线性代数

leip@lzu.edu.cn
兰州大学 数学与统计学院

2017 年 10 月 25 日

第四章

线性空间与线性变换

目录

线性空间和线性变换是最基本的数学概念之一, 它不仅是线性代数的核心内容, 在数学的诸多内部学科有广泛的应用和发展, 而且它的理论和方法已经逐步渗透到自然科学、工程技术和管理科学等诸多领域. 本章我们将介绍线性空间和线性变换的基本理论和方法.

目录

为了更好地学习和研究线性空间, 我们介绍集合与映射的概念, 熟悉和掌握这些概念对于数学知识的学习是必不可少的.
所谓集合, 简单地讲就是指具有某种共同属性事物的收集, 其中的事物称为集合的元素. 集合是数学中最基本的概念之一. 通常用某种大写字母表示集合, 用相应的小写字母表示集合中的元素. 记号

$$a \in S$$

表示 a 是集合 S 的元素, 读作“a 属于 S”. 而

$$a \notin S$$

表示 a 不是集合 S 的元素, 读作“a 不属于 S”.

所谓给出一个集合就是规定这个集合是由哪些元素组成.

给出集合的常用的方法有两种:

1. 列举出集合的全部元素,
2. 给出集合中元素所具有的性质.

例如

$$S = \{a, b, c, d\}$$

表示是由 a, b, c, d 四个元素组成的集合. 而

$$M = \{m \in Z \big| 2|m\}$$

表示所有能被 2 整除的整数的集合.

设 A, B 是两个集合,则

- $A = B$ 意味着 A 与 B 含有完全相同的元素, 即 $a \in A$ 当且仅当 $a \in B$.
- 称集合 A 是集合 B 的子集合,记作 $A \subseteq B$, 如果 A 的每一个元素都是 B 的元素, 读作“A 包含在 B 中”.
- $A = B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq A$.
- 不含任何元素的集合称为空集合,简称为空集, 记作 $\emptyset$.
- 规定空集是任意集合 A 的子集合, 即 $\emptyset \subseteq A$. 由定义知每一个集合 A 都是它自己的子集合. 因此任意非空集合 A 都有两个平凡的子集合: $\emptyset$ 与 A.
- 称 A 是 B 的真子集合, 如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$.

- $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 并且 } x \in B\}$,
- $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或者 } x \in B\}$,
- 容易证明对任意集合 A, B, C 有
  1. 交换律:
     $A \cap B = B \cap A$,
     $A \cup B = B \cup A$,
  2. 结合律:
     $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
     $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
  3. 分配律:
     $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
     $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

以上我们介绍了有关集合的概念及基本运算, 接下来讨论集合的映射. 映射是函数概念的推广, 它描述了两个集合元素之间的关系, 也是数学中最基本的概念之一.

给定集合 A 与 B, 称 A 与 B 之间的一种对应法则 f 为 A 到 B 的映射, 如果 A 中每一个元素 a 在法则 f 下, 都有 B 中唯一的元素, 记为 $f(a)$, 与之相对应, 称之为 a 在 f 下的像. 集合 A 到 B 的映射 f 通常可以表示为

$$f : A \to B.$$

有时为了清楚地给出对应法则 f, 映射也表示为

$$f : A \to B$$

$$a \mapsto f(a).$$

设

$$f : A \to B$$

是集合 A 到 B 的映射. 称集合

$$Im(f) = f(A) \xlongequal{\text{def}} \{f(x) | x \in A\}$$

为映射 f 的像集, 它是集合 B 的子集合; 称

$$f^{-1}(y) \xlongequal{\text{def}} \{x \in A | f(x) = y\}$$

为元素$y \in B$的原像集, 它是集合 A 的子集合. 如果 $y \in B \backslash Im(f)$, 则显然有 $f^{-1}(y) = \emptyset$. 一般地, 对于 $C \subseteq B$,

$$f^{-1}(C) \xlongequal{\text{def}} \{x \in A | f(x) \in C\}.$$

显然 $f^{-1}(C) = \bigcup\limits_{y \in C} f^{-1}(y)$.

- 如果映射 $f : A \to B$ 满足 $Im(f) = B$, 则称 f 为满射(或到上的映射).
- 如果 f 满足
$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'),$$
则称 f 为单射或1一1映射.
- 如果 f 既是满射又是单射, 则称它是双射或一一对应.
- 称映射 $f : A \to B$ 与映射 $g : C \to D$ 相等, 如果
$(1)\ A = C, B = D$,
$(2)\ \forall x \in A, f(x) = g(x)$.
- 集合 A 到自身的映射亦称为 A 上的变换.
- 当 A, B 都是数集时, A 到 B 的映射就是通常的函数.

例4.1.1

设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, 对应的法则 f 规定为:

$$1\mapsto a, 2\mapsto c, 3\mapsto c, 4\mapsto b, 5\mapsto b.$$

则 f 是 A 到 B 的映射, f 既不是单射也不是满射.

例4.1.1

设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, 对应的法则 f 规定为:

$$1\mapsto a, 2\mapsto c, 3\mapsto c, 4\mapsto b, 5\mapsto b.$$

则 f 是 A 到 B 的映射, f 既不是单射也不是满射.

例4.1.2

设 $A=Z$, 所有整数组成的集合, B 是全体偶数的集合, 定义对应关系如下:

$$f: n\mapsto 2n, n\in Z,$$

则 f 是 A 到 A 的单射, 但不是满射; f 是 A 到 B 的双射.

例4.1.1

设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, 对应的法则 f 规定为:

$$1\mapsto a, 2\mapsto c, 3\mapsto c, 4\mapsto b, 5\mapsto b.$$

则 f 是 A 到 B 的映射, f 既不是单射也不是满射.

例4.1.2

设 $A=Z$, 所有整数组成的集合, B 是全体偶数的集合, 定义对应关系如下:

$$f: n\mapsto 2n, n\in Z,$$

则 f 是 A 到 A 的单射, 但不是满射; f 是 A 到 B 的双射.

例4.1.3

设$A=B=R$. 对应法则 f 定义为 $x\mapsto x^3$, 则 f 为 R 到 R 的双射. 这是我们所熟知的初等函数 $y=x^3$.

例4.1.4

设 A, B 是两个非空集合, $b_0 \in B$ 为 B 中的一个固定的元素, 对应法则f定义为:

$$f : a \mapsto b_0, \quad a \in A,$$

则 f 是 A 到 B 的映射, 称之为 A 到 B 的常值映射.

例4.1.5

设 A 是集合. 定义

$$f : a \mapsto a, \ a \in A$$

则 f 是一个映射, 它把每个元素都映到自身, 称为 A 的恒等映射(变换)或单位映射(变换), 通常记作 1_A.

例4.1.4

设 A, B 是两个非空集合, $b_0 \in B$ 为 B 中的一个固定的元素, 对应法则f定义为:

$$f : a \mapsto b_0, \quad a \in A,$$

则 f 是 A 到 B 的映射, 称之为 A 到 B 的常值映射.

例4.1.5

设 A 是集合. 定义

$$f : a \mapsto a, \ a \in A$$

则 f 是一个映射, 它把每个元素都映到自身, 称为 A 的恒等映射(变换)或单位映射(变换), 通常记作 1_A.

类似于函数的合成(复合), 我们引入映射的“合成”运算.

设 A, B, C 是三个集合, $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 都是映射. 则由 f 和 g 可确定一个 A 到 C 的映射：

$$\begin{array}{cccc} h: & A & \to & C \\ & x & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

称 h 为 f 与 g 的合成映射, 记作 $h = gf$. 映射的合成可以用下面的“交换图”直观的表示：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

所谓“交换图”是指 A 到 C 的映射不依赖于是直接从 A 到 C (gf) 或者是由 A 经 B (f) 再到 C (g).

☞ 离自变量近的先作用.

定理4.1.1

设 A, B, C, D 均为非空集合, $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ 均为映射. 则

1. $h(gf) = (hg)f$;
2. $1_B f = f 1_A = f$.

定理4.1.1

设 A, B, C, D 均为非空集合, $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ 均为映射. 则

1. $h(gf) = (hg)f$;
2. $1_B f = f\,1_A = f$.

证明.

根据映射相等的定义, 要证两个映射相等, 只需证明它们有相同的定义域, 并且对应法则相同, 即两个映射对定义域中每个元素的作用相同.

显然 $h(gf)$, $(hg)f$ 均是 A 到 D 的映射. 对任意 $x \in A$,

$$h(gf)(x) = h((gf)(x)) = h(g(f(x))) = (hg)(f(x)) = ((hg)f)(x).$$

所以 (1) 成立.

同理 $1_B f, f 1_A$ 与 f 一样,都是 A 到 B 的映射. 对任意 $x \in A$,

$$(1_B f)(x) = 1_B(f(x)) = f(x) = f(1_A(x)) = (f\,1_A)(x).$$

所以 (2) 成立. □

类似于函数的反函数, 我们有逆映射的概念.
设 $f: A \to B$ 是映射. 若存在映射 $g: B \to A$ 使得$gf = 1_A$, $fg = 1_B$, 则称 f 是可逆映射, 并称 g 是 f 的逆映射. 可以证明, 若 f 是可逆映射, 则满足条件的映射 g 是唯一的, 记作 $g = f^{-1}$.

定理4.1.2

设A, B是集合, $f: A \to B$是映射. 则 f 是可逆映射当且仅当 f 是双射.

类似于函数的反函数, 我们有逆映射的概念.
设 $f : A \to B$ 是映射. 若存在映射 $g : B \to A$ 使得$gf = 1_A$, $fg = 1_B$, 则称 f 是可逆映射, 并称 g 是 f 的逆映射. 可以证明, 若 f 是可逆映射, 则满足条件的映射 g 是唯一的, 记作 $g = f^{-1}$.

定理4.1.2

设A, B是集合, $f : A \to B$是映射. 则 f 是可逆映射当且仅当 f 是双射.

证明 (1) 设 f 是可逆映射. 则存在映射 $g : B \to A$ 使得$gf = 1_A$, $fg = 1_B$. 若对于任意 $a, b \in A$, $f(a) = f(b)$, 则

$$a = 1_A(a) = (gf)(a) = g(f(a)) = g(f(b)) = 1_A(b) = b.$$

所以 f 是单射.
对于任意 $b \in B$ 有

$$b = 1_B(b) = (fg)(b) = f(g(b)).$$

所以 f 是满射, 从而 f 是双射.

设 f 是双射. 则对任意 $b \in B$, 存在唯一的 $a_b \in A$ 使得 $f(a_b) = b$. 因此对任意 $a \in A$, $a_{f(a)} = a$. 定义

$$\begin{aligned} g: \quad B &\to A \\ b &\mapsto a_b \end{aligned}$$

则 g 是 B 到 A 的映射, 且对任意 $a \in A$, $b \in B$,

$$(fg)(b) = f(g(b)) = f(a_b) = b = 1_B(b),$$

$$(gf)(a) = g(f(a)) = a_{f(a)} = a = 1_A(a).$$

因此 $fg = 1_B$, $gf = 1_A$, 所以 f 是可逆映射.

推论4.1.3

1. 若 $f: A \to B$ 是双射, 则 f^{-1} 也是双射, 并且 $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. 若 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 都是双射, 则合成映射 gf 也是双射, 并且 $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

推论4.1.3

1. 若 $f: A \to B$ 是双射, 则 f^{-1} 也是双射, 并且 $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. 若 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 都是双射, 则合成映射 gf 也是双射, 并且 $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

证明 (1) 由定理 4.1.2, 若 f 是双射, 则 f^{-1} 存在, 并且

$$ff^{-1} = 1_B, \quad f^{-1}f = 1_A.$$

即 f 是 f^{-1} 的逆映射, 因此 f^{-1} 是双射, 并且$(f^{-1})^{-1} = f$.
(2) 若 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 都是双射, 由定理 4.1.2, f^{-1}, g^{-1} 都存在, 因此 $f^{-1}g^{-1}$ 是 C 到 A 的映射, 并且

$$(gf)(f^{-1}g^{-1}) = g(ff^{-1})g^{-1} = g1_Bg^{-1} = gg^{-1} = 1_C,$$

$$(f^{-1}g^{-1})(gf) = f^{-1}(g^{-1}g)f = f^{-1}1_Bf = f^{-1}f = 1_A.$$

所以 $f^{-1}g^{-1}$ 是 gf 的逆, 即 $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$, 从而 gf 是双射.

目录

线性空间是线性代数最基本的概念之一，它是我们已经熟悉的诸如数域、平面、几何空间以及数域上的 n 维向量空间等具体对象的概括抽象.

1. 数域 F 上的 n 维向量空间 F^n (F_n)关于向量的加法和数量乘法满足定理 2.1.4 中的 8 条运算规律.
2. 数域 F 上的所有 $m\times n$ 矩阵, 关于矩阵的加法和数量乘法满足定理 2.3.4 中的 8 条运算规律.
3. 平面或几何空间的向量关于向量的加法运算(三角形法则或平行四边形法则) 和数与向量的数乘运算满足类似于定理 2.1.4 或定理 2.3.4 中的 8 条运算规律.
4. 数域 F 关于数的加法和乘法也满足类似的 8 条运算规律.

上面提到的例子, 尽管从形式和内容上看它们是不同的代数系统, 但是它们又具有一共同点: 都是一个非空集合 V,一个数域 F. V 上的加法运算和 F 与 V 之间的数乘运算满足(相同的)八条运算规律.
为了把这些不同的对象统一起来研究它们的有关运算的性质, 我们就概括抽象出线性空间的概念.

定义4.2.1 (线性空间)

设 V 是一个非空集合, F 是一个数域.

- 在集合 V 上定义一个称为加法的二元代数运算, 即 $\forall\alpha,\beta\in V$, 在V中存在唯一确定的元素 γ 与它们相对应, 称为它们的和, 记为
$$\gamma=\alpha+\beta.$$
- 在 F 与 V 之间定义一个称为数量乘法 (简称为数乘) 的运算, 即 $\forall k\in F$与 $\forall\alpha\in V$, 在 V 中都有唯一确定的元素 η 与它们相对应, 称为它们的数量乘积, 记为
$$\eta=k\alpha.$$

如果在 V 上定义的加法和数乘满足下述8项条件,那么将集合 V 及其上的两个运算构成的代数系统,称作是(数域 F 上的)线性空间(或向量空间). 此时将 V 中的元素称为向量.

向量空间 V 中的加法和数乘运算需满足的 8 条基本性质:
$(\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \forall k, l \in F)$

1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$; (加法的交换律)
2. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$; (加法的结合律)
3. 在 V 中存在一个元素, 称为 V 中的零元或零向量,记为0, 使得 $\forall \alpha \in V$ 都有 $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$; (零元的存在性)
4. 对于 V 中的任一元素 α, 都存在一个元素 $\beta \in V$, 称为 α 的负元或负向量, 使得 $\alpha+\beta=\beta+\alpha=0$; (负元的存在性)
5. $1\alpha=\alpha$;
6. $(kl)\alpha=k(l\alpha)$;
7. $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$; (数乘对加法的分配律)
8. $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$. (数乘对数的加法的广义分配律)

定理4.2.2 (线性空间的简单性质)

设 V 是数域 F 上的线性空间. 则

1. V 的零向量是唯一的;
2. V 中任意向量 α 的负向量是唯一的,记为 $\beta=-\alpha$;
3. 加法消去律成立,即若 $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$, 则有 $\beta=\gamma$;
4. 数乘消去律成立,即若 $k\alpha=k\beta, k\neq 0$, 则 $\alpha=\beta$;
5. $\forall\alpha\in V$, $k\in F$, 有
$$0\alpha=0,\quad k0=0,\quad (-1)\alpha=-\alpha,\quad (-k)\alpha=k(-\alpha)=-(k\alpha);$$
6. 设 $\alpha\in V$, $k\in F$. 若 $k\alpha=0$, 则 $k=0$ 或者 $\alpha=0$;
7. 若 V 中向量 γ 对 V 中某向量 β 成立 $\gamma+\beta=\beta$,则 $\gamma=0$;
8. $\forall\alpha,\beta\in V$, $\forall k,l\in F$, 有 $(k+l)(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta+l\alpha+l\beta$.

证明 (1) 设 $0_1, 0_2$ 是 V 的两个零向量. 则

$$0_1 \xlongequal{\text{视 } 0_2 \text{ 为零元}} 0_1 + 0_2 \xlongequal{\text{视 } 0_1 \text{ 为零元}} 0_2.$$

(2) 设β 和 γ 都是 α 的负向量. 则

$$\alpha + \beta = 0; \quad \alpha + \gamma = 0.$$

从而

$$\beta = \beta + 0 = \beta + (\alpha + \gamma) = (\beta + \alpha) + \gamma = 0 + \gamma = \gamma.$$

(3) 知等式两端同时加上 $-\alpha$ 整理得:

$$\begin{aligned}\beta &= 0 + \beta = ((-\alpha) + \alpha) + \beta = (-\alpha) + (\alpha + \beta) \\ &= (-\alpha) + (\alpha + \gamma) = ((-\alpha) + \alpha) + \gamma = 0 + \gamma = \gamma.\end{aligned}$$

(4) 知等式两端同时乘以 $\frac{1}{k}$ 整理得:

$$\beta = 1\beta = (\frac{1}{k}k)\beta = \frac{1}{k}(k\beta) = \frac{1}{k}(k\alpha) = (\frac{1}{k}k)\alpha = 1\alpha = \alpha.$$

(5) 首先证明 $0\alpha = 0$ (注意等式两端的 “0” 的含义是不同的). 因为

$$0\alpha = (0+0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha,$$

两边同时加上 0α 的负向量, 据定义 4.2.1 $(3), (4)$ 得 $0\alpha = 0$.
其次证明 $k0 = 0$. 因为

$$k0 = k(0+0) = k0 + k0,$$

两边同时加上 $k0$ 的负向量, 据定义 4.2.1 $(3), (4)$ 得 $k0 = 0$.
再证明 $(-1)\alpha = -\alpha$. 因为

$$\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = (1-1)\alpha = 0\alpha = 0,$$

据负向量的唯一性得 $(-1)\alpha = -\alpha$.
最后

$$-(k\alpha) = (-1)(k\alpha) = ((-1)k)\alpha = (k(-1))\alpha = k((-1)\alpha) = k(-\alpha).$$

(6) 若 $k\alpha = 0$, 假设 $k \neq 0$, 则

$$\alpha = 1\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha) = k^{-1}0 = 0.$$

(7) 由消去律可得,或两边同时上 $-\beta$ 即得.
(8) 综合应用定义中的两条分配律得. □

☞ 由向量的加法运算和负向量可以导出向量的减法运算:

$$\alpha-\beta \stackrel{\text{def}}{=} \alpha+(-\beta).$$

根据上述定义,我们给出几个线性空间的例子.

- 平面或几何空间中所有向量组成的集合关于通常向量的加法和乘法构成实数域上的一个线性空间;
- F^n (F_n) 关于 n 维向量的加法和数乘构成数域 F 上的一个线性空间;
- 数域 F 上的所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合 $F^{m\times n}$ 关于矩阵的加法和数乘构成数域 F 上的一个线性空间;
- 数域 F 关于数的加法和乘法构成数域 F 上的一个线性空间.

例4.2.1

设 F 是一个数域, x 是一个符号(也称为文字). 称形式表达式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

为数域 F 上的一元多项式,其中 n 是一非负整数, $a_0, a_1, \cdots, a_n \in F$.
用 $F[x]$ 表示数域 F 上的所有一元多项式组成的集合.
在 $F[x]$ 上定义加法和数乘运算.
对于任意 $f(x), g(x) \in F[x]$, 设

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

$$g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0.$$

为方便起见, 不妨设 $m = n$ (否则, 若 $n > m$, 则在 $g(x)$ 中令 $b_n = b_{n-1} = \cdots = b_{m+1} = 0$. 反之依然).

定义

$$f(x)+g(x) \overset{\text{def}}{=} (a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots,+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0).$$

称 $f(x)+g(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和(对应项相加或合并同类项).
对于数域 F 中任一数 k,
定义

$$kf(x) \overset{\text{def}}{=} (ka_n)x^n+(ka_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(ka_1)x+(ka_0),$$

并称 $kf(x)$ 为 k 与 $f(x)$ 的数乘多项式(数乘以每一项).
可以证明 $F[x]$ 关于上述加法和数乘满足定义 4.2.1 中的 8 条性质, 因此构成数域 F 上的线性空间.

如果用 $F[x]_n$ 表示数域 F 上的所有次数(与中学多项式次数定义相同) 小于 n 的多项式以及零多项式组成的集合, 那么 $F[x]_n$ 关于上述运算也构成数域 F 上的线性空间.
☞ $F[x]_0=\{0\}$ 表示零多项式(无次数)构成的集合.

例4.2.2

定义在闭区间 $[a,b]$ 上的所有连续实函数全体组成的集合, 记为 $C[a,b]$, 关于函数的加法和实数与函数的数乘构成实数域 R 上的一个线性空间.

类似的, 区间 $[a,b]$ 上的所有 n 次(无穷次)可微实函数组成的集合, 记为$C^{(n)}[a,b](C^{(\infty)}[a,b])$, 构成实数域 R 上的一个线性空间.

类似地,可在开区间 (a,b)、无穷区间 $(-\infty,\infty)$、(a,∞) 及 $(-\infty,b)$ 上构造线性空间.

问题

☞ 线性空间 $C[a,b]$ 中的零元或零向量是什么?

