高等教育自学考试计算机及应用专业(独立本科段)自学辅导丛书

# 离散数学自学辅导

邵学才　主编
邓米克　蒋强荣　沈彤英　等编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内　容　简　介

离散数学具有"内容广泛,理论抽象"的特点。本书前 5 章以简洁的语言讲述了数理逻辑、集合(关系与函数)、代数结构和图论等内容,力求做到深入浅出、易学易懂;第 6 章是复习应试指南,对全书知识进行系统归纳;第 7 章是模拟试题和参考答案。

本书内容厚实,不仅提供了大量的例题和自测练习,而且还详尽地介绍了离散数学自学考试大纲中所规定的课程内容。本书既可作为应试人员的辅导教材,也可作为各类函授大学、成人教育、高等职业教育等离散数学课程的教材。



图书在版编目(CIP)数据

离散数学自学辅导/ 邓米克,蒋强荣,沈彤英等编著 . —北京:清华大学出版社,2002
(高等教育自学考试计算机及应用专业(独立本科段)自学辅导丛书/ 邵学才主编)
ISBN 7-302-05700-1

Ⅰ .离… Ⅱ .①邓… ②蒋… ③沈… Ⅲ .离散数学 - 高等教育 - 自学考试 - 自学参考资料 Ⅳ .O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 056283 号

出 版 者: 清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)
　　　　　http:// www .tup .tsinghua .edu .cn
责任编辑: 刘彤
印 刷 者: 北京四季青印刷厂
发 行 者: 新华书店总店北京发行所
开　　本: 787×1092 1/ 16　印张: 20 .75　字数: 480 千字
版　　次: 2002 年 11 月第 1 版　2002 年 11 月第 1 次印刷
书　　号: ISBN 7-302-05700-1/ TP · 3360
印　　数: 0001～5000
定　　价: 31 .00 元

# 第 1 章　命 题 逻 辑

命题逻辑和谓词逻辑(见第 2 章) 是数理逻辑的基本内容。

数理逻辑是一门用数学方法研究形式逻辑推理理论的学科。所谓数学方法主要是指引进一套符号体系的方法,所以数理逻辑也称作符号逻辑。

日常生活中使用的语言称为自然语言,由于自然语言具有多义性,因此对于严格的逻辑推理,使用自然语言是极不方便的,需要引入一种具有单一、明确含义的形式化语言,这种形式化语言在数理逻辑中称为目标语言。初学者在学习数理逻辑时,应当注意目标语言和自然语言之间的差异。

本章主要介绍命题逻辑的基本内容: 命题和联结词,真值表和逻辑等价,蕴含式和推理理论,命题公式和范式。

按“离散数学自学考试大纲”的要求,命题和联结词要求达到“领会”层次;命题公式的等价变换和命题公式的形式化描述,范式和主范式,蕴含式和推理理论都要求达到“简单应用”层次。关于“领会”、“简单应用”等层次的解释请参阅本书前言。

## 1.1　命题和联结词

### 1.1.1　命题和命题变元

一个具有确定真、假意义的陈述句称为命题。命题可赋一个值,称为真值。真值只取“真”和“假”两种,分别记作 1(或 $T$) 和 0(或 $F$)。例如:

(1) 中华人民共和国的首都是北京。

(2) $3 + 5 < 2$。

(3) 太阳比月亮大。

(4) 雪是黑色的。

(5) 我是个大学生。

这些陈述句都是命题,其中命题(1) 和(3) 的真值为 1(也称为真命题);命题(2) 和(4) 的真值为 0(也称为假命题);命题(5) 的真值则由“我”的情况而定,但它必定有一个确定的真值。

但也有一些语句,如某些感叹句、祈使句、疑问句等,往往没有真假之分,这类语句都不是命题。例如:

(1) 明天开会吗?

(2) 全体立正!

(3) 多美妙啊!

(4) 太可爱了!

(5) 请进来。

为了便于对命题作一般性的讨论,常用大写的英文字母表示任意命题,并称为命题变元。由于命题变元表示任意命题,所以它的真值尚没有被确定,只有当命题变元用一个具体的命题"替代"后,它才有确定的真值。例如,用 $P$ 表示任意命题,则 $P$ 是命题变元,$P$ 没有确定的真值。当 $P$ 用具体的命题,如:"中华人民共和国首都是北京"替代后,$P$ 就表示命题:中华人民共和国首都是北京。这时 $P$ 有确定的真值 1,并称 $P$ 为命题常量。用一个具体命题"替代"命题变元,也称为对命题变元进行指派。

## 1.1.2 命题联结词

在自然语言中,常用"并且"、"或者"等联结词把简单语句联结起来,从而可表达更复杂的含义。在数理逻辑中也有命题的联结词,但它具有严格的定义,并且被符号化。

**1.否定**

**定义 1.1.1** 设 $P$ 为命题,$P$ 的否定也是一个命题,记作 $\neg P$。当 $P$ 的真值为 1 时,$\neg P$ 的真值为 0;当 $P$ 的真值为 0 时,$\neg P$ 的真值为 1。

命题 $P$ 与其否定 $\neg P$ 的关系如表 1.1 所示。

表 1.1

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

例如

$P$:2 是个偶数。

$\neg P$:2 不是偶数。

又如

$Q$:教室里都是大学生。

$\neg Q$:教室里不都是大学生。

请注意,$\neg Q$ 不能理解为:教室里都不是大学生。

**2.合取**

**定义 1.1.2** 设 $P$、$Q$ 是命题,$P$ 和 $Q$ 的合取也是命题,记作 $P \wedge Q$。当且仅当 $P$、$Q$ 的真值同时为 1 时,$P \wedge Q$ 的真值为 1;其他情况下,$P \wedge Q$ 的真值为 0。

联结词"合取"的定义如表 1.2 所示。

表 1.2

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

例如

$P$:王胜是个男人。

$Q$:王胜是个运动员。

上述命题的合取为

$P \wedge Q$:王胜是个男人并且是运动员。即 $P \wedge Q$:王胜是个男运动员。

显然,只有当"王胜是个男人"和"王胜是个运动员"都为真时,"王胜是个男运动员"才为真。其他情况此命题为假。

联结词"合取"与自然语言中的"并且"、"和"、"与"的意义相似,但也不完全相同。

例如,张静和张绍昆是好朋友。这里的"和"就不是"合取"的意义,实际上它只是一个命题。

又如设

$P$:我去上海探亲。

$Q$:教室里有一块黑板。

上述命题的合取是:

$P \wedge Q$:我去上海探亲和教室里有一块黑板。

在自然语言中,上述命题是没有意义的,因为 $P$ 和 $Q$ 没有什么联系。但在数理逻辑中,只要 $P \wedge Q$ 有确定的真值,就把 $P \wedge Q$ 视为命题。

3 .析取

**定义 1 .1 .3** 设 $P$、$Q$ 是命题,$P$ 和 $Q$ 的析取也是命题,记作 $P \vee Q$。当且仅当 $P$ 和 $Q$ 的真值同时为 0 时,$P \vee Q$ 的真值才为 0;其他情况下,$P \vee Q$ 的真值都为 1。

联结词"析取"的定义如表 1 .3 所示。

表 1 .3

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

例如

$P$:张恩是跳远冠军。

$Q$:张恩是百米跑冠军。

上述命题的析取为:

$P \vee Q$:张恩是跳远冠军或百米跑冠军。

显然,只有当"张恩是跳远冠军"和"张恩是百米跑冠军"都为假时,"张恩是跳远冠军或百米跑冠军"才是假的,其他情况它都是真的。

同样,析取的概念和自然语言中的"或"也不完全相同。例如,设命题

$R$:今晚 9 点,北京电视 1 台播放电视剧"贫嘴张大民的幸福生活"或转播足球比赛。

如果令

$P$:今晚 9 点,北京电视 1 台播放电视剧"贫嘴张大民的幸福生活"。

$Q$:今晚 9 点,北京电视 1 台转播足球比赛。

那么命题 $R$ 不能表示为 $P \vee Q$。因为由析取的定义可知,当 $P$ 和 $Q$ 的真值都为 1 时,$P \vee Q$ 的真值也为 1。但在这个例子中,当 $P$ 和 $Q$ 的真值都为 1 时,实际上是不可能的,因为在同一时刻,北京电视 1 台不可能既播放电视剧又转播足球比赛。所以当 $P$ 和 $Q$ 的真值都为 1 时,$R$ 的真值为 0。

通常把本例命题 $R$ 中的"或"称为"排斥或",把表示析取的"或"称为"兼并或"。

4 .排斥析取

**定义 1 .1 .4** 设 $P$、$Q$ 是命题,$P$ 和 $Q$ 的排斥析取也是命题,记作 $P \overline{\vee} Q$。当且仅当 $P$ 和 $Q$ 的真值不相同时,$P \overline{\vee} Q$ 的真值才为 1;其他情况下,$P \overline{\vee} Q$ 的真值为 0。

联结词"排斥析取"的定义如表 1 .4 所示。

表 1 .4

| $P$ | $Q$ | $P \overline{\vee} Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

例如,下列命题中的"或"都是"排斥或":

我在家看电视或去剧场看戏。

选小王或小李中的一人去上海出差。

有些教科书没有给出排斥析取的定义,此时可用 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 来替代 $P \overline{\vee} Q$。

**5 .条件**

**定义 1 .1 .5** 设 $P$、$Q$是命题，$P$对于$Q$的条件命题记作 $P \quad Q$。当且仅当 $P$的真值为 1 且 $Q$的真值为 0 时，$P \quad Q$的真值才为 0；其他情况，$P \quad Q$的真值都为 1。

条件命题的定义如表 1 .5 所示。

条件命题 $P \quad Q$，可读作“若 $P$则 $Q$”。并称 $P$为前件，$Q$为后件。

表 1 .5

| $P$ | $Q$ | $P \quad Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

例如

$P$：我考上大学。

$Q$：我努力学习。

$P \quad Q$：如果我考上大学，那么我努力学习。

又如

$P$：今天下雨。

$Q$：我坐公共汽车去上班。

$P \quad Q$：如果今天下雨，那么我坐公共汽车去上班。

条件命题 $P \quad Q$可以用“若 $P$则 $Q$”来描述，但当前件 $P$为假时，这个命题往往无法判断真假，在数理逻辑中规定，当前件 $P$为假时，$P \quad Q$为真。

很多书中，把 $P \quad Q$称为“$P$蕴含 $Q$”。但本书没有采用这种说法，在本书中“蕴含”将另有含义。

**6 .双条件**

**定义 1 .1 .6** 设 $P$、$Q$是命题，其双条件命题记作 $P \rightleftarrows Q$，读作“$P$当且仅当 $Q$”，当 $P$和 $Q$的真值相同时，$P \rightleftarrows Q$的真值为 1；当 $P$和 $Q$的真值不相同时，$P \rightleftarrows Q$的真值为 0。

双条件命题的定义如表 1 .6 所示。

表 1 .6

| $P$ | $Q$ | $P \rightleftarrows Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

例如

$P$：三角形是正三角形。

$Q$：三角形中三条边相等。

$P \rightleftarrows Q$：三角形是正三角形当且仅当三角形中三条边相等。

命题联结词可以把一些简单的命题组合成复杂的命题。通常把不含任何联结词的命题称为原子命题，由原子命题和联结词组成的命题称为复合命题。例如，$P$，$Q$，$R$都是原子命题，则 $P \vee \neg Q$，$\neg P \quad Q$，$P \rightleftarrows (Q \vee R)$，$(P \quad Q) \wedge R$等都是复合命题。

同样，由命题变元和联结词组成的复杂的命题变元称为“命题公式”或“合式公式”，命题公式中的命题变元（如 $P$、$Q$、$R$等）称为命题公式的分量。

由命题变元、联结词和一些括号组成的字符串并不都是命题公式，如$\neg \vee P \quad \wedge$就不是命题公式，所以有如下定义。

**定义 1 .1 .7** 命题逻辑中的命题公式（或称合式公式）规定为：

(1) 命题变元和命题常量是命题公式。

(2) 如果 $A$是命题公式，则$(\neg A)$是命题公式。

(3) 如果 $A$和 $B$是命题公式，则$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \overline{\vee} B)$，$(A \quad B)$，$(A \rightleftarrows B)$是命

题公式。

(4) 只有有限次使用上面 3 条规则得到的字符串才是命题公式。

通常把命题公式的最外层括号省略,并规定联结词的优先级为: $\neg$; $\wedge$, $\vee$, $\overline{\vee}$; ,$\rightleftarrows$。

### 1.1.3 重点和难点分析

本节的重点是:充分理解命题联结词的定义,能熟练地把复合命题符号化。

本节的难点是:正确地把复合命题符号化。

**例 1.1** 说明下列语句中哪些是命题?

(1) 我是京剧演员。

(2) 天气多好啊!

(3) $5 > 3$

(4) 计算机有空吗?

(5) 我去杭州出差。

解 其中(1),(3),(5) 是命题。

**例 1.2** 求下列命题的真值。

(1) 如果 2 是奇数,则 $2 + 2 \neq 4$。

(2) 如果 2 是奇数,则 $2 + 2 = 4$。

(3) 太阳从东方升起当且仅当 2 是素数。

解 如果令

$P$:2 是奇数。

$Q$: $2 + 2 = 4$。

(1) 题设即为 $P \quad Q$,由于命题 $P$的真值为0,由条件命题的定义可知,$P \quad Q$的真值为1。

(2) 题设条件为 $P \quad \neg Q$,同样由于命题 $P$ 的真值为 0,所以 $P \quad \neg Q$的真值为 1。

(3) 如果令

$P$:太阳从东方升起。

$Q$:2 是素数。

题设命题即为 $P \rightleftarrows Q$,由于 $P$ 和 $Q$ 的真值都为 1,所以 $P \rightleftarrows Q$ 的真值为 1。

**例 1.3** 将下列命题符号化。

(1) 梁冠华虽然胖,但他是位优秀的表演艺术家。

(2) 如果我有钱,那么我到上海去探亲。

(3) 如果不下雪,我去看足球比赛,否则我不去看足球比赛。

(4) 如果不下雪,我去看足球比赛,否则我在家看电视。

(5) 我坐公共汽车去上班,当且仅当下雨或者刮大风。

解 (1) 如果令

$P$:梁冠华很胖。

$Q$:梁冠华是优秀的表演艺术家。

则题设命题可符号化为: $P \wedge Q$。

(2) 如果令

$P$:我有钱。

$Q$:我到上海探亲。

则题设命题可符号化为:$P \quad Q$。

(3) 如果令

$P$:不下雪。

$Q$:我去看足球比赛。

则题设命题可符号化为:$P \rightleftarrows Q$。

(4) 如果令

$P$:不下雪。

$Q$:我去看足球比赛。

$R$:我在家看电视。

由于命题"如果不下雪,我去看足球比赛,否则我在家看电视。"可同义地改述为:"如果不下雪,我去看足球比赛,否则我不去看足球比赛。"和"如果下雪,我在家看电视,否则我不在家看电视"。所以题设命题符号化为:$(P \rightleftarrows Q) \wedge (\neg P \rightleftarrows R)$。

(5) 如果令

$P$:我坐公共汽车去上班。

$Q$:下雨。

$R$:刮大风。

则题设命题符号化为:$P \rightleftarrows (Q \vee R)$。

**例 1.4** 如果 $P, Q, R$ 的意义如下:

$P$:小李是研究生。

$Q$:小李获得奖学金。

$R$:小李放声歌唱。

请用日常语言叙述以下命题:

(1) $P \wedge (Q \quad R)$

(2) $P \wedge (\neg Q \quad \neg R)$

(3) $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$

解 (1) 小李是研究生,如果他获得奖学金,那么他放声歌唱。

(2) 小李是研究生,如果他没有获得奖学金,那么他不放声歌唱。

(3) 小李不是研究生,也没有获得奖学金,但他放声歌唱。

### 1.1.4 自测练习

1.指出下列语句中哪些是命题?

(1) 老虎是动物。

(2) 请勿喧哗!

(3) 有些实数是有理数。

(4) 素数都是奇数。

(5) 太不可思议了!

(6) 我考试得满分。

(7) 明天开会吗?

(8) 保定市在河北省内。

2 .判断下列命题的真值。

(1) 如果 $1 + 1 = 2$,则 $2 + 2 = 4$。

(2) 如果 $1 + 1 = 2$,则 $2 + 2 \neq 4$。

(3) 如果 3 是偶数,则 5 是奇数。

(4) 如果 5 是偶数,则 $2 + 3 = 8$。

3 .写出下列命题的否定。

(1) 上海是个大城市。

(2) 每个奇数都是素数。

(3) 我吃面包或面条。

(4) 我爱游泳,也爱跑步。

4 .设

$P$:我酷爱体育运动。

$Q$:我身体健康。

$R$:我很快乐。

请将下列命题符号化。

(1) 虽然我身体不健康,但我很快乐。

(2) 如果我身体健康,那么我很快乐。

(3) 我身体健康,当且仅当我酷爱体育运动。

5 .请将下列命题符号化。

(1) 我美丽而又快乐。

(2) 如果我快乐,那么天就下雨。

(3) 电灯不亮,原因仅有两个:灯泡坏了或开关发生故障。

(4) 仅当你去,我才留下。

6 .如果令

$P$:今天下雪。

$Q$:今天刮大风。

$R$:我去看越剧。

$S$:我在家看电视。

请用日常语言叙述下列命题:

(1) $P \wedge \neg Q$

(2) $(\neg P \wedge \neg Q) \quad R$

(3) $(\neg P \rightleftarrows R) \wedge (P \rightleftarrows S)$

(4) $S \quad (P \wedge Q)$

### 1.1.5　自测练习答案

1.(1),(3),(4),(6),(8) 是命题。

2.(1) 真值为 1。

(2) 真值为 0。

(3) 真值为 1。

(4) 真值为 1。

3.(1) 上海不是个大城市。

(2) 并非每个奇数都是素数。

(3) 我不吃面包和面条。

(4) 我不爱游泳或跑步。

4.(1) $\neg Q \wedge R$

(2) $Q \quad R$

(3) $P \rightleftarrows Q$

5.(1) 如果令

$P$:我美丽。

$Q$:我快乐。

那么命题“我美丽而又快乐”符号化为:$P \wedge Q$。

(2) 如果令

$P$:我快乐。

$Q$:下雨。

那么命题“如果我快乐,那么就下雨”符号化为:$P \quad Q$。

(3) 如果令

$P$:电灯不亮。

$Q$:灯泡坏了。

$R$:开关发生故障。

那么命题“电灯不亮,原因仅有两个:灯泡坏了或开关发生故障”符号化为:$P \rightleftarrows (Q \vee R)$。

6.(1) 今天下雪但没刮大风。

(2) 如果今天不下雪也不刮大风,那么我去看越剧。

(3) 如果今天不下雪,那么我去看越剧,否则我在家看电视。

(4) 如果我在家看电视,那么今天下雪并且刮大风。

## 1.2　真值表和逻辑等价

### 1.2.1　命题公式的真值表

**定义 1.2.1**　设 $P$ 为命题公式,$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 为出现在 $P$ 中的所有命题变元(即 $P$ 的

分量),对 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 指定一组真值称为对命题公式 $P$ 的一种指派。若指定的一种指派,使命题公式 $P$ 的真值为 1,则称这组真值为成真指派;若指定的一种指派,使命题公式 $P$ 的真值为 0,则称这组真值为成假指派。

例如,在命题公式 $P \wedge (Q \quad R)$ 中,若对分量 $P, Q, R$ 分别取真值为:1,0,1,则命题公式 $P \wedge (Q \quad R)$ 的真值为1,所以1,0,1是成真指派。若对分量 $P, Q, R$ 分别取真值为:0,1,1,则命题公式 $P \wedge (Q \quad R)$ 的真值为 0,所以 0,1,1 是成假指派。

**定义 1.2.2** 在命题公式中,将各分量的所有可能的指派以及由此确定的命题公式的真值汇列成表,称为命题公式的真值表。

例如,$\neg P \vee Q$ 的真值表如表 1.7 所示。

又如,$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ 的真值表如表 1.8 所示。

表 1.7

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg P \vee Q$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

表 1.8

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg P \wedge Q$ | $\neg Q$ | $P \wedge \neg Q$ | $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

再如,$\neg P \wedge (Q \quad R)$ 的真值表如表 1.9 所示。

表 1.9

| $P$ | $Q$ | $R$ | $\neg P$ | $Q \quad R$ | $\neg P \wedge (Q \quad R)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

易见,在真值表中,命题公式真值的取值数目决定于分量的个数。由两个命题变元组成的命题公式共有 4 种不同的指派;由 3 个命题变元组成的命题公式共有 8 种不同的指派。一般地讲,由 $n$ 个命题变元组成的命题公式共有 $2^n$ 种不同的指派。

**定义 1.2.3** 在命题公式的真值表中,对于分量的所有不同的指派,命题公式的真值都为 1,则称此命题公式为永真式或重言式。

例如,$\neg P \vee P$ 是永真式。

又如,命题公式$(P \wedge Q) \quad P$的真值表如表 1.10 所示。

由表 1.10 可知,$(P \wedge Q) \quad P$ 是永真式。

表 1.10

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $(P \wedge Q) \quad P$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**定义 1.2.4** 在命题公式的真值表中,对于分量的所有不同的指派,命题公式的真值都为 0,则称此命题公式为永假式或矛盾式。

例如,$\neg P \wedge P$ 是永假式。

又如,命题公式$\neg(Q \quad P) \wedge P$ 的真值表如表 1.11 所示。

表 1.11

| $P$ | $Q$ | $Q \quad P$ | $\neg(Q \quad P)$ | $\neg(Q \quad P) \wedge P$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

由表 1.11 可知,$\neg(Q \quad P) \wedge P$ 是永假式。

**定义 1.2.5** 在命题公式的真值表中,存在着分量的一种指派,使得命题公式的真值为 1,则称此命题公式是可满足式。

例如,$\neg P \vee Q$,$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$,$\neg P \wedge (Q \quad R)$ 都是可满足式(见表 1.7,表 1.8,表 1.9)。

显然,永真式也是一种可满足式。

## 1.2.2 逻辑等价

**定义 1.2.6** 在真值表中,命题公式 $A$ 和 $B$ 在分量的不同指派下,其真值总是相同的,则称这两个命题公式 $A$ 和 $B$ 是逻辑等价的,记作 $A \quad B$。

例如,命题公式 $P \quad Q$ 和$\neg P \vee Q$ 的真值表如表 1.12 所示。

表 1.12

| $P$ | $Q$ | $P \quad Q$ | $\neg P \vee Q$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

表 1.13

| $P$ | $Q$ | $P \quad Q$ | $Q \quad P$ | $(P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$ | $P \rightleftarrows Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

由表 1.12 可知,$P \quad Q \quad \neg P \vee Q$。

又如,命题公式 $P \rightleftarrows Q$ 和$(P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$ 的真值表如表 1.13 所示。

由表 1 .13 可知, $P \rightleftarrows Q \quad (P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$。

下面列出一些常用的逻辑等价式,读者可用真值表验证。

$\neg\neg P \quad P$ (对合律)

$(P \vee Q) \vee R \quad P \vee (Q \vee R)$ (结合律)

$(P \wedge Q) \wedge R \quad P \wedge (Q \wedge R)$

$P \vee Q \quad Q \vee P$ (交换律)

$P \wedge Q \quad Q \wedge P$

$P \vee (Q \wedge R) \quad (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (分配律)

$P \wedge (Q \vee R) \quad (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (P \wedge Q) \quad P$ (吸收律)

$P \wedge (P \vee Q) \quad P$

$\neg(P \vee Q) \quad \neg P \wedge \neg Q$ (摩根律)

$\neg(P \wedge Q) \quad \neg P \vee \neg Q$

$P \vee 0 \quad P$ (同一律)

$P \wedge 1 \quad P$

$P \vee 1 \quad 1$ (零　律)

$P \wedge 0 \quad 0$

$P \vee \neg P \quad 1$ (否定律)

$P \wedge \neg P \quad 0$

其中“1”为永真式,“0”为永假式。

要证明两个命题公式是逻辑等价的, 不仅可以用真值表法, 还可以通过“演算”来证明。为此先介绍代换规则。

**定义 1 .2 .7**　设 $P$ 和 $Q$ 都是命题公式, 且 $P$ 是 $Q$ 中的一部分, 则称 $P$ 为 $Q$ 的子式。

**定理 1 .2 .1**　设命题公式 $A$ 和 $B$ 逻辑等价, 即 $A \quad B$, 如果 $A$ 是命题公式 $C$ 的子式, 在 $C$ 中出现 $A$ 的地方用 $B$ 代换后(不一定每一处) 得到命题公式 $D$, 则 $C \quad D$。

上述定理称为代换规则。

例如, 证明 $\neg Q \wedge (P \quad Q) \quad \neg(Q \vee P)$。

证明　利用真值表已证得: $P \quad Q \quad \neg P \vee Q$, 再利用代换规则可得:

$$
\begin{aligned}
\neg Q \wedge (P \quad Q) \quad & \neg Q \wedge (\neg P \vee Q) \\
& (\neg Q \wedge \neg P) \vee (\neg Q \wedge Q) && \text{(分配律)} \\
& (\neg Q \wedge \neg P) \vee 0 && \text{(否定律)} \\
& \neg Q \wedge \neg P && \text{(同一律)} \\
& \neg(Q \vee P) && \text{(摩根律)}
\end{aligned}
$$

又如, 证明 $\neg(P \rightleftarrows Q) \quad (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$。

证明　由真值表已证得: $P \rightleftarrows Q \quad (P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$, 所以

$$
\begin{aligned}
\neg(P \rightleftarrows Q) \quad & \neg((P \quad Q) \wedge (Q \quad P)) \\
& \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))
\end{aligned}
$$

$\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)$ （摩根律）

$(\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg Q \wedge \neg P)$ （摩根律）

$(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$ （对合律）

### 1.2.3 重点和难点分析

**本节重点是：熟练掌握用真值表法和常用逻辑等价式证明更复杂的逻辑等价式。**

**本节难点是：熟练运用常用公式证明逻辑等价式。**

**例 1.5 利用真值表证明下列逻辑等价式。**

(1) $P \rightleftarrows Q \quad (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

(2) $\neg(P \rightleftarrows Q) \quad (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

(3) $P \wedge (P \quad Q) \quad P \wedge Q$

**证明** (1) $P \rightleftarrows Q$ **和** $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ **的真值表如表** 1.14 **所示。**

**表 1.14**

| $P$ | $Q$ | $\neg P \vee Q$ | $\neg Q \vee P$ | $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ | $P \rightleftarrows Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**由真值表可知**，$P \rightleftarrows Q \quad (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$。

(2) $\neg(P \rightleftarrows Q)$ **和** $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ **的真值表如表** 1.15 **所示。**

**表 1.15**

| $P$ | $Q$ | $P \wedge \neg Q$ | $\neg P \wedge Q$ | $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ | $\neg(P \rightleftarrows Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**由真值表可知**：$\neg(P \rightleftarrows Q) \quad (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$。

(3) $P \wedge (P \quad Q)$ **和** $P \wedge Q$ **的真值表如表** 1.16 **所示。**

**表 1.16**

| $P$ | $Q$ | $P \quad Q$ | $P \wedge (P \quad Q)$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

由真值表可知: $P \wedge (P \quad Q) \quad P \wedge Q$。

**例 1.6** 利用 $P \rightleftarrows Q \quad (P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$ 证明下列等价式。

(1) $P \rightleftarrows Q \quad (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

(2) $P \rightleftarrows Q \quad (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

(3) $\neg (P \rightleftarrows Q) \quad (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

(4) $\neg (P \rightleftarrows Q) \quad (\neg P \rightleftarrows Q)$

(5) $\neg (P \rightleftarrows Q) \quad (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

**证明** (1) 因为 $P \quad Q \quad \neg P \vee Q, Q \quad P \quad \neg Q \vee P$。所以

$$P \rightleftarrows Q \quad (P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$$
$$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$$

(2) $P \rightleftarrows Q \quad (P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$

$$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$$
$$((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge P)$$
$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)$$
$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee 0 \vee 0 \vee (Q \wedge P)$$
$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

(3) $\neg (P \rightleftarrows Q) \quad \neg ((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q))$ (见(1))

$$\neg (\neg P \vee Q) \vee \neg (P \vee \neg Q)$$
$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

(4) $\neg (P \rightleftarrows Q) \quad (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q))$ (见(3))

$$(\neg P \wedge Q) \vee (\neg\neg P \wedge \neg Q)$$
$(\neg P \rightleftarrows Q)$ (见(2))

(5) $\neg (P \rightleftarrows Q) \quad (\neg P \rightleftarrows Q)$ (见(4))

$(\neg\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ (见(1))

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

**例 1.7** 证明下列逻辑等价式。

(1) $((A \wedge B) \quad C) \wedge (B \quad (D \vee C)) \quad (B \wedge (D \quad A)) \quad C$

(2) $((A \wedge B \wedge C) \quad D) \wedge (C \quad (A \vee B \vee D)) \quad (C \wedge (A \rightleftarrows B)) \quad D$

**证明** (1) 由于左式

$$((A \wedge B) \quad C) \wedge (B \quad (D \vee C)) \quad (\neg (A \wedge B) \vee C) \wedge (\neg B \vee D \vee C)$$
$$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee D \vee C)$$
$$(\neg B \vee C) \vee (\neg A \wedge D)$$
$$\neg B \vee (\neg A \wedge D) \vee C$$
$$\neg\neg (\neg B \vee (\neg A \wedge D)) \vee C$$

$$\neg(B \wedge \neg(\neg A \wedge D)) \vee C$$
$$\neg(B \wedge A \vee \neg D) \vee C$$
$$\neg(B \wedge (D \quad A)) \vee C$$
$$(B \wedge (D \quad A)) \quad C$$

(2) **左式** $(\neg(A \wedge B \wedge C) \vee D) \wedge (\neg C \vee A \vee B \vee D)$

$$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg C \vee A \vee B \vee D)$$
$$(\neg C \vee D) \vee ((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B))$$
$$(\neg C \vee D) \vee \neg(A \rightleftarrows B) \qquad \text{(见例 2(5))}$$
$$\neg C \vee \neg(A \rightleftarrows B) \vee D$$
$$\neg(C \wedge (A \rightleftarrows B)) \vee D$$
$$(C \wedge (A \rightleftarrows B)) \quad D$$

## 1.2.4 自测练习

1 .**写出下列命题公式的真值表。**

(1) $(P \vee Q) \quad P$

(2) $(P \vee Q) \wedge (P \quad Q)$

(3) $(P \wedge Q) \rightleftarrows (P \vee Q)$

(4) $(P \quad Q) \wedge (Q \quad R)$

2 .**利用真值表证明下列等价式。**

(1) $P \rightleftarrows Q \quad \neg(P \overline{\vee} Q)$

(2) $P \overline{\vee} Q \quad (P \quad \neg Q) \wedge (\neg Q \quad P)$

3 .**证明下列等价式。**

(1) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \quad P$

(2) $Q \quad (P \vee (P \wedge Q)) \quad Q \quad P$

(3) $P \quad (P \quad Q) \quad P \quad Q$

(4) $A \quad (B \vee C) \quad (A \wedge \neg B) \quad C$

(5) $(P \quad Q) \vee (P \quad R) \quad P \quad (Q \vee R)$

(6) $\neg(P \rightleftarrows (Q \quad (R \vee P))) \quad \neg P \wedge \neg(Q \wedge \neg R)$

(7) $(P \quad R) \wedge (Q \quad R) \quad (P \vee Q) \quad R$

(8) $(Q \quad P) \wedge (Q \rightleftarrows R) \wedge R \quad P \wedge Q \wedge R$

4 .**证明下列命题公式为永真式。**

(1) $(P \wedge Q \quad P) \wedge (P \vee \neg P)$

(2) $P \quad (P \vee Q)$

(3) $\neg P \quad (P \quad Q)$

(4) $(P \quad (P \vee Q)) \wedge (\neg P \quad (P \quad Q))$

(5) $(P \wedge (P \quad Q)) \quad Q$

(6) $((P \quad Q) \wedge (Q \quad R)) \quad (P \quad R)$

5 .**利用真值表证明**:

(1) **析取运算满足结合律。**

(2) **合取运算满足结合律。**

(3) **合取对析取满足分配律。**

(4) **析取对合取满足分配律。**

(5) **摩根律。**

## 1 .2 .5 自测练习答案

1 .(1) $(P \vee Q) \quad P$ **的真值表如表** 1 .17 **所示。**

**表 1 .17**

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ | $(P \vee Q) \quad P$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

(2) $(P \vee Q) \wedge (P \quad Q)$ **的真值表如表** 1 .18 **所示。**

**表 1 .18**

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ | $P \quad Q$ | $(P \vee Q) \wedge (P \quad Q)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

(3) $(P \wedge Q) \rightleftarrows (P \vee Q)$ **的真值表如表** 1 .19 **所示。**

**表 1 .19**

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $(P \wedge Q) \rightleftarrows (P \vee Q)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

(4) $(P \quad Q) \wedge (Q \quad R)$ 的真值表如表 1 .20 所示。

**表　1 .20**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \quad Q$ | $Q \quad R$ | $(P \quad Q) \wedge (Q \quad R)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

2 .(1) $P \rightleftarrows Q$ 和 $\neg(P \overline{\vee} Q)$ 的真值表如表 1 .21 所示。

**表　1 .21**

| $P$ | $Q$ | $P \overline{\vee} Q$ | $\neg(P \overline{\vee} Q)$ | $P \rightleftarrows Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

由表可知, $P \rightleftarrows Q \quad \neg(P \overline{\vee} Q)$。

(2) $P \overline{\vee} Q$ 和 $(P \quad \neg Q) \wedge (\neg Q \quad P)$ 的真值表如表 1 .22 所示。

**表　1 .22**

| $P$ | $Q$ | $P \quad \neg Q$ | $\neg Q \quad P$ | $(P \quad \neg Q) \wedge (\neg Q \quad P)$ | $P \overline{\vee} Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

由表可知, $P \overline{\vee} Q \quad (P \quad \neg Q) \wedge (\neg Q \quad P)$。

3 .(1) 利用分配律:

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \quad P \wedge (Q \vee \neg Q) \quad P \wedge 1 = P$$

(2) 利用吸收律: $P \vee (P \wedge Q) \quad P$, 即得

$$Q \quad (P \vee (P \wedge Q)) \quad Q \quad P$$

(3) $P \quad (P \quad Q) \qquad P \quad (\neg P \vee Q)$

$\neg P \vee \neg P \vee Q$

$\neg P \vee Q$

$P \quad Q$

(4) $A \quad (B \vee C) \qquad \neg A \vee B \vee C$

$\neg (A \wedge \neg B) \vee C$

$(A \wedge \neg B) \quad C$

(5) $(P \quad Q) \vee (P \quad R) \qquad \neg P \vee Q \vee \neg P \vee R$

$\neg P \vee (Q \vee R)$

$P \quad (Q \vee R)$

(6) **左式** $\quad (P \vee (Q \quad (R \vee P))) \wedge (\neg P \vee \neg (Q \quad (R \vee P)))$

$(P \vee \neg Q \vee R \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg (\neg Q \vee R \vee P))$

$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee (Q \wedge \neg R \wedge \neg P)$

$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge \neg P$ **(吸收律)**

$(P \wedge \neg P) \vee (\neg Q \vee R) \wedge \neg P$ **(分配律)**

$\neg P \wedge \neg (Q \wedge \neg R)$

(7) **左式** $\quad (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

$(\neg P \wedge \neg Q) \vee R$ **(分配律)**

$\neg (P \vee Q) \vee R$ **(摩根律)**

$(P \vee Q) \quad R$

(8) **左式** $\quad (Q \quad P) \wedge ((Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R)) \wedge R$

$(Q \quad P) \wedge ((Q \wedge R) \wedge R \vee (\neg Q \wedge \neg R) \wedge R)$

$(Q \quad P) \wedge ((Q \wedge R) \vee 0)$

$(Q \quad P) \wedge (Q \wedge R)$

$(\neg Q \vee P) \wedge (Q \wedge R)$

$P \wedge Q \wedge R$

4 .(1) **因为**$(P \wedge Q) \quad P \qquad \neg (P \wedge Q) \vee P \qquad \neg P \vee \neg Q \vee P \quad 1$ **是永真式**,**而** $P \vee \neg P$ **也是永真式**,**所以**$((P \wedge Q) \quad P) \wedge (P \vee \neg P)$ **是永真式**。

(2) $P \quad (P \vee Q) \qquad \neg P \vee P \vee Q \quad 1$,**所以** $P \quad (P \vee Q)$ **是永真式**。

(3) $\neg P \quad (P \quad Q) \qquad \neg P \quad (\neg P \vee Q) \qquad P \vee \neg P \vee Q \quad 1$,**所以**$\neg P \quad (P \quad Q)$ **是永真式**。

(4) $(P \quad (P \vee Q)) \wedge (\neg P \quad (P \quad Q)) \qquad (\neg P \vee P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P \vee Q) \quad 1 \wedge 1 \quad 1$,**所以**$(P \quad (P \vee Q)) \wedge (\neg P \quad (P \quad Q))$ **是永真式**。

(5) $(P \wedge (P \quad Q)) \quad Q \qquad (P \wedge (\neg P \vee Q)) \quad Q \qquad (P \wedge Q) \quad Q \qquad \neg P \vee \neg Q \vee Q \quad 1$,**所以**$(P \wedge (P \quad Q)) \quad Q$ **是永真式**。

(6) $\quad (P \quad Q) \wedge (Q \quad R)) \quad (P \quad R)$

$((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)) \quad (\neg P \vee R)$

$\neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)) \vee (\neg P \vee R)$

$\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee R) \vee \neg P \vee R$

$(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee \neg P \vee R$

$(\neg P \vee (P \wedge \neg Q)) \vee (R \vee (Q \wedge \neg R))$

$(\neg P \vee \neg Q) \vee (R \vee Q) \quad 1$

**所以**$((P \quad Q) \wedge (Q \quad R)) \quad (P \quad R)$ **是永真式。**

5 .(1) $(P \vee Q) \vee R$ **和** $P \vee (Q \vee R)$ **的真值表如表** 1 .23 **所示。**

**表 1 .23**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(P \vee Q)$ | $(P \vee Q) \vee R$ | $(Q \vee R)$ | $P \vee (Q \vee R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**由表可知**, $(P \vee Q) \vee R \quad P \vee (Q \vee R)$。

(2) $(P \wedge Q) \wedge R$ **和** $P \wedge (Q \wedge R)$ **的真值表如表** 1 .24 **所示。**

**表 1 .24**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(P \wedge Q)$ | $(P \wedge Q) \wedge R$ | $Q \wedge R$ | $P \wedge (Q \wedge R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**由表可知**, $(P \wedge Q) \wedge R \quad P \wedge (Q \wedge R)$。

(3) $P \wedge (Q \vee R)$ **和** $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ **的真值表如表** 1 .25 **所示。**

表 1.25

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(Q \vee R)$ | $P \wedge (Q \vee R)$ | $(P \wedge Q)$ | $(P \wedge R)$ | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

由表可知, $P \wedge (Q \vee R) \quad (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$。

(4) $P \vee (Q \wedge R)$ 和 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 的真值表如表 1.26 所示。

表 1.26

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(Q \wedge R)$ | $P \vee (Q \wedge R)$ | $(P \vee Q)$ | $(P \vee R)$ | $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

由表可知, $P \vee (Q \wedge R) \quad (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$。

(5) $\neg (P \vee Q)$, $\neg P \wedge \neg Q$, $\neg (P \wedge Q)$ 和 $\neg P \vee \neg Q$ 的真值表如表 1.27 所示。

表 1.27

| $P$ | $Q$ | $\neg (P \vee Q)$ | $\neg P \wedge \neg Q$ | $\neg (P \wedge Q)$ | $\neg P \vee \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

由表可知, $\neg (P \vee Q) \quad \neg P \wedge \neg Q$, $\neg (P \wedge Q) \quad \neg P \vee \neg Q$。

# 1.3　范式和主范式

一个命题公式可以表示为多种形式,例如:$P\vee Q$可以表示为$\neg P\quad Q$或$\neg(\neg P\wedge\neg Q)$等形式,这给命题公式的研究工作带来很大不便。为了使命题公式的表示规范化、标准化,本节将介绍命题公式的范式和主范式表示。

## 1.3.1　析取范式和主析取范式

**1.析取范式**

**定义 1.3.1**　如果一个命题公式可等价地表示为

$$A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n$$

其中$A_1, A_2, \cdots, A_n$都是由命题变元或其否定的合取组成的项,则称这种表示形式为析取范式。

例如,$(P\wedge Q)\vee(\neg R\wedge P)\vee(Q\wedge R)$是析取范式。

但是,$(P\wedge Q)\vee(P\quad Q)\vee(Q\rightleftarrows R)$不是析取范式,因为$(P\quad Q)$和$(Q\rightleftarrows R)$都不是合取项。

把一个命题公式转化为析取范式,可采取以下步骤:

(1) 首先把命题公式中的各类联结词转化为$\wedge,\vee,\neg$。

(2) 利用摩根律,把联结词否定“$\neg$”置于各个命题变元的前面。

(3) 利用分配律和结合律把命题公式转化为析取范式。

例如,把$(P\rightleftarrows Q)\quad R$转化为析取范式,由于

$$(P\rightleftarrows Q)\quad R$$
$$\neg(P\rightleftarrows Q)\vee R$$
$$\neg((\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q))\vee R$$
$$\neg(\neg P\vee Q)\vee\neg(P\vee\neg Q)\vee R$$
$$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee R$$

由此得到$(P\rightleftarrows Q)\quad R$的析取范式为$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee R$。

又如,把$(\neg P\quad Q)\quad(Q\wedge(R\quad S))$转化为析取范式,由于

$$(\neg P\quad Q)\quad(Q\wedge(R\quad S))$$
$$\neg(\neg P\quad Q)\vee(Q\wedge(R\quad S))$$
$$\neg(P\vee Q)\vee(Q\wedge(\neg R\vee S))$$
$$(\neg P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge(\neg R\vee S))$$
$$(\neg P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)\vee(Q\wedge S)$$

由此得到$(\neg P\quad Q)\quad(Q\wedge(R\quad S))$的析取范式为$(\neg P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)\vee(Q\wedge S)$。

**2.主析取范式**

易见,命题公式的析取范式不是惟一的,例如,$P\quad Q$的析取范式可以是$\neg P\vee Q$,也可以是$\neg P\vee(P\wedge Q)$等。为了使命题公式有一种标准的统一的形式,下面介绍主析取

范式。

**定义 1.3.2** 对于一个含有 $n$ 个变元的命题公式,如果已表示成析取范式,且该析取范式中的每一个合取项都由这 $n$ 个变元(或其否定)的合取组成,则称该析取范式为主析取范式。

如对于命题公式 $P \quad Q$,由于它含有两个命题变元,所以它的主析取范式为:$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$。

例如,把 $\neg (P \vee Q) \quad (P \vee Q)$ 化为主析取范式。由于

$$\neg (P \vee Q) \quad (P \vee Q)$$
$$(P \vee Q) \vee (P \vee Q)$$
$$P \vee Q$$
$$(P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee ((\neg P \vee P) \wedge Q)$$
$$(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$
$$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

由此得到 $\neg (P \vee Q) \quad (P \vee Q)$ 的主析取范式为 $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$。

由上例的求解过程可知,要把一个命题公式转化为主析取范式,首先应把命题公式转化为析取范式,然后对缺少某些变元(如 $P$、$Q$ 等)的合取项用 $\neg P \vee P$、$\neg Q \vee Q$ 补上,再用分配律和结合律展开,并再一次合并相同的合取项即得到主析取范式。

例如,求 $P \quad (Q \rightleftarrows R)$ 的主析取范式,由于

$$P \quad (Q \rightleftarrows R)$$
$$\neg P \vee (Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$$
$$(\neg P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee (Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$$
$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$$
$$((\neg P \wedge \neg Q) \wedge (\neg R \vee R)) \vee ((\neg P \wedge Q) \wedge (\neg R \vee R)) \vee ((\neg P \vee P) \wedge (Q \wedge R)) \vee ((\neg P \vee P) \wedge (\neg Q \wedge \neg R))$$
$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$
$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

由此得到 $P \quad (Q \rightleftarrows R)$ 的主析取范式为:

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

求命题公式的主析取范式还可采用真值表法,特别当命题公式所含的变元较少时,真值表法显得非常简便。

下面用一个命题公式的转化过程来说明用真值表法求主析取范式的具体步骤。

例如,对于命题公式 $P \quad Q$,如果用真值表求其主析取范式,首先列出命题公式 $P \quad Q$ 的真值表(见表 1.28)。

易见，在真值表中，除第3行外，其他3行命题公式 $P \quad Q$ 的取值都为1。现在对命题公式 $P \quad Q$ 取值为1的3行(第1、2和4行)作简单的分析。

表 1.28

| $P$ | $Q$ | $P \quad Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

在第1行中，当两个命题变元 $P$ 和 $Q$ 都取0值时，命题公式取值为1。

现在构造一个合取项 $\neg P \wedge \neg Q$。显然，当 $P$ 和 $Q$ 都取0值时，合取项 $\neg P \wedge \neg Q$ 取值为1，但在 $P$ 和 $Q$ 取其他值时，合取项 $\neg P \wedge \neg Q$ 取值都为0。因此有以下结论：

· 当 $P$ 和 $Q$ 都取0值时，命题公式 $P \quad Q$ 取值为1。

· 当且仅当 $P$ 和 $Q$ 都取0值时，合取项 $\neg P \wedge \neg Q$ 才取值为1。

在第2行中，当两个命题变元 $P$ 和 $Q$ 分别取0值和1值时，命题公式 $P \quad Q$ 取值为1。

现在构造一个合取项 $\neg P \wedge Q$。显然，当 $P$ 取0值，$Q$ 取1值时，合取项 $\neg P \wedge Q$ 取1值，但在 $P$ 和 $Q$ 取其他值时，合取项 $\neg P \wedge Q$ 取值都为0。因此有：

· 当 $P$ 取0值，$Q$ 取1值时，命题公式 $P \quad Q$ 取值为1。

· 当且仅当 $P$ 取0值，$Q$ 取1值时，合取项 $\neg P \wedge Q$ 才取1值。

在第4行中，当两个命题变元 $P$ 和 $Q$ 都取1值时，命题公式 $P \quad Q$ 取值为1。

同理，构造合取项 $P \wedge Q$，同样有：

· 当 $P$ 和 $Q$ 都取1值时，命题公式 $P \quad Q$ 取1值；当且仅当 $P$ 和 $Q$ 都取1值时，合取项 $P \wedge Q$ 才取1值。

由以上分析可知，如果对这3个合取项进行析取运算，得：

$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

则由表1.29所示的真值表可知

$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \quad P \quad Q$$

即 $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$ 是命题公式 $P \quad Q$ 的主析取范式。

表 1.29

| $P$ | $Q$ | $P \quad Q$ | $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

由真值表的构造可知，命题公式的主析取范式是惟一的。

例如，用真值表法求 $(P \wedge Q) \rightleftarrows R$ 的主析取范式。

先写出 $(P \wedge Q) \rightleftarrows R$ 的真值表，见表1.30。

由真值表可知，命题公式 $(P \wedge Q) \rightleftarrows R$ 取值为1的在表中共有4行。

当 $P$、$Q$、$R$ 都取0值时，$(P \wedge Q) \rightleftarrows R$ 取值为1，所以构造合取项：$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$。

当 $P$ 取0值，$Q$ 取1值，$R$ 取0值时，$(P \wedge Q) \rightleftarrows R$ 取值为1，所以构造合取项：$\neg P \wedge$

$Q \wedge \neg R$。

当 $P$ 取 1 值, $Q$ 和 $R$ 取 0 值时, $(P \wedge Q) \rightleftarrows R$ 取值为 1,所以构造合取项: $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$。

当 $P$、$Q$、$R$ 都取 1 值时, $(P \wedge Q) \rightleftarrows R$ 取值为 1,所以构造合取项: $P \wedge Q \wedge R$。

由此可得 $(P \wedge Q) \rightleftarrows R$ 的主析取范式为:

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

表 1.30

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(P \wedge Q) \rightleftarrows R$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

为了使真值表法求命题公式的主析取范式显得更简洁些,也为了便于作更深入的讨论,下面介绍“极小项”的概念。

在含有 $n$ 个变元的各类命题公式的主析取范式中,所含的各种合取项统称为 $n$ 变元的极小项(也称为小项)。

例如,3 个变元 $(P、Q、R)$ 的极小项为:

$$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R, \neg P \wedge \neg Q \wedge R, \neg P \wedge Q \wedge \neg R, \neg P \wedge Q \wedge R, P \wedge \neg Q \wedge \neg R, P \wedge \neg Q \wedge R, P \wedge Q \wedge \neg R, P \wedge Q \wedge R。$$

3 个变元的极小项共有 $2^3 = 8$ 个。

一般地讲, $n$ 个变元的极小项共有 $2^n$ 个。

如果把各个命题变元的顺序固定不变,如将 3 个变元的顺序固定为 $P$、$Q$、$R$,那么就可以使极小项与二进制序列建立一一对应关系。如对于有 3 个变元的极小项有:

