□ 汤光宋

幂指函数求极限的定理

摘要 本文是文[8]的续篇，首先给出复合函数求极限的准则及其推论，推广了第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，得到一类指数待定型求极限的定理，进而借助罗比达法则，得到幂指数求极限的若干定理。直接应用此定理，使得求幂指函数的极限的过程大为简化，有的例题是对文献中有关数学竞赛、招考研究生试题的推广。

关键词 复合函数 极限 连续 幂指函数 两个重要极限 罗比达法则

一般的数学分析教材都没有给出复合函数求极限的准则（如文[1][2]），但在求极限过程中，特别是运用两个重要极限及应用罗比达法则求指数待定型的极限时，人们都不约而同地运用了这一准则及其推论，严格地说，这是"不行的"，因为没有理论依据。为此，我们先给出复合函数求极限的准则及其推论：

准则 若 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，$u=\psi(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\psi(x)]=A$.

证：∵ $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}u=u_0$ 即当 $x\to x_0$ 时，$u\to u_0$，

故 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\psi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

注 当 $x\to x_0$ 改为 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$ 时，由证明过程可知，准则的结论仍然成立。

推论 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to a}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=e$.

证 已知 $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$，设 $u=f(x)$，$\because \lim\limits_{x\to a} f(x)=0$，由准则知

$\lim\limits_{x\to a}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$.

定理1 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.(A>0, A\neq 1)$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=A^B$.

或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

证 设 $y=f(x)$，由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$(A>0, a\neq 1)$ 知 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to A$，且 $A>0, A\neq 1$.

故 $y=f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}=e^{g(x)\ln f(x)}$，在 $x=x_0$ 的某个去心邻域上成立。

又设 $u=f(x)$，而 $\ln u$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，由准则及连续定义知

$\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)=\lim\limits_{u\to A}\ln u=\ln A$，

又由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. 可推出 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)=B\ln A$.

再设 $Z=g(x)\ln f(x)$，则 $y=f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}=e^z$，

而 e^x 在 $Z\in R$ 上连续，则 $\lim\limits_{Z\to B\ln A} e^z=e^{B\ln A}$.

由准则知

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{Z\to B\ln A} e^z=e^{B\ln A}=e^{\ln A^B}=A^B.$$

注 显然推论及定理1对其他级限过程也成立(以下同)。

有上述的理论基础，下面定理的推导及例题的解法就有了理论依据。

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}\xlongequal{令\sqrt{x}=y}\lim\limits_{y\to 0^+}(\cos y)^{\frac{1}{y^2}}\xlongequal{变形}\lim\limits_{y\to 0^+}\{[1+(\cos y-1)]^{\frac{1}{\cos y-1}}\}^{\frac{\cos y-1}{y^2}}$

由推论知 $\lim\limits_{y\to 0^+}[1+(\cos y-1)]^{\frac{1}{\cos y-1}}=e$，而 $\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{\cos y-1}{y^2}=-\dfrac{1}{2}$

再依据定理1知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}\xlongequal{1^\infty}\{\lim\limits_{y\to 0^+}[1+(\cos y-1)]^{\frac{1}{\cos y-1}}\}^{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\cos y-1}{y^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

注 例1为文[5]第51页45，南京邮电学院1985年招考研究生的一道试题。

例2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n}(x+a_i)^{x+a_i}}{(x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^{nx+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}}$.

解 依据推论及定理1知

$$原式\xlongequal{变形}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a_1)^{x+a_1}}{(x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^{x+a_1}}\cdot\frac{(x+a_2)^{x+a_2}}{(x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^{x+a_2}}\cdots\frac{(x+a_n)^{x+a_n}}{(x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^{x+a_n}}$$

$$=\frac{1}{[\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{x+a_1})^{\frac{x+a_1}{a_2+a_3+\cdots+a_n}}]^{\lim\limits_{x\to+\infty}(a_2+a_3+\cdots+a_n)}}$$

$$\cdot\frac{1}{\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a_1+a_3+\cdots+a_n}{x+a_2}\right)^{\frac{x+a_2}{a_1+a_3+\cdots+a_n}}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}(a_1+a_3+\cdots+a_n)}}$$

$$\cdots\frac{1}{\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{x+a_n}\right)^{\frac{x+a_n}{a_1+a_2+\cdots a_{n-1}}}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}}$$

$$=e^{-(a_2+a_3+\cdots+a_n)}e^{-(a_1+a_3+\cdots+a_n)}\cdots e^{-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}$$

$$=e^{(1-n)\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}.$$

注　当此例的 $a_1=a, a_2=b, a_i=0(i=3,4,\cdots,n)$ 时，即为文[2]节 98 页的例 2.43，也就是求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$，可见这例是文[2]第 98 页例 2.43 的推广。