从定义以及上述例子表明, 线性空间可以视为一个系统. 这个系统是由一个非空集合 V 和一个数域 F 组成, 其中 V 上定义了一种二元代数运算-加法, F 与 V 之间定义了一种数乘运算, 加法和数乘运算满足 8 条性质. 线性空间的概念适用性很广, 很多我们熟悉的研究对象可以纳入其中.

补充例题 4.2.1

设 C, R, Q 分别表示由全体复数、实数和有理数构成的集合. 则按照通常的数的加法和乘法,

1. C 是 C 上的一个线性空间;
2. C 是 R 上的一个线性空间; C 也是 Q 上的一个线性空间;
3. R 是 R 上的一个线性空间; R 也是 Q 上的一个线性空间;
4. 但 R 不是 C 上的一个线性空间.

补充例题 4.2.1

设 C, R, Q 分别表示由全体复数、实数和有理数构成的集合. 则按照通常的数的加法和乘法,

1. C 是 C 上的一个线性空间;
2. C 是 R 上的一个线性空间; C 也是 Q 上的一个线性空间;
3. R 是 R 上的一个线性空间; R 也是 Q 上的一个线性空间;
4. 但 R 不是 C 上的一个线性空间.

补充例题 4.2.2

全体正实数构成的集合 R^+, 其上的"加法 $\oplus$" 和"数乘 $\cdot$" 定义如下:

$$a \oplus b \overset{\text{def}}{=\!=} ab, \qquad k \cdot a \overset{\text{def}}{=\!=} a^k, (k \in R).$$

问 R^+ 是否构成实数域 R 上的一个线性空间?

补充例题 4.2.1

设 C, R, Q 分别表示由全体复数、实数和有理数构成的集合. 则按照通常的数的加法和乘法,

1. C 是 C 上的一个线性空间;
2. C 是 R 上的一个线性空间; C 也是 Q 上的一个线性空间;
3. R 是 R 上的一个线性空间; R 也是 Q 上的一个线性空间;
4. 但 R 不是 C 上的一个线性空间.

补充例题 4.2.2

全体正实数构成的集合 R^+, 其上的"加法 $\oplus$" 和"数乘 $\cdot$" 定义如下:

$$a \oplus b \xlongequal{\text{def}} ab, \qquad k \cdot a \xlongequal{\text{def}} a^k, (k \in R).$$

问 R^+ 是否构成实数域 R 上的一个线性空间?

☞ 是!

补充例题 4.2.3

下列 R_3 的子集 V,按通常向量的加法和数乘, 是否构成 R 上的线性空间?

1. $V = \{(a_1, a_2, a_3) \in R_3 | a_2 = 0\}$,
2. $V = \{(a_1, a_2, a_3) \in R_3 | a_1 + a_2 = 0\}$,
3. $V = \{(a_1, a_2, a_3) \in R_3 | a_3 = 1 - a_1 + a_2 = 0\}$,
4. $V = \{(a_1, a_2, a_3) \in R_3 | a_3 = a_1 a_2\}$.

补充例题 4.2.3

下列 R_3 的子集 V,按通常向量的加法和数乘, 是否构成 R 上的线性空间?

1. $V=\{(a_1,a_2,a_3)\in R_3|a_2=0\}$, ✓
2. $V=\{(a_1,a_2,a_3)\in R_3|a_1+a_2=0\}$, ✓
3. $V=\{(a_1,a_2,a_3)\in R_3|a_3=1-a_1+a_2=0\}$, ✗
4. $V=\{(a_1,a_2,a_3)\in R_3|a_3=a_1a_2\}$. ✗

补充例题 4.2.3

下列 R_3 的子集 V,按通常向量的加法和数乘, 是否构成 R 上的线性空间?

1. $V=\{(a_1,a_2,a_3)\in R_3|a_2=0\}$, ✔
2. $V=\{(a_1,a_2,a_3)\in R_3|a_1+a_2=0\}$, ✔
3. $V=\{(a_1,a_2,a_3)\in R_3|a_3=1-a_1+a_2=0\}$, ✖
4. $V=\{(a_1,a_2,a_3)\in R_3|a_3=a_1a_2\}$. ✖

补充例题 4.2.4

下列实函数集 V,按通常函数的加法和数乘, 是否构成 R 上的线性空间?

1. $V=\{f\in C[-1,1]|f(1)=0\}$;
2. $V=\{f\in C[-1,1]|f(-1)=f(1)\}$;
3. $V=\{f\in C[-1,1]|f(0)=1\}$;
4. $V=\{f\in C[-1,1]|f\text{ 为增函数}\}$.

补充例题 4.2.3

下列 R_3 的子集 V,按通常向量的加法和数乘, 是否构成 R 上的线性空间?

1. $V = \{(a_1, a_2, a_3) \in R_3 | a_2 = 0\}$, ✔
2. $V = \{(a_1, a_2, a_3) \in R_3 | a_1 + a_2 = 0\}$, ✔
3. $V = \{(a_1, a_2, a_3) \in R_3 | a_3 = 1 - a_1 + a_2 = 0\}$, ✖
4. $V = \{(a_1, a_2, a_3) \in R_3 | a_3 = a_1 a_2\}$. ✖

补充例题 4.2.4

下列实函数集 V,按通常函数的加法和数乘, 是否构成 R 上的线性空间?

1. $V = \{f \in C[-1, 1] | f(1) = 0\}$; ✔
2. $V = \{f \in C[-1, 1] | f(-1) = f(1)\}$; ✔
3. $V = \{f \in C[-1, 1] | f(0) = 1\}$; ✖
4. $V = \{f \in C[-1, 1] | f$ 为增函数$\}$. ✖

目录

为了研究线性空间中向量的线性运算和线性关系, 象讨论数域上的 n 维向量空间一样, 我们需要引入向量的线性组合, 线性表出, 向量组的等价, 向量的线性相关与线性无关, 向量组的极大线性无关组以及向量组的秩等概念. 这些概念完全是数域上 n 维向量空间相应概念的重复, 我们罗列如下.

定义4.3.1

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是数域 F 上的线性空间 V 的一组向量, $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 是数域 F 中的数. 称向量

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

为向量(组) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的一个线性组合, $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 称为组合系数. 此时我们也称向量 α 可以被(由)向量(组) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出(示). 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中每一个向量 α_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 都可以被向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性表出, 那么称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 可以被向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性表出. 如果两个向量组可以互相线性表出, 那么就称它们是等价的.

与在数域 F 上的 n 维向量空间中一样, 可以证明向量组的等价具有所谓的自反性, 对称性和传递性.

定义4.3.2

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是数域 F 上的线性空间 V 的一组向量. 称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关, 如果存在数域 F 中一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

此时也称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 具有线性关系. 否则, 称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关. 也就是说, 称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 如果由

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

可以推出

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0.$$

定义4.3.2

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是数域 F 上的线性空间 V 的一组向量. 称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关, 如果存在数域 F 中一组不全为零的数 $k_1, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

此时也称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 具有线性关系. 否则, 称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关. 也就是说, 称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, 如果由

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

可以推出

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0.$$

同样的,在第二章第 §2.2 节中, 我们得到的那些与向量的具体形式没有关系的结论都可以完全平行的搬到抽象的线性空间中并建立相同的结论. 在这里我们只是罗列一些常用的结论, 而不再重复它们的证明.

定理4.3.3

在数域 F 上的线性空间 V 中, 我们有

1. 向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$.
2. 如果一个向量组存在部分向量组线性相关, 则整个向量组线性相关.
3. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可以被其余的向量线性表出.
4. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 那么 β 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 唯一地线性表出.
5. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, β 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出, 那么$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性无关.
6. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 可以被向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性表出, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $r \leq s$.
7. 两个等价的线性无关向量组必含有相同个数的向量.

定理4.3.3

在数域 F 上的线性空间 V 中, 我们有

1. 向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$.
2. 如果一个向量组存在部分向量组线性相关, 则整个向量组线性相关.
3. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可以被其余的向量线性表出.
4. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 那么 β 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 唯一地线性表出.
5. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, β 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出, 那么$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性无关.
6. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 可以被向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性表出, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $r \leq s$.
7. 两个等价的线性无关向量组必含有相同个数的向量.

补充例题 4.3.1

在 R 上的线性空间 $C[0, 2\pi]$ 中, 判断下列向量组的线性相关和无关性.

1. $\sin x, \cos x$,

补充例题 4.3.1

在 R 上的线性空间 $C[0,2\pi]$ 中, 判断下列向量组的线性相关和无关性.

1. $\sin x, \cos x$,

1. 设 $k\sin x + l\cos x = 0,\ (k, l \in R)$, 分别取 $x = 0$ 和 $x = \frac{\pi}{2}$ 得 $k = l = 0$, 因此, $\sin x, \cos x$ 是线性无关向量组.

补充例题 4.3.1

在 R 上的线性空间 $C[0,2\pi]$ 中, 判断下列向量组的线性相关和无关性.

1. $\sin x, \cos x$,
2. $\sin^2 x, \cos^2 x$,
3. $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$.

1. 设 $k\sin x + l\cos x = 0,\ (k, l \in R)$, 分别取 $x = 0$ 和 $x = \frac{\pi}{2}$ 得 $k = l = 0$, 因此, $\sin x, \cos x$ 是线性无关向量组.

补充例题 4.3.1

在 R 上的线性空间 $C[0,2\pi]$ 中, 判断下列向量组的线性相关和无关性.

1. $\sin x, \cos x$, ✖
2. $\sin^2 x, \cos^2 x$, ✖
3. $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$. ✔

1. 设 $k\sin x + l\cos x = 0,\ (k, l \in R)$, 分别取 $x = 0$ 和 $x = \frac{\pi}{2}$ 得 $k = l = 0$, 因此, $\sin x, \cos x$ 是线性无关向量组.
2. 同理可知,$\sin^2 x, \cos^2 x$ 是线性无关向量组.
3. 而 $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$ 是线性相关向量组, 因为: $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$.

   做这道题时,要注意两点:

   1. 式子 $k\sin x + l\cos x = 0$ 中的 "0" 是向量,而不是数字;
   2. 线性无关并不是没有关系,而只是没有线性关系(两个向量线性相关当且仅当它们成比例).

和在数域上的 n 维向量空间中一样, 我们也可以定义一般线性空间中向量组的极大线性无关组和向量组的秩.

定义4.3.4

一个向量组的一个部分组称为向量组的一个极大线性无关组, 如果这个部分组本身线性无关, 并且从这个向量组中任意添加一个向量(如果存在)到这个部分组, 所得到的部分向量组都线性相关 (或等价地, 并且向量组中的任何一个向量都可以被这个部分组线性表出).

向量组的一个极大线性无关组含向量的个数称为这个向量组的秩.

和在数域上的 n 维向量空间中一样，我们也可以定义一般线性空间中向量组的极大线性无关组和向量组的秩.

定义4.3.4

一个向量组的一个部分组称为向量组的一个极大线性无关组，如果这个部分组本身线性无关，并且从这个向量组中任意添加一个向量(如果存在)到这个部分组，所得到的部分向量组都线性相关 (或等价地，并且向量组中的任何一个向量都可以被这个部分组线性表出).

向量组的一个极大线性无关组含向量的个数称为这个向量组的秩.

显然由有限多个不全为零的向量组成的向量组必然存在极大线性无关组.

在第三章讨论齐次线性方程组的解的结构时, 我们证明了: 如果一个齐次线性方程组存在非零解, 那么它必有无穷多解, 它的解集合作为一个向量组存在有限的极大线性无关组, 我们称其为齐次线性方程组的基础解系.

另一方面, 回忆在平面解析几何中, 当在平面上建立直角坐标系 $[O, \varepsilon_1, \varepsilon_2]$ 后, 其中 $\varepsilon_1 = (1, 0), \varepsilon_2 = (0, 1)$ 分别为 $X-$轴和 $y-$轴正向的单位向量, 平面上任意向量 α 都可以唯一的表示成

$$\alpha = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2,$$

并且我们称 (x, y) 为向量 α 在这个坐标系下的坐标. 显然 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是线性无关的, 因此构成了 $\mathbf{R}^2$ 的一个有限极大线性无关组.

把线性空间 V 看作一个向量组, 考察 V 的极大线性无关组是很自然的事情. 一般来讲 V 或者存在有限极大线性无关组或者不存在有限极大线性无关组. 例如, 在数域 F 上的所有一元多项式构成的线性空间 $F[x]$ 中, 对于任意的正整数 n, 向量组

$$1, x, x^2, \cdots, x^n,$$

都是线性无关的. 因此 $F[x]$ 中存在任意多线性无关的向量, 也就是说 $F[x]$ 不存在有限的极大线性无关组. 如果线性空间 V 存在有限的极大线性无关组, 那么根据命题 4.3.3 (5), (6), V 的极大无关组都是有限的, 并且含有相同个数的向量. 这个数是线性空间 V 的一个重要属性, 我们引入

定义4.3.5

如果线性空间 V 的极大线性无关组含有 n 个向量, 换句话说, V 中存在 n 个线性无关的向量, 而任意 $n+1$ 个向量都线性相关, 那么就称 V 是 n 维的, 或者说 V 的维数是 n, 记为 $\dim V = n$.

定义4.3.5

如果线性空间 V 的极大线性无关组含有 n 个向量, 换句话说, V 中存在 n 个线性无关的向量, 而任意 $n+1$ 个向量都线性相关, 那么就称 V 是 n 维的, 或者说 V 的维数是 n, 记为 $\dim V = n$.

根据定义, 容易得到,

- $\dim \mathbf{R}^2 = 2$, $\dim \mathbf{R}^3 = 3$,$\dim F^n = n$.
- 规定零空间(只有零向量构成的空间)的维数等于 0. 因此 $\dim V = 0$ 当且仅当 $V = \{0\}$.
- 当 V 的维数是 0 或某正整数 n 时,我们也称 V 是有限维的. 否则, 称 V 是无限维的. 也就是说, 称线性空间是无限维的, 如果 V 中存在任意多个线性无关的向量.
- $F[x]$ 是数域 F 上的无限维线性空间.
- 线性代数主要研究有限维线性空间.

在数域 F 上的有限维线性空间 V 中, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个极大线性无关组, 那么 V 中每一个向量 α 都可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 唯一的线性表出, 于是向量 α 被这个极大线性无关组和一个数域 F 上的 n 维向量唯一确定. 受解析几何的启发, 我们引入

在数域 F 上的有限维线性空间 V 中, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个极大线性无关组, 那么 V 中每一个向量 α 都可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 唯一的线性表出, 于是向量 α 被这个极大线性无关组和一个数域 F 上的 n 维向量唯一确定. 受解析几何的启发, 我们引入

定义4.3.6

设 V 是数域 F 上的一个非平凡线性空间. V 中的有序向量组 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 称为 V 的一组基, 如果

(1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关;

(2) V 中的每一个向量都可被 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表出.

此时, 对于 V 中任意向量 α, α 可以被基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 唯一的线性表出, 即,

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是被 α 和基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 唯一确定的. 称这组数为向量 α 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标, 记为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in F^n$.

基的等价定义

设 V 是数域 F 上的一个 n 维线性空间, $n \geq 1$. 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 中的一个线性无关向量组, 则根据定义4.3.5, $\forall \alpha \in V$,向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \alpha$ 是线性相关的. 因此,必有唯一一组常数 $a_i \in F, \imath = 1, 2, \cdots, n$,使得

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n,$$

此时,有序向量组 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$, 被称为是 V 的一组基, 并把 n 维列向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in F^n$,称为 α 在该基下的坐标.

基的等价定义

设 V 是数域 F 上的一个 n 维线性空间, $n \geq 1$. 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 中的一个线性无关向量组, 则根据定义4.3.5, $\forall \alpha \in V$,向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \alpha$ 是线性相关的. 因此,必有唯一一组常数 $a_i \in F, \imath = 1, 2, \cdots, n$,使得

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n,$$

此时,有序向量组 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$, 被称为是 V 的一组基, 并把 n 维列向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in F^n$,称为 α 在该基下的坐标.

从定义可以看出, 对于非平凡线性空间,

- 线性空间的一组基就是它的一个有序极大线性无关组,反之亦然.
- 线性空间的任意两组基都是等价的. 反之, 与一组基等价的任意有序线性无关向量组必然是线性空间的一组基.

- 线性空间的基不唯一,实际上有无穷多组.

- 线性空间的基不唯一,实际上有无穷多组.
- 在上述定义的记号下有,
  1. 若 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任意一个排列,则 $(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \cdots, \varepsilon_{i_n})$ 也是 V 的一组基,且向量 α 在这组基下的坐标为 $(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n})^T$.
  2. 对 F 中的任意 n 个非零数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, $(k_1\varepsilon_1, k_2\varepsilon_2, \cdots, k_n\varepsilon_n)$ 也是 V 的一组基,且向量 α 在这组基下的坐标为 $(\frac{a_1}{k_1}, \frac{a_2}{k_2}, \cdots, \frac{a_n}{k_n})^T$.
- 在 n 维线性空间中, 任意一组基中所含向量的个数就是 V 的维数 n.
- 在 n 维线性空间中, 任意 n 个线性无关的向量都是空间的一组基.
- 确定线性空间 V 的维数和找到 V 的一组基这两个问题,往往同时解决.

例4.3.1

在 $\mathbf{R}^2$ 中, 取$\varepsilon_1 = (1,0)^T, \varepsilon_2 = (0,1)^T$,则 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 构成 $\mathbf{R}^2$ 的一组基, 一个向量在这组基下的坐标就是这个向量的在通常直角坐标系下的坐标.
同样地, 在 $\mathbf{R}^3$ 中, 取$\varepsilon_1 = (1,0,0)^T, \varepsilon_2 = (0,1,0)^T, \varepsilon_3 = (0,0,1)^T$, 则 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 构成 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 一个向量在这组基下的坐标也是这个向量的在通常直角坐标系下的坐标.

例4.3.1

在 $\mathbf{R}^2$ 中, 取$\varepsilon_1=(1,0)^T, \varepsilon_2=(0,1)^T$,则 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 构成 $\mathbf{R}^2$ 的一组基, 一个向量在这组基下的坐标就是这个向量的在通常直角坐标系下的坐标.
同样地, 在 $\mathbf{R}^3$ 中, 取$\varepsilon_1=(1,0,0)^T, \varepsilon_2=(0,1,0)^T, \varepsilon_3=(0,0,1)^T$, 则 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 构成 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 一个向量在这组基下的坐标也是这个向量的在通常直角坐标系下的坐标.

例4.3.2

在线性空间 $F[x]_n$ 中,

$$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1},$$

是 n 个线性无关的向量, 且 $F[x]_n$ 中每一个(次数小于n的)的多项式都可以被 $1, x, x^2, \cdots x^{n-1}$ 线性表出, 所以 $(1, x, x^2, \cdots, x^{n-1})$就是 $F[x]_n$ 的一组基, 因此 $\dim F[x]_n=n$. 在这组基下, 多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 的坐标等于 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})^T$. 这个基被称为是 $F[x]_n$ 的自然基.

例4.3.3

在 n 维向量空间 F^n 中, 取

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

则

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$$

是其一组基. 通常把 F^n 的这一组特殊的基称为其自然基.
对每一个向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in F^n$, 都有

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n.$$

所以 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 就是向量 α 在这组基下的坐标. 也就是说, $\forall \alpha \in F^n$, α 在自然基下的坐标就等于 α 本身:

$$\alpha = E\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\alpha.$$

若取

$$\varepsilon_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \varepsilon_{n-1}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_n' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则容易证明 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')$也构成 F^n 的一组基.
对于 F^n 中的向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 有

$$\alpha = a_1\varepsilon_1' + (a_2 - a_1)\varepsilon_2' + \cdots + (a_n - a_{n-1})\varepsilon_n'.$$

因此, α 在基 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')$ 下的坐标为

$$(a_1, a_2 - a_1, \cdots, a_n - a_{n-1})^T.$$

例4.3.4

复数域 $\mathbf{C}$ 既可以看作 $\mathbf{C}$ 上的线性空间, 也可以看作 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

- 若把 $\mathbf{C}$ 看作是 C 上的线性空间, 则它是

例4.3.4

复数域 $\mathbf{C}$ 既可以看作 $\mathbf{C}$ 上的线性空间, 也可以看作 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

- 若把 $\mathbf{C}$ 看作是 C 上的线性空间, 则它是一维的, 1 (或任何非零数 k)就是它的一组基;
- 若看作是 R 上的线性空间, 则它是

例4.3.4

复数域 $\mathbf{C}$ 既可以看作 $\mathbf{C}$ 上的线性空间, 也可以看作 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

- 若把 $\mathbf{C}$ 看作是 C 上的线性空间, 则它是一维的, 1 (或任何非零数 k)就是它的一组基;
- 若看作是 R 上的线性空间, 则它是二维的, $(1, i)$ (或如 $(2+i, 4-3i)$)就是其一组基.

例4.3.4

复数域 $\mathbf{C}$ 既可以看作 $\mathbf{C}$ 上的线性空间, 也可以看作 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

- 若把 $\mathbf{C}$ 看作是 C 上的线性空间, 则它是一维的, 1 (或任何非零数 k)就是它的一组基;
- 若看作是 R 上的线性空间, 则它是二维的, $(1, i)$ (或如 $(2+i, 4-3i)$)就是其一组基.

☞ 线性空间 V 的维数不仅与集合 V 有关, 而且也与数域 F 有关.

数域 F 上的 n 维线性空间 V 中的一个向量在一组基下的坐标就是 F^n 中的一个向量.

为了讨论方便起见, 我们引入一种形式表达式. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是数域 F 上的线性空间 V 中的 n 个向量, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是数域 F 中的 n 个数, 把线性组合

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$$

表示成

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

的形式.

