.

令 p : 今天是星期一; q : 明天是星期二; r : 明天是星期三.(1) $p\rightarrow q \Leftrightarrow 1$.(2) $q\rightarrow p \Leftrightarrow 1$.(3) $p\leftrightarrow q \Leftrightarrow 1$.(4) $p\rightarrow r$ 当 $p \Leftrightarrow 0$ 时为真; $p \Leftrightarrow 1$ 时为假.

1.14. 将下列命题符号化.

(1) 刘晓月跑得快, 跳得高.

(2) 老王是山东人或河北人.

(3) 因为天气冷, 所以我穿了羽绒服.

(4) 王欢与李乐组成一个小组.

(5) 李辛与李末是兄弟.

(6) 王强与刘威都学过法语.

(7) 他一面吃饭, 一面听音乐.

(8) 如果天下大雨, 他就乘班车上班.

(9) 只有天下大雨, 他才乘班车上班.

(10) 除非天下大雨, 他才乘班车上班.

(11) 下雪路滑, 他迟到了.

(12) 2 与 4 都是素数, 这是不对的.

(13) “2 或 4 是素数, 这是不对的”是不对的.

- (1) $p \wedge q$, 其中, p : 刘晓月跑得快, q : 刘晓月跳得高.
 (2) $p \vee q$, 其中, p : 老王是山东人, q : 老王是河北人.
 (3) $p \rightarrow q$, 其中, p : 天气冷, q : 我穿了羽绒服.
 (4) p , 其中, p : 王欢与李乐组成一个小组, 是简单命题.
 (5) p , 其中, p : 李辛与李末是兄弟.
 (6) $p \wedge q$, 其中, p : 王强学过法语, q : 刘威学过法语.
 (7) $p \wedge q$, 其中, p : 他吃饭, q : 他听音乐.
 (8) $p \rightarrow q$, 其中, p : 天下大雨, q : 他乘班车上班.
 (9) $p \rightarrow q$, 其中, p : 他乘班车上班, q : 天下大雨.
 (10) $p \rightarrow q$, 其中, p : 他乘班车上班, q : 天下大雨.
 (11) $p \rightarrow q$, 其中, p : 下雪路滑, q : 他迟到了.
 (12) $\neg(p \wedge q)$ 或 $\neg p \vee \neg q$, 其中, p : 2 是素数, q : 4 是素数.
 (13) $\neg \neg(p \vee q)$ 或 $p \vee q$, 其中, p : 2 是素数, q : 4 是素数.

1.15. 设 p : $2+3=5$.

q : 大熊猫产在中国.

r : 复旦大学在广州.

求下列复合命题的真值:

- (1) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$
 (2) $(r \rightarrow (p \wedge q)) \leftrightarrow \neg p$
 (3) $\neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r)$
 (4) $(p \wedge q \wedge \neg r) \leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \rightarrow r)$

- (1) 真值为 0.
 (2) 真值为 0.
 (3) 真值为 0.
 (4) 真值为 1.

注意: p, q 是真命题, r 是假命题.

1.16. 略

1.17. 略

1.18. 略

1.19. 用真值表判断下列公式的类型:

- (1) $p \rightarrow (p \vee q \vee r)$
 (2) $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q$
 (3) $\neg(q \rightarrow r) \wedge r$
 (4) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
 (5) $(p \wedge r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
 (6) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
 (7) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$

(1), (4), (6)为重言式.

(3)为矛盾式.

(2), (5), (7)为可满足式.

1.20. 略

1.21. 略

1.22. 略

1.23. 略

1.24. 略

1.25. 略

1.26. 略

1.27. 略

1.28. 略

1.29. 略

1.30. 略

1.31. 将下列命题符号化, 并给出各命题的真值:

(1)若 $3+4=4$, 则地球是静止不动的.

(2)若 $3+2=4$, 则地球是运动不止的.

(3)若地球上没有树木, 则人类不能生存.

(4)若地球上没有水, 则 $\sqrt{3}$ 是无理数.

(1) $p \rightarrow q$, 其中, $p: 2+2=4$, q : 地球静止不动, 真值为 0.

(2) $p \rightarrow q$, 其中, $p: 2+2=4$, q : 地球运动不止, 真值为 1.

(3) $\neg p \rightarrow \neg q$, 其中, p : 地球上有树木, q : 人类能生存, 真值为 1.

(4) $\neg p \rightarrow q$, 其中, p : 地球上有水, q : $\sqrt{3}$ 是无理数, 真值为 1.

习题二

2.1. 设公式 $A = p \rightarrow q$, $B = p \neg \wedge q$, 用真值表验证公式 A 和 B 适合德摩根律:

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \neg \wedge B.$$

p	q	$A = p \rightarrow q$	$B = p \neg \wedge q$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \neg \wedge B$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

因为 $\neg(A \vee B)$ 和 $\neg A \neg \wedge B$ 的真值表相同, 所以它们等值.

2.2. 略

2.3. 用等值演算法判断下列公式的类型, 对不是重言式的可满足式, 再用真值表法求出成真赋值.

$$(1) \neg(p \wedge q \rightarrow q)$$

$$(2) (p \rightarrow (p \vee q)) \vee (p \rightarrow r)$$

$$(3) (p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$$

$$(1) \neg(p \wedge q \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q) \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q \vee q) \Leftrightarrow p \wedge q \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow 0. \text{ 矛盾式.}$$

(2) 重言式.

(3) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r) \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow \neg p \neg \wedge q \vee p \wedge r$ 易见, 是可满足式, 但不是重言式. 成真赋值为: 000, 001, 101, 111

p	q	r	$\neg p \neg \wedge q \vee p \wedge r$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

2.4. 用等值演算法证明下面等值式:

$$(1) p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

$$(3) \neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

$$(4) (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

$$(1) (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q) \Leftrightarrow p \wedge 1 \Leftrightarrow p.$$

$$(3) \neg(p \leftrightarrow q)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \\
&\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) & (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)
\end{aligned}$$

2.5. 求下列公式的主析取范式, 并求成真赋值:

- (1) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p)$
- (2) $\neg(p \rightarrow q) \wedge q \wedge r$
- (3) $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r)$

$$\begin{aligned}
(1) & (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p) \\
&\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee p) \\
&\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \vee \neg q \vee p \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \vee \neg q \vee p \text{ (吸收律)} \Leftrightarrow (p \vee \neg p) \wedge \neg q \vee p \wedge (q \vee \neg q) \\
&\Leftrightarrow p \vee \neg q \vee p \vee \neg p \vee \neg q \vee p \wedge q \vee p \wedge \neg q \\
&\Leftrightarrow m_{10} \vee m_{00} \vee m_{11} \vee m_{10} \\
&\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3 \\
&\Leftrightarrow \Sigma(0, 2, 3).
\end{aligned}$$

成真赋值为 00, 10, 11.

(2) 主析取范式为 0, 无成真赋值, 为矛盾式.

(3) $m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$, 为重言式.

2.6. 求下列公式的主合取范式, 并求成假赋值:

- (1) $\neg(q \rightarrow \neg p) \wedge \neg p$
- (2) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee r)$
- (3) $(p \rightarrow (p \vee q)) \vee r$

$$\begin{aligned}
(1) & \neg(q \rightarrow \neg p) \wedge \neg p \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg q \vee \neg p) \wedge \neg p \\
&\Leftrightarrow q \wedge p \wedge \neg p \\
&\Leftrightarrow q \wedge 0 \\
&\Leftrightarrow 0 \\
&\Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3
\end{aligned}$$

这是矛盾式. 成假赋值为 00, 01, 10, 11.

(2) M_4 , 成假赋值为 100.

(3) 主合取范式为 1, 为重言式.

2.7. 求下列公式的主析取范式, 再用主析取范式求合取范式:

$$(1)(p \wedge q) \vee r$$

$$(2)(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$$

$$(1)m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$$

$$(2)m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7 \Leftrightarrow M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

2.8. 略

2.9. 用真值表求下面公式的主析取范式.

$$(2)(p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

p	q	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$			
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

(2)从真值表可见成真赋值为 01, 10. 于是 $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow m_1 \vee m_2$.

2.10. 略

2.11. 略

2.12. 略

2.13. 略

2.14. 略

2.15. 用主析取范式判断下列公式是否等值:

$$(1)(p \rightarrow q) \rightarrow r \text{ 与 } q \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$(2)(p \rightarrow q) \rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$$

$$\Leftrightarrow p \wedge \neg q \vee r$$

$$\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r) \vee (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge r$$

$$\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r \vee p \wedge \neg q \wedge \neg r \vee$$

$$p \wedge q \wedge r \vee p \wedge \neg q \wedge r \vee \neg p \wedge q \wedge r \vee \neg p \wedge \neg q \wedge r$$

$$= m_{101} \vee m_{100} \vee m_{111} \vee m_{101} \vee m_{011} \vee m_{001}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$$

$$= \Sigma(1, 3, 4, 5, 7).$$

$$\text{而 } q \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee (\neg p \vee r)$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee \neg p \vee r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge \neg q \wedge (\neg r \vee r) \vee \neg p \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg r \vee r)$$

$$\vee (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

$$\vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\begin{aligned}
& \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\
& = m_0 \vee m_1 \vee m_4 \vee m_5 \\
& \vee m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \\
& \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \\
& \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7 \\
& \Leftrightarrow \Sigma(0, 1, 2, 3, 4, 5, 7).
\end{aligned}$$

两个公式的主析取范式不同, 所以 $(p \rightarrow q) \rightarrow r \not\leftrightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r)$.

2.16. 用主析取范式判断下列公式是否等值:

(1) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 与 $q \rightarrow (p \rightarrow r)$

(2) $\neg(p \wedge q)$ 与 $\neg(p \vee q)$

(1)

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$$

$$q \rightarrow (p \rightarrow r) \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$$

所以 $(p \rightarrow q) \rightarrow r \not\leftrightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r)$

(2)

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow m_0$$

所以 $\neg(p \wedge q) \not\leftrightarrow \neg(p \vee q)$

2.17. 用主合取范式判断下列公式是否等值:

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $\neg(p \wedge q) \vee r$

(2) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

(1)

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow M_6$$

$$\neg(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow M_6$$

所以 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$

(2)

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow M_6$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_6$$

所以 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \not\leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$

2.18. 略

2.19. 略

2.20. 将下列公式化成与之等值且仅含 $\{\neg, \rightarrow\}$ 中联结词的公式.

(3) $(p \wedge q) \leftrightarrow r$.

注意到 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 和 $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$ 以及 $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \rightarrow B$.

$$(p \wedge q) \leftrightarrow r$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (p \wedge q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow (\neg(p \neg \rightarrow q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow \neg(p \neg \rightarrow q)) \\ &\Leftrightarrow \neg((\neg(p \neg \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg(p \neg \rightarrow q))) \end{aligned}$$

注：联结词越少，公式越长。

2.21. 证明：

$$(1) (p \uparrow q) \Leftrightarrow (q \uparrow p), (p \downarrow q) \Leftrightarrow (q \downarrow p).$$

$$(p \uparrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(q \wedge p) \Leftrightarrow (q \uparrow p).$$

$$(p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(q \vee p) \Leftrightarrow (q \downarrow p).$$

2.22. 略

2.23. 略

2.24. 略

2.25. 设 A, B, C 为任意的命题公式.

- (1) 若 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$, 举例说明 $A \Leftrightarrow B$ 不一定成立.
- (2) 已知 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$, 举例说明 $A \Leftrightarrow B$ 不一定成立.
- (3) 已知 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$, 问: $A \Leftrightarrow B$ 一定成立吗?

(1) 取 $A = p, B = q, C = 1$ (重言式), 有

$$A \vee C \Leftrightarrow B \vee C, \text{ 但 } A \not\Leftrightarrow B.$$

(2) 取 $A = p, B = q, C = 0$ (矛盾式), 有

$$A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C, \text{ 但 } A \not\Leftrightarrow B.$$

好的例子是简单, 具体, 而又说明问题的.

(3) 一定.

2.26. 略

2.27. 某电路中有一个灯泡和三个开关 A, B, C . 已知在且仅在下述四种情况下灯亮:

- (1) C 的扳键向上, A, B 的扳键向下.
- (2) A 的扳键向上, B, C 的扳键向下.
- (3) B, C 的扳键向上, A 的扳键向下.
- (4) A, B 的扳键向上, C 的扳键向下.

设 F 为 1 表示灯亮, p, q, r 分别表示 A, B, C 的扳键向上.

- (a) 求 F 的主析取范式.
- (b) 在联结词完备集 $\{\neg, \wedge\}$ 上构造 F .
- (c) 在联结词完备集 $\{\neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 上构造 F .

(a) 由条件(1)-(4)可知, F 的主析取范式为

$$F \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_4 \vee m_3 \vee m_6$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6$$

(b) 先化简公式

$$\begin{aligned}
 F &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \\
 &\Leftrightarrow \neg q \wedge ((\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)) \vee q \wedge ((\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)) \\
 &\Leftrightarrow (\neg q \vee q) \wedge ((\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)) \\
 &\Leftrightarrow (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r) \\
 &\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \wedge r) \wedge \neg(p \wedge \neg r)) \quad (\text{已为 } \{\neg, \wedge\} \text{ 中公式})
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 F &\Leftrightarrow (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r) \\
 &\Leftrightarrow \neg \neg(\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r) \\
 &\Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge r) \rightarrow (p \wedge \neg r) \\
 &\Leftrightarrow (p \vee \neg r) \rightarrow \neg(\neg p \vee r) \\
 &\Leftrightarrow (r \rightarrow p) \rightarrow \neg(p \rightarrow r) \quad (\text{已为 } \{\neg, \rightarrow, \leftrightarrow\} \text{ 中公式})
 \end{aligned}$$

2.28. 一个排队线路, 输入为 A, B, C , 其输出分别为 F_A, F_B, F_C . 本线路中, 在同一时间内只能有一个信号通过, 若同时有两个和两个以上信号申请输出时, 则按 A, B, C 的顺序输出. 写出 F_A, F_B, F_C 在联结词完备集 $\{\neg, \vee\}$ 中的表达式.

根据题目中的要求, 先写出 F_A, F_B, F_C 的真值表(自己写)

由真值表可先求出他们的主析取范式, 然后化成 $\{\neg, \wedge\}$ 中的公式

$$\begin{aligned}
 F_A &\Leftrightarrow m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \\
 &\Leftrightarrow p \quad (\text{已为 } \{\neg, \wedge\} \text{ 中公式}) \\
 F_B &\Leftrightarrow m_2 \vee m_3 \\
 &\Leftrightarrow \neg p \wedge q \quad (\text{已为 } \{\neg, \wedge\} \text{ 中公式}) \\
 F_C &\Leftrightarrow m_1 \\
 &\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge r \quad (\text{已为 } \{\neg, \wedge\} \text{ 中公式})
 \end{aligned}$$

2.29. 略

2.30. 略

习题三

3.1. 略

3.2. 略

3.3. 略

3.4. 略

3.5. 略

3.6. 判断下面推理是否正确. 先将简单命题符号化, 再写出前提, 结论, 推理的形式结构(以蕴涵式的形式给出)和判断过程(至少给出两种判断方法):

(1) 若今天是星期一, 则明天是星期三; 今天是星期一. 所以明天是星期三.

(2) 若今天是星期一, 则明天是星期二; 明天是星期二. 所以今天是星期一.

(3) 若今天是星期一, 则明天是星期三; 明天不是星期三. 所以今天不是星期一.

(4) 若今天是星期一, 则明天是星期二; 今天不是星期一. 所以明天不是星期二.

(5) 若今天是星期一, 则明天是星期二或星期三.

(6) 今天是星期一当且仅当明天是星期三; 今天不是星期一. 所以明天不是星期三.

设 p : 今天是星期一, q : 明天是星期二, r : 明天是星期三.

(1) 推理的形式结构为

$$(p \rightarrow r) \wedge p \rightarrow r$$

此形式结构为重言式, 即

$$(p \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$$

所以推理正确.

(2) 推理的形式结构为

$$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$$

此形式结构不是重言式, 故推理不正确.

(3) 推理形式结构为

$$(p \rightarrow r) \wedge \neg r \rightarrow \neg p$$

此形式结构为重言式, 即

$$(p \rightarrow r) \wedge \neg r \Rightarrow \neg p$$

故推理正确.

(4) 推理形式结构为

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$$

此形式结构不是重言式, 故推理不正确.

(5) 推理形式结构为

$$p \rightarrow (q \vee r)$$

它不是重言式, 故推理不正确.

(6) 推理形式结构为

$$(p \Rightarrow r) \wedge \neg p \rightarrow \neg r$$

此形式结构为重言式, 即

$$(p \Rightarrow r) \wedge \neg p \Rightarrow \neg r$$

故推理正确.

推理是否正确, 可用多种方法证明. 证明的方法有真值表法, 等式演算法. 证明推理正确还可利用构造证明法.

下面用构造证明法证明(6)推理正确.

前提: $p \Rightarrow r, \neg p$

结论: $\neg r$

证明: ① $p \Rightarrow r$ 前提引入

② $(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)$ ①置换

③ $r \Rightarrow p$ ②化简律

④ $\neg p$ 前提引入

⑤ $\neg r$ ③④拒取式

所以, 推理正确.

3.7. 略

3.8. 略

3.9. 用三种方法(真值表法, 等值演算法, 主析取范式法)证明下面推理是正确的:

若 a 是奇数, 则 a 不能被 2 整除. 若 a 是偶数, 则 a 能被 2 整除. 因此, 如果 a 是偶数, 则 a 不是奇数.

令 p : a 是奇数; q : a 能被 2 整除; r : a 是偶数.

前提: $p \rightarrow \neg q, r \rightarrow q$.

结论: $r \rightarrow \neg p$.

形式结构: $(p \rightarrow \neg q) \wedge (r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$.

.....

3.10. 略

3.11. 略

3.12. 略

3.13. 略

3.14. 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明:

(1) 前提: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q$

结论: $r \vee s$

(2) 前提: $p \rightarrow q, \neg (q \wedge r), r$

结论: $\neg p$

(3) 前提: $p \rightarrow q$

结论: $p \rightarrow (p \wedge q)$

(4) 前提: $q \rightarrow p, q \Rightarrow s, s \Rightarrow t, t \wedge r$

结论: $p \wedge q$

(5) 前提: $p \rightarrow r, q \rightarrow s, p \wedge q$

结论: $r \wedge s$

(6)前提: $\neg p \vee r, \neg q \vee s, p \wedge q$

结论: $t \rightarrow (r \vee s)$

(1)证明:

- | | | |
|---|-----------------------------------|--------|
| ① | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | 前提引入 |
| ② | p | 前提引入 |
| ③ | $q \rightarrow r$ | ①②假言推理 |
| ④ | q | 前提引入 |
| ⑤ | r | ③④假言推理 |
| ⑥ | $r \vee s$ | ⑤附加律 |

(2)证明:

- | | | |
|---|----------------------|---------|
| ① | $\neg (q \wedge r)$ | 前提引入 |
| ② | $\neg q \vee \neg r$ | ①置换 |
| ③ | r | 前提引入 |
| ④ | $\neg q$ | ②③析取三段论 |
| ⑤ | $p \rightarrow q$ | 前提引入 |
| ⑥ | $\neg p$ | ④⑤拒取式 |

(3)证明:

- | | | |
|---|--|------|
| ① | $p \rightarrow q$ | 前提引入 |
| ② | $\neg p \vee q$ | ①置换 |
| ③ | $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee p)$ | ②置换 |
| ④ | $\neg p \vee (p \wedge q)$ | ③置换 |
| ⑤ | $p \rightarrow (p \wedge q)$ | ④置换 |

也可以用附加前提证明法,更简单些.

(4)证明:

- | | | |
|---|--|--------|
| ① | $s \Rightarrow t$ | 前提引入 |
| ② | $(s \rightarrow t) \wedge (t \rightarrow s)$ | ①置换 |
| ③ | $t \rightarrow s$ | ②化简 |
| ④ | $t \wedge r$ | 前提引入 |
| ⑤ | t | ④化简 |
| ⑥ | s | ③⑤假言推理 |
| ⑦ | $q \Rightarrow s$ | 前提引入 |
| ⑧ | $(s \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow s)$ | ⑦置换 |
| ⑨ | $s \rightarrow q$ | ⑧化简 |
| ⑩ | q | ⑥⑨假言推理 |

- | | | |
|---|-------------------|----------|
| ① | $q \rightarrow p$ | 前提引入 |
| ② | p | ⑩ ① 假言推理 |
| ③ | $p \wedge q$ | ⑩ ② 合取 |

(5)证明:

- | | | |
|---|-------------------|----------|
| ① | $p \rightarrow r$ | 前提引入 |
| ② | $q \rightarrow s$ | 前提引入 |
| ③ | $p \wedge q$ | 前提引入 |
| ④ | p | ③ 化简 |
| ⑤ | q | ③ 化简 |
| ⑥ | r | ① ④ 假言推理 |
| ⑦ | s | ② ⑤ 假言推理 |
| ⑧ | $r \wedge s$ | ⑥ ⑦ 合取 |

(6)证明:

- | | | |
|---|-----------------|-----------|
| ① | t | 附加前提引入 |
| ② | $\neg p \vee r$ | 前提引入 |
| ③ | $p \wedge q$ | 前提引入 |
| ④ | p | ③ 化简 |
| ⑤ | r | ② ④ 析取三段论 |
| ⑥ | $r \vee s$ | ⑤ 附加 |

说明: 证明中, 附加提前 t , 前提 $\neg q \vee s$ 没用上, 这仍是正确的推理.

3.15. 在自然推理系统 P 中用附加前提法证明下面各推理:

(1) 前提: $p \rightarrow (q \rightarrow r), s \rightarrow p, q$

结论: $s \rightarrow r$

(2) 前提: $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s), (s \vee t) \rightarrow u$

结论: $p \rightarrow u$

(1)证明:

- | | | |
|---|-----------------------------------|----------|
| ① | s | 附加前提引入 |
| ② | $s \rightarrow p$ | 前提引入 |
| ③ | p | ① ② 假言推理 |
| ④ | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | 前提引入 |
| ⑤ | $q \rightarrow r$ | ③ ④ 假言推理 |
| ⑥ | q | 前提引入 |
| ⑦ | r | ⑤ ⑥ 假言推理 |

(2)证明:

- | | | |
|---|---------------------------------------|--------|
| ① | P | 附加前提引入 |
| ② | $p \vee q$ | ①附加 |
| ③ | $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$ | 前提引入 |
| ④ | $r \wedge s$ | ②③假言推理 |
| ⑤ | S | ④化简 |
| ⑥ | $s \vee t$ | ⑤附加 |
| ⑦ | $(s \vee t) \rightarrow u$ | 前提引入 |
| ⑧ | u | ⑥⑦假言推理 |

3.16. 在自然推理系统 P 中用归谬法证明下面推理:

(1)前提: $p \rightarrow \neg q, \neg r \vee q, r \wedge \neg s$

结论: $\neg p$

(2)前提: $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s$

结论: $r \vee s$

(1)证明:

- | | | |
|---|------------------------|---------|
| ① | P | 结论否定引入 |
| ② | $p \rightarrow \neg q$ | 前提引入 |
| ③ | $\neg q$ | ①②假言推理 |
| ④ | $\neg r \vee q$ | 前提引入 |
| ⑤ | $\neg r$ | ③④析取三段论 |
| ⑥ | $r \wedge \neg s$ | 前提引入 |
| ⑦ | r | ⑥化简 |
| ⑧ | $\neg r \wedge r$ | ⑤⑦合取 |

⑧为矛盾式, 由归谬法可知, 推理正确.

(2)证明:

- | | | |
|---|-------------------------------------|----------|
| ① | $\neg (r \vee s)$ | 结论否定引入 |
| ② | $p \vee q$ | 前提引入 |
| ③ | $p \rightarrow r$ | 前提引入 |
| ④ | $q \rightarrow s$ | 前提引入 |
| ⑤ | $r \vee s$ | ②③④构造性二难 |
| ⑥ | $\neg (r \vee s) \wedge (r \vee s)$ | ①⑤合取 |

⑥为矛盾式, 所以推理正确.

3.17. P53 17. 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明:

只要 A 曾到过受害者房间并且 11 点以前没用离开, A 就犯了谋杀罪. A 曾到过受害者房间. 如果 A 在 11 点以前离开, 看门人会看到他. 看门人没有看到他. 所以 A 犯了谋杀罪.

令 p : A 曾到过受害者房间; q : A 在 11 点以前离开了; r : A 就犯了谋杀罪; s : 看门人看到 A.

前提: $p \wedge \neg q \rightarrow r, p, q \rightarrow s, \neg s$.

结论: r .

前提: $p \wedge \neg q \rightarrow r, p, q \rightarrow s, \neg s$; 结论: r .

证明:

- ① $\neg s$ 前提引入
- ② $q \rightarrow s$ 前提引入
- ③ $\neg q$ ①②拒取
- ④ p 前提引入
- ⑤ $p \wedge \neg q$ ③④合取
- ⑥ $p \wedge \neg q \rightarrow r$ 前提引入
- ⑦ r ⑤⑥假言推理

3.18. 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明.

(1) 如果今天是星期六, 我们就要到颐和园或圆明园去玩. 如果颐和园游人太多, 我们就不去颐和园玩.

今天是星期六. 颐和园游人太多. 所以我们去圆明园玩.

(2) 如果小王是理科学生, 他的数学成绩一定很好. 如果小王不是文科生, 他必是理科生. 小王的数学成绩不好. 所以小王是文科学生.

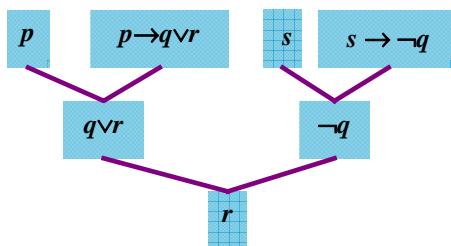
(3) 明天是晴天, 或是雨天; 若明天是晴天, 我就去看电影; 若我看电影, 我就不看书. 所以, 如果我看书, 则明天是雨天.

(1) 令 p : 今天是星期六; q : 我们要到颐和园玩; r : 我们要到圆明园玩; s : 颐和园游人太多.

前提: $p \rightarrow (q \vee r), s \rightarrow \neg q, p, s$.

结论: r .

①	p	前提引入
②	$p \rightarrow q \vee r$	前提引入
③	$q \vee r$	①②假言推理
④	s	前提引入
⑤	$s \rightarrow \neg q$	前提引入
⑥	$\neg q$	④⑤假言推理
⑦	r	③⑥析取三段论



(1) 的证明树

(2) 令 p : 小王是理科生, q : 小王是文科生, r : 小王的数学成绩很好.

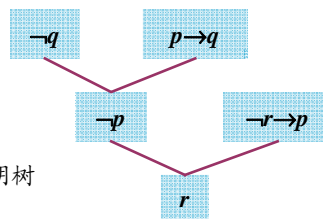
前提: $p \rightarrow r, \neg q \rightarrow p, \neg r$

结论: q

证明:

- | | | |
|---|------------------------|-------|
| ① | $p \rightarrow r$ | 前提引入 |
| ② | $\neg r$ | 前提引入 |
| ③ | $\neg p$ | ①②拒取式 |
| ④ | $\neg q \rightarrow p$ | 前提引入 |
| ⑤ | q | ③④拒取式 |

(2)的证明树



(3) 令 p : 明天是晴天, q : 明天是雨天, r : 我看电影, s : 我看书.

前提: $p \vee q, p \rightarrow r, r \rightarrow \neg s$

结论: $s \rightarrow q$

证明:

- | | | |
|---|------------------------|---------|
| ① | s | 附加前提引入 |
| ② | $r \rightarrow \neg s$ | 前提引入 |
| ③ | $\neg r$ | ①②拒取式 |
| ④ | $p \rightarrow r$ | 前提引入 |
| ⑤ | $\neg p$ | ③④拒取式 |
| ⑥ | $p \vee q$ | 前提引入 |
| ⑦ | q | ⑤⑥析取三段论 |

习题四

4.1. 将下面命题用 0 元谓词符号化:

- (1) 小王学过英语和法语.
 (2) 除非李建是东北人, 否则他一定怕冷.

(1) 令 $F(x)$: x 学过英语; $F(x)$: x 学过法语; a : 小王. 符号化为

$$F(a) \wedge F(b).$$

或进一步细分, 令 $L(x, y)$: x 学过 y ; a : 小王; b_1 : 英语; b_2 : 法语. 则符号化为

$$L(a, b_1) \wedge L(a, b_2).$$

(2) 令 $F(x)$: x 是东北人; $G(x)$: x 怕冷; a : 李建. 符号化为

$$\neg F(a) \rightarrow G(a) \text{ 或 } \neg G(a) \rightarrow F(a).$$

或进一步细分, 令 $H(x, y)$: x 是 y 地方人; $G(x)$: x 怕冷; a : 小王; b : 东北. 则符号化为

$$\neg H(a, b) \rightarrow G(a) \text{ 或 } \neg G(a) \rightarrow H(a, b).$$

4.2. 在一阶逻辑中将下面命题符号化, 并分别讨论个体域限制为(a),(b)时命题的真值:

- (1) 凡有理数都能被 2 整除.
 (2) 有的有理数能被 2 整除.

其中(a)个体域为有理数集合, (b)个体域为实数集合.

(1)(a)中, $\forall x F(x)$, 其中, $F(x)$: x 能被 2 整除, 真值为 0.

(b)中, $\forall x (G(x) \wedge F(x))$, 其中, $G(x)$: x 为有理数, $F(x)$ 同(a)中, 真值为 0.

(2)(a)中, $\exists x F(x)$, 其中, $F(x)$: x 能被 2 整除, 真值为 1.

(b)中, $\exists x (G(x) \wedge F(x))$, 其中, $F(x)$ 同(a)中, $G(x)$: x 为有理数, 真值为 1.

4.3. 在一阶逻辑中将下面命题符号化, 并分别讨论个体域限制为(a),(b)时命题的真值:

- (1) 对于任意的 x , 均有 $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$.
 (2) 存在 x , 使得 $x + 5 = 9$.

其中(a)个体域为自然数集合, (b)个体域为实数集合.

(1)(a)中, $\forall x (x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}))$, 真值为 1.

(b)中, $\forall x (F(x) \rightarrow (x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})))$, 其中, $F(x)$: x 为实数, 真值为 1.

(2)(a)中, $\exists x (x + 5 = 9)$, 真值为 1.

(b)中, $\exists x (F(x) \wedge (x + 5 = 9))$, 其中, $F(x)$: x 为实数, 真值为 1.

4.4. 在一阶逻辑中将下列命题符号化:

- (1) 没有不能表示成分数的有理数.
 (2) 在北京卖菜的人不全是外地人.

(3) 乌鸦都是黑色的.

(4) 有的人天天锻炼身体.

没指定个体域, 因而使用全总个体域.

(1) $\neg \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$, 其中, $F(x)$: x 为有理数, $G(x)$: x 能表示成分数.

(2) $\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 或 $\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$, 其中, $F(x)$: x 在北京卖菜, $G(x)$: x 是外地人.

(3) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$, 其中, $F(x)$: x 是乌鸦, $G(x)$: x 是黑色的.

(4) $\exists x(F(x) \wedge G(x))$, 其中, $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 天天锻炼身体.

4.5. 在一阶逻辑中将下列命题符号化:

(1) 火车都比轮船快.

(2) 有的火车比有的汽车快.

(3) 不存在比所有火车都快汽车.

(4) “凡是汽车就比火车慢”是不对的.

因为没指明个体域, 因而使用全总个体域

(1) $\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$, 其中, $F(x)$: x 是火车, $G(y)$: y 是轮船, $H(x, y)$: x 比 y 快.

(2) $\exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge H(x, y))$, 其中, $F(x)$: x 是火车, $G(y)$: y 是汽车, $H(x, y)$: x 比 y 快.

(3) $\neg \exists x (F(x) \wedge \forall y (G(y) \rightarrow H(x, y)))$

或 $\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge \neg H(x, y)))$, 其中, $F(x)$: x 是汽车, $G(y)$: y 是火车, $H(x, y)$: x 比 y 快.

(4) $\neg \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$

或 $\exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y))$, 其中, $F(x)$: x 是汽车, $G(y)$: y 是火车, $H(x, y)$: x 比 y 慢.

4.6. 略

4.7. 将下列各公式翻译成自然语言, 个体域为整数集 \mathbb{Z} , 并判断各命题的真假.

(1) $\forall x \forall y \exists z (x - y = z)$;

(2) $\forall x \exists y (x \cdot y = 1)$.

(1) 可选的翻译:

① “任意两个整数的差是整数.”

② “对于任意两个整数, 都存在第三个整数, 它等于这两个整数相减.”

③ “对于任意整数 x 和 y , 都存在整数 z , 使得 $x - y = z$.”

选③, 直接翻译, 无需数理逻辑以外的知识.

以下翻译意思相同, 都是错的:

❶ “有个整数, 它是任意两个整数的差.”

❷ “存在一个整数, 对于任意两个整数, 第一个整数都等于这两个整数相减.”

❸ “存在整数 z , 使得对于任意整数 x 和 y , 都有 $x - y = z$.”

这 3 个句子都可以符号化为

$$\exists z \forall x \forall y (x - y = z).$$

⊗ 量词顺序不可随意调换.