我们依据准则及推论，并应用罗比达法则，可得

定理 2　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，且 $f(x)-1$ 与 $\frac{1}{g(x)}$ 满足罗比达法则的条件，

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}\xlongequal{1^\infty}e^{-\lim\limits_{x\to x_0}g^2(x)\frac{f'(x)}{g'(x)}}$；或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}\xlongequal{1^\infty}e^{-\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)^2\frac{g'(x)}{f'(x)}}$.

证　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}\xlongequal{1^\infty}\{\lim\limits_{x\to x_0}[1+(f(x)-1]^{\frac{1}{f(x)-1}}\}^{[f(X)-1]g(x)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]g(x)}\xlongequal{0\cdot\infty}e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-1}{\frac{1}{g(x)}}}\xlongequal[\text{罗法}]{\frac{0}{0}}e^{-\lim\limits_{x\to x_0}g^2(x)\frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

用类似方法可证得另一形式。

例 3　设 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\psi(x_0)=0, \lim\limits_{x\to x_0}\psi'(x)=\psi'(x_0)\neq0, a_i、b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为正数，n、m 为自然数，当 $x>x_0$ 时，则极限

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{a_1^{b_1(x-x_0)}+a_2^{b_2(x-x_0)}+\cdots+a_n^{b_n(x-x_0)}}{n}\right)^{\frac{m}{\psi(x)}}=(a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n})^{\frac{m}{n\psi'(x_0)}}.$$

证　令 $f(x)=\frac{a_1^{b_1(x+x_0)}+a_2^{b_2(x-x_0)}+\cdots+a_n^{b_n(x-x_0)}}{n}, g(x)=\frac{m}{\psi(x)}$.

显然　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，且 $f(x)-1$ 与 $\frac{1}{g(x)}$ 满足罗比达法则的条件。

依据定理 2

$$\because\lim_{x\to x_0}\left[-\left[\frac{m}{\varphi(X)}\right]\right]^2\frac{a_1^{b_1(x-x_0)}b_1\ln a_1+a_2^{b_2(x-x_0)}b_2\ln a_2+\cdots+a_n^{b_n(x-x_0)}b_n\ln a_n}{-\frac{m\psi'(x)}{\psi^2(x)}}$$

$$=\frac{m}{n\psi'(x_0)}\ln a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}=\ln[a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}]^{\frac{m}{n\psi'(x_0)}}$$

$$\therefore\lim_{x\to x_0}\left(\frac{a_1^{b_1(x-x_0)}+a_2^{b_2(x-x_0)}+\cdots+a_n^{b_n(x-x_0)}}{n}\right)^{\frac{m}{\psi(x)}}$$

$$=e^{\ln(a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n})^{\frac{m}{n\psi'(x)}}}=(a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n})^{\frac{m}{n\psi'(x_0)}}.$$

注　当例 3 中的 $\psi(x)=\sin x, b_i=i(i=1,2,\cdots,n), m=2, x_0=0$ 时，有

$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^2x+\cdots+a_n^{nx}}{n}\right)^{\frac{2}{\sin x}}=(a_1a_2^2\cdots a^n)^{\frac{2}{n}}$. 此即为文[3]第 97 页(9)题。

当例 3 中的 $\psi(x)=x, b_i=1, (i=1,2,\cdots,n), m=1, x_0=0$，有

$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n})^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

这即为文[2]第99页例2·44,文[4]第30页例7.(2).