这里是把 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 看作一个 $1 \times n$ 矩阵, 把 α 表示成两个矩阵的乘积. 之所以说是形式表达式, 主要是因为“形式矩阵” $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 的元素不是数, 而是向量, 这一般来讲是没有意义的. 我们所以采用这种形式表达式不仅因为这种表示简单明了, 而且利用这种形式表达式进行相关运算时满足矩阵的运算规律. 这里我们列举一些常用的运算规律, 其证明都比较容易, 留给读者完成. 设 V 是数域 F 上的线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 都是 V 中的向量, A, B 都是数域 F 上的 $n \times m$ 矩阵, C 是 F 上的 $m \times p$ 矩阵. 则有

$$\begin{aligned}
((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A)C &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)(AC), \\
(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A + (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)B &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)(A + B), \\
(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A + (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)A &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n)A.
\end{aligned}$$

定理4.3.7

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 是 V 的一组基, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 V 中一组向量, 它们在基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 下的坐标分别为

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= (a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1})^T,\\
\eta_2 &= (a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2})^T,\\
&\cdots\cdots\cdots,\\
\eta_m &= (a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm})^T.
\end{aligned}$$

则

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0 \Leftrightarrow x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_m\eta_m=0.$$

特别地,令 A 是以 $\eta_i, (i=1,2,\cdots,m)$, 作为第 i 个列向量的矩阵, 即 $A=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$. 则有

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关当且仅当 $r(A)<m$;

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关当且仅当 $r(A)=m$;

(3) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩等于 $r(A)$.

证明 因为 $\alpha_i, i = 1, 2, \cdots, m$, 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标为 $\eta_i, i = 1, 2, \cdots, m$, 即有

$$\alpha_i = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\eta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A.$$

所以

$$\begin{aligned} &x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)(x_1, x_2, \cdots, x_m)^T \\ =&(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)(x_1, x_2, \cdots, x_m)^T \\ =&(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)(x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \cdots + x_m\eta_m). \end{aligned}$$

注意到 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的一组基. 于是

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0 \iff x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \cdots + x_m\eta_m = 0.$$

证明 因为 $\alpha_i, i=1,2,\cdots,m$, 在基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 下的坐标为 $\eta_i, i=1,2,\cdots,m$, 即有

$$\alpha_i=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\eta_i,\quad i=1,2,\cdots,m,$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A.$$

所以

$$\begin{aligned}&x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T\\=&(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T\\=&(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_m\eta_m).\end{aligned}$$

注意到 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 是 V 的一组基. 于是

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0 \Leftrightarrow x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_m\eta_m=0.$$

☞ 零向量的坐标唯一!

现在定理的其余结论是显然的.

作为定理 4.3.7 和推论2.2.7的直接推论, 我们有

推论4.3.8

在 n 维线性空间中, 任意 $n+1$ 个向量必线性相关.

从例 4.3.3 可以看出, 在 n 维线性空间中, 一个向量在不同基下的坐标是不同的.
接下来我们就讨论向量的坐标是如何随基的变换而变化的.
为此目的, 我们首先引入两组基之间的过渡矩阵的概念.

定义4.3.9

设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 和 $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n)$ 是 n 维线性空间 V 的两组基, 并设

$$\begin{cases} \varepsilon'_1 & = & a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n, \\ \varepsilon'_2 & = & a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n, \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon'_n & = & a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n. \end{cases}$$

称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为由基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 到基 $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n)$ 的过渡矩阵.

定义4.3.9

设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 和 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')$ 是 n 维线性空间 V 的两组基, 并设

$$\begin{cases} \varepsilon_1' &= a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n, \\ \varepsilon_2' &= a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n' &= a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n. \end{cases}$$

称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为由基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 到基 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')$ 的过渡矩阵.

☞ 过度矩阵 A 的第 i 列是新基向量 ε_i' 在旧基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标.

在 n 维线性空间 V 中, 如果由基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 到基 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')$ 的过渡矩阵为 A, 那么我们有基变换公式

$$(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n') = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A. \tag{4.1}$$

根据定理 4.3.7, 任意两组基之间的过渡矩阵 A 都是可逆矩阵, 反之若 A 是可逆矩阵, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是线性空间 V 的一组基,则由式(4.1)确定的有序向量组 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')$ 也是 V 的一组基.

在 n 维线性空间 V 中, 如果由基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 到基 $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n)$ 的过渡矩阵为 A, 那么我们有基变换公式

$$(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A. \tag{4.1}$$

根据定理 4.3.7, 任意两组基之间的过渡矩阵 A 都是可逆矩阵, 反之若 A 是可逆矩阵, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是线性空间 V 的一组基,则由式(4.1)确定的有序向量组 $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n)$ 也是 V 的一组基.

下面的定理给出了向量的坐标在基变换下的坐标变换公式.

定理4.3.10

设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 和 $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n)$ 是 n 维线性空间 V 的两组基, A 是由基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 到基 $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n)$ 的过渡矩阵, α 是 V 中的一个向量, 它在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 和基 $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n)$ 下的坐标分别为

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \qquad X' = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)^T.$$

则

$$X = AX' \quad \text{或} \quad X' = A^{-1}X. \tag{4.2}$$

证明 根据假设条件我们有

$$(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n') = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A$$

和

$$\alpha = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')X' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)X.$$

于是

$$\alpha = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')X' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)AX'.$$

因此 AX' 也是向量 α 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标, 从而由坐标的唯一性知

$$X = AX',$$

由于 A 是可逆的, 所以

$$X' = A^{-1}X.$$

例4.3.5

设在 F^3 (F 是一数域)中,

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (1,1,1)^T, \\ \varepsilon_2 = (0,1,1)^T, \\ \varepsilon_3 = (0,0,1)^T, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_1' = (1,1,-1)^T, \\ \varepsilon_2' = (1,-1,1)^T, \\ \varepsilon_3' = (-1,1,1)^T. \end{cases}$$

1. 证明 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 和 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')$ 都是 F^3 的基, 并求基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 到基 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')$ 的过渡矩阵;
2. 设向量 α 在基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 下的坐标为 $X = (1,1,1)^T$, 求 α 在基 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')$ 下的坐标.

例4.3.5

设在 F^3 (F 是一数域)中,

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (1,1,1)^T, \\ \varepsilon_2 = (0,1,1)^T, \\ \varepsilon_3 = (0,0,1)^T, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_1' = (1,1,-1)^T, \\ \varepsilon_2' = (1,-1,1)^T, \\ \varepsilon_3' = (-1,1,1)^T. \end{cases}$$

1. 证明 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 和 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')$ 都是 F^3 的基, 并求基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 到基 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')$ 的过渡矩阵;
2. 设向量 α 在基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 下的坐标为 $X = (1,1,1)^T$, 求 α 在基 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')$ 下的坐标.

解 (1) 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

据定理 4.3.7 知 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 和 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')$ 都是线性无关的, 从而构成 F^3 的基.

设由基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 到基 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')$ 的过渡矩阵为 A. 则

$$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A.$$

因为 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 和 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')$ 都是矩阵且 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 可逆, 所以

$$A=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)^{-1}(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3').$$

由于

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&-1\\1&1&0&1&-1&1\\1&1&1&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&-1\\0&1&0&0&-2&2\\0&0&1&-2&2&0\end{pmatrix},$$

所以 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&2\\-2&2&0\end{pmatrix}$ 即为所求的过渡矩阵.

(2) 设 α 在基 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3')$ 下的坐标为 X'. 则据定理 4.3.10 知 $X' = A^{-1}X$. 因为

$$(A \vdots X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

所以 $X' = A^{-1}X = (\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2})^T$.

(2) 设 α 在基 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3')$ 下的坐标为 X'. 则据定理 4.3.10 知 $X' = A^{-1}X$. 因为

$$(A \vdots X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

所以 $X' = A^{-1}X = (\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2})^T$.

☞ 设 $A \in F^{n\times n}$ 是可逆阵,记其 n 个列向量分别为 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$,则有

$$(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n') = A = EA = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A,$$

即可逆阵 A 可视为由自然基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 到由其列构成的基 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')$ 的过渡矩阵.

例4.3.6

在例 *4.3.3* 中, 有

$$A=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & \text{\Large 0} & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此,向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 在基 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & \text{\Large 0} & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & -1 & 1 & \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ \vdots \\ x_n - x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

用这种看法我们可给出克莱姆法则的另一证明:

补充例题 4.3.2

若 A 为 n 阶可逆阵,则对任意 n 维列向量 β , 线性方程组 $AX = \beta$ 都有唯一解: $X = A^{-1}\beta$.

用这种看法我们可给出克莱姆法则的另一证明:

补充例题 4.3.2

若 A 为 n 阶可逆阵,则对任意 n 维列向量 β , 线性方程组 $AX = \beta$ 都有唯一解: $X = A^{-1}\beta$.

证明: 只需将可逆阵 A 可视为由自然基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 到由其列构成的基 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')$ 的过渡矩阵, 且 β 是线性空间中某向量在自然基下的坐标. 则方程组的解 X 就是该向量在新基下的坐标,所以存在唯一且 $X = A^{-1}\beta$.

目录

在平面 $\mathbf{R}^2$ 中, 取定过坐标原点的一条直线 l, 容易看出直线 l 上的所有向量作为 $\mathbf{R}^2$ 的子集合关于 $\mathbf{R}^2$ 的加法和数乘构成实数域 R 上的线性空间.
在几何空间 $\mathbf{R}^3$ 中, 过坐标原点的平面 (直线) 也具有类似的性质.
在一般的线性空间 V 中, V 的关于加法和数乘也构成线性空间的子集合也是我们特别关注的对象, 为此, 我们引入

定义4.4.1

设 V 是数域 F 上的线性空间, W 是 V 的一个非空子集合. 称 W 为 V 的一个线性子空间(简称为子空间), 如果 W 关于 V 的两种运算也构成数域 F 上的线性空间.

定义4.4.1

设 V 是数域 F 上的线性空间, W 是 V 的一个非空子集合. 称 W 为 V 的一个线性子空间(简称为子空间), 如果 W 关于 V 的两种运算也构成数域 F 上的线性空间.

$\mathbf{R}^2$ 中过坐标原点的直线是 $\mathbf{R}^2$ 的子空间.
$\mathbf{R}^3$ 中过原点的直线和平面也都是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.

子空间的“子”的体现(继承性)

- ☞ W 中的向量是原来 V 中向量的一部分;
- ☞ W 中的运算还是原来 V 中的运算;

定义4.4.1

设 V 是数域 F 上的线性空间, W 是 V 的一个非空子集合. 称 W 为 V 的一个线性子空间(简称为子空间), 如果 W 关于 V 的两种运算也构成数域 F 上的线性空间.

$\mathbf{R}^2$ 中过坐标原点的直线是 $\mathbf{R}^2$ 的子空间.
$\mathbf{R}^3$ 中过原点的直线和平面也都是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.

子空间的“子”的体现(继承性)

☞ W 中的向量是原来 V 中向量的一部分;
☞ W 中的运算还是原来 V 中的运算;
☞ W 中的零向量还是原来 V 中的零向量;
☞ W 中的负向量还是原来 V 中的负向量.

定理4.4.2

数域 F 上的线性空间 V 的非空子集合 W 成为 V 的一个子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算是封闭的, 即对于任意 $\alpha, \beta \in W$ 以及任意 $k \in F$, $\alpha + \beta,\ k\alpha \in W$.

定理4.4.2

数域 F 上的线性空间 V 的非空子集合 W 成为 V 的一个子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算是封闭的，即对于任意 $\alpha,\beta\in W$ 以及任意 $k\in F$, $\alpha+\beta,\ k\alpha\in W$.

证明 定理的必要性是显然的.
下证充分性. 设 W 是 V 的非空子集合，关于 V 的加法和数乘封闭. 因此 V 的加法限制在 W 上就构成 W 的加法运算, F 与 V 的数乘限制在 W 上也就构成了 F 与 W 的数乘运算. 由于 $W\subseteq V$, 因此 W 关于加法和数乘满足线性空间定义中除涉及存在性条件外的其余全部条件, 即满足 (1)、(2)、(5)、(6)、(7)、(8).
由于 W 非空且关于加法和数乘运算封闭, 因此对于任意 $\alpha\in W$,

$$-\alpha=(-1)\alpha\in W,\qquad 0=\alpha-\alpha=0\alpha\in W.$$

所以 W 也满足 (3) 和 (4), 从而 W 构成数域 F 上的线性空间.

例4.4.1

在任意线性空间 V 中, 由零向量组成的子集合是 V 的一个线性子空间, 称为 V 的零子空间. V 本身也是 V 的一个子空间. 这两个子空间称为 V 的平凡子空间, 而其他的子空间称为非平凡子空间或真子空间.

例4.4.1

在任意线性空间 V 中, 由零向量组成的子集合是 V 的一个线性子空间, 称为 V 的零子空间. V 本身也是 V 的一个子空间. 这两个子空间称为 V 的平凡子空间, 而其他的子空间称为非平凡子空间或真子空间.

例4.4.2

$F[x]_n$ 是 $F[x]$ 的子空间. 当 $0 \leq n \leq m$ 时, $F[x]_n$ 是 $F[x]_m$ 的子空间.

例4.4.1

在任意线性空间 V 中, 由零向量组成的子集合是 V 的一个线性子空间, 称为 V 的零子空间. V 本身也是 V 的一个子空间. 这两个子空间称为 V 的平凡子空间, 而其他的子空间称为非平凡子空间或真子空间.

例4.4.2

$F[x]_n$ 是 $F[x]$ 的子空间. 当 $0 \leq n \leq m$ 时, $F[x]_n$ 是 $F[x]_m$ 的子空间.

例4.4.3

在线性空间 $F^{n\times n}$ 中, 令

$$V_1 = \{A \in F^{n\times n} | A \text{ 是上三角矩阵}\}, \quad V_2 = \{A \in F^{n\times n} | A \text{ 是下三角矩阵}\},$$
$$V_3 = \{A \in F^{n\times n} | A^T = A\}, \quad V_4 = \{A \in F^{n\times n} | A^T = -A\}.$$

因为两个上(下)三角矩阵的和仍为上(下)三角矩阵, 一个数与上(下)三角矩阵的数乘矩阵仍为上(下)三角矩阵, 所以 V_1 (V_2) 形成 $F^{n\times n}$ 的子空间. 同理可证 V_3 (V_4) 也是 $F^{n\times n}$ 的子空间.

例4.4.4

设 A 是数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵, 记齐次线性方程组 $AX=0$ 的解集合为 W,即

$$W=\{X \in F^n | AX=0\}.$$

据定理 *3.3.2* 和 *4.3.1* 知 W 是 F^n 的子空间, 称为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间或矩阵 A 的零空间或核空间,记为 $N(A)$.

当 $AX=0$ 存在非零解时, 它的一个基础解系就是解空间的一组基, 解空间的维数等于 $n-r(A)$,即

$$\dim N(A)=n-r(A).$$

☞ 设 V 是数域 F 上的线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 V 中的一组向量, 令

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s | k_1, k_2, \cdots, k_s \in F\}.$$

容易验证 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 是非空的且关于 V 的两种运算封闭, 因而是 V 的子空间.
如果 V 的一个子空间 W 包含向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 那么 W 就一定包含它们的所有线性组合, 也就是说, 一定包含 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$ 作为其子空间, 称作由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ (有限)生成的子空间. 因此 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 是 V 的包含 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的最小的子空间.

若 V 是 n 维线性空间, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是它的一组基, 则 $V = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$.

☞ V 的维数就是 V 中的能够生成 V 本身的向量组中向量的最小数目.

此时,V 的任意子空间 W 都是有限生成的. 事实上, W 的维数不能超过整个空间 V 的维数, 因此, W 也是有限维的.零子空间可视为 $\{0\} = L(0)$ 是有限生成的. 设 W 是 V 的一个非零子空间. 若取 W 的一组基 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$, 则 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$.

定理4.4.3

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 都是线性空间 V 中的向量. 则

1. $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) = L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$ 当且仅当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价.
2. $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) =$ 秩 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$, 并且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的任意一个极大线性无关组就是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的一组基.

定理4.4.3

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 都是线性空间 V 中的向量. 则

1. $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$ 当且仅当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价.
2. $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=$ 秩 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$, 并且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的任意一个极大线性无关组就是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的一组基.

1. 设 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 是 $1,2,\cdots,s$ 的任意置换,则
$$L(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_s})=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s).$$
2. 若 $\beta\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,则
$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s).$$
3. 若 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组,则

证明 (1) 设 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$. 则对于 $i=1,2,\cdots,s$, $\alpha_i\in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$. 从而 α_i 可以被向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出. 同理可证每一个 β_j $(j=1,2,\cdots,t)$可以被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. 所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价.

反过来, 如果这两个向量组等价, 那么根据线性表出的传递性知凡是可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出的向量都可以被 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出, 反之亦然, 所以 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

证明 (1) 设 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$. 则对于 $i=1,2,\cdots,s$, $\alpha_i\in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$. 从而 α_i 可以被向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出. 同理可证每一个 β_j $(j=1,2,\cdots,t)$可以被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. 所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 β_1, $\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价.
反过来, 如果这两个向量组等价, 那么根据线性表出的传递性知凡是可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出的向量都可以被 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出, 反之亦然, 所以 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.
(2) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩等于 r $(r\leq s)$, 不妨假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是它的一个极大线性无关组. 因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价, 所以据 (1) 知 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$. 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 据定义 4.3.6 知 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 就是$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 的一组基, 因而 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的维数就等于 r.

例4.4.5

设在线性空间 F^5 中,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1,-1,0,2,1)^T, & \alpha_2 &= (2,1,-2,0,0)^T, \\ \alpha_3 &= (0,-3,2,4,2)^T, & \alpha_4 &= (3,3,-4,-2,-1)^T, \\ \alpha_5 &= (2,4,1,0,1)^T, & \alpha_6 &= (5,7,-3,-2,0)^T. \end{aligned}$$

求子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)$ 的维数和一组基.

例4.4.5

设在线性空间 F^5 中,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1,-1,0,2,1)^T, & \alpha_2 &= (2,1,-2,0,0)^T, \\ \alpha_3 &= (0,-3,2,4,2)^T, & \alpha_4 &= (3,3,-4,-2,-1)^T, \\ \alpha_5 &= (2,4,1,0,1)^T, & \alpha_6 &= (5,7,-3,-2,0)^T. \end{aligned}$$

求子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)$ 的维数和一组基.

解 根据第二章第§2.4 节例 2.4.1(P89) 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 的一个极大线性无关组. 所以

$$\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6) = 3,$$

并且 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5)$ 就是它的一组基.

例4.4.6

根据例 *3.3.1(P138)* 知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 10x_4 - 7x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0, \end{cases}$$

的解空间的维数等于 3, 并且 (η_1, η_2, η_3)就是它的一组基, 其中

$$\eta_1 = (-11, 2, 3, 0, 0)^T, \quad \eta_2 = (-11, -1, 0, 3, 0)^T, \quad \eta_3 = (2, -5, 0, 0, 3)^T.$$

下面的定理给出了线性空间的子空间的基与整个空间的基之间的关系.

定理4.4.4

设 W 是数域 F 上的 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 W 的一组基. 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 必定可以扩充为整个空间的基. 也就是说, 在 V 中必定可以找到 $n-m$ 个向量 $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \cdots, \alpha_n$, 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基.

下面的定理给出了线性空间的子空间的基与整个空间的基之间的关系.

定理4.4.4

设 W 是数域 F 上的 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 W 的一组基. 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 必定可以扩充为整个空间的基. 也就是说, 在 V 中必定可以找到 $n-m$ 个向量 $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \cdots, \alpha_n$, 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基.

证明 对 $n-m$ 进行归纳证明. 当 $n-m=0$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 就是 V 的一组基, 定理成立. 假设定理在 $n-m=k$ 时成立, 我们考察 $n-m=k+1$ 的情形. 因为 $n-m=k+1 \geq 1$, 且 $\dim v = n$, 所以 V 中必定存在一个向量 α_{m+1} 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出. 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 线性无关. 现在 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$ 是 $m+1$ 维的,
且 $n-(m+1) = (n-m)-1 = k+1-1 = k$. 由归纳假设
知 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$ 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 可以扩充为 V 的基, 即存在 $\alpha_{m+2}, \cdots, \alpha_n \in V$ 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基.
根据归纳法原理, 定理结论成立.

最后我们讨论子空间的交与和.

定理4.4.5

如果 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 那么它们的交 $V_1 \cap V_2 = \{\alpha \in V | \alpha \in V_1 \text{ 且 } \alpha \in V_2\}$ 也是 V 的子空间.

最后我们讨论子空间的交与和.

定理4.4.5

如果 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 那么它们的交 $V_1 \cap V_2 = \{\alpha \in V | \alpha \in V_1$ 且 $\alpha \in V_2\}$ 也是 V 的子空间.

证明 因为 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 所以 $0 \in V_1$, $0 \in V_2$, 从而 $0 \in V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap V_2$ 非空. 若 $\alpha, \beta \in V_1 \cap V_2$, 则 $\alpha, \beta \in V_1$ 且 $\alpha, \beta \in V_2$, 因此 $\alpha + \beta \in V_1$ 且 $\alpha + \beta \in V_2$, 从而 $\alpha + \beta \in V_1 \cap V_2$. $V_1 \cap V_2$ 对加法运算封闭. 同理可证它对数乘运算封闭. 所以 $V_1 \cap V_2$ 是 V 的子空间.

最后我们讨论子空间的交与和.