(2) 可选的翻译:

- ①“每个整数都有一个倒数.”
 ②“对于每个整数, 都能找到另一个整数, 它们相乘结果是零.”
 ③“对于任意整数 x , 都存在整数 y , 使得 $x \cdot y = z$.”

选③, 是直接翻译, 无需数理逻辑以外的知识.

4.8. 指出下列公式中的指导变元, 量词的辖域, 各个体变项的自由出现和约束出现:

$$(3) \forall x \exists y (F(x, y) \wedge G(y, z)) \vee \exists x H(x, y, z)$$

$$\forall x \exists y (F(x, y) \wedge G(y, z)) \vee \exists x H(x, y, z)$$

前件 $\forall x \exists y (F(x, y) \wedge G(y, z))$ 中, \forall 的指导变元是 x , \forall 的辖域是 $\exists y (F(x, y) \wedge G(y, z))$; \exists 的指导变元是 y , \exists 的辖域是 $(F(x, y) \wedge G(y, z))$.

后件 $\exists x H(x, y, z)$ 中, \exists 的指导变元是 x , \exists 的辖域是 $H(x, y, z)$.

整个公式中, x 约束出现两次, y 约束出现两次, 自由出现一次; z 自由出现两次.

4.9. 给定解释 I 如下:

- (a) 个体域 D_I 为实数集合 \mathbb{R} .
 (b) D_I 中特定元素 $\bar{a} = 0$.
 (c) 特定函数 $\bar{f}(x, y) = x - y, x, y \in D_I$.
 (d) 特定谓词 $\bar{F}(x, y): x = y, \bar{G}(x, y): x < y, x, y \in D_I$.

说明下列公式在 I 下的含义, 并指出各公式的真值:

- (1) $\forall x \forall y (G(x, y) \rightarrow \neg F(x, y))$
 (2) $\forall x \forall y (F(\bar{f}(x, y), \bar{a}) \rightarrow G(x, y))$
 (3) $\forall x \forall y (G(x, y) \rightarrow \neg F(\bar{f}(x, y), \bar{a}))$
 (4) $\forall x \forall y (G(\bar{f}(x, y), \bar{a}) \rightarrow F(x, y))$

- (1) $\forall x \forall y (x < y \rightarrow x \neq y)$, 真值为 1.
 (2) $\forall x \forall y ((x - y = 0) \rightarrow x < y)$, 真值为 0.
 (3) $\forall x \forall y ((x < y) \rightarrow (x - y \neq 0))$, 真值为 1.
 (4) $\forall x \forall y ((x - y < 0) \rightarrow (x = y))$, 真值为 0.

4.10. 给定解释 I 如下:

- (a) 个体域 $D = \mathbb{N}$ (\mathbb{N} 为自然数).
 (b) D 中特定元素 $\bar{a} = 2$.
 (c) D 上函数 $\bar{f}(x, y) = x + y, \bar{g}(x, y) = x \cdot y$.
 (d) D 上谓词 $\bar{F}(x, y): x = y$.

说明下列公式在 I 下的含义, 并指出各公式的真值:

- (1) $\forall x F(g(x, \bar{a}), x)$
 (2) $\forall x \forall y (F(\bar{f}(x, \bar{a}), y) \rightarrow F(\bar{f}(y, \bar{a}), x))$
 (3) $\forall x \forall y \exists z (F(\bar{f}(x, y), z))$
 (4) $\exists x F(\bar{f}(x, x), g(x, x))$

- (1) $\forall x(x \cdot 2 = x)$, 真值为 0.
 (2) $\forall x \forall y((x+2=y) \rightarrow (y+2=x))$, 真值为 0.
 (3) $\forall x \forall y \exists z(x+y=z)$, 真值为 1.
 (4) $\exists x(x+x=x \cdot x)$, 真值为 1.

4.11. 判断下列各式的类型:

- (1) $F(x, y) \rightarrow (G(x, y) \rightarrow F(x, y))$.
 (3) $\forall x \exists y F(x, y) \rightarrow \exists x \forall y F(x, y)$.
 (5) $\forall x \forall y (F(x, y) \rightarrow F(y, x))$.

- (1) 是命题重言式 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ 的代换实例, 所以是永真式.
 (3) 在某些解释下为假(举例), 在某些解释下为真(举例), 所以是非永真式的可满足式.
 (5) 同(3).

4.12. P69 12. 设 I 为一个任意的解释, 在解释 I 下, 下面哪些公式一定是命题?

- (1) $\forall x F(x, y) \rightarrow \exists y G(x, y)$.
 (2) $\forall x (F(x) \rightarrow G(x)) \wedge \exists y (F(y) \wedge H(y))$.
 (3) $\forall x (\forall y F(x, y) \rightarrow \exists y G(x, y))$.
 (4) $\forall x (F(x) \wedge G(x)) \wedge H(y)$.

- (2), (3) 一定是命题, 因为它们是闭式.

4.13. 略

4.14. 证明下面公式既不是永真式也不是矛盾式:

- (1) $\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x, y)))$
 (2) $\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$

- (1) 取个体域为全总个体域.

解释 I_1 : $F(x)$: x 为有理数, $G(y)$: y 为整数, $H(x, y)$: $x < y$

在 I_1 下: $\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x, y)))$ 为真命题, 所以该公式不是矛盾式.

解释 I_2 : $F(x), G(y)$ 同 I_1 , $H(x, y)$: y 整除 x .

在 I_2 下: $\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x, y)))$ 为假命题, 所以该公式不是永真式.

- (2) 请读者给出不同解释, 使其分别为成真和成假的命题即可.

4.15. (1) 给出一个非闭式的永真式.

- (2) 给出一个非闭式的永假式.
 (3) 给出一个非闭式的可满足式, 但不是永真式.

- (1) $F(x) \vee \neg F(x)$.
 (2) $F(x) \wedge \neg F(x)$.
 (3) $\forall x (F(x, y) \rightarrow F(y, x))$.

习题五

5.1. 略

5.2. 设个体域 $D=\{a,b,c\}$, 消去下列各式的量词:

(1) $\forall x \exists y (F(x) \wedge G(y))$

(2) $\forall x \forall y (F(x) \vee G(y))$

(3) $\forall x F(x) \rightarrow \forall y G(y)$

(4) $\forall x (F(x,y) \rightarrow \exists y G(y))$

(1) $\forall x \exists y (F(x) \wedge G(y))$

$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \exists y G(y)$

$\Leftrightarrow (F(a) \wedge F(b)) \wedge F(c) \wedge (G(a) \vee G(b) \vee G(c))$

(2) $\forall x \forall y (F(x) \vee G(y))$

$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall y G(y)$

$\Leftrightarrow (F(a) \wedge F(b) \wedge F(c)) \vee (G(a) \wedge G(b) \wedge G(c))$

(3) $\forall x F(x) \rightarrow \forall y G(y)$

$\Leftrightarrow (F(a) \wedge F(b) \wedge F(c)) \rightarrow (G(a) \wedge G(b) \wedge G(c))$

(4) $\forall x (F(x,y) \rightarrow \exists y G(y))$

$\Leftrightarrow \exists x F(x,y) \rightarrow \exists y G(y)$

$\Leftrightarrow (F(a,y) \vee F(b,y) \vee F(c,y)) \rightarrow (G(a) \vee G(b) \vee G(c))$

5.3. 设个体域 $D=\{1,2\}$, 请给出两种不同的解释 I_1 和 I_2 , 使得下面公式在 I_1 下都是真命题, 而在 I_2 下都是假命题.

(1) $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$

(2) $\exists x (F(x) \wedge G(x))$

(1) $I_1: F(x):x \leq 2, G(x):x \leq 3$

 $F(1), F(2), G(1), G(2)$ 均为真, 所以

$\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow (F(1) \rightarrow G(1)) \wedge (F(2) \rightarrow G(2))$ 为真.

$I_2: F(x)$ 同 $I_1, G(x):x \leq 0$

则 $F(1), F(2)$ 均为真, 而 $G(1), G(2)$ 均为假,

$\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$ 为假.

(2) 留给读者自己做.

5.4. 略

5.5. 给定解释 I 如下:(a) 个体域 $D=\{3,4\}$.(b) $\bar{f}(x)$ 为 $\bar{f}(3)=4, \bar{f}(4)=3$.(c) $\bar{F}(x,y)$ 为 $\bar{F}(3,3)=\bar{F}(4,4)=0, \bar{F}(3,4)=\bar{F}(4,3)=1$.

试求下列公式在 I 下的真值:

$$(1) \forall x \exists y F(x, y)$$

$$(2) \exists x \forall y F(x, y)$$

$$(3) \forall x \forall y (F(x, y) \rightarrow F(f(x), f(y)))$$

$$(1) \forall x \exists y F(x, y)$$

$$\Leftrightarrow (F(3, 3) \vee F(3, 4)) \wedge (F(4, 3) \vee F(4, 4))$$

$$\Leftrightarrow (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) \Leftrightarrow 1$$

$$(2) \exists x \forall y F(x, y)$$

$$\Leftrightarrow (F(3, 3) \wedge F(3, 4)) \vee (F(4, 3) \wedge F(4, 4))$$

$$\Leftrightarrow (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \Leftrightarrow 0$$

$$(3) \forall x \forall y (F(x, y) \rightarrow F(f(x), f(y)))$$

$$\Leftrightarrow (F(3, 3) \rightarrow F(f(3), f(3)))$$

$$\wedge (F(4, 3) \rightarrow F(f(4), f(3)))$$

$$\wedge (F(3, 4) \rightarrow F(f(3), f(4)))$$

$$\wedge (F(4, 4) \rightarrow F(f(4), f(4)))$$

$$\Leftrightarrow (0 \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 1) \wedge (0 \rightarrow 0) \Leftrightarrow 1$$

5.6. 略

5.7. 略

5.8. 在一阶逻辑中将下列命题符号化, 要求用两种不同的等值形式.

(1) 没有小于负数的正数.

(2) 相等的两个角未必都是对顶角.

(1) 令 $F(x)$: x 小于负数, $G(x)$: x 是正数. 符合化为:

$$\exists \neg x((F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall x(G(x) \rightarrow \neg G(x)).$$

(2) 令 $F(x)$: x 是角, $H(x, y)$: x 和 y 是相等的, $L(x, y)$: x 与 y 是对顶角. 符合化为:

$$\neg \forall x \forall y (F(x) \wedge F(y) \wedge H(x, y) \rightarrow L(x, y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \wedge F(y) \wedge H(x, y) \wedge \neg L(x, y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x) \wedge (\exists y (F(y) \wedge H(x, y) \wedge \neg L(x, y))))$$

5.9. 略

5.10. 略

5.11. 略

5.12. 求下列各式的前束范式.

$$(1) \forall x F(x) \rightarrow \forall y G(x, y);$$

$$(3) \forall x F(x, y) \leftrightarrow \exists x G(x, y);$$

$$(5) \exists x_1 F(x_1, x_2) \rightarrow (F(x_1) \rightarrow \exists x_2 G(x_1, x_2)).$$

前束范式不是唯一的.

$$(1) \forall x F(x) \rightarrow \forall y G(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x) \rightarrow \forall y G(x, y))$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \exists x \forall y (F(x) \rightarrow G(x, y)). \\
(3) &\forall x F(x, y) \Leftrightarrow \exists x G(x, y) \\
&\Leftrightarrow (\forall x F(x, y) \rightarrow \exists x G(x, y)) \wedge (\exists x G(x, y) \rightarrow \forall x F(x, y)) \\
&\Leftrightarrow (\forall x_1 F(x_1, y) \rightarrow \exists x_2 G(x_2, y)) \wedge (\exists x_3 G(x_3, y) \rightarrow \forall x_4 F(x_4, y)) \\
&\Leftrightarrow \exists x_1 \exists x_2 (F(x_1, y) \rightarrow G(x_2, y)) \wedge \forall x_3 \forall x_4 (G(x_3, y) \rightarrow F(x_4, y)) \\
&\Leftrightarrow \exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall x_4 ((F(x_1, y) \rightarrow G(x_2, y)) \wedge (G(x_3, y) \rightarrow F(x_4, y))).
\end{aligned}$$

5.13. 将下列命题符号化, 要求符号化的公式全为前束范式:

- (1) 有的汽车比有的火车跑得快.
- (2) 有的火车比所有的汽车跑得快.
- (3) 说所有的火车比所有的汽车跑得快是不对的.
- (4) 说有的飞机比有的汽车慢是不对的.

(1) 令 $F(x)$: x 是汽车, $G(y)$: y 是火车, $H(x, y)$: x 比 y 跑得快.

$$\begin{aligned}
&\exists x(F(x) \wedge \exists y(G(y) \wedge H(x, y))) \\
&\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge H(x, y)).
\end{aligned}$$

(2) 令 $F(x)$: x 是火车, $G(y)$: y 是汽车, $H(x, y)$: x 比 y 跑得快.

$$\begin{aligned}
&\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow H(x, y))) \\
&\Leftrightarrow \exists x \forall y (F(x) \wedge (G(y) \rightarrow H(x, y))).
\end{aligned}$$

⊗ 错误的答案: $\exists x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$.

(3) 令 $F(x)$: x 是火车, $G(y)$: y 是汽车, $H(x, y)$: x 比 y 跑得快.

$$\begin{aligned}
&\neg \forall x(F(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow H(x, y))) \\
&\Leftrightarrow \neg \forall x \forall y (F(x) \rightarrow (G(y) \rightarrow H(x, y))) \\
&\Leftrightarrow \neg \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)) \quad (\text{不是前束范式}) \\
&\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge H(x, y)).
\end{aligned}$$

(4) 令 $F(x)$: x 是飞机, $G(y)$: y 是汽车, $H(x, y)$: x 比 y 跑得慢.

$$\begin{aligned}
&\neg \exists x(F(x) \wedge \exists y(G(y) \wedge H(x, y))) \\
&\Leftrightarrow \neg \exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge H(x, y)) \quad (\text{不是前束范式}) \\
&\Leftrightarrow \forall x \forall y \neg (F(x) \wedge G(y) \wedge H(x, y)) \\
&\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow \neg H(x, y)).
\end{aligned}$$

5.14. 略

5.15. 在自然推理系统 F 中构造下面推理的证明:

(1) 前提: $\exists x F(x) \rightarrow \forall y ((F(y) \vee G(y)) \rightarrow R(y)), \exists x F(x)$

结论: $\exists x R(x)$.

(2) 前提: $\forall x (F(x) \rightarrow (G(a) \wedge R(x))), \exists x F(x)$

结论: $\exists x (F(x) \wedge R(x))$

(3) 前提: $\forall x (F(x) \vee G(x)), \neg \exists x G(x)$

结论: $\exists x F(x)$

(4) 前提: $\forall x (F(x) \vee G(x)), \forall x (\neg G(x) \vee \neg R(x)), \forall x R(x)$

结论: $\forall x F(x)$

(1) 证明:

- | | | |
|---|--|--------|
| ① | $\exists x F(x) \rightarrow \forall y ((F(y) \vee G(y)) \rightarrow R(y))$ | 前提引入 |
| ② | $\exists x F(x)$ | 前提引入 |
| ③ | $\forall y ((F(y) \vee G(y)) \rightarrow R(y))$ | ①②假言推理 |
| ④ | $(F(c) \vee G(c)) \rightarrow R(c)$ | ③UI |
| ⑤ | $F(c)$ | ①EI |
| ⑥ | $F(c) \vee G(c)$ | ⑤附加 |
| ⑦ | $R(c)$ | ④⑥假言推理 |
| ⑧ | $\exists x R(x)$ | ⑦EG |

(2) 证明:

- | | | |
|---|---|--------|
| ① | $\exists x F(x)$ | 前提引入 |
| ② | $F(c)$ | ①EI |
| ③ | $\forall x (F(x) \rightarrow (G(a) \wedge (R(x))))$ | 前提引入 |
| ④ | $F(c) \rightarrow (G(a) \wedge R(c))$ | ④UI |
| ⑤ | $G(a) \wedge R(c)$ | ②④假言推理 |
| ⑥ | $R(c)$ | ⑤化简 |
| ⑦ | $F(c) \wedge R(c)$ | ②⑥合取 |
| ⑧ | $\exists x (F(x) \wedge R(x))$ | ⑦EG |

(3) 证明:

- | | | |
|---|------------------------------|---------|
| ① | $\neg \exists x G(x)$ | 前提引入 |
| ② | $\forall x \neg G(x)$ | ①置换 |
| ③ | $\neg G(c)$ | ②UI |
| ④ | $\forall x (F(x) \vee G(x))$ | 前提引入 |
| ⑤ | $F(c) \vee G(c)$ | ④UI |
| ⑥ | $F(c)$ | ③⑤析取三段论 |
| ⑦ | $\exists x F(x)$ | ⑥EG |

(4) 证明:

- | | | |
|---|--|---------|
| ① | $\forall x (F(x) \vee G(x))$ | 前提引入 |
| ② | $F(y) \vee G(y)$ | ①UI |
| ③ | $\forall x (\neg G(x) \vee \neg R(x))$ | 前提引入 |
| ④ | $\neg G(y) \vee \neg R(y)$ | ③UI |
| ⑤ | $\forall x R(x)$ | 前提引入 |
| ⑥ | $R(y)$ | ⑤UI |
| ⑦ | $\neg G(y)$ | ④⑥析取三段论 |
| ⑧ | $F(y)$ | ②⑦析取三段论 |
| ⑨ | $\forall x F(x)$ | UG |

5.17.略

5.18.略

5.19.略

5.20.略

5.21.略

5.22.略

5.23.在自然推理系统 F 中, 证明下面推理:

- (1) 每个有理数都是实数, 有的有理数是整数, 因此有的实数是整数.
 (2) 有理数, 无理数都是实数, 虚数不是实数, 因此虚数既不是有理数, 也不是无理数.
 (3) 不存在能表示成分数的无理数, 有理数都能表示成分数, 因此有理数都不是无理数.

(1)

设 $F(x):x$ 为有理数, $R(x):x$ 为实数, $G(x):x$ 是整数.前提: $\forall x(F(x) \rightarrow R(x)), \exists x(F(x) \wedge G(x))$ 结论: $\exists x(R(x) \wedge G(x))$

证明:

- | | | |
|---|------------------------------------|--------|
| ① | $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ | 前提引入 |
| ② | $F(c) \wedge G(c)$ | ①EI |
| ③ | $F(c)$ | ②化简 |
| ④ | $G(c)$ | ②化简 |
| ⑤ | $\forall x(F(x) \rightarrow R(x))$ | 前提引入 |
| ⑥ | $F(c) \rightarrow R(c)$ | ⑤UI |
| ⑦ | $R(c)$ | ③⑥假言推理 |
| ⑧ | $R(c) \wedge G(c)$ | ④⑦合取 |
| ⑨ | $\exists x(R(x) \wedge G(x))$ | ⑧EG |

(2)

设: $F(x):x$ 为有理数, $G(x):x$ 为无理数, $R(x)$ 为实数, $H(x)$ 为虚数前提: $\forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow R(x)), \forall x(H(x) \rightarrow \neg R(x))$ 结论: $\forall x(H(x) \rightarrow (\neg F(x) \wedge \neg G(x)))$

证明:

- | | | |
|---|---|---------|
| ① | $\forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow R(x))$ | 前提引入 |
| ② | $F(y) \vee G(y) \rightarrow R(y)$ | ①UI |
| ③ | $\forall x(H(x) \rightarrow \neg R(x))$ | 前提引入 |
| ④ | $H(y) \rightarrow \neg R(y)$ | ③UI |
| ⑤ | $\neg R(y) \rightarrow \neg (F(y) \vee G(y))$ | ②置换 |
| ⑥ | $H(y) \rightarrow \neg (F(y) \vee G(y))$ | ④⑤假言三段论 |
| ⑦ | $H(y) \rightarrow (\neg F(y) \wedge \neg G(y))$ | ⑥置换 |

$$\textcircled{8} \quad \forall x(H(x) \rightarrow (\neg F(x) \wedge \neg G(x))) \quad \textcircled{7} \text{UG}$$

(3)

设: $F(x)$: x 能表示成分数, $G(x)$: x 为无理数, $H(x)$ 为有理数

前提: $\forall x(G(x) \rightarrow \neg F(x)), \forall x(H(x) \rightarrow F(x))$

结论: $\forall x(H(x) \rightarrow \neg G(x))$

证明:

- | | | |
|---|---|---------|
| ① | $\forall x(H(x) \rightarrow F(x))$ | 前提引入 |
| ② | $H(y) \rightarrow F(y)$ | ①UI |
| ③ | $\forall x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$ | 前提引入 |
| ④ | $G(y) \rightarrow \neg F(y)$ | ③UI |
| ⑤ | $F(y) \rightarrow \neg G(y)$ | ④置换 |
| ⑥ | $H(y) \rightarrow \neg G(y)$ | ②⑤假言三段论 |
| ⑦ | $\forall x(H(x) \rightarrow \neg G(x))$ | ⑥UG |

5.24. 在自然推理系统 F 中, 构造下面推理的证明:

每个喜欢步行的人都不喜欢骑自行车. 每个人或者喜欢骑自行车或者喜欢乘汽车. 有的人不喜欢乘汽车, 所以有的人不喜欢步行. (个体域为人类集合)

令 $F(x)$: x 喜欢步行, $G(x)$: x 喜欢骑自行车, $H(x)$: x 喜欢乘汽车.

前提: $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x)), \forall x(G(x) \vee H(x)), \exists x \neg H(x)$.

结论: $\exists x \neg F(x)$.

- | | | |
|---|---|--------|
| ① | $\forall x(G(x) \vee H(x))$ | 前提引入 |
| ② | $G(c) \vee H(c)$ | ①UI |
| ③ | $\exists x \neg H(x)$ | 前提引入 |
| ④ | $\neg H(c)$ | ③UI |
| ⑤ | $G(c)$ | ②④析取三段 |
| ⑥ | $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$ | 前提引入 |
| ⑦ | $F(c) \rightarrow \neg G(c)$ | ⑥UI |
| ⑧ | $\neg F(c)$ | ⑤⑦拒取 |
| ⑨ | $\exists x \neg F(x)$ | ⑧EG |

5.25. 略

习题六

6.1. 选择适当的谓词表示下列集合:

- (1) 小于 5 的非负整数
- (2) 奇整数集合
- (3) 10 的整倍数的集合

$$(1) \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq x < 5\}$$

$$(2) \{x | x = 2k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$$

$$(3) \{x | x = 10k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$$

6.2. 用列元素法表示下列集合:

- (1) $S_1 = \{x | x \text{ 是十进制的数字}\}$
- (2) $S_2 = \{x | x = 2 \vee x = 5\}$
- (3) $S_3 = \{x | x = x \in \mathbb{Z} \wedge 3 < x < 12\}$
- (4) $S_4 = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 1 = 0 \wedge x > 3\}$
- (5) $S_5 = \{\langle x, y \rangle | x, y \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq x \leq 2 \wedge -1 \leq y \leq 0\}$

$$(1) S_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$(2) S_2 = \{2, 5\}$$

$$(3) S_3 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

$$(4) S_4 = \emptyset$$

$$(5) S_5 = \{\langle 0, -1 \rangle, \langle 1, -1 \rangle, \langle 2, -1 \rangle, \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle\}$$

6.3. 略

6.4. 设 F 表示一年级大学生的集合, S 表示二年级大学生的集合, M 表示数学专业学生的集合, R 表示计算机专业学生的集合, T 表示听离散数学课学生的集合, G 表示星期一晚上参加音乐会的学生的集合, H 表示星期一晚上很迟才睡觉的学生的集合. 问下列各句子所对应的集合表达式分别是什么? 请从备选的答案中挑出来.

- (1) 所有计算机专业二年级的学生在学离散数学课.
- (2) 这些且只有这些学离散数学课的学生或者星期一晚上去听音乐会的学生在星期一晚上很迟才睡觉.
- (3) 听离散数学课的学生都没参加星期一晚上的音乐会.
- (4) 这个音乐会只有大学一、二年级的学生参加.
- (5) 除去数学专业和计算机专业以外的二年级学生都去参加了音乐会.

备选答案:

- ① $T \subseteq G \cup H$ ② $G \cup H \subseteq T$ ③ $S \cap R \subseteq T$
- ④ $H = G \cup T$ ⑤ $T \cap G = \emptyset$ ⑥ $F \cup S \subseteq G$
- ⑦ $G \subseteq F \cup S$ ⑧ $S - (R \cup M) \subseteq G$ ⑨ $G \subseteq S - (R \cap M)$

答案:

- (1) ③ $S \cap R \subseteq T$
- (2) ④ $H = G \cup T$
- (3) ⑤ $T \cap G = \emptyset$
- (4) ⑦ $G \subseteq F \cup S$
- (5) ⑧ $S - (R \cup M) \subseteq G$

6.5. 确定下列命题是否为真:

- (1) $\emptyset \subseteq \emptyset$
- (2) $\emptyset \in \emptyset$
- (3) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- (4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- (5) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

- (6) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$
(7) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$
(8) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(1) 真(2)假(3) 真(4) 真(5) 真(6) 真(7) 真(8) 假

6.6. 略
6.7. 略
6.8. 略
6.9. 略
6.10. 略
6.11. 略
6.12. 略
6.13. 略
6.14. 略
6.15. 略
6.16. 略
6.17. 略
6.18. 略
6.19. 略
6.20. 略
6.21. 略
6.22. 略
6.23. 略
6.24. 略
6.25. 略
6.26. 略
6.27. 略
6.28. 略
6.29. 略
6.30. 略
6.31. 略
6.32. 略
6.33. 略
6.34. 略
6.35. 略
6.36. 略
6.37. 略
6.38. 略
6.39. 略
6.40. 略
6.41. 略
6.42. 略
6.43. 略
6.44. 略
6.45. 略

习题七

7.1. 已知 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, 求 $A \times P(A)$.

$$A \times P(A) = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{\emptyset\} \rangle, \langle \emptyset, \{\{\emptyset\}\} \rangle, \langle \emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rangle, \langle \{\emptyset\}, \emptyset \rangle, \langle \{\emptyset\}, \{\emptyset\} \rangle, \langle \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\} \rangle, \langle \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rangle \}$$

7.2. 对于任意集合 A, B, C , 若 $A \times B \subset A \times C$, 是否一定有 $B \subset C$ 成立? 为什么?

不一定, 因为有反例: $A=\emptyset, B=\{1\}, C=\{2\}, B\subset C, A\times B=\emptyset=A\times C$.

7.3. 设 A, B, C, D 是任意集合,

(1) 求证 $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

(2) 下列等式中哪个成立? 那些不成立? 对于成立的给出证明, 对于不成立的举一反三例.

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$$

$$(A-B) \times (C-D) = (A \times C) - (B \times D)$$

$$(1) \forall \langle x, y \rangle$$

$$\langle x,y \rangle \in (A \cap B) \times (C \cap D) \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \cap D \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \wedge \langle x, y \rangle \in (C \times D) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \cap C \times D$$

$$\therefore (A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

(2) 都不成立, 反例: $A=\{1,2\}, B=\{2,3\}, C=\{1,2\}, D=\{2,3\}$

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \supset (A \times C) \cup (B \times D)$$

$$(A-B) \times (C-D) = \{1\} \times \{1\} \subset (A \times C) - (B \times D)$$

7.4. 略

7.5. 设 A, B 为任意集合, 证明

若 $A \times A = B \times B$, 则 $A = B$.

$\forall x,$

$$x \in A \Leftrightarrow \langle x, x \rangle \in A \times A \Leftrightarrow \langle x, x \rangle \in B \times B \Leftrightarrow x \in B$$

$$\therefore A=B$$

7.6. 列出从集合 $A=\{1, 2\}$ 到 $B=\{1\}$ 的所有的二元关系.

$$R_1 = \emptyset, R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle\}, R_2 = \{\langle 2, 1 \rangle\}, R_3 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}.$$

7.7. 列出集合 $A=\{2, 3, 4\}$ 上的恒等关系 I_A , 全域关系 E_A , 小于或等于关系 L_A , 整除关系 D_A .

$$I_A = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$$

$$E_A = A \times A = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$$

$$L_A = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$$

$$D_A = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$$

7.8. 列出集合 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$ 上的包含关系.

$$R_{\subseteq} = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{ \emptyset \} \rangle, \langle \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \rangle, \langle \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \} \rangle, \langle \{ \emptyset \}, \{ \emptyset \} \rangle, \langle \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \rangle, \langle \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \rangle, \langle \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \rangle, \langle \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \rangle, \langle \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \} \rangle, \langle \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \rangle, \langle \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \} \rangle, \langle \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \} \rangle \}$$

7.9. 设 $A=\{1, 2, 4, 6\}$, 列出下列关系 R :

$$(1) R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x + y \neq 2 \}$$
$$(2) R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge |x - y| = 1 \}$$

- (3) $R = \{\langle x, y \rangle | x, y \in A \wedge x/y \in A\}$
 (4) $R = \{\langle x, y \rangle | x, y \in A \wedge y \text{ 为素数}\}$

- (1) $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 6 \rangle, \langle 6, 1 \rangle, \langle 6, 2 \rangle, \langle 6, 4 \rangle, \langle 6, 6 \rangle\} = E_A - \{\langle 1, 1 \rangle\}$
 (2) $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$
 (3) $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle\}$
 (4) $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 6, 2 \rangle\}$

7.10. 略

7.11. R_i 是 X 上的二元关系, 对于 $x \in X$ 定义集合

$$R_i(x) = \{y | xR_i y\}.$$

显然 $R_i(x) \subseteq X$. 如果 $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, 且令

$$R_1 = \{\langle x, y \rangle | x, y \in X \wedge x < y\}$$

$$R_2 = \{\langle x, y \rangle | x, y \in X \wedge y - 1 < x < y + 2\}$$

$$R_3 = \{\langle x, y \rangle | x, y \in X \wedge x^2 \leq y\}$$

求 $R_1(0), R_1(1), R_2(0), R_2(-1), R_3(3)$.

$$R_1(0) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R_1(1) = \{2, 3, 4\}$$

$$R_2(0) = \{-1, 0\}$$

$$R_2(-1) = \{-2, -1\}$$

$$R_3(3) = \emptyset$$

7.12. 设 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, R 是 A 上的关系, 且

$$R = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$$

给出 R 的关系矩阵和关系图.

7.13. 设

$$A = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$$

$$B = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$$

求 $A \cup B, A \cap B, \text{dom} A, \text{dom}(A \cup B), \text{ran} A, \text{ran} B, \text{ran}(A \cap B), \text{fld}(A - B)$.

$$A \cup B = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$$

$$A \cap B = \{\langle 2, 4 \rangle\}$$

$$\text{dom} A = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{dom}(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{ran} A = \{2, 3, 4\}$$

$$\text{ran} B = \{3, 4, 2\}$$

$$\text{ran}(A \cap B) = \{4\}$$

$$\text{fld}(A - B) = \{1, 2, 3\}$$

7.14. 设

$$R = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

求 $R \circ R, R^{-1}, R \upharpoonright \{0, 1\}, R[\{1, 2\}]$.

$$R \circ R = \{\langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$$

$$R^{-1} = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 3, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$$

$$R \upharpoonright \{0, 1\} = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$$

$$R[\{1, 2\}] = \{2, 3\}$$

7.15. 设

$$A = \{\langle \emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rangle, \langle \{\emptyset\}, \emptyset \rangle\}$$

求 $A^{-1}, A^2, A^3, A \upharpoonright \{\emptyset\}, A[\emptyset], A \upharpoonright \emptyset, A \upharpoonright \{\{\emptyset\}\}, A[\{\{\emptyset\}\}]$.

$$A^{-1} = \{\langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{\emptyset\} \rangle\},$$

$$A^2 = \{\langle \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rangle\},$$

$$A^3 = \emptyset,$$

$$A \upharpoonright \{\emptyset\} = \{\langle \emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rangle\},$$

$$A[\emptyset] = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

$$A \setminus \emptyset = \emptyset,$$

$$A \setminus \{\{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}, \emptyset\},$$

$$A[\{\{\emptyset\}\}] = \emptyset$$

7.16. 设 $A = \{a, b, c, d\}$, R_1, R_2 为 A 上的关系, 其中

$$R_1 = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, d \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle\}$$

求 $R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1, R_1^2, R_2^3$.

$$R_1 \circ R_2 = \{\langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle\},$$

$$R_2 \circ R_1 = \{\langle c, d \rangle\},$$

$$R_1^2 = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle\},$$

$$R_2^3 = \{\langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle\}$$

7.17. 设 $A = \{a, b, c\}$, 试给出 A 上两个不同的关系 R_1 和 R_2 , 使得 $R_1^2 = R_1, R_2^3 = R_2$.

$$R_1 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\},$$

$$R_2 = \{\langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle\}$$

7.18. 证明定理 7.4 的(1), (2), (4).

$$(1) F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$$

任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in F \circ (G \cup H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G \cup H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge (\langle t, y \rangle \in G \vee \langle t, y \rangle \in H))$$

$$\Leftrightarrow \exists t ((\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G) \vee (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in H))$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G) \vee \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in H)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F \circ G \vee \langle x, y \rangle \in F \circ H$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F \circ G \cup F \circ H$$

所以有 $F \circ (G \cup H) \subseteq F \circ G \cup F \circ H$.

$$(2) (G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$$

任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in (G \cup H) \circ F$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in G \cup H \wedge \langle t, y \rangle \in F)$$

$$\Leftrightarrow \exists t ((\langle x, t \rangle \in G \vee \langle x, t \rangle \in H) \wedge \langle t, y \rangle \in F)$$

$$\Leftrightarrow \exists t ((\langle x, t \rangle \in G \wedge \langle t, y \rangle \in F) \vee (\langle x, t \rangle \in H \wedge \langle t, y \rangle \in F))$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in G \wedge \langle t, y \rangle \in F) \vee \exists t (\langle x, t \rangle \in H \wedge \langle t, y \rangle \in F)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in G \circ F \vee \langle x, y \rangle \in H \circ F$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in G \circ F \cup H \circ F$$

$$(4) (G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$$

任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in (G \cap H) \circ F$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in (G \cap H) \wedge \langle t, y \rangle \in F)$$

$$\Leftrightarrow \exists t ((\langle x, t \rangle \in G \wedge \langle t, y \rangle \in H) \wedge \langle t, y \rangle \in F)$$

$$\Leftrightarrow \exists t ((\langle x, t \rangle \in G \wedge \langle t, y \rangle \in F) \wedge (\langle x, t \rangle \in H \wedge \langle t, y \rangle \in F))$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in G \wedge \langle t, y \rangle \in F) \wedge \exists t (\langle x, t \rangle \in H \wedge \langle t, y \rangle \in F)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in G \circ F \wedge \langle x, y \rangle \in H \circ F$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in G \circ F \cap H \circ F$$

7.19. 证明定理 7.5 的(2), (3).

$$(2) F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$$

任取 y ,

$$\begin{aligned}
& y \in F[A \cup B] \\
& \Leftrightarrow \exists x (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in A \cup B) \\
& \Leftrightarrow \exists x (\langle x, y \rangle \in F \wedge (x \in A \vee x \in B)) \\
& \Leftrightarrow \exists x ((\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in A) \vee (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in B)) \\
& \Leftrightarrow \exists x (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in A) \vee \exists x (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in B) \\
& \Leftrightarrow y \in F[A] \vee y \in F[B] \\
& \Leftrightarrow y \in F[A] \cup F[B]
\end{aligned}$$

所以有 $F[A \cap B] = F[A] \cap F[B]$.

$$(3) F \upharpoonright (A \cap B) \subseteq F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$$

$$\begin{aligned}
& \text{任取 } \langle x, y \rangle \\
& \langle x, y \rangle \in F \upharpoonright (A \cap B) \\
& \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F \wedge x \in (A \cap B) \\
& \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F \wedge (x \in A \wedge x \in B) \\
& \Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in A) \wedge (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in B) \\
& \Rightarrow \langle x, y \rangle \in F \upharpoonright A \wedge \langle x, y \rangle \in F \upharpoonright B \\
& \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B
\end{aligned}$$

所以有 $F \upharpoonright (A \cup B) \subseteq F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$.