特别有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_1^{\frac{1}{n}}+a_2^{\frac{1}{n}}+\cdots+a_m^{\frac{1}{n}}}{m})^n=(a_1a_2\cdots a_m)^{\frac{1}{m}}$ 这即为文[3]节76页例16。

当例3中的 $\psi(x)=x, a_i=3^{i-1}, b_i=1(i=1,2,\cdots,n), m=1, x_0=0$ 时,即有

$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1^x+3^x+9^x+\cdots(3^{n-1})^x}{n}]^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{n-1}{2}}$. 此处 $n=3$ 时,即为文[2]第126页10题127。

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}\xlongequal[\text{定理2}]{1^\infty}e^{-\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2})^2\frac{(\frac{\sin x}{x})'}{(\frac{1}{x^2})'}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}\xlongequal[\text{罗法}]{\frac{0}{0}}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{6x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

注 本例为文[5]第49页42,大连铁道学院1980年招考研究生的一道试题。

仿照定理2的证明方法可得

定理3 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, 且 $\ln f(x)$ 与 $\frac{1}{g(x)}$ 满足罗比达法则的条件,

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}\xlongequal{\infty^0}e^{-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g^2(x)}{f(x)}\cdot\frac{f'(x)}{g'(x)}}$.

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}\xlongequal[\text{定理3}]{\infty^0}e^{-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\ln^2 x}}{\operatorname{ctg}x}\cdot\frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

注 该例为文[2]第97页例2.40.

定理4 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ 且 $\ln f(x)$ 与 $\frac{1}{g(x)}$ 满足罗比达法则的条件,则

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}\xlongequal{0^0}e^{-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g^2(x)}{f(x)}\cdot\frac{f'(x)}{g'(x)}}$.

例6 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}\xlongequal[\text{定理4}]{\frac{0}{0}}e^{-\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{\ln^2 x}}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}}}$

$=e^{-\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}}\xlongequal[\text{罗法}]{\frac{0}{0}}e^{-\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}}$

$=e^{-\lim\limits_{x\to +\infty}(1-\frac{2}{1+x^2})}=e^{-1}$.

注 该例为文[7]第102例3-8(1)。

定理4' 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ 且 $\ln f(x)$ 与 $\frac{1}{g(x)}$ 满足罗比达法则的条件,又 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$(或 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{f'(x)}$)存在(不为0或∞),则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=1$.

证 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}\xlongequal[\text{定理4}]{0^0}e^{-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g^2(x)}{f(x)}\cdot\frac{f'(x)}{g'(x)}}\xlongequal[\text{罗法}]{\frac{0}{0}}e^{-2\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\frac{g'(x)}{f'(x)}}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$=e^{-2\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f'(x)}{g'(x)}}=e^{-2\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=e^0=1.$$

例7 求(1)$\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$;(2)$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$;(3)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

解(1) $\because \lim\limits_{x\to0^+}\frac{(\sin x)'}{(\operatorname{tg}x)'}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x}{\frac{1}{\cos^2x}}=1.\ \therefore \lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{定理}4'}{=\!=\!=}}1$。

(2) $\because \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\cos x}=1,\ \therefore \lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=1.$

(3) $\because \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{(\cos x)'}{(\frac{\pi}{2}-x)'}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{-\sin x}{-1}=1,\ \therefore \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}=1.$

注 这例(1)是文[2]第97页例2.41,(2)、(3)是文[6]第129～130页的(21)、(22)。无需像文[2]及文[6]对这类题费了很大力气,花了很长篇幅作了繁琐的运算才得到答案,其实应用定理4'可直接写出统一的答案1,真是简单,妙极了!

参考文献

[1]刘玉琏、傅沛仁编·数学分析讲义·(上册)人民教育出版社,1986

[2]陈文灯等编著·高等数学复习指导。(上册)北京理工大学出版社,1992

[3]沈永欢主编.高等数.高等教育出版社,1990

[4]蔡燧清等编著.高等数学竞赛指南.北京理工大学出版社,1992

[5]王寿生等编著。130所高校研究生高等数学入学试题选解及分析。辽宁科学技术出版社,1988

[6]高汝熹主编。《高等数学(一)》习题解答与辅导,教育科学出版社,1992

[7]陈方年、李新华、梁劲鸣、汤光宋主编,高等数学达标测试题集。武汉工业大学出版社.1992

[8]汤光宋。几道研究生入学数学试题的推广.安顺师专学报.1992年第3、4期合刊,63～69