定理4.4.5

如果 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 那么它们的交 $V_1 \cap V_2 = \{\alpha \in V | \alpha \in V_1 \text{ 且 } \alpha \in V_2\}$ 也是 V 的子空间.

证明 因为 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 所以 $0 \in V_1$, $0 \in V_2$, 从而 $0 \in V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap V_2$ 非空. 若 $\alpha, \beta \in V_1 \cap V_2$, 则 $\alpha, \beta \in V_1$ 且 $\alpha, \beta \in V_2$, 因此 $\alpha + \beta \in V_1$ 且 $\alpha + \beta \in V_2$, 从而 $\alpha + \beta \in V_1 \cap V_2$. $V_1 \cap V_2$ 对加法运算封闭. 同理可证它对数乘运算封闭. 所以 $V_1 \cap V_2$ 是 V 的子空间.

由交的定义可以看出, 子空间的交满足下列运算规律:

$$V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1, \quad (V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3).$$

一般地, 设 V_i, $i = 1, 2, \cdots, m$, 是线性空间 V 的子空间. 则

$$\bigcap_{i=1}^{m} V_i = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_m = \{\alpha \in V | \, \alpha \in V_i, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

也是 V 的一个子空间.

设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间. 令

$$V_1 + V_2 = \{\alpha + \beta \in V \mid \alpha \in V_1, \beta \in V_2\}.$$

称 $V_1 + V_2$ 为子空间 V_1 与 V_2 的和.

设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间. 令

$$V_1 + V_2 = \{\alpha + \beta \in V \mid \alpha \in V_1, \beta \in V_2\}.$$

称 $V_1 + V_2$ 为子空间 V_1 与 V_2 的和.

定理4.4.6

如果 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 那么 $V_1 + V_2$ 也是 V 的子空间.

设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间. 令

$$V_1 + V_2 = \{\alpha + \beta \in V \mid \alpha \in V_1, \beta \in V_2\}.$$

称 $V_1 + V_2$ 为子空间 V_1 与 V_2 的和.

定理4.4.6

如果 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 那么 $V_1 + V_2$ 也是 V 的子空间.

证明 显然 $V_1 + V_2$ 非空. 若 $\alpha, \beta \in V_1 + V_2$, 则存在 $\alpha_1, \beta_1 \in V_1$, $\alpha_2, \beta_2 \in V_2$ 使得

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

由于 V_1, V_2 是子空间, 因而

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) \in V_1 + V_2.$$

另一方面, 对任意的数 k,

$$k\alpha = k\alpha_1 + k\alpha_2 \in V_1 + V_2.$$

所以 $V_1 + V_2$ 是 V 的子空间.

容易看出, 子空间的和满足下列运算规律:

$$V_1+V_2=V_2+V_1,\quad (V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3).$$

一般地, 设 $V_i, i=1,2,\cdots,m$, 是线性空间 V 的子空间. 则

$$\sum_{i=1}^{m} V_i=V_1+V_2+\cdots+V_m=\{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m \mid \alpha_i\in V_i, i=1,2,\cdots,m\}$$

也是 V 的子空间.

容易看出, 子空间的和满足下列运算规律:

$$V_1+V_2=V_2+V_1,\quad (V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3).$$

一般地, 设 $V_i, i=1,2,\cdots,m$, 是线性空间 V 的子空间. 则

$$\sum_{i=1}^{m} V_i = V_1+V_2+\cdots+V_m=\{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m \mid \alpha_i\in V_i, i=1,2,\cdots,m\}$$

也是 V 的子空间.

例4.4.7

在平面 $\mathbf{R_2}$ 中, 若令

1. $V_1=\{(a,0)|a\in R\}, V_2=\{(0,b)|b\in R\};$
2. $V_1=\{(a,a)|a\in R\}, V_2=\{(b,-b)|b\in R\};$
3. $V_1=\{(a,0)|a\in R\}, V_2=\{(b,b)|b\in R\};$
4. 用 V_1, V_2 分别表示两条过原点且不重合(互相垂直) 的直线上的所有向量构成的集合;

则 V_1 和 V_2 都是 $\mathbf{R_2}$ 的子空间,且 $V_1\cap V_2=\{0\},\quad V_1+V_2=R_2.$

例4.4.8

在几何空间 $\mathbf{R_3}$ 中,

1. 若令$V_1 = \{(a,0,0)|a \in R\}, V_2 = \{(0,b,0)|b \in R\}, V_3 = \{(0,0,c)|c \in R\}$,或
2. 若令$V_1 = \{(a,a,0)|a \in R\}, V_2 = \{(b,0,b)|b \in R\}, V_3 = \{(0,c,c)|c \in R\}$,或
3. 若令$V_1 = \{(a,a,a)|a \in R\}, V_2 = \{(0,b,b)|b \in R\}, V_3 = \{(0,0,c)|c \in R\}$,或
4. 若令$V_1 = \{(-a,2a,2a)|a \in R\}, V_2 = \{(2b,-b,2b)|b \in R\}, V_3 = \{(2c,2c,-c)|c \in R\}$,或
5. 若用 V_1, V_2, V_3 分别表示三条过原点且不共面(互相垂直)的直线上的所有向量构成的集合, 则

则 V_1, V_2, V_3 都是 $\mathbf{R_3}$ 的子空间,且

$$V_i \cap V_j = \{0\},\ i,j = 1,2,3, \quad V_1 + V_2 + V_3 = R_3;$$

续

再如

1. 若用 V_1 表示一条通过原点的直线上的所有向量构成的集合, V_2 表示一张通过原点而且不包含该直线(与该直线垂直) 的平面上的所有向量构成的集合, 则 V_1, V_2 都是 $\mathbf{R_3}$ 的子空间,且

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}, \qquad V_1 + V_2 = R_3;$$

2. 若令$V_1 = \{(a, b, 0) | a, b \in R\}, V_2 = \{(0, c, d) | c, d \in R\}$,则 V_1, V_2 都是 $\mathbf{R_3}$ 的子空间,且

$$V_1 \cap V_2 = \{(0, b, 0) | b \in R\}, \qquad V_1 + V_2 = R_3.$$

续

再如

1. 若用 V_1 表示一条通过原点的直线上的所有向量构成的集合, V_2 表示一张通过原点而且不包含该直线(与该直线垂直) 的平面上的所有向量构成的集合, 则 V_1, V_2 都是 $\mathbf{R_3}$ 的子空间,且
$$V_1 \cap V_2 = \{0\}, \qquad V_1 + V_2 = R_3;$$
2. 若令$V_1 = \{(a, b, 0)|a, b \in R\}, V_2 = \{(0, c, d)|c, d \in R\}$,则 V_1, V_2 都是 $\mathbf{R_3}$ 的子空间,且
$$V_1 \cap V_2 = \{(0, b, 0)|b \in R\}, \qquad V_1 + V_2 = R_3.$$

例4.4.9

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 都是线性空间 V 中的向量. 则

例4.4.10

设 A, B 分别为数域 F 上的 $m \times n, r \times n$ 矩阵, V_1, V_2 分别表示齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的解空间. 则 $V_1 \cap V_2$ 就是齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0.$$

的解空间.

关于两个线性子空间的交与和的维数, 我们有

定理4.4.7 (维数公式)

如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 那么

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2),$$

或

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2).$$

证明 设 $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ 的维数分别是 r, s, t. 取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t.$$

据定理 4.4.4 知它可以扩充成 V_1 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \cdots, \beta_{r-t}.$$

也可以扩充成 V_2 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \gamma_1, \cdots, \gamma_{s-t}.$$

接下来我们证明, 向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \cdots, \beta_{r-t}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{s-t}$$

是 $V_1 + V_2$ 的一组基. 因为

$$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \cdots, \beta_{r-t}),$$

$$V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \gamma_1, \cdots, \gamma_{s-t}),$$

所以

$$V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \cdots, \beta_{r-t}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{s-t}).$$

设

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t+p_1\beta_1+\cdots+p_{r-t}\beta_{r-t}+q_1\gamma_1+\cdots+q_{s-t}\gamma_{s-t}=0.$$

令

$$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t+p_1\beta_1+\cdots+p_{r-t}\beta_{r-t}=-q_1\gamma_1-\cdots-q_{s-t}\gamma_{s-t}.$$

则 $\alpha\in V_1\cap V_2$. 因而 α 可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表出.
设 $\alpha=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_t\alpha_t$. 则

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_t\alpha_t+q_1\gamma_1+\cdots+q_{s-t}\gamma_{s-t}=0.$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\gamma_1,\cdots,\gamma_{s-t}$ 是 V_2 的基
得 $l_1=\cdots=l_t=q_1=\cdots=q_{s-t}=0$, 因而 $\alpha=0$, 于是

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t+p_1\beta_1+\cdots+p_{r-t}\beta_{r-t}=0.$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\cdots,\beta_{r-t}$ 是 V_1 的基
得 $k_1=\cdots=k_m=p_1=\cdots=p_{r-t}=0$. 所
以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\cdots,\beta_{r-t},\gamma_1,\cdots,\gamma_{s-t}$ 是线性无关, 因而是 V_1+V_2 的一组基, 定理结论成立.

目录

线性空间是一个带有满足 8 条性质的两个运算的系统, 如果两个线性空间的元素之间存在一个一一对应, 并且这种对应还保持对应的运算, 即两个向量的和对应它们像的和, 一个数与一个向量的数乘对应这个数与像的数乘, 那么这两个线性空间除元素可能不同外, 其结构是相同的. 若把对应的向量等同, 则它们就是完全相同的. 我们称这样的两个线性空间是“同构”的. 一般地, 我们有

定义4.5.1

数域 F 上两个线性空间 V 与 V' 称为同构的, 如果存在 V 到 V' 的双射 σ 满足下列条件: 对于任意 $\alpha, \beta \in V, k \in F$,

(1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$;

(2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$.

此时, 称映射 σ 为线性空间 V 到 V' 的同构映射.

线性空间是一个带有满足 8 条性质的两个运算的系统, 如果两个线性空间的元素之间存在一个一一对应, 并且这种对应还保持对应的运算, 即两个向量的和对应它们像的和, 一个数与一个向量的数乘对应这个数与像的数乘, 那么这两个线性空间除元素可能不同外, 其结构是相同的. 若把对应的向量等同, 则它们就是完全相同的. 我们称这样的两个线性空间是“同构”的. 一般地, 我们有

定义4.5.1

数域 F 上两个线性空间 V 与 V' 称为同构的, 如果存在 V 到 V' 的双射 σ 满足下列条件: 对于任意 $\alpha, \beta \in V$, $k \in F$,

(1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$;

(2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$.

此时, 称映射 σ 为线性空间 V 到 V' 的同构映射.

推论4.5.2

同构映射的逆映射是同构映射. 两个同构映射的合成仍为同构映射.

证明 设 σ 是数域 F 上的线性空间 V 到 V' 的同构映射. 则 σ^{-1} 是 V' 到 V 的双射. 对于任意 $\alpha', \beta' \in V'$,

$$\begin{aligned} \alpha' + \beta' &= (\sigma\sigma^{-1})(\alpha') + (\sigma\sigma^{-1})(\beta') = \sigma(\sigma^{-1}(\alpha')) + \sigma(\sigma^{-1}(\beta')) \\ &= \sigma(\sigma^{-1}(\alpha') + \sigma^{-1}(\beta')), \end{aligned}$$

因此

$$\sigma^{-1}(\alpha' + \beta') = \sigma^{-1}(\sigma(\sigma^{-1}(\alpha') + \sigma^{-1}(\beta'))) = \sigma^{-1}(\alpha') + \sigma^{-1}(\beta').$$

另外,对任意 $\alpha' \in V'$ 以及任意 $k \in F$,

$$\sigma^{-1}(k\alpha') = \sigma^{-1}(k(\sigma\sigma^{-1})(\alpha')) = \sigma^{-1}(k\sigma(\sigma^{-1}(\alpha'))) = \sigma^{-1}(\sigma(k\sigma^{-1}(\alpha'))) = k\sigma^{-1}(\alpha').$$

所以 σ^{-1} 是同构映射.
设 σ 和 τ 分别是数域 F 上的线性空间 V 到 V' 和 V' 到 V'' 的同构映射.
则 $\tau\sigma$ 是 V 到 V'' 的双射. 对于任意 $\alpha, \beta \in V$ 以及任意 $k \in F$,

$$\begin{aligned} (\tau\sigma)(\alpha + \beta) &= \tau(\sigma(\alpha) + \sigma(\beta)) = (\tau\sigma)(\alpha) + (\tau\sigma)(\beta), \\ (\tau\sigma)(k\alpha) &= \tau(\sigma(k\alpha)) = \tau(k\sigma(\alpha)) = k(\tau\sigma)(\alpha). \end{aligned}$$

所以 $\tau\sigma$ 是 V 到 V'' 的同构映射.

定理4.5.3

设 V 和 V' 都是数域 F 上的线性空间, σ 是 V 到 V' 的同构映射. 则

1. σ 保持零向量和负向量, 即 $\sigma(0)=0'$, $\forall \alpha \in V, \sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$.
2. σ 保持线性组合, 即 $\forall \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in V$ 及 $\forall k_1,k_2,\cdots,k_m \in F$,
$$\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_m\sigma(\alpha_m).$$
3. σ 保持线性相关性和无关性, 即对于任意 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in V$,
$$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_m) \text{ 线性相关 } \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \text{ 线性相关, 或}$$
$$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_m) \text{ 线性无关 } \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \text{ 线性无关.}$$
4. σ 双向保持基, 即 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)$ 是 V' 的一组基 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基.
5. σ 保持子空间及维数, 即若 W 是 V 的子空间, 则 $\sigma(W)$ 是 V' 的子空间, 并

证明 (1), (2) 可以由定义直接验证. 对于任意 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in V$, 有

$$k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \cdots + k_m\sigma(\alpha_m) = \sigma(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m).$$

据 σ 是单射及(1)得

$$k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \cdots + k_m\sigma(\alpha_m) = 0 \Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

所以 (3) 成立. 据 (3) 知, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基, 则 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots,$ $\sigma(\alpha_n)$ 是 V' 的一个线性无关组. 据 σ 是满射, 对于任意 $\alpha' \in V'$, 存在 $\alpha \in V$ 使得 $\sigma(\alpha) = \alpha'$. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基, 因此存在 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in F$ 使得 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$, 从而

$$\alpha' = \sigma(\alpha) = k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \cdots + k_n\sigma(\alpha_n),$$

所以 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_n)$ 是 V' 的一组基. 根据 σ^{-1} 是 V' 到 V 的同构映射, 反过来也成立. 于是 (4) 成立. (5) 由定义及 (4) 的证明立即可得.

定理4.5.4

数域 F 上的任意一个 n 维线性空间都同构于 F^n.

定理4.5.4

数域 F 上的任意一个 n 维线性空间都同构于 F^n.

证明 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是V 的一组基. 对于 V 中任意向量 α, 用 X_α 表示 α 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标, 则 X_α 是由 α 和这组基唯一确定的. 令

$$\begin{aligned} \sigma: \quad V &\to F^n \\ \alpha &\mapsto X_\alpha, \end{aligned}$$

则 σ 是双射. 对于任意 $\alpha, \beta \in V$, 因为

$$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)X_\alpha, \beta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)X_\beta,$$

所以

$$\alpha + \beta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)(X_\alpha + X_\beta).$$

于是

$$\sigma(\alpha + \beta) = X_\alpha + X_\beta = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta).$$

另一方面, 对于任意 $k \in F$,

$$k\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)(kX_\alpha),$$

因此 $\sigma(k\alpha) = kX_\alpha = k\sigma(\alpha)$. 这样我们就证明了 σ 是 V 到 F^n 的同构映射, 因而 V 与 F^n 同构.

另一方面, 对于任意 $k \in F$,

$$k\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)(kX_\alpha),$$

因此 $\sigma(k\alpha) = kX_\alpha = k\sigma(\alpha)$. 这样我们就证明了 σ 是 V 到 F^n 的同构映射, 因而 V 与 F^n 同构.

推论4.5.5

数域 F 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们有相同的维数.

另一方面, 对于任意 $k \in F$,

$$k\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)(kX_\alpha),$$

因此 $\sigma(k\alpha) = kX_\alpha = k\sigma(\alpha)$. 这样我们就证明了 σ 是 V 到 F^n 的同构映射, 因而 V 与 F^n 同构.

推论4.5.5

数域 F 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们有相同的维数.

证明 若数域 F 上两个有限维线性空间 V 与 V' 同构, 则存在 V 到 V' 的同构映射, 从而由定理 4.5.3 (6) 知 $\dim V = \dim V'$.
反过来, 若数域 F 上两个有限维线性空间 V 与 V' 有相同的维数, 不妨设维数等于 n. 则据定理 4.5.4 知 V 和V' 都与 F^n 同构, 从而 V 与 V' 同构.
☞ 线性空间之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性,即是一种等价关系.

推论 4.5.5 说明维数是有限维线性空间的唯一的本质特征, 它唯一确定了空间的结构.

因为数域 F 上的每一个 n 维线性空间都与 F^n 同构, 而同构的空间有完全相同的结构和性质, 因此 F^n 就可以作为数域 F 上的 n 维线性空间的具体模型, 我们以前所得到的关于 F^n 的有关结论, 在数域 F 上的 n 维线性空间中都有一个对应结论. 特别地, 我们在 F^n 中得到的判断向量组的线性相关性和无关性的方法、求向量组的极大无关组的方法等, 都可以借助于定理 4.5.4 的证明中建立的同构映射(即向量对应它在一组固定基下的坐标) 应用到数域 F 上的 n 维线性空间中.

推论 4.5.5 说明维数是有限维线性空间的唯一的本质特征, 它唯一确定了空间的结构.

因为数域 F 上的每一个 n 维线性空间都与 F^n 同构, 而同构的空间有完全相同的结构和性质, 因此 F^n 就可以作为数域 F 上的 n 维线性空间的具体模型, 我们以前所得到的关于 F^n 的有关结论, 在数域 F 上的 n 维线性空间中都有一个对应结论. 特别地, 我们在 F^n 中得到的判断向量组的线性相关性和无关性的方法、求向量组的极大无关组的方法等, 都可以借助于定理 4.5.4 的证明中建立的同构映射(即向量对应它在一组固定基下的坐标) 应用到数域 F 上的 n 维线性空间中.

例4.5.1

设在线性空间 $F[x]_4$ 中, $f_1 = 1 + x - 2x^2 + x^3$, $f_2 = 1 - x + 2x^2 + 2x^3$, $f_3 = 1 + 2x - 3x^2 - x^3$, $f_4 = 3 + 2x - 3x^2 + 2x^3$. 判断 f_1, f_2, f_3, f_4 是线性无关还是线性相关？求子空间 $L(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 的维数和一组基.

解 取定 $F[x]_4$ 的一组基 $1, x, x^2, x^3$, 则 f_1, f_2, f_3, f_4 在这组基下的坐标分别为

$$\begin{aligned} X_{f_1} &= (1,1,-2,1)^T, & X_{f_2} &= (1,-1,2,2)^T, \\ X_{f_3} &= (1,2,-3,-1)^T, & X_{f_4} &= (3,2,-3,2)^T. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $X_{f_1}, X_{f_2}, X_{f_3}, X_{f_4}$ 线性相关, 且 $X_{f_1}, X_{f_2}, X_{f_3}$ 是它的一个极大线性无关组, 从而 f_1, f_2, f_3, f_4 线性相关, 且 f_1, f_2, f_3 是它的一个极大线性无关组. 于是 $L(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 的维数等于 3, 且 (f_1, f_2, f_3) 是它的一组基.

目录

前几节我们讨论了抽象的线性空间, 在线性空间中, 我们仅是讨论了向量的线性关系. 然而我们知道不论是在平面 R^2 还是在几何空间 R^3 中, 向量的长度、夹角等度量性质都占有非常重要的地位, 而以 R^2 和 R^3 作为具体模型的线性空间并没有体现向量的度量性质, 因此在一般线性空间中引入度量的概念是自然和必要的.

我们知道在解析几何中, 向量的长度与夹角等度量性质都是通过向量的内积来表示. 因此这里我们也是以内积作为基本概念来讨论一般线性空间中向量的度量性质.

定义4.6.1

设 V 是实数域 R 上的线性空间. 在 V 上定义一个二元实函数

$$(\ , \ ): V \times V \to R,$$

它具有下列性质: 对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $k \in R$,

1. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;
2. $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$;
3. $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;
4. $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 且 $(\alpha, \alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$.

这样的一个二元实函数称为 V 上的内积. 并称 (α, β) 为向量 α 与 β 的内积. 具有内积的实线性空间 V 称为欧几里得 *(Euclid)* 空间, 简称为欧氏空间.

推论4.6.2

设 V 是欧氏空间, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_i, \beta_j \in V$, $k, r_i, t_j \in R$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 则

1. $(0, \beta) = 0$;
2. $(\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$;
3. $(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$;
4. $(\sum_{i=1}^{m} r_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} t_j\beta_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_i t_j(\alpha_i, \beta_j)$.

证明 这些证明都很容易, 留给读者完成.

推论4.6.2

设 V 是欧氏空间, $\alpha,\beta,\gamma,\alpha_i,\beta_j \in V$, $k,r_i,t_j \in R$, $i = 1,2,\cdots,m$, $j = 1,2,\cdots,n$. 则

1. $(0,\beta) = 0$;
2. $(\alpha,k\beta) = k(\alpha,\beta)$;
3. $(\alpha,\beta+\gamma) = (\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$;
4. $(\sum_{i=1}^{m} r_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} t_j\beta_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_i t_j(\alpha_i,\beta_j)$.