7.20. 设 R_1 和 R_2 为 A 上的关系, 证明:

$$(1) (R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$$

$$(2) (R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$$

$$\begin{aligned}
& (1) (R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} \\
& \text{任取 } \langle x, y \rangle \\
& \langle x, y \rangle \in (R_1 \cup R_2)^{-1} \\
& \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in (R_1 \cup R_2) \\
& \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \vee \langle y, x \rangle \in R_2 \\
& \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \vee \langle x, y \rangle \in R_2^{-1} \\
& \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}
\end{aligned}$$

所以 $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

$$\begin{aligned}
& (2) (R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1} \\
& \text{任取 } \langle x, y \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle x, y \rangle \in (R_1 \cap R_2)^{-1} \\
& \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in (R_1 \cap R_2) \\
& \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \wedge \langle y, x \rangle \in R_2 \\
& \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \wedge \langle x, y \rangle \in R_2^{-1} \\
& \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \cap R_2^{-1}
\end{aligned}$$

所以 $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

7.21. 略

7.22. 略

7.23. 略

7.24. 略

7.25. 略

7.26. 略

7.27. 略

7.28. 略

7.29. 略

7.30. 略

7.31. 略

7.32. 略

7.33. 略

7.34. 略

7.35. 略

7.36. 略

7.37. 略

7.38. 略

7.39. 略

7.40. 略

7.41. 略
7.42. 略
7.43. 略
7.44. 略
7.45. 略
7.46. 略
7.47. 略
7.48. 略
7.49. 略
7.50. 略

SSSaei

习题八

8.1. 1 设 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 且

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x \text{ 为奇数} \\ \frac{x}{2} & \text{若 } x \text{ 为偶数} \end{cases}$$

求 $f(0), f(\{0\}), f(1), f(\{1\}), f(\{0, 2, 4, 6, \dots\}), f(\{4, 6, 8\}), f(\{1, 3, 5, 7\})$

$f(0) = 0,$
 $f(\{0\}) = \{f(0)\} = \{0\},$
 $f(1) = 1, f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{1\},$
 $f(\{0, 2, 4, 6, \dots\}) = \{f(0), f(2), f(4), f(6), \dots\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N},$
 $f(\{4, 6, 8\}) = \{f(4), f(6), f(8)\} = \{2, 3, 4\},$
 $f(\{1, 3, 5, 7\}) = \{1, 1, 1, 1\} = \{1\}.$

8.2. 2. 设 $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$, 求 B^A .

$B^A = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$
 $f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle\}, f_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle\}, f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, c \rangle\},$
 $f_4 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle\}, f_5 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle\}, f_6 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, c \rangle\},$
 $f_7 = \{\langle 1, c \rangle, \langle 2, a \rangle\}, f_8 = \{\langle 1, c \rangle, \langle 2, b \rangle\}, f_9 = \{\langle 1, c \rangle, \langle 2, c \rangle\}.$

8.3. 3. 给定函数 f 和集合 A, B 如下:

- (1) $f: R \rightarrow R, f(x) = x, A = \{8\}, B = \{4\}$
- (2) $f: R \rightarrow R^+, f(x) = 2x, A = \{1\}, B = \{1, 2\}$
- (3) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f(x) = \langle x, x+1 \rangle, A = \{5\}, B = \{\langle 2, 3 \rangle\}$
- (4) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x+1, A = \{2, 3\}, B = \{1, 3\}$
- (5) $f: Z \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = |x|, A = \{-1, 2\}, B = \{1\}$
- (6) $f: S \rightarrow S, S = [0, 1], f(x) = x/2 + 1/4, A = (0, 1), B = [1/4, 1/2]$
- (7) $f: S \rightarrow R, S = [0, +\infty), f(x) = 1/(x+1), A = \{0, 1/2\}, B = \{1/2\}$
- (8) $f: S \rightarrow R^+, S = (0, 1), f(x) = 1/x, A = S, B = \{2, 3\}.$

对以上每一组 f 和 A, B , 分别回答以下问题:

- (a) f 是不是满射, 单射和双射的? 如果 f 是双射的, 求 f 的反函数.
- (b) 求 A 在 f 下的像 $f(A)$ 和 B 在 f 下的完全原像 $f^{-1}(B)$.

8.4. 4. 判断下列函数中哪些是满射的? 哪些是单射的? 哪些是双射的?

- (1) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x^2 + 2$
- (2) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = (x) \bmod 3, x$ 除以 3 的余数.
- (3) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x \text{ 为奇数} \\ 0 & \text{若 } x \text{ 为偶数} \end{cases}$
- (4) $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{若 } x \text{ 为奇数} \\ 1 & \text{若 } x \text{ 为偶数} \end{cases}$
- (5) $f: \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow R, f(x) = \log_{10} x$
- (6) $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2 - 2x - 15$

(1)单射, $\because f(x) = x^2 + 2$ 在 \mathbb{N} 上是单调的. 不是满射, $\because \forall x \in \mathbb{N}, f(x) = x^2 + 2 \neq 0$.

(3)不是单射的, $\because f(0) = f(2) = 0$. 不是满射的, $\because \forall x \in \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{若 } x \text{ 为奇数} \\ 1 & \text{若 } x \text{ 为偶数} \end{cases} \neq 2$.

(5)是单射的, $\because f(x) = \log_{10} x$ 在 \mathbb{N} 上是单调的. 不是满射的, $\because \forall x \in \mathbb{N}, f(x) = \log_{10} x \neq 2$.

8.5. 设 $X = \{a, b, c, d\}, Y = \{1, 2, 3\}, f = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle\}$, 判断以下命题的真假

(1) f 是从 X 到 Y 的二元关系, 但不是从 X 到 Y 的函数;

(2) f 是从 X 到 Y 的函数, 但不是从满射, 也不是单射

(3) f 是从 X 到 Y 的满射, 但不是从单射;

(4) f 是从 X 到 Y 的双射.

8.6. 对于给定的 A, B 和 f , 判断 f 是否为从 A 到 B 的函数 $f: A \rightarrow B$. 如果是, 说明 f 是否为单射, 满射, 双射的.

(1) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}, f(x) = x^2 + 1$.

(2) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Q}, f(x) = 1/x$.

(3) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, B = \mathbb{Q}, f(\langle x, y \rangle) = x/(y+1)$.

(4) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{p, q, r\}, f = \{\langle 1, q \rangle, \langle 2, q \rangle, \langle 3, q \rangle\}$.

(5) $A = B = \mathbb{N}, f(x) = 2^x$.

(6) $A = B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(\langle x, y \rangle) = \langle y + 1, x + 1 \rangle$.

(7) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, f(\langle x, y \rangle) = x^2 + 2y^2$.

(8) $A = B = \mathbb{R}, f(x) = 1/\sqrt{x+1}$.

(9) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, f(\langle x, y, z \rangle) = x + y - z$.

8.7. 7. 设 $A = \{a, b, c, d\}, B = \{0, 1, 2\}$

(1)给出一个函数 $f: A \rightarrow B$, 使得 f 不是单射的也不是满射的;

(2)给出一个函数 $f: A \rightarrow B$, 使得 f 不是单射的但是满射的;

(3)能够给出一个函数 $f: A \rightarrow B$, 使得 f 是单射但不是满射的吗?

(4)设 $|A| = m, |B| = n$, 分别说明存在单射, 满射, 双射函数 $f: A \rightarrow B$ 的条件.

(1)答案不唯一. $f = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 0 \rangle, \langle d, 0 \rangle\}$.

(2)答案不唯一. $f = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle d, 2 \rangle\}$.

(3)不能. 事实上 A 到 B 不存在单射, $\because |A| = 4 > |B| = 3$.

(4)存在单射的条件是 $m \leq n$, 存在满射的条件是 $m \geq n$, 存在双射的条件是 $m = n$.

8.8. 给出自然数集 \mathbb{N} 上的函数 f , 使得

(1) f 是单射的, 但不是满射的;

(2) f 是满射的, 但不是单射的.

8.9. 9. 设 A 是 n 元集 ($n \geq 1$), 则从 A 到 A 的函数中有多少个双射函数? 有多少个单射函数.

从 A 到 A 的函数中双射函数和单射函数都有 $n!$ 个.

注: 事实上, 从 A 到 A 的函数中满射函数也有 $n!$ 个.

8.10. 10. 设 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(\langle x, y \rangle) = x + y + 1$

(1)说明 f 是否为单射, 满射, 双射的;

(2)令 $A = \{\langle x, y \rangle | x, y \in \mathbb{N} \text{ 且 } f(\langle x, y \rangle) = 3\}$, 求 A ;

(3)令 $B = \{f(\langle x, y \rangle) | x, y \in \{1, 2, 3\} \text{ 且 } x = y\}$, 求 B .

(1) f 不是单射的, $\because f(\langle 0, 1 \rangle) = f(\langle 1, 0 \rangle) = 2$. f 不是满射的, $\because \forall x \in \mathbb{N}, f(\langle x, y \rangle) > 0$. 从而 f 不是双射的.

(2)要使 $f(\langle x, y \rangle) = x + y + 1 = 3$, 可取 $\langle x, y \rangle = \langle 1, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle$. 故 $A = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle\}$.

(3) $B = \{f(\langle 1, 1 \rangle), f(\langle 2, 2 \rangle), f(\langle 3, 3 \rangle)\} = \{3, 5, 7\}$.

8.11. 确定 f 是否为从 X 到 Y 的函数, 并对 $f: X \rightarrow Y$ 指出哪些是单射, 哪些是满射, 哪些是双射的.

(1) $X = Y = \mathbb{R}, \mathbb{R}$ 为实数集, $f(x) = x^2 - x$;

(2) $X = Y = \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$;

$$(3) X = Y = \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x};$$

$$(4) X = Y = \mathbb{Z}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 0\}, f(x) = x + 1;$$

$$(5) X = Y = \mathbb{Z}, f(x) = \begin{cases} x & x = 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}.$$

8.12. 设 $f: S \rightarrow T$, 证明

(1) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, 其中 $A, B \subseteq S$.

(2) 举出反例说明等式 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ 不是永远为真的.

(3) 说明对于什么函数, 上述等式为真.

8.13. 设 A 为非空集合, R 为 A 上的等价关系, $g: A \rightarrow A/R$ 为自然映射.

(1) 设 R 为整数集合上的模 n 相等关系, 求 $g(2)$.

(2) 说明 g 的性质(单射, 满射, 双射).

(3) 说明在什么条件下, g 为双射函数.

8.14. 设 S 为集合, A, B 是 S 的子集, χ_T 表示 T 的特征函数, 且 $\chi_A = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 0 \rangle, \langle d, 0 \rangle\}$, $\chi_B = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 0 \rangle, \langle d, 1 \rangle\}$, 求 $\chi_{A \cap B}$.

8.15. 15. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \emptyset$, 求 A_1, A_2, A_3 和 A 的特征函数 $\chi_{A_1}, \chi_{A_2}, \chi_{A_3}$ 和 χ_A .

8.16. 16. 设 $A = \{a, b, c\}$. R 为 A 上的等价关系, 且

$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\} \cup I_A$$

求自然映射 $g: A \rightarrow A/R$.

8.17. 17. 设 $f, g, h \in R^R$, 且

$$f(x) = x + 3, g(x) = 2x + 1, h(x) = \frac{1}{2}$$

求 $f \circ g, g \circ f, f \circ h, h \circ f, g \circ h, h \circ g, f \circ h \circ f, g \circ h \circ f$.

8.18. 18. 设 $f, g, h \in \mathbb{N}$, 且有

$$f(n) = n + 1, g(n) = 2n, h(x) = \begin{cases} 0 & \text{若 } x \text{ 为偶数} \\ 1 & \text{若 } x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

求 $f \circ f, g \circ f, f \circ g, h \circ g, g \circ h, h \circ g \circ f$

8.19. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2$,

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 4,$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x - 1.$$

(1) 求 $g \circ f, f \circ g$;

(2) 问 $g \circ f$ 和 $f \circ g$ 是否为单射, 满射, 双射的?

(3) f, g, h 中哪些函数有反函数? 如果有, 求出这些反函数.

8.20. 20. 设 f, g 是从 \mathbb{N} 到 \mathbb{N} 的函数, 且

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x=0, 1, 2, 3 \\ 0 & x=4 \\ x, & x \geq 5 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \text{ 为偶数} \\ 3 & x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

(1) 求 $f \circ g$

(2) 说明 $f \circ g$ 是否为单射, 满射, 双射的.

(1) 这里的复合运算是右复合: $f \circ g(x) = g(f(x))$. 当 $x = 1, 3, 4$ 以及大于 5 的偶数时, $f(x)$ 是偶数; 当 $x = 0, 2$ 以及大于 5 的奇数时, $f(x)$ 是奇数, 所以

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & x=1, 3 \\ 0, & x=4 \\ 3, & x=0, 2 \text{ 或 } \geq 5 \text{ 的奇数} \\ \frac{x}{2}, & x \text{ 为大于 5 的偶数} \end{cases} = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 2, & x=3 \\ 0, & x=4 \\ 3, & x=0, 2 \text{ 或 } \geq 5 \text{ 的奇数} \\ \frac{x}{2}, & x \text{ 为大于 5 的偶数} \end{cases}$$

并且 $f \circ g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

(2) f 不是单射的, $\because f(0) = f(2) = 3$. f 是满射的, $\because \text{ran } f = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{x/2 | x \text{ 为大于 5 的偶数}\} = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5, \dots, n, \dots\} = \mathbb{N}$.

8.21. 21. 设 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(x) = \langle x, x+1 \rangle$.

(1) 说明 f 是否为单射和满射, 为什么

(2) f 的反函数是否存在, 如果存在, 求出 f 的反函数;

(3) 求 $\text{ran } f$.

(1) f 是单射的, $\because \forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) = \langle x_1, x_1+1 \rangle \neq \langle x_2, x_2+1 \rangle$. f 不是满射的, 因为若 $\langle 0, 0 \rangle \in \text{ran } f$, 则 $\exists x \in \mathbb{N}$, 使得 $f(x) = \langle x, x+1 \rangle = \langle 0, 0 \rangle$, 而这是不可能的.

(2) 因为 $f = \{\langle x, \langle x, x+1 \rangle \rangle | x \in \mathbb{N}\}$ 是单射, 它的逆关系 $f^{-1} = \{\langle \langle x, x+1 \rangle, x \rangle | x \in \mathbb{N}\}$ 是函数, 是从 $\text{ran } f$ 到 $\text{dom } f = \mathbb{N}$ 的双射函数. 但 f^{-1} 不是 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 的函数, 因为 $\text{dom } f^{-1} = \text{ran } f \neq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(3) $\text{ran } f = \{\langle n, n+1 \rangle | n \in \mathbb{N}\}$.

8.22. 设 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = (x) \bmod n$. 在 \mathbb{Z} 上定义等价关系 R , $\forall x, y \in \mathbb{Z}$,

$$\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

(1) 计算 $f(\mathbb{Z})$.

(2) 确定商集 \mathbb{Z} / R .

8.23. 设 f_1, f_2, f_3, f_4 为实数集 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的函数, 且

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases},$$

$$f_2(x) = x,$$

$$f_3(x) = \begin{cases} -1, & x \text{ 为整数} \\ 1, & \text{否则} \end{cases},$$

$$f_4(x) = 1.$$

在 \mathbb{R} 上定义二元关系 E_i , $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle \in E_i \Leftrightarrow f_i(x) = f_i(y)$, 则 E_i 是 \mathbb{R} 上的等价关系, 称为 f_i 导出的等价关系, 求商集 \mathbb{R}/E_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

8.24. 24. 对于以下集合 A 和 B , 构造从 A 到 B 的双射函数 $f: A \rightarrow B$.

(1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$

(2) $A = (0, 1)$, $B = (0, 2)$

(3) $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0\}$, $B = \mathbb{N}$

(4) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}^+$

8.25. 25. 设 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = ((x+y)/2, (x-y)/2)$, 证明 f 是双射的.

8.26. 设 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, 且 $f \circ g: A \rightarrow C$ 是双射. 证明:

(1) $f: A \rightarrow B$ 是单射的.

(2) $g: B \rightarrow C$ 是满射的.

8.27. 按照阶从低到高的次序排列下列函数, 如果 $f(n)$ 与 $g(n)$ 的阶相等, 则表示为 $f(n) = \Theta(g(n))$.

$x, \sqrt{n}, \log n, n^3, n \log n, 2n^3 + n, 2n, (\log n)^2, \lg n, n^3 + \log n$.

8.28. 证明

$$(\log n)^{\log n} = n^{\log \log n}.$$

$$\begin{aligned}4^{\log n} &= n^2; \\2^{\log n} &= n; \\2 &= n^{1/\log n}, \\2^{\sqrt{2\log n}} &= n^{\sqrt{2/\log n}}\end{aligned}$$

浙大

习题九

- 9.1. 1. 设 $A=\{a,b,c\}$, $B=2^A$, 由定义证明 $P(A)\approx 2^A$.
- 9.2. 2. 设 $[1, 2]$ 和 $[0, 1]$ 是实数区间, 由定义证明 $[1, 2]\approx [0, 1]$.
- 9.3. 3. 设 $A=\{2x|x\in\mathbb{N}\}$, 证明 $A\approx\mathbb{N}$.
- 9.4. 4. 证明定理 9.1.
- 9.5. 5. 证明定理 9.3 的(1), (3).
- 9.6. 设 A, B, C, D 是集合, 且 $A\approx C, B\approx D$, 证明 $A\times B\approx C\times D$.
- 9.7. 找出三个不同的 \mathbb{N} 的真子集, 使得他们都与 \mathbb{N} 等势.
- 9.8. 找出三个不同的 \mathbb{N} 的真子集 A, B, C , 使得 $A\prec\mathbb{N}, B\prec\mathbb{N}, C\prec\mathbb{N}$.
- 9.9. 根据自然数的集合定义计算:
- (1) $3\cup 6, 2\cap 5$
 - (2) $4-3, 3\oplus 1$
 - (3) $3\cup 4, \cap 1$
 - (4) $1\times 4, 2^2$.
- 9.10. 略
- 9.11. 设 A, B 为可数集, 证明
- (1) $A\cup B$ 是可数集.
 - (2) $A\times B$ 是可数集.

习题十

10.1. 列出以下运算的运算表:

$$(1) A = \{1, 2, \frac{1}{2}\}, \forall x \in A, \circ x \text{ 是 } x \text{ 的倒数, 即 } \circ x = \frac{1}{x}.$$

$$(2) A = \{1, 2, 3, 4\}, \forall x, y \in A \text{ 有 } x \circ y = \max(x, y), \max(x, y) \text{ 是 } x \text{ 和 } y \text{ 之中较大的数.}$$

x	$\circ x$	\circ	1	2	3	4
1	1	1	1	2	3	4
(1) 2	$\frac{1}{2}$	(2) 2	2	2	3	4
$\frac{1}{2}$	2	3	3	3	3	4
		4	4	4	4	4

10.2. 略

10.3. 略

10.4. 判断下列集合对所给的二元运算是否封闭:

- (1) 整数集合 \mathbb{Z} 和普通的减法运算
- (2) 非零整数集合 \mathbb{Z}^* 和普通的除法运算
- (3) 全体 $n \times n$ 实矩阵集合 $M_n(\mathbb{R})$ 和矩阵加法及乘法运算, 其中 $n \geq 2$
- (4) 全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算, 其中 $n \geq 2$
- (5) 正实数集合 \mathbb{R}^+ 和 \circ 运算, 其中 \circ 运算定义为:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \circ b = ab - a - b$$

- (6) $n \in \mathbb{Z}^+, n\mathbb{Z} = \{nz | z \in \mathbb{Z}\}, n\mathbb{Z}$ 关于普通的加法和乘法运算.
- (7) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, n \geq 2$. \circ 运算定义如下: $\forall a_i, a_j \in A, a_i \circ a_j = a_i$.
- (8) $S = \{2x - 1 | x \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算.
- (9) $S = \{0, 1\}, S$ 关于普通的加法和乘法运算.
- (10) $S = \{x | x = 2^n, n \in \mathbb{Z}^+\}, S$ 关于普通的加法和乘法运算.

- (1) 封闭
- (2) 不封闭
- (3) 加法与乘法都封闭
- (4) 乘法封闭, 加法不封闭
- (5) 不封闭
- (6) 加法与乘法都封闭
- (7) 封闭

- (8)加法不封闭,乘法封闭
 (9)加法不封闭,乘法封闭
 (10)加法不封闭,乘法封闭

10.5.对于上题中封闭的二元运算判断是否适合交换律,结合律和分配律.

- (1)没有交换律,没有结合律
 (3)加法适合交换与结合律;乘法只适合结合律;乘法对于加法有分配律.
 (4)乘法适合结合律
 (6)加法有交换,结合律;乘法有交换,结合律;乘法对于加法有分配律.
 (7)结合律
 (8)乘法有交换,结合律
 (9)乘法有交换,结合律
 (10)乘法有交换,结合律

10.6.对习题4中封闭的二元运算找出它的单位元,零元和所有可逆元素的逆元.

- (1)没有单位元,零元和可逆元素.
 (3)加法单位元为 n 阶全 0 矩阵,没有零元,任意 n 阶矩阵 M 有加法逆元 $-M$;乘法单位元为 n 阶单位矩阵,零元为 n 阶全 0 矩阵,可逆矩阵 M (行列式不为 0) 有乘法逆元 M^{-1} .
 (4)乘法单位元为 n 阶单位矩阵,没有零元,任何 M 有乘法逆元 M^{-1} .
 (6)加法单位元为 0,没有零元, x 的加法逆元是 $-x$;乘法零元为 0,当 $n=1$ 时单位元为 1, 1 和 -1 有乘法逆元,就是自身.
 (7)没有单位元,零元与可逆元素
 (8)单位元为 1,没有零元,1 的乘法逆元是 1
 (9)单位元为 1,零元是 0,1 的乘法逆元是 1
 (10)没有单位元,零元与可逆元素.

10.7.略

10.8. $S=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, \mathbb{Q} 为有理数集, $*$ 为 S 上的二元运算, $\forall \langle a,b\rangle,\langle x,y\rangle\in S$ 有

$$\langle a,b\rangle*\langle x,y\rangle=\langle ax,ay+b\rangle$$

- (1) $*$ 运算在 S 上是否可交换,可结合? 是否为幂等的?
 (2) $*$ 运算是否有单位元,零元? 如果有,请指出,并求 S 中所有可逆元素的逆元.

(1)不可交换,可结合,不满足幂等律.

(2)单位元为 $\langle 1,0\rangle$,没有零元,当 $a\neq 0$, $\langle a,b\rangle$ 的逆元为 $\langle \frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\rangle$

10.9. \mathbb{R} 为实数集,定义以下六个函数 f_1, \dots, f_6 . $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} f_1(\langle x,y\rangle) &= x+y, & f_2(\langle x,y\rangle) &= x-y, \\ f_3(\langle x,y\rangle) &= x\cdot y, & f_4(\langle x,y\rangle) &= \max(x,y), \\ f_5(\langle x,y\rangle) &= \min(x,y), & f_6(\langle x,y\rangle) &= |x-y| \end{aligned}$$

- (1) 指出哪些函数是 \mathbb{R} 上的二元运算.
 (2) 对所有 \mathbb{R} 上的二元运算说明是否为可交换,可结合,幂等的.
 (3) 求所有 \mathbb{R} 上二元运算的单位元,零元以及每一个可逆元素的逆元.

(1)都是 \mathbb{R} 上的二元运算

(2) f_1, f_3, f_4, f_5, f_6 可交换, f_1, f_3, f_4, f_5 可结合, f_4, f_5 幂等;

(3) f_1 的单位元为 0, 没有零元, x 的逆元为 $-x$; f_2 没有单位元, 零元与可逆元素; f_3 的单位元为 1, 零元为 0, x

($x \neq 0$)的逆元为 $\frac{1}{x}$; f_4, f_5, f_6 没有单位元, 零元与可逆元素.

10.10. 令 $S = \{a, b\}$, S 上有 4 个二元运算: $*$, \circ , \cdot 和 \square , 分别由表 10.8 确定.

表 10.8

$*$	a	b	\circ	a	b	\cdot	a	b	\square	a	b
a	a	a	a	a	b	a	b	a	a	a	b
b	a	a	b	b	a	b	a	a	b	a	b

(1) 这 4 个运算中哪些运算满足交换律, 结合律, 幂等律

(2) 求每个运算的单位元, 零元及所有可逆元素的逆元.

(1) $*$, \circ , \cdot 可交换; $*$, \circ , \square 可结合; \square 幂等.

(2) $*$ 没有单位元和可逆元素, 零元为 a ; \circ 的单位元为 a , 没有零元, 每个元素都是自己的逆元; \cdot 和 \square 没有单位元, 零元和可逆元素.

10.11. 设 $S = \{1, 2, \dots, 10\}$, 问下面定义的运算能否与 S 构成代数系统 $\langle S, * \rangle$? 如果能构成代数系统则说明 $*$ 运算是否满足交换律, 结合律, 并求 $*$ 运算的单位元和零元.

(1) $x*y = \gcd(x, y)$, $\gcd(x, y)$ 是 x 与 y 的最大公约数.

(2) $x*y = \text{lcm}(x, y)$, $\text{lcm}(x, y)$ 是 x 与 y 的最小公倍数.

(3) $x*y =$ 大于等于 x 和 y 的最小整数.

(4) $x*y =$ 质数 p 的个数, 其中 $x \leq p \leq y$.

(1) 构成; 满足交换律, 结合律, 没有单位元, 零元为 1.

(2) 不构成.

(3) 构成; 单位元为 1, 零元为 10, 只有 1 有逆元, 就是 1.

(4) 不构成.

10.12. 略

10.13. 略

10.14. 略

10.15. 下面各集合都是 \mathbb{N} 的子集, 它们能否构成代数系统 $V = (\mathbb{N}, +)$ 的子代数:

(1) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 可以被 } 16 \text{ 整除}\}$

(2) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 与 } 8 \text{ 互质}\}$

(3) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 是 } 40 \text{ 的因子}\}$

(4) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 是 } 30 \text{ 的倍数}\}.$

(1) 构成.

(2) 不构成.

(3) 不构成.

(4) 构成.

10.16. 设 $V = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$, 其中 $+$ 和 \cdot 分别代表普通加法和乘法, 对下面给定的每个集合确定它是否构成 V 的子代数, 为什么?

(1) $S_1 = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$

(2) $S_2 = \{2n+1 | n \in \mathbb{Z}\}$

(3) $S_3 = \{-1, 0, 1\}$

(1) 是, 因为 S_1 对于加法和乘法封闭.

(2) 不是, 因为 S_2 对于加法不封闭.

(3) 不是, 因为 S_3 对于加法不封闭.

10.17. 设 $V_1 = \langle \{1, 2, 3\}, \circ, 1 \rangle$, 其中 $x \circ y$ 表示取 x 和 y 之中较大的数. $V_2 = \langle \{5, 6\}, *, 6 \rangle$, 其中 $x * y$ 表示取 x 和 y 之中较小的数. 求出 V_1 和 V_2 的所有子代数. 指出哪些是平凡子代数, 哪些是真子代数.

V_1 的子代数为 $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$, 平凡子代数是 $\{1\}$ 和 $\{1, 2, 3\}$; V_2 的子代数为 $\{6\}$ 和 $\{5, 6\}$, 都是平凡子代数.

习题十一

11.1. 设 $A=\{0,1\}$, 试给出半群 $\langle A^A, \circ \rangle$ 的运算表, 其中 \circ 为函数的复合运算.

$A^A=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, 其中

$$f_1=\{\langle 0,0 \rangle, \langle 1,0 \rangle\}, f_2=\{\langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle\},$$

$$f_3=\{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle\}, f_4=\{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle\}$$

运算表为

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

11.2. 略

11.3. 略

11.4. 略

11.5. 略

11.6. 略

11.7. 设 $G=\{a+bi|a,b\in\mathbb{Z}\}$, i 为虚数单位, 即 $i^2=-1$. 验证 G 关于复数加法构成群.

复数加法在 G 上封闭, 有结合律, 单位元为 $0=0+0i$, $a+bi$ 的逆元为 $-a-bi$.

11.8. 略

11.9. 设 \mathbb{Z} 为整数集合, 在 \mathbb{Z} 上定义二元运算 \circ 如下:

$$\forall x,y\in\mathbb{Z}, x\circ y=x+y-2$$

问 \mathbb{Z} 关于 \circ 运算能否构成群? 为什么?

易见该运算封闭, 任取整数 x,y,z ,

$$(x\circ y)\circ z=(x+y-2)\circ z=x+y-2+z-2=x+y+z-4$$

$$x\circ(y\circ z)=x\circ(y+z-2)=x+y+z-2-2=x+y+z-4=x+y+z-4$$

结合律成立. 单位元为 2. x 的逆元为 $4-x$.

11.10. 设 $A=\{x|x\in\mathbb{R}\wedge x\neq 0,1\}$. 在 A 上定义六个函数如下:

$$\begin{aligned} f_1(x)&=x, & f_2(x)&=x^{-1}, & f_3(x)&=1-x, \\ f_4(x)&=(1-x)^{-1}, & f_5(x)&=(x-1)x^{-1}, & f_6(x)&=x(x-1)^{-1} \end{aligned}$$

令 F 为这 6 个函数构成的集合, \circ 运算为函数的复合运算.

(1) 给出 \circ 运算的运算表.

(2) 验证 $\langle F, \circ \rangle$ 是一个群.

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
(1) f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

(2) 易见封闭性满足, 函数合成满足结合律, 单位元是 f_1 ,

$$f_1^{-1}=f_1, f_2^{-1}=f_2, f_3^{-1}=f_3, f_4^{-1}=f_5, f_5^{-1}=f_4, f_6^{-1}=f_6.$$

11.11. 略

11.12. 略

11.13. 略

11.14. 设 G 为群, 且存在 $a \in G$, 使得 $G = \{a^k | k \in \mathbb{Z}\}$, 证明 G 是交换群.

任取 a^i, a^j , $a^i a^j = a^{i+j} = a^{j+i} = a^j a^i$

11.15. 略

11.16. 设 G 为群, 若 $\forall x \in G$ 有 $x^2 = e$, 证明 G 为交换群.

任取 G 中元素 a, b , 由于 a, b 为二阶元, $a = a^{-1}$, $b = b^{-1}$, 从而
 $ab = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} = ba$

11.17. 设 G 为群, 证明 e 为 G 中唯一的幂等元.

设 a 为幂等元, 那么 $aa = a$, 由消去律得 $a = e$.

11.18. 略

11.19. *证明 4 阶群必含 2 阶元.

设 G 为 4 阶群, 若 G 中含有 4 阶元 a , 那么 a^2 是 2 阶元; 若 G 中不含 4 阶元, 根据拉格朗日定理, G 中元素的阶只能是 2 或 1, 而 G 不是平凡群, 必有非单位元存在, 这些非单位元就是 2 阶元.