$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \quad \backslash \quad 000$

$\neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \backslash \quad 001$

$\neg P \wedge Q \wedge \neg R \quad \backslash \quad 010$

$\neg P \wedge Q \wedge R \quad \backslash \quad 011$

$P \wedge \neg Q \wedge \neg R \quad \backslash \quad 100$

$P \wedge \neg Q \wedge R \quad \backslash \quad 101$

$P \wedge Q \wedge \neg R \quad \backslash \quad 110$

$P \wedge Q \wedge R \quad \backslash \quad 111$

于是我们可以把极小项简单地记作:

$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R = m_{000}$

$\neg P \wedge \neg Q \wedge R = m_{001}$

$\neg P \wedge Q \wedge \neg R = m_{010}$

$\neg P \wedge Q \wedge R = m_{011}$

$P \wedge \neg Q \wedge \neg R = m_{100}$

$P \wedge \neg Q \wedge R = m_{101}$

$P \wedge Q \wedge \neg R = m_{110}$

$$P \wedge Q \wedge R = m_{111}$$

$n$个变元的极小项也可类似地简记。

在真值表中,各命题变元的一组取值就对应一个二进制序列,这个二进制序列就是相应的简记极小项的下角标,从而使命题公式主析取范式中所含的极小项能够很直观地得到。

表 1.31

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \wedge (Q \rightleftarrows R)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

例如,用真值表法求 $P \wedge (Q \rightleftarrows R)$ 的主析取范式。

先写出 $P \wedge (Q \rightleftarrows R)$ 的真值表,见表 1.31。

由表可知,当 $P$、$Q$、$R$ 取值为 1、0、0 时,$P \wedge (Q \rightleftarrows R)$ 取值为 1,可得极小项 $m_{100}$;当 $P$、$Q$、$R$ 取值为 1、1、1 时,$P \wedge (Q \rightleftarrows R)$ 取值为 1,可得极小项 $m_{111}$;对于 $P$、$Q$、$R$ 的其他取值,$P \wedge (Q \rightleftarrows R)$ 都取值为 0,所以 $P \wedge (Q \rightleftarrows R)$ 的主析取范式为:

$$m_{100} \vee m_{111} = (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

命题公式的规范表示,除析取范式外还有合取范式表示。

## 1.3.2 合取范式和主合取范式

**1.合取范式**

**定义 1.3.3** 如果一个命题公式可等价地表示为

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是由命题变元或其否定析取组成的项,则称这种表示形式为合取范式。

例如,$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$ 是合取范式。

但是,$(P \vee Q) \wedge (P \quad Q) \wedge (Q \rightleftarrows R)$ 不是合取范式,因为$(P \quad Q)$和$(Q \rightleftarrows R)$都不是析取项。

把一个命题公式转化为合取范式,其方法与命题公式转化为析取范式的方法、步骤相同。

(1) 首先把命题公式中的各类联结词转化为 $\wedge$, $\vee$, $\neg$。

(2) 利用摩根律,把联结词否定“$\neg$”置于各个命题变元的前面。

(3) 利用分配律和结合律把命题公式转化为合取范式。

例如,把 $P \quad (Q \rightleftarrows R)$ 转化为合取范式,由于

$$P \quad (Q \rightleftarrows R)$$

$$\neg P \vee (Q \rightleftarrows R)$$

$$\neg P \vee ((\neg Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg R))$$

$$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$$

由此得到 $P \quad (Q \rightleftarrows R)$ 的合取范式为$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$。

又如,把$(\neg P \quad Q) \quad (Q \wedge (R \quad S))$ 转化为合取范式,由于

$$
\begin{aligned}
&(\neg P \quad Q) \quad (Q \wedge (R \quad S))\\
&\quad \neg(\neg P \quad Q) \vee (Q \wedge (R \quad S))\\
&\quad \neg(P \vee Q) \vee (Q \wedge (\neg R \vee S))\\
&\quad (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge (\neg R \vee S))\\
&\quad ((\neg P \wedge \neg Q) \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \vee S))\\
&\quad (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee S)\\
&\quad (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee S)
\end{aligned}
$$

由此得到$(\neg P \quad Q) \quad (Q \wedge (R \quad S))$ 的合取范式为$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee S)$。

一个命题公式的合取范式也不是惟一的。下面介绍命题公式的主合取范式表示,这种表示形式是惟一的。

2 .主合取范式

**定义 1 .3 .4** 对于一个含有 $n$ 个变元的命题公式,如果已表示成合取范式,且该合取范式中的每一个析取项都由这 $n$ 个变元(或其否定) 的析取组成,则称此合取范式为主合取范式。

如对于命题公式 $P \wedge Q$,由于它含有两个命题变元,所以它的主合取范式为:

$$
\begin{aligned}
P \wedge Q \quad & (P \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee Q)\\
& (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)
\end{aligned}
$$

由此可见,把合取范式化为主合取范式,主要是把合取范式中缺少某些变元(如 $P$、$Q$) 的析取项用 $P \wedge \neg P$、$Q \wedge \neg Q$ 补上,再用分配律展开,合并相同的析取项后即得主合取范式。

例如,求$(P \quad Q) \quad R$ 的主合取范式。由于

$$
\begin{aligned}
&(P \quad Q) \quad R\\
&\quad \neg(P \quad Q) \vee R\\
&\quad \neg(\neg P \vee Q) \vee R\\
&\quad (P \wedge \neg Q) \vee R\\
&\quad (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)\\
&\quad (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee R)\\
&\quad (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)
\end{aligned}
$$

由此得到$(P \quad Q) \quad R$ 的主合取范式为$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$。

求命题公式的主合取范式也可用真值表法。这个方法是先求出命题公式否定的主析取范式,然后再对这个主析取范式取否定,就得到了命题公式的主合取范式。

例如,求$(P \quad Q) \quad R$ 的主合取范式,先写出$(P \quad Q) \quad R$ 和$\neg((P \quad Q) \quad R)$ 的真值表,见表 1 .32。

**表 1.32**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(P\quad Q)\quad R$ | $\neg((P\quad Q)\quad R)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

由表 1.32 可知$\neg((P\quad Q)\quad R)$的主析取范式为:

$$\neg((P\quad Q)\quad R)$$
$$(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)$$

所以

$$(P\quad Q)\quad R$$
$$\neg((\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R))$$
$$(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$$

实际上,用真值表法求$(P\quad Q)\quad R$的主合取范式时,只需写出$(P\quad Q)\quad R$的真值表,而不必写出其否定$\neg((P\quad Q)\quad R)$的真值表。因为当且仅当$(P\quad Q)\quad R$取值为 0 时,$\neg((P\quad Q)\quad R)$的取值才为 1,所以求$\neg((P\quad Q)\quad R)$的主析取范式时,只需要检查表中使$(P\quad Q)\quad R$取值为 0 的行(也是使$\neg((P\quad Q)\quad R)$取值为 1 的行),在这些行中,各命题变元的取值所对应的极小项的析取式就是$\neg((P\quad Q)\quad R)$的主析取范式。

求$(P\quad Q)\quad R$的主合取范式,还需求$\neg((P\quad Q)\quad R)$的主析取范式的否定,也就是对其各个极小项取否定后再进行合取运算,对极小项进行否定运算的结果,常称为极大项(也可称为大项)。

已知 3 个变元的极小项有 8 个:

$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$, $\neg P\wedge\neg Q\wedge R$,

$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$, $\neg P\wedge Q\wedge R$,

$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$, $P\wedge\neg Q\wedge R$,

$P\wedge Q\wedge\neg R$, $P\wedge Q\wedge R$。

3 个变元的极大项也有 8 个:

$P\vee Q\vee R$, $P\vee Q\vee\neg R$,

$P\vee\neg Q\vee R$, $P\vee\neg Q\vee\neg R$,

$\neg P\vee Q\vee R$, $\neg P\vee Q\vee\neg R$,

$\neg P\vee\neg Q\vee R$, $\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$。

如果命题变元的顺序固定不变,那么命题变元的每一组取值就对应一个二进制序列,所以可以建立极大项与二进制序列的一一对应关系。如 3 个变元的极大项有:

$P \vee Q \vee R \quad \backslash \quad 000$

$P \vee Q \vee \neg R \quad \backslash \quad 001$

$P \vee \neg Q \vee R \quad \backslash \quad 010$

$P \vee \neg Q \vee \neg R \quad \backslash \quad 011$

$\neg P \vee Q \vee R \quad \backslash \quad 100$

$\neg P \vee Q \vee \neg R \quad \backslash \quad 101$

$\neg P \vee \neg Q \vee R \quad \backslash \quad 110$

$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \quad \backslash \quad 111$

于是可以把极大项简单地记作:

$P \vee Q \vee R = M_{000}$

$P \vee Q \vee \neg R = M_{001}$

$P \vee \neg Q \vee R = M_{010}$

$P \vee \neg Q \vee \neg R = M_{011}$

$\neg P \vee Q \vee R = M_{100}$

$\neg P \vee Q \vee \neg R = M_{101}$

$\neg P \vee \neg Q \vee R = M_{110}$

$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R = M_{111}$

$n$个变元的极大项也可类似地简记。

于是,命题公式$(P \quad Q) \quad R$的主合取范式可以简记为:

$$(P \quad Q) \quad R \quad M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{110}$$

例如,用真值表法求$(\neg P \vee \neg Q) \quad (\neg P \wedge R)$的主析取范式和主合取范式。

先写出$(\neg P \vee \neg Q) \quad (\neg P \wedge R)$的真值表,见表 1 .33。

表 1 .33

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(\neg P \vee \neg Q) \quad (\neg P \wedge R)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

由表可知,$(\neg P \vee \neg Q) \quad (\neg P \wedge R)$的主析取范式为:

$m_{001} \vee m_{011} \vee m_{110} \vee m_{111}$

$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

**它的主合取范式为**:

$M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{100} \wedge M_{101}$

$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

## 1.3.3 重点和难点分析

**本节的重点是:熟练掌握利用常用逻辑等价式和真值表法求出命题公式的主析取范式和主合取范式。**

**难点是:熟练地利用真值表法同时求得命题公式的主析取范式和主合取范式。**

**例 1.8 求下列命题公式的析取范式。**

(1) $(P \quad Q) \rightleftarrows R$

(2) $P \wedge (Q \rightleftarrows R)$

**解** (1) $(P \quad Q) \rightleftarrows R \quad (\neg P \vee Q) \rightleftarrows R$

$((\neg P \vee Q) \wedge R) \vee (\neg(\neg P \vee Q) \wedge \neg R)$

$(\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

**由此得到**$(P \quad Q) \rightleftarrows R$ **的析取范式为**: $(\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$。

(2) $P \wedge (Q \rightleftarrows R) \quad P \wedge ((Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R))$

$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

**由此得到** $P \wedge (Q \rightleftarrows R)$ **的析取范式为**: $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$。

**例 1.9 求下列命题公式的合取范式。**

(1) $P \quad (Q \rightleftarrows R)$

(2) $\neg(P \quad Q) \vee (Q \rightleftarrows R)$

**解** (1) **由于需求合取范式,所以用公式**: $Q \rightleftarrows R \quad (\neg Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg R)$,**于是有**

$P \quad (Q \rightleftarrows R) \quad P \quad ((\neg Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg R)$

$\neg P \vee ((\neg Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg R))$

$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

**由此得到** $P \quad (Q \rightleftarrows R)$ **的合取范式为**: $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$。

(2) $\neg(P \quad Q) \vee (Q \rightleftarrows R) \quad \neg(\neg P \vee Q) \vee ((\neg Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg R))$

$(P \wedge \neg Q) \vee ((\neg Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg R))$

$((P \wedge \neg Q) \vee \neg Q \vee R) \wedge ((P \wedge \neg Q) \vee Q \vee \neg R)$

$(\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)$ **(吸收律)**

**由此得到**$\neg(P \quad Q) \vee (Q \rightleftarrows R)$ **的合取范式为**: $(\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)$。

**例 1.10 求下列命题公式的主析取范式和主合取范式。**

(1) $(P \rightleftarrows Q) \quad (R \wedge Q)$

(2) $(P \quad R) \wedge (Q \quad R)$

**解**　(1) **先求主析取范式。**

$(P \rightleftarrows Q) \quad (R \wedge Q) \quad \neg(P \rightleftarrows Q) \vee (R \wedge Q)$

$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge Q)$

$(\neg P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee (P \wedge \neg Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge (R \wedge Q))$

$(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

**由此可得**$(P \rightleftarrows Q) \quad (R \wedge Q)$ **的主析取范式为**:

$$m_{010} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{111}$$

**易见**, $\neg((P \rightleftarrows Q) \quad (R \wedge Q))$ **的主析取范式为**:

$$m_{000} \vee m_{001} \vee m_{110}$$

**所以有**

$$\neg\neg((P \rightleftarrows Q) \quad (R \wedge Q)) \quad \neg(m_{000} \vee m_{001} \vee m_{110})$$
$$\neg m_{000} \wedge \neg m_{001} \wedge \neg m_{110}$$
$$M_{000} \wedge M_{001} \wedge M_{110}$$

**由此得到**$(P \rightleftarrows Q) \quad (R \wedge Q)$ **的主合取范式为**:

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

(2) **先求主合取范式。**

$(P \quad R) \wedge (Q \quad R) \quad (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

$(\neg P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee R)$

$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$

**由此可得**$(P \quad R) \wedge (Q \quad R)$ **的主合取范式为**:

$$M_{100} \wedge M_{110} \wedge M_{010}$$

**于是可得**$(P \quad R) \wedge (Q \quad R)$ **的主析取范式为**:

$$m_{000} \vee m_{001} \vee m_{011} \vee m_{101} \vee m_{111}$$

**即**$(P \quad R) \wedge (Q \quad R)$ **的主析取范式为**:

$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

**例 1.11　用真值表求下列命题公式的主析取范式和主合取范式。**

(1) $(P \rightleftarrows Q) \quad R$

(2) $(\neg P \vee \neg Q) \quad (\neg P \wedge R)$

**解**(1)　**先列出**$(P \quad Q) \quad R$ **的真值表,见表** 1.34。

**由真值表可知**, $(P \rightleftarrows Q) \quad R$**的主析取范式为**: $m_{001} \vee m_{010} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{111}$,

即为:

$(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

其主合取范式为: $M_{000}\wedge M_{110}$,即为:

$(P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\wedge\neg Q\vee R)$

(2) 先列出$(\neg P\vee\neg Q)\quad(\neg P\wedge R)$的真值表,见表 1.35。

由表可知,$(\neg P\vee\neg Q)\quad(\neg P\wedge R)$的主析取范式为: $m_{001}\vee m_{011}\vee m_{110}\vee m_{111}$,即为:

$(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

其主合取范式为: $M_{000}\wedge M_{010}\wedge M_{100}\wedge M_{101}$,即为:

$(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$

表 1.34

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(P\rightleftarrows Q)\quad R$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

表 1.35

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(\neg P\vee\neg Q)\quad(\neg P\wedge R)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**例 1.12** 某研究所有 3 名高级工程师甲、乙、丙,要选派其中某些人出国进修。因研究所工作需要,选派时必须满足下列条件:

(1) 如果甲去,则丙也去。

(2) 如果乙去,则丙不去。

(3) 如果丙不去,则甲或乙中至少去一人。

问:研究所应如何选派出国人员?

解 若令

$A$:甲出国进修。

$B$:乙出国进修。

$C$:丙出国进修。

则 3 个必备条件可符号化为:

(1) $A\quad C$

(2) $B\quad\neg C$

(3) $\neg C\quad(A\vee B)$

由此可知,出国进修人员的选派方案必须满足:

$$(A\quad C)\wedge(B\quad\neg C)\wedge(\neg C\quad(A\vee B))$$

首先把上述命题公式转化为主析取范式。用真值表法，先列出$(A \quad C) \land (B \quad \neg C) \land (\neg C \quad (A \lor B))$的真值表，见表 1.36。

表 1.36

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \quad C) \land (B \quad \neg C) \land (\neg C \quad (A \lor B))$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

由表可知，$(A \quad C) \land (B \quad \neg C) \land (\neg C \quad (A \lor B))$的主析取范式为：$m_{001} \lor m_{010} \lor m_{101}$，即为：

$$(\neg A \land \neg B \land C) \lor (\neg A \land B \land \neg C) \lor (A \land \neg B \land C)$$

因此研究所可以选派丙一人出国，或者选派乙一人出国，或者选派甲和丙两人出国。

## 1.3.4 自测练习

1.求下列命题公式的析取范式。

(1) $(P \quad Q) \rightleftarrows \neg R$

(2) $P \quad (Q \rightleftarrows R)$

(3) $(P \lor \neg R) \quad (Q \land (T \rightleftarrows S))$

(4) $\neg (P \lor Q) \rightleftarrows (P \land Q)$

2.求下列命题公式的主析取范式。

(1) $(P \quad \neg Q) \quad R$

(2) $P \land (Q \rightleftarrows R)$

(3) $(P \lor Q \lor R) \quad P$

3.用真值表法求下列命题公式的主析取范式。

(1) $(P \quad \neg Q) \quad R$

(2) $P \land (Q \rightleftarrows R)$

(3) $(P \lor Q \lor R) \quad P$

4.求下列命题公式的合取范式。

(1) $P \lor (\neg R \lor Q)$

(2) $\neg (P \quad Q) \lor R$

(3) $(P \rightleftarrows Q) \land (\neg R \lor S)$

5 .**求下列命题公式的主合取范式。**

(1) $(P \quad \neg Q) \quad R$

(2) $P \wedge (Q \rightleftarrows R)$

(3) $(P \vee Q) \quad (P \wedge \neg R)$

6 .**用真值表法求下列命题公式的主合取范式。**

(1) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(2) $(P \vee Q) \quad R$

(3) $P \vee (Q \rightleftarrows R)$

7 .**用真值表法求下列命题公式的主析取范式和主合取范式。**

(1) $(P \rightleftarrows Q) \quad R$

(2) $P \quad (Q \rightleftarrows R)$

## 1 .3 .5 自测练习答案

1 .(1) **由于需求析取范式,所以使用公式**: $A \rightleftarrows B \quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$。**于是有**

$(P \quad Q) \rightleftarrows \neg R \quad (\neg P \vee Q) \rightleftarrows \neg R$

$((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee (\neg (\neg P \vee Q) \wedge \neg\neg R)$

$(\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

**由此得到**$(P \quad Q) \rightleftarrows \neg R$**的析取范式为**: $(\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$。

(2) $P \quad (Q \rightleftarrows R) \quad \neg P \vee (Q \rightleftarrows R)$

$\neg P \vee (Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$

**由此得到** $P \quad (Q \rightleftarrows R)$ **的析取范式为**: $\neg P \vee (Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$。

(3) $(P \vee \neg R) \quad (Q \wedge (T \rightleftarrows S)) \quad \neg (P \vee \neg R) \vee (Q \wedge (T \rightleftarrows S))$

$(\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge ((T \wedge S) \vee (\neg T \wedge \neg S)))$

$(\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge T \wedge S) \vee (Q \wedge \neg T \wedge \neg S)$

**由此得到**$(P \vee \neg R) \quad (Q \wedge (T \rightleftarrows S))$ **的析取范式为**: $(\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge T \wedge S) \vee (Q \wedge \neg T \wedge \neg S)$。

(4) $\neg (P \vee Q) \rightleftarrows (P \wedge Q) \quad (\neg P \wedge \neg Q) \rightleftarrows (P \wedge Q)$

$(\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee (\neg (\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg (P \wedge Q))$

$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

$((P \vee Q) \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge \neg Q)$

$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

**由此得到**$\neg (P \vee Q) \rightleftarrows (P \wedge Q)$ **的析取范式为**: $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$。

2 .(1) **先把**$(P \quad \neg Q) \quad R$**化作析取范式**:$(P \quad \neg Q) \quad R \quad \neg(P \quad \neg Q) \vee R \quad \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee R \quad (P \wedge Q) \vee R$,**再求其主析取范式。由于**

$$
\begin{aligned}
(P \wedge Q) \vee R \quad & (P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee (R \wedge (P \vee \neg P)) \\
& (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge P) \vee (R \wedge \neg P) \\
& (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee \\
& (R \wedge \neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \\
& (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \\
& R) \vee (\neg P \wedge R \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R \wedge \neg Q) \\
& (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \\
& R \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R \wedge \neg Q)
\end{aligned}
$$

**由此得到**$(P \quad \neg Q) \quad R$**的主析取范式为**:$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$。

$$
\begin{aligned}
(2) \ P \wedge (Q \rightleftarrows R) \quad & P \wedge ((Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg R)) \\
& (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)
\end{aligned}
$$

**由此得到** $P \wedge (Q \rightleftarrows R)$ **的主析取范式为**:$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$。

$$
\begin{aligned}
(3) \ (P \vee Q \vee R) \quad P \quad & \neg(P \vee Q \vee R) \vee P \\
& (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee P \\
& (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge (Q \vee \neg Q)) \\
& (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \\
& (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee (P \wedge \\
& \neg Q \wedge (R \vee \neg R)) \\
& (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \\
& \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)
\end{aligned}
$$

**由此得到**$(P \vee Q \vee R) \quad P$**的主析取范式为**:$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$。

3 .(1) **列出**$(P \quad \neg Q) \quad R$**的真值表,见表** 1 .37。

**表 1 .37**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(P \quad \neg Q) \quad R$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**由表可知**, $(P \quad \neg Q) \quad R$ **的主析取范式为**: $m_{001} \vee m_{011} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{111}$, **即为**: $(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$。

(2) **列出** $P \wedge (Q \rightleftarrows R)$ **的真值表**,**见表** 1 .38。

**表 1 .38**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \wedge (Q \rightleftarrows R)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**由表可知**, $P \wedge (Q \rightleftarrows R)$ **的主析取范式为**: $m_{100} \vee m_{111}$, **即为** $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$。

(3) **先列出** $(P \vee Q \vee R) \quad P$ **的真值表**,**见表** 1 .39。

**表 1 .39**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(P \vee Q \vee R) \quad P$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**由表可知**, $(P \vee Q \vee R) \quad P$ **的主析取范式为**: $m_{000} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{111}$, **即为** $(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$。

4 .(1) $P \vee \neg R \vee Q$ **即为合取范式**。

(2) $\neg (P \quad Q) \vee R \quad \neg (\neg P \vee Q) \vee R$

$(P \wedge \neg Q) \vee R$

$(P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

**由此得到**$\neg(P \quad Q) \vee R$**的合取范式为**:$(P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$。

(3) $(P \rightleftarrows Q) \wedge (\neg R \vee S) \quad (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg R \vee S)$

**由此得到**$(P \rightleftarrows Q) \wedge (\neg R \vee S)$ **的合取式为**:$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg R \vee S)$。

5 .(1) **先写出**$(P \quad \neg Q) \quad R$**的合取范式,再补上所需的命题变元即得主合取范式。**

$(P \quad \neg Q) \quad R \quad (\neg P \vee \neg Q) \quad R$

$\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee R$

$(P \wedge Q) \vee R$

$(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

$(P \vee R \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge (Q \vee R \vee (P \wedge \neg P))$

$(P \vee R \vee Q) \wedge (P \vee R \vee \neg Q) \wedge (Q \vee R \vee P) \wedge (Q \vee R \vee \neg P)$

**由此得到**$(P \quad \neg Q) \quad R$**的主合取范式为**:$(P \vee R \vee Q) \wedge (P \vee R \vee \neg Q) \wedge (Q \vee R \vee P) \wedge (Q \vee R \vee \neg P)$。

(2) $P \wedge (Q \rightleftarrows R) \quad P \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg R)$

$(P \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg R) \vee (P \wedge \neg P))$

$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg R \vee P) \wedge (Q \vee \neg R \vee \neg P)$

$(P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (P \vee \neg Q \vee (R \wedge \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

**由此得到** $P \wedge (Q \rightleftarrows R)$ **的主合取范式为**:$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$。

(3) $(P \vee Q) \quad (P \wedge \neg R) \quad \neg(P \vee Q) \vee (P \wedge \neg R)$

$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)$

$((\neg P \wedge \neg Q) \vee P) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg R)$

$(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$

$(P \vee \neg Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee \neg R)) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee \neg R)$

$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$

$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$

6.(1) **先列出**$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ **的真值表,见表** 1.40。

**表 1.40**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**由表可知**,$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ **的主合取范式为**:$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$。

(2) **先列出**$(P \vee Q) \quad R$ **的真值表,见表** 1.41。

**表 1.41**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(P \vee Q) \quad R$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**由表可知**,$(P \vee Q) \quad R$ **的主合取范式为**:$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$。

(3) **先列出** $P \vee (Q \rightleftarrows R)$ **的真值表,见表** 1.42。

**表 1.42**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \vee (Q \rightleftarrows R)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**由表可知**, $P \vee (Q \rightleftarrows R)$ **的主合取范式为**: $(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$。

7.(1) **先列出** $(P \rightleftarrows Q) \quad R$ **的真值表**, **见表** 1.43。

**表 1.43**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(P \rightleftarrows Q) \quad R$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**由表可知**, $(P \rightleftarrows Q) \quad R$ **的主析取范式为**: $(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$。

$(P \rightleftarrows Q) \quad R$ **的主合取范式为**: $(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$。

(2) **先列出** $P \quad (Q \rightleftarrows R)$ **的真值表**, **见表** 1.44。

**由表可知**, $P \quad (Q \rightleftarrows R)$ **的主析取范式为**: $(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$。

$P \quad (Q \rightleftarrows R)$ **的主合取范式为**: $(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$。

表 1.44

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \quad (Q \rightleftarrows R)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# 1.4 蕴 含 式

## 1.4.1 蕴含式的定义和性质

**定义 1.4.1** 设 $A$、$B$ 是命题公式,如果 $A \quad B$ 是永真式,即 $A \quad B \quad 1$,则称 $A$ 蕴含 $B$,记作 $A \quad B$。

例如,$(P \wedge Q) \quad P \quad \neg (P \wedge Q) \vee P$

$\neg P \vee \neg Q \vee P$

$1$

所以 $(P \wedge Q) \quad P$ 是永真式,即 $P \wedge Q \quad P$。

又如,要证明 $P \wedge (P \quad Q) \quad Q$,即需证明 $(P \wedge (P \quad Q)) \quad Q$ 是永真式。由于

$(P \wedge (P \quad Q)) \quad Q \quad (P \wedge (\neg P \vee Q)) \quad Q$

$((P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)) \quad Q$

$(P \wedge Q) \quad Q$

$\neg (P \wedge Q) \vee Q$

$\neg P \vee \neg Q \vee Q$

$1$

由此证得:$P \wedge (P \quad Q) \quad Q$。

再如,若证明 $(P \quad Q) \wedge (Q \quad R) \quad P \quad R$,即需证明 $((P \quad Q) \wedge (Q \quad R)) \quad (P \quad R)$ 是永真式。这次采用真值表法证明。首先写出命题公式 $((P \quad Q) \wedge (Q \quad R)) \quad (P \quad R)$ 的真值表,见表 1.45。

**表　1.45**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \quad Q$ | $Q \quad R$ | $P \quad R$ | $((P \quad Q) \wedge (Q \quad R)) \quad (P \quad R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

由表可知,$((P \quad Q) \wedge (Q \quad R)) \quad (P \quad R)$ 是永真式,即$(P \quad Q) \wedge (Q \quad R) \quad P \quad R$。

蕴含式有下列重要性质:

· 性质 1　如果 $A \quad B$,则 $A \quad B$ 且 $B \quad A$。

· 性质 2　如果 $A \quad B$, $P$ 是命题公式,则 $P \wedge A \quad P \wedge B$。

· 性质 3　如果 $A \quad B$ 且 $B \quad C$,则 $A \quad C$。

利用这些性质,可使蕴含式的证明变得比较简洁。

例如,需证 $P \wedge (P \quad Q) \wedge (Q \quad R) \quad R$。由于已证得 $P \wedge (P \quad Q) \quad Q$,所以

$$P \wedge (P \quad Q) \wedge (Q \quad R) \quad Q \wedge (Q \quad R)$$
$$R$$

下面列出常用的蕴含式,请读者务必熟记,它们在推理理论中有重要用途。

(1) $P \wedge Q \quad P$

$P \wedge Q \quad Q$

(2) $P \quad P \vee Q$

$Q \quad P \vee Q$

(3) $\neg P \quad P \quad Q$

(4) $Q \quad P \quad Q$

(5) $\neg (P \quad Q) \quad P$

(6) $\neg (P \quad Q) \quad \neg Q$

(7) $P \wedge (P \quad Q) \quad Q$

(8) $\neg Q \wedge (P \quad Q) \quad \neg P$

(9) $\neg P \wedge (P \vee Q) \quad Q$

(10) $(P \quad Q) \wedge (Q \quad R) \quad P \quad R$

(11) $(P \vee Q) \wedge (P \quad R) \wedge (Q \quad R) \quad R$

(12) $(P \quad Q) \wedge (R \quad S) \quad (P \wedge R) \quad (Q \wedge S)$

## 1.4.2 重点和难点分析

**本节重点是:熟练地掌握蕴含式的证明(用真值表法和常用公式)。**

**难点是:熟练地证明蕴含式。**

**例 1.13 用真值表法证明下列蕴含式:**

(1) $P \quad P \vee Q$

(2) $\neg (P \quad Q) \quad \neg Q$

(3) $(P \vee Q) \wedge (P \quad R) \wedge (Q \quad R) \quad R$

(4) $(P \rightleftarrows Q) \wedge (Q \rightleftarrows R) \quad (P \rightleftarrows R)$

**证明** (1) **先列出** $P \quad (P \vee Q)$ **的真值表,见表** 1.46。

**由表可知,** $P \quad (P \vee Q)$ **为永真式,由此证得** $P \quad (P \vee Q)$。

(2) **先列出** $\neg (P \quad Q) \quad \neg Q$ **的真值表,见表** 1.47。

**表 1.46**

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ | $P \quad (P \vee Q)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**表 1.47**

| $P$ | $Q$ | $\neg (P \quad Q)$ | $\neg (P \quad Q) \quad \neg Q$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

**由表可知,** $\neg (P \quad Q) \quad \neg Q$ **是永真式,由此证得** $\neg (P \quad Q) \quad \neg Q$。

(3) **先列出** $(P \vee Q) \wedge (P \quad R) \wedge (Q \quad R) \quad R$ **的真值表,见表** 1.48。

**表 1.48**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \vee Q$ | $P \quad R$ | $Q \quad R$ | $(P \vee Q) \wedge (P \quad R) \wedge (Q \quad R) \quad R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**由表可知** $(P \vee Q) \wedge (P \quad R) \wedge (Q \quad R) \quad R$ **是永真式,由此证得** $(P \vee Q) \wedge (P \quad R) \wedge (Q \quad R) \quad R$。

(4) **先列出** $(P \rightleftarrows Q) \wedge (Q \rightleftarrows R) \quad (P \rightleftarrows R)$ **的真值表,见表** 1.49。

**表　1.49**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \rightleftarrows Q$ | $Q \rightleftarrows R$ | $P \rightleftarrows R$ | $(P \rightleftarrows Q) \wedge (Q \rightleftarrows R) \quad (P \rightleftarrows R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**由表可知** $(P \rightleftarrows Q) \wedge (Q \rightleftarrows R) \quad (P \rightleftarrows R)$ **是永真式，由此证得** $(P \rightleftarrows Q) \wedge (Q \rightleftarrows R) \quad (P \rightleftarrows R)$。

**例 1.14　证明下列蕴含式：**

(1) $(P \quad Q) \wedge (S \quad \neg Q) \wedge (S \vee R) \wedge \neg R \quad \neg P$

(2) $((P \wedge \neg Q) \quad \neg R) \wedge ((Q \quad P) \vee \neg R) \wedge R \quad P \rightleftarrows Q$

(3) $(A \quad (B \quad C)) \wedge (\neg D \vee A) \wedge B \quad D \quad C$

**证明**　(1) $S \vee R \quad \neg R \quad S$，**所以**

**左式**　$(P \quad Q) \wedge (S \quad \neg Q) \wedge (\neg R \quad S) \wedge \neg R$

$(P \quad Q) \wedge (S \quad \neg Q) \wedge S$　　[**公式**(7)]

$(P \quad Q) \wedge \neg Q$　　[**公式**(7)]

$\neg P$　　[**公式**(8)]

(2) **由于** $R \quad R \wedge R, (Q \quad P) \vee \neg R \quad R \quad (Q \quad P)$，**所以**

**左式**　$((P \wedge \neg Q) \quad \neg R) \wedge (R \quad (Q \quad P)) \wedge R \wedge R$

$((P \wedge \neg Q) \quad \neg R) \wedge (Q \quad P) \wedge R$　　[**公式**(7)]

$(\neg (P \wedge \neg Q) \vee \neg R) \wedge (Q \quad P) \wedge R$

$((\neg P \vee Q) \vee \neg R) \wedge (Q \quad P) \wedge R$

$((P \quad Q) \vee \neg R) \wedge (Q \quad P) \wedge R$

$(R \quad (P \quad Q)) \wedge R \wedge (Q \quad P)$

$(P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$　　[**公式**(7)]

$(P \rightleftarrows Q)$

(3) **左式**　$(\neg A \vee (B \quad C)) \wedge (\neg D \vee A) \wedge B$

$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg D \vee A) \wedge B$

$(B \quad (\neg A \vee C)) \wedge (D \quad A) \wedge B$

$(B \quad (A \quad C)) \wedge (D \quad A) \wedge B$

$(A \quad C) \wedge (D \quad A)$

$D \quad C$ [公式(10)]

### 1.4.3 自测练习

1.用真值表法证明下列蕴含式:

(1) $\neg P \quad (P \quad Q)$

(2) $\neg Q \wedge (P \quad Q) \quad \neg P$

(3) $\neg P \wedge (P \vee Q) \quad Q$

(4) $(P \wedge Q) \wedge (P \quad Q) \wedge (Q \quad R) \quad R$

2.证明下列蕴含式:

(1) $(P \vee Q) \wedge (P \quad R) \wedge (Q \quad S) \quad R \vee S$

(2) $(P \quad Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R \wedge \neg (\neg P \vee S) \quad \neg S$

(3) $((A \vee B) \quad (C \wedge D)) \wedge ((D \vee F) \quad E) \quad A \quad E$

(4) $A \wedge (\neg C \vee D) \wedge \neg D \wedge ((A \wedge B) \quad C) \quad \neg B$

### 1.4.4 自测练习答案

1.(1) 先列出$\neg P \quad (P \quad Q)$的真值表,见表1.50。

由表可知,$\neg P \quad (P \quad Q) \quad 1$,所以$\neg P \quad (P \quad Q)$。

(2) 先列出$(\neg Q \wedge (P \quad Q)) \quad \neg P$的真值表,见表1.51。

表 1.50

| $P$ | $Q$ | $\neg P \quad (P \quad Q)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

表 1.51

| $P$ | $Q$ | $(\neg Q \wedge (P \quad Q)) \quad \neg P$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

由表可知,$(\neg Q \wedge (P \quad Q)) \quad \neg P \quad 1$,由此证得$(\neg Q \wedge (P \quad Q)) \quad \neg P$。

(3) 先列出$(\neg P \wedge (P \vee Q)) \quad Q$的真值表,见表1.52。

表 1.52

| $P$ | $Q$ | $(\neg P \wedge (P \vee Q)) \quad Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

由表可知,$(\neg P \wedge (P \vee Q)) \quad Q \quad 1$,由此证得$\neg P \wedge (P \vee Q) \quad Q$。

(4) 先列出$((P \wedge Q) \wedge (P \quad Q) \wedge (Q \quad R)) \quad R$的真值表,见表1.53。

**表 1.53**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $((P\wedge Q)\wedge(P\quad Q)\wedge(Q\quad R))\quad R$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**由表可知**, $((P\wedge Q)\wedge(P\quad Q)\wedge(Q\quad R))\quad R\quad 1$, **由此证得** $(P\wedge Q)\wedge(P\quad Q)\wedge(Q\quad R)\quad R$。

2 .(1) **由于** $P\vee Q\quad\neg\neg P\vee Q\quad\neg P\quad Q$, **所以**

$(P\vee Q)\wedge(P\quad R)\wedge(Q\quad S)$

$(\neg P\quad Q)\wedge(Q\quad S)\wedge(P\quad R)$

$(\neg P\quad S)\wedge(P\quad R)$ [**公式**(10)]

$(P\vee S)\wedge(P\quad R)$

$(\neg S\quad P)\wedge(P\quad R)$

$\neg S\quad R$ [**公式**(10)]

$S\vee R$

(2) $P\quad Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge\neg R\wedge\neg(\neg P\wedge S)$

$\neg R\wedge(P\quad Q)\wedge(Q\quad R)\wedge(P\vee\neg S)$

$\neg R\wedge(P\quad R)\wedge(\neg P\quad\neg S)$ [**公式**(10)]

$\neg P\wedge(\neg P\quad\neg S)$ [**公式**(8)]

$\neg S$

(3) $(A\vee B)\quad(C\wedge D))\wedge((D\vee F)\quad E)$

$(\neg(A\vee B)\vee(C\wedge D))\wedge((D\vee F)\quad E)$

$((\neg A\wedge\neg B)\vee(C\wedge D))\wedge((D\vee F)\quad E)$

$((\neg A\wedge\neg B)\vee C)\wedge((\neg A\wedge\neg B)\vee D)\wedge((D\vee F)\quad E)$

$((\neg A\wedge\neg B)\vee D)\wedge((D\vee F)\quad E)$ [**公式**(1)]

$(\neg A\vee D)\wedge(\neg B\vee D)\wedge((D\vee F)\quad E)$

$(\neg A\vee D)\wedge((D\vee F)\quad E)$ [**公式**(1)]

$(A\quad D)\wedge((D\vee F)\quad E)$

$(A\quad D)\wedge(\neg(D\vee F)\vee E)$

$(A\quad D)\wedge((\neg D\wedge\neg F)\vee E)$

$(A \quad D) \wedge (\neg D \vee E) \wedge (\neg F \vee E)$

$(A \quad D) \wedge (D \quad E)$ [公式(1)]

$A \quad E$

(4) $A \wedge (\neg C \vee D) \wedge \neg D \wedge ((A \wedge B) \quad C)$

$A \wedge (\neg\neg D \vee \neg C) \wedge \neg D \wedge (\neg (A \wedge B) \vee C)$

$A \wedge (\neg D \quad \neg C) \wedge \neg D \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$

$A \wedge (\neg D \quad \neg C) \wedge \neg D \wedge (\neg\neg (\neg A \vee C) \vee \neg B)$

$A \wedge (\neg D \quad \neg C) \wedge \neg D \wedge (\neg (A \wedge \neg C) \vee \neg B)$

$A \wedge (\neg D \quad \neg C) \wedge \neg D \wedge ((A \wedge \neg C) \quad \neg B)$

$A \wedge \neg C \wedge ((A \wedge \neg C) \quad \neg B)$ [公式(7)]

$\neg B$ [公式(7)]

# 1.5 推理理论

## 1.5.1 前提和有效结论

推理就是从前提出发,按照科学的推理规则,推出结论的思维过程。在数理逻辑中,结论是通过对前提的“演算”而得到的,称为演绎推理。

当给出一组前提 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 时,需要推出结论 $Q$,可以考察是否成立着下列蕴含式

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \quad Q$$

如果此蕴含式成立,由蕴含的定义可知,当 $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$ 为真时,$Q$ 必为真。否则,若 $Q$ 为假,则 $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \quad Q$ 为假,这与蕴含的假设矛盾,所以当上述蕴含式成立时,若 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 都为真,则必有 $Q$ 为真。于是称 $Q$ 为由前提 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 推出的有效结论。若上述蕴含式不成立,即有

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \quad Q$$

则称 $Q$ 为谬误结论。下面给出明确的定义。

**定义 1.5.1** 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 和 $Q$ 是命题公式,且有

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \quad Q$$

则称 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 为前提,$Q$ 为由这些前提推出的有效结论。

在推理中,经常把

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \quad Q$$

写作

$$P_1, P_2, \cdots, P_n \quad Q$$

例如,分析下列事实:“如果我数学考满分,那么我就能获得奖学金;如果我获得奖学金,那么我去看望李老师;如果我去看望李老师,那么我要穿新西服。但我没有穿新西服,所以我数学没有考满分。”写出前提和结论,并证明结论是有效结论。

解法如下:

首先把命题符号化,令

$P$:我数学考满分。

$Q$: 我获得奖学金。

$R$: 我去看望李老师。

$S$: 我穿新西服。

由题意可知,前提为 $P \quad Q, Q \quad R, R \quad S, \neg S$, 结论是 $\neg P$ 且是有效结论,下面给出证明,即证明

$$(P \quad Q) \wedge (Q \quad R) \wedge (R \quad S) \wedge \neg S \qquad \neg P$$

多次利用 1.4 一节中列出的蕴含式常用公式(8):

$$\neg B \wedge (A \quad B) \qquad \neg A,$$ 可知

$$\begin{aligned} (P \quad Q) \wedge (Q \quad R) \wedge (R \quad S) \wedge \neg S \quad & (P \quad Q) \wedge (Q \quad R) \wedge \neg R \\ & (P \quad Q) \wedge \neg Q \\ & \neg P \end{aligned}$$

由此证得 $\neg P$ 是前提 $P \quad Q, Q \quad R, R \quad S, \neg S$ 的有效结论。

又如,分析下列事实:“ 我参加跳远比赛或羽毛球比赛;如果我参加跳远比赛,那么我要买新跑鞋;如果我参加羽毛球比赛,那么我要买新背心;但我没有买新背心,所以我参加跳远比赛并且买了新跑鞋。”写出前提和结论,并证明结论的有效性。

解法如下: 令

$P$: 我参加跳远比赛。

$Q$: 我参加羽毛球比赛。

$R$: 我买新跑鞋。

$S$: 我买新背心。

由题意可知,前提为 $P \vee Q, P \quad R, Q \quad S, \neg S$, 有效结论为 $P \wedge R$。现证明如下。

$$\begin{aligned} (P \vee Q) \wedge (P \quad R) \wedge (Q \quad S) \wedge \neg S \quad & (P \vee Q) \wedge (P \quad R) \wedge \neg Q \\ & \neg Q \wedge (\neg Q \quad P) \wedge (P \quad R) \\ & P \wedge (P \quad R) \\ & P \wedge P \wedge (P \quad R) \\ & P \wedge R \end{aligned}$$

上述证明是一种“ 纯粹 ”的蕴含式的证明。在证明过程中,总是把所有前提全部列出,每一步证明只对某些前提进行处理,其他部分只是重复抄写一遍,使证明过程显得冗长并且也不能显示出推理的特点。

实际上,推理过程通常是这样进行的:

“ 如果我参加羽毛球比赛,那么我要买新背心 ”,但“ 我没有买新背心 ”。

所以“ 我没有参加羽毛球比赛 ”。

“ 我参加跳远比赛或羽毛球比赛 ”,但“ 我没有参加羽毛球比赛 ”。

所以“ 我参加跳远比赛 ”。

“ 如果我参加跳远比赛, 那么我要买双新跑鞋 ”, 所以“ 我参加跳远比赛并且买双新跑鞋 ”。

由此可知,推理过程中采用“ 用到某个前提时,才引入这个前提 ”,“ 由某些前提推出的有效结论也可引入推理过程中 ”。因此若把推理的这些特点和蕴含式的证明结合起来就得

到直接证明法。

## 1.5.2 直接证明法

直接证明法遵循以下两条规则:

· P 规则: 前提在推理过程的任何时候都可引入使用。

· T 规则: 在推理过程中,如果有一个或多个命题公式蕴含 $S$,则 $S$ 可引入推理中。

例如,仍以上述所提问题为例,需证明

$$(P \vee Q) \wedge (P \quad R) \wedge (Q \quad S) \wedge \neg S \quad P \wedge R$$

用直接证明法证明如下:

| | |
|---|---|
| ① $Q \quad S$ | 利用 P 规则,引入前提。 |
| ② $\neg S$ | 利用 P 规则,引入前提。 |
| ③ $\neg Q$ | 由 ①,② 利用 T 规则。 |
| ④ $P \vee Q$ | 利用 P 规则,引入前提。 |
| ⑤ $\neg Q \quad P$ | 由 ④ 利用 T 规则。 |
| ⑥ $P$ | 由 ③,⑤ 利用 T 规则。 |
| ⑦ $P \quad R$ | 利用 P 规则,引入前提。 |
| ⑧ $R$ | 由 ⑥,⑦ 利用 T 规则。 |
| ⑨ $P \wedge R$ | 由 ⑥,⑧ 利用 T 规则。 |

为了简化书写,以后把“利用 P 规则,引入前提”简写作“P”;把“利用 T 规则”简写作“T”。

又如,证明 $P \quad Q, \neg Q \vee R, \neg R, \neg (\neg P \wedge S) \quad S$。

证明如下:

| | |
|---|---|
| ① $P \quad Q$ | P |
| ② $\neg Q \vee R$ | P |
| ③ $Q \quad R$ | T② |
| ④ $P \quad R$ | T①,③ |
| ⑤ $\neg R$ | P |
| ⑥ $\neg P$ | T④,⑤ |
| ⑦ $\neg (\neg P \wedge S)$ | P |
| ⑧ $P \vee \neg S$ | T⑦ |
| ⑨ $\neg P \quad \neg S$ | T⑧ |
| ⑩ $\neg S$ | T⑥,⑨ |

## 1.5.3 间接证明法

设有一组前提 $P_1, P_2, \cdots, P_n$,要推出有效结论 $Q$,即证明

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \quad Q$$

即证明

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \quad Q \quad 1$$

即证明

$$\neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \vee Q \quad 1$$

即证明

$$\neg(\neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \vee Q) \quad 0$$

即证明

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge \neg Q) \quad 0$$

由此可见,要证 $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \quad Q$,可把结论 $Q$ 的否定 $\neg Q$ 加入到前提中去,然后再证明 $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge \neg Q$ 为永假式即可,这种证明方法称为间接证明法,也称为反证法。

例如,利用间接证明法,证明 $(A \vee B) \quad C, C \quad D \vee E, E \quad F, \neg D \wedge \neg F \quad \neg A$。

可用间接证明法,即证明

$$(A \vee B) \quad C, C \quad D \vee E, E \quad F, \neg D \wedge \neg F, A \quad 0$$

| | |
|---|---|
| ① $A$ | P(附加前提) |
| ② $A \vee B$ | T① |
| ③ $(A \vee B) \quad C$ | P |
| ④ $C$ | T②,③ |
| ⑤ $C \quad D \vee E$ | P |
| ⑥ $D \vee E$ | T④,⑤ |
| ⑦ $\neg D \quad E$ | T⑥ |
| ⑧ $E \quad F$ | P |
| ⑨ $\neg D \quad F$ | T⑦,⑧ |
| ⑩ $D \vee F$ | T⑨ |
| 1 $\neg D \wedge \neg F$ | P |
| 12 $\neg(D \vee F)$ | T 1 |
| 13 $(D \vee F) \wedge \neg(D \vee F)$ 永假 | T⑩, 12 |

间接证明法的另一种情况是利用 CP 规则。如果要证

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \quad (A \quad B)$$

即证

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \quad (A \quad B) \quad 1$$

即证

$$\neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \vee (\neg A \vee B) \quad 1$$

即证

$$\neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge A) \vee B \quad 1$$

即证

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge A) \quad B \quad 1$$

即证

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge A \quad B$$

所以当所需推出的结论是 $A \quad B$ 的形式时,可先将 $A$ 作为附加前提,如果 $P_1 \wedge P_2 \wedge$

$\cdots \wedge P_n \wedge A \quad B$,就能证得 $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \quad A \quad B$,这就是 CP 规则。

例如,用间接证明法(CP 规则)证明$(A \vee B) \quad (C \wedge D), (D \vee F) \quad E \quad A \quad E$。

证明如下:

| | |
|---|---|
| ① $A$ | P(附加前提) |
| ② $A \vee B$ | T① |
| ③ $(A \vee B) \quad (C \wedge D)$ | P |
| ④ $C \wedge D$ | T②,③ |
| ⑤ $D$ | T④ |
| ⑥ $D \vee F$ | T⑤ |
| ⑦ $(D \vee F) \quad E$ | P |
| ⑧ $E$ | T⑥,⑦ |
| ⑨ $A \quad E$ | CP 规则 |

又如,分析下列情况,判断结论是否有效?