证明 这些证明都很容易, 留给读者完成.

定义 4.6.1 (1) 表明内积作为二元函数具有对称性. 定义 4.6.1 (2), (3) 以及推论 4.6.2 (ii), (iii) 表明内积对于两个变元都是线性的, 即内积具有双线性性. 定义 4.6.1 中性质 (4) 称为内积的正定性. 这样我们习惯上称欧氏空间的内积具有对称性、双线性性和正定性.

例4.6.1

在平面或几何空间(R^2 或 R^3)中, 定义内积(解析几何中向量的数量积)为

$$(\alpha, \beta) = |\alpha||\beta|cos\theta,$$

其中 $|\alpha|$, $|\beta|$ 分别表示向量 α, β 的长度, θ 表示它们的夹角. 这样定义的内积满足定义中的 4 条性质, 因此平面和几何空间关于上述内积构成欧氏空间.

例4.6.1

在平面或几何空间(R^2 或 R^3)中, 定义内积(解析几何中向量的数量积)为

$$(\alpha,\beta)=|\alpha||\beta|cos\theta,$$

其中 $|\alpha|$, $|\beta|$ 分别表示向量 α,β 的长度, θ 表示它们的夹角. 这样定义的内积满足定义中的 4 条性质, 因此平面和几何空间关于上述内积构成欧氏空间.

例4.6.2

在实线性空间 R^n 中, 定义内积

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$

其中 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是 R^n 中的向量. 显然它满足定义 4.6.1 中的条件, 因此R^n 关于上述内积构成欧氏空间. 称这个内积为 R^n 的标准内积.

在$n=2,3$ 时, R^n 的标准内积就是平面或几何空间中向量的内积在直角坐标系中的坐标形式.

例4.6.3

在实线性空间 $C[a,b]$ 中, 定义内积: $f(x), g(x) \in C[a,b]$,

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

由定积分的性质不难证明这样定义的内积满足定义中的条件, 因此 $C[a,b]$ 关于上述内积是一个欧氏空间.

例4.6.3

在实线性空间 $C[a,b]$ 中, 定义内积: $f(x), g(x) \in C[a,b]$,

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

由定积分的性质不难证明这样定义的内积满足定义中的条件, 因此 $C[a,b]$ 关于上述内积是一个欧氏空间.

例4.6.4

在实线性空间 $R^{m\times n}$ 中, 定义内积: $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n} \in R^{m\times n}$,

$$(A,B)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}.$$

容易证明它满足定义 4.6.1 中的条件, 因此 $R^{m\times n}$ 关于上述内积是一个欧氏空间.

例4.6.5

设 V 是实数域 R 上的 n 维线性空间, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的一组基. 在 V 中定义内积:

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = X^T Y,$$

其中

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n, \beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n,$$

X, Y 分别为 α, β 在这组基下的坐标. 容易证明这样定义的内积满足定义 *4.6.1* 中的条件, 因此 V 关于上述内积是一个欧氏空间.

例4.6.5

设 V 是实数域 R 上的 n 维线性空间, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的一组基. 在 V 中定义内积:

$$(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = X^TY,$$

其中

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n, \beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n,$$

X, Y 分别为 α, β 在这组基下的坐标. 容易证明这样定义的内积满足定义 *4.6.1* 中的条件, 因此 V 关于上述内积是一个欧氏空间.

欧氏空间是一个具有内积的实线性空间, 因此关于线性空间的有关概念, 诸如向量的线性相关、线性无关、基、维数、坐标和子空间等, 自然适用于欧氏空间, 有关的结论自然在欧氏空间中也是成立的. 特别地, 对于欧氏空间 V 的任意子空间 W, W 关于 V 的内积显然也是一个欧氏空间.

设 V 是一个欧氏空间, 由内积的正定性知, 对于任意的向量 $\alpha \in V$, 总有 $(\alpha, \alpha) \geq 0$. 因此$\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 是有意义的:

定义4.6.3

设 V 是一个欧氏空间, $\alpha \in V$. 称非负实数 $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 为向量 α 的长度, 记为 $|\alpha|$, 即

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}.$$

设 V 是一个欧氏空间, 由内积的正定性知, 对于任意的向量 $\alpha \in V$, 总有 $(\alpha, \alpha) \geq 0$. 因此 $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 是有意义的:

定义4.6.3

设 V 是一个欧氏空间, $\alpha \in V$. 称非负实数 $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 为向量 α 的长度, 记为 $|\alpha|$, 即

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}.$$

- $|\alpha| \geq 0$, $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.
- $|k\alpha| = |k||\alpha|$. 事实上,

$$|k\alpha| = \sqrt{(k\alpha, k\alpha)} = \sqrt{k^2(\alpha, \alpha)} = |k||\alpha|.$$

- 长度为 1 的向量称为单位向量.
- 如果 $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$, 那么向量 $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 就是一个与 α "同向"的单位向量(?). 这样的过程称为把向量 α 单位化(或标准化).
- 非零向量都可以单位化

下面的定理给出了欧氏空间中一个重要的不等式, 我们正是借助于这个不等式才引出了两个向量的夹角.

定理4.6.4

设 V 是一个欧氏空间, 则有

$$|(\alpha,\beta)| \leq |\alpha||\beta|, \ (\forall \alpha,\beta \in V) \tag{4.1}$$

且等号成立当且仅当 α,β 线性相关.

下面的定理给出了欧氏空间中一个重要的不等式, 我们正是借助于这个不等式才引出了两个向量的夹角.

定理4.6.4

设 V 是一个欧氏空间, 则有

$$|(\alpha,\beta)| \leq |\alpha||\beta|, \ (\forall \alpha,\beta \in V) \tag{4.1}$$

且等号成立当且仅当 α,β 线性相关.

证明 (1) 若 α,β 线性相关, 不妨设 $\beta = k\alpha$.
则 $|(\alpha,\beta)| = |(\alpha,k\alpha)| = |k||\alpha|^2 = |\alpha||\beta|$, 因此 (4.1) 式等号成立.
(2) 若 α,β 线性无关, 则$\alpha,\beta \neq 0$, 且对任意实数 t, $t\alpha+\beta \neq 0$. 于是

$$(t\alpha+\beta, t\alpha+\beta) > 0,$$

即

$$(\alpha,\alpha)t^2 + 2(\alpha,\beta)t + (\beta,\beta) > 0.$$

$$(\alpha,\alpha)t^2+2(\alpha,\beta)t+(\beta,\beta)>0.$$

上式左端是 t 的二次三项式, 它对任意的实数 t 都取正值, 因此它的判别式小于零, 即

$$4(\alpha,\beta)^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)<0,$$

也就是

$$|(\alpha,\beta)|<|\alpha||\beta|.$$

这样我们证明了若 α,β 线性无关, 则 $|(\alpha,\beta)|<|\alpha||\beta|$. 等价地, 若 (4.1) 式等号成立, 则 α,β 线性相关.

综合 (1) 和 (2), 我们就证明了定理结论成立.

(4.1) 式就是著名的柯西-布涅柯夫斯基不等式. 对于例 4.6.2 中的欧氏空间 R^n, (4.1) 式就是

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

对于例 4.6.3 中的欧氏空间 $C[a, b]$, (4.1) 式就是

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq (\int_a^b f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}.$$

以上这两个不等式也都是历史上著名的不等式.

(4.1) 式就是著名的柯西-布涅柯夫斯基不等式. 对于例 4.6.2 中的欧氏空间 R^n, (4.1) 式就是

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

对于例 4.6.3 中的欧氏空间 $C[a,b]$, (4.1) 式就是

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

以上这两个不等式也都是历史上著名的不等式.
据 (4.1) 知, 对于欧氏空间 V 中的任意两个非零向量 α, β, 总有

$$-1 \leq \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|} \leq 1.$$

定义4.6.5

设 α,β 是欧氏空间 V 中的两个非零向量. α 与 β的夹角 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 定义为:

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|},\quad 0\le\langle\alpha,\beta\rangle\le\pi.$$

定义4.6.5

设 α,β 是欧氏空间 V 中的两个非零向量. α 与 β的夹角 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 定义为:

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|},\quad 0\le\langle\alpha,\beta\rangle\le\pi.$$

- $\langle\alpha,0\rangle$ 可以等于区间 $[0,\pi]$ 中的任意值, 即零向量没有方向, α 与零向量可以成任何角;
- $(\alpha,\beta)=|\alpha||\beta|\cos\langle\alpha,\beta\rangle,\ \forall\alpha,\beta\in V$.
- 设 $\alpha,\beta\in V$,若存在 $k\in R$ 使 $\alpha=k\beta$ 或 $\beta=k\alpha$, 则称向量 α,β 是平行的或共线的. 特别,
  - 若 $\alpha,\beta\neq 0$,则 $\langle\alpha,\beta\rangle=0\Leftrightarrow\alpha=k\beta,\ k>0$, 称 α 与 β 同向(共线)的;
  - 若 $\alpha,\beta\neq 0$,则 $\langle\alpha,\beta\rangle=\pi\Leftrightarrow\alpha=k\beta,\ k<0$,称 α 与 β 反向(共线)的;
  - 0 向量与任何向量平行(或共线).
  - 任何向量都与自己平行(或共线).
  - 如果 $\alpha\neq 0$,那么向量 $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 就是一个与 α 同向的单位向量.

定义4.6.6

如果欧氏空间中的两个向量 α 与 β 的内积等于零, 即 $(\alpha, \beta) = 0$, 那么称 α 与 β 正交 *(或互相垂直)*, 记为 $\alpha \perp \beta$.

定义4.6.6

如果欧氏空间中的两个向量 α 与 β 的内积等于零, 即 $(\alpha, \beta) = 0$, 那么称 α 与 β 正交 (或互相垂直), 记为 $\alpha \perp \beta$.

- 显然零向量 0 与任意向量正交.
- 由内积的正定性知 $\alpha \perp \alpha$ 当且仅当 $\alpha = 0$, 也就是说只有零向量才与自身正交.
- 当 α, β 都是非零向量时, 我们有

$$\alpha \perp \beta \;\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2}.$$

这表明欧氏空间中正交的定义是解析几何中正交定义的代数推广.

定理4.6.7

设 V 是欧氏空间, $\alpha, \beta \in V$. 则有

1. $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$; (三角形不等式)
2. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $|\alpha \pm \beta|^2 = |\alpha|^2+|\beta|^2$. (勾股定理)
3. $$(\alpha, \beta) = \frac{|\alpha+\beta|^2-|\alpha|^2-|\beta|^2}{2} = \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2-|\alpha-\beta|^2}{2}.$$

定理4.6.7

设 V 是欧氏空间, $\alpha, \beta \in V$. 则有

1. $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$;　(三角形不等式)

证明 (1) 因为

$$\begin{aligned} |\alpha+\beta|^2 &= (\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta) \\ &\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \\ &= (|\alpha| + |\beta|)^2. \end{aligned}$$

所以

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

定理4.6.7

设 V 是欧氏空间, $\alpha, \beta \in V$. 则有

2. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $|\alpha \pm \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$. (勾股定理)

证明 (2) 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $(\alpha, \beta) = 0$, 从而

$$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (\alpha, \alpha)+2(\alpha, \beta)+(\beta, \beta) = (\alpha, \alpha)+(\beta, \beta) = |\alpha|^2+|\beta|^2.$$

- 此结论的逆命题也成立.
- 等式成立 $\Leftrightarrow$ $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = 0.$
- 减号时证明类似.

定理4.6.7

设 V 是欧氏空间, $\alpha, \beta \in V$. 则有

3

$$(\alpha, \beta) = \frac{|\alpha+\beta|^2 - |\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 - |\alpha-\beta|^2}{2}.$$

证明 (3) 因为

$$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta);$$

$$|\alpha-\beta|^2 = (\alpha-\beta, \alpha-\beta) = (\alpha, \alpha) - 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta),$$

所以

$$(\alpha, \beta) = \frac{|\alpha+\beta|^2 - |\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 - |\alpha-\beta|^2}{2}.$$

定理4.6.7

设 V 是欧氏空间, $\alpha, \beta \in V$. 则有

1. $|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$; *(三角形不等式)*
2. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $|\alpha \pm \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$. *(勾股定理)*
3. *(余弦定理)*

$$(\alpha, \beta) = \frac{|\alpha+\beta|^2 - |\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 - |\alpha-\beta|^2}{2}.$$

1. 注意到若 α 与 β, γ 正交, 则 α 与 $\beta+\gamma$ 也正交. 不难把勾股定理推广到多个向量的情形, 即如果向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 两两正交, 那么

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2.$$

2. $$\big||\alpha| - |\beta|\big| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta|.$$

到目前为止, 我们的讨论对欧氏空间的维数没有作任何限制. 下面的讨论我们总限定在有限维欧氏空间中.

设 V 是一个 n 维欧氏空间, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的一组基. 对于 V 中任意两个向量

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n, \quad \beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n,$$

我们有

$$(\alpha, \beta) = (\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\varepsilon_i, \varepsilon_j),$$

即

$$(\alpha, \beta) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} (\varepsilon_1, \varepsilon_1) & (\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2, \varepsilon_1) & (\varepsilon_2, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varepsilon_n, \varepsilon_1) & (\varepsilon_n, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

令

$$A=\begin{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ (\varepsilon_2,\varepsilon_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & (\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{pmatrix}.$$

则 A 是一个实对称矩阵. 分别用 X, Y 表示向量 α, β 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标. (4.2) 式可以表示为

$$(\alpha,\beta)=X^TAY. \tag{4.3}$$

上述矩阵 A 称为基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 的度量矩阵.
基于内积的正定性, 由 (4.3) 知, 基的度量矩阵具有下列性质:

$$\forall X\in R^n,\ X\neq 0,\ X^TAX>0. \tag{4.4}$$

这样的实对称矩阵称为正定矩阵(见第六章).

上面的讨论表明, 在知道了一组基的度量矩阵后, 任意两个向量的内积就可以通过坐标按 (4.2) 或 (4.3) 来计算, 因而

☞ 在欧氏空间中给定一组基下,向量的内积由该基的度量矩阵唯一确定.

设 V 是一个实线性空间, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是它的一组基, A 是一个正定矩阵. 令

$$\begin{aligned}(\ ,\ ):\quad & V \times V \to R\\ & (\alpha, \beta) \mapsto X^T AY,\end{aligned}$$

其中 X, Y 分别为向量 α, β 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标. 则可以证明 $(\ ,\ )$ 满足定义 4.6.1 中的条件, 因而是 V 上的内积, 于是 V 关于该内积成为一个欧氏空间, 且基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 的度量矩阵就等于 A.

综上所述, 我们有

定理4.6.8

1. 在欧氏空间中, 任意一组基的度量矩阵都是正定矩阵.
2. 设 V 是一个实线性空间, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是它的一组基, A 是一个正定矩阵. 令
$$\begin{aligned}(\ ,\ ):\quad & V \times V \to R \\ & (\alpha, \beta) \mapsto X^T AY,\end{aligned}$$
其中 X, Y 分别为向量 α, β 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 的坐标. 则 $(\ ,\ )$ 是 V 上的内积, 因此 V 关于该内积成为一个欧氏空间. 反之, V 上的内积都可以如此定义.

定理4.6.8

1. 在欧氏空间中, 任意一组基的度量矩阵都是正定矩阵.
2. 设 V 是一个实线性空间, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是它的一组基, A 是一个正定矩阵. 令
$$\begin{aligned} (\ ,\ ):\quad & V \times V \to R \\ & (\alpha, \beta) \mapsto X^T AY, \end{aligned}$$
其中 X, Y 分别为向量 α, β 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 的坐标. 则 $(\ ,\ )$ 是 V 上的内积, 因此 V 关于该内积成为一个欧氏空间. 反之, V 上的内积都可以如此定义.

定理 4.6.8 表明任意有限维实线性空间 V 都可以定义内积使之成为一个欧氏空间, 并且内积的定义方式不唯一.

☞ 同一线性空间上定义不同的内积就得到不同的欧氏空间.

接下来我们考察欧氏空间中不同基的度量矩阵之间的关系.
设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 和 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 是欧氏空间 V 的两组基, A, B 分别是它们的度量矩阵.
设由基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 到基 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 的过渡矩阵为 $C = (c_{ij})_{n\times n}$, 即

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)C.$$

则对于 $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 据 (4.3) 得

$$\begin{aligned}(\eta_i, \eta_j) &= (c_{1i}\varepsilon_1 + c_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + c_{ni}\varepsilon_n,\ c_{1j}\varepsilon_1 + c_{2j}\varepsilon_2 + \cdots + c_{nj}\varepsilon_n) \\ &= \begin{pmatrix} c_{1i}, & c_{2i}, & \cdots, & c_{ni} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此

$$B = \big((\eta_i, \eta_j)\big)_{n\times n} = C^T A C.$$

称数域 F 上的矩阵 C 合同于矩阵 D, 如果存在数域 F 上的可逆矩阵 P 使得

$$D = P^T C P.$$

容易验证矩阵的合同关系满足自反性、对称性和传递性.
于是在欧氏空间中, 不同基的度量矩阵是合同的.

目录

在解析几何中, 直角坐标系的建立使得我们在处理有关度量的问题时变得非常方便.例如

- 两个向量的内积就等于它们的直角坐标的对应分量的乘积之和;
- 一个向量的直角坐标分量就是该向量在相应坐标轴上的投影;
- $\cdots$.

建立直角坐标系本质上就是取定平面或几何空间的一组特殊的基: 在 R^2 中是取

$$(\varepsilon_1 = (1,0)^T, \quad \varepsilon_2 = (0,1)^T)$$

作为一组基. 在 R^3 中是取

$$(\varepsilon_1 = (1,0,0)^T, \quad \varepsilon_2 = (0,1,0)^T, \quad \varepsilon_3 = (0,0,1)^T)$$

作为一组基. 这两组基有一个共同的特征,

☞ 基中的向量两两正交(垂直),且都是单位向量.

☞ 问题: 在一般 n 维欧氏空间中是否存在这样一组基呢? 答案是肯定的.

定义4.7.1

欧氏空间 V 中一组两两正交的非零向量称为 V 的一个正交向量组.

定义4.7.1

欧氏空间 V 中一组两两正交的非零向量称为 V 的一个正交向量组.

依据定义, 由单个非零向量所组成的向量组是正交向量组.因此

☞ 非零欧氏空间总存在正交向量组.

定理4.7.2

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是欧氏空间 V 的一个正交向量组. 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

定义4.7.1

欧氏空间 V 中一组两两正交的非零向量称为 V 的一个正交向量组.

依据定义, 由单个非零向量所组成的向量组是正交向量组.因此

☞ 非零欧氏空间总存在正交向量组.

定理4.7.2

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是欧氏空间 V 的一个正交向量组. 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

证明 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是正交向量组且满足

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

定义4.7.1

欧氏空间 V 中一组两两正交的非零向量称为 V 的一个正交向量组.

依据定义, 由单个非零向量所组成的向量组是正交向量组.因此

☞ 非零欧氏空间总存在正交向量组.

定理4.7.2

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是欧氏空间 V 的一个正交向量组. 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

证明 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是正交向量组且满足

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

对于 $i = 1, 2, \cdots, m$, 用 α_i 与上述等式两边作内积得

$$k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0.$$

因为 $\alpha_i \neq 0$, 所以 $(\alpha_i, \alpha_i) > 0$, 从而 $k_i = 0$. 这就证明了 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

推论4.7.3

在 n 维欧氏空间中, 两两正交的非零向量的个数不能超过 n .

推论4.7.3

在 n 维欧氏空间中, 两两正交的非零向量的个数不能超过 n .

推论 4.7.3 的几何意义是显然的, 即

1. 在平面上找不到三个两两垂直的非零向量;
2. 在空间中找不到四个两两垂直的非零向量.

☞ 定理 4.7.2 的逆命题不成立,即线性无关向量组未必是正交向量组.

定义4.7.4

在 n 维欧氏空间 V 中, 如果 V 的一组基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是正交向量组, 那么就称这组基是 V 的正交基; V 的由单位向量组成的正交基称为 V 的标准正交基.

定义4.7.4

在 n 维欧氏空间 V 中, 如果 V 的一组基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是正交向量组, 那么就称这组基是 V 的正交基; V 的由单位向量组成的正交基称为 V 的标准正交基.

依据定义及定理 4.7.2, n 维欧氏空间 V 的由 n 个向量组成的正交向量组是 V 的正交基. 对一组正交基进行单位化就得到一组标准正交基.

推论4.7.5

设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组基. 则下列条件等价.

1. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的标准正交基;
2. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 的度量矩阵是单位矩阵;
3. 对于 $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 有

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{4.1}$$

定理4.7.6

设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组标准正交基,

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \quad Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$

分别为 V 中的向量 α, β 在这组基下的坐标. 则

1. $x_i = (\alpha, \varepsilon_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n$. 即

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha, \varepsilon_1)\varepsilon_1 + (\alpha, \varepsilon_2)\varepsilon_2 + \cdots + (\alpha, \varepsilon_n)\varepsilon_n \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\big((\alpha, \varepsilon_1), (\alpha, \varepsilon_2), \cdots, (\alpha, \varepsilon_n)\big)^T. \end{aligned}$$

2. $(\alpha, \beta) = X^T Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$.
3. $|\alpha| = \sqrt{X^T X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.
4.