11.20. *设 G 是非阿贝尔群, 证明 G 中存在元素 a 和 b , $a \neq b$, 且 $ab = ba$.

先证 G 中必含 3 阶或 3 阶以上的元素. 假设 G 中只有 1 阶或 2 阶元, 那么 G 中任意元素 a 都有 $a^2 = e$. 根据第 7 题的结果, G 为 Abel 群, 与已知矛盾. 设 a 为 G 中元素, 且 $|a| > 2$, 那么 $a \neq a^{-1}$, 令 $b = a^{-1}$, 则有 $ab = ba$.

11.21. 略

11.22. 略

11.23. 11. 设 H 是群 G 的子群, $x \in G$, 令

$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} | h \in H\},$$

证明 xHx^{-1} 是 G 的子群, 称为 H 的共轭子群.

e 是 xHx^{-1} 中的元素, 因此 xHx^{-1} 非空.

任取 $xhx^{-1}, xkx^{-1} \in xHx^{-1}$, $h, k \in H$, 则有

$$(xhx^{-1})(xkx^{-1})^{-1} = (xhx^{-1})(xk^{-1}x^{-1}) = x(hk^{-1})x^{-1}$$

因为 H 为子群, hk^{-1} 属于 H , 从而 $x(hk^{-1})x^{-1}$ 属于 xHx^{-1} . 由判定定理, 命题得证.

11.24. 略

11.25. 证明定理 11.11.

11.26. *设

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

- (1) G 上的二元运算为矩阵乘法, 给出 G 的运算表
 (2) 试找出 G 的所有子群
 (3) 证明 G 的所有子群都是正规子群.

将 G 中矩阵依次记为 $A, B, -B, -A$.

	\cdot	A	B	$-B$	$-A$
(1) 运算表为	A	A	B	$-B$	$-A$
	B	B	A	$-A$	$-B$
	$-B$	$-B$	$-A$	A	B
	$-A$	$-A$	$-B$	B	A

- (2) 子群: $\{A\}, \{A, -A\}, \{A, -B\}, \{A, B\}, G$
 (3) G 是 Abel 群, 所有的子群都是正规的.

11.27. 略

11.28. 略

11.29. 令 $G = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ 是整数加群. 求商群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 和 $4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{4\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}+1, 4\mathbb{Z}+2, 4\mathbb{Z}+3\}$$

$$(4\mathbb{Z}+a)+(4\mathbb{Z}+b)=4\mathbb{Z}+(a+b)\text{mod } 4$$

$$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{12\mathbb{Z}, 12\mathbb{Z}+1, 12\mathbb{Z}+2, 12\mathbb{Z}+3, \dots, 12\mathbb{Z}+11\}$$

$$(12\mathbb{Z}+a)+(12\mathbb{Z}+b)=12\mathbb{Z}+(a+b)\text{mod } 12$$

$$4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{12\mathbb{Z}, 12\mathbb{Z}+4, 12\mathbb{Z}+8\}$$

$$(12\mathbb{Z}+a)+(12\mathbb{Z}+b)=12\mathbb{Z}+(a+b)\text{mod } 12$$

11.30. 对以下各小题给定的群 G_1 和 G_2 以及 $f: G_1 \rightarrow G_2$, 说明 f 是否为群 G_1 到 G_2 的同态. 如果是, 说明 G 是否为单同态, 满同态和同构, 并求同态像 $f(G_1)$ 和同态核 $\ker f$.

- (1) $G_1 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle, G_2 = \langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$, 其中 \mathbb{R}^* 为非零实数的集合, $+$ 和 \cdot 分别表示数的加法和乘法.

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是偶数} \\ -1 & x \text{ 是奇数} \end{cases}$$

- (2) $G_1 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle, G_2 = \langle A, \cdot \rangle$, 其中 $+$ 和 \cdot 分别表示数的加法和乘法

$$A = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge |x| = 1\}, \text{ 其中 } \mathbb{C} \text{ 为复数集合.}$$

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow A, f(x) = \cos x + i \sin x$$

- (3) $G_1 = \langle \mathbb{R}, + \rangle, G_2 = \langle A, \cdot \rangle$, $+$ 和 \cdot 以及 A 的定义同 (2).

$$f: \mathbb{R} \rightarrow A, f(x) = \cos x + i \sin x$$

(1) 同态, 不是单同态, 也不是满同态. 同态像为 $\{-1, 1\}$, 同态核为 $2\mathbb{Z}$.

(2) 同态, 单同态, 不是满同态, 同态像为 $\{\cos x + i \sin x | x \in \mathbb{Z}\}$, 同态核为 $\{0\}$.

(3) 同态, 满同态, 不是单同态, 同态像为 A , 同态核为 $\{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

11.31. 略

11.32. 设 φ 是群 G_1 到 G_2 的同构, 证明 φ^{-1} 是 G_2 到 G_1 的同构.

易见 φ^{-1} 为 G_2 到 G_1 的双射函数.

任取 G_2 中的元素 x, y , 存在 G_1 中元素 a, b 使得 $\varphi(a) = x, \varphi(b) = y$. 因此,

$$\varphi^{-1}(xy) = \varphi^{-1}(\varphi(a)\varphi(b)) = \varphi^{-1}(\varphi(ab)) = ab = \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)$$

从而证明了 φ^{-1} 为同构.

11.33. 略

11.34. 设 G_1 为循环群, φ 是群 G_1 到 G_2 的同态, 证明 $\varphi(G_1)$ 也是循环群.

设 $G_1 = \langle a \rangle$, 任取 $\varphi(G_1)$ 的元素 x , 存在 $a^i \in G_1$, 使得 $\varphi(a^i) = x$.

$$x = \varphi(a^i) = (\varphi(a))^i$$

这证明了 $\varphi(a)$ 为 $\varphi(G_1)$ 的生成元.

11.35. 设 $G = \langle a \rangle$ 是 15 阶循环群.

(1) 求出 G 的所有的生成元.

(2) 求出 G 的所有子群.

(1) 生成元: $a, a^2, a^4, a^7, a^8, a^{11}, a^{13}, a^{14}$

(2) 子群: $\langle a \rangle, \langle a^3 \rangle = \{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}\}, \langle a^5 \rangle = \{e, a^5, a^{10}\}, G$

11.36. 设 σ, τ 是 5 元置换, 且

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 计算 $\sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^{-1}, \tau^{-1}, \sigma^{-1}\tau\sigma$

(2) 将 $\sigma\tau, \tau^{-1}, \sigma^{-1}\tau\sigma$ 表成不交的轮换之积.

(3) 将(2)中的置换表示成对换之积, 并说明哪些为奇置换, 哪些为偶置换.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1}\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau = (1423)$$

$$(2) \quad \tau^{-1} = (14253)$$

$$\sigma^{-1}\tau\sigma = (15243)$$

$$\sigma\tau = (14)(12)(13)$$

$$(3) \quad \tau^{-1} = (14)(12)(15)(13)$$

$$\sigma^{-1}\tau\sigma = (15)(12)(14)(13)$$

$\sigma\tau$ 为奇置换, $\tau^{-1}, \sigma^{-1}\tau\sigma$ 为偶置换.

11.37. *证明群中运算满足消去律

任取 G 中元素 a, b, c , 若 $ab=ac$, 则有

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac)$$

即 $(a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c$, 从而有 $b=c$. 同理可证右消去律的成立.

11.38. *设 G 是有限群, K 是 G 的子群, H 是 K 的子群, 证明 $[G:H] = [G:K][K:H]$.

由拉格朗日定理有

$$|G| = [G:K]|K|, \quad |K| = [K:H]|H|,$$

代入得

$$|G| = [G:K][K:H]|H|$$

再根据拉格朗日定理有 $|G| = [G:H]|H|$, 比较两个等式, 命题得证.

习题十二

12.1. 设 $A = \{a+bi | a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$, 证明 A 关于复数的加法和乘法构成环, 称为高斯整数环.

12.2. 略

12.3. (1) 设 R_1, R_2 是环, 证明 R_1 与 R_2 的直积 $R_1 \times R_2$ 也是环.

(2) 若 R_1 和 R_2 为交换环和含幺环, 证明 $R_1 \times R_2$ 也是交换环和含幺环.

12.4. 判断下列集合和给定运算是否构成环, 整环和域, 如果不能构成, 说明理由.

(1) $A = \{a+bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$, 其中 $i^2 = -1$, 运算为复数的加法和乘法.

(2) $A = \{-1, 0, 1\}$, 运算为普通加法和乘法.

(3) $A = M_2(\mathbb{Z})$, 2 阶整数矩阵的集合, 运算为矩阵加法和乘法.

(4) A 是非零有理数集合 Q^* , 运算为普通加法和乘法.

12.5. 略

12.6. 略

12.7. 略

12.8. 证明定理 12.1(3)

习题十三

13.1. 1. 图 13.9 中给出 6 个偏序集的哈斯图. 判断其中哪些是格. 如果不是格, 说明理由.

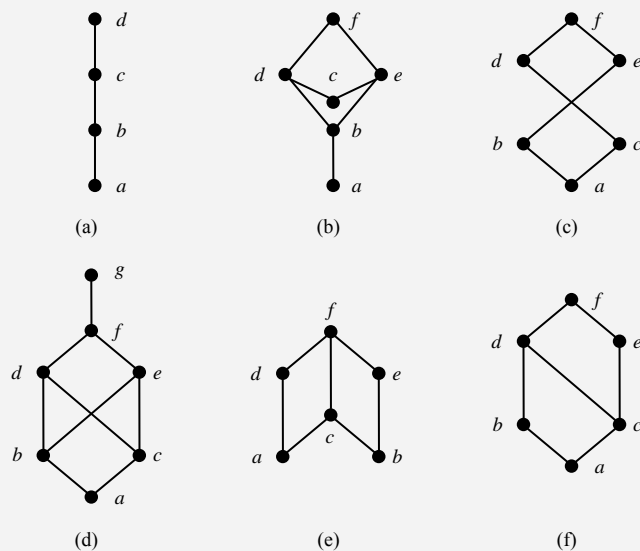


图 13.9

(a), (c), (f) 是格. (b) 中的 $\{e, d\}$ 没有最大下界. (d) 中的 $\{d, e\}$ 没有最大下界. (e) 中的 $\{a, b\}$ 没有最大下界.

13.2.2. 下列各集合对于整除关系都构成偏序集, 判断哪些偏序集是格.

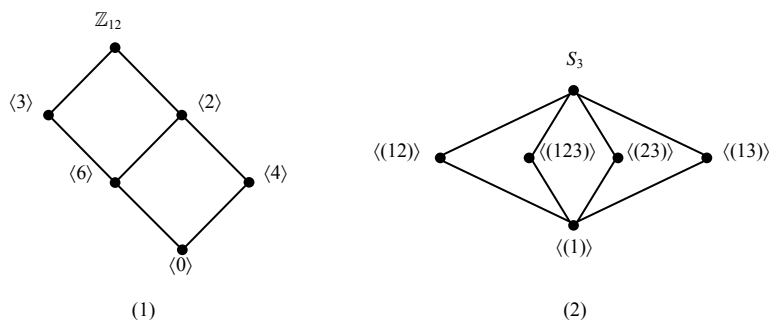
- (1) $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (2) $L = \{1, 2, 3, 6, 12\}$
- (3) $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$
- (4) $L = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^n\}, n \in \mathbb{Z}^+$

(1) 不是格, 其他都是.

13.3.3. (1) 群 $\langle \mathbb{Z}_{12}, \oplus \rangle$ 的子群格.

(2) 画出 3 元对称群 S_3 的子群格.

见答图.



第3题答图

13.4.4. 设 L 是格, 求以下公式的对偶式:

- (1) $a \wedge (a \vee b) \leq a$
- (2) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- (3) $b \vee (c \wedge a) \leq (b \vee c) \wedge a$.

(1) $a \vee (a \wedge b) \geq a$

(2) $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

(3) $b \wedge (c \vee a) \geq (b \wedge c) \vee a$

13.5.5. 设 $*$ 为集合 S 上可交换, 可结合的二元运算, 若 a, b 是 S 上关于 $*$ 运算的幂等元, 证明 $a * b$ 也是关于 $*$ 运算的幂等元. 证

$$a \vee b = b \wedge c$$

$$(a * b) * (a * b) = ((a * b) * a) * b = (a * (a * b)) * b = ((a * a) * b) * b = (a * a) * (b * b) = a * b.$$

13.6.6. 设 L 是格, $a, b, c \in L$, 且 $a \leq b \leq c$, 证明

$$a \vee b = b \wedge c$$

$$a \vee b = b; \quad b \wedge c = b.$$

13.7.7. 针对图 13.4 中的格 L_1, L_2 和 L_3 , 求出他们的所有子格.

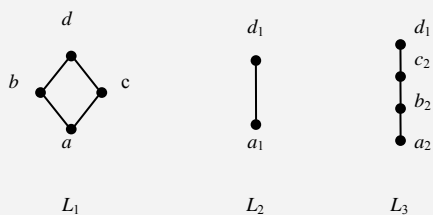


图 13.10

L_1 的子格: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, L_1$.

L_2 的子格: $\{a_1\}, \{d_1\}, L_2$

L_3 的子格: $\{a_2\}, \{b_2\}, \{c_2\}, \{d_2\}, \{a_2, b_2\}, \{a_2, c_2\}, \{a_2, d_2\}, \{b_2, c_2\}, \{b_2, d_2\}, \{c_2, d_2\}, \{a_2, b_2, c_2\}, \{a_2, b_2, d_2\}, \{a_2, c_2, d_2\}, \{b_2, c_2, d_2\}, L_3$

13.8.8. 设 $\langle L, \leq \rangle$ 是格, 任取 $a \in L$. 令

$$S = \{x \mid x \in L \wedge x \leq a\}.$$

证明 $\langle S, \leq \rangle$ 是 $\langle L, \leq \rangle$ 的子格.

S 非空. $\forall x, y \in S$, 有 $x \leq a, y \leq a$, 从而 $x \wedge y \leq x \leq a, x \vee y \leq a \vee a = a \leq a$, 于是 $x \wedge y \in S, x \vee y \in S$, 即 S 对运算 \wedge, \vee 是封闭的. 因此 $\langle S, \leq \rangle$ 是 $\langle L, \leq \rangle$ 的子格.

13.9.9. 针对图 13.9 中的每个格, 如果格中的元素存在补元, 则求出这些补元.

(b), (d), (e) 不是格.

(a) a 与 d 互补; b, c 没有补元.

(c) a 与 f 互补; b 的补元为 c, d ; c 的补元为 b, e ; d 的补元为 b, e ; e 的补元为 c, d .

(f) a 与 f 互补; b 的补元为 e ; c 和 d 没有补元; e 的补元为 b .

13.10. 10. 说明图 13.9 中的每个格是否为分配格, 有补格和布尔格, 并说明理由.

(b), (d), (e) 不是格.

(a) 是分配格, 因为不包含与钻石格和五角格同构的子格; 不是有补格和布尔格, b, c 没有补元.

(c) 不是分配格, 不是布尔格, 因为包含五角格作为子格; 是有补格, a 与 f 互补, b 和 e 的补元有 c, d ; c, d 的补元有 b, e .

(f) 是分配格, 因为没有 5 元子格与钻石格或五角格同构; 不是有补格, 也不是布尔格, 因为 c 和 d 没有补元.

13.11. 11. 证明定理 13.8.

13.12. 12. 对以下各小题给定的集合和运算判断它们是哪一类代数系统(半群, 独异点, 群, 环, 域, 格, 布尔代数), 并说明理由.

(1) $S_1 = \{0, 1, -1\}$, 运算为普通加法和乘法.

(2) $S_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $\forall a_i, a_j \in S_2, a_i * a_j = a_i$. 这里的 n 是给定的正整数, 且 $n \geq 2$.

(3) $S_3 = \{0, 1\}$, $*$ 为普通乘法.

(4) $S_4 = \{1, 2, 3, 6\}$, \circ 和 $*$ 分别表示求最小公倍数和最大公约数运算.

(5) $S_5 = \{0, 1\}$, $*$ 为模 2 加法, \circ 为模 2 乘法.

(1) 不是代数系统, 对于加法不封闭.

(2) 是半群但不是独异点, 运算封闭, 有结合律, 没有单位元.

(3) 是独异点但不是群, 乘法封闭, 有结合律, 单位元是 1, 但是 0 没有逆元.

(4) 是布尔代数. 因为这两个运算满足交换, 相互分配, 同一律(求最小公倍数的幺元是 1, 求最大公约数的幺元是 6), 补元律.

(5) 是域. 因为 $\{0, 1\}$ 关于模 3 加构成交换群, $\{1\}$ 关于模 3 乘构成交换群, 模 3 乘关于模 3 加有分配律.

13.13. 13. 设 B 是布尔代数, B 中的表达式 f 是

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

(1) 化简 f .

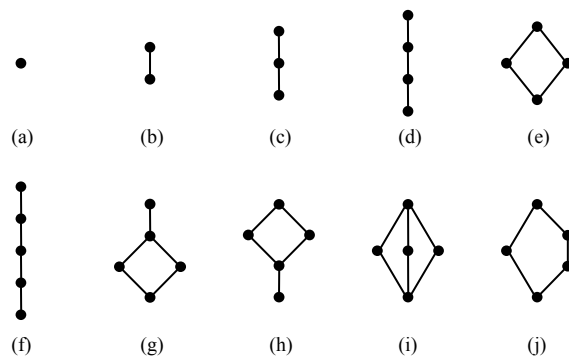
(2) 求 f 的对偶式 f^* .

(1) $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$

(2) $f^* = (a \vee b) \wedge (b \vee c)$

13.14. 14. 缺.

13.15. 15. 对于 $n = 1, \dots, 5$, 给出所有不同构的 n 元格, 并说明哪些是分配格, 有补格和布尔格.



第 15 题答图

布尔格: (a), (b), (e)

分配格: (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h)

有补格: (a), (b), (e), (i), (j)

13.16. 16. 设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ 是布尔代数, 在 B 上定义二元运算 \oplus , $\forall x, y \in B$ 有

$$x \oplus y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

问 $\langle B, \oplus \rangle$ 能否构成代数系统? 如果能, 指出是哪一种代数系统. 为什么?

构成群, 运算封闭. 下面证明结合律. 任取 a, b, c

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \oplus c &= ((a \wedge b') \vee (a' \wedge b)) \oplus c \\ &= (((a \wedge b') \vee (a' \wedge b)) \wedge c') \vee (((a \wedge b') \vee (a' \wedge b))' \wedge c) \\ &= (a \wedge b' \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (((a \wedge b')' \wedge (a' \wedge b)') \wedge c) \\ &= (a \wedge b' \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee ((a' \vee b) \wedge (a \vee b') \wedge c) \\ &= (a \wedge b' \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge a \wedge c) \vee (a' \wedge b' \wedge c) \vee (b \wedge a \wedge c) \vee (b \wedge b' \wedge c) \\ &= (a \wedge b' \wedge c') \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee 0 \vee (a' \wedge b' \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee 0 \\ &= (a \wedge b' \wedge c') \vee (b \wedge c' \wedge a') \vee (c \wedge a' \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \end{aligned}$$

同理有

$$a \oplus (b \oplus c) = (b \oplus c) \oplus a = (b \wedge c' \wedge a') \vee (c \wedge a' \wedge b') \vee (a \wedge b' \wedge c') \vee (b \wedge c \wedge a)$$

易见结合律成立.

由 $a \oplus 0 = (a \wedge 0') \vee (a' \wedge 0) = (a \wedge 1) \vee 0 = a$, 知 0 为单位元.

由 $a \oplus a = (a \wedge a') \vee (a' \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$, 知 a 为本身的逆元.

13.17. 17. 缺.

13.18. 18. 缺.

习题十四

P288 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, (缺 16, 17), 18, 19, 20, (缺 21~26), 27, 28, (缺 29~34), 35, (缺 36~47), 48, (缺 49~50)

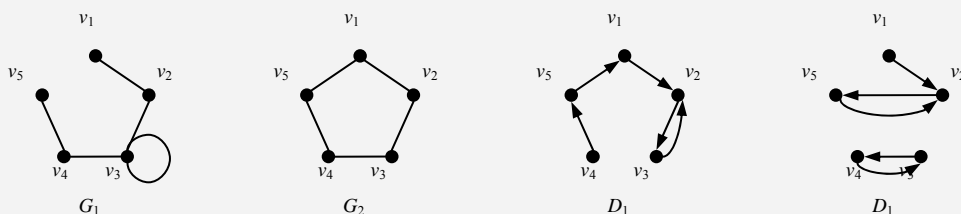
14.1. [4.1] 给定下面的图(前两个为无向图, 后两个为有向图)的集合表示, 画出它们的图形表示.

$G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, 其中 $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$;

$G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$, 其中 $V_2 = V_1$, $E_2 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1)\}$;

$D_1 = \langle V_3, E_3 \rangle$, 其中 $V_3 = V_1$, $E_3 = \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle, \langle v_4, v_5 \rangle, \langle v_5, v_1 \rangle\}$;

$D_2 = \langle V_4, E_4 \rangle$, 其中 $V_4 = V_1$, $E_4 = \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_5 \rangle, \langle v_5, v_2 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \langle v_4, v_3 \rangle\}$.



第 1 题答图

14.2. [4.2] 先将图 14.17 中各图的顶点标定顺序, 然后写出各图的集合表示.

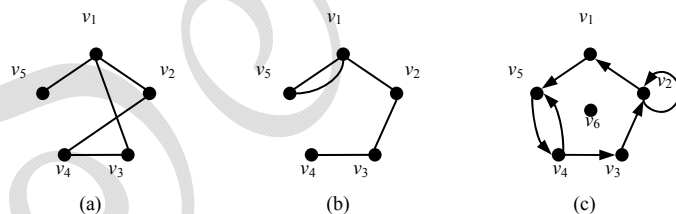


图 14.17

(a) 图 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, 其中 $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E_1 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_5), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$;

(b) 图 $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$, 其中 $V_2 = V_1$, $E_2 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$;

(c) 图 $D_1 = \langle V_3, E_3 \rangle$, 其中 $V_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E_3 = \{\langle v_1, v_5 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle, \langle v_2, v_2 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle, \langle v_4, v_3 \rangle, \langle v_4, v_5 \rangle, \langle v_5, v_4 \rangle\}$;

14.3. [4.3] 写出图 14.17 中各图的度数序列, 对有向图还要写出出度列和入度列.

解 (a) 图 G_1 的度数序列 $d = (3, 2, 2, 2, 1)$.

(b) 图 G_2 的度数序列 $d = (3, 2, 2, 1, 2)$.

(c) 图 D_1 的度数序列 $d = (2, 4, 2, 3, 3, 0)$; 出度列 $d^+ = (1, 2, 1, 2, 1, 0)$; 入度列 $d^- = (1, 2, 1, 1, 2, 0)$.

14.4. [4.4] (1) 写出图 14.18(a) 中顶点中 v_1 的邻域 $N(v_1)$ 与闭邻域 $\bar{N}(v_1)$.

(2) 写出图 14.18(b) 中顶点中 u_1 的先驱元集 $\Gamma^-(u_1)$, 后继元集 $\Gamma^+(u_1)$, 邻域 $N(u_1)$ 与闭邻域 $\bar{N}(u_1)$.

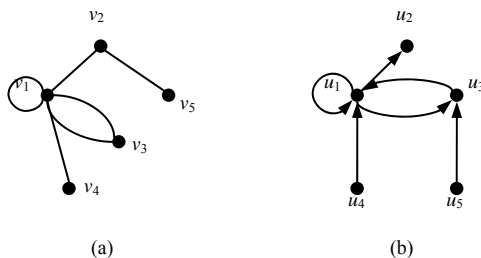


图 14.18

(a) 顶点 v_1 的邻域 $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$, 闭邻域 $\bar{N}(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

(b) 中顶点 u_1 的先驱元集 $\Gamma^-(u_1) = \{u_3, u_4\}$, 后继元集 $\Gamma^+(u_1) = \{u_2, u_3\}$, 邻域 $N(u_1) = \Gamma^-(u_1) \cup \Gamma^+(u_1) = \{u_2, u_3, u_4\}$, 闭邻域 $\bar{N}(u_1) = N(u_1) \cup \{u_1\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

14.5. [4.5] 设无向图 G 有 10 条边, 3 度与 4 度顶点各 2 个, 其余顶点的度数均小于 3, 问 G 中至少有几个顶点? 在最少顶点的情况下, 写出 G 的度数列, $\Delta(G)$, $\delta(G)$.

解 设有 x 个 2 度顶点. 由握手定理

$$2m = 2 \cdot 10 = \sum d(v_i) \leq 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + x \cdot 2,$$

解得 $x \geq 3$. G 至少有 $2 + 2 + 3 = 7$ 个顶点, 这时度数列为 $(2, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$, 而 $\Delta(G) = 4$, $\delta(G) = 2$.

14.6. [4.6] (1) 设 n 阶图 G 中有 m 条边, 证明: $\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$.

(2) n 阶非连通的简单图的边数最多可为多少? 最少呢?

(1) 设 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 由握手定理得

$$2m = \sum_{i=1}^n d(v_i) \quad (1)$$

又

$$n\delta(G) \leq \sum_{i=1}^n d(v_i) \leq n\Delta(G) \quad (2)$$

由(1), (2)得

$$\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$$

(2) 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是 n 阶不连通的(无向)简单图. 令 V_1 是 G 的一个连通分支的顶点集, $k = |V_1|$ (≥ 1), $V_2 = V - V_1$. 注意 $V_2 \neq \emptyset$ (?), $|V_2| = |V| - |V_1| = n - k \geq 1$.

V_1 的顶点与 V_2 的顶点之间没有 G 的边(?), 而 G 的边关联的顶点都是 V_1 的顶点或者都是 V_2 的顶点, 即 $E = E(G[V_1]) \cup E(G[V_2])$. 要使 G 的边数最大, $G[V_1]$ 和 $G[V_2]$ 都要含尽可能多的边, 这时它们都是完全图, 分别有 $k(k-1)/2$ 条边和 $(n-k)(n-k-1)/2$ 条边, 而 G 有 $|E| = k(k-1)/2 + (n-k)(n-k-1)/2$ 条边.

下面证明当 $k=1$ (或 $n-1$) 时, $|E|$ 最大.

$$|E| = k(k-1)/2 + (n-k)(n-k-1)/2 = \left(k - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2 - 2n}{4}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

要使 $|E|$ 最大, k 要离 $n/2$ 尽可能远. 当 $k=1$ 或 $n-1$ 时, $|E|$ 取得最大值 $(n-1)(n-2)/2$.

● 边数最多的 n 阶不连通的简单图由 K_{n-1} 和 K_1 (平凡图) 两个连通分支组成, 有 $(n-1)(n-2)/2$ 条边.

● 边数最少的 n 阶不连通的简单图显然是 n 阶零图 $N_n = \bar{K}_n$, 边数为 0. QEI

另解: n 阶连通的简单图中, K_n 的边数最多, 有 $n(n-1)/2$ 条边, 要破坏 K_n 的连通性, 至少(?)要删除关联某个顶点的 $(n-1)$ 条边, 所得图由 K_{n-1} 和一个孤立点(K_1) 构成, 它的边数 $= K_{n-1}$ 的边数 $= (n-1)(n-2)/2$ 条边. 这是 n 阶非连通的简单图的边数最多的情况.

14.7. [4.7] 已知一有向图 D 的度数列为 $(2, 3, 2, 3)$, 并已知出度列为 $(1, 2, 1, 1)$, 求 D 的入度列, 并求 $\Delta(D)$, $\delta(D)$,

$$\Delta^+(D), \delta^+(D), \Delta^-(D), \delta^-(D).$$

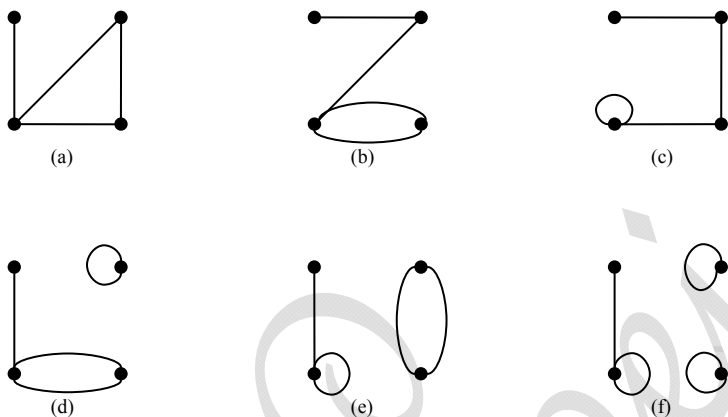
入度列 $d^- = d - d^+ = (2, 3, 2, 3) - (1, 2, 1, 1) = (1, 1, 1, 2)$. 最大度 $\Delta(D) = 3$, 最小度 $\delta(D) = 2$, 最大出度 $\Delta^+(D) = 2$, 最小出度 $\delta^+(D) = 1$, 最大入度 $\Delta^-(D) = 2$, 最小入度 $\delta^-(D) = 1$.

14.8.8. 设无向图中有 6 条边, 3 度与 5 度顶点各一个, 其余的都是 2 度顶点, 问该图有几个顶点?

该图有 4 个顶点.

14.9.9. 画以 $(1, 2, 2, 3)$ 为度数列的简单图和非简单图各 1 个.

同构意义下, 简单图只有 1 个, 如答图(a)所示; 非简单图有 5 个, 其中无环的 1 个(图(b)), 1 个环的 3 个(图(c), (d), (e)), 3 个环的 1 个(图(f)).



第 9 题答图

14.10. 10. 设 9 阶图 G 中, 每个顶点的度数不是 5 就是 6, 证明 G 中至少有 5 个 6 度顶点或至少有 6 个 5 度顶点.

用反证法. 否则,

—“至少有 5 个 6 度顶点 \vee 至少有 6 个 5 度顶点”

\Leftrightarrow “至多有 4 个 6 度顶点 \wedge 至多有 5 个 5 度顶点”

\Rightarrow “有 4 个 6 度顶点 \wedge 有 5 个 5 度顶点”(否则顶点数 ≤ 9).

而这违反握手定理(有奇数个奇度顶点). QED

14.11. 11. 证明空间中不可能存在有奇数个面且每个面都有奇数条棱的多面体.

反证法.

若存在某个具有奇数个面, 且每个面均有奇数条棱的多面体 V . 不妨设 V 有 r (r 为奇数) 个面, 设为 R_1, R_2, \dots, R_r , s_1, s_2, \dots, s_r 分别为它们的棱数, 均为奇数. 作无向图 G 如下: 在 V 的每个面中放一个顶点 v_i , $i = 1, 2, \dots, r$, 且两个面 R_i 与 R_j 有公共面就连边. 若存在这样的无向图 G , 则 $d(v_i)$ 均为奇数 s_i . 由握手定理得

$$\sum_{i=1}^r d(v_i) = \sum_{i=1}^r s_i = 2m \quad (m \text{ 为边数})$$

但因 s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 均为奇数, 上面等式不可能成立. 故不存在这样的无向图 G , 从而也不存在满足要求的多面体.

PF 用反证法. 若存在这样的多面体 S , 用顶点表示多面体 S 的面, 如果两个面有公共棱, 相应的顶点之间连一条边, 这样得到一个无向图 G .

严格地, 令 $G = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{v | v \text{ 是 } S \text{ 的面}\}$, $E = \{(u, v) | u, v \in V \wedge u \text{ 与 } v \text{ 有公共棱} \wedge u \neq v\}$.

现 $|V|$ 是奇数, 又 $\forall v \in V$, $d(v)$ 为 v 的棱数, 也是奇数. G 有奇数个奇度顶点, 这违背握手定理. 因此图 G 是不存在的, 用以定义图 G 的多面体 S 也是不存在的.

14.12. 12. 设 G 是 n ($n \geq 2$) 阶无向简单图, \bar{G} 是它的补图. 已知 $\Delta(G) = k_1$, $\delta(G) = k_2$, 求 $\Delta(\bar{G})$ 和 $\delta(\bar{G})$.

对 G 中(也就是 \bar{G} 中)的每个顶点 v , 有 $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - 1$, 或 $d_{\bar{G}}(v) = (n - 1) - d_G(v)$. 因此 $\Delta(\bar{G}) = (n - 1) - \delta(G) = (n - 1) - k_2$, 而 $\delta(\bar{G}) = (n - 1) - \Delta(G) = (n - 1) - k_1$.

14.13. 13. 最大度(Δ)等于最小度(δ)且都等于 2 的 6 阶无向图有几种非同构的情况? 其中几种是简单图?

解 最大度(Δ)等于最小度(δ)且都等于 2, 即每个顶点的度都是 2. 设满足条件的图为 G . 图 G 由若干连通分支组成, 且每个连通分支若有 1 个顶点, 必是单环花束 B_1 ; 若含 2 个顶点, 必是两边双极; 若含 $k \geq 3$ 个顶点, 必是 k 点圈 C_k ; 连通分支的图样完全由它的点数所确定.