前提:(1) 我去看望老张或小李。

(2) 如果我要去看望老张,那么我要带些书。

(3) 如果我要带些书,那么我去新华书店。

结论:如果我没有去新华书店,那么我去看望小李。

解法如下:

此结论是有效结论。若令

$P$:我去看望老张。

$Q$:我去看望小李。

$R$:我带些书。

$S$:我去新华书店。

则需证明

$$P \vee Q, P \quad R, R \quad S \quad \neg S \quad Q$$

用 CP 规则证明:

| | |
|---|---|
| ① $\neg S$ | P(附加前提) |
| ② $R \quad S$ | P |
| ③ $\neg R$ | T①,② |
| ④ $P \quad R$ | P |
| ⑤ $\neg P$ | T③,④ |
| ⑥ $P \vee Q$ | P |
| ⑦ $\neg P \quad Q$ | T⑥ |
| ⑧ $Q$ | T⑤,⑦ |
| ⑨ $\neg S \quad Q$ | CP 规则 |

由此证得$\neg S \quad Q$为有效结论。

### 1.5.4 重点和难点分析

本节的重点是:熟练掌握直接证明法和间接证明法;熟练地判断结论是否有效。

难点是:熟练地把蕴含式证明用于推理。

**例 1.15** 用直接证明法证明: $A, (A \vee B) \quad (C \wedge D), (D \vee F) \quad E \quad E$。

证明

| | |
|---|---|
| ① $A$ | P |
| ② $A \vee B$ | T① |
| ③ $(A \vee B) \quad (C \wedge D)$ | P |
| ④ $C \wedge D$ | T②,③ |
| ⑤ $D$ | T④ |
| ⑥ $D \vee F$ | T⑤ |
| ⑦ $(D \vee F) \quad E$ | P |
| ⑧ $E$ | T⑥,⑦ |

**例 1.16** 用间接证明法证明: $P \quad Q, \neg Q \vee R, \neg R, \neg(\neg P \wedge S) \quad \neg S$。

证明

| | |
|---|---|
| ① $S$ | P(附加前提) |
| ② $P \quad Q$ | P |
| ③ $\neg Q \vee R$ | P |
| ④ $Q \quad R$ | T③ |
| ⑤ $P \quad R$ | T②,④ |
| ⑥ $\neg(\neg P \wedge S)$ | P |
| ⑦ $P \vee \neg S$ | T⑥ |
| ⑧ $S \quad P$ | T⑦ |
| ⑨ $S \quad R$ | T⑤,⑧ |
| ⑩ $R$ | T①,⑨ |
| 1 $\neg R$ | P |
| 12 $R \wedge \neg R$ 永假 | T⑩, 1 |

由此证得 $(P \quad Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R \wedge \neg(\neg P \wedge S) \wedge S \quad 0$,即证得 $(P \quad Q), (\neg Q \vee R), \neg R, \neg(\neg P \wedge S) \quad \neg S$。

**例 1.17** 用 CP 规则证明: $A \quad (B \quad C), (C \wedge D) \quad E, \neg F \quad (D \wedge \neg E) \quad A \quad (B \quad F)$。

证明 使用 CP 规则,即证明

$A, A \quad (B \quad C), (C \wedge D) \quad E, \neg F \quad (D \wedge \neg E) \quad B \quad F$ 再一次使用 CP 规则,即证明

$A, B, A \quad (B \quad C), (C \wedge D) \quad E, \neg F \quad (D \wedge \neg E) \quad F$

| | |
|---|---|
| ① $A$ | P(附加前提) |
| ② $A \quad (B \quad C)$ | P |
| ③ $B \quad C$ | T①,② |

④ $B$ P(附加前提)

⑤ $C$ T③,④

⑥ $(C \wedge D) \quad E$ P

⑦ $\neg (C \wedge D) \vee E$ T⑥

⑧ $\neg C \vee \neg D \vee E$ T⑦

⑨ $C \quad (\neg D \vee E)$ T⑧

⑩ $\neg D \vee E$ T⑤,⑨

⑪ $\neg\neg (\neg D \vee E)$ T⑩

⑫ $\neg (D \wedge \neg E)$ T⑪

⑬ $\neg F \quad (D \wedge \neg E)$ P

⑭ $F$ T⑫,⑬

⑮ $B \quad F$ CP 规则

⑯ $A \quad (B \quad F)$ CP 规则

**例 1.18** 分析下列事实:“今晚我去剧场看戏或者去夜大学上课;如果我去剧场看戏,那么我很高兴;如果我去夜大学上课,那么我要吃个鸡蛋;由于我没吃鸡蛋,所以我很高兴。”试写出前提和有效结论,并进行证明。

解 设

$P$:今晚我去剧场看戏。

$Q$:今晚我去夜大学上课。

$R$:我很高兴。

$S$:我吃了鸡蛋。

由题意可知,前提为:$P \overline{\vee} Q, P \quad R, Q \quad S, \neg S$。有效结论为:$R$。即证明

$P \overline{\vee} Q, P \quad R, Q \quad S, \neg S \quad R$

证明

① $\neg S$ P

② $Q \quad S$ P

③ $\neg Q$ T①,②

④ $P \overline{\vee} Q$ P

⑤ $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$ T④

⑥ $P \vee Q$ T⑤

⑦ $\neg Q \quad P$ T⑥

⑧ $P$ T③,⑦

⑨ $P \quad R$ P

⑩ $R$ T⑧,⑨

**例 1.19** 公安人员审查一件凶杀案,已知下列事实:

(1) 甲或乙是凶杀犯。

(2) 若甲是凶杀犯,则作案时间不能在上午。

(3) 若乙的供词可靠,则上午房间里的电视是开着的。

(4) 若乙的供词不可靠,则作案时间在上午。

(5) 上午房间里的电视没有开着。

问:凶杀犯是甲还是乙?

解　令

$P$:甲是凶杀犯。

$Q$:乙是凶杀犯。

$R$:作案时间在上午。

$S$:乙的供词可靠。

$T$:上午房间里电视是开着的。

由题意可知,前提为:

$$P \vee Q, P \quad \neg R, S \quad T, \neg S \quad R, \neg T$$

由于

| | |
|---|---|
| ① $\neg T$ | P |
| ② $S \quad T$ | P |
| ③ $\neg S$ | T①,② |
| ④ $\neg S \quad R$ | P |
| ⑤ $R$ | T③,④ |
| ⑥ $P \quad \neg R$ | P |
| ⑦ $\neg P$ | T⑤,⑥ |
| ⑧ $P \vee Q$ | P |
| ⑨ $\neg P \quad Q$ | T⑧ |
| ⑩ $Q$ | T⑦,⑧ |

所以 $P \vee Q, P \quad \neg R, S \quad T, \neg S \quad R, \neg T \quad Q$。

由此可知,凶杀犯是乙。

**例 1.20**　下列推理的结论是否是有效结论?

(1) 如果我得奖学金,那么我去美国留学。但我没去美国留学,所以我没有得奖学金。

(2) 如果他犯了错误,那么他神色慌张。他神色慌张,所以他犯了错误。

解　(1) 由题意可知,若令

$P$:我得奖学金。

$Q$:我去美国留学。

则前提为:$P \quad Q, \neg Q$。结论为:$\neg P$。由于

$$P \quad Q, \neg Q \quad \neg P$$

所以此结论是有效结论。

(2) 由题意可知,若令

$P$:他犯了错误。

$Q$:他神色慌张。

则前提为:$P \quad Q, Q$。结论为:$P$。由于

$((P \quad Q)\wedge Q) \quad P \quad ((\neg P \vee Q)\wedge Q) \quad P$

$\qquad\qquad\qquad\qquad Q \quad P$ (吸收律)

$\qquad\qquad\qquad\qquad 1$

也即$((P \quad Q)\wedge Q) \quad P$不是永真式,所以

$$(P \quad Q)\wedge Q \quad P$$

由此可知,此结论不是有效结论。

## 1.5.5 自测练习

1 .试用直接证明法证明下列各蕴含式。

(1) $\neg D, \neg C \vee D, A \wedge B \quad C \quad \neg A \vee \neg B$

(2) $A \quad (\neg B \vee C), D \vee E, (D \vee E) \quad A \quad B \quad C$

(3) $P \quad Q, \neg Q \vee R, \neg R, P \vee \neg S \quad \neg S$

(4) $A \quad (B \quad C), \neg D \vee A, B \quad D \quad C$

(5) $M \overline{\vee} Q, M \quad S, S \quad \neg R \quad R \quad Q$

(6) $\neg(P \quad Q) \quad \neg(R \vee S), (Q \quad P) \vee \neg R, P \quad P \rightleftarrows Q$

(7) $P \rightleftarrows Q, S \quad \neg Q, S \vee R, \neg R \quad \neg P$

(8) $P \vee Q, P \quad R, Q \quad S, \neg S \quad R$

2 .用间接证明法证明下列各式。

(1) $P \quad Q, \neg Q \vee R, \neg(\neg P \wedge S), \neg R \quad \neg S$

(2) $(A \quad B)\wedge(C \quad D)\wedge(B \quad E)\wedge(D \quad F)\wedge\neg(E \wedge F)\wedge(A \quad C) \quad \neg A$

(3) $(P \quad Q)\wedge(S \quad \neg Q)\wedge(S \vee R)\wedge\neg R \quad \neg P$

(4) $\neg P \quad Q, P \quad \neg R, Q \quad S, \neg S \quad \neg R$

3 .用 CP 规则证明下列各式。

(1) $A \quad (\neg B \vee C), D \vee E, (D \vee E) \quad A \quad B \quad C$

(2) $A, B \quad (A \quad C), (C \wedge D) \quad E, \neg F \quad (D \wedge \neg E) \quad B \quad F$

(3) $A \quad (B \quad C), \neg D \vee A, B \quad D \quad C$

(4) $\neg D, \neg C \vee D, (A \wedge B) \quad C \quad A \quad \neg B$

4 .对于下列一组前提,请给出它们的有效结论,并进行证明。

(1) 如果我努力学习,那么我能通过考试,如果我能通过考试,那么我去看电影,但我没去看电影。

(2) 统计表格有错,其原因仅有两个:一个原因是数据有错,另一个原因是计算有错。现查出统计表格有错,但计算没有错。

5 .甲、乙、丙和丁参加乒乓球比赛,已知情况是:

(1) 若甲获冠军,则乙或丙获亚军。

(2) 若乙获亚军,则甲不能获冠军。

(3) 若丁获亚军,则丙不能获亚军。

(4) 甲确实获得冠军。

所以丁没有获得亚军。请写出前提和结论,并证明此结论是有效结论。

6 .分析下列事实:“早饭我吃面包或蛋糕;如果我吃面包,那么我还要喝牛奶;如果我吃蛋糕,那么我还要喝咖啡;所以早饭我吃的是面包加牛奶。”写出前提和有效结论,并进行证明。

7 .下列推理中,哪些结论是有效结论?

(1) 如果我参加长跑比赛,那么我很疲劳;但我不疲劳,所以我没有参加长跑比赛。

(2) 如果你上课用心听讲,那么你考试及格;你上课不用心听讲,所以你考试不及格。

### 1.5.6 自测练习答案

1 .(1)

| | |
|---|---|
| ① $\neg D$ | P |
| ② $\neg C \lor D$ | P |
| ③ $C \quad D$ | T② |
| ④ $\neg C$ | T①,③ |
| ⑤ $A \land B \quad C$ | P |
| ⑥ $\neg (A \land B)$ | T④,⑤ |
| ⑦ $\neg A \lor \neg B$ | T⑥ |

(2)

| | |
|---|---|
| ① $D \lor E$ | P |
| ② $(D \lor E) \quad A$ | P |
| ③ $A$ | T①,② |
| ④ $A \quad (\neg B \lor C)$ | P |
| ⑤ $\neg B \lor C$ | T③,④ |
| ⑥ $B \quad C$ | T⑤ |

(3)

| | |
|---|---|
| ① $\neg Q \lor R$ | P |
| ② $Q \quad R$ | T① |
| ③ $P \quad Q$ | P |
| ④ $P \quad R$ | T②,③ |
| ⑤ $\neg R$ | P |
| ⑥ $\neg P$ | T④,⑤ |
| ⑦ $P \lor \neg S$ | P |
| ⑧ $S \quad P$ | T⑦ |
| ⑨ $\neg S$ | T⑥,⑧ |

(4)

| | |
|---|---|
| ① $\neg D \lor A$ | P |
| ② $D \quad A$ | T① |
| ③ $A \quad (B \quad C)$ | P |

| | | |
|---|---|---|
| ④ | $D \quad (B \quad C)$ | T②, ③ |
| ⑤ | $\neg D \vee \neg B \vee C$ | T④ |
| ⑥ | $B \quad (D \quad C)$ | T⑤ |
| ⑦ | $B$ | P |
| ⑧ | $D \quad C$ | T⑥, ⑦ |

(5)

| | | |
|---|---|---|
| ① | $M \quad S$ | P |
| ② | $S \quad \neg R$ | P |
| ③ | $M \quad \neg R$ | T①, ② |
| ④ | $R \quad \neg M$ | T③ |
| ⑤ | $M \overline{\vee} Q$ | P |
| ⑥ | $(\neg M \quad Q) \wedge (Q \quad \neg M)$ | T⑤ |
| ⑦ | $\neg M \quad Q$ | T⑥ |
| ⑧ | $R \quad Q$ | T④, ⑦ |

(6)

| | | |
|---|---|---|
| ① | $R$ | P |
| ② | $(Q \quad P) \vee \neg R$ | P |
| ③ | $R \quad (Q \quad P)$ | T② |
| ④ | $Q \quad P$ | T①, ③ |
| ⑤ | $\neg (P \quad Q) \quad \neg (R \vee S)$ | P |
| ⑥ | $(P \quad Q) \vee \neg (R \vee S)$ | T⑤ |
| ⑦ | $(R \vee S) \quad (P \quad Q)$ | T⑥ |
| ⑧ | $R \vee S$ | T① |
| ⑨ | $P \quad Q$ | T⑦, ⑧ |
| ⑩ | $(P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$ | T④, ⑨ |
| 1 | $P \rightleftarrows Q$ | T⑩ |

(7)

| | | |
|---|---|---|
| ① | $\neg R$ | P |
| ② | $S \vee R$ | P |
| ③ | $\neg R \quad S$ | T② |
| ④ | $S$ | T①, ③ |
| ⑤ | $S \quad \neg Q$ | P |
| ⑥ | $\neg Q$ | T④, ⑤ |
| ⑦ | $P \rightleftarrows Q$ | P |
| ⑧ | $(P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$ | T⑦ |
| ⑨ | $P \quad Q$ | T⑧ |
| ⑩ | $\neg P$ | T⑥, ⑨ |

(8)

| | |
|---|---|
| ① ┐$S$ | P |
| ② $Q$ $S$ | P |
| ③ ┐$Q$ | T①,② |
| ④ $P \vee Q$ | P |
| ⑤ ┐$Q$ $P$ | T④ |
| ⑥ $P$ | P |
| ⑦ $P$ $R$ | T③,⑤ |
| ⑧ $R$ | T⑥,⑦ |

2 .(1)

| | |
|---|---|
| ① ┐(┐$P \wedge S$) | P |
| ② $P \vee$ ┐$S$ | T① |
| ③ $S$ $P$ | T② |
| ④ $S$ | P(**附加前提**) |
| ⑤ $P$ | T③,④ |
| ⑥ $P$ $Q$ | P |
| ⑦ ┐$Q \vee R$ | P |
| ⑧ $Q$ $R$ | T⑦ |
| ⑨ $P$ $R$ | T⑥,⑧ |
| ⑩ ┐$R$ | P |
| 11 ┐$P$ | T⑨,⑩ |
| 12 $P \wedge$ ┐$P$ **永假** | T⑤, 11 |

(2)

| | |
|---|---|
| ① $A$ | P(**附加前提**) |
| ② $A$ $C$ | P |
| ③ $C$ | T①,② |
| ④ $C$ $D$ | P |
| ⑤ $D$ | T③,④ |
| ⑥ $D$ $F$ | P |
| ⑦ $F$ | T⑤,⑥ |
| ⑧ ┐($E \wedge F$) | P |
| ⑨ ┐$E \vee$ ┐$F$ | T⑧ |
| ⑩ $F$ ┐$E$ | T⑨ |
| 11 ┐$E$ | T⑦,⑩ |
| 12 $A$ $B$ | P |
| 13 $B$ | T①, 12 |
| 14 $B$ $E$ | P |
| 15 $E$ | T 13 , 14 |

| | |
|---|---|
| ⑥ $E \wedge \neg E$ 永假 | T①,⑤ |

(3)

| | |
|---|---|
| ① $P$ | P(附加前提) |
| ② $P \quad Q$ | P |
| ③ $Q$ | T①,② |
| ④ $S \quad \neg Q$ | P |
| ⑤ $\neg S$ | T③,④ |
| ⑥ $S \vee R$ | P |
| ⑦ $\neg S \quad R$ | T⑥ |
| ⑧ $R$ | T⑤,⑦ |
| ⑨ $\neg R$ | P |
| ⑩ $R \wedge \neg R$ 永假 | T⑨,⑩ |

(4)

| | |
|---|---|
| ① $R$ | P(附加前提) |
| ② $P \quad \neg R$ | P |
| ③ $\neg P$ | T①,② |
| ④ $\neg P \quad Q$ | P |
| ⑤ $Q$ | T③,④ |
| ⑥ $Q \quad S$ | P |
| ⑦ $S$ | T⑤,⑥ |
| ⑧ $\neg S$ | P |
| ⑨ $S \wedge \neg S$ 永假 | T⑦,⑧ |

3 .(1)

| | |
|---|---|
| ① $B$ | P(附加前提) |
| ② $A \quad (\neg B \vee C)$ | P |
| ③ $\neg A \vee \neg B \vee C$ | T② |
| ④ $B \quad (A \quad C)$ | T③ |
| ⑤ $A \quad C$ | T①,④ |
| ⑥ $(D \vee E) \quad A$ | P |
| ⑦ $D \vee E$ | P |
| ⑧ $A$ | T⑥,⑦ |
| ⑨ $C$ | T⑤,⑧ |
| ⑩ $B \quad C$ | CP 规则 |

(2)

| | |
|---|---|
| ① $B$ | P(附加前提) |
| ② $B \quad (A \to C)$ | P |
| ③ $A \to C$ | T①,② |
| ④ $A$ | P |

| | |
|---|---|
| ⑤ $C$ | T③,④ |
| ⑥ $(C \land D) \to E$ | P |
| ⑦ $\neg (C \land D) \lor E$ | T⑥ |
| ⑧ $\neg C \lor \neg D \lor E$ | T⑦ |
| ⑨ $C \to (\neg D \lor E)$ | T⑧ |
| ⑩ $\neg D \lor E$ | T⑤,⑨ |
| ⑪ $\neg (D \land \neg E)$ | T⑩ |
| ⑫ $\neg F \to (D \land \neg E)$ | P |
| ⑬ $F$ | T⑪,⑫ |
| ⑭ $B \to F$ | CP 规则 |

(3)

| | |
|---|---|
| ① $D$ | P(附加前提) |
| ② $\neg D \lor A$ | P |
| ③ $D \to A$ | T② |
| ④ $A$ | T①,③ |
| ⑤ $A \to (B \to C)$ | P |
| ⑥ $B \to C$ | T④,⑤ |
| ⑦ $B$ | P |
| ⑧ $C$ | T⑥,⑦ |
| ⑨ $D \to C$ | CP 规则 |

(4)

| | |
|---|---|
| ① $A$ | P(附加前提) |
| ② $(A \land B) \to C$ | P |
| ③ $\neg (A \land B) \lor C$ | T② |
| ④ $\neg A \lor \neg B \lor C$ | T③ |
| ⑤ $A \to (B \to C)$ | T④ |
| ⑥ $B \to C$ | T①,⑤ |
| ⑦ $\neg C \lor D$ | P |
| ⑧ $C \to D$ | T⑦ |
| ⑨ $B \to D$ | T⑥,⑧ |
| ⑩ $\neg D$ | P |
| ⑪ $\neg B$ | T⑨,⑩ |
| ⑫ $A \to \neg B$ | CP 规则 |

4.(1) 令

$P$:我努力学习。

$Q$:我通过考试。

$R$:我看电影。

由题意可知,前提为:$P \to Q, Q \to R, \neg R$,有效结论为:$\neg P$,即证明

$\neg R, P \to Q, Q \to R \quad \neg P$

**证明**

| | |
|---|---|
| ① $P \to Q$ | P |
| ② $Q \to R$ | P |
| ③ $P \to R$ | T①,② |
| ④ $\neg R$ | P |
| ⑤ $\neg P$ | T③,④ |

(2) **令**

$P$:**统计表格有错。**

$Q$: **数据有错。**

$R$: **计算有错。**

**由题意可知,前提为**: $P \rightleftarrows (Q \vee R)$, $P$, $\neg R$,**有效结论为**: $Q$。**即证明**

$$P \rightleftarrows (Q \vee R), P, \neg R \quad Q$$

**证明**

| | |
|---|---|
| ① $P \rightleftarrows (Q \vee R)$ | P |
| ② $(P \to (Q \vee R)) \wedge ((Q \wedge R) \to P)$ | T① |
| ③ $P \to (Q \vee R)$ | T② |
| ④ $P$ | P |
| ⑤ $Q \vee R$ | T③,④ |
| ⑥ $\neg R \to Q$ | T⑤ |
| ⑦ $\neg R$ | P |
| ⑧ $Q$ | T⑥,⑦ |

5 .**令**

$P$:**甲获冠军。**

$Q$: **乙获亚军。**

$R$: **丙获亚军。**

$S$:**丁获亚军。**

**则前提为**: $P \to (Q \overline{\vee} R)$, $Q \to \neg P$, $S \to \neg R$, $P$, **结论为**: $\neg S$。**此结论是有效结论,下面给予证明。即需证明**

$$P \to (Q \overline{\vee} R), Q \to \neg P, S \to \neg R, P \quad \neg S$$

**用间接证明法。**

| | |
|---|---|
| ① $S$ | P(**附加前提**) |
| ② $S \to \neg R$ | P |
| ③ $\neg R$ | T①,② |
| ④ $P$ | P |
| ⑤ $P \to (Q \overline{\vee} R)$ | P |
| ⑥ $Q \overline{\vee} R$ | T④,⑤ |

| | |
|---|---|
| ⑦ $(\neg Q \to R) \wedge (R \to \neg Q)$ | T⑥ |
| ⑧ $\neg Q \to R$ | T⑦ |
| ⑨ $Q \to \neg P$ | P |
| ⑩ $\neg Q$ | T④, ⑨ |
| 1 $R$ | T⑧, ⑩ |
| 2 $R \wedge \neg R$(矛盾) | T③, 1 |

6 .令

$P$:早饭我吃面包。

$Q$:早饭我吃蛋糕。

$R$:我喝牛奶。

$S$:我喝咖啡。

由题意可知,前提为:$P \vee Q, P \to R, Q \to S, \neg S$,结论为:$P \wedge R$,且是有效结论。即证

$$P \vee Q, P \to R, Q \to S, \neg S \quad P \wedge R$$

证明

| | |
|---|---|
| ① $\neg S$ | P |
| ② $Q \to S$ | P |
| ③ $\neg Q$ | T①, ② |
| ④ $P \vee Q$ | P |
| ⑤ $\neg Q \to P$ | T④ |
| ⑥ $P$ | T③, ⑤ |
| ⑦ $P \to R$ | P |
| ⑧ $R$ | T⑥, ⑦ |
| ⑨ $P \wedge R$ | T⑥, ⑧ |

7 .(1) 是有效结论。由题意可知,若令

$P$:我参加长跑比赛。

$Q$:我很疲劳。

则前提为:$P \to Q, \neg Q$。结论是$\neg P$。由于

$P \to Q, \neg Q \quad \neg P$

所以此结论是有效结论。

(2) 不是有效结论。由题意可知,若令

$P$:你上课用心听讲。

$Q$:你考试及格。

则前提为:$P \to Q, \neg P$,结论是$\neg Q$。由于

$P \to Q, \neg P \quad \neg Q$

所以此结论不是有效结论。

# 第 2 章　谓 词 逻 辑

上一章里,介绍了命题逻辑。在命题逻辑中,研究的主要对象是命题,而命题是由一些原子命题经联结词组合而成的。在命题逻辑中,原子命题是最基本的单元,它本身是不可再分解的。正是基于这一认定,使我们不再对原子命题的内部结构进行细致的分析。于是,对于许多有着密切联系的命题,如果只是简单地判定它们是否相同,却不能对它们的内在联系做进一步的分析,那么命题逻辑的使用范围就受到很大限制。

历史上有一个著名的“苏格拉底三段论”,即

凡人都是要死的。

苏格拉底是人。

所以,苏格拉底是要死的。

其正确性是有目共睹的。但在命题逻辑中,若用 $P$ 表示“凡人都是要死的”,用 $Q$ 表示“苏格拉底是人”,用 $R$ 表示“苏格拉底是要死的”。由于把命题 $P$、$Q$、$R$ 看做是 3 个不同的没有联系的命题,我们就得不出 $R$ 应是 $P$、$Q$ 的逻辑结论,即无法证得:

$$P, Q \quad R$$

这充分暴露了命题逻辑反映客观事实的局限性。究其原因,就在于:命题逻辑以原子命题为基本单位,不足以反映“苏格拉底三段论”中命题的内部结构以及命题之间的内在联系。为了进一步的讨论,我们有必要打破原子命题,深入其中分析个体、谓词、量词等,研究它们的形式结构与逻辑关系,总结出正确的推理形式和规则,这就是谓词逻辑的核心内容。

本章将介绍个体和谓词的概念,在谓词公式中引进量词及其辖域等相关定义,展开关于谓词演算的等价式与蕴含式的讨论,并在此基础上介绍有关前束范式的理论,以及谓词演算的推理理论。

在本章的学习中,读者应牢牢把握谓词逻辑是命题逻辑的继承和发展这一基本思想。按自学考试大纲的考核要求,谓词概念要求达到“领会”层次;量词和合式公式要求达到“识记”层次;谓词演算的等价式与蕴含式要求达到“领会”层次;谓词演算的推理理论要达到“简单应用”层次。

## 2.1　谓词的概念

### 2.1.1　个体与谓词

原子命题,作为一个特殊的陈述句,需要指出“谁”(或“什么”)、“怎么样”这两部分内容。比如“苏格拉底是人”,其中的“苏格拉底”回答了“谁”的问题,而“是人”回答了“怎么样”的问题。又如“张三和李四是好朋友”,其中的“张三”、“李四”共同担当了“谁”的角色,

而“是好朋友”担当了“怎么样”的角色,表明张三和李四之间的关系。再如“3 比 2 大”,其中的“3”和“2”都充当着“什么”的角色,“…… 比 …… 大”则说明了“怎么样”。

一般把原子命题中指出“谁”(或“什么”) 的部分称为个体,亦称客体,它是指可以独立存在的对象,可能是具体的,也可能是抽象的。我们又把原子命题中指出“怎么样”的部分称为谓词,一般用来说明个体的性质或个体之间的关系。

再注意到“张三是人”,“李四是人”与“苏格拉底是人”这 3 句话的共同之处是“某某是人”,它们的谓词是一致的,所不同的是每个命题的个体不同。可以用符号来代替谓词,如用

$A(\cdot)$ 表示:· 是人

那么,$A$(张三) 就表示“张三是人”,$A$(李四) 就表示“李四是人”,而 $A$(苏格拉底) 则表示“苏格拉底是人”。

再进一步地,可以将个体符号化。如用 $a$ 表示张三,$b$ 表示李四,$s$ 表示苏格拉底,上述 3 个原子命题就依次表示成 $A(a)$,$A(b)$ 和 $A(s)$。

通常,用大写的英文字母表示谓词,用小写的英文字母表示个体,以便区别。

如果用 $B(\cdot,\cdot)$ 表示:第一个位置上的 · 比第二个位置上的 · 大,那么,“3 比 2 大”就可表示成 $B(3,2)$,是个真命题;而 $B(2,3)$ 意即“2 比 3 大”,显然是个假命题。如果用 $C(\cdot,\cdot)$ 表示:第一个 · 和第二个 · 是好朋友,那么,“张三和李四是好朋友”就可表为 $C(a,b)$($a$,$b$ 的约定如前),$C(b,a)$ 就是“李四和张三是好朋友”,其真值与 $C(a,b)$ 的真值相同。

### 2.1.2　命题函数与 $n$ 元谓词

一个谓词,如

$A(\cdot)$ 表示:· 是人

并不是一个命题,只有当 $(\cdot)$ 中的 · 被确定的个体替换后才成为命题。这里的 · 如同一个“空位置”等待个体来填充,不同的个体填充后,就产生不同的命题。不妨用一个变元 $x$ 来填充它,记成 $A(x)$,表示“$x$ 是人”。此处的 $x$ 是抽象的或泛指的,可以是 $a$(张三)、$b$(李四) 或 $s$(苏格拉底),甚至于是其他的客体。

于是,得到了谓词的函数表示形式。称表示具体或特定的个体为个体常元,称表示抽象或泛指的个体为个体变元。个体变元的取值范围称为个体域(或论域),将一切事物组成的个体域称为全总个体域。

类似地,称表示具体性质或关系的谓词为谓词常元,如前面提到的 $A(s)$,$B(3,2)$,$C(a,b)$。

称由一个谓词和一些个体变元组成的表达式为谓词变元或原子命题函数。

在命题逻辑中,组合一个或若干个原子命题与逻辑联结词可以构成复合命题。同样,在谓词逻辑中,原子命题函数扮演了命题逻辑中原子命题的角色。

由一个或若干个原子命题函数与逻辑联结词组合而成的表达式称为复合命题函数,也简称为命题函数。

例如,$B(x,y) \vee B(y,x)$ 表示“$x$ 大于 $y$ 或者 $y$ 大于 $x$”,$A(x) \wedge A(y) \quad C(x,y)$ 表示“如 $x$ 是人并且 $y$ 是人,则 $x$ 和 $y$ 是好朋友”,都是命题函数。

在谓词变元中,个体变元的个数称为谓词的元数。如 $A(x)$ 为一元谓词,$B(x, y)$ 和 $C(x, y)$ 皆为二元谓词,而 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $n$ 元谓词。

一般地,一元谓词说明了一个个体的性质,多元谓词说明了多个个体之间的关系。

谓词并不是命题。当谓词中的所有个体变元都指定成个体常元时,它才是一个确定的命题。显然,一元谓词需要指定一个个体常元,$n$ 元谓词需要指定 $n$ 个个体常元,方能成为命题。此时,这类谓词不再含有个体变元,可称为 0 元谓词。于是,不妨视命题为 0 元谓词,这样命题就成为谓词的一种特殊情形。

### 2.1.3　重点和难点分析

本节的重点是:掌握客体与谓词、命题函数、$n$ 元谓词等重要概念,了解个体域与全总个体域。通过视命题为 0 元谓词,作为谓词的一种特殊情形这一思路,来认识命题逻辑是谓词逻辑的一部分,即谓词逻辑是命题逻辑的继承和发展,这对于读者完成本章的学习将大有裨益。

本节的难点在于:搞清楚一个原子命题中哪部分属于谓词,哪部分属于个体,这与语言学中的语言结构有相近之处,却又不尽相同,请看下面的例子;其次,在谓词中,个体通常是有先后次序的,下面的例子也说明了这一点。

**例 2.1**　用谓词表达式写出下述命题:

小张只想吃肉或吃鸡蛋,但不想吃蔬菜,所以他容易生病。

解　设小张为 $a$,肉为 $m$,鸡蛋为 $e$,蔬菜为 $v$,$A(x, y)$: $x$ 想吃 $y$,$B(x)$: $x$ 容易生病。则命题可以改写为:

$(A(a, m) \vee A(a, e)) \wedge \neg A(a, v) \quad B(a)$。

**例 2.2**　将下列命题在谓词逻辑中用 0 元谓词符号化。

(1)　2 不是有理数。

(2) 如果飞机比火车快,火车又比汽车快,那么,飞机比汽车快。

解　(1) 设 $Q(x)$: $x$ 是有理数。

原命题变为: $\neg Q(\ 2)$。

(2) 设 $a$:飞机,$b$:火车,$c$:汽车,$A(x, y)$: $x$ 比 $y$ 快。

原命题变为: $A(a, b) \wedge A(b, c) \quad A(a, c)$。

### 2.1.4　自测练习

1.用谓词表达式写出下列命题。

(1) 大林和小林是兄弟。

(2) 长江和黄河是我们的母亲河。

(3) $m$ 是偶数,当且仅当 $m$ 能整除 2。

2.将下列命题用 0 元谓词表示。

(1) 李红不是学生。

(2) 王伟是男飞行员。

(3) 马老师讲离散数学或数值分析。

(4) 如果 $n$ 是奇数,那么 $n$ 不能整除 2。

3 .用谓词表达式符号化下述命题。

刘佳不喜欢唱歌或跳舞,她喜欢画画,所以她去看美术展览。

### 2 .1 .5　自测练习答案

1 .(1) 设 $a$:大林, $b$:小林, $A(x, y)$: $x$ 和 $y$ 是兄弟。

原命题变为: $A(a, b)$。

(2) 设 $a$:长江, $b$:黄河, $A(x)$: $x$ 是我们的母亲河。

原命题变为: $A(a) \wedge A(b)$。

(3) 设 $A(x)$: $x$ 是偶数, $B(x, y)$: $x$ 能整除 $y$。

原命题变为: $A(m) \rightleftarrows B(m, 2)$。

这里,与命题逻辑相仿,应注意“和”字的用法: 在(1) 中它连接一个谓词中的两个个体常元,在(2) 中它联结两个命题。

2 .(1) 设 $l$:李红, $A(x)$: $x$ 是学生。

原命题变为: $\neg A(l)$。

(2) 设 $w$:王伟, $A(x)$: $x$ 是男人, $B(x)$: $x$ 是飞行员。

原命题变为: $A(w) \wedge B(w)$。

(3) 设 $m$:马老师, $l$:离散数学, $s$:数值分析, $A(x, y)$: $x$ 讲 $y$。

原命题变为: $A(m, l) \vee A(m, s)$。

(4) 设 $O(x)$: $x$ 是奇数, $D(x, y)$: $x$ 能整除 $y$。

原命题变为: $O(n) \quad \neg D(n, 2)$。

3 .设 $l$:刘佳, $s$:唱歌, $d$:跳舞, $p$:画画, $A(x, y)$: $x$ 喜欢 $y$, $B(x)$: $x$ 看美术展览。

原命题变为: $\neg (A(l, s) \vee A(l, d)) \wedge A(l, p) \quad B(l)$。

## 2. 2　量词及合式公式

### 2. 2. 1　量词及其辖域

再来分析著名的“苏格拉底三段论”。如果说“苏格拉底是人”,“苏格拉底是要死的”这两个原子命题尚可通过上节中指定谓词中个体常元的办法来实现,那么,“凡人都是要死的”这一原子命题却无法通过上述途径而得以解决。

这意味着在命题函数中,除了个体、谓词和逻辑联结词外,还需要一类在某种程度上表示数量的词,称作量词。

请看下列命题:

(1) 凡人都是要死的。

(2) 任一自然数为实数。

(3) 所有偶数都是整数。

它们的真假值都与论域中的每一个个体有关。为了进一步探讨上述命题的共性,把它们改

写成:

(1) 对于所有的 $x$,如果 $x$ 是人,则 $x$ 是要死的。

(2) 对于所有的 $x$,如果 $x$ 是自然数,则 $x$ 是实数。

(3) 对于所有的 $x$,如果 $x$ 是偶数,则 $x$ 是整数。

不难发现,它们都有着共同的特征:“对于所有的 $x$”用来限定个体域中的所有个体无一例外地如何如何。引进符号$(\forall x)$来表示这一共同特征——“对于所有的 $x$”,至于各命题中的那些具体内容,可符号化为:

(1) $(\forall x)(M(x) \to D(x))$

其中,$M(x)$: $x$ 是人。

$D(x)$: $x$ 是要死的。

(2) $(\forall x)(N(x) \to R(x))$

其中,$N(x)$: $x$ 是自然数。

$R(x)$: $x$ 是实数。

(3) $(\forall x)(E(x) \to I(x))$

其中,$E(x)$: $x$ 是偶数。

$I(x)$: $x$ 是整数。

称 $\forall$ 为全称量词,对应于自然语言中常用的“所有”、“任意的”、“一切”、“凡是”等等。$\forall xP(x)$ 表示个体域中的所有个体都具有性质 $P$。

相仿地,称 $\exists$ 为存在量词,对应于自然语言中的“存在”、“有某些”、“至少有一个”等等。$\exists x$ 表示存在个体域的某个个体,$\exists xP(x)$ 表示存在着个体域中的个体具有性质 $P$。

例如下列命题:

(1) 有人不怕死。

(2) 某些有理数是自然数。

可以改写成:

(1) 存在着 $x$, $x$ 是人并且 $x$ 不怕死。

(2) 存在着 $x$, $x$ 是有理数并且 $x$ 是自然数。

可令 $M(x)$: $x$ 是人。

$H(x)$: $x$ 怕死。

$Q(x)$: $x$ 是有理数。

$N(x)$: $x$ 是自然数。

那么,上述命题可分别符号化为:

(1) $\exists x(M(x) \wedge \neg H(x))$

(2) $\exists x(Q(x) \wedge N(x))$

本章中,也将$(\forall x)$写成 $\forall x$。

细心的读者一定会注意到:在前面的例子中,对不同量词后面的逻辑联结词的处理方式有所不同。这是因为自然语言中所提及的对象往往只是全总个体域中特定的一部分,可能并不是论域本身的全部。把说明所论及的对象特定性质的谓词称为特性谓词,它常常用来限定自然语言生效的特定范围。

比如说“凡人都要呼吸”这个命题，强调的是：人一定要呼吸（当然，这个人指的是活人，以后也是同样），而对其他个体呼吸与否并未谈论。如果设 $M(x)$：$x$ 是人，$B(x)$：$x$ 要呼吸，命题 $\forall x(M(x)\rightarrow B(x))$ 表示：“个体域中的所有个体，如果他是人，那么他要呼吸”，而命题 $\forall x(M(x)\wedge B(x))$ 表示：“个体域中的所有个体是人并且都要呼吸”。显然，当个体域中有除了人以外的其他个体时，$\forall x(M(x)\wedge B(x))$ 为假命题，并与所要表达的语意相距甚远。相反地，$\forall x(M(x)\rightarrow B(x))$ 恰到好处地表达了原话的含义。仅就两个元素的论域 $D=\{a,b\}$（其中 $a$ 为本书，$b$ 先冒昧地设为尊敬的读者）而言，“凡人都要呼吸”这个论域中，注重的是作为人的 $b$ 要呼吸，$M(b)\rightarrow B(b)$ 为真命题。至于作为书的 $a$，由于 $M(a)$ 为假，$M(a)\rightarrow B(a)$ 为真，从而保证了 $\forall x(M(x)\rightarrow B(x))$ 与 $M(b)\rightarrow B(b)$ 的一致性；另一方面，$M(a)\wedge B(a)$ 为假，导致 $\forall x(M(x)\wedge B(x))$ 为假命题，而体现不出关于 $b$ 的结论。

类似地，命题“有人不怕死”强调的是有不怕死的人，而不是其他什么事物不怕死，尽管也有些人怕死。设 $M(x)$：$x$ 是人，$F(x)$：$x$ 怕死，命题 $\exists x(M(x)\rightarrow \neg F(x))$ 表示：“存在着个体域中的个体，如果他是人，那么他不怕死”，而命题 $\exists x(M(x)\wedge \neg F(x))$ 表示：“存在着个体域中的个体是人并且不怕死”。后者与所要表达的意思完全吻合，而前者却不尽相同，特别是当个体域中有除了人以外的其他个体时。仍以前面的两个元素 $D=\{a,b\}$ 为例，对于作为书的 $a$，$M(a)$ 为假，于是 $M(a)\rightarrow \neg F(a)$ 为真，从而 $\exists x(M(x)\rightarrow \neg F(x))$ 不论读者怕死与否都是真命题，不能忠实地表达原话的意思；另一方面，$M(a)$ 为假，导致了 $M(a)\wedge \neg F(a)$ 为假，同时，$M(b)$ 为真，保证了 $\exists x(M(x)\wedge \neg F(x))$ 真与否完全取决于 $\neg F(b)$ 是真还是假，正是我们所期待的。因而，$\exists x(M(x)\wedge \neg F(x))$ 恰如其分地表现出“有人不怕死”的真正含义。

据此，一般地，对全称量词而言，特性谓词常作为条件式中的前件；对存在量词而言，特性谓词常作为合取式中的一项。

一旦论域被特别指定时，谓词表达式就可能相应地发生变化。比方说，如果论域中仅含人，符号同前，那么 $\forall x(M(x)\rightarrow B(x))$ 与 $\forall x(M(x)\wedge B(x))$，$\forall x(M(x)\rightarrow \neg F(x))$ 与 $\exists x(M(x)\wedge \neg F(x))$ 就完全一致了，它们分别可以化为 $\forall xB(x)$，$\exists x\neg F(x)$ 的形式。

由此可见，在不同的个体域中，命题的表示形式将可能有所不同。一般约定：如果事先没有特别指明个体域，则认为个体域就是全总个体域。

在上一节中曾经指出：谓词不是命题，可用指定个体变元为个体常元的方法使之转化为命题。现在又有了新的手段：对于仅含个体变元 $x$ 的命题函数，当其中的 $x$ 受到全称量词 $\forall$ 或存在量词 $\exists$ 的制约时，就不再无拘无束了，此时的命题函数就变成了命题。

称量词起作用的区域为它的辖域或作用域。例如：$\forall x(M(x)\rightarrow B(x))$ 中，$\forall x$ 的辖域为 $M(x)\rightarrow B(x)$；而 $\forall xM(x)\rightarrow B(x)$ 中，$\forall x$ 的辖域却仅为 $M(x)$。

关于多元的命题函数，可以有多个量词作用其上，也会有类似的结论。例如：有句广告语“总有一款适合您”可符号化为

$$\forall x(M(x)\rightarrow \exists y(W(y)\wedge F(x,y)))$$

其中，$M(x)$：$x$ 是人，$W(y)$：$y$ 是我们的产品，$F(x,y)$：$y$ 适合 $x$。这里，$\forall x$ 的辖域是

$M(x) \to \exists y(W(y) \wedge F(x, y))$,而 $\exists y$ 的辖域是 $W(y) \wedge F(x, y)$。

### 2.2.2 谓词的合式公式

有了谓词和量词的概念,我们描述命题就能比命题逻辑更为广泛和深入。但并不是随便一个谓词表达式都有意义,如 $\exists x \wedge P(x, y)$。如何将原子命题函数与逻辑联结词和量词组合,构成一个有意义的可进行谓词演算的"合体"呢?为此,我们给出谓词的合式公式的定义,它表明了量词、联结词和命题函数的组合规则。

首先,称不含有任何联结词的命题函数 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为原子谓词公式。

**定义 2.2.1** 满足下列条件的表达式,称为谓词的合式公式:

(1) 原子谓词公式是合式公式。

(2) 若 $A$ 是合式公式,则 $\neg A$ 是合式公式。

(3) 若 $A$ 和 $B$ 是合式公式,则 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ 和 $(A \rightleftarrows B)$ 是合式公式。

(4) 若 $A$ 是合式公式, $x$ 是 $A$ 中出现的变元,则 $(\forall x)A$ 和 $(\exists x)A$ 是合式公式。

(5) 只有经过有限次地应用规则(1) ~ (4) 中的一个或多个所得到的公式才是合式公式。

谓词的合式公式今后简称为谓词公式或公式。

在不产生歧义的情况下,我们可以适当地省略一些括号,如: $(\forall x)A$ 可写成 $\forall xA$, $(\exists x)A$ 可写成 $\exists xA$, $(\forall x)(P(x))$ 可写成 $\forall xP(x)$,但 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 就不可写成 $\forall xP(x) \vee Q(x)$,因为两者的辖域不同, $(P(x) \vee Q(x))$ 中的括号不能省略!