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}}.$$

证明 (1) 因为

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$$

证明 (1) 因为

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$$

对 $i = 1, 2, \cdots, n$, 用 ε_i 与等式两边作内积, 注意到当 $i \neq j$ 时, $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, 而 $(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 0$, 即得

$$(\alpha, \varepsilon_i) = x_i.$$

(2) 因为标准正交基的度量矩阵是单位矩阵, 所以据 (4.3) 式即得结论.

(3)、(4) 由定义及 (2) 立即可得.

1. 标准正交基是直角坐标系在欧氏空间中的推广.
2. 在欧氏空间中, 所有的标准正交基有相同的地位.

例4.7.1

设在欧氏空间 R^4 中,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \tfrac{1}{2}(1,1,1,1)^T, & \alpha_2 &= \tfrac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T, \\ \alpha_3 &= \tfrac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T, & \alpha_4 &= \tfrac{1}{2}(1,1,-1,-1)^T. \end{aligned}$$

(1) 证明: $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 R^4 的一组标准正交基;

(2) 若 $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4$, $\beta = (0,1,0,1)^T$, 求 $|\alpha|$, (α,β) 及 $\langle\alpha,\beta\rangle$.

例4.7.1

设在欧氏空间 R^4 中,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T,$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)^T.$$

(1) 证明: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 R^4 的一组标准正交基;
(2) 若 $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4$, $\beta = (0,1,0,1)^T$, 求 $|\alpha|$, (α, β) 及 $\langle \alpha, \beta \rangle$.

解 (1) 通过计算得 $|\alpha_i| = 1$, $i = 1,2,3,4$, 且对于 $i,j = 1,2,3,4$, $i \neq j$, 有 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$. 所以 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 R^4 的一组标准正交基.
(2) 由 (1) 知 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 R^4 的一组标准正交基, α 在这组基下的坐标为 $(1,2,-2,1)^T$, 据定理 4.7.6 (3) 得

$$|\alpha| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

这里计算 (α, β) 有三种方法.

方法一. 因为 $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = (1, 1, -2, 2)^T$, 所以

$$(\alpha, \beta) = (1, 1, -2, 2)(0, 1, 0, 1)^T = 3.$$

方法二. 定理 4.7.6 (1) 得

$$\beta = (\beta, \alpha_1)\alpha_1 + (\beta, \alpha_2)\alpha_2 + (\beta, \alpha_3)\alpha_3 + (\beta, \alpha_4)\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_3.$$

所以定理 4.7.6 (2) 得 $(\alpha, \beta) = (1, 2, -2, 1)(1, 0, -1, 0)^T = 3$.
方法三. 据推论 4.6.2 (iv) 得

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta) + 2(\alpha_2, \beta) - 2(\alpha_3, \beta) + (\alpha_4, \beta) = 3.$$

最后据定理 4.7.6 (4) 得

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}\sqrt{2}} = \arccos \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

现在我们证明有限维非零欧氏空间 V 总存在标准正交基.

定理4.7.7

n 维欧氏空间 V 的任意一个正交向量组都可以扩充成 V 的一组正交基.

现在我们证明有限维非零欧氏空间 V 总存在标准正交基.

定理4.7.7

n 维欧氏空间 V 的任意一个正交向量组都可以扩充成 V 的一组正交基.

证明 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 V 的一个正交向量组. 我们对 $n-m$ 进行归纳, 证明定理结论成立.
当 $n-m=0$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 就是 V 的一组正交基.
假设 $n-m=k$ 时定理成立, 即存在向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k \in V$, 使得

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$$

是 V 的一组正交基.
考察 $n-m=k+1$ 的情形. 因为 $m<n$, 所以一定存在向量 β 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出. 我们在子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta)$ 中寻找一个向量, 使得这个向量与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 都正交.

构作向量

$$\alpha_{m+1} = \beta - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \cdots - k_m\alpha_m,$$

这里$k_1, k_2, \cdots, k_m$ 是待定系数. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是正交向量组, 所以

$$(\alpha_i, \alpha_{m+1}) = (\beta, \alpha_i) - k_i(\alpha_i, \alpha_i), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

令 $(\alpha_i, \alpha_{m+1}) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 解得

$$k_i = \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

于是

$$\alpha_{m+1} = \beta - \sum_{i=1}^{m} \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i.$$

显然 $\alpha_{m+1} \neq 0$, 且有

$$(\alpha_i, \alpha_{m+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 是正交向量组, 由归纳法假设, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m,$ α_{m+1} 可以扩充成 V 的一组正交基, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 可以扩充为 V 的一组正交基. 根据归纳原理, 定理成立.

定理4.7.8

对于 n 维欧氏空间 V 的任意一组基 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 都存在 V 的一组标准正交基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$, 使得

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

定理4.7.8

对于 n 维欧氏空间 V 的任意一组基 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 都存在 V 的一组标准正交基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$, 使得

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

证明 对给定的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 我们构作满足条件的标准正交基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$.

令 $\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}$. 则 ε_1 是单位向量, 且有 $L(\alpha_1) = L(\varepsilon_1)$. 即 $n = 1$ 时, 定理成立.

假设 $n = m$ 时定理成立, 即存在 V 中的单位向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$, 它们是两两正交的, 具有性质

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_i), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

下一步求 ε_{m+1}.
因为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)$, 所以 α_{m+1} 不能被 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 线性表出. 按定理 4.7.7 证明中的方法, 构作向量

$$\beta_{m+1}=\alpha_{m+1}-\sum_{i=1}^{m}(\alpha_{m+1},\varepsilon_i)\varepsilon_i.$$

则

$$\beta_{m+1}\neq 0,\quad \text{且}\quad (\beta_{m+1},\varepsilon_i)=0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

令

$$\varepsilon_{m+1}=\frac{\beta_{m+1}}{|\beta_{m+1}|}.$$

因此 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m,\varepsilon_{m+1}$ 是一单位正交向量组, 并且满足

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+1})=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{m+1}).$$

由归纳法原理, 定理得证.

这两个定理的证明都是构造性的,

1. 定理 4.7.7 的证明过也就是一个具体的扩充正交向量组的方法. 我们可以从任一个非零向量出发, 按证明中的步骤逐个地扩充, 最后就得到一组正交基, 再单位化, 就得到一组标准正交基.
2. 定理 4.7.8 的证明过程具体给出了把任意一组基改造成标准正交基的方法, 这一方法称为施密特(Schmidt)正交化方法.

定理 4.7.8 的要求

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

表明由基 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 到基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 的过渡矩阵是上三角形矩阵.

例4.7.2

在欧氏空间 R^5 中,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1,1,0,0,1)^T, & \alpha_2 &= (1,0,1,0,1)^T, \\ \alpha_3 &= (1,-1,-1,1,0)^T, & \alpha_4 &= (1,0,-2,1,0)^T. \end{aligned}$$

求 R^5 的子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组标准正交基, 并将此标准正交基扩充为 R^5 的标准正交基.

例4.7.2

在欧氏空间 R^5 中,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1,1,0,0,1)^T, & \alpha_2 &= (1,0,1,0,1)^T, \\ \alpha_3 &= (1,-1,-1,1,0)^T, & \alpha_4 &= (1,0,-2,1,0)^T. \end{aligned}$$

求 R^5 的子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组标准正交基, 并将此标准正交基扩充为 R^5 的标准正交基.

解 首先求出 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组基. 因为

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数等于 3, 并且 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是它的一组基. 现把它们正交化得

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,0,1)^T,$$
$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1,0,\frac{1}{3})^T,$$
$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(1,-1,-1,1,0)^T.$$

再单位化得

$$\varepsilon_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0,0,\frac{1}{\sqrt{3}})^T,$$
$$\varepsilon_2=(\frac{1}{\sqrt{15}},-\frac{2}{\sqrt{15}},\frac{3}{\sqrt{15}},0,\frac{1}{\sqrt{15}})^T,$$
$$\varepsilon_3=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^T.$$

因此 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 就是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组标准正交基.

据定理 4.7.7 知正交向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 可以扩充为 R^5 的一组标准正交基, 因此存在 $\alpha \in R^5$ 使得 $\alpha \perp \varepsilon_1$, $\alpha \perp \varepsilon_2$, $\alpha \perp \varepsilon_3$. 设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$. 则 α 的坐标满足齐次线性方程组

$$\left\{\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = & 0, \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & & x_5 & = & 0, \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & & = & 0. \end{array}\right.$$

解得其基础解系为

$$\eta_1 = (1, -1, -1, -3, 0)^T, \quad \eta_2 = (2, 1, 1, 0, -3)^T.$$

此时 η_1 与 η_2 是正交的(一般情况下, 这里还需要正交化), 把 η_1, η_2 单位化得

$$\varepsilon_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{3}{\sqrt{12}}, 0\right)^T, \quad \varepsilon_5 = \left(\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^T.$$

注意到 $\varepsilon_4, \varepsilon_5$ 是齐次线性方程组的解空间的一组标准正交基. 所以 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ 就是 R^5 的一组标准正交基.

设 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 与 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 是 n 维欧氏空间 V 的两组标准正交基, 前者到后者的过渡矩阵是 $A=(a_{ij})$, 即

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

则矩阵 A 的各列分别是 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 在标准正交基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 下的坐标. 因为 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 是标准正交基, 所以

$$(\eta_i,\eta_j)=\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$$

从而

$$a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+\cdots+a_{ni}a_{nj}=\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases} \tag{4.2}$$

也就是

$$A^TA=E \quad \text{或者} \quad A^{-1}=A^T.$$

定义4.7.9

n 阶实矩阵 A 称为正交矩阵, 如果 $A^TA=E$.

定义4.7.9

n 阶实矩阵 A 称为正交矩阵, 如果 $A^TA=E$.

补充例题 4.7.1

设 A 是 n 阶实矩阵,则下列七条等价:

1. A 是正交阵;
2. A^T 是正交阵;
3. $-A$ 是正交阵;
4. $A^{-1}=A^T$ 是正交阵;
5. $A^*=|A|A^{-1}=\pm A^T$ 是正交阵;
6. A 的行是两两正交的单位向量;
7. A 的列是两两正交的单位向量.

定义4.7.9

n 阶实矩阵 A 称为正交矩阵, 如果 $A^TA=E$.

补充例题 4.7.1

设 A 是 n 阶实矩阵,则下列七条等价:

1. A 是正交阵;
2. A^T 是正交阵;
3. $-A$ 是正交阵;
4. $A^{-1}=A^T$ 是正交阵;
5. $A^*=|A|A^{-1}=\pm A^T$ 是正交阵;
6. A 的行是两两正交的单位向量;
7. A 的列是两两正交的单位向量.

☞ 若 A 是正交阵,则 $|A|=\pm 1$.

定义4.7.9

n 阶实矩阵 A 称为正交矩阵, 如果 $A^TA=E$.

补充例题 4.7.1

设 A 是 n 阶实矩阵,则下列七条等价:

1. A 是正交阵;
2. A^T 是正交阵;
3. $-A$ 是正交阵;
4. $A^{-1}=A^T$ 是正交阵;
5. $A^*=|A|A^{-1}=\pm A^T$ 是正交阵;
6. A 的行是两两正交的单位向量;
7. A 的列是两两正交的单位向量.

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

☞ 若 A 是正交阵,则 $|A|=\pm1$.

定理4.7.10

设 V 是 n 维欧氏空间, A 是 V 的基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 到基 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 的过渡矩阵.

1. 若基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 和 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 都是标准正交基, 则 A 是正交矩阵.
2. 若 A 是正交矩阵, 则 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是标准正交基当且仅当 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 是标准正交基.

定理4.7.10

设 V 是 n 维欧氏空间, A 是 V 的基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 到基 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 的过渡矩阵.

1. 若基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 和 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 都是标准正交基, 则 A 是正交矩阵.
2. 若 A 是正交矩阵, 则 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是标准正交基当且仅当 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 是标准正交基.

证明 我们已经证明 (1) 成立. 下面证明 (2) 成立. 设 A 是正交矩阵. 因为 A 的 n 个列向量,记为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,分别是 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标, 若 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是标准正交基, 据定理 4.7.6 (2) 及 (4.2) 得

$$(\eta_i, \eta_j) = (\alpha_i, \alpha_j) = \alpha_i^T \alpha_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

故 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是标准正交基. 反之, 只需注意到 A^{-1} 是基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 到基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 的过渡矩阵, 且 $A^{-1} = A^T$ 也是正交矩阵, 同理可证.

最后我们建立欧氏空间同构的概念.

定义4.7.11

欧氏空间 V 与 V' 称为是同构的, 如果存在 V 到 V' 的双射 σ 满足下列条件: 对于任意 $\alpha, \beta \in V$, $k \in R$,

1. $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$,
2. $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$,
3. $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta))=(\alpha, \beta)$.

满足上述条件的双射 σ 称为欧氏空间 V 到 V' 的同构映射.

最后我们建立欧氏空间同构的概念.

定义4.7.11

欧氏空间 V 与 V' 称为是同构的, 如果存在 V 到 V' 的双射 σ 满足下列条件: 对于任意 $\alpha, \beta \in V$, $k \in R$,

1. $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$,
2. $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$,
3. $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$.

满足上述条件的双射 σ 称为欧氏空间 V 到 V' 的同构映射.

☞ 如果 σ 是欧氏空间 V 到 V' 的一个同构映射, 那么 σ 也是 V 到 V' 的作为线性空间的同构映射.

定理4.7.12

设 σ 是欧氏空间 V 到 V' 的同构映射. 则

1. σ^{-1} 是 V' 到 V 的同构映射.
2. σ 保持向量的长度, 即对任意 $\alpha \in V$, $|\sigma(\alpha)| = |\alpha|$.
3. σ 保持向量的夹角, 即对任意 $\alpha, \beta \in V$, $\langle \sigma(\alpha), \sigma(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$.
4. σ 保持向量的正交性, 即对任意 $\alpha, \beta \in V$, $\sigma(\alpha) \perp \sigma(\beta) \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$.
5. σ 保持标准正交基, 即对 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$, $(\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_n))$ 是 V' 的标准正交基当且仅当 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是 V 的标准正交基.

定理4.7.12

设 σ 是欧氏空间 V 到 V' 的同构映射. 则

1. σ^{-1} 是 V' 到 V 的同构映射.
2. σ 保持向量的长度, 即对任意 $\alpha \in V$, $|\sigma(\alpha)| = |\alpha|$.
3. σ 保持向量的夹角, 即对任意 $\alpha, \beta \in V$, $\langle\sigma(\alpha), \sigma(\beta)\rangle = \langle\alpha, \beta\rangle$.
4. σ 保持向量的正交性, 即对任意 $\alpha, \beta \in V$, $\sigma(\alpha) \perp \sigma(\beta) \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$.
5. σ 保持标准正交基, 即对 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$, $(\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_n))$ 是 V' 的标准正交基当且仅当 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是 V 的标准正交基.

证明 (1) 据推论 4.5.5, 只需证明 σ^{-1} 保持内积即可. 对于任意 $\alpha', \beta' \in V'$, 存在 $\alpha, \beta \in V$ 使得 $\alpha' = \sigma(\alpha), \beta' = \sigma(\beta)$, 因此

$$(\sigma^{-1}(\alpha'), \sigma^{-1}(\beta')) = (\alpha, \beta) = (\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha', \beta').$$

(2)、(3)、(4) 由定义立即可得.

(5) 由同构映射的定义, (1), (2), (3) 及定理 4.5.3 (5) 可得.

设 V 是一个 n 维欧氏空间, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的一组标准正交基. 在这组基下, V 的每个向量 α 都可以表示成

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

令

$$\begin{aligned} \sigma: \quad & V \to R^n \\ & \alpha \mapsto (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T. \end{aligned}$$

据定理 4.5.4 的证明知 σ 是线性空间 V 到 R^n 的同构映射. 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 设 α, β 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标分别为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 和 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$. 则

$$(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = (\sigma(\alpha), \sigma(\beta)).$$

因此 σ 是 V 到 R^n 的一个同构映射. 于是我们有

设 V 是一个 n 维欧氏空间, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的一组标准正交基. 在这组基下, V 的每个向量 α 都可以表示成

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

令

$$\begin{aligned} \sigma: \quad & V \to R^n \\ & \alpha \mapsto (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T. \end{aligned}$$

据定理 4.5.4 的证明知 σ 是线性空间 V 到 R^n 的同构映射. 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 设 α, β 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标分别为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 和 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$. 则

$$(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = (\sigma(\alpha), \sigma(\beta)).$$

因此 σ 是 V 到 R^n 的一个同构映射. 于是我们有

定理4.7.13

每个 n 维的欧氏空间 V 都同构于 R^n.

与线性空间的同构类似, 我们可以证明, 同构作为欧氏空间之间的关系具有自反性, 对称性与传递性.

事实上, 显然每个欧氏空间到自身的恒等映射是同构映射, 因此同构关系具有自反性.

其次, 由定理 4.7.12 (1) 知同构映射的逆映射仍为同构映射, 因而同构关系是对称的.

最后, 设 σ, τ 分别是 V 到 V', V' 到 V'' 的同构映射. 由推论 4.5.5 知 $\tau\sigma$ 是线性空间 V 到 V'' 的同构映射. 且对于任意 $\alpha, \beta \in V$, $k \in R$, 有

$$\Big(\tau\sigma(\alpha), \tau\sigma(\beta)\Big) = \Big(\tau\big(\sigma(\alpha)\big), \tau\big(\sigma(\beta)\big)\Big) = \Big(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)\Big) = \Big(\alpha, \beta\Big).$$

因此 $\tau\sigma$ 是 V 到 V'' 的同构映射. 这表明同构关系是传递的.

由于每个 n 维欧氏空间都与 R^n 同构, 根据同构的传递性, 任意两个 n 维欧氏空间都同构. 综上所述, 我们有

定理4.7.14

两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件是它们的维数是相等.

由于每个 n 维欧氏空间都与 R^n 同构, 根据同构的传递性, 任意两个 n 维欧氏空间都同构. 综上所述, 我们有

定理4.7.14

两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件是它们的维数是相等.

这样所有的欧氏空间可以按同构进行分类, 也就是按维数分类, 维数相同的欧氏空间恰好构成一个同构类. 所有 n 维欧氏空间构成的同构类中含有 R^n, 它是这个类的一个代表元, 任意一个 n 欧氏空间都和它有相同的结构和性质.

目录

我们知道映射是联系两个集合的纽带, 它反映了这两个集合之间的关系.
线性空间是带有线性运算的集合, 因此研究线性空间之间的保持线性运算的映射是自然和必要的, 这样的映射称为线性映射.
本课程我们只讨论一个线性空间到自身的线性映射, 即线性变换.
线性变换也是线性代数的一个主要研究对象.
同线性空间的概念是从直观的平面和几何空间抽象出来的一样, 线性空间上的线性变换的概念也是从直观几何中的旋转和反射等变换抽象出来的.
☞ 以下除非特别声明, 所考虑线性空间都是某一个固定数域 F 上的线性空间.

定义4.8.1

线性空间 V 上的一个变换 $\mathcal{A}$ 称为线性变换, 如果对于任意 $\alpha, \beta \in V$ 以及任意 $k \in F$, 都有

$$\mathcal{A}(\alpha+\beta)=\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{A}(\beta), \quad \mathcal{A}(k\alpha)=k\mathcal{A}(\alpha).$$

简言之, 线性变换就是保持向量的加法和数乘——即线性运算的变换.

定义4.8.1

线性空间 V 上的一个变换 $\mathcal{A}$ 称为线性变换, 如果对于任意 $\alpha, \beta \in V$ 以及任意 $k \in F$, 都有

$$\mathcal{A}(\alpha+\beta) = \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta), \quad \mathcal{A}(k\alpha) = k\mathcal{A}(\alpha).$$

简言之, 线性变换就是保持向量的加法和数乘——即线性运算的变换.

定义4.8.2

线性空间 V 上的两个线性变换 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 称为相等, 记作 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, 如果对于任意的 $\alpha \in V$ 有 $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{B}(\alpha)$.

定义4.8.1

线性空间 V 上的一个变换 $\mathcal{A}$ 称为线性变换, 如果对于任意 $\alpha, \beta \in V$ 以及任意 $k \in F$, 都有

$$\mathcal{A}(\alpha+\beta) = \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta), \quad \mathcal{A}(k\alpha) = k\mathcal{A}(\alpha).$$

简言之, 线性变换就是保持向量的加法和数乘——即线性运算的变换.

定义4.8.2

线性空间 V 上的两个线性变换 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 称为相等, 记作 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, 如果对于任意的 $\alpha \in V$ 有 $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{B}(\alpha)$.

我们一般用花体拉丁字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \cdots$ 表示线性变换, 用$\mathcal{A}(\alpha)$ 或 $\mathcal{A}\alpha$ 表示元素 α 在线性变换 $\mathcal{A}$ 下的像. 若 W 是 V 的非空子集合, 称集合

$$\mathcal{A}(W) \text{ 或 } \mathcal{A}W = \{\mathcal{A}(\alpha) | \alpha \in W\}$$

为 W 在 $\mathcal{A}$ 下的像. 特别地, V 在 $\mathcal{A}$ 下的像称为 $\mathcal{A}$ 的像, 有时也用 $Im\ \mathcal{A}$ 表示.

例4.8.1

设 F 是一数域, $A \in F^{n\times n}$. 则变换

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad F^n &\to F^n \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

是 F^n 上的一线性变换.