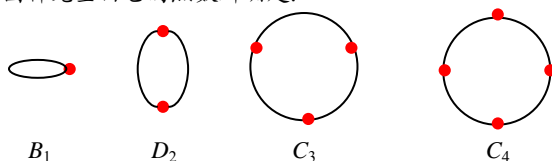
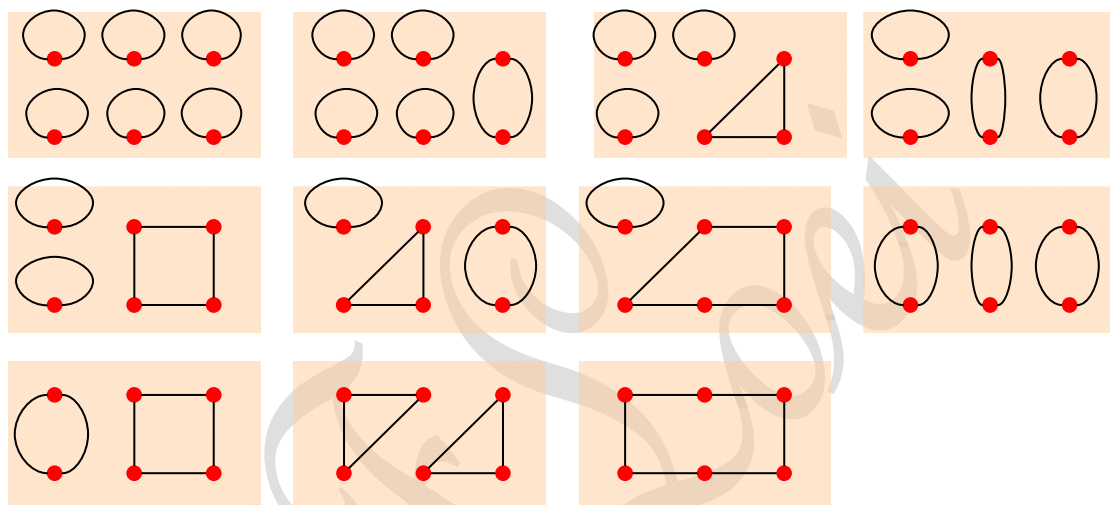


图 G 分解为连通分支, 对应其顶点集(6 元集)的划分. 因此, 找出正整数 6 的划分: 6 有多少个划分, 就有多少个满足条件的不同构的图种!

顶点度数都是 2 的无向图由其阶数 n 的划分确定:

$1+1+1+1+1+1=1+1+1+1+2=1+1+1+3=1+1+2+2=1+1+4=1+2+3=1+5=2+2+2=2+4=3+3=6$ 有 11 个划分.



不同构的每个顶点度数都是 2 的 6 阶无向图有 11 个, 其中两个是简单图.

14.14. 14. 下面给出的两个正整数列中哪个是可以图化的? 对于可图化的数列, 试给出 3 种非同构的无向图, 其中至少有两个是简单图.

(1) $(2, 2, 3, 3, 4, 4, 5)$;

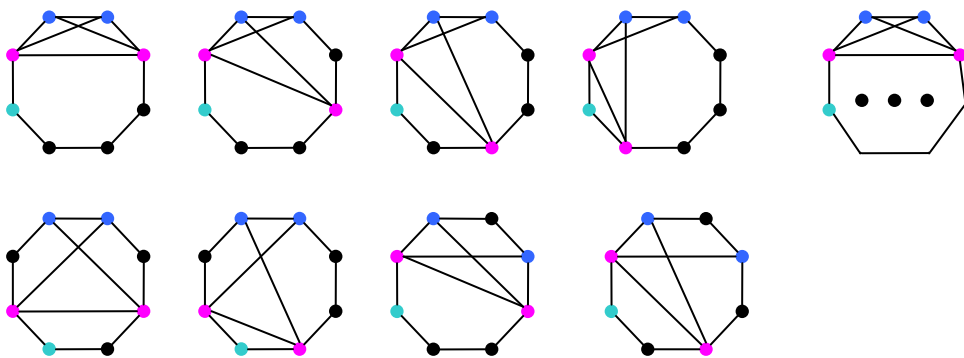
(2) $(2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$.

(1) 不可图化, 因为有奇数个(3 个)奇度顶点.

(2) 可图化, 因为有偶数个奇度顶点.

$d = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4) \rightarrow (2, 2, 2, 1, 2, 2, 3, 0) \rightarrow (2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$, 可简单图化.

答图中给出 8 个非同构的图例, 它们都是简单图.



第 14 题答图

14.15. 15. 下列各数列中哪些是可以简单图化的? 对于是简单图化的试给出两个非同构的图.

- (1) (2, 3, 3, 5, 5, 6, 6);
- (2) (1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5);
- (3) (2, 2, 2, 2, 3, 3);

14.16. 16. 画出无向完全图 K_4 的所有非同构的子图, 指出哪些是生成子图, 哪些是自补图.

14.17. 17. 画出 3 阶有向完全图的所有非同构的子图, 指出哪些是生成子图, 哪些是 3 阶竞赛图.

14.18. 18. 现有 3 个 4 阶 4 条边的无向简单图 G_1, G_2, G_3 , 证明它们中至少有两个是同构的.

在同构意义下, 4 阶 4 条边的无向简单图都是 K_4 的生成子图, 而 K_4 的 4 条边的生成子图只有两个, 度数序列分别为 1, 2, 2, 3 和 2, 2, 2, 2.

由鸽巢原理可知, G_1, G_2, G_3 至少有两个是同构的.

14.19. 19. 设 G 是 n 阶自补图, 证明 $n = 4k$ 或 $n = 4k+1$, 其中 k 为正整数.

设 G 是 n 阶 m 条边的自补图, 则 G 为 n 阶 m 条边的简单图, 且 $G \cong \bar{G}$. 于是, \bar{G} 的边数 $m' = m$, 且 $m+m' = 2m = n(n-1)/2$. 于是 $n(n-1) = 4m$, 因而 $n = 4k$, 或 $n-1 = 4k$, k 为正整数.

14.20. 20. 已知 n 阶无向完全图 G 有 m 条边, 试求 \bar{G} 的补图的边数.

$$|E(\bar{G})| = |E(K_n)| - |E(G)| = n(n-1)/2 - m.$$

14.21. 21. 无向图 G 如图 14.19 所示.

- (1) 求 G 的全部点割集和边割集, 并指出其中的割点和桥(割边);
- (2) 求 G 的点连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$.

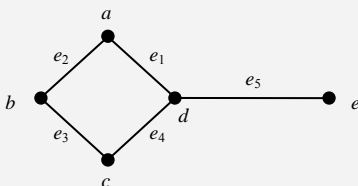


图 14.19

(1) 点割集两个 $\{a, c\}, \{d\}$, d 是割点. 7 个边割集: $\{e_5\}, \{e_1, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_2, e_3\}, \{e_3, e_4\}, \{e_1, e_4\}$, e_5 是桥.

(2) 因为既有割点又有桥, 所以 $\kappa = \lambda = 1$.

14.22. 22. 无向图 G 如图 14.20 所示, 现将该图顶点和边标定. 然后求图中的全部割点和桥, 以及图的点连通度和边连通度.

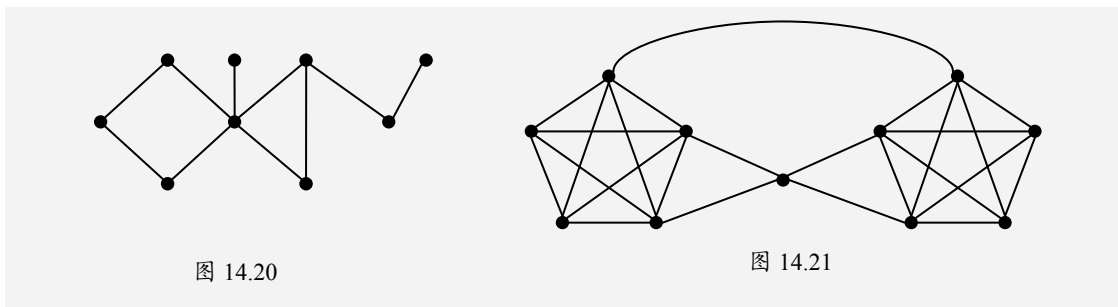
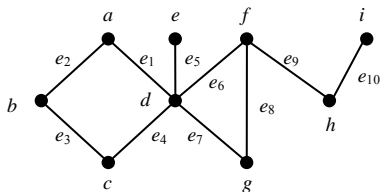


图 14.20

图 14.21

标定如答图. 3 个割点: d, f, h . 3 个桥: e_5, e_9, e_{10} . 因为既有割点又有桥, 所以 $\kappa = \lambda = 1$.



第 22 题答图

14.23. 23. 求图 14.21 所示图 G 的 $\kappa(G)$, $\lambda(G)$ 和 $\delta(G)$.

$\kappa = 2$, $\lambda = 3$, $\delta = 4$.

14.24. 24. 设 G_1 与 G_2 均为无向简单图, \bar{G}_1 与 \bar{G}_2 分别为 G_1 与 G_2 的补图. 证明 $G_1 \cong G_2$ 当且仅当 $\bar{G}_1 \cong \bar{G}_2$.

14.25. 25. 画 5 阶 3 条边的所有非同构的无向简单图.

所要画的是简单图, 由给出条件易知, 顶点度数应满足

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 6, \\ 0 \leq d_i \leq 4. \end{cases}$$

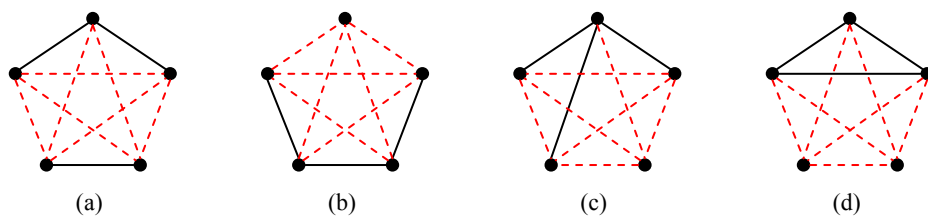
正整数 6 分成 5 个小于 4 的非负整数的划分有:

$$\begin{aligned} 6 &= 0 + 0 + 0 + 2 + 4 \\ &= 0 + 0 + 0 + 3 + 3 \\ &= 0 + 0 + 1 + 1 + 4 \\ &= 0 + 0 + 1 + 2 + 3 \\ &= 0 + 0 + 2 + 2 + 2 \\ &= 0 + 1 + 1 + 1 + 3 \\ &= 0 + 1 + 1 + 2 + 2 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 2 \end{aligned}$$

得 8 个数列. 其中, 不难知道, $(0, 0, 0, 2, 4)$, $(0, 0, 0, 3, 3)$, $(0, 0, 1, 1, 4)$, $(0, 0, 1, 2, 3)$ 不可能是简单图的度数序列, 因为假如有以这些数列为度数序列的简单图的话, 从中删去 2 个或 3 个孤立点, 得 3 阶或 2 阶的简单图, 其最大度应不超过 2 或 1, 但这些数列的最大数是 3 或 4. 下面考察剩下的 4 个数列:

① $(1, 1, 1, 1, 2)$, ② $(0, 1, 1, 2, 2)$, ③ $(0, 1, 1, 1, 3)$, ④ $(0, 0, 2, 2, 2)$

经尝试, 发现以它们为度数序列分别能画出一个非同构的简单图, 见答图黑粗线所示.



第 25 题答图

14.26. 26. 画出 5 阶 7 条边的所有非同构的无向简单图.

5 阶 7 条边的无向简单图的补图是 5 阶 3 条边的无向简单图. 利用第 25 题结果, 画得 4 个满足条件的图, 见第 25 题答图红虚线所示.

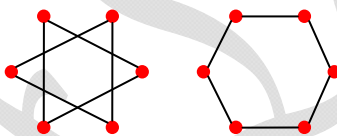
14.27. 27. 6 阶 2-正则图有几种非同构的情况?

由第 13 题的结果知, 6 阶 2-正则图只有两种非同构情况: 长度为 6 的圈和两个长度为 3 的圈, 见下图所示.



两个 6 阶 2-正则图

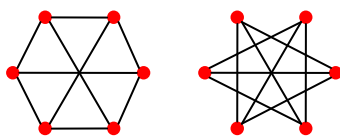
或



两个 6 阶 2-正则图

14.28. 28. 设 n 阶无向图为 3-正则图, 且边数 m 与 n 满足 $2n-3=m$, 问这样的无向图有几种非同构的情况?

由握手定理, $3n=2m$, 但 $2n-3=m$, 解得 $n=6, m=9$. 设 G 是满足条件的图, 则 \bar{G} 是 6 阶 2-正则图, 不同构的有 2 个 (第 27 题结果). 而设 G_1, G_2 均为无向简单图, $G_1 \cong G_2 \Leftrightarrow \bar{G}_1 \cong \bar{G}_2$. 利用此命题, 可知满足要求的无向图只有两种非同构的情况, 见下图.



两个 6 阶 3-正则图

14.29. 29. 设 G 是 n 阶 $n+1$ 条边的无向图, 证明 G 中存在顶点 $v, d(v) \geq 3$.

用反证法. 若 G 的最大度 $\Delta \leq 2$, 则按握手定理 $2m \leq 2n$, 其中 m 是边数. 从而 $m \leq n$, 而这与题设矛盾.

14.30. 30. 设 $e=(u, v)$ 为无向图 G 中的一条边, 证明: e 为 G 中桥当且仅当 e 不在 G 的任何圈中.

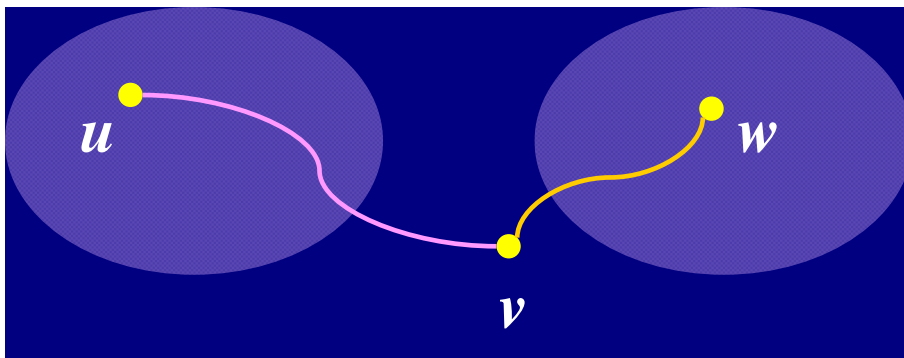
14.31. 31. 设 G 与它的自补图 \bar{G} 的边数分别为 m_1 和 m_2 , 试确定 G 的阶数.

14.32. 32. 试求彼得松图的点连通度 κ 和边连通度 λ .

14.33. 33. 设 $e=(u, v)$ 为无向图 G 中桥, 证明: u (或 v) 是割点当且仅当 u (或 v) 不是悬挂顶点.

14.34. 34. 证明: n ($n \geq 2$) 阶简单连通图 G 中至少有两个顶点不是割点.

令 u 和 v 是图 G 中有最大距离的两个点. 又假定 v 是一个割点. 则有一个点 w , 它与 u 在 $G-v$ 的不同的连通分支中. 从而 v 在 G 的每一条联结 u 和 w 的通路中, 所以 $d(u, w) > d(u, v)$, 而这与 u 和 v 之间距离的最大性假设矛盾. 所以 v , 类似地 u , 不是割点.



14.35. 35. 设 G 是 n 阶无向简单图, $n \geq 3$ 且为奇数, 证明 G 与 \bar{G} 中奇度顶点的个数相等.

$$\forall v \in V(G) = V(\bar{G}) = V(K_n)$$

$$d_{\bar{G}}(v) + d_G(v) = d_{K_n}(v) = n - 1 \text{ 为偶数 } (n \text{ 为奇数})$$

于是, 若 $d_{\bar{G}}(v)$ 为奇数, 必有 $d_G(v)$ 也为奇数.

故 \bar{G} 与 G 中奇度顶点个数相等.

14.36. 36. 无向完全图 K_n 中有几种非同构的偶圈, 其长度分别为几? 其中 $n \geq 4$.

14.37. 37. n 阶有向完全图中有几种非同构的圈, 其长度分别为几? 其中 $n \geq 2$.

14.38. 38. n 阶竞赛图种至多有几种非同构的圈? 其中 $n \geq 3$.

14.39. 39. 若无向图 G 种恰有两个奇度顶点, 证明这两个奇度顶点必然连通.

14.40. 40. (1) 设 u, v 为无向完全图 K_n 种的任意两个不同的顶点, 问 $d(u, v)$ 为几?

14.41. 41. 设 G 为无向简单图, $\delta(G) \geq 2$, 证明 G 种存在长度大于或等于 $\delta(G) + 1$ 的圈.

14.42. 42. 设 $D = \langle V, E \rangle$ 为一个有向图, 且为简单图, $\delta(G) \geq 2$, $\delta^-(G) \geq 0$, $\delta^+(G) \geq 0$, 证明 D 中存在长度大于或等于 $\max\{\delta^-(G), \delta^+(G)\} + 1$ 的圈.

14.43. 43. 有向图 D 如图 14.22 所示.

(1) D 中有多少种非同构的圈? 有多少种非同构的简单回路?

(2) 求 a 到 d 的短程线和距离 $d(a, d)$.

(3) 求 d 到 a 的短程线和距离 $d(d, a)$.

(4) 判断 D 是哪类连通图.

(5) 对 D 的基图讨论(1), (2), (3)三个问题.

14.44. 44. 有向图 D 如图 14.23 所示.

(1) D 中 v_1 到 v_4 长度为 1, 2, 3, 4 的通路各为几条?

(2) D 中 v_1 到 v_1 长度为 1, 2, 3, 4 的回路各为几条?

(3) D 中长度为 4 的通路(不含回路)有多少条? 长度为 4 的回路为多少条?

(4) D 中长度小于或等于 4 的通路为多少条? 其中有多少条为回路?

(5) 写出 D 的可达矩阵.

利用 D 的邻接矩阵的前 4 次幂解此题.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) v_1 到 v_4 长度为 1, 2, 3, 4 的通路数分别为 0 条, 0 条, 2 条, 2 条;
 (2) v_1 到 v_1 长度为 1, 2, 3, 4 的回路数分别为 1 条, 1 条, 3 条, 5 条;
 (3) D 中长度为 4 的通路(不含回路)共 33 条, 长度为 4 的回路共 11 条;
 (4) D 中长度小于或等于 4 的通路共 88 条, 其中 22 条是回路;
 (5) 因为 D 是强联通图, 所以可达矩阵为 4 阶全 1 阵.

14.45. 45. 有向图 D 如图 14.24 所示. 求:

- (1) v_2 到 v_5 长度为 1, 2, 3, 4 的通路数.
 (2) v_5 到 v_5 长度为 1, 2, 3, 4 的回路数.
 (3) D 中长度为 4 的通路数.
 (4) D 中长度小于或等于 4 的回路数.
 (5) 写出 D 的可达矩阵.

14.46. 46. 设 $D = \langle V, E \rangle$ 为 4 阶有向图, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 已知 D 的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

试求 D 中各顶点的入度与出度.

14.47. 47. 无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, 其关联矩阵为

$$M(G) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

试在同构意义下画出 G 的图形.

14.48. 48. 已知在完全二部图 $K_{r,s}$ 中, $2 \leq r \leq s$.

- (1) $K_{r,s}$ 中含有多少种非同构的圈?
 (2) $K_{r,s}$ 中至多有多少个顶点彼此不相邻?
 (3) $K_{r,s}$ 中至多有多少条边彼此不相邻?
 (4) $K_{r,s}$ 的点连通度 κ 为几? 边连通度 λ 为几?

解 (1) 当 $r=1$ 时, 没有长度大于等于 1 的圈.

当 $2 \leq r \leq s$ 时, 有长度为 4, 6, ..., $2r$ 的圈, 它们都是偶圈, 因而非同构的圈共有 $r-1$ 种.

- (2) 至多有 $\max\{r, s\}$ 个顶点彼此不相邻.
 (3) 至多有 $\min\{r, s\}$ 条边彼此不相邻.
 (4) $\kappa = \lambda = \min\{r, s\}$.

14.49. 49. 设 G 是 n 阶 m 条边的无向连通图, 证明 $m \geq n - 1$.

50. 设 G 是 6 阶无向简单图, 证明 G 或它的补图 \bar{G} 中存在 3 个顶点彼此相邻.

习题十五

P303 全部 1~22 题

15.1. 判断图 15.11 中哪些是欧拉图? 对不是欧拉图的至少要加多少条边才能成为欧拉图?

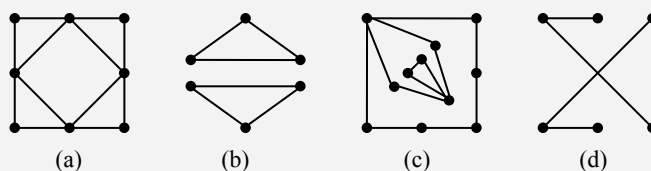


图 15.11

(a), (c) 都是欧拉图, 它们都连通且无奇度顶点. (b) 不是欧拉图, 因为它不连通. (d) 不是欧拉图, 因为它不连通, 也因为它有奇度顶点. 要使 (b), (d) 成为欧拉图, 至少要加两条边, 使它们连通且无奇度顶点.

15.2. 判断下列命题是否为真?

- (1) 完全图 $K_n (n \geq 3)$ 都是欧拉图.
- (2) $n (n \geq 2)$ 阶有向完全图都是欧拉图.
- (3) 完全二部图 $K_{r,s} (r, s \text{ 均为非 } 0 \text{ 正偶数})$ 都是欧拉图.

(1) 错误, 完全图 $K_n (n \geq 3)$ 每个顶点度数都是 $n-1$, 要使它成为偶数, 要求 n 为奇数. 所以完全图 K_n 只在 n 为奇数时才是欧拉图.

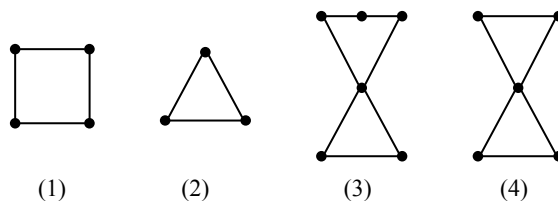
(2) 正确. 有向完全图是强连通的, 且每个顶点的入度等于出度, 由定理 15.3 知命题为真.

(3) 正确. $K_{r,s}$ 每个顶点的度数不是 r 就是 s , 因此都是偶度顶点, 且 $K_{r,s}$ 是连通的, 因此是欧拉图.

15.3. 画一个无向欧拉图, 使它具有:

- (1) 偶数个顶点, 偶数条边.
- (2) 奇数个顶点, 奇数条边.
- (3) 偶数个顶点, 奇数条边.
- (4) 奇数个顶点, 偶数条边.

见答图.

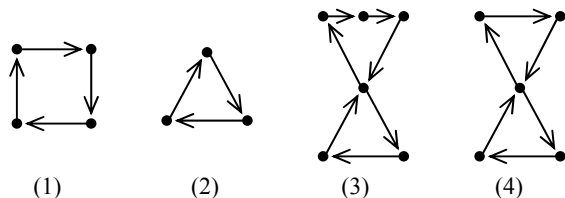


第3题答图

15.4. 画一个有向欧拉图, 使它具有:

- (1) 偶数个顶点, 偶数条边.
- (2) 奇数个顶点, 奇数条边.
- (3) 偶数个顶点, 奇数条边.
- (4) 奇数个顶点, 偶数条边.

见答图.



第4题答图

15.5. 在 k ($k \geq 2$) 个长度大于或等于 3 的圈(全为无向的或全为有向的)之间至少加多少条新边(有向的加有向边)才能使所得图为欧拉图?

至少加 $2k$ 条边.

设 k 个圈为 C_1, C_2, \dots, C_k , 在 C_i 上取顶点, 记为 $v_i, i = 1, 2, \dots, k$. 在 v_i 和 v_{i+1} 之间加平行边 $(v_i, v_{i+1}), (v_{i+1}, v_i), i = 1, 2, \dots, k-1$. 记所得的图为 G , 则 G 连通, 且所有顶点的度数都为偶数, 因而 G 为欧拉图.

至少加 k 条边.

把 k 个相互分离的连通图连成一个连通图至少要加 $k-1$ 条边. 设 k 个圈为 C_1, C_2, \dots, C_k , 在 C_i 上取顶点, 记为 $v_i, i = 1, 2, \dots, k$. 在 v_i 和 v_{i+1} 之间加边 $(v_i, v_{i+1}), i = 1, 2, \dots, k-1$. 这样加了 $k-1$ 条边后把 k 个相互分离的圈连成一个连通图, 且 v_i 的度数都变成 4 (偶数), $i = 2, \dots, k-1$, 而 v_1 和 v_k 的度数变成 3 (奇数), 再在 v_k 和 v_1 之间加边 (v_k, v_1) , 使它们的度数变成 4, 一共加了 k 条边. 记所得的图为 G , 则 G 连通, 且所有顶点的度数都为偶数, 因而 G 为欧拉图. 不难知道, 添加少于 k 条边不能达到目的.

15.6. 证明: 若有向图 D 是欧拉图, 则 D 是强连通的.

因为 D 为欧拉图, 因而存在欧拉回路. 设 C 为其中的一条欧拉回路. 任取 $v_i, v_j \in V(D)$, 则 v_i, v_j 均在 C 上. 于是 v_i 可达 v_j , 并且 v_j 可达 v_i , 所以 D 是强连通的.

15.7. 设 G 是恰含 $2k$ ($k \geq 1$) 个奇度顶点的无向连通图. 证明 G 中存在 k 条边不重的简单通路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$, 使

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^k E(\Gamma_i).$$

对 k 进行归纳.

$k = 1$ 时, 由定理 15.2 知 G 由欧拉通路, 设 Γ_1 是其中一条. 按定义, 欧拉通路是简单通路且含图中所有的边. 所以 Γ_1 是简单通路且 $E(\Gamma_1) = E(G)$, 即结论成立.

假设 G 有 $2k$ ($k \geq 1$) 个奇度顶点时命题为真. 当 G 有 $2(k+1)$ 个奇度顶点时, 设 u, v 是 G 的两个奇度顶点, 令 $G' = G \cup (u, v)$, 则 G' 有 $2k$ ($k \geq 1$) 个奇度顶点 (u, v 在 G' 中是偶度顶点), 由归纳假设, G' 中存在 k 条边不重的

简单通路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$, 使得 $E(G) = \bigcup_{i=1}^k E(\Gamma_i)$. 易知, 必有某个 $\Gamma_s (s=1, 2, \dots, k)$ 含新加边 (u, v) , 于是 $\Gamma_s - (u, v)$ 得到 G 中两条满足要求的简单通路. 将 G 中 $(k+1)$ 条边不重的简单通路重新排序: $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k, \Gamma_{k+1}$, 则 $E(G) = \bigcup_{i=1}^{k+1} E(\Gamma_i)$.

15.8.8. 完全图 $K_n (n \geq 1)$ 都是哈密顿图吗?

完全图 $K_n (n \geq 1)$ 中, 除了 K_2 不是哈密顿图外, 其余的都是哈密顿图. 注意, 平凡图 K_1 是哈密顿图.

15.9.9. 设 G 是无向连通图, 证明: 若 G 中有桥或割点, 则 G 不是哈密顿图. (例 15.4)

(1) 证明有割点的无向连通图 G 不是哈密顿图.

设 v 为 G 中的一个割点, 则 $\{v\}$ 为 G 中一个割集, 则

$$p(G - \{v\}) \geq 2 > |\{v\}| = 1$$

由定理 15.6 可知, G 不是哈密顿图.

(2) 再证有桥的图不是哈密顿图.

连通有桥图的最小阶数 $n=2$, 即 K_2 , 而 K_2 不是哈密顿图. 对于阶数 $n \geq 3$ 的有桥图, 任一桥的两个端点中, 至少有一个是割点. 由(1)知, 这样的图也不是哈密顿图.

证二 若 G 是哈密顿图, 则 G 中有哈密顿回路, 设为 C .

$\forall v \in V(C) = V(G)$, $C - v$ 是连通的, 因此 $G - v$ 是连通的. 因此 G 没有割点.

$\forall e \in E(C)$, 若 $e \notin E(C)$, 则 $G - e$ 有连通的生成子图 C , 因此是连通的. 若 $e \in E(C)$, 则 $G - e$ 仍有连通的生成子图 $C - e$, 因而是连通的. 所以 G 没有桥.

15.10. 10 证明定理 15.8.

定理 15.8 设 u, v 为 n 阶无向图简单图 G 中两个不相邻的顶点, 且 $d(u) + d(v) \geq n$, 则 G 为哈密顿图 $\Leftrightarrow G \cup (u, v)$ 为哈密顿图 ((u, v) 是加的新边).

(\Rightarrow): 显然.

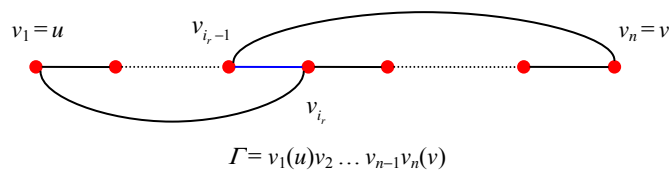
(\Leftarrow): 设 C 是 $G' = G \cup (u, v)$ 中的一条哈密顿回路.

(1) 若新边 (u, v) 不在 C 上, 则 C 是 G 中的哈密顿回路.

(2) 若新边 (u, v) 在 C 上, 则 $\Gamma = C - (u, v)$ 是 G 中的哈密顿通路.

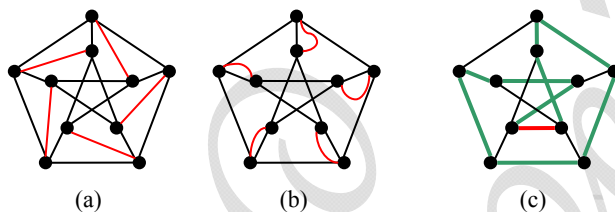
① 若 u, v 在 G 中相邻, 则 $\Gamma \cup (u, v)$ 是 G 中的哈密顿回路. ((u, v) 不是新边 (u, v)).

② 若 u, v 在 G 中不相邻, 则 $k = d(u) \geq 2$ (否则 $d(u) + d(v) \leq 1 + (n-2) < n$). Γ 上除 v_2 外有 $(k-1)$ 个点与 u 相邻: $v_{i_2}(v_2), \dots, v_{i_k}$. v 至少与这 $(k-1)$ 个点左边相邻的点 $v_{i_2-1}, \dots, v_{i_k-1}$ 之一相邻. (否则 $d(u) + d(v) \leq k + [(n-2) - (k-1)] \leq n-1$). 设 v_{i_r-1} 与 v 相邻, 则 $v_1 v_2 \dots v_{i_r-1} v v_{i_r} v_{n-1} \dots v_1$ 是 G 中一条哈密顿回路.



15.11. 11. 彼得松图即不是欧拉图也不是哈密顿图. 至少加几条新边才能使它成为欧拉图? 又至少加几条新边才能使它变成哈密顿图?

彼得松图是 10 阶 3 正则图, 要想消除所有奇度顶点, 至少要加 5 条边, 使它变成每个顶点都是 4 度顶点的连通的简单图或非简单图, 如答图(a)或(b)所示. 事实上, 彼得松图是半哈密顿图, 有哈密顿通路, 在其中一条哈密顿通路的两端点之间加一条新边就得到哈密顿图, 如答图(c)所示.



第 11 题答图

15.12. 12. 证明图 15.12 中(a)图不是哈密顿图, 但是半哈密顿图. 而(b)图是哈密顿图.

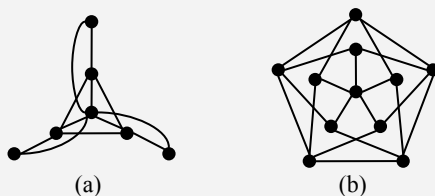
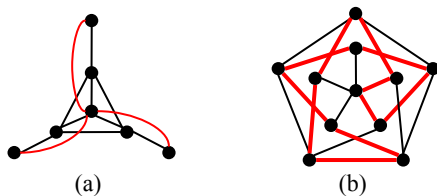


图 15.12

首先确认一个简单的命题: 若 G 有哈密顿回路, 则 G 的所有 2 度顶点所关联的 2 条边(环除外)必须在 G 的任一条哈密顿回路上.

若(a)中图是哈密顿图, 它有 3 个 2 度顶点共关联 6 条边, 这 6 条边均在任何哈密顿回路上, 于是在哈密顿回路(初级回路)上就会出现一个顶点 v (图中位于中间的顶点), 它关联回路上的 3 条边(答图(a)中红色的 3 条边), 这显然不可能. 所有(a)中图不是哈密顿图.

努力找到(b)中图的一条哈密顿回路, 见答图(b)中红粗线所示. 所以(b)中图是哈密顿图.



第 12 题答图

15.13. 13. 今有 $2k$ ($k \geq 2$) 个人去完成 k 项任务. 已知每个人均能与另外 $2k-1$ 个人中的 k 个人中的任何人组成小组(每组 2 个人)去完成他们共同熟悉的任务, 问这 $2k$ 个人能否分成 k 组(每组 2 人), 每组完成一项他们共同熟悉的任务?

设

$$V = \{v \mid v \text{ 是去完成任务的人}\},$$

$$E = \{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v \text{ 且 } u, v \text{ 能合作}\}$$

得 $2k$ 阶无向简单图 G . 由已知条件, $\forall u, v \in V$,

$$d(u) + d(v) \geq 2k$$

由定理 15.7 的推论可知, G 为哈密顿图. 于是存在哈密顿回路. 设 $C = v_{i_1}v_{i_2} \cdots v_{i_{2k}}v_{i_1}$ 为其中的一条哈密顿回路, 在 C 中相邻的顶点都能合作. 所以可以分成 k 组.