2.2.1 小节中例子的谓词表达式皆为谓词的合式公式,但 $\exists x \wedge \forall yP(x, y)$ 就不是公式。

### 2.2.3 约束变元和自由变元

根据谓词合式公式的定义,可以写出相当复杂的合式公式。在这些公式中,如果有一部分公式形如 $(\forall x)B(x)$ 或 $(\exists x)B(x)$,我们就把跟在量词 $\forall$ 或 $\exists$ 后面的 $x$ 称为指导变元或作用变元, $B(x)$ 称为相应量词的辖域(前面已经介绍过), $B(x)$ 中的 $x$ 称为约束变元,称这类 $x$ 的出现为约束出现,而不是约束出现的变元称为自由变元,其出现称为自由出现。

例如: $\forall x(M(x) \to \exists yF(x, y))$ 中 $\forall x$ 的指导变元是 $x$,其辖域为 $M(x) \to \exists yF(x, y)$,其中所有 $x$ 是约束出现的, $\exists y$ 的指导变元是 $y$,其辖域为 $F(x, y)$。对于 $\exists y$ 而言, $F(x, y)$ 中的 $y$ 是约束出现的, $x$ 是自由出现的,但在整个公式中, $x$, $y$ 都是约束变元。而 $\forall xM(x) \to \exists yF(x, y)$ 中 $\forall x$ 的指导变元仍为 $x$,其辖域却是 $M(x)$,其中的 $x$ 约束出现; $\exists y$ 的指导变元为 $y$,其辖域是 $F(x, y)$,在整个公式中, $y$ 仍是约束出现, $x$ 却时而约束出现(如 $M(x)$ 中的 $x$),时而自由出现(如 $F(x, y)$ 中的 $x$),它既是约束变元又是自由变元。

为了避免同一符号既是约束变元又是自由变元所带来的混淆,可采用下面两个规则:

(1) 约束变元的改名规则

· 更改 $\forall x$(或 $\exists x$) 及其辖域中所有的 $x$。

· 改为该辖域中不曾出现的个体变元。

(2) 自由变元的代入规则

· 对公式中某个自由变元可做代入,对其自由出现的每一处皆做代入。

· 用来代入的个体变元必须与原公式中所有的个体变元不同。

例如:对 $\forall xM(x) \to \exists yF(x, y)$ 可换名为

$$\forall zM(z) \to \exists yF(x, y),$$

亦可代入为

$$\forall xM(x) \to \exists yF(z, y)。$$

### 2.2.4 重点和难点分析

通过本节的学习,读者应正确理解量词及其辖域、谓词的合式公式和约束变元与自由变元等重要概念,熟练掌握约束变元的改名规则和自由变元的代入规则,对谓词公式进行简单的翻译。对特性谓词在不同量词后有不同处理方式的理解有一定的难度。

**例 2.3** 用谓词的合式公式表示下列命题。

(1) 所有有理数都是实数。

(2) 有些实数是有理数。

(3) 有些实数是有理数,但并非所有实数都是有理数。

解 令 $Q(x): x$ 是有理数。

$R(x): x$ 是实数。

则相应的命题变为:

(1) $\forall x(Q(x) \to R(x))$

(2) $\exists x(R(x) \wedge Q(x))$

(3) $\exists x(R(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg \forall x(R(x) \to Q(x))$

**例 2.4** 设 $P(x): x$ 是动物, $Q(x): x$ 用肺呼吸,试将下列式子翻译成自然语言。

(1) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

(2) $\neg \forall x(P(x) \to Q(x))$

(3) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \to P(x))$

解 (1) 有些动物不用肺呼吸。

(2) 并非所有的动物都用肺呼吸。

(3) 有些动物用肺呼吸,并且所有用肺呼吸的都是动物。

在这个例子中,读者不难发现,“有些动物不用肺呼吸”和“并非所有的动物都用肺呼吸”,即 $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ 和 $\neg \forall x(P(x) \to Q(x))$,实际上是一回事。这一点,我们将在下一节中给出逻辑上的理论依据。

**例 2.5** 设 $F(x)$ 表示 $x$ 是火车, $G(x)$ 表示 $x$ 是汽车, $H(x, y)$ 表示 $x$ 比 $y$ 快,命题“某些汽车比所有火车慢”的符号化公式应是______。

A. $\exists y(G(y) \to \forall x(F(x) \wedge H(x, y)))$

B. $\exists y(G(y) \wedge \forall x(F(x) \to H(x, y)))$

C. $\forall x \exists y(G(y) \to (F(x) \wedge H(x, y)))$

D. $\exists y(G(y) \to \forall x(F(x) \to H(x, y)))$

**解**　上述命题的符号化公式应是 B。

在此例中,应特别注意特性谓词在不同量词辖域中的处理方式。

**例 2.6**　指出下面谓词公式中的约束变元和自由变元,以及各量词的辖域。

(1) $\forall xP(x) \to Q(x)$

(2) $\exists x(P(x,y) \vee Q(z))$

(3) $\forall x(P(x,y) \rightleftarrows Q(y,z)) \wedge \exists yR(y,z)$

(4) $\exists x\forall y(\neg P(x,y)) \to \forall zQ(z)$

**解**　(1) $x$ 既是约束变元,又是自由变元,$\forall x$ 的辖域为 $P(x)$。

(2) $x$ 是约束变元,$y$、$z$ 是自由变元,$\exists x$ 的辖域为 $P(x,y) \vee Q(z)$。

(3) $x$是约束变元,$z$是自由变元,$y$既是自由变元,又是约束变元,$\forall x$的辖域为 $P(x, y) \rightleftarrows Q(y,z)$,$\exists y$ 的辖域为 $R(y,z)$。

(4) $x, y, z$ 皆是约束变元,$\exists x$ 的辖域为 $\forall y(\neg P(x,y))$,$\forall y$ 的辖域为 $\neg P(x,y)$,$\forall z$ 的辖域为 $Q(z)$。

**例 2.7**　对例 2.6 中既是约束变元又是自由变元的符号进行以下操作:

对约束变元改名,或对自由变元代入。

**解**　(1) $\forall yP(y) \to Q(x)$,或 $\forall xP(x) \to Q(y)$

(2) $\forall x(P(x,y) \rightleftarrows Q(y,z)) \wedge \exists uR(u,z)$,或 $\forall x(P(x,v) \rightleftarrows Q(v,z)) \wedge \exists yR(y,z)$

## 2.2.5　自测练习

1. 用谓词公式表示下列命题。

(1) 所有人都要睡觉。

(2) 有些人是聪明的。

(3) 有人不用右手写字。

(4) 人都不一样高。

(5) 人未必都一样高。

2. 设 $P(x)$: $x$ 是狮子,$Q(x)$: $x$ 是老鼠,$R(x,y)$: $x$ 比 $y$ 的本领大。将下列命题符号化。

(1) 每个狮子都比某些老鼠的本领大。

(2) 有的老鼠比有的狮子的本领大。

(3) 没有比所有狮子本领大的老鼠。

(4) 狮子中有个本领最大的狮子。

3. 令 $P(x)$ 表示 $x$ 是素数,$E(x)$ 表示 $x$ 是偶数,$O(x)$ 表示 $x$ 是奇数,$D(x,y)$ 表示 $x$ 整除 $y$。将以下各个公式翻译成自然语言。

(1) $P(\neg)$

(2) $P(2) \wedge \neg O(2)$

(3) $\forall x(E(x) \rightleftarrows D(2,x))$

(4) $\exists x(O(x) \wedge D(x,15))$

(5) $\forall x(E(x) \to \forall y(O(y) \to \neg D(x,y)))$

(6) $\forall x(O(x) \to \exists y(E(y) \wedge D(x,y)))$

(7) $\exists y(O(y) \wedge \forall x(P(x) \to D(y,x)))$

(8) $\neg \exists x \exists y(P(x) \wedge D(4,y) \wedge D(y,x))$

4. **对于下面的谓词公式,指出约束变元和自由变元,并指明各个量词的辖域。**

(1) $\forall xP(x) \to P(y)$

(2) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightleftarrows \forall xS(x)$

(3) $\forall x\exists y(P(x) \vee Q(y)) \to \neg \exists xR(x,y)$

(4) $\exists x \forall y(P(x,y,z) \wedge Q(z))$

5. **利用谓词的约束变元的改名规则改写下列公式,使得约束变元与自由变元不使用同一符号。**

(1) $\forall x(P(x) \to Q(x,y)) \wedge R(x,y)$

(2) $\exists x(P(x,y) \to Q(x)) \wedge \forall y(Q(y) \to R(x,y))$

(3) $\forall x\exists y(P(x,z) \vee Q(y)) \rightleftarrows R(x,y)$

(4) $\forall y \forall x(P(x,y) \rightleftarrows Q(x,z)) \vee \exists z \neg R(x,z)$

6. **利用谓词的自由变元的代入规则改写下列公式,以避免同一符号既是约束变元又是自由变元的混淆。**

(1) $\forall xF(x) \vee \forall x\, G(x) \to \exists yH(x,y)$

(2) $\neg \exists xF(x) \to \forall yH(x,y,z)$

(3) $\exists xF(x,y) \wedge \exists y\, G(x,y) \vee \forall y(H(x,y) \to R(y))$

(4) $\forall x \forall y(P(x,y) \rightleftarrows Q(x,z)) \vee \exists z \neg R(x,z)$

## 2.2.6 自测练习答案

1. **令** $M(x)$: $x$ **是人。**

$S(x)$: $x$ **要睡觉。**

$C(x)$: $x$ **是聪明的。**

$R(x)$: $x$ **用右手写字。**

$H(x,y)$: $x$ **和** $y$ **一样高。**

**则相应的命题变为:**

(1) $\forall x(M(x) \to S(x))$

(2) $\exists x(M(x) \wedge C(x))$

(3) $\exists x(M(x) \wedge \neg R(x))$

(4) $\quad x \forall y(M(x) \wedge M(y) \to \neg H(x,y))$ **或**

$\forall x(M(x) \to \forall y(M(y) \to \neg H(x,y)))$

(5) $\neg \forall x \forall y(M(x) \wedge M(y) \to H(x,y))$ **或**

$\exists x\exists y(M(x) \wedge M(y) \wedge \neg H(x,y))$ **或**

$\exists x(M(x) \wedge \exists y(M(y) \wedge \neg H(x,y)))$

2. (1) $\forall x(P(x) \to \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$

(2) $\exists y(Q(y) \land \exists x(P(x) \land R(y,x)))$ 或

$\exists x \exists y(P(x) \land Q(y) \land R(y,x))$

(3) $\neg \exists y(Q(y) \land \forall x(P(x) \to R(y,x)))$

(4) $\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \to R(x,y)))$

3. (1) 7 是素数。

(2) 2 是素数,但不是奇数。

(3) 对于所有的 $x$, $x$ 是偶数当且仅当 2 能整除 $x$。

即:偶数是 2 的倍数,反之,2 的倍数为偶数。

(4) 存在着能整除 15 的奇数。

(5) 任何偶数不能整除任何奇数。

(6) 对于任何奇数,总找得到一个能被它整除的偶数。

(7) 有一个能整除所有素数的奇数。

(8) 没有能被 4 的倍数整除的素数。

4 .(1) $x$ 为约束变元,$y$ 为自由变元。

$\forall x$ 的辖域是 $P(x)$。

(2) $x$ 为约束变元。

$\exists x$ 的辖域是 $P(x) \land Q(x)$, $\forall x$ 的辖域是 $S(x)$。

(3) $x$ 为约束变元,$y$ 既是约束变元,又是自由变元。

$\forall x$ 的辖域是 $\exists y(P(x) \lor Q(y))$,$\exists y$ 的辖域是 $P(x) \lor Q(y)$,$\exists x$ 的辖域是 $R(x,y)$。

(4) $x, y$ 为约束变元,$z$ 为自由变元。

$\exists x$ 的辖域是 $\forall y(P(x,y,z) \land Q(z))$, $\forall y$ 的辖域是 $P(x,y,z) \land Q(z)$

5. (1) $\forall z(P(z) \to Q(z,y)) \land R(x,y)$

(2) $\exists u(P(u,y) \to Q(u)) \land \forall v(Q(v) \to R(x,v))$

(3) $\forall u \exists v(P(u,z) \lor Q(v)) \rightleftarrows R(x,y)$

(4) $\forall y \forall u(P(u,y) \rightleftarrows Q(u,z)) \lor \exists v \neg R(x,v)$

6. (1) $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \to \exists y H(z,y)$

(2) $\neg \exists x F(x) \to \forall y H(u,y,z)$

(3) $\exists x F(x,u) \land \exists y G(v,y) \lor \forall y(H(u,y) \to R(y))$

(4) $\forall x \forall y(P(x,y) \rightleftarrows Q(x,u)) \lor \exists z \neg R(v,z)$

## 2.3 谓词演算的等价式与蕴含式

### 2.3.1 谓词公式的赋值

在谓词公式中常含有命题变元和个体变元,当命题变元由确定的命题所取代,个体变元由确定的个体所取代时,就称作对谓词公式的赋值或解释。一个谓词公式经过赋值后,

就变成了一个命题。

例如，$P(x)$ 表示 $x$ 带雨具，$A$ 表示下雨，个体域是 $\{a, b, c\}$；则 $A \to \forall xP(x)$ 表示命题“如果下雨，那么 $a$、$b$、$c$ 全带雨具”，也可表示为 $A \to (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$。$A \to \exists xP(x)$ 表示命题“如果下雨，那么 $a$、$b$、$c$ 中有人带雨具”，也可表示为 $A \to (P(a) \vee P(b) \vee P(c))$。

根据全称量词和存在量词的定义，我们不难得出，在有限个体域 $D = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 上，$\forall xP(x)$ 即 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 皆有性质 $P$，相当于 $P(a_1)$ 且 $P(a_2)$ 且 …… 且 $P(a_n)$，即 $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$；$\exists xP(x)$ 即 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少有一个具有性质 $P$，相当于 $P(a_1)$ 或 $P(a_2)$ 或 …… 或 $P(a_n)$，即 $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)$。

因此，在后面的学习中，读者不妨把 $\forall xP(x)$ 理解为命题逻辑中的合取式在谓词逻辑中的延伸，而 $\exists xP(x)$ 理解为命题逻辑中的析取式在谓词逻辑中的延伸。这一点，将有助于我们理解和记忆谓词演算中的等价式和蕴含式。

### 2.3.2 等价式和蕴含式

与命题逻辑相仿，可以给出谓词逻辑中的永真式、蕴含式和等价式的定义。

**定义 2.3.1** 给定谓词公式 $A$，如果对于 $A$ 的所有赋值，$A$ 都为真，则称谓词公式 $A$ 为永真式（或逻辑有效式）；如果至少有一个赋值，使 $A$ 为真，则称 $A$ 为可满足式；如果对于 $A$ 的所有赋值，$A$ 都为假，则称 $A$ 为永假式。

显然，永真式必为可满足式，但可满足式未必是永真式，而永假式必为不可满足式。

借助于永真式的定义，我们给出以下定义。

**定义 2.3.2** 给定两个谓词公式 $A$ 和 $B$，如果谓词公式 $A \to B$ 为永真式，则称 $A$ 蕴含 $B$，记作 $A \Rightarrow B$。

**定义 2.3.3** 给定两个谓词公式 $A$ 和 $B$，如果谓词公式 $A \rightleftarrows B$ 为永真式，则称 $A$ 和 $B$ 等价，记作 $A \Leftrightarrow B$。

$A \Leftrightarrow B$ 即是对 $A$ 和 $B$ 的任一赋值，所得的命题的真值都相同。

根据上述定义，我们有下述结论：

$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \Rightarrow B$ 并且 $B \Rightarrow A$。

下面讨论谓词演算中的一些等价式和蕴含式。

命题演算中的等价公式表和蕴含公式表皆可推广至谓词演算中使用。例如：

$$\exists x(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$$

$$\neg(\forall xP(x) \vee \exists yQ(y)) \Leftrightarrow \neg\forall xP(x) \wedge \neg\exists yQ(y)$$

$$\forall yP(x, y) \wedge \neg\forall yP(x, y) \Leftrightarrow F$$

关于量词与逻辑联结词之间的关系，常用的等价式和蕴含式如下所示：

$E_1$：$\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$

$E_2$：$\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$

$E_3$：$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$

$E_4$：$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$

$E_5$：$\forall x(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee \forall xB(x)$

$E_6: \exists x(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge \exists x B(x)$

$E_7: \exists x(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \to \exists x B(x)$

$E_8: \forall x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \to B$

$E_9: \exists x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \to B$

$E_{10}: \forall x(A \to B(x)) \Leftrightarrow A \to \forall x B(x)$

$E_{11}: \exists x(A \to B(x)) \Leftrightarrow A \to \exists x B(x)$

$I_1: \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

$I_2: \exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

$I_3: \exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x))$

$I_4: \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$

$I_5: \forall x(A(x) \rightleftarrows B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightleftarrows \forall x B(x)$

为了帮助读者理解和掌握上述公式,下面进行一些解释性的推证(不是证明)。

$E_1, E_2$ 是关于量词和$\neg$之间的等价式。在有限个体域 $D = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 上,我们有

$$
\begin{aligned}
\neg \exists x A(x) &\Leftrightarrow \neg(P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)) \\
&\Leftrightarrow \neg P(a_1) \wedge \neg P(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg P(a_n) \\
&\Leftrightarrow \forall x \neg P(x) \\
\neg \forall x A(x) &\Leftrightarrow \neg(P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)) \\
&\Leftrightarrow \neg P(a_1) \vee \neg P(a_2) \vee \cdots \vee \neg P(a_n) \\
&\Leftrightarrow \exists x \neg P(x)
\end{aligned}
$$

由此可见,上述公式是命题逻辑中的摩根律在谓词逻辑中的体现。这也与在社会生活中总结出来的“否定一般规律”只需“举一反例”,而“否定存在个例”则要“逐一否定”的经验相吻合。

$E_3$ 和 $E_4$ 是“$\forall$ 对 $\wedge$”和“$\exists$ 对 $\vee$”的分配等价式。回忆一下前面所讲的“$\forall$ 是 $\wedge$ 在谓词逻辑中的延伸,$\exists$ 是 $\vee$ 在谓词逻辑中的延伸”,就不难理解这两个公式从本质上讲是 $\wedge$, $\vee$ 的结合律在谓词逻辑中的推广。

当 $A$ 中不出现约束变元 $x$ 时,有

$$\forall x(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee \forall x B(x),$$
$$\exists x(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge \exists x B(x)。$$

类似地,

$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B,$$
$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B。$$

它们恰恰是 $\wedge$ 与 $\vee$ 互可分配的性质在谓词逻辑中的推广。

进而有

$$\forall x(A \to B(x)) \Leftrightarrow A \to \forall x B(x)$$
$$\exists x(A \to B(x)) \Leftrightarrow A \to \exists x B(x)$$

再结合 $E_1, E_2$,又有

$$\forall x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \to B$$

$$\exists x(A(x) \rightarrow B) \quad \forall xA(x) \rightarrow B$$

以上 4 组公式又称作量词辖域的扩张和收缩等价式。

但关于 $\forall$ 与 $\vee$,$\exists$ 与 $\wedge$ 之间,却只有以下的蕴含式 $I_1$ , $I_2$ :

$$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \quad \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \quad \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

以个体域 $D = \{a, b\}$ 为例:

$$\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$$

$$(A(a) \wedge A(b)) \vee (B(a) \wedge B(b))$$

$$(A(a) \vee B(a)) \wedge (A(b) \vee B(a)) \wedge (A(a) \vee B(b)) \wedge (A(b) \vee B(b))$$

$$(A(a) \vee B(a)) \wedge (A(b) \vee B(b))$$

$$\forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$\exists x(A(x) \wedge B(x))$$

$$(A(a) \wedge B(a)) \vee (A(b) \wedge B(b))$$

$$(A(a) \vee A(b)) \wedge (B(a) \vee A(b)) \wedge (A(a) \vee B(b)) \wedge (B(a) \vee B(b))$$

$$(A(a) \vee A(b)) \wedge (B(a) \vee B(b))$$

$$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

上述推证中, 无法改为 ,因为:

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \nRightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$$

$$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \nRightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$$

我们再以一个实例来说明。设个体域为所有人的集合,

令 $A(x)$: $x$ 是男人。

$B(x)$: $x$ 是女人。

则 $A(x) \vee B(x)$: $x$ 是男人或女人。

$A(x) \wedge B(x)$: $x$ 是男人又是女人。

显然, $\forall x(A(x) \vee B(x))$ 表示“凡人是男人或者女人”为真命题; 而 $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ 则表示“凡人都是男人或凡人都是女的”为假命题。$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 表示“在人的集合中,有男人也有女人”为真命题;$\exists x(A(x) \wedge B(x))$ 则表示:“在人的集合中,有人既是男的,又是女的”为假命题。

这表明 $\forall$ 对 $\vee$,$\exists$ 对 $\wedge$ 不满足分配律。

利用上述结论以及逻辑联结词 $\rightarrow$、$\rightleftarrows$ 在命题逻辑中相关的等价式,不难证明 $I_3$、$I_4$、$I_5$。

关于多个量词的使用,我们仅讨论两个量词的情形,多个量词的情形类似。

对于二元谓词, 如果不考虑自由元, 可有 8 种情况: $\forall x \forall yP(x, y)$, $\forall y \forall xP(x, y)$, $\exists x \forall yP(x, y)$, $\exists y \forall xP(x, y)$, $\forall x \exists yP(x, y)$, $\forall y \exists xP(x, y)$, $\exists x \exists yP(x, y)$, $\exists x \exists yP(x, y)$。

本着 $\forall$ 是 $\wedge$ 在谓词逻辑中的延伸,$\exists$ 是 $\vee$ 在谓词逻辑中的延伸的想法,以及 $\wedge$、$\vee$ 在命题逻辑中的结合律,很容易得到

$$\forall x \forall y P(x, y) \quad \forall y \forall x P(x, y)$$

$$\exists x \exists y P(x, y) \quad \exists y \exists x P(x, y)$$

再借助于 $\forall$ 与 $\vee$ 之间的蕴含公式 $I_1$,就可得出

$$\exists y \forall x P(x, y) \quad \forall x \exists y P(x, y)$$

但

$$\forall x \exists y P(x, y) \backslash \exists y \forall x P(x, y)$$

还是以实例来说明。令个体域为所有人的集合,$P(x, y)$ 表示 $y$ 是 $x$ 的合身的衣服,$\forall x \exists y P(x, y)$ 即为"对任一人,有一件他合身的衣服",而 $\exists y \forall x P(x, y)$ 即为"有一件衣服,所有人穿它都合身"。一个高明的裁缝或许尚能使 $\forall x \exists y P(x, y)$ 成真,但再巧的裁缝也无法保证 $\exists y \forall x P(x, y)$ 为真。成语"量体裁衣"讲的就是这个道理。

总之,上述 8 种情形的等价、蕴含式如下所示:

$$\forall x \forall y P(x, y) \quad \forall y \forall x P(x, y)$$

$$\exists x \forall y P(x, y) \quad \exists y \forall x P(x, y)$$

$$\forall y \exists x P(x, y) \quad \forall x \exists y P(x, y)$$

$$\exists x \exists y P(x, y) \quad \exists y \exists x P(x, y)$$

### 2.3.3 重点和难点分析

这一节是本章的重点。读者应掌握谓词公式的赋值和主要的等价式、蕴含式,并能熟练进行带量词的公式变换。接下来的前束范式和推理理论都是建立在此基础上的。难点同样是正确理解并使用上述等价式和蕴含式。请读者通过下面的例子再进一步地体会以上内容。

**例 2.8** 设个体域 $D = \{a, b\}$, $P\{a, a\} = P(b, b) = T$, $P(a, b) = P(b, a) = F$。求下列各式的真值。

(1) $\forall x \forall y P(x, y)$

(2) $\forall x \exists y P(x, y)$

(3) $\exists y \forall x P(x, y)$

(4) $\exists x \exists y P(x, y)$

解 $D = \{a, b\}$

(1) $\quad x \forall y P(x, y)$

$\forall x(P(x, a) \wedge P(x, b))$

$(P(a, a) \wedge P(a, b)) \wedge (P(b, a) \wedge P(b, b))$

$(T \wedge F) \wedge (F \wedge T)$

$F \wedge F$

$F$

(2) $x\exists yP(x,y)$

$\forall x(P(x,a) \vee P(x,b))$

$(P(a,a) \vee P(a,b)) \wedge (P(b,a) \vee P(b,b))$

$(T \vee F) \wedge (F \vee T)$

$T \wedge T$

$T$

(3) $y\forall xP(x,y)$

$\exists y(P(a,y) \wedge P(b,y))$

$(P(a,a) \wedge P(b,a)) \vee (P(a,b) \wedge P(b,b))$

$(T \wedge F) \vee (F \wedge T)$

$F \vee F$

$F$

(4) $x\exists yP(x,y)$

$\exists x(P(x,a) \vee P(x,b))$

$(P(a,a) \vee P(a,b)) \vee (P(b,a) \vee P(b,b))$

$(T \vee F) \vee (F \vee T)$

$T \vee T$

$T$

**此例又说明了** $\forall x\exists yP(x,y) \backslash \exists y\forall xP(x,y)$。

**例 2.9** **设个体域** $D = \{2,3,6\}$, $F(x): x \leq 3$, $G(x): x > 5$,**消去公式** $\forall x(F(x) \wedge \exists yG(y))$ **中的量词,并讨论其真值。**

**解** $D = \{2,3,6\}$

$\forall x(F(x) \wedge \exists yG(y))$

$\forall xF(x) \wedge \exists yG(y)$

$(F(2) \wedge F(3) \wedge F(6)) \wedge (G(2) \vee G(3) \vee G(6))$

**因为** $F(x): x \leq 3$, $G(x) > 5$,

**有** $F(2) = F(3) = T, F(6) = F,$

$G(2) = G(3) = F, G(6) = T,$

$\forall x(F(x) \wedge \exists yG(y))$

$(T \wedge T \wedge F) \wedge (F \vee F \vee T)$

$F \wedge T$

$F$

**此例也可以直接写成**

$\forall x(F(x) \wedge \exists yG(y))$

$\forall x(F(x) \wedge (G(2) \vee G(3) \vee G(6)))$

$(F(2) \wedge (G(2) \vee G(3) \vee G(6)))$

$\wedge (F(3) \wedge (G(2) \vee G(3) \vee G(6)))$

$\wedge (F(6) \wedge (G(2) \vee G(3) \vee G(6)))$

$(T \wedge (F \vee F \vee T)) \wedge (T \wedge (F \vee F \vee T)) \wedge (F \wedge (F \vee F \vee T))$

$F$

比较两个过程,后者比前者繁琐。因此,在消去量词时,应尽量利用等价式化简所给出的公式,特别是将各量词的辖域尽可能收缩,以求表达式的简洁明了。

**例 2.10** 利用量词与 $\neg$、$\wedge$、$\vee$ 之间的等价式和蕴含式,证明:

$$\exists xA(x) \to \forall xB(x) \quad \forall x(A(x) \to B(x))$$

证明 $\exists xA(x) \to \forall xB(x)$

$\neg \exists xA(x) \vee \forall xB(x)$

$\forall x \neg A(x) \vee \forall xB(x)$

$\forall x(\neg A(x) \vee B(x))$

$\forall x(A(x) \to B(x))$

这种证明方式与命题逻辑相同,使用蕴含式时,要注意符号的方向。

**例 2.11** 证明 $\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y)) \quad \forall x(P(x) \wedge Q(x))$

证明 $\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y))$

$\forall x(P(x) \wedge \forall y Q(y))$

$\forall xP(x) \wedge \forall y Q(y)$

$\forall xP(x) \wedge \forall x Q(x)$

$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$

## 2.3.4 自测练习

1. 设个体域 $D = \{0,1\}$, $F(0) = T$, $F(1) = F$, $G(0) = F$, $G(1) = T$。求下列命题的真值。

(1) $\forall xF(x) \vee \forall x G(x)$

(2) $\forall x(F(x) \vee G(x))$

(3) $\exists xF(x) \wedge \exists x G(x)$

(4) $\exists x(F(x) \wedge G(x))$

2. 设个体域为实数集, $a = 0$, $E(x, y): x = y$。在上述赋值下,求下列命题的真值。

(1) $\forall x \forall yE(x, y)$

(2) $\forall x\exists yE(x, y)$

(3) $\exists x \forall yE(x, y)$

(4) $\exists xE(x, a)$

3. 设个体域 $D = \{a, b, c\}$,消去以下谓词公式中的量词。

(1) $\forall x(P(x) \to Q(x))$

(2) $\exists x(P(x) \to \forall y Q(y))$

(3) $\exists y \forall xR(x, y)$

4. 利用 2.3.2 一节中的 $E_1 \sim E_6$,证明:

(1) $\forall x(A(x) \to B) \quad \exists xA(x) \to B$

(2) $\exists x(A(x) \to B(x)) \quad \forall xA(x) \to \exists xB(x)$

## 2.3.5 自测练习答案

1. $D = \{0,1\}, F(0) = G(1) = T, F(1) = G(0) = F$。

(1) $xF(x) \vee " x G(x)$

$(F(0) \wedge F(1)) \vee (G(0) \wedge G(1))$

$(T \wedge F) \vee (T \wedge F)$

$F \vee F$

$F$

(2) $x(F(x) \vee G(x))$

$(F(0) \vee G(0)) \wedge (F(1) \vee G(1))$

$(T \vee F) \wedge (F \vee T)$

$T \wedge T$

$T$

(3) $xF(x) \wedge$ **v** $x G(x)$

$(F(0) \vee F(1)) \wedge (G(0) \vee G(1))$

$(T \vee F) \wedge (F \vee T)$

$T \wedge T$

$T$

(4) $x(F(x) \wedge G(x))$

$(F(0) \wedge G(0)) \vee (F(1) \wedge G(1))$

$(T \wedge F) \vee (F \wedge T)$

$F \vee F$

$F$

**本题中的**(1) **和**(2), (3) **和**(4) **分别给出了** " $xF(x) \vee$ " $x G(x)$ \ " $x(F(x) \vee G(x))$ **和** **v** $xF(x) \wedge$ **v** $x G(x)$ \ **v** $x(F(x) \wedge G(x))$ **的实例。**

2. $E(x,y): x = y$

(1) " $x$ " $yE(x,y)$ **表示:对于任意的实数** $x$ **和** $y$,**均有** $x = y$。**此命题为假。**

(2) " $x$**v** $yE(x,y)$ **表示:对于任意的实数** $x$,**存在一个实数** $y$,**使得** $x = y$。**此命题为真。**

(3)**v** $x$ " $yE(x,y)$ **表示:存在一个实数** $x$,**使得对于任意的实数** $y$,**有** $x = y$。**此命题为假。**

(4)**v** $xE(x,a)$ **v** $xE(x,0)$ **v** $x(x = 0)$,**此命题为真。**

**本题中的**(2),(3) **给出了**

" $x$**v** $yP(x,y)$ \ **v** $y$ " $xP(x,y)$

**的实例。**

3. $D = \{a, b, c\}$

(1) $x(P(x) \rightarrow Q(x))$

$(P(a) \rightarrow Q(a)) \wedge (P(b) \rightarrow Q(b)) \wedge (P(c) \rightarrow Q(c))$

(2) $x(P(x) \rightarrow$ " $y Q(y))$

$\forall xP(x) \to \forall y\, Q(y)$

$(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \to (Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c))$

(3) $y \forall xR(x, y)$

$\exists y(R(a, y) \wedge R(b, y) \wedge R(c, y))$

$(R(a, a) \wedge R(b, a) \wedge R(c, a))$

$\vee (R(a, b) \wedge R(b, b) \wedge R(c, b))$

$\vee (R(a, c) \wedge R(b, c) \wedge R(c, c))$

4. (1) $\forall x(A(x) \to B)$ $\quad \forall x(\neg A(x) \vee B)$

$\forall x \neg A(x) \vee B$

$\neg \exists xA(x) \vee B$

$\exists xA(x) \to B$

(2) $x(A(x) \to B(x))$

$\exists x(\neg A(x) \vee B(x))$

$\exists x \neg A(x) \vee \exists xB(x)$

$\neg \forall xA(x) \vee \exists xB(x)$

$\forall xA(x) \to \exists xB(x)$

# 2.4 前 束 范 式

## 2.4.1 前束范式

介绍了谓词演算的等价式之后,一个很自然的问题随之产生了:在命题逻辑中,可以通过等价变换,得到任何一个命题公式的标准形式即范式。在谓词逻辑中,是否也可以通过类似的做法,将一个谓词公式化为与其等价的比较规范的形式(比如说:所有量词皆出现在谓词公式的开头)呢 答案是肯定的。

**定义 2.4.1** 如果一个公式 $A$ 的形式为

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\cdots(Q_n x_n) B$$

其中,$Q_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 $\forall$ 或 $\exists$,$B$ 为不含量词的公式,则称 $A$ 为前束范式。

换句话讲,前束范式就是那种所有量词均出现在全公式的开头,而它们的辖域皆延伸至整个公式结尾的公式。

例如:$(\forall x)(\exists y)(M(x) \to P(x, y))$ 为前束范式,但 $(\forall x)(M(x) \to \exists yP(x, y))$ 却不是前束范式,因为 $\exists y$ 出现的位置不符合定义的要求。

更进一步地,我们不加证明地指出:

**定理 2.4.1** 任意一个谓词公式,存在着与其等价的前束范式。

将一个谓词公式转化为与其等价的前束范式,大体上有如下步骤:

(1) 利用约束变元的改名规则,使谓词公式中的约束变元和自由变元不用相同的符号。

(2) 利用 $\neg \forall xP(x) \quad \exists x \neg P(x)$,

$\neg \exists xP(x) \quad \forall x \neg P(x)$,

将否定联结词放到量词之后。

(3) 利用上一节介绍的常用等价式,将量词前移到全公式的前面。必要时,可使用约束变元的改名规则,再使用量词辖域扩张。

例如: $xP(x) \land \exists x Q(x)$,由于

$$\exists x(A(x) \land B(x)) \quad \exists xA(x) \land \exists xB(x)$$

只是蕴含式,并非等价式,不能在把公式转化为等价的前束范式时使用,只能先改名,再进行等价变换:

$$\exists xP(x) \land \exists x Q(x)$$
$$\exists xP(x) \land \exists y Q(y)$$
$$\exists x(P(x) \land \exists y Q(y))$$
$$\exists x\exists y(P(x) \land Q(y))$$

与命题逻辑有所不同的是:一个命题公式的主析取范式与主合取范式在一定意义下是惟一的;但一个谓词公式的前束范式却未必惟一。例如: $\forall xP(x) \land \forall xQ(x)$ 的前束范式可以是 $\forall x(P(x) \land Q(x))$,也可以是 $\forall x\forall y(P(x) \land Q(y))$(证明请见例2.11),此两等价的前束范式甚至于所含的量词个数都不相同!

## 2.4.2 重点和难点分析

通过本节的学习,读者应重点掌握前束范式的概念,能够熟练地将给定的一个谓词公式转化为与其等价的前束范式。前束范式的形式及其不惟一性是本节的难点。

**例 2.12** 求 $\exists xA(x) \to \forall xB(x)$ 的前束范式。

解 原式 $\neg\exists xA(x) \lor \forall xB(x)$

$$\forall x\neg A(x) \lor \forall yB(y)$$
$$\forall x(\neg A(x) \lor \forall yB(y))$$
$$\forall x\forall y(\neg A(x) \lor B(y))$$

其中,$\forall xB(x) \quad \lor yB(y)$ 利用的是改名规则,以便实现量词辖域的扩张。

**例 2.13** 把公式 $\exists xA(x) \to \exists xB(x)$ 化为等价的前束范式。

解 原式 $\neg\exists xA(x) \lor \exists xB(x)$

$$\forall x\neg A(x) \lor \exists yB(y)$$
$$\forall x(\neg A(x) \lor \exists yB(y))$$
$$\forall x\exists y(\neg A(x) \lor B(y))$$

或者原式 $\neg\exists xA(x) \lor \exists xB(x)$

$$\forall x\neg A(x) \lor \exists yB(y)$$
$$\exists y(\forall x\neg A(x) \lor B(y))$$
$$\exists y\forall x(\neg A(x) \lor B(y))$$

这又是一个前束范式不惟一的典型例子。另外,由上一节知,一般地,

$$\forall x\exists yP(x,y) \backslash \exists y\forall xP(x,y)$$

而在本例中,由于 $A(x)$ 中不含 $y$,$B(y)$ 中不含 $x$,便出现 $\forall x\exists y(\neg A(x) \lor B(y))$ $\exists y\forall x(\neg A(x) \lor B(y))$ 的情形。请读者注意比较。

**例 2. 14** 把 $\neg(\forall xP(x,y) \vee \exists y Q(x,y))$ 化为与其等价的前束范式。

**解** 原式 $\neg\forall xP(x,y) \wedge \neg\exists y Q(x,y)$

$\exists x\neg P(x,y) \wedge \forall y\neg Q(x,y)$

$\exists u\neg P(u,y) \wedge \forall v\neg Q(x,v)$

$\exists u\forall v(\neg P(u,y) \wedge \neg Q(x,v))$

由于在所给的公式中, $x$ 和 $y$ 既是约束变元又是自由变元,化为与其等价的前束范式时,需要利用约束变元的改名规则,将约束变元和自由变元区分开来,方能进行量词的辖域扩张。

**例 2. 15** 将下式化为等价的前束范式:

$$\forall x(\exists xF(x,y) \wedge \exists yG(x,y)) \to \forall y(H(x,y) \to R(y))$$

**解** 原式

$\forall u(\exists vF(v,y) \wedge \exists wG(u,w)) \to \forall z(H(x,z) \to R(z))$

$\neg\forall u(\exists vF(v,y) \wedge \exists wG(u,w)) \vee \forall z(H(x,z) \to R(z))$

$\exists u\neg(\exists vF(v,y) \wedge \exists wG(u,w)) \vee \forall z(H(x,z) \to R(z))$

$\exists u(\neg\exists vF(v,y) \vee \neg\exists wG(u,w)) \vee \forall z(H(x,z) \to R(z))$

$\exists u(\forall v\neg F(v,y) \vee \forall w\neg G(u,w)) \vee \forall z(H(x,z) \to R(z))$

$\exists u\forall v\forall w\forall z(\neg F(v,y) \vee \neg G(u,w) \vee (H(x,z) \to R(z)))$

此例中,不仅约束变元和自由变元的情况比较复杂,还出现了哪些指导变元与哪些约束变元相对应的问题,初学时应该特别注意。

## 2. 4. 3 自测练习

将以下各式化为前束范式。

1. $\forall x(\exists yF(x,y) \to \exists yG(x,y))$
2. $\exists xF(x) \to \exists yG(x,y)$
3. $(\forall xF(x) \vee \forall x G(x)) \wedge \neg\forall yH(x,y)$
4. $\forall y(\exists zP(x,y,z) \wedge \exists uQ(x,u)) \to \exists vR(y,v)$

## 2. 4. 4 自测练习答案

1. $\forall x(\exists yF(x,y) \to \exists yG(x,y))$

$\forall x(\neg\exists yF(x,y) \vee \exists yG(x,y))$

$\forall x(\forall y\neg F(x,y) \vee \exists zG(x,z))$

$\forall x\forall y\exists z(\neg F(x,y) \vee G(x,z))$

2. $\exists xF(x) \to \exists yG(x,y)$

$\exists zF(z) \to \exists yG(x,y)$

$\neg\exists zF(z) \vee \exists yG(x,y)$

$\forall z\neg F(z) \vee \exists yG(x,y)$

$\forall z\exists y(\neg F(z) \vee G(x,y))$

3. $(\forall xF(x) \vee \forall x G(x)) \wedge \neg\forall yH(x,y)$

$(\forall uF(u) \vee \forall vG(v)) \wedge \exists y \neg H(x, y)$

$\forall u \forall v \exists y((F(u) \vee G(v)) \wedge \neg H(x, y))$

4. $\forall y(\exists zP(x, y, z) \wedge \exists uQ(x, u)) \rightarrow \exists vR(y, v)$

$\neg \forall y(\exists zP(x, y, z) \wedge \exists uQ(x, u)) \vee \exists vR(y, v)$

$\exists y(\neg(\exists zP(x, y, z) \wedge \exists uQ(x, u))) \vee \exists vR(y, v)$

$\exists y(\neg \exists zP(x, y, z) \vee \neg \exists uQ(x, u)) \vee \exists vR(y, v)$

$\exists y(\forall z \neg P(x, y, z) \vee \forall u \neg Q(x, u)) \vee \exists vR(y, v)$

$\exists w(\forall z \neg P(x, w, z) \vee \forall u \neg Q(x, u)) \vee \exists vR(y, v)$

$\exists w \forall z \forall u \exists v(\neg P(x, w, z) \vee \neg Q(x, u) \vee R(y, v))$

# 2.5 谓词演算的推理理论

## 2.5.1 量词的指定、推广规则

如前所述,谓词逻辑是命题逻辑的继承和发展,谓词演算的推理理论也是如此。从继承的角度讲,既然谓词演算中的很多等价式和蕴含式是命题演算中有关公式的推广,那么,命题演算中的推理规则,如 P 规则、T 规则和 CP 规则等无一例外地可在谓词演算的推理过程中使用。从发展的角度看,在谓词推理中,由于量词的出现,某些前提和结论可能会受到限制。为了顺利地使用命题逻辑中的推理规则,必须有消去和添加量词的规则。

**1. 全称指定规则(US 规则)**

$$\forall xP(x) \quad P(y)$$

其中,$y$ 是个体域中任意的某个个体。有时,$P(y)$ 也可写成 $P(c)$,以表明 $y$ 是个体常元 $c$。

该规则表明:如果 $\forall xP(x)$ 成立,即对于个体域中任一个体 $x$,都有 $P(x)$ 成立,那么对个体域中的 $y$(或 $c$),有 $P(y)$(或 $P(c)$)成立。US 规则是日常推理中从一般到特殊的方法。

**2. 全称推广规则(UG 规则)**

$$P(y) \quad \forall xP(x)$$

其中,$y$ 应遍历个体域中的任一个体。

该规则表明:如果对于个体域中的任一个体 $y$,皆有 $P(y)$ 成立,那么就有 $\forall xP(x)$ 成立。这个规则的作用是给谓词添加全称量词,必须保证 $y$ 的任意性。

**3. 存在指定规则(ES 规则)**

$$\exists xP(x) \quad P(c)$$

其中,$c$ 是个体域中某个特定的个体。

此规则表明:如果 $\exists xP(x)$ 成立,那么个体域中必有某个特定的个体 $c$,使得 $P(c)$ 成立。要特别注意:$c$ 是已经确定的,不得带有任何任意的因素。

**4. 存在推广规则(EG 规则)**

$$P(c) \quad \exists xP(x)$$

其中,$c$ 是个体域中的某个个体。

此规则表明:如果对于个体域中某一个个体 $c$,有 $P(c)$ 成立,那么就有 $\exists xP(x)$ 成立。这个规则的作用是给谓词添加存在量词,根据 $\exists xP(x)$ 的定义,其合理性是显然的。

至此,可以在谓词逻辑中给出一个关于"苏格拉底三段论"的有效论证。

令 $s$:苏格拉底。

$M(x)$:$x$ 是人。

$D(x)$:$x$ 是要死的。

前提:$\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$,$M(s)$

结论:$D(s)$

证明如下:

| | |
|---|---|
| ① $\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$ | P |
| ② $M(s)\rightarrow D(s)$ | US① |
| ③ $M(s)$ | P |
| ④ $D(s)$ | T②,③ |

### 2.5.2 重点和难点分析

读者应牢固掌握谓词演算的 US、UG、ES、EG 规则,并正确使用这些规则熟练地进行带量词的直接推理或间接推理。本节是本章的难点,关键在于准确地理解和使用有关量词的指定、推广规则。

其一,使用量词指定规则,只能消去形如 $\forall xP(x)$、$\exists xP(x)$ 中辖域是整个 $P(x)$ 的量词。如:$\forall x(M(x)\rightarrow\exists yF(x,y))$ 可指定为 $M(c)\rightarrow\exists yF(c,y)$,但不可指定为 $\forall x(M(x)\rightarrow P(x,c))$,因为 $\exists y$ 的辖域不满足上述要求。至于 $\forall xP(x)\rightarrow\exists yQ(y)$,更不能直接指定为 $P(c)\rightarrow Q(d)$,若想指定 $\exists y$,必须先将原公式化为等价的 $\exists y(\forall xP(x)\rightarrow Q(y))$,方可指定成 $\forall xP(x)\rightarrow Q(d)$,等等。相应地,使用量词的推广规则,所添加量词的辖域也必须是整个公式,而不可以是部分公式。

其二,如果说 US 规则和 EG 规则比较简单,只要注意到 $y$(或 $x$)不在 $P(x)$(或 $P(c)$)中出现,就可安全使用了,那么,使用 UG 规则和 ES 规则,则须格外小心,因为它们并不"安全"。前者需要确保个体 $y$ 的任意性,后者则需要保证个体 $c$ 的特定性。因此,在具体问题中,应留意当全称量词和存在量词在不同的前提中出现时,先指定哪个量词是有一定考究的。请看下面的例 2.16。

**例 2.16** 所有自然数是有理数,有些实数是自然数。所以,有些实数是有理数。

**证明** 设 $N(x)$:$x$ 是自然数。

$Q(x)$:$x$ 是有理数。

$R(x)$:$x$ 是实数。

前提:$\forall x(N(x)\rightarrow Q(x))$,$\exists x(R(x)\wedge N(x))$

结论:$\exists x(R(x)\wedge Q(x))$

| | |
|---|---|
| ① $\exists x(R(x)\wedge N(x))$ | P |
| ② $R(c)\wedge N(c)$ | ES① |
| ③ $\forall x(N(x)\rightarrow Q(x))$ | P |

④ $N(c) \to Q(c)$　　US③

⑤ $N(c)$　　T②

⑥ $Q(c)$　　T④,⑤

⑦ $R(c)$　　T②

⑧ $R(c) \wedge Q(c)$　　T⑥,⑦

⑨ $\exists x(R(x) \wedge Q(x))$　　EG⑧

**本例中 ①,② 与 ③,④ 不可对调为:**

①′ $\forall x(N(x) \to Q(x))$　　P

②′ $N(c) \to Q(c)$　　US①

③′ $\exists x(R(x) \wedge N(x))$　　P

④′ $R(c) \wedge N(c)$　　ES③

**根据 ES 规则,④′中的 $c$ 是客观存在的某个个体,未必是 ②′中指定的 $c$。④′应写为 $R(d) \wedge N(d)$,下面的推理就不便进行了。可能有人说,由于 ②′中选的 $c$ 是任意的,就指它是 ④′中的 $c$。既然如此,正确的推理顺序就应是 ①,②,③,④,…,而非 ①′,②′,③′,④′,… 了 这一点,请读者务必注意。**

**例 2.17**　**证明** $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \quad \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$

**证明**　① $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$　　P

② $P(c) \wedge Q(c)$　　ES①

③ $P(c)$　　T②

④ $\exists xP(x)$　　EG③

⑤ $Q(c)$　　T②

⑥ $\exists xQ(x)$　　EG⑤

⑦ $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$　　T④,⑥

**这个例子中,④、⑥ 使用 EG 规则时,都使用了 $x$。这是 EG 规则所允许的。**

**例 2.18**　**证明** $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \quad \forall x(P(x) \vee Q(x))$

**证明**　① $\neg \forall x(P(x) \vee Q(x))$　　P(**附加前提**)

② $\exists x \neg(P(x) \vee Q(x))$　　T①

③ $\neg(P(c) \vee Q(c))$　　ES②

④ $\neg P(c) \wedge \neg Q(c)$　　T③

⑤ $\neg P(c)$　　T④

⑥ $\exists x \neg P(x)$　　EG⑤

⑦ $\neg \forall xP(x)$　　T⑥

⑧ $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$　　P

⑨ $\forall xQ(x)$　　T⑦,⑧

⑩ $Q(c)$　　US⑨

⑪ $\neg Q(c)$　　T④

⑫ $Q(c) \wedge \neg Q(c)$　　T⑩,⑪ **矛盾**

**此例中,前提是析取的形式,不使用直接证明法,可以否定结论作为附加前提,使用反**

证法来加以证明。聪明的读者一定会察觉到例 2.18 可利用例 2.17 的结果来证明，因为

$$\neg\forall x(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x\neg(P(x)\vee Q(x))$$
$$\Leftrightarrow \exists x(\neg P(x)\wedge\neg Q(x)),$$

而

$$\neg(\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)) \Leftrightarrow \neg\forall xP(x)\wedge\neg\forall xQ(x)$$
$$\Leftrightarrow \exists x\neg P(x)\wedge\exists x\neg Q(x)$$

**例 2.19** 证明 $\forall x(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x)\vee\forall xQ(x)$

**证明** ① $\neg\exists xP(x)$ P(附加前提)

② $\forall x\neg P(x)$ T①

③ $\neg P(y)$ US②

④ $\forall x(P(x)\vee Q(x))$ P

⑤ $P(y)\vee Q(y)$ US④

⑥ $Q(y)$ T③,⑤

⑦ $\forall xQ(x)$ UG⑥

⑧ $\neg\exists xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)$ CP

⑨ $\neg\neg\exists xP(x)\vee\forall xQ(x)$ T⑧

⑩ $\exists xP(x)\vee\forall xQ(x)$ T⑨

此例也可以用反证法证明，留给读者做练习。CP 规则适合于结论是条件式的情形，当结论不是条件式(如本例)时，应先将其等价变换为条件式方可使用 CP 规则。

**例 2.20** 证明 $\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\rightarrow B(x))$

**证明** ① $\neg\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$ P(附加前提)

② $\exists x\neg(A(x)\rightarrow B(x))$ T①

③ $\neg(A(c)\rightarrow B(c))$ ES②

④ $A(c)$ T③

⑤ $\exists xA(x)$ EG④

⑥ $\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$ P

⑦ $\forall xB(x)$ T⑤,⑥

⑧ $B(c)$ US⑦

⑨ $\neg B(c)$ T③

⑩ $B(c)\wedge\neg B(c)$ T⑧,⑨ 矛盾

这个例子中，前提 $\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$ 各个量词的辖域均不满足量词指定规则的条件，故不能直接使用量词指定规则。

## 2.5.3 自测练习

1. 证明下面推理成立。

(1) $\forall x\neg B(x),\exists x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x\neg A(x)$

(2) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

(3) $\forall x(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x)\vee\exists xQ(x)$

(4) $\exists xF(x)\rightarrow\forall x(F(x)\vee G(x)\rightarrow H(x)),\exists xF(x) \Rightarrow \exists xH(x)$

2. 判断下面证明是否有错误。若有错误,请指出错误所在。你能从给定的前提重新证明同一结论吗?