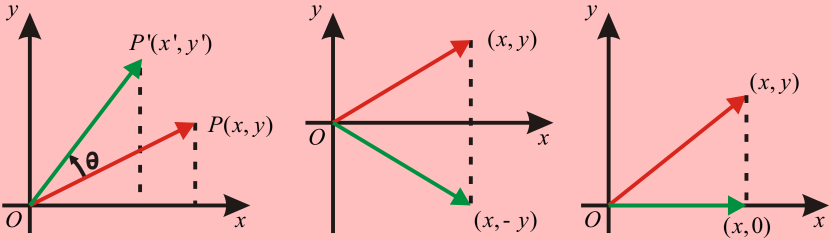
例4.8.1

设 F 是一数域, $A \in F^{n\times n}$. 则变换

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad & F^n \to F^n \\ & X \mapsto AX \end{aligned}$$

是 F^n 上的一线性变换.

这一线性变换在 R^2 上的三个直观模型是



续前例

- 绕坐标原点逆时针旋转 θ 角的旋转变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix},$$

续前例

- 绕坐标原点逆时针旋转 θ 角的旋转变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix},$$

- 关于 x-轴的反射(镜像)变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

续前例

- 绕坐标原点逆时针旋转 θ 角的旋转变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix},$$

- 关于 x-轴的反射(镜像)变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

- 在 x-轴上的投影变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

例4.8.2

在线性空间 $F[x]$ 或者 $F[x]_n$ 中, 求导函数(微商), 即

$$\mathcal{D}: f(x) \mapsto f'(x)$$

是一个线性变换.

例4.8.2

在线性空间 $F[x]$ 或者 $F[x]_n$ 中, 求导函数(微商), 即

$$\mathcal{D}: f(x) \mapsto f'(x)$$

是一个线性变换.

例4.8.3

在实线性空间 $C[a,b]$ 中, 变换

$$\mathcal{J}: f(x) \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

是一线性变换. 而

$$\varphi: f(x) \mapsto \int f(x)dx$$

不是 $C[a,b]$ 上的变换, 当然不是线性变换.

例4.8.4

在线性空间 V 中, 变换

$$\mathcal{E}:\alpha\mapsto\alpha$$

是一线性变换, 称为 V 上的恒等变换或单位变换. 变换

$$\mathbf{0}:\alpha\mapsto 0$$

是一线性变换, 称为 V 上的零变换.

例4.8.4

在线性空间 V 中, 变换

$$\mathcal{E}:\alpha\mapsto\alpha$$

是一线性变换, 称为 V 上的恒等变换或单位变换. 变换

$$\mathbf{0}:\alpha\mapsto 0$$

是一线性变换, 称为 V 上的零变换.

例4.8.5

设 V 是数域 F 上的线性空间, $k\in F$, $\alpha_0\in V$ 是一非零常向量. 变换

$$\mathcal{K}:\alpha\mapsto k\alpha$$

是一线性变换, 称为由数 k 决定的数乘变换. 当 $k=1$ 时, 就得到了 V 上的恒等变换, 当 $k=0$ 时, 便得到 V 上的零变换. 而变换

$$T:\alpha\mapsto k\alpha+\alpha_0$$

不是线性变换.

补充例题 4.8.1

设 τ 是欧氏空间(几何空间) V 中的一固定非零向量,则

1. 把 V 每个向量 α 映到它在 τ 上的内射影的变换,是一个线性变换, 记为 Π_τ. 即

$$\Pi_\tau(\alpha) = \frac{(\alpha, \tau)}{(\tau, \tau)}\tau.$$

补充例题 4.8.1

设 τ 是欧氏空间(几何空间) V 中的一固定非零向量,则

1. 把 V 每个向量 α 映到它在 τ 上的内射影的变换,是一个线性变换, 记为 Π_τ. 即

$$\Pi_\tau(\alpha) = \frac{(\alpha,\tau)}{(\tau,\tau)}\tau.$$

2. 把 V 每个向量 α 映成它关于向量 τ 的对称向量的变换,是一个线性变换, 记为 Ψ_τ. 即

$$\Psi_\tau(\alpha) = 2\Pi_\tau(\alpha) - \alpha = 2\frac{(\alpha,\tau)}{(\tau,\tau)}\tau - \alpha.$$

补充例题 4.8.1

设 τ 是欧氏空间(几何空间) V 中的一固定非零向量,则

1. 把 V 每个向量 α 映到它在 τ 上的内射影的变换,是一个线性变换, 记为 Π_τ. 即
$$\Pi_\tau(\alpha)=\frac{(\alpha,\tau)}{(\tau,\tau)}\tau.$$
2. 把 V 每个向量 α 映成它关于向量 τ 的对称向量的变换,是一个线性变换, 记为 Ψ_τ. 即
$$\Psi_\tau(\alpha)=2\Pi_\tau(\alpha)-\alpha=2\frac{(\alpha,\tau)}{(\tau,\tau)}\tau-\alpha.$$
3. 特别当 τ 是单位向量时,
$$\Pi_\tau(\alpha)=(\alpha,\tau)\tau,$$
$$\Psi_\tau(\alpha)=2(\alpha,\tau)\tau-\alpha.$$

从定义可以得到线性变换的一些基本性质.

定理4.8.3

设 V 是数域 F 上的线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in V$, $k_1, k_2, \cdots, k_m \in F$. 则

$$\mathcal{A}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m) = k_1\mathcal{A}(\alpha_1) + k_2\mathcal{A}(\alpha_2) + \cdots + k_m\mathcal{A}(\alpha_m).$$

特别地, 我们有

1. $\mathcal{A}$ 保持零向量, 即 $\mathcal{A}(0) = 0$;
2. $\mathcal{A}$ 保持负向量, 即 $\mathcal{A}(-\alpha) = -\mathcal{A}(\alpha)$;
3. $\mathcal{A}$ 保持向量的线性相关性, 即若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关, 则 $\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \cdots, \mathcal{A}(\alpha_m)$ 也线性相关;
4. $\mathcal{A}$ 把子空间变成子空间, 即若 V_1 是 V 的子空间, 则 $\mathcal{A}(V_1)$ 也是 V 的子空间

需要注意的是线性变换不保持线性无关性, 也就是说线性变换可能把线性无关的向量组变成线性相关的向量组. 例如零变换把任意向量组变成线性相关向量组. $\mathcal{D}$ 把 $F[x]_n$ 的一组基 $1, x, x^2 \cdots, x^{n-1}$ 变成线性相关的向量组 $0, 1, 2x, \cdots, (n-1)x^{n-2}$.

需要注意的是线性变换不保持线性无关性, 也就是说线性变换可能把线性无关的向量组变成线性相关的向量组. 例如零变换把任意向量组变成线性相关向量组. $\mathcal{D}$ 把 $F[x]_n$ 的一组基 $1, x, x^2 \cdots, x^{n-1}$ 变成线性相关的向量组 $0, 1, 2x, \cdots, (n-1)x^{n-2}$.

补充例题 4.8.2

设 V 是数域 F 上的线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in V$,则

1. 若 $\mathcal{A}$ 是单射,则 $\mathcal{A}$ 保持向量的线性无关性, 即若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, 则 $\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \cdots, \mathcal{A}(\alpha_m)$ 也线性无关;
2. 若 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in V$,且有 $P \in F^{m\times n}$ 使,
$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)P,$$
则
$$\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \Big(\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)\Big)P.$$

接下来我们讨论线性变换的运算.

☞ 用 $L(V)$ 表示线性空间 V 上的所有线性变换组成的集合.

首先在 $L(V)$ 上定义加法运算和数乘运算. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V), k \in F$. 定义 V 上的变换 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$: 对于 $\alpha \in V$,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha) \xlongequal{\text{def}} \mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{B}(\alpha),$$

称变换 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的和.

$$(k\mathcal{A})(\alpha) \xlongequal{\text{def}} k\mathcal{A}(\alpha).$$

称为数 k 与 $\mathcal{A}$ 的数乘.

☞ 线性变换的和与数乘还是线性变换. 事实上, 若 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V), s, t \in F$, 则

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}+\mathcal{B})(s\alpha+t\beta) &= \mathcal{A}(s\alpha+t\beta)+\mathcal{B}(s\alpha+t\beta) \\
&= (s\mathcal{A}(\alpha)+t\mathcal{A}(\beta))+(s\mathcal{B}(\alpha)+t\mathcal{B}(\beta)) \\
&= (s\mathcal{A}(\alpha)+s\mathcal{B}(\alpha))+(t\mathcal{A}(\beta)+t\mathcal{B}(\beta)) \\
&= s(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha)+t(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\beta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(k\mathcal{A})(s\alpha+t\beta) &= k\big(\mathcal{A}(s\alpha+t\beta)\big) = k\big(s\mathcal{A}(\alpha)+t\mathcal{A}(\beta)\big) \\ &= s\big(k\mathcal{A}(\alpha)\big)+t\big(k\mathcal{A}(\beta)\big) = s\big((k\mathcal{A})(\alpha)\big)+t\big((k\mathcal{A})(\beta)\big).\end{aligned}$$

这说明 $L(V)$ 关于线性变换的加法和数乘封闭.
对于任意$\mathcal{A}\in L(V)$, 零变换 $\mathbf{0}$ 是加法运算的恒等元, 变换 $(-\mathcal{A})=(-1)\mathcal{A}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的负变换, 且有

$$\mathcal{A}+\mathbf{0}=\mathcal{A}, \qquad \mathcal{A}+(-\mathcal{A})=\mathbf{0}.$$

另外,类似于函数的加法和数乘,容易证明线性变换的加法和数乘满足线性空间定义中的其余 6 条性质. 因此,我们有

$$\begin{aligned}(k\mathcal{A})(s\alpha+t\beta)&=k\big(\mathcal{A}(s\alpha+t\beta)\big)=k\big(s\mathcal{A}(\alpha)+t\mathcal{A}(\beta)\big)\\&=s\big(k\mathcal{A}(\alpha)\big)+t\big(k\mathcal{A}(\beta)\big)=s\big((k\mathcal{A})(\alpha)\big)+t\big((k\mathcal{A})(\beta)\big).\end{aligned}$$

这说明 $L(V)$ 关于线性变换的加法和数乘封闭.
对于任意$\mathcal{A}\in L(V)$, 零变换 $\mathbf{0}$ 是加法运算的恒等元, 变换 $(-\mathcal{A})=(-1)\mathcal{A}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的负变换, 且有

$$\mathcal{A}+\mathbf{0}=\mathcal{A},\qquad \mathcal{A}+(-\mathcal{A})=\mathbf{0}.$$

另外,类似于函数的加法和数乘,容易证明线性变换的加法和数乘满足线性空间定义中的其余 6 条性质. 因此,我们有

定理4.8.4

设 V 是数域 F 上的线性空间. 则 $L(V)$ 关于上述加法和数乘构成数域 F 上的线性空间.

☞ 问题: $\dim L(V)=?$

线性变换是映射, 可以利用映射的合成引入线性变换的乘法. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)$. 则变换 $\mathcal{AB}$:

$$\mathcal{AB}(\alpha) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha)),\ \alpha \in V,$$

称为 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的乘积. 容易证明, 线性变换的乘积仍是线性变换. 事实上,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{AB})(\alpha+\beta) &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha+\beta)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha)+\mathcal{B}(\beta)) \\
&= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha)) + \mathcal{A}(\mathcal{B}(\beta)) \\
&= (\mathcal{AB})(\alpha) + (\mathcal{AB})(\beta) \\
(\mathcal{AB})(k\alpha) &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(k\alpha)) = \mathcal{A}(k\mathcal{B}(\alpha+\beta)) \\
&= k\mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha)) = k(\mathcal{AB})(\alpha)
\end{aligned}$$

这说明 $\mathcal{AB}$ 是 V 上的线性变换.

由于映射的合成满足结合律,所以线性变换的乘法也满足结合律, 即

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}).$$

与映射的合成类似, 线性变换的乘法一般不满足交换律.

补充例题 4.8.3

例如在实空间 $R[x]$ 中,对下面的两个线性变换

$$\mathcal{D}(f(x)) = f'(x), \qquad \mathcal{J}(f(x)) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}x.$$

可知有 $\mathcal{D}\mathcal{J} = \mathcal{E}$,但一般 $\mathcal{J}\mathcal{D} \neq \mathcal{E}$.

容易验证恒等变换 $\mathcal{E}$ 是乘法单位元, 即对任意 $\mathcal{A} \in L(V)$, 有

$$\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E} = \mathcal{A}.$$

以及乘法对加法的左右分配律成立, 即对任意 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in L(V)$, 有

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}, \qquad (\mathcal{B}+\mathcal{C})\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{C}\mathcal{A}.$$

如果 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 是双射, 也就是说 $\mathcal{A}$ 作为变换可逆, 那么 $\mathcal{A}$ 的逆变换 $\mathcal{A}^{-1}$ 是线性变换. 事实上,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^{-1}(\alpha+\beta) &= \mathcal{A}^{-1}\Big((\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})(\alpha)+(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})(\beta)\Big)\\
&= \mathcal{A}^{-1}\Big(\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(\alpha))+\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(\beta))\Big)\\
&= \mathcal{A}^{-1}\Big(\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(\alpha)+\mathcal{A}^{-1}(\beta))\Big)\\
&= (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})(\mathcal{A}^{-1}(\alpha)+\mathcal{A}^{-1}(\beta))\\
&= \mathcal{A}^{-1}(\alpha)+\mathcal{A}^{-1}(\beta),\\
\mathcal{A}^{-1}(k\alpha) &= \mathcal{A}^{-1}(k(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})(\alpha)) = \mathcal{A}^{-1}\Big(k(\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(\alpha)))\Big)\\
&= \mathcal{A}^{-1}\Big(\mathcal{A}(k\mathcal{A}^{-1}(\alpha))\Big) = (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})(k\mathcal{A}^{-1})(\alpha))\\
&= k\mathcal{A}^{-1}(\alpha).
\end{aligned}
$$

此时我们称 $\mathcal{A}$ 是可逆线性变换.

如果 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的可逆线性变换, 那么据定义 4.5.1 知 $\mathcal{A}$ 是 V 到 V 的同构映射, 称为 V 的自同构映射. 因而可逆线性变换具有定理 4.5.3 中所列举的性质, 这里不再一一重复.

目录

上一节我们介绍了线性空间上的线性变换及其运算. 本节我们建立有限维线性空间上的线性变换与矩阵的关系.

引理4.9.1

设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)$. 则

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}\varepsilon_i = \mathcal{B}\varepsilon_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

上一节我们介绍了线性空间上的线性变换及其运算. 本节我们建立有限维线性空间上的线性变换与矩阵的关系.

引理4.9.1

设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)$. 则

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A}\varepsilon_i = \mathcal{B}\varepsilon_i,\; i = 1, 2, \cdots, n.$$

证明 必要性显然. 下证充分性. 对任意 $\alpha \in V$, α 可以被基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 唯一线性表出, 即有

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n.$$

因为线性变换保持线性关系不变, 因而

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\alpha) &= x_1\mathcal{A}(\varepsilon_1) + x_2\mathcal{A}(\varepsilon_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\varepsilon_n) \\
&= x_1\mathcal{B}(\varepsilon_1) + x_2\mathcal{B}(\varepsilon_2) + \cdots + x_n\mathcal{B}(\varepsilon_n) = \mathcal{B}(\alpha).
\end{aligned}$$

所以 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

上一节我们介绍了线性空间上的线性变换及其运算. 本节我们建立有限维线性空间上的线性变换与矩阵的关系.

引理4.9.1

设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)$. 则

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}\varepsilon_i = \mathcal{B}\varepsilon_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

引理 4.9.1 表明, 有限维线性空间 V 上线性变换 $\mathcal{A}$ 是由 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组基上的作用唯一确定. 反之, 我们有

定理4.9.2

设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 中任意 n 个向量. 则存在唯一的线性变换 $\mathcal{A} \in L(V)$ 使得

$$\mathcal{A}(\varepsilon_i) = \alpha_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

证明 设 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$ 是 V 中的任意向量. 定义 V 上的变换 $\mathcal{A}$ 如下:

$$\mathcal{A}(\alpha) = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

设 $\beta, \gamma \in V$, $k \in F$, 且 $\beta = \sum_{i=1}^n b_i\varepsilon_i$, $\gamma = \sum_{i=1}^n c_i\varepsilon_i$. 则

$$\beta + \gamma = \sum_{i=1}^n (b_i + c_i)\varepsilon_i, \quad k\beta = \sum_{i=1}^n kb_i\varepsilon_i.$$

据变换 $\mathcal{A}$ 的定义有

$$\mathcal{A}(\beta+\gamma) = \sum_{i=1}^n (b_i + c_i)\alpha_i = \sum_{i=1}^n b_i\alpha_i + \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i = \mathcal{A}(\beta) + \mathcal{A}(\gamma),$$

$$\mathcal{A}(k\beta) = \sum_{i=1}^n kb_i\alpha_i = k\sum_{i=1}^n b_i\alpha_i = k\mathcal{A}(\beta).$$

因此 $\mathcal{A}$ 是线性变换. 显然 $\mathcal{A}$ 满足:

$$\mathcal{A}\varepsilon_i = \alpha_i, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

唯一性由引理 4.9.1 立即可得.

定义4.9.3

设 V 数域 F 上的 n 维线性空间, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$是 V 的一组基, $\mathcal{A}$ 是 V 上的一个线性变换. 如果

$$\begin{cases} \mathcal{A}\varepsilon_1 & = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n, \\ \mathcal{A}\varepsilon_2 & = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{A}\varepsilon_n & = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n, \end{cases}$$

用形式矩阵表示就是

$$(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

那么称矩阵 A 为线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的矩阵.

为方便期间, 我们常用 $\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 表示 $(\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \cdots, \mathcal{A}(\varepsilon_n))$, 即

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \xlongequal{\text{def}} (\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \cdots, \mathcal{A}(\varepsilon_n)).$$

为方便期间, 我们常用 $\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 表示 $(\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \cdots, \mathcal{A}(\varepsilon_n))$, 即

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \xlongequal{\text{def}} (\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \cdots, \mathcal{A}(\varepsilon_n)).$$

例4.9.1

例 *4.8.1* 中的线性变换 $\mathcal{A}$ 在 F^n 的基

$$(e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T, e_2 = (0, 1, \cdots, 0)^T, \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)^T)$$

下的矩阵就是 A.

为方便期间, 我们常用 $\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 表示 $(\mathcal{A}(\varepsilon_1),\mathcal{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathcal{A}(\varepsilon_n))$, 即

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n) \xlongequal{\text{def}} (\mathcal{A}(\varepsilon_1),\mathcal{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathcal{A}(\varepsilon_n)).$$

例4.9.1

例 *4.8.1* 中的线性变换 $\mathcal{A}$ 在 F^n 的基

$$(e_1=(1,0,\cdots,0)^T, e_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)^T)$$

下的矩阵就是 A.

例4.9.2

n 维线性空间上的恒等变换 $\mathcal{E}$, 零变换 $\mathbf{0}$, 数乘变换 $k\mathcal{E}$ 在任意一组基下的矩阵分别为 $E_n, 0_{n\times n}, kE_n$.

例4.9.3

例 *4.8.2* 中的线性变换 $\mathcal{D}$ 在 $F[x]_n$ 的基

$$S=(1,x,\frac{x^2}{2!},\cdots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!})$$

和

$$S'=(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1})$$

下的矩阵分别是

$$D=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix} \text{ 和 } D'=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

这样在取定一组基后, 我们就建立了由数域 F 上的 n 维线性空间 V 的线性变换到数域 F 上的 $n\times n$ 矩阵的一个一一对应.

定理4.9.4

设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的一组基. 则映射

$$\begin{aligned} \theta: \quad L(V) &\to F^{n\times n} \\ \mathcal{A} &\mapsto A, \end{aligned}$$

是一一对应, 其中 A 是 $\mathcal{A}$ 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的矩阵. 且具有下列性质：对任意 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)$, $k \in F$ 有

1. 线性变换的和对应于矩阵的和, 即 $\theta(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \theta(\mathcal{A}) + \theta(\mathcal{B})$;
2. 线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积, 即 $\theta(k\mathcal{A}) = k\theta(\mathcal{A})$;
3. θ 是线性空间 $L(V)$ 到 $F^{n\times n}$ 的同构映射;
4. 线性变换的乘积对应于矩阵的乘积, $\theta(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \theta(\mathcal{A})\theta(\mathcal{B})$;
5. 可逆线性变换对应可逆矩阵, 且逆变换对应于逆矩阵, 即 $\mathcal{A}$ 可逆当且仅当 $\theta(\mathcal{A})$ 可逆, 且 $\theta(\mathcal{A}^{-1}) = \theta(\mathcal{A})^{-1}$.

证明 据引理 4.9.1 和定理 4.9.2 知 θ 是双射. 设 $A=\theta(\mathcal{A}), B=\theta(\mathcal{B})$, 即

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,$$
$$\mathcal{B}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B.$$

(1) 因为

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=&\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)+\mathcal{B}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\\=&(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A+(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B\\=&(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(A+B),\end{aligned}$$

所以 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ 在基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 下的矩阵为 $A+B$, 即 $\theta(\mathcal{A}+\mathcal{B})=A+B$.
(2) 因为

$$\begin{aligned}(k\mathcal{A})(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=&k(\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n))\\=&k((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(kA),\end{aligned}$$

所以 $k\mathcal{A}$ 在基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 下的矩阵为 kA, 即 $\theta(k\mathcal{A})=kA$.