15.14. 14. 今有 n 个人, 已知他们中的任何二人合起来认识其余的 $n-2$ 个人. 证明: 当 $n \geq 3$ 时, 这 n 个人能排成一列, 使得中间的任何人都认识两旁的人, 而两旁的人认识左边(或右边)的人. 而当 $n \geq 4$ 时, 这 n 个人能排成一个圆圈, 使得每个人都认识两旁的人.

作 n 阶简单无向图 $G = \langle V, E \rangle$, V 是这 n 个人的集合, $E = \{(u, v) \mid u, v \in V \wedge u \neq v \wedge u \text{ 与 } v \text{ 认识}\}$. $\forall u, v \in V$,

(1) 若 u, v 相邻, 则 $d(u) + d(v) \geq (n-2) + 2 = n$.

(2) 若 u, v 不相邻, 则 $\forall w \in V - \{u, v\}$, w 必与 u 和 v 都相邻. 否则, 比如 u 和 w 不相邻, 则 v, w 都不邻接 u , 于是 u 和 w 合起来至多与其余的 $n-3$ 个人认识, 与已知条件不符. 因而 $d(u) + d(v) \geq 2(n-2)$.

当 $n \geq 3$ 时, $2(n-2) \geq n-1$, 因此无论第(1)或(2)种情形, 都有 $d(u) + d(v) \geq n-1$, 由定理 15.7 知 G 中有哈密顿通路, 通路上的人按在通路中的顺序排成一列, 满足要求. 当 $n \geq 4$ 时, $2(n-2) \geq n$, 因此无论第(1)或(2)种情形, 都有 $d(u) + d(v) \geq n$, 由定理 15.7 的推论知 G 中有哈密顿回路, 回路上的人按在回路中的顺序排成一个圆圈, 满足要求.

15.15. 15. 某工厂生产由 6 种不同颜色的纱织成的双色布. 已知在品种中, 每种颜色至少能与其他 5 中颜色中的 3 种相搭配. 证明可以挑出 3 种双色布, 他们恰由 6 种不同颜色的纱织成.

作无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v \mid v \text{ 为 6 种颜色的纱之一}\}$, $|V| = 6$, $E = \{(u, v) \mid u, v \in V \wedge u \neq v \wedge u \text{ 与 } v \text{ 能搭配}\}$. 由给出的条件知, $\forall u, v \in V$, 有

$$d(u) + d(v) \geq 3 + 3 = 6 = |V|.$$

由定理 15.7 的推论知, G 是哈密顿图, 因而有哈密顿回路, 设 $C = v_{i_1}v_{i_2} \cdots v_{i_6}v_{i_1}$ 为其中的一条. 任何两个顶点在

C 中相邻, 说明这两个顶点代表的颜色的纱可以搭配成双色布. 让 v_{i_1} 与 v_{i_2} 的搭配, v_{i_3} 与 v_{i_4} 的搭配, v_{i_5} 与 v_{i_6} 的搭配就可以织成 3 种双色布, 恰用了 6 种不同的颜色.

15.16. 16. 设完全图 K_n ($n \geq 3$) 的顶点分别为 v_1, v_2, \dots, v_n . 问 K_n 中有多少条不同的哈密顿回路(这里认为, 若在回路 C_1, C_2 中, 顶点的排列顺序不同, 就认为 C_1 与 C_2 是不同的回路).

构造 K_n 中的哈密顿回路如下: 依次选取 K_n 中第 1 个顶点(有 n 种方法), 第 2 个顶点(有 $n-1$ 种方法), \dots , 第 $n-1$ 个顶点(有 2 种方法), 第 n 个(最后一个)顶点(有 1 种选法); 从第 1 个顶点出发, 沿 K_n 中的边到相继的顶点, 直到第 n 个顶点, 然后从第 n 个顶点沿 K_n 中的边回到第 1 个顶点. 这样一共得到 $n!$ 条 K_n 中的哈密顿回路.

如果不区分第 1 个顶点或说起点(也就是不区分第 n 个顶点或说终点), 那么 K_n 中不同的哈密顿回路有 $n!/n = (n-1)!$ 条.

15.17. 17. 设完全图 K_n ($n \geq 3$) 是带权图(各边的权均大于或等于 0). 如何求出 K_n 中最短的哈密顿回路?

可以使用穷举法. 计算带权图中哈密顿回路时, 可以不区分回路的起点(终点)及方向, 因而 K_n 中共有 $(n-1)!/2$ 条不同哈密顿回路. 把它们列出来, 计算它们的权, 从中找出权最小的即可. 答案可能不唯一.

15.18. 18. 一名青年生活在城市 A. 准备假期骑自行车到景点 B, C, D 去旅游, 然后回到城市 A. 图 15.13 给出了 A, B, C, D 的位置及它们之间的距离(公里). 试确定这名青年的旅游的最短路线.

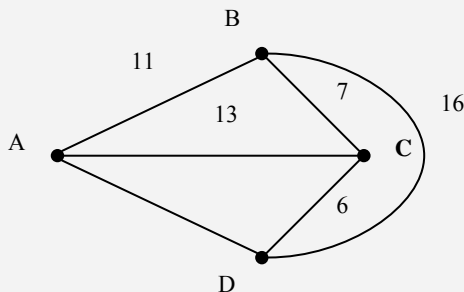


图 15.13

这是 $n=4$ 的货郎担问题. 有 $(n-1)!/2 = 3$ 条哈密顿回路(不区分顺/逆时针方向): ABCDA, ABDCA, ACDBA, 权分别为 32, 46, 44. 其中, 最短的旅游路线是 ABCDA, 长度是 32 公里.

15.19. 19. K_5 完全带权图如图 15.14 所示, 求图中的最短哈密顿回路.

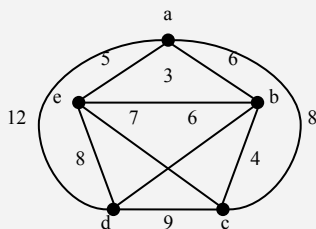
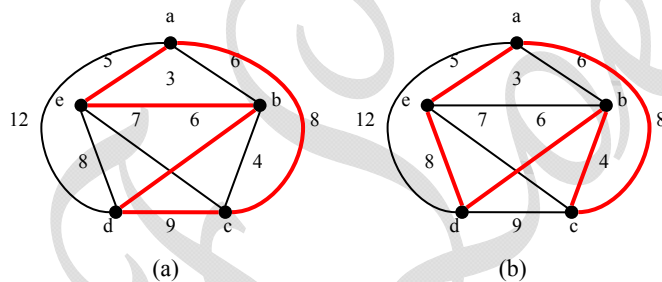


图 15.14

这里使用穷举法. 计算带权图中哈密顿回路时, 可以不区分回路的起点(终点)及方向, 因而 K_n 中 (K_n 带权) 共有 $(n-1)!/2$ 条不同哈密顿回路. 当 $n=5$ 时, 共有 $4!/2=12$ 条. 列出 12 条不同的哈密顿回路, 然后计算它们的权, 找出最短的即可(最短的可能不唯一). 答图中(a), (b)红粗线所示回路都是图 15.14 中图的最短哈密顿回路, 它们的权都是 32.



第 19 题答图

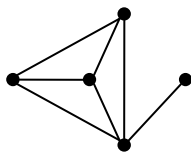
15.20. 20. 设 G 为 n 阶无向简单图, 边数 $m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$, 证明 G 是哈密顿图. 再举例说明当 $m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 时, G 不一定是哈密顿图.

首先证明 G 中任何两个不相邻的顶点的度数之和 $\geq n$.

用反证法. 否则存在 $u, v \in V(G)$, 且 $d(u) + d(v) \leq n-1$. 令 $V' = \{u, v\}$, $G' = G - V'$, 则 G' 是 $(n-2)$ 阶无向简单图. G' 的边数 $m' \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2 - (n-1)$, 经计算可得 $m' \geq \frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1$. 可是 $(n-2)$ 阶无向简单图的边数最多为 $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$, 矛盾. 于是, $d(u) + d(v) \geq n$.

由定理 15.7 的推论可知, G 为哈密顿图.

在答图中, $n=5$, $m=7$, 满足 $m \geq \frac{1}{2}(5-1)(5-2)+1=7$, 但它不是哈密顿图.



第 20 题答图

15.21. 21. 设 $G=\langle V, E \rangle$ 为一无向图. 若对于任意的 $V_1 \subset V$, 且 $V_1 \neq \emptyset$, 均有

$$p(G - V_1) \leq |V_1|,$$

则 G 是哈密顿图. 以上结论成立吗? 为什么?

不成立. 例如 K_2 和彼得松图都满足给定条件, 但都不是哈密顿图. 给出条件是必要条件, 不是充分条件.

15.22. 22. 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶无向简单哈密顿图, 则对于任意不相邻的顶点 v_i, v_j , 均有

$$d(u) + d(v) \geq n.$$

以上结论成立吗? 为什么?

不成立. 给出的条件是充分条件, 不是必要条件. 例如 5 阶圈图 C_5 是哈密顿图, 但不满足给定条件.

习题十六

P319 (缺 31~34)

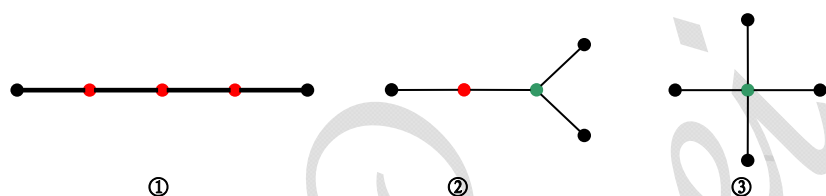
16.1.1. 画出所有 5 阶和 7 阶非同构的无向树.

顶点度数之和 $\sum_{i=1}^n d_i = 2m = 2(n-1)$, $1 \leq d_i \leq n-1$.

(1) 5 阶树: $1+1+d_3+d_4+d_5=8$. (至少两片树叶)

$$8 = 2+6 = \textcircled{1} 1+1+2+2+2 = \textcircled{2} 1+1+1+2+3 = \textcircled{3} 1+1+1+1+4.$$

上列每一种划分对应一个树. 画得 5 阶非同构的无向树有 3 棵:



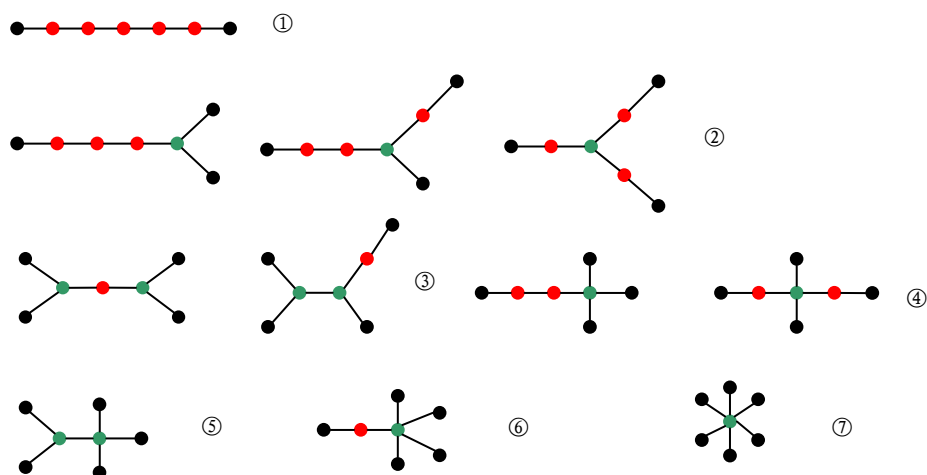
第 1 题答图

(2) 7 阶树: $1+1+d_3+\dots+d_7=12$. (至少两片树叶)

$$\begin{aligned} &12 \\ &= (2+10) \\ &= \textcircled{1} 1+1+2+2+2+2+2 \\ &= \textcircled{2} 1+1+1+2+2+2+3 \\ &= \textcircled{3} 1+1+1+1+2+3+3 \\ &= \textcircled{4} 1+1+1+1+2+2+4 \\ &= \textcircled{5} 1+1+1+1+1+3+4 \\ &= \textcircled{6} 1+1+1+1+1+2+5 \\ &= \textcircled{7} 1+1+1+1+1+1+6. \end{aligned}$$

上列正整数 12 的 7 个划分的每一个对应着一个可能的 7 阶树的度数序列. 可以先忽略 2 度顶点, 画出 7 种不

“同胚”的树; 然后再插入所忽略的 2 度顶点, 得 12 个不同构的 7 阶树, 见答图, 其中带圈数字前的几个树是同胚的.



11棵7阶无向树, 不同胚的有7种

第2题答图

16.2.2. 一棵无向树 T 有 5 片树叶, 3 个 2 度分支点, 其余的分支点都是 3 度顶点, 问 T 有几个顶点?

利用树的性质及握手定理:

$$m = n - 1,$$

$$2m = 2n - 2 = 5 \times 1 + 3 \times 2 + (n - 8) \times 3.$$

得 T 的顶点数 $n = 11$.

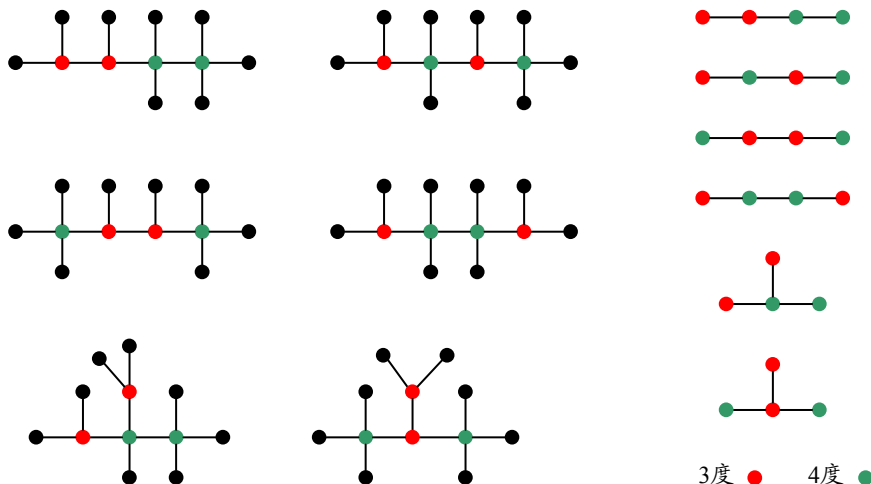
16.3.3. 无向树 T 有 8 片树叶, 2 个 3 度分支点, 其余的分支点都是 4 度顶点, 问 T 有几个 4 度分支点? 根据 T 的度数序列, 能画出几棵非同构的无向树?

设 T 有 x 个 4 度顶点. 由握手定理和树的性质,

$$8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + x \cdot 4 = 2(8 + 2 + x - 1)$$

解得 $x = 2$. 度数序列为 $(8 \cdot 1, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4)$.

每个树把树叶都删除后所得的图也是树, 可以叫做原树的“链”(借用化学中的词, “碳链”), 它的顶点是原树的分支点. 树 T 的分支点有 4 个, 而不同构的 4 阶树有 2 个, 如果区分其中的 3 度顶点和 4 度顶点的话有 6 种不同构的情形; 把树叶补上得满足条件的 6 个不同构的无向树, 见答图.



第3题答图

16.4.4. 一棵无向树 T 有 $n_i (i=2, 3, \dots, k)$ 个 i 度顶点, 其余顶点都是树叶, 问 T 应该有几片树叶?

$$\begin{aligned} \text{阶数 } n &= \sum_{i=2}^k n_i + t, \quad t \text{ 为树叶数. 则 } m = \sum_{i=2}^k n_i + t - 1. \text{ 由握手定理, } 2m = 2 \sum_{i=2}^k n_i + 2t - 2 = \sum_{i=2}^k i n_i + t. \text{ 解得 } t \\ &= \sum_{i=2}^k (i-2)n_i + 2 = \sum_{i=3}^k (i-2)n_i + 2. \text{ QEI} \end{aligned}$$

16.5.5. $n (n \geq 3)$ 阶无向树 T 的最大度 $\Delta(T)$ 至少为几? 最多为几?

T 的最大度不能是 1, 否则 T 的顶点都是树叶, 而度数之和 $= n \neq 2m = 2(n-1)$. 而 n 阶路径图 P_n 是树, 其最大度是 2. 所以 T 的最大度至少是 2. 另一方面, 因为是简单图, T 的最大度不能超过 $n-1$; 而 n 阶星形图 $S_n = K_1, n-1$ 是树, 其度数是 $n-1$. 所以 T 的最大度最多为 $n-1$.

16.6.6. $n (n \geq 3)$ 阶无向树 T 的最大度 $\Delta(T) = 2$, 问 T 中最长的路径长度为几?

若 $\Delta(T) = 2$, 则 T 的度数序列是 $1, 1, 2, 2, \dots, 2$. T 必然是路径图, 其最长的路径长度为 $n-1$.

16.7.7. 证明: $n (n \geq 2)$ 阶无向树不是欧拉图.

因为 $n (n \geq 2)$ 阶无向树 T 至少有两片树叶, 而树叶是奇度顶点. 所以 T 不是欧拉图.

16.8.8. 证明: $n (n \geq 2)$ 阶无向树不是哈密顿图.

非平凡树没有回路, 因此没有哈密顿回路, 所以不是哈密顿图.

16.9.9. 证明: 任何无向树 T 都是二部图.

任何树均无回路, 因此没有奇回路, 故而是二部图.

16.10. 10. 什么样的树 T 既是欧拉图又是哈密顿图?

只有平凡树才既是欧拉图又是哈密顿图.

16.11. 11. 在什么条件下, 无向树 T 为半欧拉图?

非平凡树 T 至少有两片树叶, 要成为半欧拉图, T 必须恰含两片树叶(奇度顶点). 设 T 的度数列为 $1, 1, d_2,$

d_3, \dots, d_n , 则 $d_i \geq 2$ ($i = 2, \dots, n$). 由握手定理, $\sum_{i=3}^n d_i + 2 = 2(n-1)$. 得 $\sum_{i=3}^n d_i - 2(n-2) = 0$, 或 $\sum_{i=3}^n (d_i - 2) = 0$. 但

$d_i \geq 2$ ($i = 2, \dots, n$), 于是必然有 $d_i = 2$ ($i = 2, \dots, n$). 因此 T 必然是路径图 P_n . 而路径图确实是半欧拉图.

答: 当且仅当 T 是路径图时 T 为半欧拉图.

16.12. 12. 在什么条件下, 无向树 T 是半哈密顿图?

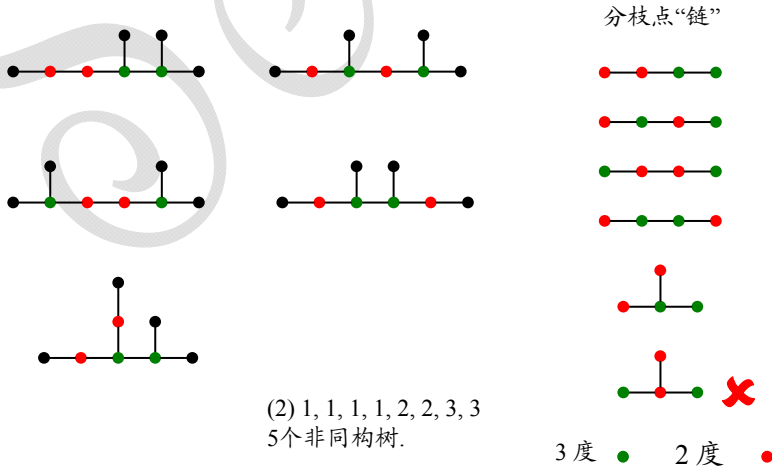
若 T 是半哈密顿图, 则 T 中有哈密顿通路, 该通路上含 n 个顶点(T 所有的顶点), $(n-1)$ 条边, 这必然是 T 所有的边(因为 T 有 $(n-1)$ 条边), 所有这条通路本身就是 T . 所有当且仅当 T 是路径图时, T 是半哈密顿图.

16.13. 13. 下面两个正整数数列中, 哪个(些)能充当无向树的度数列? 若能, 请画出 3 棵非同构的无向树.

(1) 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4 (2) 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3

(1) 不能. 假如有这样的树, 则顶点数 $n = 8$, 边数 $m = 7$. 但度数之和 $= 16 \neq 2 \cdot 7$, 违背握手定理.

(2) 能, 见下图.



第 13 题答图

注: 对第(2)小题也可以先忽略 2 度顶点, 画出与所要画的树同构的树; 然后再补插入 2 度顶点.

16.14. 14. 设 e 为无向连通图 G 中的一条边, e 在 G 的任何生成树中, 问 e 应有什么性质?

e 具有这样的性质: e 在 G 的任何生成树中 $\Leftrightarrow e$ 是 G 的桥.

(\Rightarrow)(反证法)假如 e 不是桥, 则 $G - e$ 是连通的, 因而有生成树 T . 而 T 也是 G 的生成树, 但不含 e .

(\Leftarrow)(反证法)若 G 的某棵生成树 T 不含 e , 则 $G - e$ 有生成树 T , 因而是联通的, 而这与 e 是桥矛盾.

16.15. 15. 设 e 为无向连通图 G 中的一条边, e 不在 G 的任何生成树中, 问 e 应有什么性质?

e 具有这样的性质: e 不在 G 的任何生成树中 $\Leftrightarrow e$ 是 G 的环.

(\Rightarrow)(反证法) G 是连通的, 因而有生成树, 设 T 是其中一棵. 假如 e 不是环, 则 e 关联两个不同的顶点. 若 T 不含 e , 则 $T \cup e$ 中恰有一个圈 C , 圈长 ≥ 2 且含 e . 删去该圈上某一边 $e' (\neq e)$, 得 G 的生成树 $T \cup e - e'$, 它含 e .

(\Leftarrow)(反证法)若 G 的某棵生成树 T 含 e , 则 T 中有圈(每个环是一个圈, 圈长为 1).

16.16. 16. 设 e 为无向连通图 G 中的一条边, e 既不是环, 也不是桥, 证明存在 G 的生成树含 e 作为树枝, 又存在 G 的生成树, 以 e 为弦

由第 14 题和第 15 题结论立刻得到.

证二 由于 e 不是桥, 因而 e 必在某些圈中出现, 又因为 e 不是环, 所以 e 所在的圈的长度均 ≥ 2 .

用破圈法(即有圈就删除圈上的一条边)构造 G 的生成树. ①每次删除一条边时都不删除 e . 最后得到的生成树含 e . ②先把 e 删去, 破掉 e 所在的圈, 然后破其他的圈, 这样得到的生成树不含 e .

16.17. 17. 设 T 为无向图 G 的生成树, \bar{T} 是 T 的余树, 证明 \bar{T} 中不含 G 的割集(这里指边割集).

因为 G 的顶点通过树 T 已经连通, 所以 $G - E(\bar{T})$ 是连通的, 因为 \bar{T} 中不含 G 的割集.

16.18. 18. 设 S 为无向连通图 G 的一个割集(边割集), 证明 $G[E(G) - S]$ 不含 G 的生成树.

因为 S 是 G 的割集, 所以 $G[E(G) - S]$ 是不连通的. 而 G 的生成树是连通的, 所以 $G[E(G) - S]$ 不含 G 的生成树.

16.19. 19. 在图 16.14 所示无向图中, 边 e_1, e_2, e_3 都是树枝的非同构的生成树共有几棵? 画出它们来.

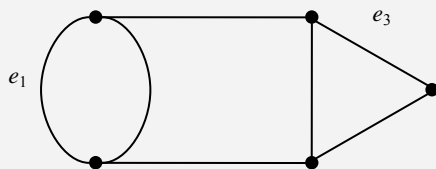
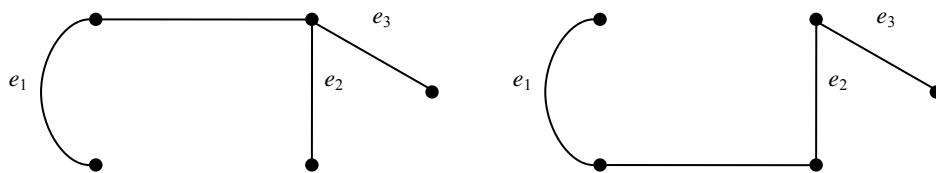


图 16.14

有两棵(见答图).



第 19 题答图

16.20. 20. 图 16.15 所示无向图中有几棵非同构的生成树? 画出这些生成树来(提示: 从所有 6 阶非同构树中挑选).

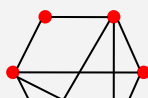
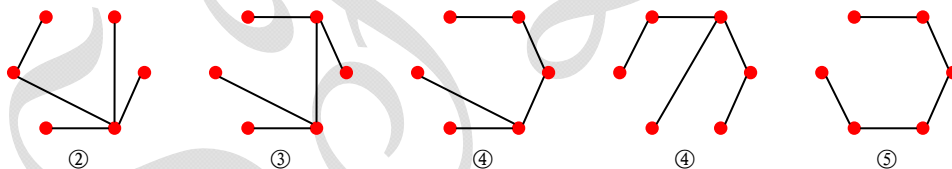


图 16.15

6 阶非同构的无向树共有 6 棵, 度数序列分别为

① 1 1 1 1 1 5, ② 1 1 1 1 2 4, ③ 1 1 1 1 3 3, ④ 1 1 1 2 2 3, ⑤ 1 1 2 2 2 2

$\Delta(G) = 4$, 因应对应①的生成树是不存在的. 而对应②③④⑤的生成树均存在.



16.21. 21. $K_n (1 \leq n \leq 7)$ 各有多少棵非同构的生成树?

K_n 中非同构的生成树个数与 n 阶非同构的无向树的棵数显然是相同的, 分别为:

K_1, K_2, K_3 各有 1 棵, K_4 有 2 棵, K_5 有 3 棵, K_6 有 6 棵, K_7 有 11 棵.

16.22. 22. 设 T 是 $k+1$ 阶无向树, $k \geq 1$. G 是无向连通图, 已知 $\delta(G) \geq k$, 证明 G 中存在与 T 同构的子图.

证 不妨设 G 是连通的, 否则可考虑 G 的一个连通分支.

对 k 作归纳法.

$k=1$ 时, T 是 K_2 . 因为 $\delta(G) \geq 1$, 所以 G 中至少有一条边. 任取 G 的一条边 e , 则 $\{e\}$ 的导出子图 $G[\{e\}]$ ($\subseteq G$) 与 T 同构.

设 $k=r$ 时 ($r \geq 1$) 时结论成立. 当 $k=r+1$ 时, 任取 T 的一片树叶 v , 则 $T_1 = T - \{v\}$ 是 $r+1$ 阶树. 由归纳假设知, G 中存在子图 $G_1 \cong T_1$. 设在 T 中与 v 相邻的分枝点为 u , 在 T_1 到 G_1 的同构中与 u 对应的 G_1 中的顶点

是 u' . 由于在 G 中, $d_G(u') \geq \delta(G) \geq r+1$, 而在 G_1 中, $d_{G_1}(u') \leq r$, 于是存在 v' 在 G 中, 但不在 G_1 中, 使得 $(u', v') \in E(G)$. 得到 G 的子图 $G_1 \cup (u', v')$, 它与 T 同构.

16.23. 23. 已知 n 阶 m 条边的无向图 G 是 $k(k \geq 2)$ 棵树组成的森林, 证明: $m = n - k$.

证法一 设森林 G 中含的树分别为 T_1, T_2, \dots, T_k . 由树的性质可知, $m_i = n_i - 1, i = 1, 2, \dots, k$. 于是

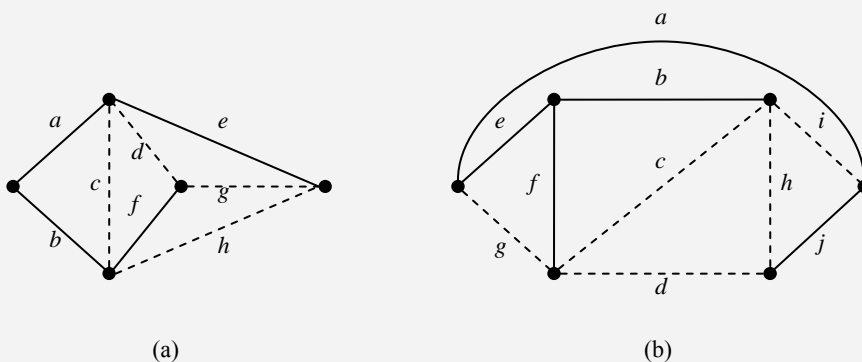
$$m = \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = \sum_{i=1}^k n_i - k = n - k.$$

证法二 从 G 的每棵子树上各取一个顶点连出一条长度为 $(k-1)$ 的路径 Γ , 则 $G \cup \Gamma$ 是连通的无圈图(即树), 含 $m + (k-1) = (n-1)$ 条边. 于是 $m = n - k$.

16.24. 24. 在图 16.16 所示二图中, 实边所示的生成子图 T 是该图的生成树.

(1) 指出 T 的弦, 及每条弦对应的基本回路和对应 T 的基本回路系统.

(2) 指出 T 的所有树枝, 及每条树枝对应的基本割集和对应 T 的基本割集系统.



(a)图:

(1) c, d, g, h 为弦. 它们对应的基本回路为 $C_c = cab, C_d = dabf, C_g = geabf, C_h = heab$. 基本回路系统为 $\{C_c, C_d, C_g, C_h\}$.

(2) a, b, e, f 为树枝. 它们对应的基本割集为 $S_a = \{a, c, d, g, h\}, S_b = \{b, c, d, g, h\}, S_e = \{e, g, h\}, S_f = \{f, d, g\}$. 基本割集系统为 $\{S_a, S_b, C_e, C_f\}$.

(b)图:

(1) c, d, g, h, i 为弦. 它们对应的基本回路为 $C_c = cbf, C_d = djaef, C_g = gfe, C_h = hjaeb, C_i = iaeb$. 基本回路系统为 $\{C_c, C_d, C_g, C_h, C_i\}$.

(2) a, b, e, f, j 为树枝. 它们对应的基本割集为 $S_a = \{a, d, h, i\}, S_b = \{b, c, h, i\}, S_e = \{e, g, d, h, i\}, S_f = \{f, g, d, c\}, S_j = \{j, h, d\}$. 基本割集系统为 $\{S_a, S_b, C_e, C_f, C_j\}$.

16.25. 25. 画出图 16.17 所示两个带权图中的最小生成树.

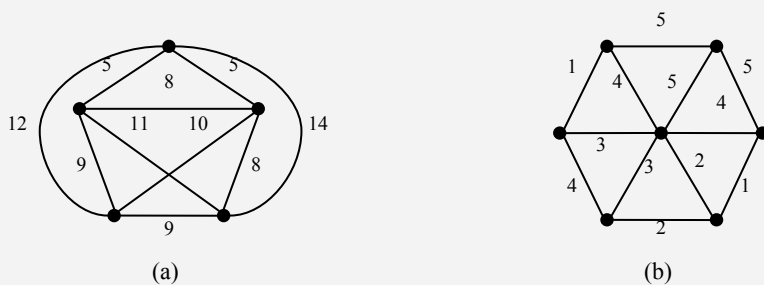
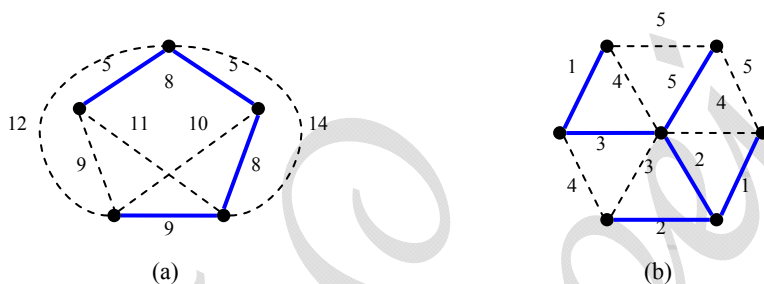


图 16.17

用 Kruskal 算法得两图分别的最小生成树, 见下图实蓝线所示. (a)图中, $W(T) = 27$, (b)图中, $W(T) = 14$.



第 25 题答图

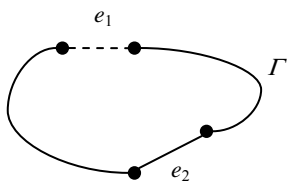
16.26. 26. 设 T 为非平凡树, $\Delta(T) \geq k$, 证明 T 至少有 k 片树叶.

证法一 设 T 中有 x 片树叶, 则 T 中有 $n-x$ 个分枝点 (度数 ≥ 2), 其中至少有个 1 个顶点度数为 $\Delta(T) \geq k$. 由树的性质及握手定理知 $2m = 2(n-1) = \sum d(v) \geq x \cdot 1 + (n-x-1) \cdot 2 + \Delta$. 整理得 $x \geq \Delta \geq k$.

证法二 令 $v \in V(T)$, 使 $d(v) = \Delta(T) \geq k$, 则 $T-v$ 有 Δ 个连通分支 (均为子树). 若子树为平凡树, 其唯一顶点是 T 的树叶; 若子树不是平凡树, 则至少有 2 片树叶, 其中至少有 1 片 (与 v 不相邻) 是 T 的树叶. 所以 T 至少有 Δ ($\geq k$) 片树叶.