前提: $\forall x(F(x) \rightarrow H(x)), \exists xF(x)$

结论: $\exists xH(x)$

证明

| | |
|---|---|
| ① $\forall x(F(x) \rightarrow H(x))$ | P |
| ② $F(c) \rightarrow H(c)$ | US① |
| ③ $\exists xF(x)$ | P |
| ④ $F(c)$ | ES③ |
| ⑤ $H(c)$ | T②,④ |
| ⑥ $\exists xH(x)$ | EG⑤ |

3. 符号化下列各命题,并构造推理证明。

(1) 已知每个学生都是诚实的。大卫不是诚实的。所以,大卫不是学生。

(2) 有理数或无理数都是实数。而虚数不是实数。因此,虚数既不是有理数也不是无理数。

(3) 所有的人或者是吃素的或者是吃荤的,吃素的人常吃豆制品。因此,不常吃豆制品的人是吃荤的。(个体域:人的集合)

(4) 所有的主持人都很有风度。李明是个学生并且是个节目主持人。因此,有些学生很有风度。

## 2.5.4 自测练习答案

1. (1)

| | |
|---|---|
| ① $\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$ | P |
| ② $A(c) \rightarrow B(c)$ | ES① |
| ③ $\forall x \neg B(x)$ | P |
| ④ $\neg B(c)$ | US③ |
| ⑤ $\neg A(c)$ | T②,③ |
| ⑥ $\exists x \neg A(x)$ | EG⑤ |

(2)

| | |
|---|---|
| ① $\forall xA(x)$ | P(附加前提) |
| ② $A(y)$ | US① |
| ③ $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ | P |
| ④ $A(y) \rightarrow B(y)$ | US③ |
| ⑤ $B(y)$ | T②,④ |
| ⑥ $\forall xB(x)$ | UG⑤ |
| ⑦ $\forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$ | CP |

(3)

| | |
|---|---|
| ① $\neg \forall xP(x)$ | P(附加前提) |
| ② $\exists x \neg P(x)$ | T① |

③ $\neg P(c)$ ES②

④ $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ P

⑤ $P(c) \vee Q(c)$ US④

⑥ $Q(c)$ T③,⑤

⑦ $\exists x Q(x)$ EG⑥

(4)

① $\exists xF(x)$ P

② $\exists xF(x) \rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x) \rightarrow H(x))$ P

③ $\forall x(F(x) \vee G(x) \rightarrow H(x))$ T①,②

④ $F(c)$ ES①

⑤ $F(c) \vee G(c)$ T④

⑥ $F(c) \vee G(c) \rightarrow H(c)$ US③

⑦ $H(c)$ T⑤,⑥

⑧ $\exists xH(x)$ EG⑦

2. **证明中的**(4) **有错误,应改为** $F(d)$,**而不是** $F(c)$。

**正确的证明是**:

① $\exists xF(x)$ P

② $F(c)$ ES①

③ $\forall x(F(x) \rightarrow H(x))$ P

④ $F(c) \rightarrow H(c)$ US③

⑤ $H(c)$ T②,④

⑥ $\exists xH(x)$ EG⑤

3. (1) **设** $S(x)$: $x$ **是学生**。

$C(x)$: $x$ **是诚实的**。

$a$:**大卫**

**前提**: $\forall x(S(x) \rightarrow C(x))$, $\neg C(a)$

**结论**: $\neg S(a)$

① $\forall x(S(x) \rightarrow C(x))$ P

② $S(a) \rightarrow C(a)$ US①

③ $\neg C(a)$ P

④ $\neg S(a)$ T②,③

(2) **设** $Q(x)$: $x$ **是有理数**。

$P(x)$: $x$ **是无理数**。

$R(x)$: $x$ **是实数**。

$C(x)$: $x$ **是虚数**。

**前提**: $\forall x(P(x) \vee Q(x) \rightarrow R(x))$, $\forall x(C(x) \rightarrow \neg R(x))$

**结论**: $\forall x(C(x) \rightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)))$

① $\forall x(C(x) \rightarrow \neg R(x))$ P

②$C(y) \to \neg R(y)$　　US①

③$\forall x(P(x) \vee Q(x) \to R(x))$　　P

④$P(y) \vee Q(y) \to R(y)$　　US③

⑤$\neg R(y) \to \neg (P(y) \vee Q(y))$　　T④

⑥$C(y) \to \neg (P(y) \vee Q(y))$　　T②,⑤

⑦$C(y) \to (\neg P(y) \wedge \neg Q(y))$　　T⑥

⑧$\forall x(C(x) \to (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)))$　　UG⑦

(3) **设** $P(x)$: $x$ **吃素**。

　　$Q(x)$: $x$ **吃荤**。

　　$R(x)$: $x$ **常吃豆制品**。

**前提**: $\forall x(P(x) \vee Q(x))$, $\forall x(P(x) \to R(x))$

**结论**: $\forall x(\neg R(x) \to Q(x))$

①$\forall x(P(x) \vee Q(x))$　　P

②$P(y) \vee Q(y)$　　US①

③$\neg Q(y) \to P(y)$　　T②

④$\forall x(P(x) \to R(x))$　　P

⑤$P(y) \to R(y)$　　US④

⑥$\neg Q(y) \to R(y)$　　T③,⑤

⑦$\neg R(y) \to Q(y)$　　T⑥

⑧$\forall x(\neg R(x) \to Q(x))$　　UG⑦

(4) **设** $P(x)$: $x$ **是节目主持人**。

　　$Q(x)$: $x$ **很有风度**。

　　$R(x)$: $x$ **是学生**。

　　$l$: **李明**

**前提**: $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $P(l) \wedge R(l)$

**结论**: $\exists x(R(x) \wedge Q(x))$

①$\forall x(P(x) \to Q(x))$　　P

②$P(l) \to Q(l)$　　US①

③$P(l) \wedge R(l)$　　P

④$P(l)$　　T③

⑤$Q(l)$　　T②,④

⑥$R(l)$　　T③

⑦$R(l) \wedge Q(l)$　　T⑤,⑥

⑧$\exists x(R(x) \wedge Q(l))$　　EG⑦

# 第 3 章　集合、关系与函数

自 19 世纪德国著名数学家康托创建集合论以来，集合论已渗透到现代数学的各个分支，成为现代数学的基础。集合论的内容是极其丰富的，本章主要介绍朴素集合论的基本内容，包括什么是集合，集合的表示形式，子集、全集、幂集等概念；介绍常用的集合的各类运算；在此基础上，引出二元关系的定义和有关概念，介绍二元关系的表示形式，复合关系与逆关系，关系的闭包运算等；并着重介绍有着广泛用途的特殊的二元关系：等价关系、相容关系、序关系等；在高等数学中，函数的定义域和值域是在实数集合上讨论的，本章将把函数定义为一种特殊的二元关系，函数的定义域和值域可以是任意集合，从而扩大了函数的应用范围。

在本章内容中，按自学考试大纲的考核要求，“集合的基本概念和基本运算”需要达到“领会”层次；“二元关系的基本概念，关系的五种基本类型，复合关系和逆关系”需要达到“领会层次”；“关系的矩阵表示，关系的闭包运算”需要达到“识记层次”；“等价关系，相容关系，偏序关系”需要达到“简单应用”层次；“函数的定义，特殊函数，复合函数与逆函数的定义，运算与性质”需要达到“领会”层次。

## 3.1　集　　合

### 3.1.1　集合的基本概念

在数学理论的研究中，通常把概念分为两类，一类是原始概念，另一类是派生概念。所谓派生概念是指可以由其他概念定义的概念，例如：正方形可以由邻边相等的矩形来定义，矩形可以由内角为直角的平行四边形来定义等；而原始概念则无法由其他概念给以定义，几何学中的点，线等都是原始概念。集合也是一种原始概念，不能给出确切的定义，只能给出说明性的描述。

集合就是具有某种特点的研究对象的聚合，其中每一个研究对象称为这个集合的元素。例如，当需要研究北京市大学生的健康状况时，清华大学的全体学生可以构成一个集合，每一个清华大学的学生就是这个集合中的一个元素；同样，北京工业大学的全体学生也可以构成一个集合，北京工业大学的学生就是集合中的元素。通常用大写的英文字母：$A, B, C, \cdots$ 来代表集合，用小写的英文字母：$a, b, c, \cdots$ 来代表集合中的元素。如果 $a$ 是集合 $A$ 中的元素，称 $a$ 属于 $A$，并记作 $a \in A$；如果 $a$ 不是集合 $A$ 中的元素，称 $a$ 不属于 $A$，并记作 $a \notin A$。

1.集合的表示方法

集合有多种表示方法，这里介绍两种常用的表示方法。

(1) 列举法

这种表示方法是把集合中的所有元素一一列举出来,元素间用逗号分开,并用花括号括起来。如集合 $A$ 中含有 5 个元素,它们分别是 2, 4, 6, 8, 10。用列举法可把集合 $A$ 表示成:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

又如

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

这表明集合 $B$ 中有 5 个元素,它们分别是: $a, e, i, o, u$。

易见, $2 \in A$, 但 3麽$A$; $e \in B$, 但 $b$麽$B$。

(2) 叙述法

叙述法也称特征法,它是以某个小写的英文字母来统一表示集合的元素,并指出这类元素的共同特征。如

$$C = \{x \mid x \text{ 是正偶数}, x \leq 10\}$$

花括号内的符号“ | ”读作“ 系指 ”,花括号内的逗号读作“ 并且 ”。因此集合 $C$ 中的元素是一些正偶数,并且小于等于 10, 即 $C$ 是由小于等于 10 的正偶数组成。实际上集合 $C$ 的元素就是: 2, 4, 6, 8, 10。可见集合 $C$ 和列举法中所提到的集合 $A$ 的元素是完全相同的。又如

$$D = \{x \mid x \text{ 是英文字母}, x \text{ 是元音}\}$$

易见, $D$ 中元素就是: $a, e, i, o, u$。它和列举法中所提到的集合 $B$ 的元素是完全相同的。

**定义 3.1.1** 当集合 $P$ 的元素和集合 $Q$ 的元素相同时,称这两个集合相等,记作 $P = Q$。

易见,上面提到的集合 $A, B, C, D$ 中,有 $A = C$ 和 $B = D$。

**2. 子集**

**定义 3.1.2** 设 $A, B$ 是集合,如果 $A$ 中的每一个元素又都是 $B$ 中的元素,则称 $A$ 是 $B$ 的子集,也称 $B$ 含有 $A$,或 $A$ 含在 $B$ 中,并记作

$B$ $A$ 或 $A$ $B$

如果 $A$ 是 $B$ 的子集,且 $B$ 中总有一些元素不属于 $A$,则称 $A$ 是 $B$ 的真子集,记作

$B$ $A$ 或 $A$ $B$

如果 $A$ 不是 $B$ 的子集,也就是说在 $A$ 中至少有一个元素不属于 $B$,则称 $B$ 不包含 $A$,或 $A$ 不含在 $B$ 中,记作

$B$ň $A$ 或 $A$ň $B$

例如,设集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 5\}$, $C = \{1, 2, 5\}$。易见, $B$ 是 $A$ 的真子集,即有 $A$ $B$; $B$ 也是 $C$ 的真子集,即 $C$ $B$; 但 $C$ 不是 $A$ 的子集,因为 $2 \in C$ 而 2麽$A$,所以 $A$ň $C$; $A$ 也不是 $C$ 的子集,因为 $3 \in A$ 而 3麽$C$,所以 $C$ň $A$。

由集合间的包含关系,易得:

**定理 3.1.1** 集合 $A$ 和 $B$ 相等的充分必要条件是: $A$ $B$ 且 $B$ $A$。

上述定理在证明两个集合相等时,是一种基本而又有效的方法。

不含有任何元素的集合称为空集,记作 或{ }。

由空集的定义可知,空集是一切集合的子集。

**3. 全集和补集**

在实际工作中,我们所研究的对象总是限制在一定的范围内,例如我们要研究北京市

市民的消费情况时,研究对象可以是朝阳区的居民,也可以是海淀区的居民,但研究对象总是限制在北京市市民这个范围内。在这种情况下,我们称“北京市市民的全体”组成的集合为全集。又如,在初等数论中,研究的对象是整数,在这种情况下,全体整数组成的集合是全集。全集通常用大写英文字母 $E$ 表示。

请注意,全集的概念和研究对象所处的范围是密切相关的,不同的情况就有不同的全集。例如,当我们研究世界人口问题时,全世界所有的人就构成了全集;当我们研究中国妇女的生活状况时,全中国妇女就构成了全集;甚至当研究对象仅仅限制在一个较小的范围时,如仅研究北京工业大学计算机学院一年级学生的学习情况时,北京工业大学计算机学院一年级学生的全体就是全集。总之,全集和研究对象是密切相关的。一般地讲,当我们的讨论总是限制在某个集合的子集时,这个集合就是全集。

下面介绍补集。

**定义 3.1.3** 设 $A$ 是集合,由属于全集 $E$ 但不属于 $A$ 的所有元素组成的集合称为 $A$ 的补集,记作 $\overline{A}$ 或 $\sim A$。补集也称为绝对补。

例如,全集为:

$$E = \{x \mid x \text{是清华大学的学生}\}$$

$$A = \{x \mid x \text{是清华大学的女学生}\}$$

则 $A$ 的补集(绝对补)为:

$$\overline{A} = \{x \mid x \text{是清华大学的男学生}\}$$

**4.幂集**

一个研究对象就是集合中的一个元素,由于集合也可以作为研究对象,所以一个集合作为另一个集合的元素是完全可以的。例如,集合 $A = \{a, b, \{c, d\}\}$,这表明集合 $A$ 含有 3 个元素:$a, b, \{c, d\}$,这时集合 $\{c, d\}$ 就是集合 $A$ 中的一个元素。

**定义 3.1.4** 设 $A$ 是集合,由 $A$ 的所有子集作为元素构成的集合称为 $A$ 的幂集,记作 $P(A)$。

例如,集合 $A = \{a, b, c\}$, $A$ 的子集有:$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ 等,另外由于空集  是一切集合的子集,所以  也是 $A$ 的子集,而 $A$ 本身也是 $A$ 的子集,由此可知 $A$ 的幂集为:

$$P(A) = \quad , \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

又如,$A = \{1, 2, 3, 4\}$,则 $A$ 的幂集为:

$$P(A) = \quad , \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

当集合中的元素个数为有限时,称为有限集,否则称为无限集。有限集 $A$ 中元素个数称为集合 $A$ 的基,记作 $|A|$,如 $A = \{a, b, c\}$,则 $|A| = 3$。

易见,当 $A = \{a, b, c\}$,即 $|A| = 3$ 时,其幂集的基 $|P(A)| = 8 = 2^3$;当 $A = \{1, 2, 3, 4\}$,即 $|A| = 4$ 时,其幂集的基 $|P(A)| = 16 = 2^4$。一般情况有:

**定理 3.1.2** $A$ 是具有 $n$ 个元素的有限集,即 $|A| = n$,则 $A$ 的幂集 $P(A)$ 的基为 $2^n$。

证明:由于 $A$ 是具有 $n$ 个元素的有限集,所以不妨设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$。

在 $A$ 中取 1 个元素构成的子集为:

$$\{a_1\},\{a_2\},\cdots,\{a_n\}$$

这样的子集共有 $C_n^1$ 个($C_n^1$ 为 $n$ 个元素中取 1 个元素的组合)。

在 $A$ 中取 2 个元素构成的子集为:

$$\{a_1, a_2\},\{a_1, a_3\},\cdots,\{a_{n-1}, a_n\}$$

这样的子集共有 $C_n^2$ 个($C_n^2$ 为 $n$ 个元素中取 2 个元素的组合)。

以此类推,在 $A$ 中取 $n$ 个元素构成的子集为:

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

这样的子集共有 $C_n^n$ 个。

此外,空集 也是 $A$ 的子集,由于 $C_n^0 = 1$,所以当 $|A| = n$ 时,其子集的个数即幂集 $P(A)$ 中元素的个数为:

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$$

由二项式定理可知:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n$$

若取 $a = b = 1$,则有

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$$

由此证得

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

为了叙述方便,一些常用的数集将用特定的字母表示:

$N$—— 自然数集;

$Z$—— 整数集;

$Q$—— 有理数集;

$R$—— 实数集;

$C$—— 复数集;

$Z^+$ —— 正整数集;

$Z^-$ —— 负整数集;

$Q^+$ —— 正有理数集;

$Q^-$ —— 负有理数集;

$R^+$ —— 正实数集;

$R^-$ —— 负实数集。

在本书中,自然数集 $N = \{0, 1, 2, \cdots\}$,也称为扩大自然数集。

### 3.1.2 集合的基本运算

**1.交运算**

**定义3.1.5** 设 $A$, $B$ 是集合,由 $A$ 和 $B$ 的所有共同元素组成的集合称为 $A$ 和 $B$ 的交,记作 $A \cap B$。即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

例如,集合 $A$ 和 $B$ 分别为:

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

则

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

又如,集合 $A$ 和 $B$ 分别为:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{a, c, d, e\}$$

则

$$A \cap B = \{a, c, d\}$$

集合的运算可以用文氏图形象地表示,在图 3.1 中,矩形表示全集 $E$,两个圆分别表示集合 $A$ 和 $B$,阴影部分就是 $A \cap B$。

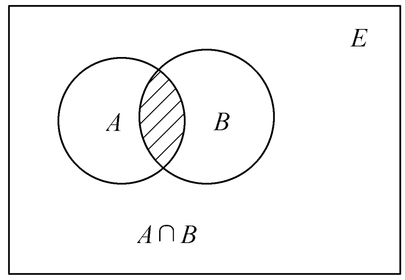



图 3.1

由集合交运算的定义可知,交运算具有以下性质:

(1) $A \cap B = B \cap A$

(2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) $A \cap A = A$

(4) $A \cap \quad =$

(5) $A \cap E = A$

如果集合 $A \cap B = \quad$ ,也就是说 $A$ 和 $B$ 没有共同元素,则称 $A$ 和 $B$ 不相交。例如

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{x, y\}$$

则 $A \cap B = \quad$ ,即 $A$ 和 $B$ 不相交。

**2 .并运算**

**定义 3 .1 .6** 设 $A$, $B$ 是集合,由所有属于 $A$ 或属于 $B$ 的元素组成的集合称为 $A$ 和 $B$ 的并,记作 $A \cup B$。即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

例如,集合 $A$ 和 $B$ 分别为:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{b, c, d, e\}$$

则

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

又如,集合 $A$ 和 $B$ 分别为:

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

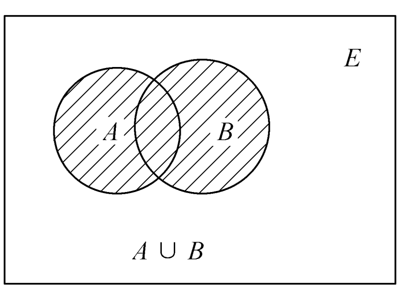



图 3.2

则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

集合并运算的文氏图表示,见图 3.2,图中阴影部分就是 $A \cup B$。

由集合的并运算定义可知,并运算具有以下性质:

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

(3) $A\cup A = A$

(4) $A\cup \quad = A$

(5) $A\cup E = E$

**定理 3.1.3** 设 $A, B, C$ 是集合,则下列分配律成立。

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$$

证明:只证第一等式,第二等式的证明是类似的。证明的方法是利用定理 3.1.1,先证

$$A\cap(B\cup C) \quad (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

再证

$$(A\cap B)\cup(A\cap C) \quad A\cap(B\cup C)$$

从而证得

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

为了证明 $A\cap(B\cup C) \quad (A\cap B)\cup(A\cap C)$,也即要证明 $A\cap(B\cup C)$ 是 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 的子集,所以只需证明:对于任意的 $x\in A\cap(B\cup C)$,都有 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

对于任意的 $x\in A\cap(B\cup C)$,即有 $x\in A$ 且 $x\in(B\cup C)$,即 $x\in A$ 且 $x\in B$,或者 $x\in A$ 且 $x\in C$,这就表明 $x\in A\cap B$ 或者 $x\in A\cap C$,所以 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$,由此证得:$A\cap(B\cup C) \quad (A\cap B)\cup(A\cap C)$。

再证 $(A\cap B)\cup(A\cap C) \quad A\cap(B\cup C)$。

对于任意的 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$,$x\in A\cap B$ 或者 $x\in A\cap C$,即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或者 $x\in A$ 且 $x\in C$,于是有 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$,所以 $x\in A\cap(B\cup C)$,由此证得:$(A\cap B)\cup(A\cap C) \quad A\cap(B\cup C)$。

综上所述,$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$。

请注意,普通的乘法运算对于加法运算是满足分配律的(也称普通乘法运算对于加法运算是可分配的),即

$$a\times(b+c) = a\times b + a\times c$$

但普通的加法运算对于乘法运算是不满足分配律的,即

$$a+(b\times c) \neq (a+b)(a+c)$$

在集合运算中,交对并是可分配的且并对交也是可分配的。

由集合交、并运算的定义可知,当集合 $P \quad Q$ 时,$P\cup Q = P$,$P\cap Q = Q$。由于 $A\cup B \quad A$,$A \quad A\cap B$,所以有以下定理:

**定理 3.1.4** 设 $A, B$ 是集合,则

$$A\cup(A\cap B) = A,$$
$$A\cap(A\cup B) = A。$$

此定理也称集合的并、交运算满足吸收律。

**定理 3.1.5** 设 $A, B$ 是集合,则

$$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}。$$

证明从略。

此定理也称摩根律。在集合的运算中,分配律、吸收律和摩根律都有着重要的用途,应熟练掌握。

**3 .减运算**

**定义 3 .1 .7** 设 $A$, $B$ 是集合,由所有属于 $A$ 但不属于 $B$ 的元素组成的集合称为 $A$ 减 $B$ 的差(或称 $B$ 对于 $A$ 的相对补),记作 $A - B$。

例如,$A$, $B$, $C$ 是集合,分别为:

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$B = \{3,4,5,6\}$$
$$C = \{5,6,7,8\}$$

则

$$A - B = \{1,2\}$$
$$B - A = \{5,6\}$$
$$A - C = \{1,2,3,4\}$$
$$C - A = \{5,6,7,8\}$$
$$B - C = \{3,4\}$$
$$C - B = \{7,8\}$$

易见,$A$ 的补集(绝对补)$\overline{A} = E - A$。如果把补集 $\overline{A}$ 说成是对 $A$ 经取补后得到的集合,那么取补也可以看作是一种运算,它是一种一元运算。

集合减运算的文氏图表示见图 3 .3。

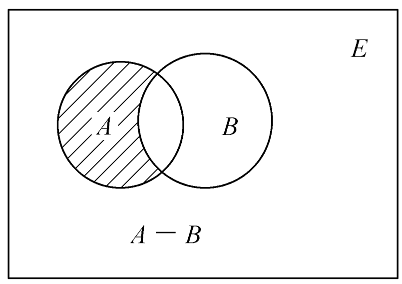



图 3 .3

由集合减运算的定义可知,减运算有以下性质:

(1) $A - A =$

(2) $A - \quad = A$

(3) $A - E =$

(4) $A - B = A \cap \overline{B}$

性质(4) 表明,集合的减运算可以转化为集合的交与取补运算,它在今后的证明中经常使用,是一条重要性质。

**4 .对称差运算**

**定义 3 .1 .8** 设 $A$, $B$ 是集合,$A$ 和 $B$ 的对称差运算记作 $A \quad B$,其定义为:

$$A \quad B = (A - B) \cup (B - A)。$$

例如,$A$, $B$ 是集合,分别为:

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$
$$B = \{1,3,5,7,9\}$$

则

$$\begin{aligned} A \quad B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= \{2,4\} \cup \{7,9\} \\ &= \{2,4,7,9\} \end{aligned}$$

集合对称差运算的文氏图表示,见图 3.4。

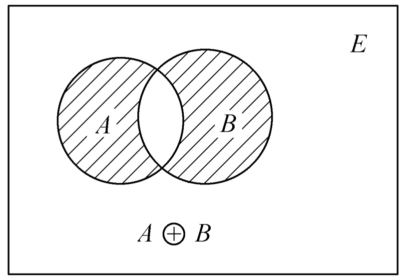



图　3.4

由集合对称差的定义可知,对称差有以下性质:

(1) $A \quad A =$

(2) $A \quad\quad = A$

(3) $A \quad E = \overline{A}$

(4) $A \quad B = B \quad A$

(5) $(A \quad B) \quad C = A \quad (B \quad C)$

**定理 3.1.6**　设 $A, B$ 是集合,则

$A \quad B = (A \cup B) - (A \cap B)$。

**证明**　由对称差的定义可知:

$$\begin{aligned} A \quad B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= ((A \cap \overline{B}) \cup B) \cap ((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}) && (\text{分配律}) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) && (\text{分配律}) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) && (\text{摩根律}) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

由定理 3.1.6 和对称差的定义可得到对称差的 4 种表示形式:

$$A \quad B = (A - B) \cup (B - A)$$
$$A \quad B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$
$$A \quad B = (A \cup B) - (A \cap B)$$
$$A \quad B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$$

在今后的集合运算中,可以根据不同的情况,使用合适的表示形式以简化运算过程。

## 3.1.3　重点和难点分析

本节的重点是:掌握集合的两种表示方法;子集、空集、全集、补集和幂集的定义和有关概念;求幂集的方法;集合基本运算的定义和常用公式,特别要熟练地使用分配律、吸收律、摩根律和重要公式:$A - B = A \cap \overline{B}$。

难点是:求给定集合的幂集;在集合的运算中,熟练地使用常用公式求解、证明和分析问题。

**例 3.1**　求 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 的幂集。

**解**　这里给出另一种求幂集的方法。

易知,当集合 $A$ 中含有 4 个元素时,其幂集 $P(A)$ 含有 $2^4$ 个元素。因此可以使幂集 $P(A)$ 中的元素与 4 位二进制序列(0000 ～ 1111)建立一一对应关系,从而能方便地求得 $A$ 的幂集合。

具体做法是:先确定集合 $A$ 中的元素的一种排列顺序。在本例中,集合 $A$ 中元素的排列顺序为:1,2,3,4。其幂集 $P(A)$ 中的元素与 4 位二进制序列所建立的一一对应关系如下所示:

| 1 2 3 4 | $P(A)$ 中的元素 |
|---|---|
| 0 0 0 0 | |
| 0 0 0 1 | $\{4\}$ |
| 0 0 1 0 | $\{3\}$ |
| 0 0 1 1 | $\{3,4\}$ |
| …… | |
| 1 1 1 0 | $\{1,2,3\}$ |
| 1 1 1 1 | $\{1,2,3,4\}$ |

如果把 $P(A)$ 中与 4 位二进制序列 $k$ 所对应的元素记为 $A_k$,则

$P(A) = \{A_{0000}, A_{0001}, A_{0010}, A_{0011}, A_{0100}, A_{0101}, A_{0110}, A_{0111}, A_{1000}, A_{1001}, A_{1010}, A_{1011}, A_{1100}, A_{1101}, A_{1110}, A_{1111}\}$,即有

$P(A) = \{\ ,\{4\},\{3\},\{3,4\},\{2\},\{2,4\},\{2,3\},\{2,3,4\},\{1\},\{1,4\},\{1,3\},\{1,3,4\},\{1,2\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$。

**例 3.2** 设 $Z^+$ 是正整数集,集合 $A, B, C$ 分别为:

$$A = \{x \mid x = k\pi, k \in Z^+\}$$

$$B = \ x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z^+$$

$$C = \ x \mid x = \frac{k\pi}{2} + 2\pi, k \in Z^+$$

求下列运算结果:

(1) $A \cap B$

(2) $(A \cup B) - C$

(3) $A - (B \cup C)$

(4) $A \cap B \cap \overline{C}$

(5) $C - (A \quad B)$

解 为了便于运算,把集合 $A, B, C$ 用列举法表示:

$$A = \{\pi, 2\pi, \cdots\}$$

$$B = \ 2\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi + \frac{\pi}{2}, \cdots$$

$$C = \ \frac{\pi}{2} + 2\pi, 3\pi, \frac{\pi}{2} + 3\pi, \cdots$$

由此可知

(1) $A \cap B =$

(2) $(A \cup B) - C = \{\pi, 2\pi\}$

(3) $A - (B \cup C) = \{\pi, 2\pi\}$

(4) $A \cap B \cap \overline{C} =$

(5) 由于 $A \cap B = \quad$ ，所以 $A \quad B = A \cup B$，于是可得：$C - (A \quad B) = \quad 3\pi + \frac{\pi}{2}, 5\pi + \frac{\pi}{2}, 7\pi + \frac{\pi}{2}, \cdots \quad = \quad x \mid x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z^{+}$ 。

**例 3.3　证明下列等式**：

(1) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

(2) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

(3) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

(4) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$

(5) $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$

**证明**　(1) 
$$
\begin{aligned}
(A - B) - C &= (A \cap \overline{B}) - C \\
&= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \\
&= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\
&= A \cap (\overline{B \cup C}) \\
&= A - (B \cup C)
\end{aligned}
$$

(2) 
$$
\begin{aligned}
A - (B - C) &= A - (B \cap \overline{C}) \\
&= A \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) \\
&= A \cap (\overline{B} \cup C) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) \\
&= (A - B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

(3) 
$$
\begin{aligned}
(A \cup B) - C &= (A \cup B) \cap \overline{C} \\
&= (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) \\
&= (A - C) \cup (B - C)
\end{aligned}
$$

(4) 
$$
\begin{aligned}
A \cup (B - C) &= A \cup (B \cap \overline{C}) \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{C}) \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{\overline{A \cup \overline{C}}}) \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{\overline{A} \cap C}) \\
&= (A \cup B) - (\overline{A} \cap C) \\
&= (A \cup B) - (C - A)
\end{aligned}
$$

(5) 左式 $= (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

$= (A - B) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$

$= (A - B) \cup (B \cap (\overline{A} \cup A))$

$= (A - B) \cup B$

$= (A \cap \overline{B}) \cup B$

$= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)$

$= A \cup B =$ 右式

**例 3.4　证明下列等式**：

(1) $\overline{A \quad B} = \overline{A} \quad B$

(2) $A \cap (B \quad C) = (A \cap B) \quad (A \cap C)$

(3) $(A \quad B) \cap (A \quad C) = ((B \cap C) - A) \cup (A - (B \cup C))$

**证明** (1) **由定理** 3.1.6 **可知**:

$$
\begin{aligned}
A \quad B &= (A - B) \cup (B - A) \\
\overline{A \quad B} &= \overline{(A - B) \cup (B - A)} \\
&= (\overline{A - B}) \cap (\overline{B - A}) \\
&= (\overline{A \cap \overline{\overline{B}}}) \cap (\overline{B \cap \overline{\overline{A}}}) \\
&= (\overline{A} \cup B) - (B \cap \overline{A}) \\
&= \overline{A} \quad B
\end{aligned}
$$

(2) **右式** $= (A \cap B) \quad (A \cap C)$

$$
\begin{aligned}
&= ((A \cap B) - (A \cap C)) \cup ((A \cap C) - (A \cap B)) \\
&= (A \cap B \cap (\overline{A \cap C})) \cup (A \cap C \cap (\overline{A \cap B})) \\
&= (A \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{C})) \cup (A \cap C \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \\
&= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{A}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \\
&= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \\
&= A \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})) \\
&= A \cap ((B - C) \cup (C - B)) \\
&= A \cap (B \quad C) = \text{左式}
\end{aligned}
$$

(3) **左式** $= (A \quad B) \cap (A \quad C)$

$$
\begin{aligned}
&= ((A \cup B) - (A \cap B)) \cap ((A \cup C) - (A \cap C)) \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \cap (A \cup C) \cap (\overline{A \cap C}) \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
&= (A \cup (B \cap C)) \cap (\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})) \\
&= ((A \cup (B \cap C)) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup (B \cap C)) \cap (\overline{B} \cap \overline{C})) \\
&= ((B \cap C) \cap \overline{A}) \cup (A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})) \\
&= ((B \cap C) \cap \overline{A}) \cup (A \cap (\overline{B \cup C})) \\
&= ((B \cap C) - A) \cup (A - (B \cup C)) = \text{右式}
\end{aligned}
$$

### 3.1.4 自测练习

1. **用列举法表示下列集合。**

(1) **小于** 20 **的素数集合**

(2) $\{x \mid x$ **是正整数**, $x^2 < 50\}$

(3) $\{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$

(4) $\{x \mid x + 1 = 3\}$

2. **用叙述法表示下列集合。**

(1) $\{1, 3, 5, 7, \cdots, 99\}$

(2) $\{5, 10, 15, \cdots, 100\}$

(3) $\{1, 4, 9, 16, 25\}$

(4) 所有实系数一元一次方程的解构成的集合。

3 .判定下列各命题的正确与否。

(1) $\{a\}\quad\{a\}$

(2) $\{a\}\in\{a\}$

(3) $\{a\}\quad\{a,\{a\}\}$

(4) $\{a\}\in\{a,\{a\}\}$

4 .设 $A, B, C$ 是集合,确定下列命题是否正确,说明理由。

(1) 如果 $A\in B$ 且 $B\quad C$,则 $A\quad C$

(2) 如果 $A\in B$ 且 $B\quad C$,则 $A\in C$

(3) 如果 $A\quad B$ 且 $B\in C$,则 $A\in C$

(4) 如果 $A\quad B$ 且 $B\in C$,则 $A\quad C$

5 .确定下列命题是否正确 ?

(1)

(2) $\in$

(3) $\{\quad\}$

(4) $\in\{\quad\}$

6 .设 $A, B, C$ 是集合。

(1) 如果 A肞B 且 B肞C,是否一定有 A肞C ?

(2) 如果 $A\in B$ 且 B肞C,是否一定有 A肞C ?

(3) 如果 $A\quad B$ 且 B肞C,是否一定有 A肞C ?

7 .求下列集合的幂集。

(1) $\{a, b, c, d\}$

(2) $\{a, b, \{a, b\}\}$

(3)

(4) $\{\quad\}$

(5) $\{\quad,\{\quad\}\}$

8 .设 $A=\{a\}$,求 $PP(A)$。

9 .设 $Z^{+}$ 是正整数集,$A, B, C$ 是 $Z^{+}$ 的子集,且

$$A=\{i \mid i^{2}<50\}$$

$$B=\{i \mid i\text{能整除 }30\}$$

$$C=\{1,3,5,7\}$$

求下列集合。

(1) $A\cup C$

(2) $A\cup(B\cap C)$

(3) $C-(A\cap B)$

(4) $(B\cap C)-(A\cup B)$

(5) $B\cap\overline{C}$

(6) $A\quad C$

10 **给定正整数集合 $Z^{+}$ 的子集:**

$$A = \{x \mid x < 12\}$$
$$B = \{x \mid x \leq 8\}$$
$$C = \{x \mid x = 2k, \quad k \in Z^{+}\}$$
$$D = \{x \mid x = 3k, \quad k \in Z^{+}\}$$

**试用** $A, B, C, D$ **的运算表示下列集合。**

(1) $\{2,4,6,8\}$

(2) $\{1,3,5,7\}$

(3) $\{3,6,9\}$

(4) $\{10\}$

(5) $\{x \mid x$ **是大于** 12 **的奇数**$\}$

11 .**设** $A, B, C$ **是集合,如果** $A \cup B = A \cup C$ **且** $A \cap B = A \cap C$, **证明** $B = C$。

12 .**设** $A, B, C$ **是集合,求下列各式成立的充分必要条件。**

(1) $(A - B) \cup (A - C) = A$

(2) $(A - B) \cup (A - C) =$

(3) $(A - B) \cap (A - C) =$

13 .**如果** $A \quad B =$ , **证明** $A = B$。

14 .**如果** $A \quad B = A \quad C$, **证明** $B = C$。

15 .**证明下列各等式。**

(1) $(A - B) - C = (A - C) - B$

(2) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

(3) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

(4) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

(5) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(6) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

16 .**说明下列命题是否正确,说明理由。**

(1) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup C$

(2) $(A - B) \cap (B - A) =$

(3) $\overline{A \cap B} \quad A$

(4) $(A \cap B) \cup (B - A) = B$

## 3.1.5 自测练习答案

1 .(1) $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

(2) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

(3) $\{-1,3\}$

(4) $\{2\}$

2 .(1) $\{x \mid x = 2k - 1, k \leq 50, k \in Z^{+}\}$

(2) $\{x \mid x = 5k, k \leq 20, k \in Z^{+}\}$

(3) $\{x \mid x = k^2, k \leq 5, k \in Z^+\}$

(4) $\{x \mid ax + b = 0, a \neq 0, a, b \in R\}$

3 .(1) **正确**;(2) **不正确**;(3) **正确**;(4) **正确**。

4 .(1) **不正确。例如** $A = \{a\}, B = \{\{a\}\}, C = \{\{a\}, b\}$,**则有** $A \in B, B \quad C$,**但** $A$ň $C$。

(2) **正确。因为** $A \in B$,**所以** $A$ **是集合** $B$ **中的元素**,**而** $B \quad C$,**即** $B$ **是** $C$ **的子集**,**所以** $B$ **中元素也都是** $C$ **的元素**,**即有** $A \in C$。

(3) **不正确。例如**,$A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{\{a, b\}\}$,**则** $A \quad B, B \in C$,**但** $A$殴$C$。

(4) **不正确。例如**,$A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{\{a, b\}\}$,**则** $A \quad B, B \in C$,**但** $A$ň $C$。

5 .(1) **正确**;(2) **不正确**;(3) **正确**;(4) **正确**。

6 .(1) **不一定有** $A$殴$C$。**如** $A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{\{a\}, b\}$,**则有** $A$殴$B$ **且** $B$殴$C$,**但** $A \in C$。

(2) **不一定有** $A$殴$C$。**例如**,$A = \{a\}, B = \{\{a\}, b\}, C = \{\{a\}, b, c\}$,**则有** $A \in B, B$殴$C$,**但** $A \in C$。

(3) **不一定有** $A$殴$C$。**例如**,$A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{\{a\}, b\}$,**则有** $A \quad B$,**且** $B$殴$C$,**但** $A \in C$。

7 .(1) **若把集合中的元素排列顺序为**: $a, b, c, d$。**则其幂集为**: $\{A_{0000}, A_{0001}, A_{0010}, A_{0011}, A_{0100}, A_{0101}, A_{0110}, A_{0111}, A_{1000}, A_{1001}, A_{1010}, A_{1011}, A_{1100}, A_{1101}, A_{1110}, A_{1111}\} = \{\quad, \{d\}, \{c\}, \{c, d\}, \{b\}, \{b, d\}\{b, c\}, \{b, c, d\}, \{a\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$。

(2) **若把集合中元素顺序排列为**: $a, b, \{a, b\}$, **则其幂集为**: $\{A_{000}, A_{001}, A_{010}, A_{011}, A_{100}, A_{101}, A_{110}, A_{111}\} = \{\quad, \{\{a, b\}\}, \{b\}, \{b, \{a, b\}\}, \{a\}, \{a, \{a, b\}\}, \{a, b\}, \{a, b, \{a, b\}\}$。

(3) **其幂集为**:$\{\quad\}$。

(4) **其幂集为**:$\{\quad, \{\quad\}\}$。

(5) **其幂集为**:$\{\quad, \{\quad\}, \{\{\quad\}\}, \{\quad, \{\quad\}\}\}$。

8 .$PP(A) = \{\quad, \{\quad\}, \{\{a\}\}, \{\quad, \{a\}\}\}$

9 .(1) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(2) $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(3) $C - (A \cap B) = \{7\}$

(4) $(B \cap C) - (A \cup B) =$

(5) $B \cap \overline{C} = \{2, 6, 10, 15, 30\}$

(6) $A \quad C = \{2, 4, 6\}$

10 .(1) $\{2, 4, 6, 8\} = B \cap C$

(2) $\{1, 3, 5, 7\} = B - C$

(3) $\{3, 6, 9\} = A \cap D$

(4) $\{10\} = (A \cap C) - B$

(5) $\{x \mid x$ **是大于** 12 **的奇数**$\} = \overline{C} - A$

11 .**由吸收律可知**:

$$
\begin{aligned}
B &= B\cap(A\cup B)\\
&= B\cap(A\cup C) && (\text{题设})\\
&= (B\cap A)\cup(B\cap C) && (\text{分配律})\\
&= (C\cap A)\cup(B\cap C) && (\text{题设})\\
&= C\cap(A\cup B) && (\text{分配律})\\
&= C\cap(A\cup C) && (\text{题设})\\
&= C && (\text{吸收律})
\end{aligned}
$$

12 .(1) 由于

$$
\begin{aligned}
(A-B)\cup(A-C) &= (A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})\\
&= A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})\\
&= A\cap(\overline{B\cap C})\\
&= A-(B\cap C)
\end{aligned}
$$

要使 $A-(B\cap C)=A$,其充分必要条件是: $A\cap B\cap C=$ 。

(2) 要使

$$(A-B)\cup(A-C)=$$

必须有

$$A-B= \quad 且\ A-C=$$

即有

$$B \quad A\ 且\ C \quad A$$

或者有

$$B\cap C \quad A$$

所以,使得 $(A-B)\cup(A-C)=$ 的充分必要条件是: $B\cap C \quad A$。

(3) 要使

$$(A-B)\cap(A-C)=$$

即使

$$
\begin{aligned}
&A\cap\overline{B}\cap A\cap\overline{C}=\\
&A\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\\
&A\cap(\overline{B\cup C})=\\
&A-(B\cup C)=
\end{aligned}
$$

即有

$$B\cup C \quad A$$

所以使得 $(A-B)\cap(A-C)=$ 的充分必要条件是: $B\cup C \quad A$。

13 .由于

$$A \quad B=$$

所以

$$(A-B)\cup(B-A)=$$

$$A-B= \quad 且\ B-A=$$

由此可知

$B \quad A$ 且 $A \quad B$

**所以** $A = B$。

14 .**由于**

$$A \quad B = A \quad C$$

**两边各以** $A$ **用对称差对其进行运算**:

$$A \quad (A \quad B) = A \quad (A \quad C)$$

**由于对称差满足结合律,所以有**

$$(A \quad A) \quad B = (A \quad A) \quad C$$

$$B = \quad C$$

**由对称差运算的性质**(2) **可知**, $B = C$。

15 .(1) **由于**

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A - B) - C \\
&= (A \cap \overline{B}) - C \\
&= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\
&= A \cap \overline{C} \cap \overline{B} \\
&= (A - C) \cap \overline{B} \\
&= (A - C) - B = \text{右式}
\end{aligned}
$$

(2) $$
\begin{aligned}
\text{右式} &= (A - C) - (B - C) \\
&= (A \cap \overline{C}) - (B \cap \overline{C}) \\
&= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) \\
&= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) \\
&= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \\
&= (A - B) \cap \overline{C} \\
&= (A - B) - C = \text{左式}
\end{aligned}
$$

(3) $$
\begin{aligned}
\text{右式} &= (A - C) \cup (B - C) \\
&= (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) \\
&= (A \cup B) \cap \overline{C} \\
&= (A \cup B) - C = \text{左式}
\end{aligned}
$$

(4) $$
\begin{aligned}
\text{左式} &= A - (B \cap C) \\
&= A \cap (\overline{B \cap C}) \\
&= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\
&= (A - B) \cup (A - C) = \text{右式}
\end{aligned}
$$

(5) $$
\begin{aligned}
\text{左式} &= A - (B \cup C) \\
&= A \cap (\overline{B \cup C}) \\
&= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\
&= A \cap A \cap \overline{B} \cap \overline{C}
\end{aligned}
$$

$= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C})$

$= (A - B) \cap (A - C) =$ 右式

(6) 右式 $= (A \cap B) - (A \cap C)$

$= (A \cap B) \cap (\overline{A \cap C})$

$= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$

$= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$

$= A \cap B \cap \overline{C}$

$= A \cap (B - C) =$ 左式

16 .(1) 不正确。例如, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$,则有

$A - (B \cup C) =$

$(A - B) \cup C = \{2\}$

$A - (B \cup C) \neq (A - B) \cup C$

所以此命题为假。

(2) 由于

$(A - B) \cap (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A})$

$= (A \cap \overline{A}) \cap (B \cap \overline{B})$

$=$

所以此命题为真。

(3) 不正确,例如,设全集 $E = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$,则有

$\overline{A \cap B} = \{3\}$

所以由假设可知:

$\overline{A \cap B}$ ṅ $A$

此命题为假。

(4) 由于

$(A \cap B) \cup (B - A) = (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$

$= B \cap (A \cup \overline{A})$

$= B$

所以此命题为真。

## 3 .2　二元关系的基本概念

“关系”是我们熟知的、经常使用的概念,如父子关系、兄弟关系、朋友关系、夫妻关系以及数量中的大小关系等。为了便于用数学的方法来研究这类关系,我们将用集合论的观点来定义和处理这类关系。首先把研究的对象置于一个集合中,如集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $A$ 中 5 个元素分别表示 5 个男人,是我们研究的对象,其中 $a$ 是 $b$ 和 $c$ 的父亲, $b$ 是 $d$ 的父亲, $d$ 是 $e$ 的父亲。现在把这 5 个男人中所有符合父子关系的两个人,用有序对: $(a, b)$, $(a, c)$, $(b, d)$, $(d, e)$ 来表示。如果以这些有序对作为元素构成集合 $R$,即

$$R = \{(a, b), (a, c), (b, d), (d, e)\}$$

那么集合 $R$ 就完整地描述了集合 $A$ 中元素 $a, b, c, d, e$ 的父子关系。称 $R$ 为集合 $A$ 上的一个关系(父子关系)。当然,集合 $A$ 上还存在着其他类型的关系。由于有序对仅由 $A$ 中的两个元素组成,所以这种关系称为二元关系。用同样的方法还可以定义 $n$ 元关系,在本章中仅讨论二元关系,今后提到的关系都是指二元关系。

综上所述,当用数学的方法研究关系时,关系是一个集合,是一个满足某种条件的有序对的集合。另外还需注意的是:有序对中的"序"是重要的,有序对中两个元素的顺序不可随意安排,如上面提到父子关系 $R$,由于 $a$ 是 $b$ 的父亲,所以 $(a, b) \in R$,而有序对 $(b, a)$ 就不属于 $R$,它是子父关系。除特殊情况外,有序对 $(a, b)$ 和 $(b, a)$ 的含义是不同的。

在很多情况下,还需要研究两个集合中元素之间的关系。如:$A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$,假设 $A$ 中元素 $a, b, c, d$ 分别表示 4 位参加体育比赛的运动员,$B$ 中元素 1,2,3 分别表示奖金数额:1 万元,2 万元和 3 万元,那么有序对:$(a,2)$, $(b,1)$, $(c,3)$, $(d,1)$ 就表示了这 4 位运动员和他们所获奖金数的关系。以这些有序对为元素构成集合 $R$,即

$$R = \{(a,2), (b,1), (c,3), (d,1)\}$$

称 $R$ 为 $A$ 到 $B$ 的二元关系。

为了更深入地讨论二元关系,下面将引进一个新概念:集合的笛卡儿乘积。

### 3.2.1 集合的笛卡儿乘积

**定义 3.2.1** 设 $A, B$ 是集合,$A$ 到 $B$ 的笛卡儿乘积用 $A \times B$ 表示,它是所有形状如 $(a, b)$ 的有序对为元素的集合,其中 $a \in A$, $b \in B$。集合的笛卡儿乘积也称为集合的直积。

例如,$A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$,则 $A$ 到 $B$ 的笛卡儿乘积为:

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$$

特别当 $A = B$ 时,$A \times A$ 称为 $A$ 上的笛卡儿乘积,也可简记为 $A^2$。例如

$$\begin{aligned} A \times A &= \{a, b, c\} \times \{a, b, c\} \\ &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\} \end{aligned}$$

易见,当集合 $A$ 中含有 $n$ 个元素,集合 $B$ 中含有 $m$ 个元素时,笛卡儿乘积 $A \times B$ 含有 $n \times m$ 个有序对,$A \times A$ 含有 $n^2$ 个有序对。

由于笛卡儿乘积 $A \times B$ 是所有以 $A$ 中元素为第一元素,$B$ 中元素为第二元素的有序对集合,而 $A$ 到 $B$ 的二元关系仅仅是满足某种条件的有序对集合,因此 $A$ 到 $B$ 的二元关系必然是笛卡儿乘积 $A \times B$ 的子集。同样,$A$ 上的二元关系必然是笛卡儿乘积 $A \times A$ 的子集。为了能更深入地讨论二元关系,这里不去强调二元关系的具体属性,如它是父子关系或朋友关系等,而是把二元关系抽象地定义为笛卡儿乘积的子集。

**定义 3.2.2** 设 $A, B$ 是集合,$R$ 是笛卡儿乘积 $A \times B$ 的子集,则称 $R$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个二元关系。

例如,$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_2)\}$,那么 $R$ 就是一个 $A$ 到 $B$ 的二元关系。对于 $R$ 中的元素,如 $(a_1, b_1) \in R$,也可写成:$a_1 R b_1$,并称 $a_1$ 和 $b_1$ 以 $R$ 相关;对于不属于 $R$ 的有序对,如 $(a_1, b_2) \notin R$,也可写成:$a_1 \not R b_2$,并称 $a_1$ 和 $b_2$ 不以 $R$ 相关。

**定义 3.2.3** 设 $A$ 是集合，$R$ 是笛卡儿乘积 $A\times A$ 的子集，则称 $R$ 为 $A$ 上的一个二元关系。

例如，$A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{(a,a),(a,b),(c,c),(d,c)\}$，则 $R$ 是 $A$ 上的一个二元关系。

**定义 3.2.4** 设 $R$ 是二元关系，由 $(x,y)\in R$ 的所有 $x$ 组成的集合称为 $R$ 的前域，记作 $\mathrm{dom}R$。使 $(x,y)\in R$ 的所有 $y$ 组成的集合称为 $R$ 的值域，记作 $\mathrm{ran}R$。

例如，设 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=(x,y,z)$，$R=\{(a,x),(b,y),(d,x),(d,y)\}$。由于 $A$ 中元素仅有 $a,b,d$ 与 $B$ 中元素以 $R$ 相关，所以 $R$ 的前域 $\mathrm{dom}R=\{a,b,d\}$，又由于 $A$ 中元素仅与 $B$ 中的 $x,y$ 以 $R$ 相关，所以 $R$ 的值域 $\mathrm{ran}R=\{x,y\}$。

又如，设 $A=\{a,b,c,d\}$，$R$ 是 $A$ 上的二元关系，$R=\{(a,a),(a,b),(b,c)\}$，则 $R$ 的前域 $\mathrm{dom}R=\{a,b\}$，$R$ 的值域 $\mathrm{ran}R=\{a,b,c\}$。

对于任意集合，空集总是它的子集，另外，这个集合的本身也是它的子集，常称这两个子集为平凡子集。

今后，将把笛卡儿乘积 $A\times B$ 的两个平凡子集　　和 $A\times B$ 分别称为空关系和全域关系。

例如，集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6\}$，设 $R$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系，其定义为：当 $a\in A$，$b\in B$，且 $a+b\geq 0$ 时，$(a,b)\in R$。易知，由于 $A$ 和 $B$ 中元素都是正整数，$A$ 中元素与 $B$ 中元素相加后必然大于等于 0，所以 $R$ 是全域关系，即

$$R=\ (1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

又设 $R'$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系，其定义为：当 $a\in A$，$b\in B$，且 $a+b\leq 0$ 时，$(a,b)\in R'$，易知 $R'$ 是 $A$ 到 $B$ 的空关系。

**定义 3.2.5** 设 $I_A$ 是 $A$ 上的二元关系且满足 $I_A=\{(a,a)\mid a\in A\}$，则称 $I_A$ 为 $A$ 上的恒等关系。

例如，$A=\{a,b,c\}$，则 $I_A=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$。

下面再举几个二元关系的实例，以加深对二元关系定义的理解。

例如，设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$R$ 是 $A$ 上的二元关系，当 $a,b\in A$ 且 $a$ 能整除 $b$ 时，$(a,b)\in R$（$R$ 也称为 $A$ 上的整除关系），求 $R$。

易见，$(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(1,5)$ 和 $(2,4)$ 都是整除关系 $R$ 中的元素，但不要忘掉 $(1,1)$，$(2,2)$，$(3,3)$，$(4,4)$，$(5,5)$ 也是 $R$ 中的元素，所以

$$R=\ (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(5,5)\}。$$

又如，设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$R$ 是 $A$ 上的二元关系，当 $a,b\in A$，且 $a$ 和 $b$ 被 3 除后余数相同时，$(a,b)\in R$（也称 $R$ 为模 3 同余关系），求 $R$。

易见，$(1,4)$，$(2,5)$，$(3,6)$ 都是 $R$ 的元素，但不要忘掉 $(4,1)$，$(5,2)$，$(6,3)$ 也都是 $R$ 的元素；并且对于任意的 $a\in A$，$(a,a)$ 也是 $R$ 中的元素，所以 $A$ 上的模 3 同余关系

$$R=\ (1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,4),(4,1),(2,5),(5,2),(3,6),(6,3)\}。$$

再如，设 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$A$ 中元素分别表示 5 位大学生，其中 $a,b,c$ 都是 20 岁，$d$ 和

$e$都是25岁，$R$是$A$上的二元关系，其定义为：年龄相同的大学生是有关系的，求同年龄关系$R$。

有了求解上述两例的经验后，易得$A$上同年龄关系

$$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b),(d,e),(e,d)\}。$$

### 3.2.2 二元关系的3种表示方法

当二元关系中的元素(有序对)较多时，二元关系的列举法表示过于繁多。下面提出二元关系的3种表示方法，它们不仅使二元关系的表示简化而且使二元关系的表示更形象、更直观，便于对二元关系作深入讨论。