(3) 由 (1) 和 (2) 立即可得.
(4) 由于

$$\begin{aligned}\mathcal{AB}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=&\mathcal{A}(\mathcal{B}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n))=\mathcal{A}((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B)\\=&(\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n))B=((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A)B\\=&(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(AB).\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{AB}$ 在基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 下的矩阵为 AB, 即 $\theta(\mathcal{AB})=AB$.
(5) 因为 $\theta(\mathcal{E})=E$, 所以据 (4) 得

$$\mathcal{AB}=\mathcal{BA}=\mathcal{E}\Leftrightarrow AB=BA=E.$$

从而 $\mathcal{A}$ 可逆当且仅当 $\theta(\mathcal{A})$ 可逆, 并且 $\theta(\mathcal{A}^{-1})=A^{-1}$.

利用线性变换的矩阵可以很方便的确定一个向量的像.

定理4.9.5

设 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的矩阵是 A, 向量 $\alpha, \mathcal{A}(\alpha)$ 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标分别是 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$. 则

$$Y = AX.$$

利用线性变换的矩阵可以很方便的确定一个向量的像.

定理4.9.5

设 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的矩阵是 A, 向量 $\alpha, \mathcal{A}(\alpha)$ 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标分别是 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$. 则

$$Y = AX.$$

证明 因为

$$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

所以

$$\mathcal{A}\alpha = (\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

另一方面,

$$\mathcal{A}\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

根据坐标的唯一性得

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

例4.9.4

在线性空间 F^3 中取一组基

$$(\alpha_1 = (-1,1,1)^T, \alpha_2 = (1,0,1)^T, \alpha_3 = (0,1,1)^T),$$

设 $\mathcal{A}$ 是 F^3 上的线性变换满足

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\alpha_1) &= (0,-1,0)^T,\\
\mathcal{A}(\alpha_2) &= (1,2,3)^T,\\
\mathcal{A}(\alpha_3) &= (-1,2,2)^T.
\end{aligned}$$

1. 求 $\mathcal{A}$ 在基 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 下的矩阵;
2. 求向量 $\alpha = (0,2,3)^T$ 的像 $\mathcal{A}(\alpha)$ 关于基 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的坐标;
3. $\mathcal{A}$ 是不是可逆线性变换?如是可逆线性变换, 求 $\mathcal{A}^{-1}$.

解 (1) 设 $\mathcal{A}$ 在基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 下的矩阵为 A, 即

$$(\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \mathcal{A}(\alpha_3)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A.$$

则

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A.$$

从而

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 因为 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 所以 α 关于基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的坐标为 $(1, 1, 1)^T$. 据定理 4.9.5 知 $\mathcal{A}(\alpha)$ 的坐标等于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 因为 $|A| = 5$, 所以 A 是可逆矩阵, 据定理 4.9.5 知 $\mathcal{A}$ 是可逆线性变换. 据定理 4.9.5 知 $\mathcal{A}^{-1}$ 在基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 下的矩阵等于 A^{-1}, 经计算得

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases} \mathcal{A}^{-1}\alpha_1 & = & \frac{1}{5}\alpha_1 - \frac{1}{5}\alpha_2 + \frac{4}{5}\alpha_3, \\ \mathcal{A}^{-1}\alpha_2 & = & \frac{2}{5}\alpha_1 + \frac{3}{5}\alpha_2 - \frac{2}{5}4\alpha_3, \\ \mathcal{A}^{-1}\alpha_3 & = & -\frac{1}{5}\alpha_1 + \frac{1}{5}\alpha_2 + \frac{1}{5}4\alpha_3, \end{cases}$$

这就唯一的确定了变换 $\mathcal{A}^{-1}$.

设 $\mathcal{A}$ 是数域 F 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\mathcal{A}$ 在基

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \quad \text{和} \quad (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$$

下的矩阵分别为 A 和 B, 即

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n) &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A,\\ (\mathcal{A}\eta_1, \mathcal{A}\eta_2, \cdots, \mathcal{A}\eta_n) &= (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)B.\end{aligned}$$

又设由基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 到 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 的过渡矩阵为 T, 即

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)T.$$

则 T 是可逆矩阵, 并且有

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\eta_1, \mathcal{A}\eta_2, \cdots, \mathcal{A}\eta_n) =& \mathcal{A}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = \mathcal{A}\Big((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)T\Big)\\ =& \Big(\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\Big)T = (\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n)T\\ =& (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)AT = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)T^{-1}AT.\end{aligned}$$

由线性变换在一组基下的矩阵唯一性得

$$B = T^{-1}AT.$$

定义4.9.6

设 A, B 是数域 F 上的 n 阶矩阵. 称 A 相似于 B, 如果存在 F 上的可逆矩阵 T 使得 $B = T^{-1}AT$, 记作 $A \sim B$.

定义4.9.6

设 A, B 是数域 F 上的 n 阶矩阵. 称 A 相似于 B, 如果存在 F 上的可逆矩阵 T 使得 $B = T^{-1}AT$, 记作 $A \sim B$.

相似是矩阵之间的一种等价关系, 即相似具有自反性、对称性和传递性. 事实上, 每一个方阵总与自身相似; 若 $A \sim B$, 则存在可逆矩阵 T 使得 $B = T^{-1}AT$. 因此 $A = (T^{-1})^{-1}AT^{-1}$, 从而 $B \sim A$; 若 $A \sim B$, $B \sim C$, 则存在可逆矩阵 T, S 使得

$$B = T^{-1}AT, \quad C = S^{-1}BS.$$

因此 $C = S^{-1}T^{-1}ATS = (TS)^{-1}A(TS)$, 注意到 TS 是可逆矩阵, 所以 $A \sim C$. 关于相似矩阵的进一步讨论我们留在下一章进行.

定理4.9.7

设 $\mathcal{A}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\mathcal{A}$ 在 V 的两组基

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \quad \text{和} \quad (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$$

下的矩阵分别为 A 和 B, 由基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 到 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 的过渡矩阵是T. 则 $B = T^{-1}AT$, 即 A 与 B 相似.

反过来, 数域 F 上两个相似的 n 阶矩阵可以看作同一线性变换在两组基下的矩阵.

定理4.9.7

设 $\mathcal{A}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\mathcal{A}$ 在 V 的两组基

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \quad 和 \quad (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$$

下的矩阵分别为 A 和 B, 由基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 到 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 的过渡矩阵是T. 则 $B = T^{-1}AT$, 即 A 与 B 相似.
反过来, 数域 F 上两个相似的 n 阶矩阵可以看作同一线性变换在两组基下的矩阵.

证明 我们已经证明了定理的前一部分. 现在证明后一部分. 设数域 F 上两个 n 阶矩阵 A 与 B 相似. 则存在 F 上的可逆矩阵 T 使得 $B = T^{-1}AT$. 取定 V 的一组基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$. 据定理 4.9.4, 设 $\mathcal{A}$ 是 V 上线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的矩阵. 令

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)T.$$

则 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 也是 V 的一组基, 并且 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵就是 $T^{-1}AT = B$.

例4.9.5

设 $\mathcal{A}$ 是例 *4.9.4* 中的线性变换. 取 F^3 的基

$$(\varepsilon_1 = (1,0,0)^T, \varepsilon_2 = (0,1,0)^T, \varepsilon_3 = (0,0,1)^T).$$

则由基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 到 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

据定理 *4.9.6* 知 $\mathcal{A}$ 关于基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

目录

前面我们讨论了线性空间上的线性变换, 所谓线性变换就是线性空间的保持线性运算的变换.

欧氏空间是带有内积的实线性空间, 因此讨论欧氏空间的保持内积的线性变换是非常自然的事情.

另一方面, 在解析几何中, 我们有正交变换的概念. 所谓正交变换就是保持空间中点之间距离不变的变换.

既然我们已经将几何空间推广到欧氏空间, 那么在欧氏空间中建立类似于正交变换的概念是非常必要的.

这些启发我们在一般欧氏空间中建立如下概念.

前面我们讨论了线性空间上的线性变换, 所谓线性变换就是线性空间的保持线性运算的变换.
欧氏空间是带有内积的实线性空间, 因此讨论欧氏空间的保持内积的线性变换是非常自然的事情.
另一方面, 在解析几何中, 我们有正交变换的概念. 所谓正交变换就是保持空间中点之间距离不变的变换.
既然我们已经将几何空间推广到欧氏空间, 那么在欧氏空间中建立类似于正交变换的概念是非常必要的.
这些启发我们在一般欧氏空间中建立如下概念.

定义4.10.1

欧氏空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 称为正交变换, 如果它保持向量的内积, 即对任意 $\alpha, \beta \in V$,

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta).$$

前面我们讨论了线性空间上的线性变换, 所谓线性变换就是线性空间的保持线性运算的变换.

欧氏空间是带有内积的实线性空间, 因此讨论欧氏空间的保持内积的线性变换是非常自然的事情.

另一方面, 在解析几何中, 我们有正交变换的概念. 所谓正交变换就是保持空间中点之间距离不变的变换.

既然我们已经将几何空间推广到欧氏空间, 那么在欧氏空间中建立类似于正交变换的概念是非常必要的.

这些启发我们在一般欧氏空间中建立如下概念.

定义4.10.1

欧氏空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 称为正交变换, 如果它保持向量的内积, 即对任意 $\alpha, \beta \in V$,

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta).$$

平面 R^2 上绕坐标原点的旋转变换以及关于过原点直线的反射变换都是正交变换.

补充例题 4.10.1

设τ是欧氏空间V中的一个非零向量. 问实数 k 取何值时,V上的线性变换:

$$\mathcal{A}(\alpha) = k(\alpha, \tau)\tau - \alpha, \ \forall \alpha \in V,$$

是正交变换?

补充例题 4.10.1

设τ是欧氏空间V中的一个非零向量. 问实数 k 取何值时,V上的线性变换:

$$\mathcal{A}(\alpha) = k(\alpha,\tau)\tau - \alpha,\ \forall\alpha \in V,$$

是正交变换?

解: 由正交变换的定义有:

$$\big(\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)\big) = (\alpha,\beta),\quad \forall\alpha,\beta \in V.$$

即

$$(\alpha,\beta) = \big(k(\alpha,\tau)\tau-\alpha, k(\beta,\tau)\tau-\beta\big) = k^2(\alpha,\tau)(\beta,\tau)(\tau,\tau)-2k(\alpha,\tau)(\beta,\tau)+(\alpha,\beta).$$

故有,

$$k^2(\alpha,\tau)(\beta,\tau)(\tau,\tau) - 2k(\alpha,\tau)(\beta,\tau) = 0,$$

再由 α,β 的任意性和 $\tau \neq 0$ 得,

$$k = 0,\quad \text{或}\quad k = \frac{2}{(\tau,\tau)} = \frac{2}{|\tau|^2}.$$

另解: 由正交变换的定义有:

$$\big(\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)\big) = (\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V.$$

特别地,取 $\alpha = \beta = \tau$ 则有

$$(\tau, \tau) = \big(k(\tau, \tau)\tau - \tau, k(\tau, \tau)\tau - \tau\big) = k^2(\tau, \tau)^3 - 2k(\tau, \tau)^2 + (\tau, \tau).$$

故有,

$$(k^2(\tau, \tau) - 2k)(\tau, \tau)^2 = 0,$$

再由$\tau \neq 0$ 得,

$$k = 0, \quad \text{或} \quad k = \frac{2}{(\tau, \tau)} = \frac{2}{|\tau|^2}.$$

将解得的 k 的值代入原线性变换,可知

$$\mathcal{A}(\alpha) = -\alpha \;\; \text{和} \;\; \mathcal{A}(\alpha) = 2\frac{(\alpha, \tau)}{(\tau, \tau)}\tau - \alpha,$$

都是正交变换.
因此,原题的答案是

$$k = 0, \quad \text{或} \quad k = \frac{2}{(\tau, \tau)} = \frac{2}{|\tau|^2}.$$

关于正交变换, 我们有如下刻画.

定理4.10.2

设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathcal{A} \in L(V)$. 则下列条件等价:

1. $\mathcal{A}$ 是正交变换;
2. $\mathcal{A}$ 把标准正交基变成标准正交基, 即若 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的标准正交基, 则 $(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n)$ 也是 V 的标准正交基;
3. $\mathcal{A}$ 在任意标准正交基下的矩阵为正交矩阵;
4. $\mathcal{A}$ 在某一标准正交基下的矩阵为正交矩阵;
5. $\mathcal{A}$ 保持单位向量的长度不变, 即对任意 $\alpha \in V$, 且 $|\alpha| = 1$, 有 $|\mathcal{A}\alpha| = |\alpha| = 1$;
6. $\mathcal{A}$ 保持向量的长度不变, 即对任意 $\alpha \in V$, $|\mathcal{A}\alpha| = |\alpha|$.

证明 $(1) \Rightarrow (2)$. 设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的标准正交基. 由 $\mathcal{A}$ 是正交变换知, 对任意 $i, j = 1, 2, \cdots, n$,

$$(\mathcal{A}\varepsilon_i, \mathcal{A}\varepsilon_j) = (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

因而 $(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n)$ 是 V 的标准正交基.
$(2) \Rightarrow (3)$. 设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的任一标准正交基, A 为 $\mathcal{A}$ 在这组标准正交基下的矩阵, 即

$$(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A.$$

由 (2) 知 $(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n)$ 也是 V 的标准正交基, 因此由定理 4.7.10 得 A 是正交矩阵.
$(4) \Rightarrow (5)$. 设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的一组标准正交基, $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵 A 为正交矩阵. 对任意 $\alpha \in V$, 设 α 关于标准正交基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 的坐标为 X. 则据定理 4.9.5 知 $\mathcal{A}\alpha$ 关于该基的坐标等于 AX. 于是

$$|\mathcal{A}\alpha|^2 = (AX)^T AX = X^T A^T AX = X^T X = |\alpha|^2 = 1,$$

从而 $\mathcal{A}$ 保持单位向量的长度不变.

$(5) \Rightarrow (6)$. 当 $\alpha = 0$ 时, $|\mathcal{A}\alpha| = 0 = |\alpha|$.
当 $\alpha \neq 0$ 时,令 $\beta = \frac{1}{|\alpha|}\alpha$,则 $|\beta| = 1$,故

$$1 = |\mathcal{A}\beta| = |\mathcal{A}(\frac{1}{|\alpha|}\alpha)| = |\frac{1}{|\alpha|}\mathcal{A}(\alpha)| = \frac{1}{|\alpha|}|\mathcal{A}\alpha|,$$

即 $|\mathcal{A}\alpha| = |\alpha|$.
$(6) \Rightarrow (1)$. 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 据 (6) 有

$$(\mathcal{A}(\alpha+\beta), \mathcal{A}(\alpha+\beta)) = (\alpha+\beta, \alpha+\beta); \qquad (*1)$$
$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\alpha) = (\alpha, \alpha); \qquad (*2)$$
$$(\mathcal{A}\beta, \mathcal{A}\beta) = (\beta, \beta); \qquad (*3)$$

展开(*1)式并结合 $(*2), (*3)$ 式得

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta),$$

因此 $\mathcal{A}$ 是正交变换.
或用 $2(\alpha, \beta) = |\alpha+\beta|^2 - |\alpha|^2 - |\beta|^2$ 证明.

据定理 4.10.2 知正交变换也保持向量的夹角不变. 但反过来不成立, 即保持夹角不变的线性变换未必是正交变换. 例如, 当 $k \neq 0, \pm 1$ 时, 数乘变换 $k\mathcal{E}$ 保持向量的夹角不变, 但它不是正交变换.

结合定理 4.9.4 和 4.10.2, 由于正交矩阵是可逆矩阵, 因此正交变换都是可逆变换.

与欧氏空间的同构映射的定义比较可以看出, 正交变换恰好就是欧氏空间到自身的同构映射. 因此正交变换的乘积以及正交变换的逆变换仍为正交变换. 由于在标准正交基下正交变换对应正交矩阵, 因此正交矩阵乘积以及正交矩阵的逆矩阵仍为正交矩阵. 由于在标准正交基下正交变换对应正交矩阵,因此正交矩阵的乘积以及正交矩阵的逆仍为正交矩阵. 归纳起来有:

定理4.10.3

设 A, B 都是正交阵,则 A^{-1}, A^*, AB 都是正交阵.

欧氏空间中另一类与内积有关的线性变换是对称变换:

定义4.10.4

欧氏空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 称为对称变换, 如果对任意 $\alpha, \beta \in V$,

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}\beta).$$

欧氏空间中另一类与内积有关的线性变换是对称变换:

定义4.10.4

欧氏空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 称为对称变换, 如果对任意 $\alpha, \beta \in V$,

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}\beta).$$

例如,平面 R^2 上向 x-轴的正交投影变换是对称变换. 实际上在自然基下,设

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

则有

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1 x_2 = (\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}) = (\alpha, \mathcal{A}\beta).$$

再如,**平面 R^2 上向 x-轴的反射(镜像)变换是对称变换**.
实际上在自然基下,设

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

则有

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 - y_1y_2 = (\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}) = (\alpha, \mathcal{A}\beta).$$

再如,**平面 R^2 上向 x-轴的反射(镜像)变换是对称变换**.
实际上在自然基下,设

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

则有

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 - y_1y_2 = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}\right) = (\alpha, \mathcal{A}\beta).$$

☞ 该变换既是正交变换,又是对称变换.

补充例题 4.10.2

设τ是欧氏空间V中的一个非零向量. 证明对任意实数 k, l ,V上的线性变换:

$$\mathcal{A}(\alpha) = k(\alpha, \tau)\tau - l\alpha, \forall \alpha \in V,$$

都是对称变换.

补充例题 4.10.2

设τ是欧氏空间V中的一个非零向量. 证明对任意实数 k, l ,V上的线性变换:

$$\mathcal{A}(\alpha) = k(\alpha, \tau)\tau - l\alpha, \ \forall \alpha \in V,$$

都是对称变换.

证明:

$$\big(\mathcal{A}(\alpha), \beta\big) = \big(k(\alpha, \tau)\tau - l\alpha, \beta\big) = k(\alpha, \tau)(\beta, \tau) - l(\alpha, \beta),$$

$$\big(\alpha, \mathcal{A}(\beta)\big) = \big(\alpha, k(\beta, \tau)\tau - l\beta\big) = k(\beta, \tau)(\alpha, \tau) - l(\alpha, \beta) = \big(\mathcal{A}(\alpha), \beta\big).$$

因此,对任意实数 k, l,$\mathcal{A}$都是V上的对称变换.

补充例题 4.10.2

设τ是欧氏空间V中的一个非零向量. 证明对任意实数 k, l ,V上的线性变换:

$$\mathcal{A}(\alpha) = k(\alpha, \tau)\tau - l\alpha, \ \forall \alpha \in V,$$

都是对称变换.

证明:

$$\big(\mathcal{A}(\alpha), \beta\big) = \big(k(\alpha, \tau)\tau - l\alpha, \beta\big) = k(\alpha, \tau)(\beta, \tau) - l(\alpha, \beta),$$

$$\big(\alpha, \mathcal{A}(\beta)\big) = \big(\alpha, k(\beta, \tau)\tau - l\beta\big) = k(\beta, \tau)(\alpha, \tau) - l(\alpha, \beta) = \big(\mathcal{A}(\alpha), \beta\big).$$

因此,对任意实数 k, l,$\mathcal{A}$都是V上的对称变换.

☞ 对称变换的线性组合是对称变换.

关于对称变换, 我们有如下刻画.

定理4.10.5

设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathcal{A} \in L(V)$. 则下列条件等价:

1. $\mathcal{A}$ 是对称变换;
2. $\mathcal{A}$ 在任意标准正交基下的矩阵为实对称阵;
3. $\mathcal{A}$ 在某一标准正交基下的矩阵为实对称阵.

证明 $(1) \Rightarrow (2)$. 设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的任一标准正交基, A 为 $\mathcal{A}$ 在这组标准正交基下的矩阵, 即

$$(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A.$$

则

$$\mathcal{A}(\varepsilon_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\varepsilon_k, \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

由 $\mathcal{A}$ 是对称变换有,

$$a_{ij} = (\varepsilon_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\varepsilon_k) = (\varepsilon_i, \mathcal{A}(\varepsilon_j)) = (\mathcal{A}(\varepsilon_i), \varepsilon_j) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\varepsilon_k, \varepsilon_j) = a_{ji},$$

$i, j = 1, 2, \cdots, n.$
因此,$A^T = A$,即 A 是实对称阵.

$(2) \Rightarrow (3)$. 显然.
$(3) \Rightarrow (1)$. 设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的一组标准正交基, $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵 A 为对称矩阵.
任取 $\alpha, \beta \in V$, 设 α, β 关于标准正交基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 的坐标分别为 X, Y.
则据定理 4.9.5 知 $\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta$ 关于该基的坐标分别为等于 AX, AY.
于是由定理6.7.6(2)及 A 是实对称阵得

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (AX)^T Y = X^T A^T Y = X^T (AY) = (\alpha, \mathcal{A}\beta).$$

因此 $\mathcal{A}$ 是对称变换.

$(2) \Rightarrow (3)$. 显然.

$(3) \Rightarrow (1)$. 设 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的一组标准正交基, $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵 A 为对称矩阵.

任取 $\alpha, \beta \in V$, 设 α, β 关于标准正交基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 的坐标分别为 X, Y.

则据定理 4.9.5 知 $\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta$ 关于该基的坐标分别为等于 AX, AY.

于是由定理6.7.6(2)及 A 是实对称阵得

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (AX)^T Y = X^T A^T Y = X^T (AY) = (\alpha, \mathcal{A}\beta).$$

因此 $\mathcal{A}$ 是对称变换.

☞ 与正交变换类似,对称变换在非标准正交基下的矩阵未必是实对称矩阵. 反过来,在非标准正交基下的矩阵是实对称阵的线性变换也未必是对称变换.

关于实对称矩阵的进一步讨论,将在第五、六章中进行.