16.27. 27. 设 C 为无向图 G 中的一个圈, $e_1, e_2 \in E(C)$, 证明 G 中存在含边 e_1, e_2 的割集.

不妨假设 G 是连通图, 否则可考虑含圈 C 的连通分支. 由连通性, G 有生成树.



令 $\Gamma = C - e_1$, $G_0 = G - e_1$, 则 Γ 是 G_0 中一条路径. 若 G_0 中有圈, 圈上必有一边不在 Γ 上, 从 G_0 中删除该边得 G_1 ; 若 G_1 中仍有圈, 再删除某个圈上不在 Γ 上的一条边得 G_2 ; 继续这一过程直至得到不含圈的 G_k , 它是 G 的生成树, 含 Γ (因而含 e_2), 但不含 e_1 .

G 对应生成树 G_k 的由树枝 e_2 生成的基本割集 S_{e_2} 必然含 e_1 , 否则 e_2 关联的两个顶点在 $G - S_{e_2}$ 中沿 $\Gamma - e_2 \cup e_1 = C - e_2$ 仍然连通.

16.28. 28. 设 T_1, T_2 是无向树 T 的子图, 并且都是树, 又已知 $E(T_1) \cap E(T_2) \neq \emptyset$, 证明导出子图 $G[E(T_1) \cap E(T_2)]$ 是树.

设 $T_3 = G[E(T_1) \cap E(T_2)]$.

因为 T_3 是 T 的子图, 所以 T_3 无回路.

$\forall u, v \in V(T_3)$, 因为 u, v 都是 T_1 的顶点, 所以在 T_1 中有从 u 到 v 的路径 Γ_1 ; 类似地, 在 T_2 中有从 u 到 v 的路径 Γ_2 . 而 Γ_1, Γ_2 都是树 T 中的路径, 而在树中连结两个顶点的路径只有一条, 所以 $\Gamma_1 = \Gamma_2$. 于是 $\Gamma_1 = \Gamma_2$ 在 T_3 中, 这说明 u, v 在 T_3 中是连通的. 所以 T_3 是连通的.

所以 $T_3 = G[E(T_1) \cap E(T_2)]$ 是树.

16.29. 29. 设 G 为 $n(n \geq 5)$ 阶简单图, 证明 G 或 \bar{G} 中必含圈.

首先利用第 23 题的结论确认无圈的图(森林)的边数 $m = n - p \leq n - 1$. (反证法)假如 G 和 \bar{G} 都不含圈, 则

$\frac{1}{2}n(n-1) = |E(K_n)| = |E(G)| + |E(\bar{G})| \leq 2(n-1)$, 于是 $n(n-4) \leq 0$, 而这与 $(n \geq 5)$ 矛盾.

16.30. 30. 设 T_1, T_2 是无向连通图 G 的两棵生成树, 已知 e_1 是 T_1 的树枝又是 T_2 的弦, 证明: 存在边 e_2 是 T_1 的弦又是 T_2 的树枝, 使得 $(T_1 - e_1) \cup \{e_2\}$ 和 $(T_2 - e_2) \cup \{e_1\}$ 都是 G 的生成树.

由于 e_1 是 T_1 的树枝, T_2 的弦, 所以 e_1 不是环(环不在任何生成树上), 也不是桥(桥在任何生成树上).

考虑 G 的对应 T_1 的由 e_1 生成的基本割集 $S_{T_1}(e_1)$, 和 G 的对应 T_2 的由 e_1 生成的基本回路 $C_{T_2}(e_1)$. $S_{T_1}(e_1)$ 必含 $C_{T_2}(e_1)$ 的至少一条边, 即 $S_{T_1}(e_1) \cap C_{T_2}(e_1) \neq \emptyset$; 否则 e_1 的两个端点 u, v 在 $G - S_{T_1}(e_1)$ 中有通路, 与 $S_{T_1}(e_1)$ 是 G 的割集不符. 从 $S_{T_1}(e_1) \cap C_{T_2}(e_1)$ 中任取一条边, 则 e_2 是 T_2 的树枝, T_1 的弦.

$(T_1 - e_1) \cup \{e_2\}$ 是连通的且无回路, 且是 G 的生成子图, 因此是 G 的生成树. $(T_2 - e_2) \cup \{e_1\}$ 是连通的且无回路, 且是 G 的生成子图, 因此它也是 G 的生成树.

16.31. 略

16.32. 略

16.33. 略

16.34. 略

16.35. 35. 画出所有非同构的 $n(1 \leq n \leq 5)$ 阶根树.

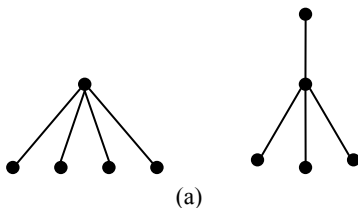
首先画出 n 阶非同构的无向树, 然后由各棵树再派生非同构的根树. $n = 1$ 和 $n = 2$ 时, 各有 1 棵非同构的根树. $n = 3$ 时有 2 棵非同构的根树. $n = 4$ 时有 4 棵非同构的根树. 而 $n = 5$ 时, 有 9 棵非同构的根树.

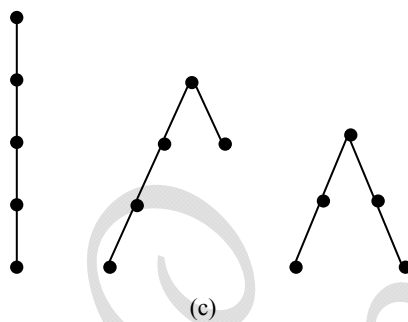
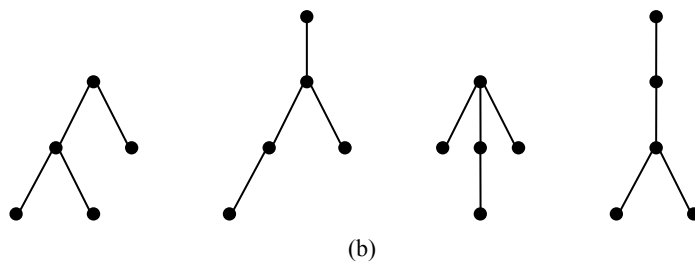
下面给出 $n = 5$ 的 9 棵非同构的根树, 它们分别为:

对应度数列为 $1, 1, 1, 1, 4$ 的有 2 棵, 如答图(a)所示.

对应度数列为 $1, 1, 1, 2, 3$ 的有 4 棵, 如答图(b)所示.

对应度数列为 $1, 1, 2, 2, 2$ 的有 3 棵, 如答图(c)所示.





习题十七

P337 全部 1~44 题

17.1.1. 证明下面 3 个图都是平面图.

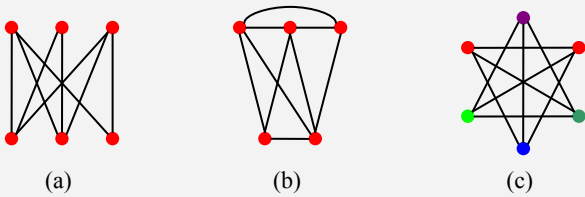
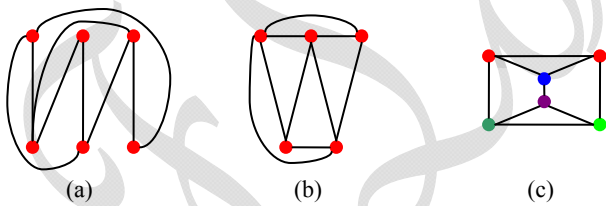


图 17.15

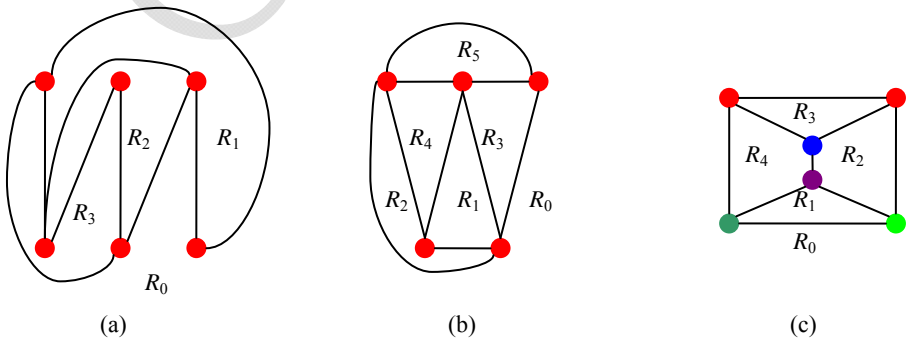
只要能找出它们的平面嵌入, 就说明它们是平面图. 以下三个图分别为题中图的平面嵌入:



第 1 题答图

所以它们都是平面图.

17.2.2. 分别求出图 17.15 所示各平面图的一个平面嵌入, 并验证各面次数之和等于边数的两倍.



第 2 题答图

(a)

面	R_0	R_1	R_2	R_3	Σ
次数	4	4	4	4	16

$\Sigma \deg(R_i) = 16 = 2m \ (m = 8).$

(b)

面	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	Σ
次数	3	3	3	3	3	3	18

$$\sum \deg(R_i) = 18 = 2m \ (m=9).$$

(c)

面	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	Σ
次数	4	3	4	3	4	18

$$\sum \deg(R_i) = 18 = 2m \ (m=9).$$

17.3.3. 图 17.16 所示 3 图都是平面嵌入, 先给图中各边标定顺序, 然后求出图中各面的边界和次数.

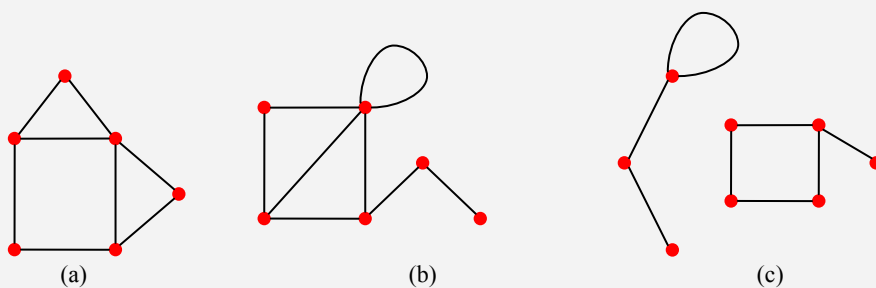
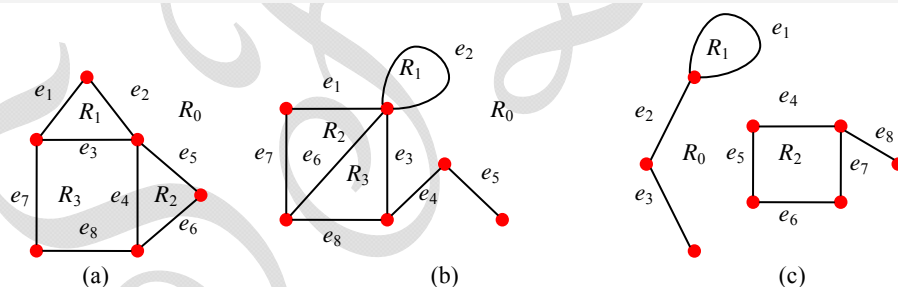


图 17.16



第 3 题答图

(a)

R_0 的边界为 $e_1e_2e_5e_6e_8e_7$, $\deg(R_0) = 6$.

R_1 的边界为 $e_1e_2e_3$, $\deg(R_1) = 3$.

R_2 的边界为 $e_4e_5e_6$, $\deg(R_2) = 3$.

R_3 的边界为 $e_3e_4e_8e_7$, $\deg(R_3) = 4$.

(b)

R_0 的边界为 $e_1e_2e_3e_4e_5e_8e_7$, 是复杂回路, $\deg(R_0) = 9$.

R_1 的边界为 e_2 (环), $\deg(R_1) = 1$.

R_2 的边界为 $e_1e_6e_7$, $\deg(R_2) = 3$.

R_3 的边界为 $e_3e_8e_6$, $\deg(R_3) = 3$.

(c)

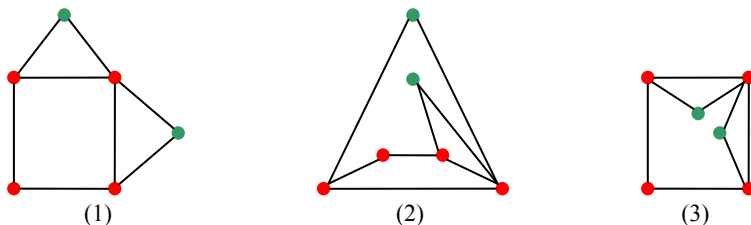
R_0 的边界为 $e_1e_2e_3e_2$ 与 $e_4e_8e_7e_6e_5$ 组成, $\deg(R_0) = 11$.

R_1 的边界为 e_1 , $\deg(R_1) = 1$.

R_2 的边界为 $e_4e_7e_6e_5$, $\deg(R_2) = 4$.

17.4.4. 在图 17.16 所示图的(a)中, 重新找平面嵌入, 使外部面的次数分别为 3 和 4.

下图中, (2), (3)都是图 17.16 中(a)的平面嵌入, 其中(2)的外部面的次数为 3, (b)的外部面的次数为 4.



第 4 题答图

17.5.5. 求图 17.17 所示平面图的面边界和次数.

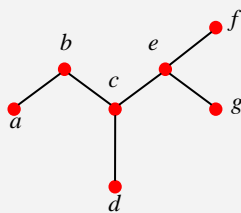


图 17.17

解 该图只有外部面, 其边界为复杂回路 $abcefegecdcba$, 次数为 12.

17.6.6. 证明定理 17.6: 设 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶极大平面图, 则 G 中不存在割点和桥.

(1) 证明 G 中无割点. (反证法) 假如 G 有割点 v_0 , 则 $G' = G - v_0$ 是平面图, 且至少有两个连通分支. 在 G 中与 v_0 相邻的顶点中必有两个顶点(记为 u, v)分属 G' 的不同连通分支. $G' \cup (u, v)$, 进而 $G \cup (u, v)$ 也是平面图, 这与 G 是极大平面图矛盾.

(2) 证明 G 中无桥. (反证法) 假如 G 有桥 $e = (u, v)$. 由于 G 作为极大平面图是连通的, 又 G 至少有 3 个顶点, 所以 u 与 v 中至少有个顶点度数 ≥ 2 . 不妨设 $d(u) \geq 2$, 则 u 是 G 的割点, 但由(1)知 G 不能有割点.

17.7.7. 证明图 17.18 所示二部图都是极大平面图.

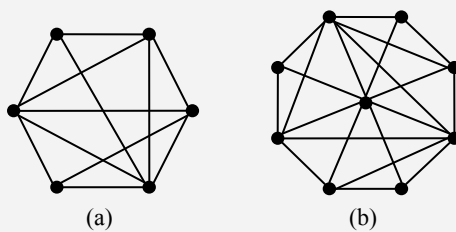
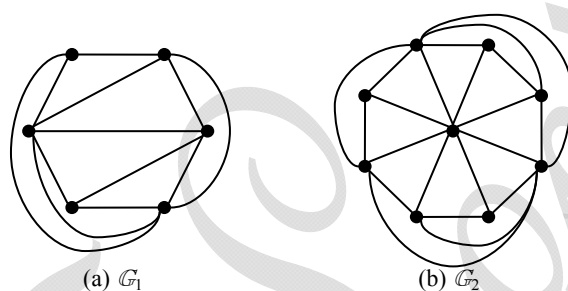


图 17.18

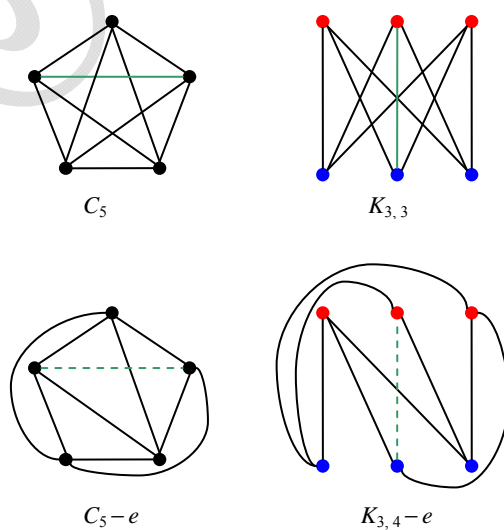
图(a)中的图有平面嵌入 G_1 , 图(b)中的图有平面嵌入 G_2 (见下图), 它们的每个面的次数都是3. 所以这两个图都是极大平面图(耿素云, p325 定理 17.7).



第 7 题答图

17.8.8. 验证 K_5 和 $K_{3,3}$ 都是极小非平面图.

已知 K_5 和 $K_{3,3}$ 都是非平面图(耿素云, 2004. 定理 17.10 推论. p327), 而从 K_5 或 $K_{3,3}$ 中删除任一条边后, 所得图都是平面图(见下图).



第 8 题答图

17.9. 图 17.19 是极小非平面图吗? 为什么?

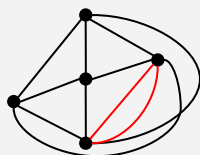


图 17.19

图中含一对平行边, 删除其中一条边后, 得 K_5 , 不是平面图. 因而图中所示图不是极小平面图.

17.10. 10. 验证图 17.29 所示平面图满足欧拉公式.

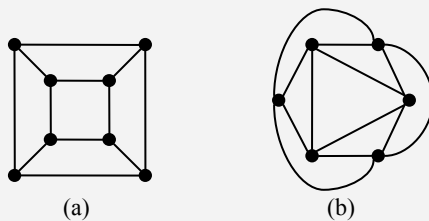


图 17.20

(a) 图有 $n=8$ 个顶点, $m=12$ 条边, $r=6$ 个面, 满足 $n-m+r=2$.

(b) 图有 $n=6$ 个顶点, $m=12$ 条边, $r=8$ 个面, 满足 $n-m+r=2$.

17.11. 11. 验证图 17.21 所示非连通平面图满足欧拉公式的推广.

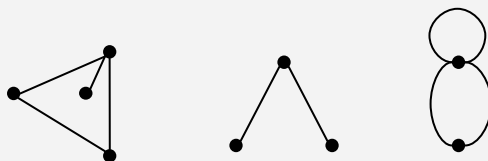


图 17.21

图有 $n=9$ 个顶点, $m=9$ 条边, $r=4$ 个面, $k=3$ 个连通分支, 满足 $n-m+r=k+1$.

17.12. 12. 利用定理 17.12 证明 K_5 不是平面图.

若 K_5 是平面图, 它的边数应 $\leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$, 但 K_5 有 10 条边.

17.13. 13. 说明利用定理 17.12 不能证明 $K_{3,3}$ 不是平面图, 从而说明定理 17.12 是 $n(n \geq 3)$ 阶简单平面图的必要条件, 而不是充分条件.

$K_{3,3}$ 有 $n=6$ 个顶点, $m=9$ 条边, 满足 $m=9 \leq 3n-6=3 \cdot 6-6=12$. 但 $K_{3,3}$ 不是平面图. 所以定理 17.12 给出的不是简单平面图的充分条件.

17.14. 14. 设 G 是简单平面图, 面数 $r < 12$, $\delta(G) \geq 3$. 证明 G 中存在次数小于或等于 4 的面. 举例说明, 当 $r=12$ 时, 上述结论不真.

不妨设 G 是连通的, 否则考虑它的每个连通分支. 由 G 的连通性及欧拉公式,

$$n - m + r = 2;$$

由 $\delta(G) \geq 3$ 及握手定理,

$$2m \geq 3n;$$

由定理 17.4,

$$2m = \sum \deg(R_i).$$

由上面三式得,

$$\sum \deg(R_i) \leq 6r - 12.$$

注意到 $r < 12$, 知面的平均次数 $\sum \deg(R_i)/r \leq 6 - 12/r < 5$. 而面的次数是整数, 所以存在次数小于或等于 4 的面.

17.15. 15. 设 G 是 n 阶 m 条边的简单平面图, 已知 $m < 30$, 证明 $\delta(G) \leq 4$.

用反证法. 否则, 假设 $\forall v \in V(G), d(v) \geq 5$. 由握手定理可知

$$2m \geq 5n$$

由定理 17.12 可知

$$m \leq 3n - 6$$

由以上两个不等式消去 n , 得到 $m \geq 30$, 这与 $m < 30$ 相矛盾, 所以 $\delta(G) \leq 4$.

17.16. 16. 设 G 是 $n(n \geq 11)$ 阶无向简单图, 证明 G 或 \bar{G} 必为非平面图.

(反证法) 假如 G 或 \bar{G} 都是平面图, 它们的边数 m 和 m' 应分别满足 $m \leq 3n - 6, m' \leq 3n - 6$. 于是 $\frac{1}{2}n(n-1) = m + m' \leq 2(3n - 6)$, 或 $(n-1)(n-11) + 2 \leq 0$, 而这是不可能的, 因为 $n \geq 11$.

17.17. 17. 证明图 17.22 所示的图全为非平面图.

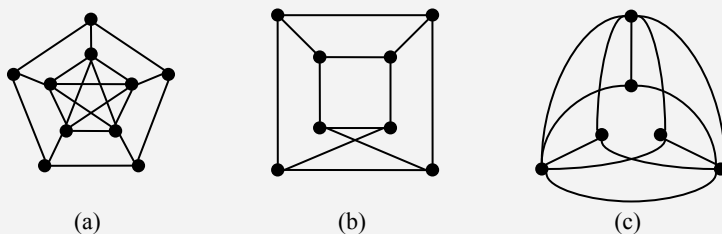
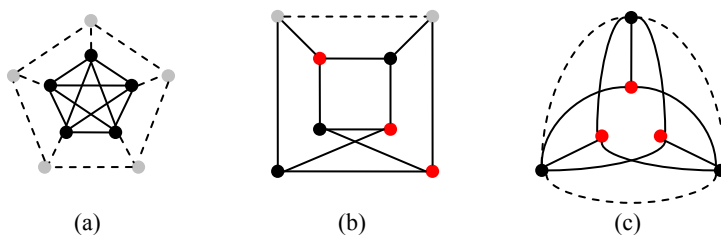


图 17.22

(a) 中的图含子图 K_5 , (b) 中的图含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图, (c) 中的图含子图 $K_{3,3}$, 见下图实线所示.



第 17 题答图

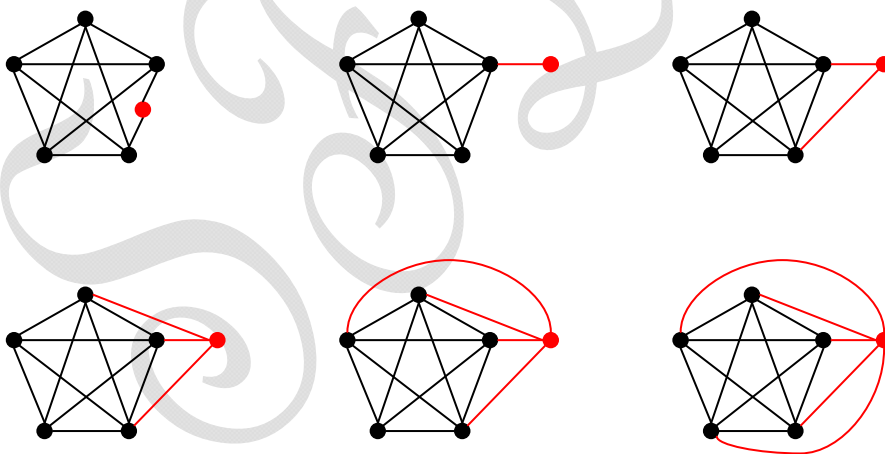
17.18. 图 17.22 所示 3 个图中, 哪个(些)是极小非平面图?

每个图都可以删除一条边后仍不可平面, 见第 17 题答图, 所以这 3 个图都不是极小非平面图.

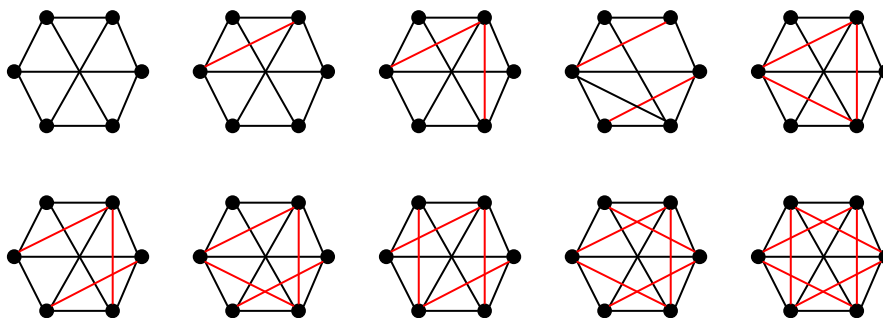
17.19. 画出 6 阶的所有非同构的连通的简单的非平面图.

6 阶连通的简单的非平面图都是 K_6 的子图, 因而可以从 K_6 的子图中去寻找. 又 K_5 与 $K_{3,3}$ 都是 K_6 的子图, 它们都是极小非平面图. 根据库拉图斯基定理, 所要画的图可以从两个途径得到.

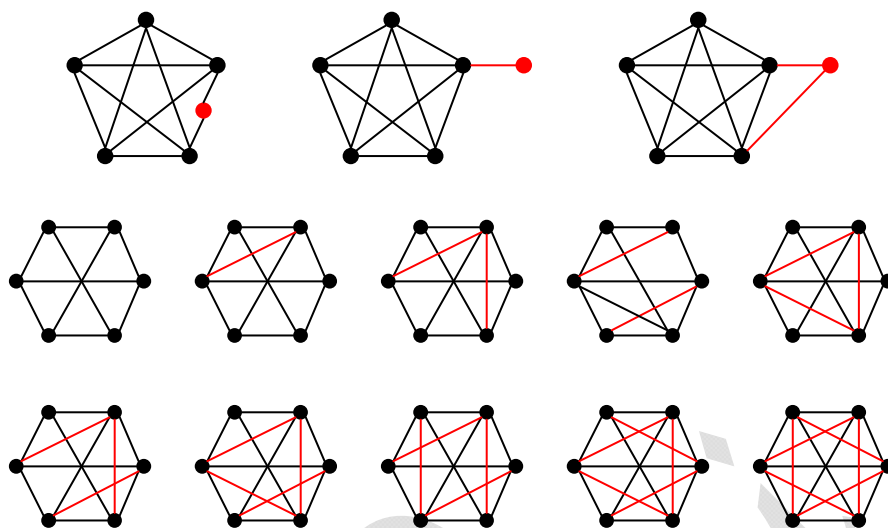
(1) 对 K_5 插入 2 度顶点, 或在 K_5 外放置一个顶点使其与 K_5 上的 1~5 个顶点相邻, 得 6 个不同构的 6 阶简单连通的非平面图:



(2) 对 $K_{3,3}$ 加 0~6 条边得 10 个不同构的 6 阶简单连通的非平面图, 其中最后 3 个与(1)中得到的最后 3 个是同构的:



13 个不同构的 6 阶连通的简单的非平面图:



第 19 题答图 13 个不同构的 6 阶连通的简单的非平面图

17.20. 20. 求图 17.23 所示各平面图的对偶图.

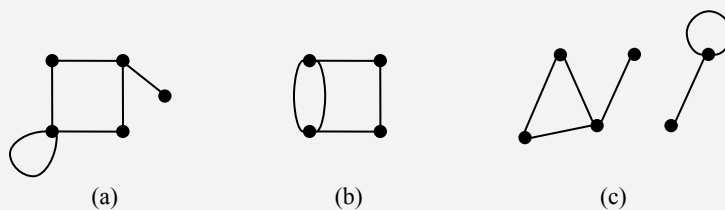
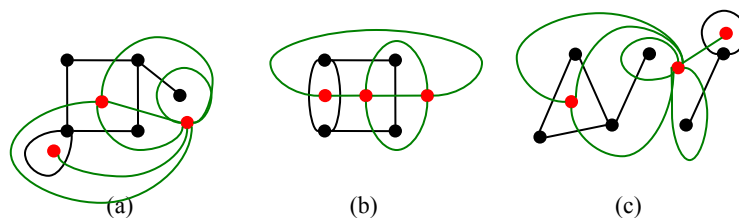


图 17.23

见答图.



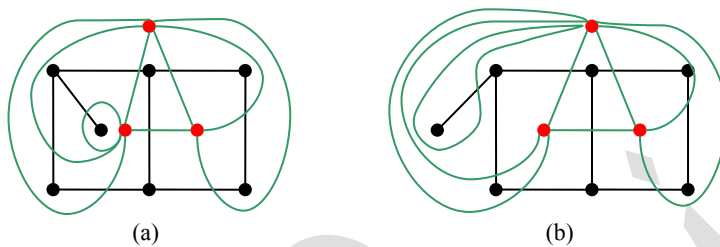
第 20 题答图

17.21. 21. 平面图 G_1 与 G_2 分别由图 17.24 中(a)与(b)所示, 易知它们是同构的, 它们的对偶图也同构吗?



图 17.24

不同构, 见本题答图.



第 21 题答图

17.22. 22. 证明定理 17.18.

定理 17.18 设 G^* 是具有 $k(k \geq 2)$ 个连通分支的平面图 G 的对偶图, n^*, m^*, r^* 和 n, m, r 分别为 G^* 和 G 的顶点数, 边数, 面数, 则

(1) $n^* = r$; (2) $m^* = m$; (3) $r^* = n - k + 1$;

(4) 设 G^* 的顶点 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中, 则 $d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$.

由 G^* 的构造知, (1), (2) 是显然的. (4) 证明类似定理 17.17 的证明(耿素云, 2004, p332). 这里证明(3). 运用欧拉公式及其推广形式. 由于任何平面图的对偶图是连通的, 因而由欧拉公式

$$n^* - m^* + r^* = 2.$$

另由欧拉公式的推广形式有

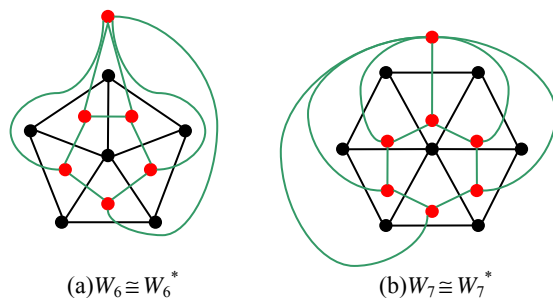
$$n - m + r = k + 1.$$

于是

$$r^* = 2 + m^* - n^* = 2 + m - r = n - k + 1.$$

17.23. 23. 验证轮图 W_6, W_7 是自对偶图.

见答图.



第 23 题答图

17.24. 24. 设 n 阶 m 条边的平面图是自对偶图, 证明 $m=2n-2$.

设 G^* 为 G 的对偶图, 因为 G 为自对偶图, 所以

$$G^* \cong G$$

由于对偶图都是连通的平面图, 因而 G 连通, 所以满足欧拉公式, 即

$$n - m + r = 2$$

其中 r 为 G 的面数. 并且 $n^* = n$, 由定理 17.17 可知, $r = n^* = n$, 代入欧拉公式, 得

$$n - m + n = 2$$

解得

$$m = 2n - 2.$$

17.25. 25. 设 G 为 $n(n \geq 4)$ 阶极大平面图, 证明 G 的对偶图 G^* 是 2 边-连通的 3-正则图.

证 按极大平面图的定义, G 是简单图, G 中无环, 所以 G^* 中无桥, 因而是 2-边连通的. 由定理 17.7 知 G 的每个面的次数均为 3, 因此由定理 17.17 知 G^* 每个顶点的度数均为 3. 由定理 17.6 知 G 没有桥, 因此 G^* 中无环. 又由于 $n \geq 4$, 所以 G 的每两个面的边界上至多有一条公共边, 因此 G^* 中无平行边. 于是 G 是简单图, 且是 3-正则的.

17.26. 26. 证明: 平面图 G 的对偶图 G^* 是欧拉图当且仅当 G 中每个面的次数均为偶数.

必要性. 由于 G^* 是欧拉图, 因而 $\forall v \in V(G^*)$, $d_{G^*}(v)$ 为偶数. 而 $d_{G^*}(v)$ 等于 v 所在 G 的面 R 的次数, 即 $d_{G^*}(v) = \deg(R)$. 于是, $\deg(R)$ 为偶数. 又 G 的任何面内均有 G^* 的一个顶点, 所以 G 的每个面的次数都是偶数.

充分性. 由于对偶图都是连通图, 因而有 G^* 连通. 又 $\forall v \in V(G^*)$, 必存在 G 的面 R , 使其 v 在 R 中. 于是, $d_{G^*}(v) = \deg(R)$ 为偶数, 因而 G^* 为欧拉图.

17.27. 27. 设 G^* 为平面图 G 的对偶图, G^{**} 是 G^* 的对偶图, 在什么情况下, G 与 G^{**} 一定不同构?