**1.表格法**

设集合$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，易知，笛卡儿乘积$A \times B$中的元素个数为$n \times m$。先画出一个$n$行$m$列的表格，用$A$中元素：$a_1, a_2, \cdots, a_n$顺序标注在表格竖列的左方，用$B$中元素$b_1, b_2, \cdots, b_m$顺序标注在表格横行的上方。第$i$行，第$j$列的方格表示有序对$(a_i, b_j)$，显然$n \times m$个方格恰好表示了$A \times B$中的$n \times m$个有序对。由于$A$到$B$的二元关系$R$是$A \times B$的子集，所以当$a_p$和$a_q$以$R$相关时，在第$p$行，第$q$列的方格上填“√”，这就是二元关系的表格表示。如：

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$
$$R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_5)\}$$

则$R$的表格表示见表3.1。

表 3.1

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | √ | | √ | | |
| $a_2$ | | | | √ | |
| $a_3$ | | | | | √ |

又如：

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$
$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_3), (a_4, a_3)\}$$

则$R$的表格表示见表3.2。

表 3.2

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | √ | | √ | |
| $a_2$ | | | | √ |
| $a_3$ | | | √ | |
| $a_4$ | | | √ | |

**2.矩阵表示法**

由于矩阵是表格的数学表示，所以由关系的表格表示很容易转化为关系的矩阵表示。

设集合$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，$R$是$A$到$B$的二元关系。先写出一个$n \times m$矩阵$\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$，矩阵$\boldsymbol{C}$中元素$c_{ij}$定义为：如果$a_i$和$b_j$以$R$相关，则$c_{ij} = 1$，否则$c_{ij} = 0$。即

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & (a_i, b_j) \in R \\ 0 & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

例如

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$
$$R = \{(a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_2), (a_5, b_3)\}$$

$R$ 的矩阵表示为:

$$\begin{array}{cccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & 0 & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \\ a_4 & 0 & 1 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$R$ 的矩阵表示也称为 $R$ 的关系矩阵。

当 $R$ 为 $A$ 上的二元关系时,如果 $A$ 中有 $n$ 个元素:$a_1, a_2 \cdots, a_n$,那么对应于 $R$ 的关系矩阵是 $n$ 阶方阵 $[a_{ij}]$,且方阵中的元素 $a_{ij}$ 满足:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (a_i, a_j) \in R \\ 0 & (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$$

例如

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

$R = \{(a_1, a_1), (a_2, a_3), (a_3, a_5), (a_4, a_5), (a_4, a_2), (a_5, a_1), (a_5, a_5)\}$

则 $R$ 的关系矩阵为:

$$\begin{array}{cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ a_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

又如,设 $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $R$ 是 $A$ 上的模 3 同余关系,即当 $a, b \in A$, 且 $a$ 和 $b$ 被 3 除后余数相同时, $(a, b) \in R$。易知, $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (1,4), (4,1), (1,7), (7,1), (4,7), (7,4), (2,5), (5,2), (3,6), (6,3)\}$, $R$ 的关系矩阵为:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

**3 .图形表示法**

设 $R$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系, $R$ 的图形表示法是在平面上用 $n$ 个点分别表示 $A$ 中的元素:$a_1, a_2, \cdots, a_n$,用 $m$ 个点分别表示 $B$ 中的元素:$b_1, b_2, \cdots, b_m$。当 $(a_i, b_j) \in R$ 时,则从点 $a_i$ 至点 $b_j$ 画一条有向边,有向边的箭头自 $a_i$ 指向 $b_j$,否则就没有边连接。例如

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

$R = \quad (a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2), (a_4, b_4), (a_4, b_5)\}$

则 $R$ 的图形表示如图 3.5 所示。

又如，$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

$R = \quad (a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_5), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_5, a_4), (a_4, a_1)\}$

则 $R$ 的图形表示如图 3.6 所示。

当 $R$ 为 $A$ 上的二元关系时，其图形表示还可以在平面上仅画 $n$ 个点，当$(a_i, b_j) \in R$ 时，在点 $a_i$ 和 $a_j$ 间画一条有向边，箭头自 $a_i$ 指向 $b_j$。图3.6所示的图也可画成图 3.7所示。

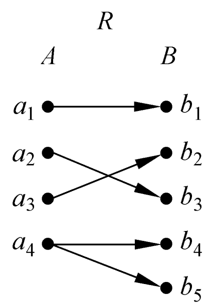


图　3.5

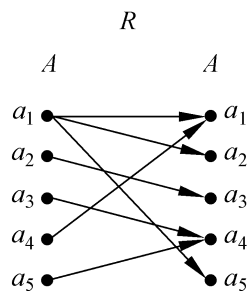


图　3.6

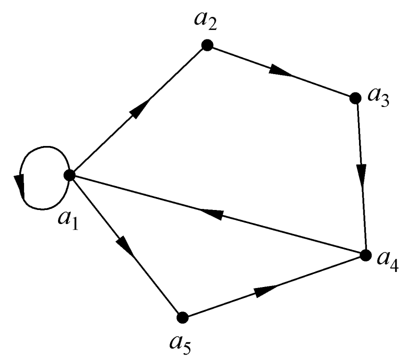


图　3.7

$R$ 的图形表示也称为 $R$ 的关系图。

### 3.2.3　关系的基本类型

下面将介绍 5 种具有某种特性的、基本的二元关系，它们在今后的讨论中有重要用途。

**1.自反的二元关系**

**定义3.2.6**　设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系，如果对于 $A$ 中每一个元素 $a$，都有$(a, a) \in R$，则称 $R$ 为自反的二元关系。

例如，$A = \{a, b, c\}$，$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\}$，则 $R$ 是自反的二元关系。

又如，$A = \{1, 2, 3, 4\}$，$R$ 是 $A$ 上的整除关系，由于$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ 都属于 $R$，所以整除关系 $R$ 是自反关系。

请注意，在二元关系自反性的定义中，要求对于 $A$ 中每一个元素 $a$，都有$(a, a) \in R$。所以当 $A = \{a, b, c\}$ 时，若 $R = \{(a, a), (b, b)\}$，则 $R$ 不是自反关系，因为 $c \in A$，但$(c, c) \notin R$。

**2.反自反的二元关系**

**定义3.2.7**　设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系，如果对于 $A$ 中每一个元素 $a$，都有$(a, a) \notin R$，则称 $R$ 为反自反关系。

例如，$A = \{a, b, c\}$，$R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$。易见，对于 $A$ 中的 3 个元素 $a, b, c$，都有$(a, a) \notin R$，$(b, b) \notin R$，$(c, c) \notin R$，所以 $R$ 是反自反关系。

又如，父子关系、夫妻关系等都是反自反关系。

显然,由自反和反自反的定义可知,不是自反的二元关系不一定是反自反关系,存在着既不是自反的也不是反自反的二元关系,例如 $A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (b, b)\}$,那么 $R$ 不是自反的二元关系,因为 $(c, c) \notin R$; $R$ 也不是反自反的二元关系,因为 $(a, a) \in R$ 和 $(b, b) \in R$。

**3.对称的二元关系**

**定义 3.2.8** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系,每当 $(a, b) \in R$ 时,就一定有 $(b, a) \in R$,则称 $R$ 为对称的二元关系。

例如,$A = \{a, b, c\}$,$R = \{(a, a), (b, c), (c, b)\}$,则 $R$ 是对称关系。

又如,$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,$R$ 是 $A$ 上的模 3 同余关系,即对于 $A$ 中元素 $a$ 和 $b$,当 $a$ 和 $b$ 被 3 除后余数相同时,$(a, b) \in R$。易见,$R$ 是 $A$ 上的对称关系。

请注意,在关系的对称性定义中,要求每当 $(a, b) \in R$ 时,就一定有 $(b, a) \in R$,所以对于 $A = \{a, b, c\}$,$R = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c)\}$,$R$ 不是对称关系,在 $R$ 中虽然有 $(a, b) \in R$,$(b, a) \in R$ 和 $(a, c) \in R$,$(c, a) \in R$,但 $(b, c) \in R$ 而 $(c, b) \notin R$。

**4.反对称的二元关系**

**定义 3.2.9** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系,每当有 $(a, b) \in R$ 且又有 $(b, a) \in R$ 时,必有 $a = b$,则称 $R$ 为反对称关系。

为了便于理解,反对称性的定义也可等价地改写为:

设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系,当 $a \neq b$ 时,如果 $(a, b) \in R$,则必有 $(b, a) \notin R$,称 $R$ 为反对称关系。

例如,$A = \{a, b, c\}$,$R = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$,则 $R$ 是反对称关系。

又如,$A = \{1, 2, 3\}$,$R$ 是 $A$ 上的小于关系,即当 $a < b$ 时,$(a, b) \in R$。易知,$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$,$R$ 是反对称关系。

再如,父子关系、夫妻关系等都是反对称关系。

还请注意,由关系的对称性和反对称性的定义可知,反对称性不是对称性的否定,存在着既不是对称的又不是反对称的二元关系,也存在着既是对称的,又是反对称的二元关系。例如:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (a, c)\}$$

易见,$R$ 不是对称关系,因为 $(a, c) \in R$,但 $(c, a) \notin R$; $R$ 也不是反对称关系,因为 $a \neq b$,但 $(a, b) \in R$ 且 $(b, a) \in R$。

又如,$A = \{a, b, c\}$,$R = \{(a, a)\}$,这时 $R$ 既是对称的又是反对称的二元关系。

**5.传递的二元关系**

**定义 3.2.10** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系,如果 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R$ 时,必有 $(a, c) \in R$,则称 $R$ 为传递关系,或称 $R$ 是可传递的。

例如,整除关系是传递关系。因为如果 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R$ 时,即 $a$ 能整除 $b$,$b$ 又能整除 $c$,显然 $a$ 能整除 $c$,所以必有 $(a, c) \in R$。

又如,小于关系是传递关系,如果 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R$ 时 $(a < b, b < c)$,必有 $(a, c) \in R (a < c)$。

但父子关系、朋友关系都不是传递关系。

请注意,当 $R$中不存在$(a, b) \in R$且$(b, c) \in R$时,则 $R$是传递关系。例如,$A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, b)\}$,则 $R$ 是 $A$ 上的传递关系。

上面介绍了 5 种二元关系的基本类型,其中自反的、反自反的、对称的和反对称的二元关系可以从以下它们的关系矩阵(或表格表示) 的不同特征加以区别:

· 在二元关系 $R$ 的关系矩阵中,如果对角线全为 1,则 $R$ 是自反关系。

· 在二元关系 $R$ 的关系矩阵中,如果对角线元素全为 0,则 $R$ 是反自反关系。

· 如果二元关系 $R$ 的关系矩阵是对称的,则 $R$ 是对称关系。

· 在二元关系 $R$ 的关系矩阵中,以对角线对称的元素不能同时为 1(即 $a_{ij} \cdot a_{ji} = 0$, $i \neq j$),则 $R$ 是反对称关系。

但二元关系的传递性不易从关系矩阵中直接得出。

### 3.2.4 重点和难点分析

本节的重点是:充分理解集合间的二元关系是集合的笛卡儿乘积的子集;熟练掌握二元关系的 5 种基本类型的定义和判别方法。

本节的难点是:二元关系传递性的判别。

**例 3.5** $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $R$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系,且 $R = \{(1, a), (2, a), (2, b), (2, c), (3, b), (4, c)\}$。求 $R$ 的表格表示,关系矩阵和关系图。

解　二元关系 $R$ 的表格表示如表 3.3 所示。

其关系矩阵为:

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

其关系图如图 3.8 所示。

表 3.3

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 1 | √ | | |
| 2 | √ | √ | √ |
| 3 | | √ | |
| 4 | | | √ |

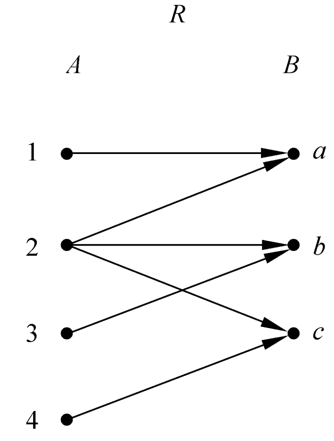



图 3.8

**例 3.6** $A = \{a, b, c, d\}$, $R$是 $A$ 上的二元关系,且 $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, c), (d, c), (d, d)\}$,求 $R$ 的表格表示,关系矩阵和关系图。

解　$R$ 的表格表示如表 3.4 所示。

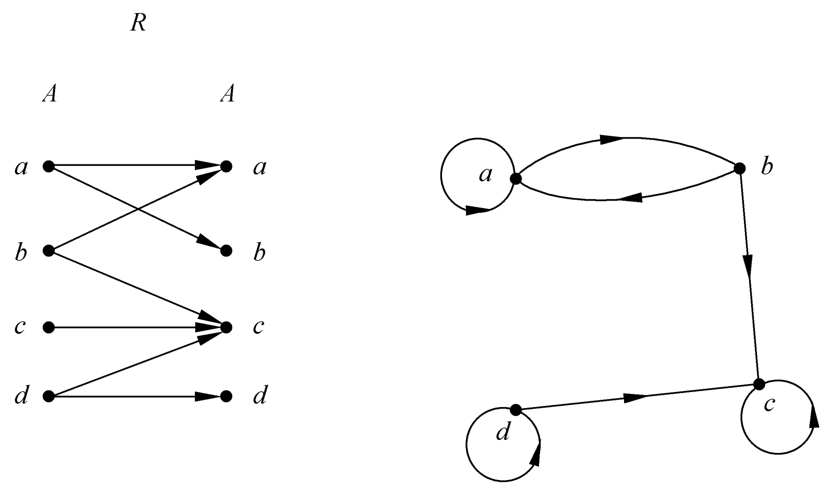
其关系矩阵为:

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

表 3.4

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | √ | √ | | |
| b | √ | | √ | |
| c | | | √ | |
| d | | | √ | √ |

其关系图可以有两种画法,见图 3.9(a) 和(b)。




(a) (b)

图 3.9

**例 3.7** 设 $A=\{a,b,c\}$, $R$ 是 $A$ 上的二元关系,且 $R=\{(a,a),(b,b),(a,b),(b,c),(a,c),(c,a)\}$,问:$R$ 是哪种类型的二元关系?

解 $R$ 不是自反关系,因为 $c\in A$,但 $(c,c)\notin R$,所以 $R$ 不是自反关系。$R$ 也不是反自反关系,因为有 $(a,a)\in R$ 和 $(b,b)\in R$。$R$ 也不是对称关系,因为有 $(a,b)\in R$,但 $(b,a)\notin R$。$R$ 也不是反对称关系,因为有 $(a,c)\in R$ 和 $(c,a)\in R$。$R$ 也不是传递关系,因为有 $(c,a)\in R$ 和 $(a,c)\in R$,但 $(c,c)\notin R$。

**例 3.8** 设集合 $A$ 中含有 5 个元素,即 $|A|=5$,问:$A$ 上可定义多少种不同的二元关系?

解 由于 $A$ 中含有 5 个元素,所以 $A\times A$ 应含有 25 个元素,即 $|A\times A|=25$。又由于 $A$ 上的二元关系都是 $A\times A$ 的子集,所以 $A$ 上可定义 $2^{25}$ 个不同的子集。

一般地讲,当 $|A|=n$ 时,$A$ 上可定义 $2^{n^2}$ 个不同的二元关系。

**例 3.9** 设 $R_1$ 和 $R_2$ 都是 $A$ 上的对称关系,证明 $R_1\cup R_2$ 和 $R_1\cap R_2$ 也都是 $A$ 上的对称关系。

证明 首先证明 $R_1\cup R_2$ 是 $A$ 上的对称关系。

当 $(a,b)\in R_1\cup R_2$ 时,应有 $(a,b)\in R_1$ 或 $(a,b)\in R_2$,不妨设 $(a,b)\in R_1$,由于 $R_1$ 是对称关系,所以有 $(b,a)\in R_1$,即有 $(b,a)\in R_1\cup R_2$,由此证得 $R_1\cup R_2$ 是对称关系。

再证 $R_1\cap R_2$ 是对称关系。

当 $(a,b)\in R_1\cap R_2$ 时,应有 $(a,b)\in R_1$ 且 $(a,b)\in R_2$,由于 $R_1$ 和 $R_2$ 都是 $A$ 上的对称关系,所以有 $(b,a)\in R_1$ 和 $(b,a)\in R_2$,即有 $(b,a)\in R_1\cap R_2$,由此证得 $R_1\cap R_2$ 是 $A$ 上的对称关系。

**例 3.10** 设 $R_1$ 和 $R_2$ 都是 $A$ 上的传递关系,证明 $R_1 \cap R_2$ 也是 $A$ 上的传递关系,并举例说明 $R_1 \cup R_2$ 不一定是 $A$ 上的传递关系。

**证明** 首先证明 $R_1 \cap R_2$ 是传递关系。

当 $(a,b) \in R_1 \cap R_2$ 且 $(b,c) \in R_1 \cap R_2$ 时,应有 $(a,b) \in R_1$ 和 $(a,b) \in R_2$ 且 $(b,c) \in R_1$ 和 $(b,c) \in R_2$。由于 $R_1$ 和 $R_2$ 都是 $A$ 上的传递关系,所以必有 $(a,c) \in R_1$ 和 $(a,c) \in R_2$,即有 $(a,c) \in R_1 \cap R_2$,由此证得 $R_1 \cap R_2$ 是 $A$ 上的传递关系。

再说明 $R_1 \cup R_2$ 不一定是传递关系。

例如,$A = \{a,b,c,d\}$,设 $R_1 = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$,$R_2 = \{(a,c),(c,d),(a,d)\}$。易知:$R_1 \cup R_2 = \{(a,b),(b,c),(a,c),(c,d),(a,d)\}$。由于 $(b,c) \in R_1 \cup R_2$ 且 $(c,d) \in R_1 \cup R_2$,但 $(b,d) \notin R_1 \cup R_2$,所以 $R_1 \cup R_2$ 不是 $A$ 上的传递关系。

## 3.2.5 自测练习

1. 设集合 $A = \{a,b\}$,$B = \{x,y\}$,求笛卡儿乘积 $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$。

2. 设集合 $A = \{1,2\}$,求 $A \times P(A)$。

3. 证明 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

4. 证明 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

5. 下列各等式中哪些成立? 哪些不成立? 说明理由。

(1) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

(2) $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$

(3) $(A \quad B) \times (C \quad D) = (A \times C) \quad (B \times D)$

(4) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

(5) $(A \quad B) \times C = (A \times C) \quad (B \times C)$

6. 设 $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$,$A$ 上的二元关系 $R = \{(a,b) \mid (a < b) \vee (a\text{是素数})\}$,写出 $R$ 的表格表示和关系矩阵,并求出 $\mathrm{dom}R$, $\mathrm{ran}R$。

7. 设 $A = \{1,2,3,4\}$,$P$ 和 $Q$ 都是 $A$ 上的二元关系,且有

$$P = \{(1,2),(2,4),(3,3)\}$$

$$Q = \{(1,3),(2,4),(4,2)\}$$

求 $P \cup Q$, $P \cap Q$, $\mathrm{dom}P$, $\mathrm{dom}Q$, $\mathrm{ran}P$, $\mathrm{ran}Q$, $\mathrm{dom}(P \cap Q)$, $\mathrm{ran}(P \cap Q)$。

8. 设 $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,$R = \{(a,b) \mid (a,b \in A) \wedge a\text{能整除}b \wedge (a \leq 5)\}$,求 $\mathrm{dom}R$, $\mathrm{ran}R$。

9. 设 $A = \{1,2,3,4,5\}$,$R$ 是 $A$ 上的二元关系,当 $x, y \in A$ 且 $x$ 和 $y$ 都是素数时,$(x,y) \in R$,写出 $R$ 的表格表示,关系矩阵和关系图。

10. 设 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$,$R$ 是 $A$ 上的整除关系,$S$ 是 $A$ 上的小于关系,求 $R \cup S$ 和 $R \cap S$。

11. 设集合 $A = \{a,b,c,d\}$,$B = \{1,2,3\}$,$R$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系,且 $R = \{(a,1),(a,2),(b,2),(c,3),(d,1),(d,3)\}$,求 $R$ 的表格表示,关系矩阵和关系图。

12. 设集合 $A = \{1,2,3,4,6,8\}$,$R$ 是 $A$ 上的整除关系,求 $R$ 的表格表示,关系矩阵和关系图。

13 .设集合 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,对于 $A$ 中元素 $a, b$,当 $a \times b > 0$ 时,$(a, b) \in R$,求 $R$ 的表格表示,关系矩阵和关系图。

14 .设 $A = \{1, 2, 3\}$,对于下列 $A$ 上的二元关系,说明哪些是自反的 ?哪些是反自反的 ?哪些是对称的 ?哪些是反对称的 ?哪些是传递的 ?

(1) $R = \{(1,1), (1,3), (1,2), (3,2)\}$

(2) $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$

(3) $R = \{(1,1), (2,2), (3,2), (3,3), (3,1), (1,2)\}$

(4) $R = \{(2,2), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3)\}$

(5) $R = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$

(6) $R = \ \ (1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (3,1)\}$

(7) $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)\}$

(8) $R = \{(1,1), (2,2)\}$

(9) $R = \{(1,2), (2,1)\}$

(10) $R = \{(1,1), (1,3), (3,1)\}$

15 .设集合 $A$ 中具有 5 个元素,即 $|A| = 5$,问:

(1) $A$ 上可定义多少种不同的自反关系 ?

(2) $A$ 上可定义多少种不同的反自反关系 ?

(3) $A$ 上可定义多少种不同的对称关系 ?

(4) $A$ 上可定义多少种不同的既是自反的又是对称的二元关系 ?

### 3 .2 .6 自测练习答案

1 .$A \times B = \{(a, x), (b, x), (a, y), (b, y)\}$; $B \times A = \{(x, a), (y, a), (x, b), (y, b)\}$; $A \times A = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$; $B \times B = \{(x, x), (y, y), (x, y), (y, x)\}$。

2 .由于 $P(A) = \{\ \ , \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$,所以 $A \times P(A) = \{(1, \ \ ), (1, \{1\}), (1, \{2\}), (1, \{1,2\}), (2, \ \ ), (2, \{1\}), (2, \{2\}), (2, \{1,2\})\}$。

3 .首先证明 $(A \cap B) \times C \quad (A \times C) \cap (B \times C)$。

设有序对 $(x, y) \in (A \cap B) \times C$,于是有 $x \in A \cap B$ 和 $y \in C$,即 $x \in A$ 且 $x \in B$ 和 $y \in C$,所以 $(x, y) \in A \times C$ 和 $(x, y) \in B \times C$。由此可知,$(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$。这表明当 $(x, y) \in (A \cap B) \times C$ 时,必有 $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$,所以 $(A \cap B) \times C \quad (A \times C) \cap (B \times C)$。

再证 $(A \cap B) \times C \quad (A \times C) \cap (B \times C)$。

设有序对 $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$,于是有 $(x, y) \in A \times C$ 且 $(x, y) \in B \times C$,也即 $x \in A$ 且 $x \in B$, $y \in C$。由此可知: $x \in A \cap B$, $y \in C$,即 $(x, y) \in (A \cap B) \times C$,于是证得 $(A \cap B) \times C \quad (A \times C) \cap (B \times C)$。

综上证得: $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$。

4 .证明方法同题 3。

5 .(1) 此等式不成立。

例如,设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{5, 6\}$, $D = \{7, 8\}$。易知, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$,

$C \cup D = \{5, 6, 7, 8\}$。所以$(A \cup B) \times (C \cup D)$共有 16 个有序对,即$|(A \cup B) \times (C \cup D)| = 16$。但 $A \times C$仅有 4 个有序对, $B \times D$也仅有 4 个有序对,虽然 $A \times C$和 $B \times D$是不相交的,但$(A \times C) \cup (B \times D)$只有 8 个有序对,即$|(A \times C) \cup (B \times D)| = 8$。由此可见,$(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$。

(2) 此等式不成立。

例如,设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{4, 5, 6\}$, $D = \{5, 6\}$。易知, $A - B = \{1\}$, $C - D = \{4\}$,所以$(A - B) \times (C - D) = \{1\} \times \{4\} = \{(1, 4)\}$,也即$(A - B) \times (C - D)$仅含 1 个有序对。

而在 $A \times C$中,由于$|A| = 3$, $|C| = 3$,所以$|A \times C| = 9$;在 $B \times D$中,由于$|B| = 2$, $|D| = 2$,所以$|B \times D| = 4$。显然, $A \times C$和 $B \times D$是相交的,所以$|(A \times C) - (B \times D)| = 9 - 4 = 5$。由此可见,$(A - B) \times (C - D) \neq (A \times C) - (B \times D)$。

(3) 此等式不成立。

例如,设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$, $C = \{4, 5\}$, $D = \{6\}$。易知, $A \quad B = \{1, 2, 3\}$, $C \quad D = \{4, 5, 6\}$,所以$|(A \quad B) \times (C \quad D)| = 9$。

而在 $A \times C$中,由于$|A| = 2$, $|C| = 2$,所以$|A \times C| = 4$;在 $B \times D$中,由于$|B| = 1$, $|D| = 1$,所以$|B \times D| = 1$。显然, $A \times C$和 $B \times D$是不相交的,所以$|(A \times C) \quad (B \times D)| = 4 + 1 = 5$。由此可见,$(A \quad B) \times (C \quad D) \neq (A \times C) \quad (B \times D)$。

(4) 此等式成立。

首先证明$(A - B) \times C \quad (A \times C) - (B \times C)$。

设有序对$(x, y) \in (A - B) \times C$,即有 $x \in A - B$和 $y \in C$,也即有 $x \in A$但 $x \notin B$和 $y \in C$。所以$(x, y) \in A \times C$但$(x, y) \notin B \times C$,由此证得$(x, y) \in (A \times C) - (B \times C)$,即$(A - B) \times C \quad (A \times C) - (B \times C)$。

再证$(A - B) \times C \quad (A \times C) - (B \times C)$。

设有序对$(x, y) \in (A \times C) - (B \times C)$,即有$(x, y) \in A \times C$但$(x, y) \notin (B \times C)$,由于$(x, y) \in A \times C$,所以 $x \in A$, $y \in C$;又由于$(x, y) \notin B \times C$,但 $y \in C$,所以必有 $x \notin B$,于是得到: $x \in A$, $x \notin B$, $y \in C$,即 $x \in A - B$, $y \in C$,由此证得$(x, y) \in (A - B) \times C$,即$(A - B) \times C \quad (A \times C) - (B \times C)$。

综上证得$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$。

(5) 此等式成立。由于

$$
\begin{aligned}
(A \quad B) \times C &= ((A - B) \cup (B - A)) \times C \\
&= ((A - B) \times C) \cup ((B - A) \times C) \\
&= ((A \times C) - (B \times C)) \cup ((B \times C) - (A \times C)) \\
&= (A \times C) \quad (B \times C)
\end{aligned}
$$

6 .由题设可知:

$R = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (5, 0), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$。所以 $R$的表格表示如表 3 .5 所示。

其关系矩阵为:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

表 3.5

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 1 | | | √ | √ | √ | √ | √ |
| 2 | √ | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 3 | √ | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 4 | | | | | | √ | √ |
| 5 | √ | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 6 | | | | | | | |

$\mathrm{dom}(R) = \{0,1,2,3,4,5\}$, $\mathrm{ran}R = \{0,1,2,3,4,5,6\}$。

7 .$P \cup Q = \{(1,2),(2,4),(3,3),(1,3),(4,2)\}$; $P \cap Q = \{(2,4)\}$; $\mathrm{dom}P = \{1,2,3\}$, $\mathrm{dom}Q = \{1,2,4\}$; $\mathrm{ran}P = \{2,3,4\}$; $\mathrm{ran}Q = \{2,3,4\}$; $\mathrm{dom}(P \cap Q) = \{2\}$; $\mathrm{ran}(P \cap Q) = \{4\}$。

8 .易知, $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(1,9),(1,10),(2,4),(2,6),(2,8),(2,10),(3,6),(3,9),(4,8),(5,10)\}$; 所以 $\mathrm{dom}R = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathrm{ran}R = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$。

9 .解 $R = \{(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5),(5,5),(5,2),(5,3)\}$。$R$的表格表示如表 3 .6 所示。

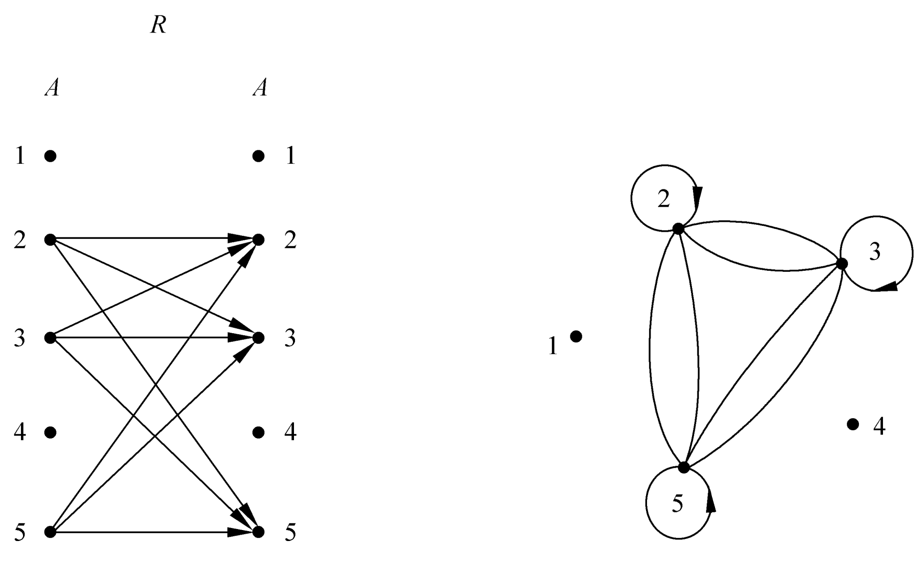
其关系矩阵为:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

表 3.6

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | √ | √ | | √ |
| 3 | | √ | √ | | √ |
| 4 | | | | | |
| 5 | | √ | √ | | √ |

其关系图如图 3 .10(a) 或(b) 所示。




(a) (b)

图 3 .10

10 .$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,6), (3,6)\}$; $S = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}$

$R \cup S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}$

$R \cap S = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,6), (3,6)\}$

11 .$R$**的表格表示如表** 3 .7 **所示。**

**其关系矩阵为:**

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

**表 3 .7**

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $a$ | √ | √ | |
| $b$ | | √ | |
| $c$ | | | √ |
| $d$ | √ | | √ |

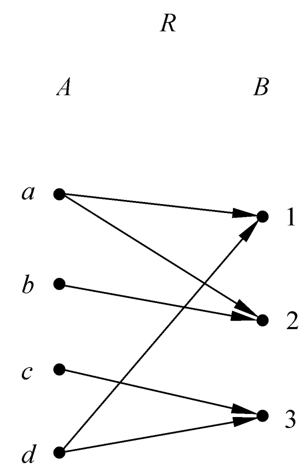



**图** 3 .11

**其关系图如图** 3 .11 **所示。**

12 .**易见**, $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (6,6), (8,8), (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (1,8), (2,4), (2,6), (2,8), (3,6), (4,8)\}$。**所以** $R$ **的表格表示如表** 3 .8 **所示。**

**表 3 .8**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 2 | | √ | | √ | √ | √ |
| 3 | | | √ | | √ | |
| 4 | | | | √ | | √ |
| 6 | | | | | √ | |
| 8 | | | | | | √ |

**其关系矩阵为:**

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

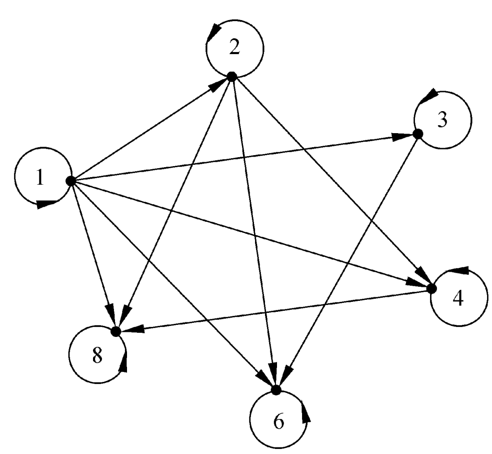



**图** 3 .12

其关系图如图 3.12 所示。

13. $R = \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(1,1),(2,2),(3,3),(-3,-2),(-3,-1),(-2,-1),(-1,-2),(-2,-3),(-1,-3),(1,2),(1,3),(2,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}$。所以 $R$ 的表格表示,如表 3.9 所示。

**表 3.9**

| | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3 | √ | √ | √ | | | | |
| -2 | √ | √ | √ | | | | |
| -1 | √ | √ | √ | | | | |
| 0 | | | | | | | |
| 1 | | | | | √ | √ | √ |
| 2 | | | | | √ | √ | √ |
| 3 | | | | | √ | √ | √ |

其关系矩阵为:

$$\begin{array}{ccccccc}
-3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

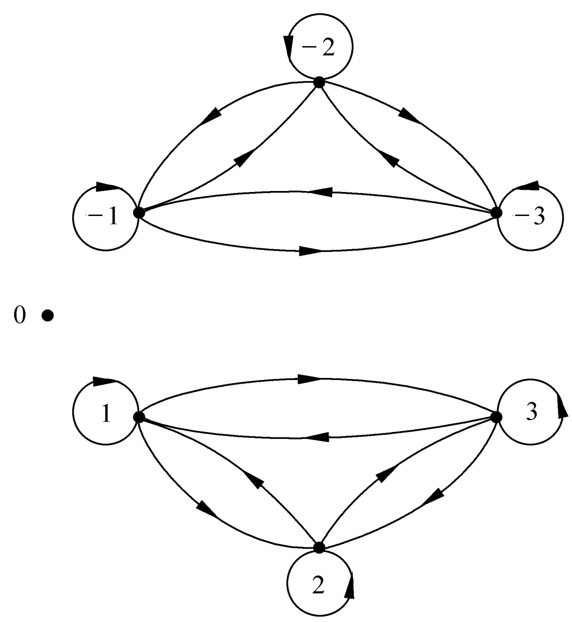


图 3.13

其关系图如图 3.13 所示。

14. (1) $R$ 是反对称、传递关系。

(2) $R$ 是自反的、对称的、传递的二元关系。

(3) $R$ 是自反的、反对称的、传递的二元关系。

(4) $R$ 不是自反的,也不是反自反的,也不是对称的,也不是反对称的,也不是传递的二元关系。

(5) $R$ 是反自反的、反对称的、传递的二元关系。

(6) $R$ 是自反的二元关系。

(7) $R$ 是自反的、反对称的,传递的二元关系。

(8) $R$ 是对称的、反对称的、传递的二元关系。

(9) $R$ 是反自反的、对称的二元关系。

(10) $R$ 是对称的二元关系。

15. (1) 为了便于分析,先画出 $5 \times 5$ 的表格,它表示 $A \times A$ 所含的 25 个有序对,见表 3.10。当 $R$ 是 $A$ 上的自反关系时,$R$ 必须含有表格对角线上 5 个格所表示的有序对,而在

余下的20个格中,可以依次取1个格,2个格,…,20个格,也可以不取,它们都是$A$上的自反关系。所以$A$上可定义自反关系的个数为:

表　3.10

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| √ | | | | |
| | √ | | | |
| | | √ | | |
| | | | √ | |
| | | | | √ |

$$C_{20}^{0} + C_{20}^{1} + \cdots + C_{20}^{20} = 2^{20}$$

由此可见,当$|A| = 5$时,$A$上可定义$2^{20}$个自反关系。

当$|A| = n$时,$A$上可定义$2^{n^2-n}$个自反关系。

(2) 分析同(1),所以$A$上可定义$2^{20}$个反自反关系。

当$|A| = n$时,$A$上可定义$2^{n^2-n}$个反自反关系。

(3) 当$R$是$A$上的对称关系时,$R$的表格表示对于表格的对角线也是对称的,所以只需考虑在表格的上半三角(包括对角线上的5个格子)选取有序对。见表3.11中有阴影的格,所以$A$上可定义$2^{15}$个对称关系。

当$|A| = n$时,可定义$2^{\frac{n(n+1)}{2}}$个对称关系。

(4) 当$R$是$A$上的自反且对称关系时,由上面分析可知,$R$只需在表格表示的上半三角(但不包括对角线上的5个格)选取有序对。见表3.12中有阴影的格,所以$A$上可定义自反且对称的二元关系有$2^{10}$个。

当$|A| = n$时,可定义$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$个自反且对称的二元关系。

表　3.11

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

表　3.12

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

# 3.3　关系的运算

关系是一个集合,一个由有序对为元素构成的集合,因此集合的并、交、减(绝对补)、对称差等各类运算及其运算规则都可以在关系上实施。本节将介绍关系所特有的一些运算,如复合运算、逆运算和闭包运算。下面逐个介绍。

## 3.3.1　复合关系和逆关系

**1.复合关系的定义**

**定义3.3.1**　设$A, B, C$是集合,$R$是$A$到$B$的二元关系,$S$是$B$到$C$的二元关系,$R$和$S$的复合关系记作$R \circ S$,它是一个$A$到$C$的二元关系,当$(a, b) \in R$且$(b, c) \in S$时,$(a, c) \in R \circ S$。

复合关系的定义也可写作:

$$R \circ S = \{(a, c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge (\exists b)(b \in B \wedge (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S)\}$$

例如, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$。$R$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系, $S$ 是 $B$ 到 $C$ 的二元关系,且有

$$R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2)\}$$

$$S = \{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_3, c_3)\}$$

则复合关系 $R \quad S$ 是 $A$ 到 $C$ 的二元关系,且有

$$R \quad S = \{(a_1, c_1), (a_1, c_2), (a_2, c_3), (a_3, c_3)\}$$

利用关系的图形表示可以方便地得到复合关系。

例如,在上述给出的两个二元关系 $R$ 和 $S$ 中,若需求复合关系 $R \quad S$,可先画出 $R$ 和 $S$ 的关系图如图 3 .14 所示。

在图中,两条连接的有向边中的第一条有向边的始点和第二条有向边的终点组成的有序对就是复合关系 $R \quad S$ 的元素。

又如, $A = \{a, b, c, d\}$, $R$ 和 $S$ 都是 $A$ 上的二元关系,且有

$$R = \{(a, b), (a, c), (c, c), (d, d)\}$$

$$S = \{(a, a), (b, b), (c, d), (d, d)\}$$

首先画出 $R$ 和 $S$ 的关系图如图 3 .15 所示。

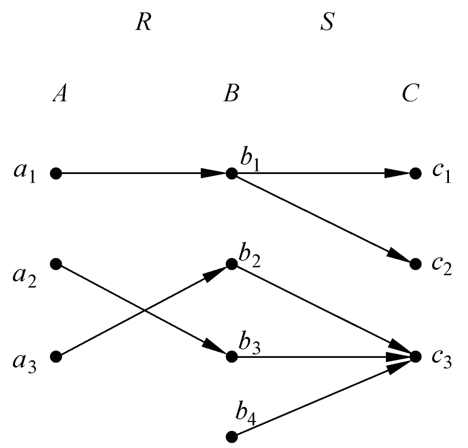



图 3 .14

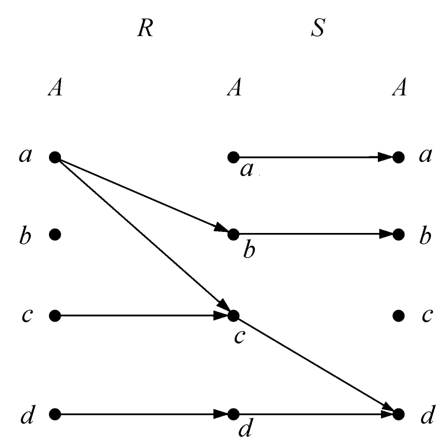



图 3 .15

由图可知, $R \quad S = \{(a, b), (a, d), (c, d), (d, d)\}$。

**2 .复合关系的矩阵表示**

首先来看一个实例。

设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$。$R$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系, $S$ 是 $B$ 到 $C$ 的二元关系,且有

$$R = \{(a_1, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_4)\}$$

$$S = \{(b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_4, c_3)\}$$

$R$ 和 $S$ 的关系图如图 3 .16 所示。由图可知:

$$R \quad S = \{(a_1, c_2), (a_3, c_3)\}$$

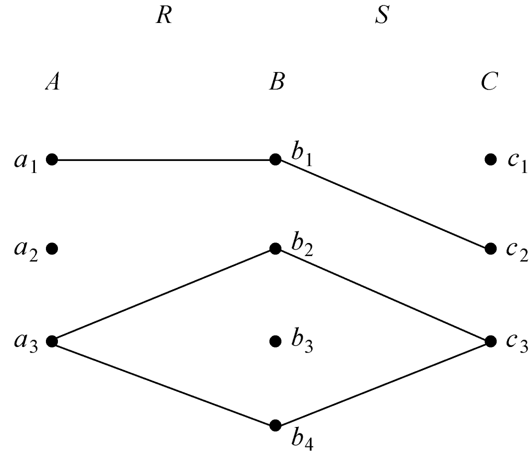



图 3 .16

现在考察 $R$ 的关系矩阵: $\boldsymbol{M}_R$, $S$ 的关系矩阵: $\boldsymbol{M}_S$ 和复合关系 $R \quad S$ 的关系矩阵: $\boldsymbol{M}_{R \quad S}$, 易知

$$\boldsymbol{M}_R = \begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \boldsymbol{M}_S = \begin{array}{c|ccc} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline b_1 & 0 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & 1 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\boldsymbol{M}_{R\ S} = \begin{array}{c|ccc} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline a_1 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

再考察 $\boldsymbol{M}_R$ 乘以 $\boldsymbol{M}_S$ 的结果,由矩阵的乘法运算可知:

$$\boldsymbol{M}_R \times \boldsymbol{M}_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times0+0\times0+0\times0+0\times0 & 1\times1+0\times0+0\times0+0\times0 & 1\times0+0\times1+0\times0+0\times1 \\ 0\times0+0\times0+0\times0+0\times0 & 0\times1+0\times0+0\times0+0\times0 & 0\times0+0\times1+0\times0+0\times1 \\ 0\times0+1\times0+0\times0+0\times0 & 0\times1+1\times0+0\times0+0\times0 & 0\times0+1\times1+0\times0+1\times1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

如果把矩阵中各元素的加法运算改成布尔加运算,即 $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 1$, $\boldsymbol{M}_R \times \boldsymbol{M}_S$ 相应地改记为 $\boldsymbol{M}_R \quad \boldsymbol{M}_S$,则

$$\boldsymbol{M}_R \quad \boldsymbol{M}_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由此可知,$\boldsymbol{M}_R \quad \boldsymbol{M}_S = \boldsymbol{M}_{R\ S}$。所以有以下定理。

**定理 3.3.1** 设 $A$, $B$, $C$ 是集合,$R$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系,其关系矩阵为 $\boldsymbol{M}_R$; $S$ 是 $B$ 到 $C$ 的二元关系,其关系矩阵为 $\boldsymbol{M}_S$; 复合关系 $R \quad S$ 的关系矩阵为 $\boldsymbol{M}_{R\ S}$,则

$$\boldsymbol{M}_{R\ S} = \boldsymbol{M}_R \quad \boldsymbol{M}_S$$

其中　是指采用布尔运算。

例如,$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R$, $S$, $T$ 是 $A$ 上的二元关系,且有

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (4,3)\}$$

$$S = \{(1,1), (2,1), (2,4), (3,3), (3,4)\}$$

$$T = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,4)\}$$

利用关系矩阵求$(R\circ S)\circ T$和$R\circ(S\circ T)$。

解法如下,首先写出$R, S, T$的关系矩阵:

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{M}_S=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{M}_T=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{R\circ S}=\boldsymbol{M}_R\circ\boldsymbol{M}_S=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{S\circ T}=\boldsymbol{M}_S\circ\boldsymbol{M}_T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{(R\circ S)\circ T}=\boldsymbol{M}_{R\circ S}\circ\boldsymbol{M}_T=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{R\circ(S\circ T)}=\boldsymbol{M}_R\circ\boldsymbol{M}_{S\circ T}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得$(R\circ S)\circ T=\{(1,2),(2,2),(2,4),(3,4)\}$, $R\circ(S\circ T)=\{(1,2),(2,2),(2,4),(3,4)\}$,于是有

$$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$$

如果把复合关系看作是关系的复合运算结果,上述等式表示复合运算$\circ$是可结合运算。更一般的情况有如下定理。

**定理 3.3.2** 设$A, B, C, D$是集合,$R$是$A$到$B$的二元关系,$S$是$B$到$C$的二元关系,$T$是$C$到$D$的二元关系,则

$$(R\circ S)\circ T=R\circ(T\circ S)$$

即关系的复合运算是可结合运算。

证明从略。

由于关系的复合运算是可结合运算,所以关系的幂是有意义的。可令

$$R^2=R\circ R$$

$$R^3=R\circ R\circ R$$

……

于是可得

$$R^i \quad R^j = R^{i+j}$$
$$(R^i)^j = R^{ij} \qquad (i, j \text{ 为正整数})$$

**3 .逆关系**

**定义 3 .3 .2** 设 $R$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系,若把 $R$ 中每一个有序对内两个元素的位置互换,从而得到的 $B$ 到 $A$ 的二元关系称为 $R$ 的逆关系,记作 $R^{-1}$。

例如,$A = \{x, y, z\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $R$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系,且

$$R = \{(x,1),(y,1),(y,4),(z,2)\}$$

则 $R$ 的逆关系 $R^{-1}$ 是 $B$ 到 $A$ 的二元关系,且

$$R^{-1} = \{(1, x),(1, y),(4, y),(2, z)\}$$

由逆关系的定义可知:

如果把 $R$ 关系图中每条有向边的箭头方向颠倒,就得到 $R^{-1}$ 的关系图。

如果把 $R$ 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 转置后即可得 $R^{-1}$ 的关系矩阵,即 $R^{-1}$ 的关系矩阵为 $\boldsymbol{M}_R^T$。

**定理 3 .3 .3** 设 $R$ 和 $S$ 都是 $A$ 上的二元关系,则下列各式成立:

(1) $(R^{-1})^{-1} = R$

(2) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

(3) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

(4) $(R \quad S)^{-1} = S^{-1} \quad R^{-1}$

证明从略。

**定理 3 .3 .4** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系。

(1) 若 $R$ 是自反的,则 $R^{-1}$ 也是自反的。

(2) 若 $R$ 是反自反的,则 $R^{-1}$ 也是反自反的。

(3) 若 $R$ 是对称的,则 $R^{-1}$ 也是对称的。

(4) 若 $R$ 是反对称的,则 $R^{-1}$ 也是反对称的。

(5) 若 $R$ 是可传递的,则 $R^{-1}$ 也是可传递的。

证明从略。

## 3 .3 .2 关系的闭包运算

在给定的一个二元关系中,适当地添加一些有序对,使其成为具有某种特性的二元关系,这就是关系的闭包运算。

**定义 3 .3 .3** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系, $R$ 的自反(对称或传递) 闭包 $R'$ 也是 $A$ 上的二元关系,且满足:

(1) $R'$ 是自反(对称或传递) 的二元关系。

(2) $R' \quad R$。

(3) 对任何 $A$ 上的自反(对称或传递) 关系 $R''$,如果 $R'' \quad R$,则必有 $R'' \quad R'$。

由闭包的定义可知, $R$ 的自反(对称或传递) 闭包是含有 $R$ 并且具有自反(对称或传递) 性质的“最小”的关系。

$R$ 的自反闭包记作 $r(R)$; $R$ 的对称闭包记作 $s(R)$; $R$ 的传递闭包记作 $t(R)$。

显然,当 $R$ 已是自反关系时, $R = r(R)$;当 $R$ 已是对称关系时, $R = s(R)$;当 $R$ 已是传

递关系时，$R = t(R)$。

求 $R$ 的自反闭包是简单的。

设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系，$x \in A$，把所有 $(x, x) \notin R$ 的有序对加到 $R$ 上去，使其扩充成自反关系，扩充后的自反关系就是 $R$ 的自反闭包 $r(R)$。

例如，$A = \{a, b, c, d\}$，$R = \{(a, a), (c, c), (a, d)\}$，则 $R$ 的自反闭包 $r(R) = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d)\}$。

如果令 $I_A = \{(x, x) \mid x$ 是 $A$ 中任意元素$\}$，常称 $I_A$ 为 $A$ 上的相等关系。显然有

**定理 3.3.5** $R$ 是 $A$ 上的二元关系，则 $R$ 的自反闭包 $r(R) = R \cup I_A$。

求 $R$ 的对称闭包也是简单的。

每当 $(a, b) \in R$，而 $(b, a) \notin R$ 时，把有序对 $(b, a)$ 加到 $R$ 上去，使其扩充成对称的二元关系，扩充后的对称关系就是 $R$ 的对称闭包。

例如，$A = \{a, b, c, d\}$，$R$ 是 $A$ 上的二元关系，$R = \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, d), (d, c)\}$，则 $R$ 的对称闭包 $s(R) = \{(a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}$。