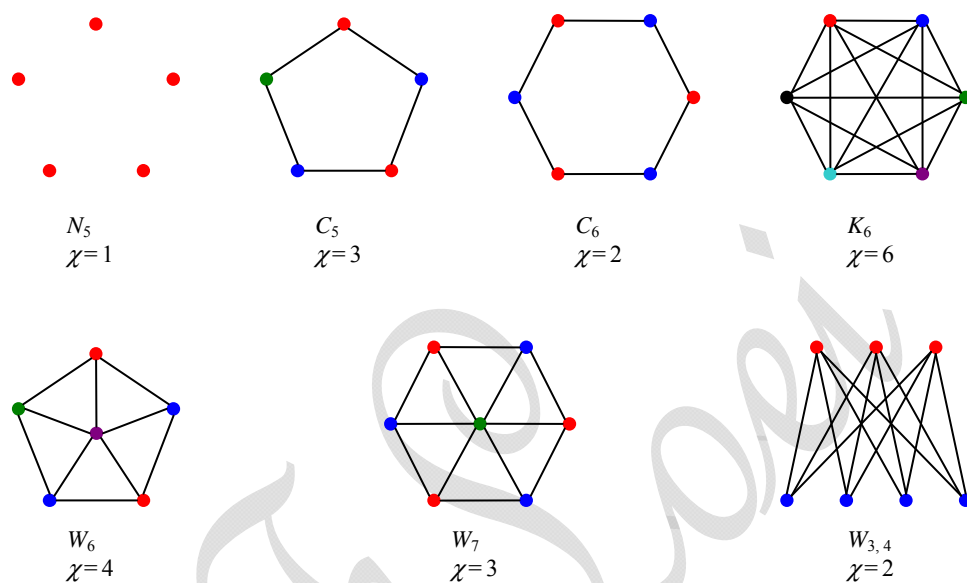
G^{**} 是平面图 G^* 的对偶图, 因而总是连通的. 当 G 不连通时, 一定与 G^{**} 不同构.

17.28. 28. 给下列各图的顶点用尽可能少的颜色着色.

- (1) 5 阶零图 N_5 .
- (2) 5 阶圈 C_5 .

- (3) 6 阶圈 C_6 .
 (4) 6 阶完全图 K_6 .
 (5) 6 阶轮图 W_6 .
 (6) 7 阶轮图 W_7 .
 (7) 完全二部图 $K_{3,4}$.

见答图.



第 28 题答图

17.29. 29. 求图 17.25 所示各图的点色数.

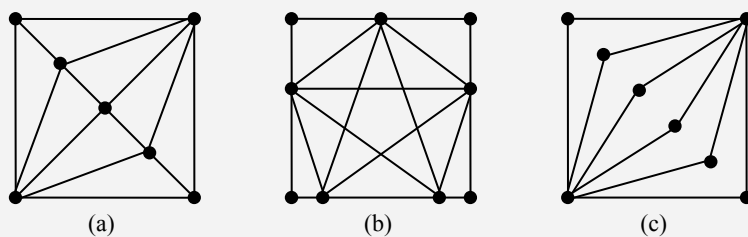
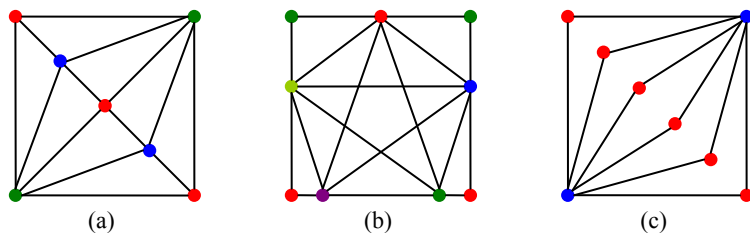


图 17.25

- (a) 图中含 K_3 , 所以点色数 $\chi \geq 3$. 但能用 3 种颜色给顶点着色, 如下图(a)所示, 所以 $\chi \leq 3$, 因而 $\chi=3$.
 (b) 图中含 K_5 , 所以点色数 $\chi \geq 5$. 但能用 5 种颜色给顶点着色, 如下图(b)所示, 所以 $\chi \leq 5$, 因而 $\chi=5$.
 (c) 该图是二部图且不是零图, 故点色数 $\chi=2$.



第 29 题答图

17.30. 30. 设 T 是非平凡树, 证明 $\chi(T)=2$.

根据习题十六第 9 题结论, 非平凡的无向树都是二部图(因为树不含圈, 更不含奇圈), 且至少含一条边, 所以点色数是 2.

17.31. 31. 设 G 是 n 阶 k -正则图, 证明 $\chi(G) \geq \frac{n}{n-k}$.

对 G 的每个顶点 v , 与它相邻的 k 个顶点涂的颜色不能与 v 相同, 所以与 v 涂相同颜色的顶点至多有 $n-k$ 个. 每个 χ 着色把 G 的 n 个顶点划分成 χ 组(色组), 同组的顶点着相同的颜色, 而每组至多有 $n-k$ 个顶点, 于是 $\chi(n-k) \geq n$, 或 $\chi \geq \frac{n}{n-k}$.

17.32. 32. 证明: 任何平面图(无环)都是 6-可着色的.

证 平行边不影响图的顶点的着色, 可以只考虑简单图.

对简单平面图 G 的顶点数 n 进行归纳. $n \leq 6$ 时结论显然成立. 设 $n=k(\geq 6)$ 时结论成立. 当 $n=k+1$ 时, 因为是简单平面图, G 中至少有一个顶点 v 的度小于等于 5. 根据归纳假设, $G-v$ 是 6-可着色的. 对于 $G-v$ 的一个 6 着色, 与 v 邻接的所有 5 个顶点最多用了 5 种颜色, 故可以用 6 种颜色中剩下的那一种给顶点 v 着色, 这样得 G 的一个 6 着色.

17.33. 33. 用尽量少的颜色给图 17.26 所示的地图面着色.

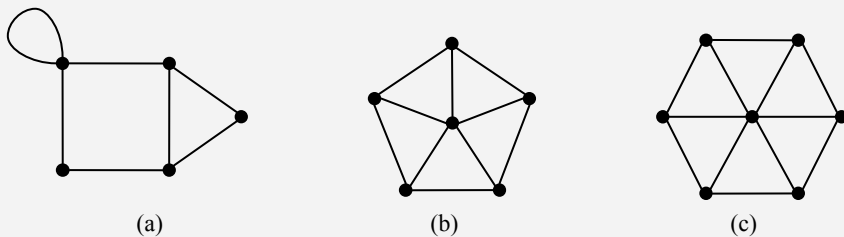


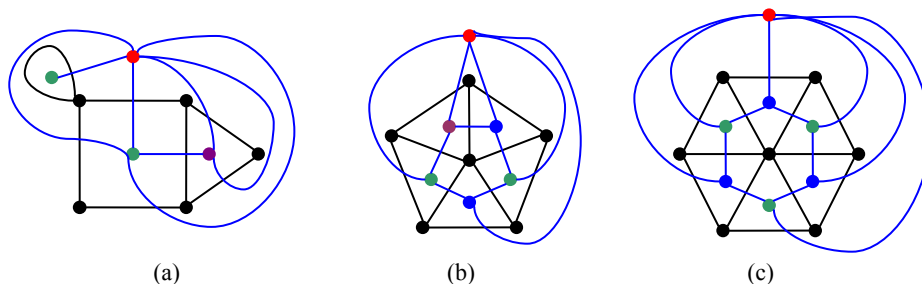
图 17.26

(a) 中地图的对偶图是 3-(点)可着色的, 又因为含 K_3 , 所以色数 ≥ 3 . 给出的地图至少要 3 种颜色进行面着色.

(b) 中地图对应的平面图是偶阶轮图 W_6 , 其对偶图也是 W_6 (自对偶图), 点色数是 4(定理 17.21). 给该地图的面着色至少要 3 种颜色.

(c)中地图是奇阶轮图 W_7 , 这是自对偶图, 点色数是 3. 至少需要 3 种颜色给该地图的面着色.

各地图的最少着色见下图中各自对偶图的顶点着色所示.



第 33 题答图

17.34. 34. 通过求图 17.26 所示各地图的对偶图的点色数, 求各地图的面色数.

在第 33 题中事实上已经求出(a)地图的面色数 $\chi^*=3$; (b)地图的面色数 $\chi^*=4$; (c)地图的面色数 $\chi^*=3$.

17.35. 35. 求轮图 W_{2k} 与 W_{2k+1} 所对应的地图的面色数.

轮图 W_n 是自对偶图, 其对应的地图的对偶图也是 W_n , 即 $W_n^*=W_n$. 所以 $\chi^*(W_n)=\chi(W_n^*)=\chi(W_n)$. 故 $\chi^*(W_{2k})=\chi(W_{2k})=4$, 而 $\chi^*(W_{2k+1})=\chi(W_{2k+1})=3$.

17.36. 36. 设 G^* 为图 17.27 所示平面图 G 的对偶图. 画出 G^* . 通过求 $\chi(G^*)$ 求 G 对应地图的 $\chi^*(G)$.

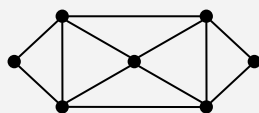
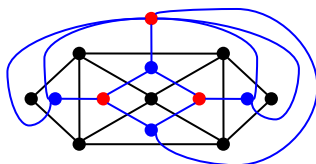


图 17.27

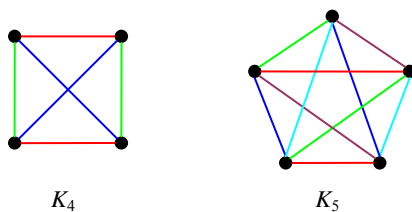
G^* 如下图蓝线所示, 是二部图, $\chi(G^*)=2$. 而 $\chi^*(G)=\chi(G^*)=2$.



第 36 题答图

17.37. 37. 给完全图 K_4 和 K_5 的边着色.

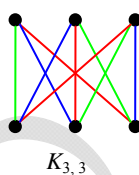
见下图. $\chi'(K_4)=4-1=3$. $\chi'(K_5)=5$.



第 37 题答图

17.38. 38. 给 $K_{3,3}$ 的边着色.

见下图. $\chi'(K_{3,3}) = \Delta = 3$.

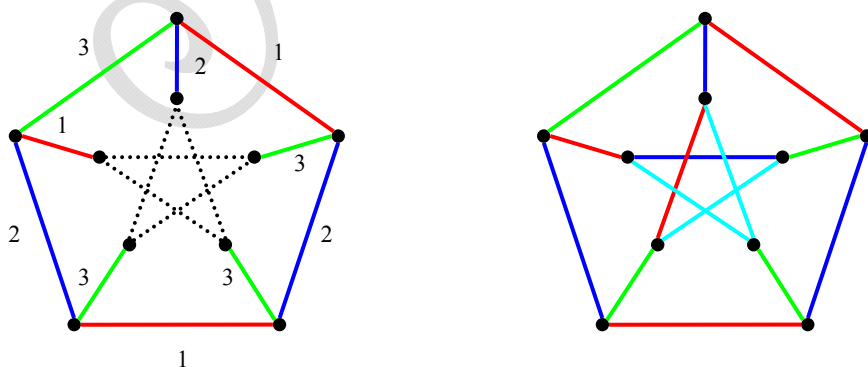


第 38 题答图

17.39. 39. 证明彼得松图的边色数 $\chi' = 4$.

彼得松图的最大度 $\Delta = 3$, 由维津定理知 $3 \leq \chi' \leq 4$. 下面证明 3 种颜色不能给边着色:

彼得松图是由外 5 阶圈 $C_{\text{外}}$ 和内 5 阶圈 $C_{\text{内}}$ 及连结 $C_{\text{外}}$ 与 $C_{\text{内}}$ 的 5 条边组成的. 由于 $\chi'(C_5) = 3$, 所以可以用颜色 1(红), 2(蓝), 3(鲜绿)给 $C_{\text{外}}$ 边着色, 用这 3 种色还可以给中间 5 条边着色, 见下图. 但还用颜色 1, 2, 3 就不能给 $C_{\text{内}}$ 着色了, 必须再加一种颜色(青绿)才行. 因而 $\chi' = 4$.



第 39 题答图

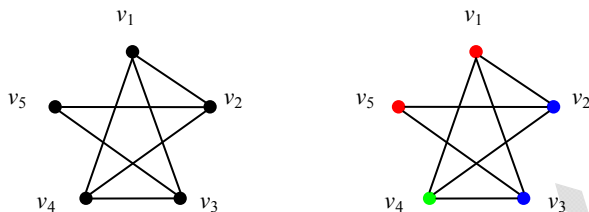
17.40. 40. 某大学计算机专业三年级学生在某学期共选了 n 门选修课, 期末考试前必须提前将这 n 门选修课程考完. 要求每天每人在下午考一门课, 问至少需要几天考完这 n 门课?

作无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v | v \text{ 是选修课} \}$, $E = \{(u, v) | u, v \in V \wedge \text{有人同时选修 } u \text{ 和 } v\}$.

注意到, 课程 u 与 v 可以同时考 \Leftrightarrow 没人既选 u 又选 $v \Leftrightarrow$ 在图 G 中 u 与 v 不相邻 $\Leftrightarrow u$ 与 v 可涂同一种颜色. 于是若 G 有一种 k 着色, 则说明 n 门课程可以划分外 k 组, 同组课程可以安排在同一天考试, k 天可以考完. 考完所有课程需要的最少天数就是 $\chi(G)$.

17.41. 41. 上题中, 设 $n=5$, 并且课程 1 与 2, 1 与 3, 1 与 4, 2 与 4, 2 与 5, 3 与 4, 3 与 5 均有人同时选. 问至少需要几天考完这 5 门课程?

根据第 40 题讨论及本题条件, 所作无向图 G 如下图左图所示. G 含子图 K_3 且是 3 可着色的, 因而 $\chi(G)=3$, 这说明至少需要 3 天才能考完这 5 门课程.



第 41 题答图

17.42. 42. 某中学高三年级共有 s 个班, 由 r 名教员为他们授课. 设 $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ 为教员集合, $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ 为班级集合. 令 m_{ij} 为教员 v_i 在一天内为 u_j 班上课的节数, $i=1, 2, \dots, r, j=1, 2, \dots, s$. 问本年级每天至少要安排多少节课? (每天至少要安排多少个以节为单位的时间段才能完成所有的教学?)

作二部图 $G=(V_1, V_2, E)$, V_1, V_2 由题目给出, 而 $E = \{(v_i, u_j) \mid v_i \text{ 给 } u_j \text{ 上一节课}\}$. 每条边 (v_i, u_j) 代表一个(一节课)的教学(v_i 教, u_j 学), 若 v_i 给 u_j 上 m_{ij} 节课, 则有 m_{ij} 条平行边 (v_i, u_j) .

两个不同的教学 (v_i, u_j) 与教学 (v_k, u_l) 可以同时(在同一个时间段)进行 \Leftrightarrow 参与教学的人员(师生) v_i, u_j, v_k, u_l 互不相同 \Leftrightarrow 在图 G 中边 (v_i, u_j) 与边 (v_k, u_l) 互不相邻 $\Leftrightarrow u$ 与 v 可涂同一种颜色.

G 的每个边着色确定一种排课方案: 涂有相同颜色的边所代表的教学可以在同一节课(同一个时间段)进行, 于是为每一种颜色安排一个教学时间段; 安排所有的教学就是给每条边都涂上颜色, 使它们表示的教学在为该颜色安排的时间段进行. 每一种颜色的同色边的数目就是参与这些同色边表示的教学的班数(也就是所需要的教室数), 着色所用颜色数就是一天内要安排的教学时间段的个数(即课的节数).

教员 v_i 一天内上课的节数为 $d(v_i) = \sum_j m_{ij}$, 班级 u_j 上课的节数为 $d(u_j) = \sum_i m_{ij}$. $\chi = \Delta = \max(\{\sum_j m_{ij}\} \cup \{\sum_i m_{ij}\})$. 一天内至少要安排 Δ 节课. 令 k_i 为涂了第 i 种颜色的边的数目. 若安排 Δ 节课, 则需要的教室数至少为 $\min \max\{k_1, k_2, \dots, k_\Delta\}$, 这里 \max 是对同一个边着色求最大值, \min 是对不同的边着色求最小值.

17.43. 43. 上题中, 设 $r=4, s=5, m_{ij}$ 如表. 问本年级每天至少要安排多少节课? 又至少需要多少个教室?

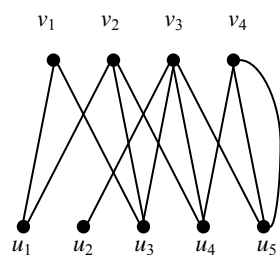
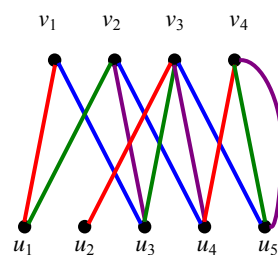
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
v_1	1	0	1	0	0
v_2	1	0	1	1	0
v_3	0	1	1	1	1
v_4	0	0	0	1	2

由第 42 题的讨论及本题给的条件, 所作二部图 G 如下图(a)所示.

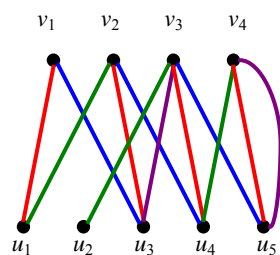
由于 $\chi(G) = \Delta(G) = 4$, 所以每天至少安排 4 节课. 同色的边表示的教学是同时进行的, 必须安排在不同的教室. 为使所需教室数最少, 应使同色边数的最大值达到最少.

下图(b)的 4 边着色中, 每种颜色的边都是 3 条, 表示安排 4 节课, 每节课都有 3 个教学(占用 3 个教室), 所需教室数为 3. 对应的课表见下表.

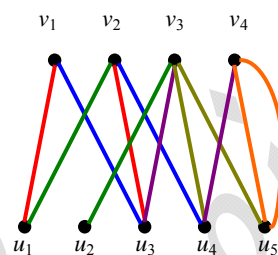
下图(c)的4边着色确定的排课方案也是排4节课,但需要4个教室(第一节课有4个教学班上课). (红色算第1色,排第一节;蓝色第2;绿色第3;紫罗兰色第4;深黄第5;橙色第6).
如果只有2个教室,则至少需要排6节课(因为总共有12节课次的教学),例如下图(d)的6边着色对应的排课.

(a) G 

(b) 4边着色



(c) 4边着色



(d) 6边着色

图(b)中4边着色对应的课表

节	1	2	3	4
v_1	u_1	u_3	-	-
v_2	-	u_4	u_1	u_3
v_3	u_2	u_5	u_3	u_4
v_4	u_4	-	u_5	u_5

习题十八

本习题中的图均为无向简单图.

18.1. 无向图 G 如图 18.6 所示, 求 G 中两个不同的极小支配集, 一个最小支配集及支配数 γ_0 .

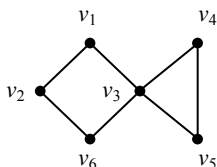


图 18.6

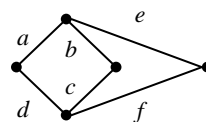


图 18.7

$\{v_1, v_4, v_6\}, \{v_1, v_5, v_6\}$ 是极小支配集, 不是最小支配集. 最小支配集有 $3(\text{含 } v_2) + 1(\text{含 } v_1) + 1(\text{含 } v_6) = 5$ 个, $\{v_1, v_3\}$ 是其中一个. 支配数 $\gamma_0 = 2$.

18.2. 求出图 18.6 所示无向图 G 中的两个不同的极大点独立集, 一个最大点独立集及点独立数 β_0 .

有 8 个极大点独立集, $\{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}$ 是其中两个, 这两个不是最大点独立集. 有两个最大点独立集, $\{v_1, v_4, v_6\}$ 是其中一个. 点独立数 $\beta_0 = 3$.

18.3. 求出图 18.6 所示无向图 G 中的两个不同的极小点覆盖集, 一个最小点覆盖集及点覆盖数 α_0 .

由定理 18.2 的推论, 极大(最大)点独立集的补集是极小(最小)点覆盖. 由第 2 题的结论知, 极小点覆盖有 8 个, $\{v_1, v_4, v_5, v_6\}, \{v_1, v_3, v_5, v_6\}$ 是其中两个; 这两个不是最小点覆盖. 而最小点覆盖有 2 个, $\{v_2, v_3, v_5\}$ 是其中一个. 点覆盖数 $\alpha_0 = 3$.

求 G 的支配数 γ_0 , 点覆盖数 α_0 , 点独立数 β_0 , 边覆盖数 α_1 , 匹配数 β_1 .

18.4. 无向图 G 如图 18.7 所示, 求 G 中两个不同的极小边覆盖集, 一个最小边覆盖集及边覆盖数 α_1 .

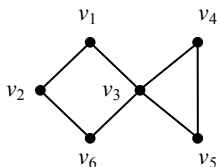


图 18.6

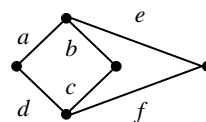


图 18.7

有 6 个极小边覆盖, $\{a, b, f\}, \{a, c, f\}$ 是其中两个. 边覆盖数 $\alpha_1 = 3$. 该图的极小边覆盖都是最小边覆盖.

18.5. 求图 18.7 所示无向图 G 中的两个不同的极大匹配, 一个最大匹配及匹配数 β_1 .

$\{a, c\}, \{a, f\}$ 是极大匹配, 也是最大匹配. 匹配数 $\beta_1=2$. 该图的极大匹配都是最大匹配.

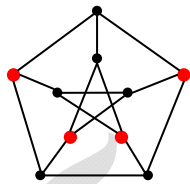
18.6. 图 18.7 所示无向图 G 中存在完美匹配吗? 为什么?

因为每个匹配都覆盖偶数个顶点, 而该图有奇数个顶点, 所以该图没有完美匹配.

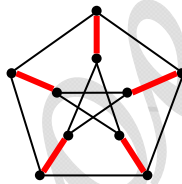
18.7. 在彼得松图(如图 14.3 中(a)所示)中, 通过求最大点独立集求最小点覆盖集, 从而求出 β_0 和 α_0 .

彼得松图的点独立集 S 最多含 4 个顶点. 因为假如 S 含 5 个顶点, 则由于彼得松图是 3 正则的, S 的 5 个顶点一共关联 $3 \cdot 5=15$ 条不同的边, 这 15 条边中的每一条边的两个端点必然一个在 S 中, 另一个在 \bar{S} 中. 图中一共有 15 条边, 这说明 \bar{S} 的顶点是互不相邻的, 从而 S 和 \bar{S} 构成图的两个互补顶点子集, 而彼得松图是二部图. 但彼得松图不是二部图, 所以彼得松图的点独立集最多含 4 个顶点.

答图中的 4 个大红点组成彼得松图的一个点独立集, 含 4 个顶点, 因而是最大点独立集. 所以 $\beta_0=4$. 由定理 18.2 的推论知, 答图中的 6 个小黑点组成一个最小点覆盖集, 而覆盖数 $\alpha_0=6$.



第 7 题答图



第 8 题答图

18.8. 在彼得松图中, 求出一个边子集, 使它既是最小边覆盖集, 又是最大匹配, 并求匹配数 β_1 和边覆盖数 α_1 .

答图中的 5 条红粗线组成一个完美匹配 而完美匹配一定是最小边覆盖集. 匹配数 β_1 = 边覆盖数 α_1 = 6.

18.9. 在图 18.8 所示轮图 W_6 中找出含边 e_1 的所有完美匹配.

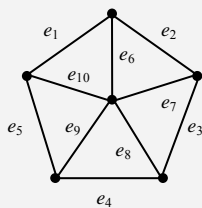


图 18.8

含边 e_1 的完美匹配有两个: $\{e_1, e_7, e_9\}, \{e_1, e_7, e_9\}$.

18.10. 举例说明图中的极小支配集不一定是点独立集.

图 18.6 中的 $\{v_1, v_3\}$ 是一个极小支配集, 也是最小支配集, 但不是点独立集.

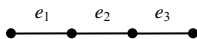
18.11. 已知图中的最小支配集一定是极小支配集, 举例说明反之不真.

第1题中的 $\{v_1, v_4, v_6\}$ 是极小支配集,但不是最小支配集.

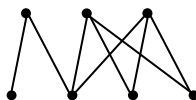
18.12. 已知图中的最大点独立集一定是极大点独立集,举例说明反之不真.

第1题中的 $\{v_2, v_3\}$ 是极大点独立集,但不是最大点独立集

18.13. 证明图中的最大匹配一定是极大匹配,举例说明反之不真.



第13题答图



第14题答图

设 M 为图 G 中的最大匹配,则 M 是 G 中边数最多的匹配,因而在 M 中再加任何一条边,所得边的集合 M' 都不是 G 中的匹配了,因而 M 是极大匹配.但 G 中的极大匹配不一定是最大匹配,例如答图中 $\{e_2\}$ 是极大匹配,但不是最大匹配.

18.14. 举例说明满足相异性条件的二部图,不一定存在正整数 t ,使其满足 t 条件.

答图中的二部图满足相异性条件:上面3个顶点组成 V_1 ,下面4个顶点组成 V_2 ,而 V_1 中任意 $k(k=1, 2, \dots, 3)$ 个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻.但不满足 t 条件: V_1 的每个顶点至少关联 $t=2$ 条边,但 V_2 的每个顶点并非都至多关联 $t=2$ 条边.

18.15. 证明在完全图 $K_n (n \geq 3)$ 中, $\beta_1 < \alpha_0, \beta_0 < \alpha_1$.

显然 K_n 的点独立数 $\beta_0 = 1$,进而 $\alpha_0 = n - \beta_0 = n - 1$.

从 K_n 中任取一条生成圈(哈密顿回路),在圈上 n 条边中任取一条边,然后在圈上的两个方向中任选一个方向,沿该方向在圈上的边中依次每隔一条边取一条边,直到下一条相隔一条边的边与第一条边相邻或相同.这样得到 $\lfloor n/2 \rfloor$ 条边,它们互不相邻,因此构成 K_n 的一个匹配.

或者从 K_n 的 n 个顶点中最多可取出 $\lfloor n/2 \rfloor$ 个不相交的顶点对(任意两个顶点对的交集为空集),相应地取出 $\lfloor n/2 \rfloor$ 条边,它们互不相邻,构成一个匹配.

在 K_n 中含 $\lfloor n/2 \rfloor$ 条边的匹配一定是最大匹配.因为假如 K_n 有一个含 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 或以上条边的匹配,则该匹配将饱和 $2 \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + 1) > n$ 个顶点,这是不可能的.

因此, K_n 的匹配数 $\beta_1 = \lfloor n/2 \rfloor$.而边覆盖数 $\alpha_1 = n - \lfloor n/2 \rfloor = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$.

当 $n \geq 3$ 时, $\lfloor n/2 \rfloor < n - 1, 1 < \lfloor (n+1)/2 \rfloor$,因此 $\beta_1 < \alpha_0, \beta_0 < \alpha_1$.

18.16. 证明在完全二部图 $K_{r,s}$ 中, $\beta_1 = \alpha_0, \beta_0 = \alpha_1$.

容易看出,在 $K_{r,s}$ 中, $\alpha_0 = \min\{r, s\}, \beta_1 = \min\{r, s\}, \beta_0 = \max\{r, s\}, \alpha_1 = \max\{r, s\}$,所以结论为真.

18.17. 证明:对于任意的图 G ,均有 $\alpha_0 \geq \delta$ (当然是无向简单图).

假设 $\alpha_0 < \delta$. 设 V 为 G 中的一个最小点覆盖集, 则 $|V| = \alpha_0 < \delta$. 又因为 G 为简单图, 因而 $\delta \leq n-1$. 于是, $\alpha_0 < n-1$, 从而 $V(G) - V$ 非空. 设 $v_0 \in V(G) - V$, 则 $d(v_0) \geq \delta \geq \alpha_0 + 1$. 可是, V 中的 α_0 个顶点覆盖不住 v_0 所关联的 $d(v_0)$ 条边, 这与 V 为 G 中点覆盖相矛盾. 因此, 必有 $\alpha_0 \geq \delta$.

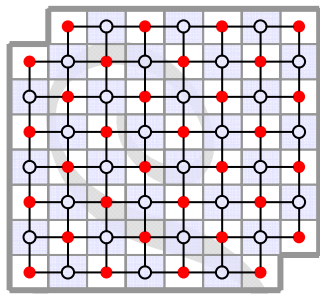
18.18. 证明: 在 8×8 的国际象棋棋盘的一条对角线上移去两端的 1×1 的方格后, 所得棋盘不能用 1×2 的长方形恰好填满.

(1) 作无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 如下:

在去掉一条主对角线的两端的两个小方格之后的棋盘中的每个方格内放一个顶点, 组成顶点集 V . 并令

$$E = \{(u, v) \mid u, v \in V \wedge u \text{ 与 } v \text{ 所在方格相邻}\}$$

G 的图形如下图所示



第 18 题答图

由于 G 中无奇长回路, 故 G 为二部图, 其中

$$V_1 = \{v \mid v \in V \wedge v \text{ 在黑格中}\}$$

$$V_2 = \{v \mid v \in V \wedge v \text{ 在白格中}\}$$

则 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$

(2) 所得棋盘能用 1×2 长方形填满当且仅当 G 中存在完美匹配, 而 $|V_1| = 32$, 而 $|V_2| = 30$. 若二部图中存在完美匹配, 则必有 $|V_1| = |V_2|$. 所以, G 中不存在完美匹配, 因而剩余棋盘不能用 1×2 的长方形填满.

18.19. 设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ 为 k -正则图, 证明 G 中存在完美匹配, 其中 $k \geq 1$.

易知 G 满足 $t = k$ 的 t 条件, 由定理 18.6 可知, G 中存在完备匹配. 又因为 G 是 k -正则图, 必有 $|V_1| = |V_2|$, 因而完备匹配也是完美匹配.

18.20. n 位教员要教 n 门课程, 已知每位教员至少能教两门课程, 而每门课程至多有两位教员能教, 问能否每位教员教一门课且每门课都有人教?

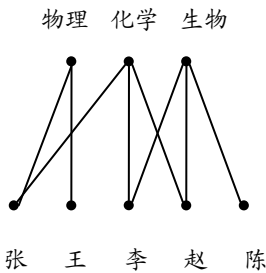
设 $V_1 = \{u \mid u \text{ 为教员}\}$, $V_2 = \{v \mid v \text{ 为课程}\}$, $E = \{(u, v) \mid u \in V_1 \wedge v \in V_2 \wedge u \text{ 能教 } v\}$. 得二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$. 由已知条件可知, $\forall u \in V_1, d(u) \geq 2$, 而 $\forall v \in V_2, d(v) \leq 2$. 于是, 满足 $t = 2$ 的 t 条件, 由定理 18.6 可知, 存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配. 又因为 $|V_1| = |V_2| = n$, 因而完备匹配也是完美匹配. 所以能使每位教员教一门课, 且每门课都有教员教.

18.21. 今有张, 王, 李, 赵, 陈 5 名学生, 报名参加物理, 化学, 生物 3 个课外小组活动. 已知, 张报名了物理和化学组, 王只报了物理组, 李, 赵都报了化学组和生物组, 陈只报了生物组. 问根据他们的报名情况, 能否选出 3 名不兼职的组长?

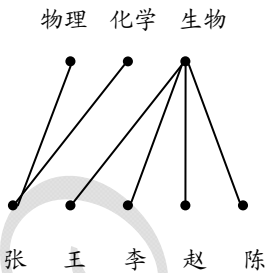
作二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, 其中

$$\begin{aligned} V_1 &= \{\text{物理组, 化学组, 生物组}\}, \\ V_2 &= \{\text{张, 王, 李, 赵, 陈}\}, \\ E &= \{(u, v) \mid u \in V_1, v \in V_2 \wedge v \text{ 为 } u \text{ 的成员}\}. \end{aligned}$$

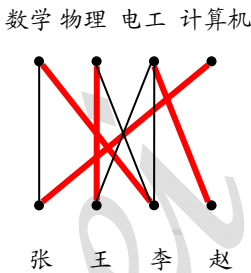
G 的图解见答图.



第 21 题答图



第 22 题答图



第 23 题答图

能选出 3 名组长当且仅当所做二部图存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配. 图 G 满足 t 条件: V_1 中的每个顶点至少关联 $t=2$ 条边, 而 V_2 中的顶点至多关联 $t=2$ 条边, 因而 G 中存在完备匹配, 所以能选出 3 名不兼职的组长. 实际上, G 中存在 11 种不同的完备匹配, 从而共有 11 种选举方案.

	张	王	李	赵	陈
物					
化					
生					

18.22. 在 21 题中, 若张报了物理组和化学组, 而王, 李, 赵, 陈都只报了生物组, 还能选出 3 名不兼职的组长吗? 为什么?

不能. 因为图 G 不满足相异性条件: V_1 中的两个顶点物理组, 化学组只关联 V_2 中的一个顶点张.

18.23. 现有 4 名教师, 张, 王, 李, 赵, 要求他们去教 4 门课程: 数学, 物理, 电工和计算机基础, 已知张能胜任数学和计算机基础; 王能胜任物理和电工; 李能胜任数学, 物理和电工; 而赵只能胜任电工. 如何安排, 才能使每位教师都能教一门自己能胜任的课程? 并且每门课都有人教. 并讨论有几种安排方案.

作二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, 其中

$$\begin{aligned} V_1 &= \{\text{数学, 物理, 电工, 计算机基础}\}, \\ V_2 &= \{\text{张, 王, 李, 赵}\}, \\ E &= \{(u, v) \mid u \in V_1, v \in V_2 \wedge \text{教师 } v \text{ 能胜任课程 } u\}. \end{aligned}$$

G 的图解见答图.

每位教师都能教一门自己能胜任的课程, 并且每门课都有人教当且仅当所做二部图 G 中存在完美匹配. 现 $|V_1| = |V_2|$, 所以 G 中存在完美匹配当且仅当 G 中存在完备匹配. G 中只有一个完备匹配, 所以只有一种安排方案: 张教计算机基础, 王教物理, 李教数学, 赵教电工.