由逆关系的定义可知：

**定理 3.3.6** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系，其逆关系为 $R^{-1}$，则 $R$ 的对称闭包 $s(R) = R \cup R^{-1}$。

求传递闭包却不能像求自反闭包或对称闭包那样，简单地采用"缺什么，补什么"的方法来求得。因为每当 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R$ 时，$(a, c) \notin R$，把有序对 $(a, c)$ 添加到 $R$ 上去，使其扩充为 $R^*$，但 $R^*$ 不一定是传递关系，所以 $R^*$ 不一定是 $R$ 的传递闭包。

例如，$A = \{a, b, c, d\}$，$R = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$。由于 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R$，而 $(a, c) \notin R$；$(b, c) \in R$ 且 $(c, d) \in R$，而 $(b, d) \notin R$。所以应把 $(a, c)$ 和 $(b, d)$ 添加到 $R$ 上去，使其扩充为 $R^* = \{(a, b), (b, c), (c, d), (a, c), (b, d)\}$，但 $R^*$ 不是传递关系，因为有 $(a, b) \in R^*$，$(b, d) \in R^*$，但 $(a, d) \notin R^*$，所以 $R^*$ 不是传递关系，$R^*$ 不是 $R$ 的传递闭包。

下列定理给出了求传递闭包的方法。

**定理 3.3.7** 设 $A$ 是具有 $n$ 个元素的有限集，$R$ 是 $A$ 上的二元关系，则 $R$ 的传递闭包 $t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$。

证明从略。

例如，$A = \{a, b, c, d\}$，$R = \{(a, c), (c, b), (b, d)\}$。求 $R$ 的传递闭包 $t(R)$。

由定理 3.3.7 可知，$R$ 的传递闭包为：

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$$

下面用关系矩阵来求得 $R^2$，$R^3$，$R^4$。易知，$R$ 的关系矩阵为：

$$\boldsymbol{M}_R = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\boldsymbol{M}_{R^2} = \boldsymbol{M}_R \quad \boldsymbol{M}_R = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

由此可知，$R^2 = \{(a, b), (c, d)\}$。

$$M_{R^3} = M_{R^2} \quad M_R = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

由此可知，$R^3 = \{(a, d)\}$。

$$M_{R^4} = M_{R^3} \quad M_R = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

由此可知，$R^4 =$ 。于是有

$$\begin{aligned} t(R) &= R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \\ &= \{(a, c), (c, b), (b, d), (a, b), (c, d), (a, d)\} \end{aligned}$$

### 3.3.3 重点和难点分析

本节的重点是：充分理解复合关系与逆关系的定义，掌握求关系的传递闭包的方法。

本节的难点是：熟练地求出关系的传递闭包。

**例 3.11** 设 $A = \{x, y, z\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$，$C = \{a, b, c, d\}$，$R$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系，$S$ 是 $B$ 到 $C$ 的二元关系，且

$$R = \{(x, 1), (y, 1), (y, 2), (z, 3)\}$$
$$S = \{(1, b), (2, c), (3, d), (4, d)\}$$

试利用关系图求 $R \quad S$。

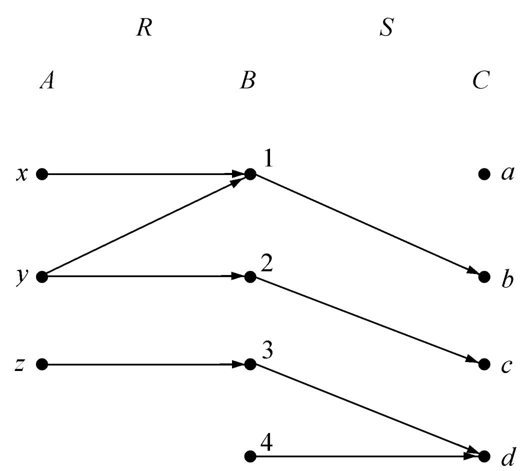


图 3.17

解 先画出 $R$ 和 $S$ 的关系图如图 3.17 所示：

由图可知，$R \quad S = \{(x, b), (y, b), (y, c), (z, d)\}$。

**例 3.12** 设 $A = \{a, b, c, d\}$，$R$ 和 $S$ 都是 $A$ 上的二元关系，且

$$R = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (d, c)\}$$
$$S = \{(a, a), (b, a), (c, b), (d, a), (d, c)\}$$

试利用关系矩阵求 $R \quad S$ 和 $S \quad R$。

解 先写出 $R$ 和 $S$ 的关系矩阵 $M_R$ 和 $M_S$。

$$M_R = \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$
M_S = \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \end{array}
$$
$$
M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

**由于** $M_{R\ \ S} = M_R \quad M_S$ **,所以**

$$
M_{R\ \ S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

**由此可得**: $R \quad S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (d, b)\}$。**又由于**

$$
M_{S\ \ R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

**由此可得**: $S \quad R = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c)\}$。

**易见**, $R \quad S \neq S \quad R$,**所以关系的复合运算不是可交换运算。**

**例 3 .13** **设** $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, b)\}$,**求** $R^2$, $R^3$ **和** $R^4$。

**解** **先写出** $R$ **的关系矩阵**:

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ M_R = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

**由于** $M_{R^2} = M_R \quad M_R$ **,所以有**

$$
M_{R^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

**由此可得**: $R^2 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (d, a), (d, c)\}$。

**又由于** $\boldsymbol{M}_{R^3} = \boldsymbol{M}_{R^2\ R} = \boldsymbol{M}_{R^2}\quad \boldsymbol{M}_R$,**所以有**

$$
\boldsymbol{M}_{R^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

**由此可得**: $R^3 = \{(a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, d)\}$

**仍由于** $\boldsymbol{M}_{R^4} = \boldsymbol{M}_{R^3}\quad \boldsymbol{M}_R$,**所以有**

$$
\boldsymbol{M}_{R^4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

**由此可得**: $R^4 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)\}$。

**例 3.14** 　**设** $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 2)\}$,**求** $R\quad R^{-1}$ **和** $R^{-1}\quad R$。

**解** 　**先写出** $R$ **和** $R^{-1}$ **的关系矩阵**:

$$
\boldsymbol{M}_R = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
\boldsymbol{M}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

**利用** $\boldsymbol{M}_{R\ \ R^{-1}} = \boldsymbol{M}_R\quad \boldsymbol{M}_{R^{-1}}$**,可知**

$$\boldsymbol{M}_{R\ \ R^{-1}} = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

**于是得到**: $R\quad R^{-1} = \{(1,1),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$。**再由** $\boldsymbol{M}_{R^{-1}\ \ R} = \boldsymbol{M}_{R^{-1}}\quad \boldsymbol{M}_R$,**可知**

$$\boldsymbol{M}_{R^{-1}\ \ R} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

**于是得到**: $R^{-1}\quad R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$。

**例 3.15** **设** $R$ **是** $A$ **上的对称关系,证明** $R^2$ **也是** $A$ **上的对称关系。**

**证明** **如果存在着** $(a,b)\in R^2$,**由复合关系的定义可知**,$A$ **中必存在元素** $x$,**使得**

$$(a,x)\in R \text{ 和 } (x,b)\in R$$

**由题设可知**,$R$ **是** $A$ **上的对称关系,所以有**

$$(x,a)\in R \text{ 和 } (b,x)\in R$$

**又由复合关系的定义可知**,$(b,a)\in R^2$。**因此当** $(a,b)\in R^2$ **时,必有** $(b,a)\in R^2$,**由此证得** $R^2$ **是** $A$ **上的对称关系。**

**例 3.16** **设** $R$ **是** $A$ **上的传递关系,证明** $R^2$ **也是** $A$ **上的传递关系。**

**证明** **当** $(a,b)\in R^2$ **且** $(b,c)\in R^2$ **时,由复合关系的定义可知**,$A$ **中必存在元素** $x$ **和** $y$,**使得**

$$(a,x)\in R \text{ 和 } (x,b)\in R$$
$$(b,y)\in R \text{ 和 } (y,c)\in R$$

**由于** $R$ **是传递关系,所以有**

$$(a,b)\in R \text{ 和 } (b,c)\in R$$

**再由复合关系的定义可知**,$(a,c)\in R^2$。**因此当** $(a,b)\in R^2$ **和** $(b,c)\in R^2$ **时,必有** $(a,c)\in R^2$,**由此证得** $R^2$ **是** $A$ **上的传递关系。**

**例 3.17** **设** $A=\{a,b,c,d\}$,$R=\{(a,a),(a,c),(c,d),(d,b),(d,d)\}$,**求** $R$ **的自反闭包** $r(R)$,$R$ **的对称闭包** $s(R)$ **和传递闭包** $t(R)$。

**解** 易知, $R$ 的自反闭包 $r(R)=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,d),(d,b)\}$; $R$ 的对称闭包 $s(R)=\{(a,a),(a,c),(c,a),(c,d),(d,c),(d,b),(b,d),(d,d)\}$。

现求其传递闭包。先写出 $R$ 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$:

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{array}{c}\begin{matrix} a & b & c & d\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\boldsymbol{M}_{R^2}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

由此可知, $R^2=\{(a,a),(a,c),(a,d),(c,b),(c,d),(d,b),(d,d)\}$。

$$\boldsymbol{M}_{R^3}=\boldsymbol{M}_{R^2}\quad\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

由此可知, $R^3=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(c,b),(c,d),(d,b),(d,d)\}$。

$$\boldsymbol{M}_{R^4}=\boldsymbol{M}_{R^3}\quad\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

由此可知, $R^4=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(c,b),(c,d),(d,b),(d,d)\}$。由于

$$\begin{aligned}t(R)&=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4\\&=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(c,b),(c,d),(d,b),(d,d)\}。\end{aligned}$$

**例 3.18** 设 $R_1$ 和 $R_2$ 是 $A$ 上的二元关系, 证明 $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$,

$s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$。并举例说明 $t(R_1 \cup R_2) = t(R_1) \cup t(R_2)$ 不一定成立。

**证明** 首先证明 $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$。由定理 3.3.5 可知:

$$\begin{aligned} r(R_1 \cup R_2) &= (R_1 \cup R_2) \cup I_A \\ &= (R_1 \cup I_A) \cup (R_2 \cup I_A) \\ &= r(R_1) \cup r(R_2) \end{aligned}$$

由此证得: $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$。

再证 $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$。由定理 3.3.6 可知:

$$\begin{aligned} s(R_1 \cup R_2) &= (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1} \\ &= (R_1 \cup R_2) \cup (R_1^{-1} \cup R_2^{-1}) \\ &= (R_1 \cup R_1^{-1}) \cup (R_2 \cup R_2^{-1}) \\ &= s(R_1) \cup s(R_2) \end{aligned}$$

由此证得: $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$。

现说明 $t(R_1 \cup R_2) = t(R_1) \cup t(R_2)$ 不一定成立。

例如,设 $A = \{a, b, c, d\}$, $R_1$ 和 $R_2$ 都是 $A$ 上的二元关系,若取

$$R_1 = \{(a, a), (a, c), (c, d)\}$$

$$R_2 = \{(c, d), (d, b), (d, d)\}$$

易见,例 3.17 中所设的 $R$ 恰好等于 $R_1 \cup R_2$,所以 $R_1 \cup R_2$ 的传递闭包为:

$$t(R_1 \cup R_2) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (c, b), (c, d), (d, b), (d, d)\}。$$

显然, $R_1$ 的传递闭包为:

$$t(R_1) = \{(a, a), (a, c), (c, d), (a, d)\}$$

$R_2$ 的传递闭包为:

$$t(R_2) = \{(c, d), (d, b), (c, b), (d, d)\}$$

由此可得:

$$t(R_1) \cup t(R_2) = \{(a, a), (a, c), (c, d), (a, d), (d, b), (c, b), (d, d)\}$$

由于 $(a, b) \in t(R_1 \cup R_2)$, 但 $(a, b) \notin t(R_1) \cup t(R_2)$, 所以 $t(R_1 \cup R_2) \neq t(R_1) \cup t(R_2)$。

## 3.3.4 自测练习

1.设 $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{a, b, c, d\}$; $R$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系, $R = \{(x, 1), (y, 2), (y, 3), (z, 3)\}$, $S$ 是 $B$ 到 $C$ 的二元关系, $S = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, d)\}$, 试利用关系图求复合关系 $R \circ S$。

2.设 $A = \{1, 2, 3\}$, $R$ 和 $S$ 都是 $A$ 上的二元关系,其中 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$, $S = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$,试利用关系图求复合关系 $R \circ S$。

3.设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R$ 和 $S$ 都是 $A$ 上的二元关系,其中 $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$, $S = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$。利用关系矩阵求 $R \circ S$, $S \circ R$ 和 $R^2$, $S^2$。

4.设 $A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, c)\}$。求 $R \circ R^{-1}$ 和 $R^{-1} \circ R$。

5.设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系,证明

(1) 如果 $R$ 是自反关系,则 $R^{-1}$ 也是自反关系。

(2) 如果 $R$ 是反自反关系,则 $R^{-1}$ 也是反自反关系。

(3) 如果 $R$ 是对称关系,则 $R^{-1}$ 也是对称关系。

(4) 如果 $R$ 是反对称关系,则 $R^{-1}$ 也是反对称关系。

(5) 如果 $R$ 是传递关系,则 $R^{-1}$ 也是传递关系。

6 .设 $R$ 和 $S$ 都是 $A$ 上的二元关系,说明以下命题的正确与否。

(1) 如果 $R$ 和 $S$ 是自反的,则 $R \quad S$ 也是自反的。

(2) 如果 $R$ 和 $S$ 是反自反的,则 $R \quad S$ 也是反自反的。

(3) 如果 $R$ 和 $S$ 是对称的,则 $R \quad S$ 也是对称的。

(4) 如果 $R$ 和 $S$ 是反对称的,则 $R \quad S$ 也是反对称的。

(5) 如果 $R$ 和 $S$ 是传递的,则 $R \quad S$ 也是传递的。

7 .设 $R$ 是 $A$ 上的对称关系,证明 $R \quad R^{-1}$ 也是 $A$ 上的对称关系。

8 .设 $R$ 是 $A$ 上的反自反关系,证明 $R^2$ 不一定是反自反关系。

9 .设 $R$ 是 $A$ 上的反对称关系,说明 $R^2$ 不一定是反对称关系。

10 .设 $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (a, c), (c, d)\}$, 求 $R$ 的自反闭包 $r(R)$ 和对称闭包 $s(R)$。

11 .设 $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$, 求 $R$ 的传递闭包 $t(R)$。

12 .设 $R_1$ 和 $R_2$ 是 $A$ 上的二元关系,证明 $r(R_1 \cap R_2) = r(R_1) \cap r(R_2)$。

### 3 .3 .5 自测练习答案

1 .先画 $R$ 和 $S$ 的关系图如图 3 .18 所示。

由图可知, $R \quad S = \{(x, a), (y, b), (y, c), (y, d), (z, d)\}$。

2 .先画出 $R$ 和 $S$ 的关系图如图 3 .19 所示。

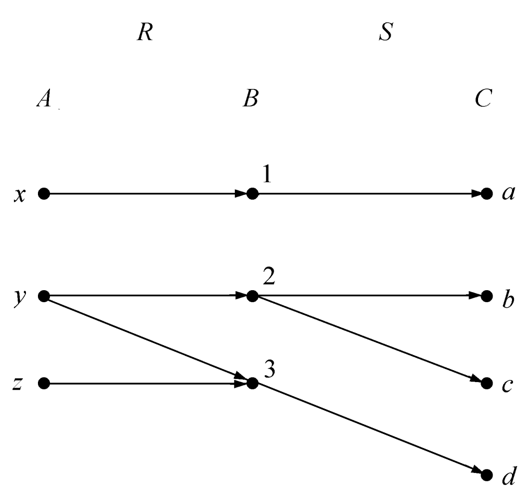



图 3 .18

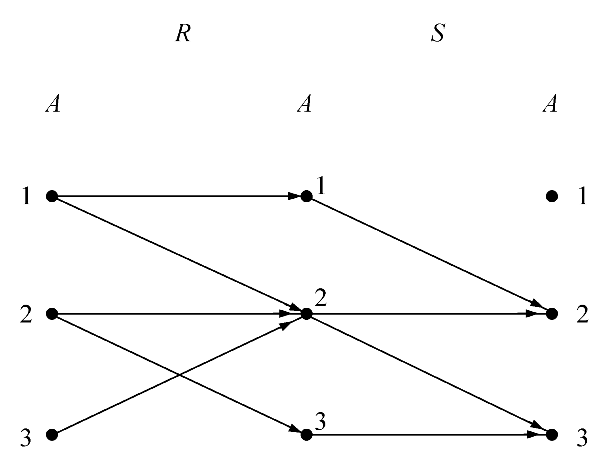



图 3 .19

由图可知, $R \quad S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$。

3 .先写出 $R$ 和 $S$ 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 和 $\boldsymbol{M}_S$:

$$\boldsymbol{M}_R = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\boldsymbol{M}_S = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

**由于** $\boldsymbol{M}_{R \circ S} = \boldsymbol{M}_R \circ \boldsymbol{M}_S$**,所以**

$$\boldsymbol{M}_{R \circ S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**于是可得**$: R \circ S = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(4,1),(4,3)\}$。**又由于** $\boldsymbol{M}_{S \circ R} = \boldsymbol{M}_S \circ \boldsymbol{M}_R$,**所以**

$$\boldsymbol{M}_{S \circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**于是可得**$: S \circ R = \{(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\}$。**同样由于** $\boldsymbol{M}_{R^2} = \boldsymbol{M}_R \circ \boldsymbol{M}_R$, $\boldsymbol{M}_{S^2} = \boldsymbol{M}_S \circ \boldsymbol{M}_S$**,所以**

$$\boldsymbol{M}_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{S^2} = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

**于是可得**: $R^2 = \{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$, $S^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$。

4 .**先写出** $R$ **的关系矩阵** $\boldsymbol{M}_R$:

$$\boldsymbol{M}_R = \begin{array}{ccc} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

**易知**,**逆关系** $R^{-1}$ **的关系矩阵为** $\boldsymbol{M}_R$ **的转置**,**所以有**

$$\boldsymbol{M}_{R^{-1}} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

**由于** $\boldsymbol{M}_{R\ R^{-1}} = \boldsymbol{M}_R \quad \boldsymbol{M}_{R^{-1}}$, $\boldsymbol{M}_{R^{-1}\ R} = \boldsymbol{M}_{R^{-1}} \quad \boldsymbol{M}_R$,**所以**

$$\boldsymbol{M}_{R\ R^{-1}} = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{R^{-1}\ R} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

**由此可得**: $R\quad R^{-1} = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$; $R^{-1}\quad R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$。

5 .(1) **当** $R$ **是自反关系时**,**对于** $A$ **中任意元素** $a$,**都有** $(a,a) \in R$; **由逆关系的定义可知**, $(a,a) \in R^{-1}$,**所以** $R^{-1}$ **也是自反关系**。

(2) **用反证法**。**设** $A$ **中存在元素** $x$,**使得** $(x,x) \in R^{-1}$,**由此可知应有** $(x,x) \in R$,**这和** $R$ **是反自反的假设矛盾**,**所以** $A$ **中不存在元素** $x$,**使得** $(x,x) \in R^{-1}$,**因此** $R^{-1}$ **是反自反**

关系。

(3) 当$(a,b)\in R^{-1}$时，应有$(b,a)\in R$，由于$R$是对称关系，所以$(a,b)\in R$，于是应有$(b,a)\in R^{-1}$，由此证得$R^{-1}$是对称关系。

(4) 当$a\neq b$时，如果$(a,b)\in R^{-1}$，则应有$(b,a)\in R$，由于$R$是反对称关系，所以$(a,b)$旭$R$，也即有$(b,a)$旭$R^{-1}$，由此证得$R^{-1}$是反对称关系。

(5) 当$(a,b)\in R^{-1}$且$(b,c)\in R^{-1}$时，应有$(b,a)\in R$且$(c,b)\in R$，由于$R$是传递关系，所以$(c,a)\in R$，也即有$(a,c)\in R^{-1}$，由此证得$R^{-1}$是传递关系。

6 .(1) 正确。因为当$R$和$S$都是$A$上的自反关系时，则对于$A$中任意元素$x$，都有

$$(x,x)\in R\text{和}(x,x)\in S$$

由复合关系的定义可知，$(x,x)\in R\quad S$，所以$R\quad S$是$A$上的自反关系。

(2) 不正确。例如，设$R=\{(a,b)\}$，$S=\{(b,a)\}$，易见$R$和$S$都是反自反关系，但复合关系$R\quad S=\{(a,a)\}$，它不是反自反关系。

(3) 不正确。例如，设$R=\{(a,b),(b,a)\}$，$S=\{(b,c),(c,b)\}$，易见$R$和$S$都是对称关系，但复合关系$R\quad S=\{(a,c)\}$，它不是对称关系。

(4) 不正确。例如，设$R=\{(a,b),(c,a)\}$，$S=\{(a,a),(b,c)\}$，易见$R$和$S$都是反对称关系，但复合关系$R\quad S=\{(a,c),(c,a)\}$，它不是反对称关系。

(5) 不正确。例如，设$R=\{(a,a),(b,c)\}$，$S=\{(a,b),(c,c)\}$，易见$R$和$S$都是传递关系，但复合关系$R\quad S=\{(a,b),(b,c)\}$，它不是传递关系。

7 .由于$R$是$A$上的对称关系，所以$R^{-1}=R$，也即有$R\quad R^{-1}=R^2$，由例 3 .15 可知，当$R$是对称关系时，$R^2$也是对称关系，所以$R\quad R^{-1}=R^2$也是对称关系。

8 .例如，$R=\{(a,b),(b,a)\}$，易见$R$是反自反关系，但$R^2=\{(a,a),(b,b)\}$，它不是反自反关系。

9 .例如，$R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(c,a)\}$。易见，$R$是反对称关系，其关系图如图 3 .20 所示。

由图可知，$R^2=\{(a,a),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(c,b)\}$，它不是反对称关系。

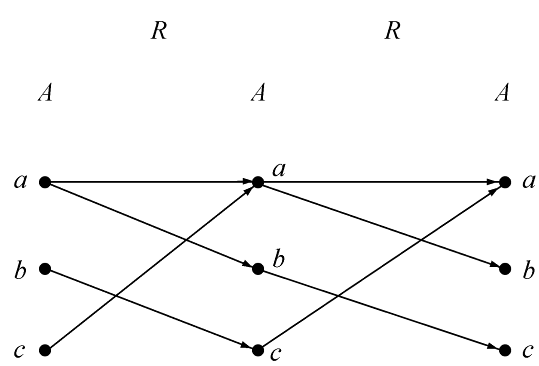



图 3 .20

10 .$R$的自反闭包$r(R)=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(a,c),(c,d)\}$；$R$的对称闭包$s(R)=\{(a,a),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(c,d),(d,c)\}$。

11 .先写出$R$的关系矩阵$\boldsymbol{M}_R$：

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{array}{ccc}1&2&3\\1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{array}$$

由此可得

$$M_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^3} = M_{R^2} \quad M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

由于 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3$,所以 $t(R) = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$。

12 .由定理 3 .3 .5 可知

$$\begin{aligned} r(R_1 \cap R_2) &= (R_1 \cap R_2) \cup I_A \\ &= (R_1 \cup I_A) \cap (R_2 \cup I_A) \\ &= r(R_1) \cap r(R_2) \end{aligned}$$

由此证得 $r(R_1 \cap R_2) = r(R_1) \cap r(R_2)$。

# 3 .4 等价关系、相容关系和序关系

## 3 .4 .1 等价关系和划分

等价关系是重要的且用途广泛的二元关系。

**1 .等价关系的定义**

**定义 3 .4 .1** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系,且满足:

(1) $R$ 是自反关系。

(2) $R$ 是对称关系。

(3) $R$ 是传递关系。

则称 $R$ 为 $A$ 上的等价关系。

例如,设 $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A$ 中元素分别表示 7 位大学生,其中 $a, b, c$ 都是 20 岁, $d, e$ 都是 22 岁, $f, g$ 都是 24 岁。如果同年龄的大学生认为是相关的,那么这种同年龄关系 $R$ 是等价关系。因为每一个大学生都和自己是同年龄的,所以 $R$ 是自反关系;另外,当 $(a, b) \in R$ 时,即 $a$ 和 $b$ 是同年龄的,显然有 $b$ 和 $a$ 也是同年龄的,于是有 $(b, a) \in R$,所以 $R$ 是对称关系;最后,当 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R$ 时,即 $a$ 和 $b$ 是同年龄的,且 $b$ 和 $c$ 是同年龄时,显然有 $a$ 和 $c$ 是同年龄的,即 $(a, c) \in R$,所以 $R$ 是传递关系。由此可知,同年龄关系 $R$ 是等价关系。

又如,设集合 $A$ 的情况同上所述,其中大学生 $a, b, c, d$ 都姓李, $e, f, g$ 都姓张。如果同姓氏的大学生认为是相关的,那么容易验证同姓氏关系 $R$ 是自反关系、对称关系、传递关系,所以同姓氏关系 $R$ 是等价关系。

由上述两例可以看到,大学生集合 $A$ 上的同年龄关系,同姓氏关系都是等价关系。如果作抽象地讨论,我们将集合 $A$ 中元素按照某种特征分成若干个组(如可以按年龄分组,同龄人在同一组内;或按姓氏分组,同姓人在同一组内),并使得 $A$ 中每一个元素必属于某一组,且仅仅属于这一组。若定义在同一组内的元素是相关的,不在同一组内的元素是无关的,那么由此产生的二元关系必然是等价关系。由此可见:等价关系实质上是同组关系。

再如,设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $R$ 是 $A$ 上的二元关系,其定义为:当 $a, b$ 属于 $A$,且 $a, b$ 被 3 除后,余数相同时, $(a, b) \in R$,如: $(4, 7) \in R$, $(3, 5) \notin R$,常称 $R$ 为 $A$ 上的模 3 同余关系。容易验证, $R$ 是 $A$ 上的等价关系。因为相同的数被 3 除后,余数必相同,所以 $R$ 是自反关系; $R$ 是对称关系是显然的;又由于当 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R$ 时,即有 $a - b = 3k_1$,且 $b - c = 3k_2$,所以 $a - c = (a - b) + (b - c) = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2)$,由此可知 $(a, c) \in R$,即 $R$ 是传递关系。由此可知, $R$ 是 $A$ 上的等价关系。

若把 $A$ 中元素按被 3 除后的不同余数进行分组,把被 3 除后余数为 1 的数 (1, 4, 7) 作为第一组;把被 3 除后余数为 2 的数 (2, 5) 作为第二组;把被 3 除后余数为 0 的数 (3, 6) 作为第三组。那么等价关系 $R$ 就是这样分组后的同组关系。

**2 .等价关系的特征**

当 $A$ 为有限集合时, $A$ 上的等价关系 $R$ 的表格表示和关系矩阵都具有显著的特征。

由于等价关系实质上是同组关系,所以若把 $A$ 中元素按“组”顺序排列,那么等价关系 $R$ 的表格表示将由若干个带“√”的方块组成。$R$ 的关系矩阵将由若干个小方阵构成,每个小方阵上的元素全为 1,其他元素全为 0。

例如, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $R$ 是 $A$ 上的模 3 同余关系。已经验证 $R$ 是 $A$ 上的等价关系。如果把 $A$ 中元素按被 3 除后,余数为 1 的数,余数为 2 的数和余数为 0 的数顺序排列,即 $A = \{1, 4, 7, 2, 5, 3, 6\}$,则 $R$ 的表格表示如表 3 .13 所示。

其关系矩阵为:

$$\boldsymbol{M}_R = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 3 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \end{array}$$

**表 3 .13**

| | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | √ | √ | √ | | | | |
| 4 | √ | √ | √ | | | | |
| 7 | √ | √ | √ | | | | |
| 2 | | | | √ | √ | | |
| 5 | | | | √ | √ | | |
| 3 | | | | | | √ | √ |
| 6 | | | | | | √ | √ |

又如, $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,把 $A$ 中元素 $a, c, d$ 作为第一组, $b, f, g$ 作为第二组, $e, h$ 作为第三组。$R$ 是 $A$ 上的同组关系,即在同一组内的元素是相关的,不在同一组内的元

素是无关的。易知, $R$ 是 $A$ 上的等价关系,如果把 $A$ 中元素按“组”顺序排列,即 $A = \{a, c, d, b, f, g, e, h\}$,则 $R$ 的表格表示如表 3.14 所示。

其关系矩阵为:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccccc} a & c & d & b & f & g & e & h \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

表 3.14

| | $a$ | $c$ | $d$ | $b$ | $f$ | $g$ | $e$ | $h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | √ | √ | √ | | | | | |
| $c$ | √ | √ | √ | | | | | |
| $d$ | √ | √ | √ | | | | | |
| $b$ | | | | √ | √ | √ | | |
| $f$ | | | | √ | √ | √ | | |
| $g$ | | | | √ | √ | √ | | |
| $e$ | | | | | | | √ | √ |
| $h$ | | | | | | | √ | √ |

由以上两例可知,当确定集合 $A$ 上的一种等价关系时,也就确定了集合 $A$ 上的一种“分组”形式(只要将相关元素合成一组)。反之,当确定集合 $A$ 上的一种分组形式($A$ 中每个元素属于且仅属于某一组)时,也就确定了集合 $A$ 上的一种等价关系。为了详细地讨论这个问题,下面介绍等价类和商集。

3.等价类和商集

**定义 3.4.2** 设 $R$ 是 $A$ 上的等价关系, $a$ 是 $A$ 中任意元素,由 $A$ 中所有与 $a$ 相关的元素组成的集合,称为 $a$ 关于 $R$ 的等价类,记作 $[a]_R$。

例如, $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $R$ 是 $A$ 上的模 3 同余关系。$A$ 中各元素关于 $R$ 的等价类分别为:

$[1]_R = \{1,4,7\}$ $[2]_R = \{2,5\}$ $[3]_R = \{3,6\}$ $[4]_R = \{1,4,7\}$

$[5]_R = \{2,5\}$ $[6]_R = \{3,6\}$ $[7]_R = \{1,4,7\}$

易见, $A$ 中虽然有 7 个元素,共有 7 个等价类,由于相关元素的等价类是相同的,所以不同的等价类仅有 3 个,它们是 $[1]_R$, $[2]_R$ 和 $[3]_R$。

**定义 3.4.3** 设 $R$ 是 $A$ 上的等价关系,由关于 $R$ 的所有不同的等价类作为元素构成的集合称为 $A$ 关于 $R$ 的商集,记作 $A/R$。

例如, $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $R$ 是 $A$ 上的模 4 同余关系,即当 $a, b$ 被 4 除后,余数相同时, $(a, b) \in R$。易知, $A$ 中仅有 4 个不同的等价类:

$[1]_R = \{1,5\}$ $[2]_R = \{2,6\}$

$[3]_R = \{3,7\}$ $[4]_R = \{4\}$

所以商集 $A/R = \{\{1,5\},\{2,6\},\{3,7\},\{4\}\}$。

又如, $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,把 $A$ 中元素分为 3 组: $a, b, c$ 为第一组, $d, e$ 为第二组, $f, g$ 为第三组。$R$ 为 $A$ 上的同组关系。易知

$[a]_R = [b]_R = [c]_R = \{a, b, c\}$

$[d]_R = [e]_R = \{d, e\}$

$[f]_R = [g]_R = \{f, g\}$

所以 $A$ 关于 $R$ 的商集 $A/R = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}, \{f, g\}\}$。

4 .集合的划分

**定义 3 .4 .4** 设 $A$ 是非空集合, $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是其非空子集,且满足

(1) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = A$

(2) $A_i \cap A_j = \quad (i \neq j)$

则以 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 作为元素构成的集合 $S(S = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\})$ 称为集合 $A$ 的划分,每一个 $A_i$ 称为划分块。

例如, $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,令

$S_1 = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f, g\}\}$

$S_2 = \{\{a, c, d\}, \{e, f\}, \{b, g\}\}$

$S_3 = \{\{b, e, f\}, \{a, c, d\}, \{g\}\}$

则 $S_1, S_2, S_3$ 都是 $A$ 的划分。在划分 $S_1$ 中, $\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f, g\}$ 是划分块;在划分 $S_2$ 中, $\{a, c, d\}, \{e, f\}, \{b, g\}$ 是划分块;在划分 $S_3$ 中, $\{b, e, f\}, \{a, c, d\}, \{g\}$ 是划分块。

易见,如果 $R$ 是 $A$ 上的等价关系,则 $A$ 关于 $R$ 的商集 $A/R$ 是 $A$ 上的一个划分,商集中的等价类就是划分块。

由此可知, $A$ 上的等价关系可确定 $A$ 上的一个划分;反之, $A$ 上的划分也可确定 $A$ 上的一个等价关系(只要定义同一划分块中的元素是相关的)。

**定理 3 .4 .1** 非空集合 $A$ 上的一种等价关系可惟一确定 $A$ 上的一种划分;反之, $A$ 上的一种划分可惟一确定 $A$ 上的一种等价关系。

证明从略。

定理 3 .4 .1 表明 $A$ 上的等价关系与 $A$ 上的划分是一一对应的。

## 3 .4 .2 相容关系和覆盖

1 .相容关系的定义

**定义 3 .4 .5** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系,且满足:

(1) $R$ 是自反关系。

(2) $R$ 是对称关系。

则称 $R$ 为 $A$ 上的相容关系。

例如, $A = \{set, relation, tree, root, and, leaf\}$, $R$ 是 $A$ 上的二元关系,其定义为:当 $A$ 中两个单词至少有一个字母相同时,则它们以 $R$ 相关。

显然, $R$ 是自反的、对称的,所以 $R$ 是 $A$ 上的相容关系。但 $R$ 不是可传递关系,如: $(set, leaf) \in R$(它们都有字母 $e$), $(leaf, and) \in R$(它们都有字母 $a$),但 $(set, and)$殴 $R$。所以 $R$ 是相容关系而不是等价关系。

又如, $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $R$ 是 $A$ 上的二元关系,其定义为:当 $a, b \in A$,且 $a + b$ 是 2 的整数倍或 $a + b$ 是 3 的整数倍时, $(a, b) \in R$。由于 $A$ 中任意元素 $x$, $x + x = 2x$,所以 $R$ 是自反关系。$R$ 的对称性是显然的,因此 $R$ 是 $A$ 上的相容关系。但 $R$ 不是传递关系,如 $(2,6) \in R$, $(6,3) \in R$,而 $(2,3)$殴 $R$,所以 $R$ 是相容关系但不是等价关系。

由于相容关系是自反的,对称的,所以在相容关系的表格表示中,对角线上的小方格

都有“ √ ”,且表格中其他带“ √ ”的小方格对于对角线是对称的。今后约定,相容关系的表格表示中,只画出表格对角线的下三角部分。

**例如**, $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, c), (c, a), (c, d), (d, c), (e, f), (f, e)\}$。易知, $R$ 是 $A$ 上的相容关系, $R$ 的表格表示如表 3 .15 所示。按照约定,可把 $R$ 的表格表示简化为如表 3 .16 所示。

**表 3 .15**

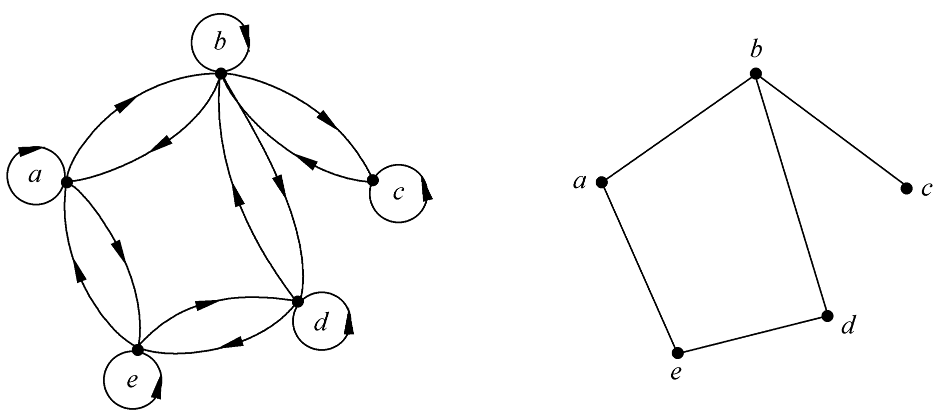
| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | √ | | √ | | | |
| $b$ | | √ | | | | |
| $c$ | √ | | √ | √ | | |
| $d$ | | | √ | √ | | |
| $e$ | | | | | √ | √ |
| $f$ | | | | | √ | √ |

**表 3 .16**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | | | | | |
| $c$ | √ | | | | |
| $d$ | | | √ | | |
| $e$ | | | | | |
| $f$ | | | | | √ |
| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |

在相容关系的关系图中,由于相容关系是自反的,所以关系图中的每一个顶点都有自回路(环);又由于相容关系是对称的,所以关系图中每两个相关顶点间都有方向相反的两条有向边连接。为了简化图形,今后约定,相容关系的关系图中,不画自回路(环),并用无向边来替代两条方向相向的有向边。

**例如**, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (a, e), (e, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (e, d), (d, e)\}$。易知, $R$ 是 $A$ 上的相容关系。$R$ 的关系图如图 3 .21(a) 所示,其简化后的图形如图 3 .21(b) 所示。




(a) (b)

**图 3 .21**

集合 $A$ 上的相容关系和集合 $A$ 上的覆盖有密切联系。

**2 .集合的覆盖**

**定义 3 .4 .6** 设 $A$ 是集合, $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是 $A$ 的非空子集,且满足:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = A$$

令 $S = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$,则称 $S$ 为集合 $A$ 的覆盖; $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 称为覆盖块。

**例如**, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,则

$$S_1 = \{\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{4,5,6\},\{6,7\}\}$$

$$S_2 = \{\{1,3,5\},\{1,2,4,6\},\{3,4,6,7\}\}$$

$$S_3 = \{\{2,4,6,7\},\{1,2,3\},\{3,4,5\}\}$$

都是 $A$ 上的覆盖。

在 $S_1$ 中,$\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{4,5,6\},\{6,7\}$ 是覆盖块;在 $S_2$ 中,$\{1,3,5\},\{1,2,4,6\},\{3,4,6,7\}$ 是覆盖块;在 $S_3$ 中,$\{2,4,6,7\},\{1,2,3\},\{3,4,5\}$ 是覆盖块。

**定理 3.4.2** 设 $A$ 是集合,$S$ 是 $A$ 上的一个覆盖,且 $S = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$,若令

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_k \times A_k)$$

则 $R$ 是 $A$ 上的相容关系。

由覆盖的定义可知:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$$

所以对于 $A$ 中任意元素 $a$,必存在 $A_i$,使得 $a$ 属于 $A_i$,于是有 $(a, a) \in A_i \times A_i$,也即有 $(a, a) \in R(R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_k \times A_k))$,由此证得 $R$ 是 $A$ 上的自反关系。

当 $(a, b) \in R$ 时,必存在 $A_j$,使得 $(a, b) \in A_j \times A_j$,于是有 $(b, a) \in A_j \times A_j$,由此证得 $R$ 是对称关系,所以 $R$ 是 $A$ 上的相容关系。

例如,$A = \{1,2,3,4\}$,$S$ 是 $A$ 上的覆盖,且 $S = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}$,若令

$$R = \{(\{1,2\} \times \{1,2\}) \cup (\{2,3\} \times \{2,3\}) \cup (\{3,4\} \times \{3,4\})\}$$

由此可得:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$$

易见,$R$ 是 $A$ 上的相容关系。

定理 3.4.2 表明,给定集合 $A$ 上的一个覆盖,必可在 $A$ 上构造出对应的相容关系。但覆盖和相容关系并非是一一对应的。因为不同的覆盖可以对应于相同的相容关系。

例如,$A = \{a, b, c, d, e\}$,$S_1$ 和 $S_2$ 是 $A$ 上的覆盖,其中

$$S_1 = \{\{a, b, c\},\{b, c, d\},\{d, e\}\}$$

$$S_2 = \{\{a, b, c\},\{a, b\},\{b, c, d\},\{d, e\}\}$$

为了叙述方便,令 $A_1 = \{a, b, c\}$,$A_2 = \{b, c, d\}$,$A_3 = \{d, e\}$,$A_4 = \{a, b\}$。于是有

$$S_1 = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$S_2 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

由定理 3.4.2 可知,$S_1$ 对应的相容关系 $R_1$ 为:

$$R_1 = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup (A_3 \times A_3)$$

$S_2$ 对应的相容关系 $R_2$ 为:

$$R_2 = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup (A_3 \times A_3) \cup (A_4 \times A_4)$$

由于 $A_4 = \{a, b\}$ 是 $A_1 = \{a, b, c\}$ 的真子集,所以 $A_1 \times A_1 \quad A_4 \times A_4$,也即 $(A_1 \times A_1) \cup (A_4 \times A_4) = A_1 \times A_1$,由此可知:

$$R_2 = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup (A_3 \times A_3) = R_1$$

这说明不同的覆盖可以构造出相同的相容关系。如果要进一步讨论,需引进最大相容类和完全覆盖等概念,这已超出大纲要求,因此不再介绍。

### 3.4.3　序关系

序关系是现代数学的重要内容，本小节主要介绍偏序关系，并在此基础上进一步介绍全序关系、良序关系和拟序关系。

**1.偏序关系的定义**

**定义 3.4.7**　设 $R$ 是集合 $A$ 上的二元关系，且满足：

(1) $R$ 是自反的。

(2) $R$ 是反对称的。

(3) $R$ 是可传递的。

则称 $R$ 为 $A$ 上的偏序关系。

例如，设 $Z^+$ 是正整数集合，$R$ 是 $Z^+$ 上的整除关系，即当正整数 $a$ 能整除 $b$ 时，$(a,b) \in R$。由于任意正整数都能整除自己，所以 $R$ 是自反的。又由于当 $a \neq b$，且 $(a,b) \in R$ 时，必有 $(b,a)$囟$R$，所以 $R$ 是反对称的。再由于当 $(a,b) \in R$，且 $(b,c) \in R$ 时，即 $a$ 能整除 $b$，$b$ 又能整除 $c$ 时，显然 $a$ 能整除 $c$，即有 $(a,c) \in R$，所以 $R$ 是传递关系。由此可知，整除关系 $R$ 是 $Z^+$ 上的偏序关系。

又如，设 $R$ 是 $Z^+$ 上的小于等于关系，即当 $a \leq b$ 时，$(a,b) \in R$，容易验证 $R$ 是 $Z^+$ 上的偏序关系。

常把偏序关系 $R$ 记作 t，当 $(a,b) \in R$ 时，记作 $a$ t $b$。并把集合 $A$ 和 $A$ 上的偏序关系 t 合在一起，统称为偏序集，记作 $(A,$ t $)$。

例如，t 是整除关系，$(Z^+,$ t $)$ 是偏序集，且有 2 t 4，而 3 *t* 4。

**定义 3.4.8**　设 $(A,$ t $)$ 是偏序集，$a$ 和 $b$ 是 $A$ 中的元素，如果有 $a$ t $b$ 或 $b$ t $a$，则称 $a$ 和 $b$ 是可比的，否则称为不可比的。

例如，t 是整除关系，在偏序集 $(Z^+,$ t $)$ 中，2 和 4，3 和 6，4 和 8 等都是可比的。但 2 和 3，3 和 4 等都是不可比的。

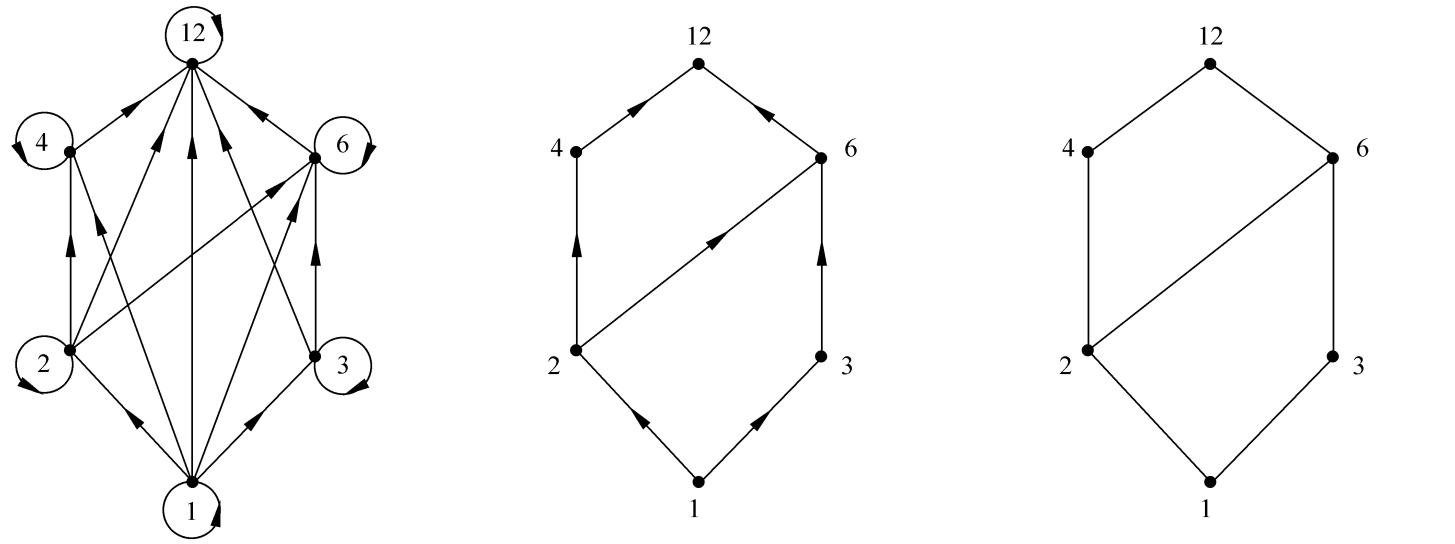
又如，对于小于等于关系，偏序集 $(Z^+, \leq)$ 中任意两个元素都是可比的。

**2.偏序集的哈斯图表示**

为了方便地讨论偏序关系，需要把偏序关系的关系图适当地简化。

例如，设 $A = \{1,2,3,4,6,12\}$，$R$ 是 $A$ 上的整除关系。易知，$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(6,6),(12,12),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(1,12),(2,4),(2,6),(2,12),(3,6),(3,12),(4,12),(6,12)\}$。$R$ 的关系图如图 3.22(a) 所示。

由于偏序关系是自反的，其关系图中的每个顶点都有自回路（环），为了简化图形，以后在偏序关系的关系图中不再画出各顶点的自回路。又由于偏序关系是传递关系，当 $(a,b) \in R$ 和 $(b,c) \in R$ 时，必有 $(a,c) \in R$，所以在偏序关系的关系图中可仅画出 $a$ 到 $b$ 的有向边和 $b$ 到 $c$ 的有向边，而把 $a$ 到 $c$ 的有向边省略。经过这样约定后，关系图可简化为如图 3.22(b) 所示。如果把图中各个顶点安排在适当位置，使关系图中各有向边的箭头都是朝上的，那么可以将图中各有向边的箭头也省略。图 3.22(c) 就是简化后的最后图形。偏序关系的这种简化的关系图称为偏序集的哈斯图表示。




(a) (b) (c)

图 3.22

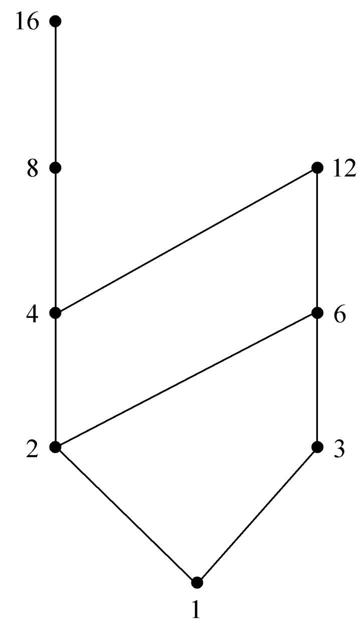



图 3.23

又如,$A = \{1,2,3,4,6,8,12,16\}$,$R$ 是 $A$ 上的整除关系。其哈斯图如图 3.23 所示。

为了能有效地画出偏序集的哈斯图,先介绍"盖住"的概念。

**定义 3.4.9** 设$(A, \mathbf{t})$是偏序集,$a$和$b$是$A$中不同的元素,如果 $a\ \mathbf{t}\ b$,且在 $A$ 中没有其他元素 $c$,使得 $a\ \mathbf{t}\ c$, $c\ \mathbf{t}\ b$,则称 $b$ 盖住 $a$。

例如,$A = \{1,2,3,4,8,16\}$,$\mathbf{t}$ 是整除关系。由盖住的定义可知,2 盖住 1,3 盖住 1,4 盖住 2。但 8 不盖住 2,因为存在 $A$ 中元素 4,使得 $2\ \mathbf{t}\ 4$,$4\ \mathbf{t}\ 8$,所以 8 不盖住 2。

利用元素间的盖住概念,能方便地画出哈斯图。

作图原则是:当 $b$ 盖住 $a$ 时,代表 $b$ 的顶点应画在代表 $a$ 的顶点的上方,并用直线段连接这两个点。

例如,$A = \{1,2,3,4,5,6,8,10,12,16,20,24\}$,$\mathbf{t}$ 是整除关系。在画$(A, \mathbf{t})$的哈斯图时,先把元素 1 画在最低层(因为 1 不盖住 $A$ 中任何元素);把盖住 1 的元素 2,3,5 画在第 2 层,并把它们与 1 用直线段连接;再把盖住 2,3,5 的元素 4,6,10 画在第 3 层,并把它们与被它们盖住的元素用直线段连接,具体地说,是把 4,6,10 与 2 连接,6 与 3 连接,10 与 5 连接;再把盖住 4,6,10 的元素 8,12,20 画在第 4 层;并把 8 和 4,12 和 4、6,20 和 4、10 用直线段连接;最后把盖住 8 和 12 的 16 和 24 画在第 5 层,并把 16 和 8,24 和 8、12 用直线段连接,由此就得到偏序集$(A, \mathbf{t})$的哈斯图表示,见图 3.24。

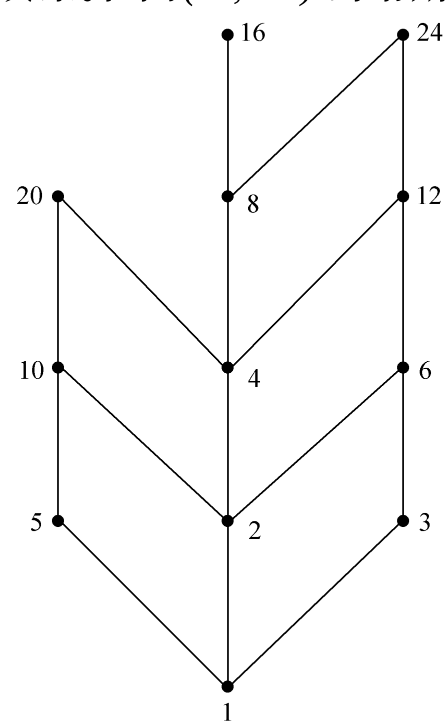



图 3.24

**3.偏序集中的特殊元素**

**定义 3.4.10** 设$(A, \mathbf{t})$是偏序集,如果 $A$ 中存在元素 $a$,使得 $A$ 中没有其他元素 $x$,满足 $x\ \mathbf{t}\ a$,则称 $a$ 为 $A$ 中的极小元。

**定义3.4.11**　设$(A, \mathbf{t})$是偏序集,如果 $A$ 中存在元素 $a$,使得 $A$ 中没有其他元素 $x$,满足 $a\,\mathbf{t}\,x$,则称 $a$ 为 $A$ 中的极大元。

例如,$A = \{1,2,3,4,6,8,12\}$, $\mathbf{t}$ 是 $A$ 上的整除关系,其哈斯图如图 3.25 所示。由定义 3.4.10 和 3.4.11 可知,1 是 $A$ 中的极小元;8 和 12 都是 $A$ 中的极大元。

**定义3.4.12**　设$(A, \mathbf{t})$是偏序集,如果 $A$ 中存在元素 $a$,使得对于 $A$ 中任何元素 $x$,都有 $a\,\mathbf{t}\,x$,则称 $a$ 为 $A$ 中的最小元。

**定义3.4.13**　设$(A, \mathbf{t})$是偏序集,如果 $A$ 中存在元素 $a$,使得对于 $A$ 中任何元素 $x$,都有 $x\,\mathbf{t}\,a$,则称 $a$ 为 $A$ 中的最大元。

请注意,偏序集中的最小(大)元与极小(大)元的不同之处是:最小(大)元必须与偏序集中每个元素都是有矢的,即可比的;而极小(大)元则无此要求。所以偏序集中的最小(大)元一定是极小(大)元,但反之不然。

例如,$A = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$, $\mathbf{t}$ 是整除关系。其哈斯图如图 3.26 所示。

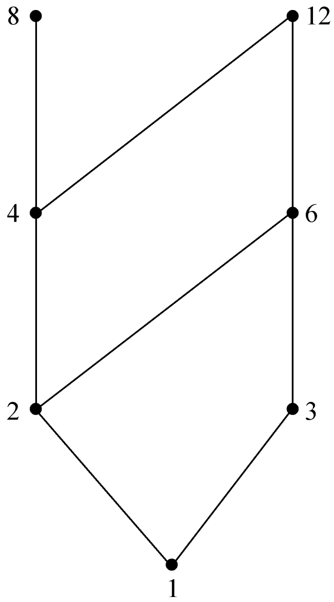



图　3.25

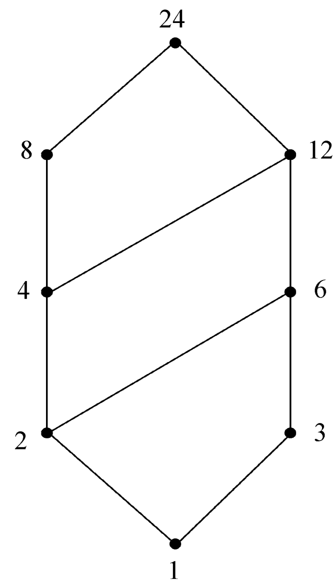



图　3.26

易知,1 是最小元,也是极小元;24 是最大元,也是极大元。

又如,$A = \{2,4,5,8,20,40\}$, $\mathbf{t}$ 是整除关系。其哈斯图如图 3.27 所示。

易知,$A$ 中没有最小元,极小元为:2,5;$A$ 中最大元为 40,它也是极大元。

再如,$A = \{1,2,3,4,6,8,10,12,16\}$, $\mathbf{t}$ 是整除关系。其哈斯图如图 3.28 所示。

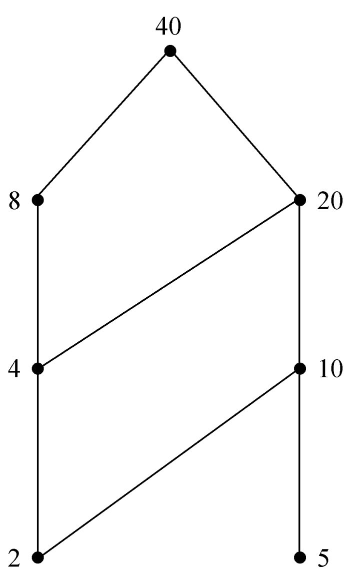



图　3.27

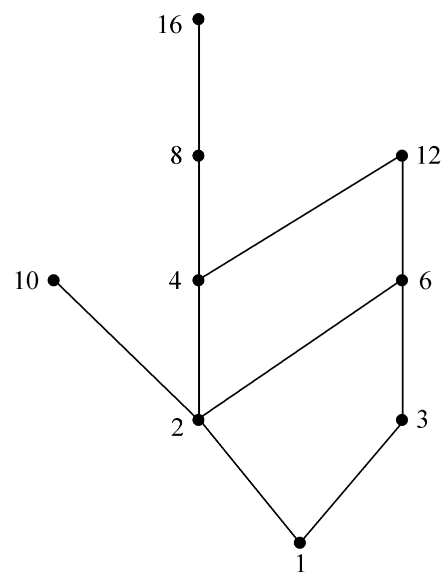



图　3.28

易知,$A$ 中最小元为 1,它也是极小元;$A$ 中没有最大元,极大元为:10,12,16。

在很多情况下,需要讨论偏序集子集的特殊元素。

**定义 3.4.14** 设$(A, \mathbf{t})$是偏序集,$B$是 $A$ 的子集,如果在子集 $B$中存在元素 $b$,使得子集 $B$中没有其他元素 $x$,满足 $x\,\mathbf{t}\,b$,则称 $b$为子集 $B$ 的极小元。如果在子集 $B$中存在元素 $b'$,使得子集 $B$ 中没有其他元素 $x$,满足 $b'\,\mathbf{t}\,x$,则称 $b'$为子集 $B$ 的极大元。

**定义 3.4.15** 设$(A, \mathbf{t})$是偏序集,$B$是 $A$ 的子集,如果在子集 $B$中存在元素 $b$,使得对于子集 $B$中任何元素 $x$,都有 $b\,\mathbf{t}\,x$,则称 $b$为子集 $B$ 的最小元。如果在子集 $B$中存在元素 $b'$,使得对于子集 $B$ 中任何元素 $x$,都有 $x\,\mathbf{t}\,b'$,则称 $b'$为子集 $B$ 的最大元。

例如,$A = \{1,2,3,4,5,6,8,10,24\}$, $\mathbf{t}$ 是整除关系。其哈斯图如图 3.29 所示。

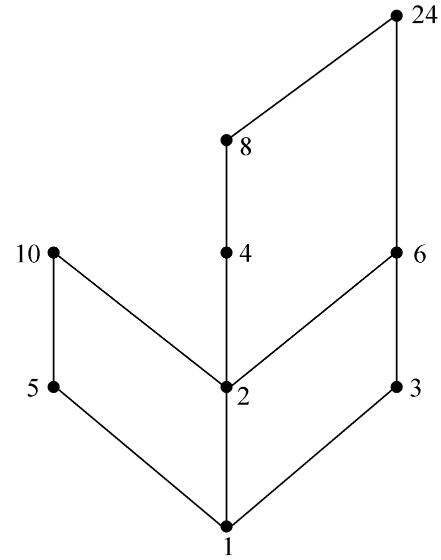



图 3.29

在子集$\{1,2,3,6\}$中,1 是最小元,也是极小元;6 是最大元,也是极大元。

在子集$\{2,3,4,24\}$中,2 和 3 是极小元,但没有最小元;24 是极大元,也是最大元。

在子集$\{2,3,4,8\}$中,2 和 3 是极小元,但没有最小元;3 和 8 是极大元,没有最大元。

**定义 3.4.16** 设$(A, \mathbf{t})$是偏序集,$B$是 $A$ 的子集,如果 $A$中存在元素 $a$,使得对于 $B$中任何元素 $x$,都有 $a\,\mathbf{t}\,x$,则称 $a$ 为子集 $B$的下界。

**定义 3.4.17** 设$(A, \mathbf{t})$是偏序集,$B$是 $A$ 的子集,如果 $A$中存在元素 $a$,使得对于 $B$中任何元素 $x$,都有 $x\,\mathbf{t}\,a$,则称 $a$ 为子集 $B$的上界。

例如,设 $A = \{1,2,3,4,5,6,8,10,12,16\}$ $\mathbf{t}$ 为整除关系。

在子集$\{1,2,3,4\}$中,下界为 1,上界为 12。

在子集$\{2,3,6\}$中,下界为 1,上界为 6,12。

在子集$\{2,3,5,8\}$中,上界不存在,下界为 1。

**定义 3.4.18** 设$(A, \mathbf{t})$是偏序集,$B$是 $A$ 的子集,$a$是 $B$ 的上界,如果对于 $B$中的任何上界 $x$,都有 $a\,\mathbf{t}\,x$,则称 $a$为子集 $B$ 的最小上界,或称上确界,记作 $\sup(B) = a$。

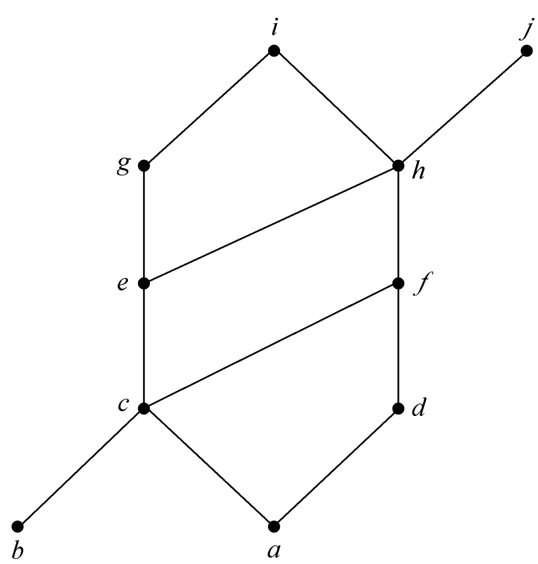



图 3.30

**定义 3.4.19** 设$(A, \mathbf{t})$是偏序集,$B$是 $A$的子集,$a$是 $B$的下界,如果对于 $B$中的任何下界 $x$,都有 $x\,\mathbf{t}\,a$,则称 $a$ 为子集 $B$ 的最大下界,或称下确界,记作 $\inf(B) = a$。

例如,$A = \{1,2,3,4,6,8,12,16,24,32\}$, $\mathbf{t}$ 是整除关系。

在子集$\{1,2,4,6\}$中,上界为:12,24,其上确界为 12;下界为 1,它也是下确界。

在子集$\{2,4,8\}$中,上界为:8,16,24,其上确界为 8;下界为 1,2,其下确界为 2。

在子集$\{2,3,12,32\}$中,由于没有上界,所以没有上

确界;其下确界为 1。

又如,$(A, \preccurlyeq)$ 是偏序集,其哈斯图如图 3.30 所示。

在子集 $\{c, d, e, f\}$ 中, $h$、$i$、$j$ 是上界, $h$ 是上确界, $a$ 是下界也是下确界。

在子集 $\{c, e, g\}$ 中, $g$、$i$ 是上界, $g$ 是上确界; $a$、$b$、$c$ 是下界, $c$ 是下确界。

**4.全序集和良序集**

**定义 3.4.20** 设 $(A, \preccurlyeq)$ 为偏序集,如果 $A$ 中任意两个元素 $a$ 和 $b$,都有 $a \preccurlyeq b$ 或 $b \preccurlyeq a$(即 $a$ 和 $b$ 是可比的),则称 $\preccurlyeq$ 为全序关系,$(A, \preccurlyeq)$ 为全序集。

例如,$Z^+$ 是正整数集合,对于小于等于关系,$(Z^+, \leq)$ 是全序集。

又如,$A = \{1,2,4,8,16\}$, $\preccurlyeq$ 是整除关系,由于 $A$ 中任何两个元素都是可比的,所以 $(A, \preccurlyeq)$ 是全序集。

**定义 3.4.21** 设 $(A, \preccurlyeq)$ 是全序集, 如果 $A$ 中任何非空子集都有最小元, 则称 $(A, \preccurlyeq)$ 为良序集。

例如,对于小于等于关系, $(Z^+, \leq)$ 是良序集, 但 $(Z, \leq)$ 不是良序集($Z$ 是整数集合)。

**5.拟序关系**

**定义 3.4.22** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系,且满足:

(1) $R$ 是反自反的。

(2) $R$ 是传递的。

则称 $R$ 为拟序关系。

**定理 3.4.3** 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系,如果 $R$ 是反自反且可传递的(即 $R$ 是拟序关系),则 $R$ 是反对称关系。

因为当 $a \neq b$ 时,且 $(a, b) \in R$,则必有 $(b, a) \notin R$,否则若有 $(b, a) \in R$,由 $R$ 的传递性可知,必有 $(a, a) \in R$ 和 $(b, b) \in R$,这和 $R$ 是反自反的假设矛盾。所以 $R$ 是反对称关系。

易知,$Z^+$ 上的小于关系是拟序关系。

## 3.4.4 重点和难点分析

本节重点是:充分理解等价关系的定义和特征,等价关系与划分之间的一一对应关系;偏序关系的定义和偏序集的哈斯图表示,熟练地识别偏序集中的各类特殊元素。对于相容关系和覆盖只需一般地了解。

难点是:熟练地画出偏序集的哈斯图,熟练地识别偏序集的特殊元素。

**例 3.19** 设 $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $R$ 是 $A$ 上的模 5 同余关系。说明 $R$ 是 $A$ 上的等价关系,写出 $R$ 的表格表示和关系矩阵。

**解** 由于 $A$ 中任意两个相同元素被 5 除后余数相同,所以 $R$ 是自反关系; $R$ 的对称性是显然的;当 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R$ 时,即有 $a - b = 5k_1$ 和 $b - c = 5k_2$,所以 $a - c = (a - b) + (b - c) = 5(k_1 + k_2)$,即 $(a, c) \in R$,因此 $R$ 是 $A$ 上的传递关系。由此证得 $R$ 是 $A$ 上的等价关系。

其表格表示如表 3.17 所示。

**表 3.17**

| | 1 | 6 | 2 | 7 | 3 | 8 | 4 | 9 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | √ | √ | | | | | | | | |
| 6 | √ | √ | | | | | | | | |
| 2 | | | √ | √ | | | | | | |
| 7 | | | √ | √ | | | | | | |
| 3 | | | | | √ | √ | | | | |
| 8 | | | | | √ | √ | | | | |
| 4 | | | | | | | √ | √ | | |
| 9 | | | | | | | √ | √ | | |
| 5 | | | | | | | | | √ | √ |
| 10 | | | | | | | | | √ | √ |

**其关系矩阵为**:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 & 9 & 5 & 10 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

**例 3.20** **设** $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A$**中元素分别表示** 7 **位大学生**,**其中** $a, b, c$**都是上海人**, $d, e, f$ **都是北京人**, $g$**是天津人**。$R$**是** $A$ **上的同乡关系**,**请写出** $A$**中各元素的等价类**,**并写出** $A$ **关于** $R$ **的商集**。

**解** $A$ **中各元素的等价类分别是**:

$[a]_R = [b]_R = [c]_R = \{a, b, c\}$

$[d]_R = [e]_R = [f]_R = \{d, e, f\}$

$[g]_R = \{g\}$

$A$ **关于** $R$ **的商集** $A/R = \{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{g\}\}$。

**例 3.21** **设集合** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A$**上的划分** $S = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 8\}, \{5, 6, 7\}\}$。**请写出划分** $S$**所对应等价关系的表格表示**。

**解** $S$**所对应等价关系的表格表示为表** 3.18 **所示**。

**表 3.18**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 8 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | √ | √ | √ | | | | | |
| 2 | √ | √ | √ | | | | | |
| 3 | √ | √ | √ | | | | | |
| 4 | | | | √ | √ | | | |
| 8 | | | | √ | √ | | | |
| 5 | | | | | | √ | √ | √ |
| 6 | | | | | | √ | √ | √ |
| 7 | | | | | | √ | √ | √ |

**例 3.22** $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,$R$ 是 $A$ 上的模 4 同余关系,写出等价关系 $R$ 所对应的划分。

**解** $R$ 所对应的划分为:$S = \{\{1,5,9\},\{2,6\},\{3,7\},\{4,8\}\}$。

**例 3.23** $R$ 是 $A$ 上的自反关系,且当 $(a, b) \in R$ 和 $(a, c) \in R$ 时,必有 $(b, c) \in R$,证明 $R$ 是 $A$ 上的等价关系。

**证明** 首先证明 $R$ 是对称关系。

由题设可知,当 $(a, b) \in R$ 和 $(a, c) \in R$ 时,必有 $(b, c) \in R$,如果把条件中的 $c$ 换成 $a$,于是有:当 $(a, b) \in R$ 和 $(a, a) \in R$ 时,必有 $(b, a) \in R$;由题设可知,$R$ 是自反关系,所以有 $(a, a) \in R$。由此可知,当 $(a, b) \in R$ 时,必有 $(b, a) \in R$,所以 $R$ 是对称关系。

再证明 $R$ 是传递关系。

由于已证得 $R$ 是对称关系,所以当 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R$ 时,即有 $(b, a) \in R$ 且 $(b, c) \in R$,再由题设可知,$(a, c) \in R$。所以 $R$ 是传递关系。由此证得 $R$ 是 $A$ 上的等价关系。

**例 3.24** 设 $R$ 是 $A$ 上的等价关系,证明 $R = R^2$。

**证明** 首先证明 $R^2 \quad R$。

设有序对 $(a, b) \in R$,由于 $R$ 是等价关系,所以必是自反关系,于是有 $(b, b) \in R$,即有

$$(a, b) \in R \text{ 且 } (b, b) \in R$$

由复合关系的定义可知,$(a, b) \in R^2$。由此可知,$R^2 \quad R$。

再证 $R \quad R^2$。

设有序对 $(a, b) \in R^2$,由复合关系的定义可知,$A$ 中必存在元素 $x$,使得

$$(a, x) \in R \text{ 和 } (x, b) \in R$$

由于 $R$ 是 $A$ 上的传递关系,所以 $(a, b) \in R$,由此可知,$R \quad R^2$。

综上证得 $R = R^2$。

**例 3.25** 设 $A$ 是具有 4 个元素的集合,问:$A$ 上可定义多少种不同的等价关系?

**解** 由于 $A$ 上的等价关系与 $A$ 上的划分是一一对应的,所以 $A$ 上有多少种划分也就有多少种等价关系。

当 $|A| = 4$ 时,不妨设 $A = \{1,2,3,4\}$,下面分 4 种情况讨论:

(1) 当划分中仅含一个划分块时,这样的划分仅有一种:$\{\{1,2,3,4\}\}$。

(2) 当划分中含有 2 个划分块时,这样的划分应有 $C_4^1 + \frac{1}{2}C_4^2 = 7$(种)。它们是:

$$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$$
$$\{\{2\},\{1,3,4\}\}$$
$$\{\{3\},\{1,2,4\}\}$$
$$\{\{4\},\{1,2,3\}\}$$
$$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$$
$$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$$
$$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$$

(3) 当划分中含有 3 个划分块时,这样的划分应有 $C_4^2 = 6$(种)。它们是:

$$\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$$
$$\{\{1\},\{3\},\{2,4\}\}$$
$$\{\{1\},\{4\},\{2,3\}\}$$
$$\{\{2\},\{3\},\{1,4\}\}$$
$$\{\{2\},\{4\},\{1,3\}\}$$
$$\{\{3\},\{4\},\{1,2\}\}$$

(4) 当划分中含有 4 个划分块时,这样的划分仅有 1 种:$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$。

由此可知,当 $|A| = 4$ 时,$A$ 上可定义不同的等价关系共有:$1 + 7 + 6 + 1 = 15$(种)。

**例 3.26** 设 $A = \{1,2,3,4\}$, $A$ 上的覆盖 $S = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,4\}\}$,求 $S$ 所对应的相容关系。

**解** 设 $S$ 对应的相容关系为 $R$,则有:

$$R = \{1,2\}\times\{1,2\}) \cup (\{2,3\}\times\{2,3\}) \cup (\{1,4\}\times\{1,4\})$$
$$= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,4),(4,1)\}$$

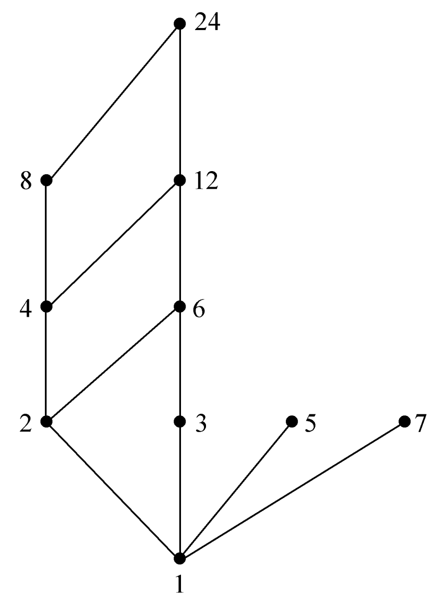



图 3.31

**例 3.27** 设 $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,12,24\}$, t 是整除关系,画出$(A,$ t $)$的哈斯图。

**解** $(A,$ t $)$的哈斯图如图 3.31 所示。

**例 3.28** 设$(A,$ t $)$的哈斯图如图 3.32 所示。写出 $A$ 的极大元和极小元;$A$ 的最大元和最小元;子集$\{f, g, i\}$的上界和上确界,下界和下确界。

**解** $A$ 的极大元为:$l$,极小元为 $a$、$b$、$c$、$e$;$A$ 的最大元为:$l$,但没有最小元。

子集$\{f, g, i\}$的上界为:$i$、$k$、$l$,上确界为:$i$;下界为:$d$、$a$、$b$,下确界为 $d$。

**例 3.29** 设 $A = \{1,2,3,4,6,24,36,72\}$, t 为整除关系。画出$(A,$ t $)$的哈斯图,并说明子集$\{3,4,6\}$有上界,但没有上确界。

**解** $(A,$ t $)$的哈斯图如图 3.33 所示。

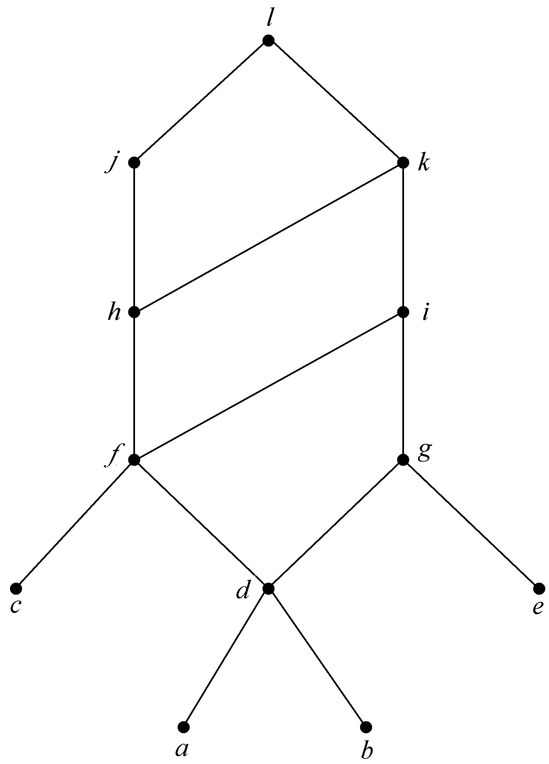


图 3.32

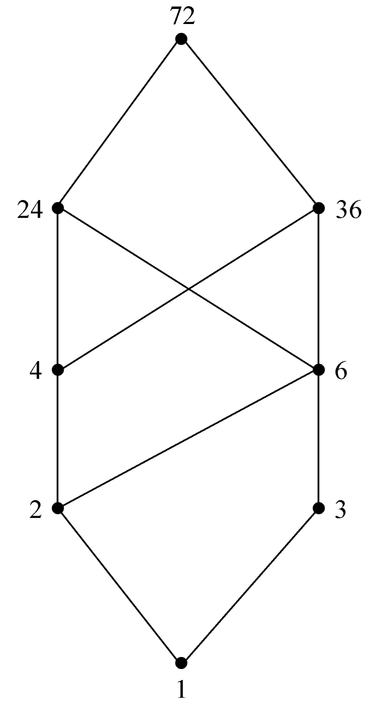


图 3.33

在子集$\{3,4,6\}$中,上界为 24,36,72。由于 24 和 36 是不可比的,所以子集$\{3,4,6\}$中没有上确界。

## 3.4.5 自测练习

1.设 $A=\{1,2,3\}$,下列二元关系中,哪些是 $A$ 上的等价关系?

(1) $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$

(2) $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3)\}$

(3) $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

(4) $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

2.设 $A=\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$, $R$是 $A$ 上的模4同余关系,写出 $R$的表格表示和关系矩阵。

3.设 $A=\{2,4,6,8,10,12,14,16\}$, $R$是 $A$ 上的模3同余关系,写出 $R$ 的表格表示和关系矩阵。并写出 $A$ 中各元素的等价类和 $A$ 关于 $R$ 的商集 $A/R$。

4.设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $A$上的划分 $S=\{\{1,4,5\},\{2,3\}\}$,写出 $S$对应的等价关系 $R$ 的表格表示。

5.设 $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$,其中 $a$、$c$、$e$、$g$ 是清华大学的学生, $b$、$d$、$f$ 是北京大学的学生, $R$是同校关系,即同一学校的学生是以 $R$ 相关的。写出 $R$ 所对应的划分。

6.设 $R_1$ 和 $R_2$ 都是 $A$ 上的等价关系,确定下述各式中哪些是等价关系?说明理由。

(1) $A\times A-R_1\cup R_2$

(2) $R_2-R_1$

(3) $R_1\cap R_2$

(4) $R_1\cup R_2$

7.设 $A=\{1,2,3,4,5\}$,求下列等价关系所对应的划分。

(1) $R$是 $A$ 上的全域关系(即 $R = A \times A$);

(2) $R$是 $A$ 上的相等关系(即 $R = I_A$);

(3) $R$是 $A$ 上的模 2 同余关系。

8 .设 $R$是 $A$ 上的自反关系,且当$(a, b) \in R$和$(b, c) \in R$时,必有$(c, a) \in R$,证明 $R$是 $A$ 上的等价关系。

9 .设集合 $A$ 中具有 3 个元素,问:$A$ 上可定义多少种不同的等价关系?

10 .设 $A = \{112, 233, 345, 351, 242, 123\}$, $R$是 $A$ 上的二元关系,其定义为:当 $a, b \in A$,且 $a, b$中至少有一个数码相同时,$(a, b) \in R$。如:$(112, 233) \in R$, $(351, 242) \notin R$。说明 $R$是 $A$ 上的相容关系但不是等价关系。

11 .设 $Z$是整数集合,当 $a, b \in Z$,且 $a \cdot b \geq 0$时,$(a, b) \in R$。说明 $R$是相容关系,但不是等价关系。

12 .设 $R_1$ 和 $R_2$ 都是 $A$ 上的相容关系,证明 $R_1 \cup R_2$ 也是 $A$ 上的相容关系。

13 .设 $A = \{a, b, c, d\}$, $A$上的覆盖 $S = \{\{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}\}$,求 $S$所对应的相容关系。

14 .设$(A, \preccurlyeq)$是偏序集,$A = \{a, b, c, d, e\}$,图 3 .34 是其关系图,请把它改画成哈斯图。

15 .设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 15, 24\}$, $\preccurlyeq$ 是整除关系,请画出$(A, \preccurlyeq)$的哈斯图。

16 .设$(A, \preccurlyeq)$是偏序集,其哈斯图如图 3 .35 所示,请写出$(A, \preccurlyeq)$的表格表示和关系矩阵。

17 .设$(A, \preccurlyeq)$是偏序集,$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $\preccurlyeq$ 是整除关系,写出 $A$中的极大元、极小元和最大元、最小元。

18 .设图 3 .36 是偏序集的哈斯图。请指出图 3 .36 中子集$\{a, b, c\}$的上界和上确界;子集$\{c, d, e\}$的下界和下确界。

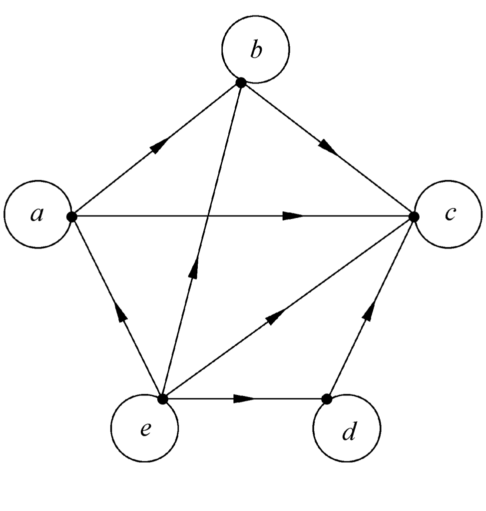



图 3 .34

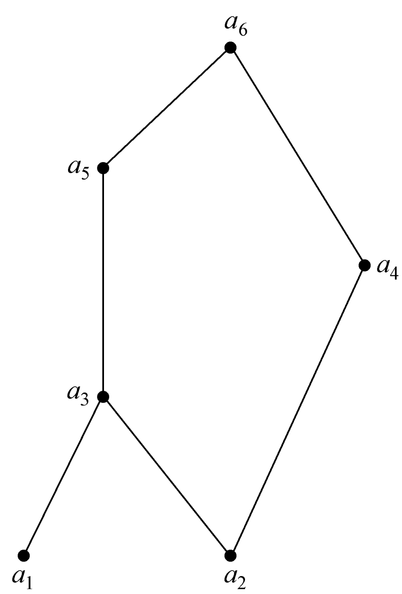



图 3 .35

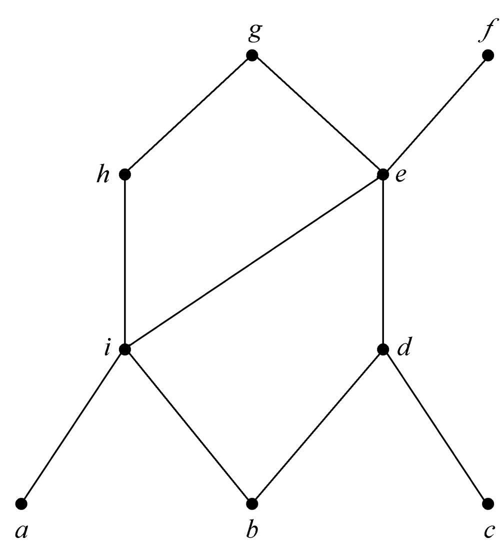



图 3 .36

### 3 .4 .6 自测练习答案

1 .(1) $R$是 $A$ 上的等价关系。

(2) $R$不是 $A$ 上的等价关系,因为 $R$不是对称关系。

(3) $R$ 不是 $A$ 上的等价关系,因为 $R$ 不是传递关系。

(4) $R$ 是 $A$ 上等价关系。

2 .$R$ 的表格表示如表 3 .19 所示。

其关系矩阵为:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 5 & 9 & 13 & 3 & 7 & 11 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

**表 3 .19**

| | 1 | 5 | 9 | 13 | 3 | 7 | 11 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | √ | √ | √ | √ | | | | |
| 5 | √ | √ | √ | √ | | | | |
| 9 | √ | √ | √ | √ | | | | |
| 13 | √ | √ | √ | √ | | | | |
| 3 | | | | | √ | √ | √ | √ |
| 7 | | | | | √ | √ | √ | √ |
| 11 | | | | | √ | √ | √ | √ |
| 15 | | | | | √ | √ | √ | √ |

3 .$R$ 的表格表示如表 3 .20 所示。

**表 3 .20**

| | 4 | 10 | 16 | 2 | 8 | 14 | 6 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | √ | √ | √ | | | | | |
| 10 | √ | √ | √ | | | | | |
| 16 | √ | √ | √ | | | | | |
| 2 | | | | √ | √ | √ | | |
| 8 | | | | √ | √ | √ | | |
| 14 | | | | √ | √ | √ | | |
| 6 | | | | | | | √ | √ |
| 12 | | | | | | | √ | √ |

其关系矩阵为:

$$\begin{array}{cccccccc} 4 & 10 & 16 & 2 & 8 & 14 & 6 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$A$ 中各元素的等价类分别为:

$$[4]_R = [10]_R = [16]_R = \{4, 10, 16\}$$

$$[2]_R = [8]_R = [14]_R = \{2, 8, 14\}$$

$[6]_R = [12]_R = \{6,12\}$

商集 $A/R = \{\{4,10,16\},\{2,8,14\},\{6,12\}\}$。

4．$S$ 所对应的等价关系 $R$ 的表格表示如表 3.21 所示。

**表 3.21**

| | 1 | 4 | 5 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | √ | √ | √ | | |
| 4 | √ | √ | √ | | |
| 5 | √ | √ | √ | | |
| 2 | | | | √ | √ |
| 3 | | | | √ | √ |

5．$R$ 所对应的划分 $S = \{\{a, c, e, g\},\{b, d, f\}\}$。

6．(1) 不是等价关系，因为 $A \times A - R_1 \cup R_2$ 不是自反关系。

(2) 不是等价关系，因为 $R_2 - R_1$ 不是自反关系。

(3) $R_1 \cap R_2$ 是等价关系。因为 $R_1$ 是自反关系，所以对于 $A$ 中任意元素 $a$，都有 $(a, a) \in R_1$。同样，因为 $R_2$ 是自反关系，所以 $(a, a) \in R_2$，由此可知，$(a, a) \in R_1 \cap R_2$，即 $R_1 \cap R_2$ 是 $A$ 上的自反关系。

曾证明当 $R_1$ 和 $R_2$ 为对称关系时，$R_1 \cap R_2$ 也是对称关系；当 $R_1$ 和 $R_2$ 为传递关系时，$R_1 \cap R_2$ 也是传递关系(见 3.2.4 一节中的例 3.9 和例 3.10)。

由此可知，$R_1 \cap R_2$ 是 $A$ 上的等价关系。

(4) $R_1 \cup R_2$ 不一定是等价关系。例如，$A = \{1,2,3\}$，$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$，$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$；易知 $R_1$ 和 $R_2$ 都是 $A$ 上的等价关系，但 $R_1 \cup R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$，它不是等价关系，因为 $(2,1) \in R_1 \cup R_2$，$(1,3) \in R_1 \cup R_2$，而 $(2,3) \notin R_1 \cup R_2$，所以 $R_1 \cup R_2$ 不是传递关系，也就不是等价关系。

7．(1) $R$ 对应的划分 $S = \{\{1,2,3,4,5\}\}$。

(2) $R$ 对应的划分 $S = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$。

(3) $R$ 对应的划分 $S = \{\{1,3,5\},\{2,4\}\}$。

8．首先证明 $R$ 是对称关系。

由题设条件可知，当 $(a, b) \in R$ 和 $(b, c) \in R$ 时，必有 $(c, a) \in R$。因为 $R$ 是 $A$ 上的自反关系，所以有 $(b, b) \in R$；再利用题设条件可得：当 $(a, b) \in R$ 和 $(b, b) \in R$ 时，必有 $(b, a) \in R$，由此证得 $R$ 是对称关系。

再证 $R$ 是传递关系。

由于 $(a, b) \in R$ 和 $(b, c) \in R$ 必有 $(c, a) \in R$，利用已证得 $R$ 是对称关系，即知 $(a, c) \in R$。所以 $R$ 是传递关系。也即证明了 $R$ 是等价关系。

9．由于 $A$ 上的等价关系与 $A$ 上的划分是一一对应的，所以 $A$ 上有多少种划分也就有多少种等价关系。

当 $|A| = 3$ 时，不妨设 $A = \{1,2,3\}$，下面分 3 种情况讨论：

(1) 当划分中仅含 1 个划分块时，这样的划分仅有 1 种：$\{\{1,2,3\}\}$。

(2) 当划分中含有 2 个划分块时，这样的划分有 $C_3^1 = 3$(种)，它们是：

$$\{\{1\},\{2,3\}\}$$

$$\{\{2\},\{1,3\}\}$$

$$\{\{3\},\{1,2\}\}$$

(3) 当划分含有 3 个划分块时，这样的划分仅有 1 种 $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$。

由此可知,当 $|A| = 3$ 时, $A$ 上可定义 5 种不同的等价关系。

10 .由于 $A$ 中任意元素 $a$, $a$和 $a$ 都有 3 个数码相同,所以$(a, a) \in R$, $R$是自反关系。$R$ 的对称性是显然的,由此可知 $R$ 是 $A$ 上的相容关系。

但 $R$不是传递关系,如$(112,233) \in R$(它们都含有数码2), $(233,345) \in R$(它们都含有数码 3),而$(112,345) \notin R$。所以 $R$ 不是传递关系,从而也不是等价关系。

11 .由于 $a \cdot a = a^2 \geq 0$,所以 $R$是自反关系;如果 $a \cdot b \geq 0$,必有 $b \cdot a \geq 0$,所以 $R$是对称关系。由此可知 $R$ 是相容关系。

但 $R$ 不是传递关系,如$(-1,0) \in R$, $(0,1) \in R$,而$(-1,1) \notin R$,所以 $R$ 不是传递关系,从而也不是等价关系。

12 .由于 $R_1$ 和 $R_2$ 都是自反关系,对于 $A$ 中任意元素 $a$,都有$(a, a) \in R_1$ 和$(a, a) \in R_2$,由此可知,$(a, a) \in R_1 \cup R_2$,所以 $R_1 \cup R_2$ 是自反关系。当$(a, b) \in R_1 \cup R_2$ 时,必有$(a, b) \in R_1$ 或者$(a, b) \in R_2$,不妨设$(a, b) \in R_1$,由于 $R_1$ 是对称关系,所以$(b, a) \in R_1$,也即有$(b, a) \in R_1 \cup R_2$,由此可知,$R_1 \cup R_2$ 是对称关系,从而证得 $R_1 \cup R_2$ 是 $A$ 上的相容关系。

13 .$S$ 所对应的相容关系 $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, d), (d, a), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c), (a, c), (c, a)\}$。

14 .见图 3 .37 所示。

15 .$(A, t)$ 的哈斯图如图 3 .38 所示。

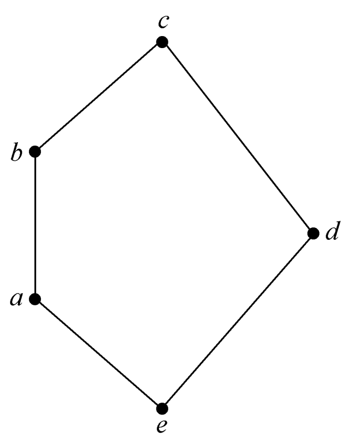



图 3 .37

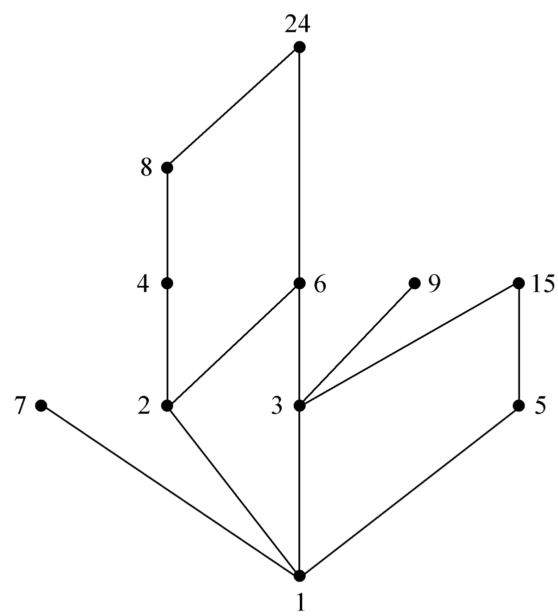



图 3 .38

16 .$(A, t)$ 的表格表示如表 3 22 所示。

**表 3 .22**

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | √ | | √ | | √ | √ |
| $a_2$ | | √ | √ | √ | √ | √ |
| $a_3$ | | | √ | | √ | √ |
| $a_4$ | | | | √ | | √ |
| $a_5$ | | | | | √ | √ |
| $a_6$ | | | | | | √ |

其关系矩阵为:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

17 .$A$ 中极大元为: 5, 6, 8, 极小元是 1; $A$ 中没有最大元, 最小元是 1。

18 .子集 $\{a, b, c\}$ 的上界为: $e, f, g$, 上确界为 $e$。子集 $\{c, d, e\}$ 的下界为: $c$, 下确界也是 $c$。

# 3 .5　函　　数

函数是数学中最基本的概念之一, 函数也称为映射, 它确定了两个集合中元素之间的对应关系。

## 3 .5 .1　函数的基本概念

**定义 3 5 1**　设 $A$ 和 $B$ 是集合, $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系, 如果 $f$ 满足: 对于 $A$ 中的每一个元素 $a$, 存在着 $B$ 中的一个元素且仅一个元素 $b$, 使得 $(a, b) \in f$, 则称 $f$ 为 $A$ 到 $B$ 的函数。并把 $(a, b) \in f$ 记作 $f(a) = b$, 称 $a$ 为自变元或原象, $b$ 为对应于 $a$ 的函数值或映像。集合 $A$ 称为 $f$ 的定义域, 由所有映像组成的集合称为 $f$ 的值域, 记作 $f(A)$。

由函数的定义可知, 函数是一种特殊的二元关系, 其特殊之处在于:

(1) 函数要求 $A$ 中每一个元素与 $B$ 中元素以 $f$ 相关, 所以可方便地把 $A$ 作为函数 $f$ 的定义域。

(2) 函数要求 $A$ 中元素只能与 $B$ 中一个元素以 $f$ 相关, 即不能有 $f(a) = b$, 又有 $f(c) = (b)(b \neq c)$。这表明我们所讨论的函数是单值函数。

例如, 集合 $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A$ 到 $B$ 的二元关系 $f = \{(x, 1), (y, 1), (z, 3)\}$, 则 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数, 且有

$$f(x) = 1$$
$$f(y) = 1$$
$$f(z) = 3$$

易知, 函数 $f$ 的值域 $f(A) = \{1, 3\}$。

又如, 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $f_1$, $f_2$, $f_3$ 分别是 $A$ 到 $B$ 的二元关系, 其中

$$f_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$$
$$f_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$
$$f_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$$

易知, $f_1$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数 $(f_1(a) = 2a)$; $f_2$ 不是 $A$ 到 $B$ 的函数, 因为 $A$ 中元素 4 与 $B$ 中元素都不相关, $f_3$ 也不是 $A$ 到 $B$ 的函数, 因为 $A$ 中元素 4 与 $B$ 中两个元素有关。

再如,集合 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $f_1$, $f_2$, $f_3$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系,它们的关系图分别如图 3.39(a), (b), (c) 所示。

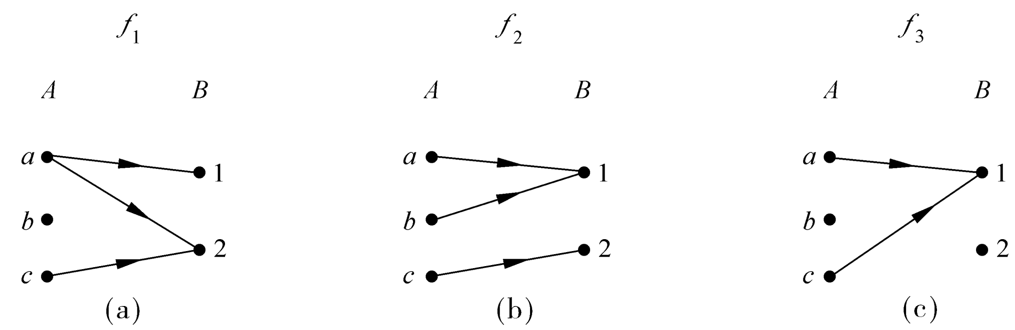



图 3.39

易知, $f_2$ 是函数, $f_1$ 和 $f_3$ 都不是函数。

当 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数时,可记作 $f: A \to B$。

在二元关系中,曾定义关系 $R$ 的前域和值域,其中前域 $\mathrm{dom}\, R = \{x \mid (x, y) \in R, x \in A, y \in B\}$,值域 $\mathrm{ran}\, R = \{y \mid (x, y) \in R, x \in A, y \in B\}$。

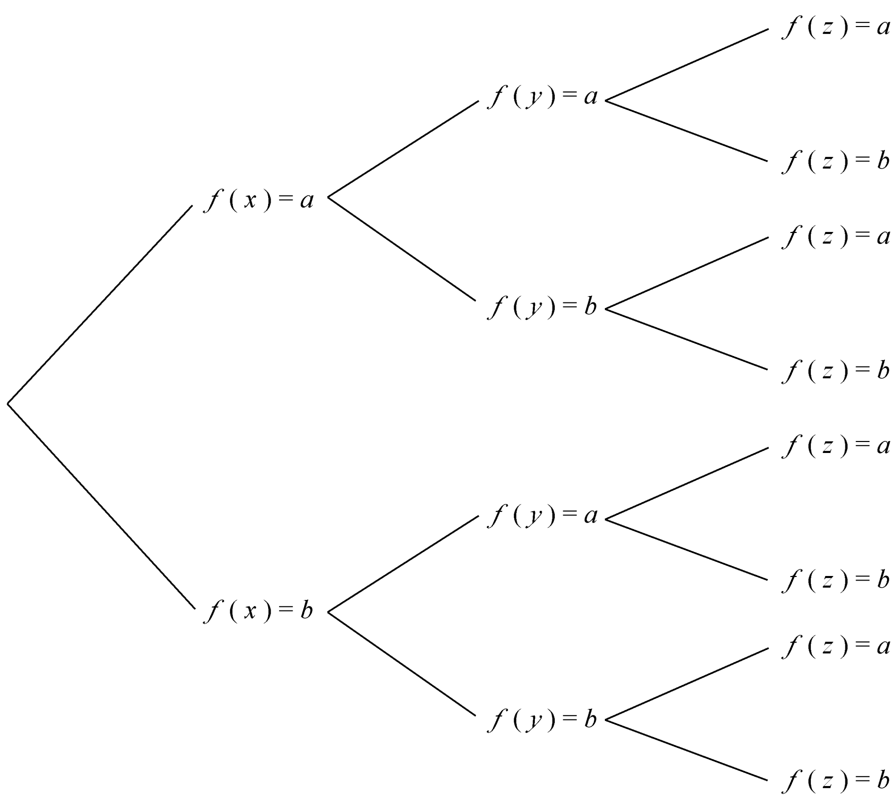



图 3.40

在 $A$ 到 $B$ 的函数 $f$ 中,其前域就是定义域,即 $\mathrm{dom}\, f = A$;值域 $\mathrm{ran}\, f = f(A)$ $B$。

下面简单地讨论函数的计数问题。

设 $|A| = 3$, $|B| = 2$,那么 $A$ 到 $B$ 可以定义多少种不同的函数?

为了便于讨论,不妨设 $A = \{x, y, z\}$, $B = \{a, b\}$, $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数。

易知,函数 $f(x)$ 可以取 $a$ 或 $b$ 两个值;当 $f(x)$ 取定一个值时, $f(y)$ 又可取 $a$ 或 $b$ 两个值;而当 $f(y)$ 取定一个值时, $f(z)$ 又可取 $a$ 或 $b$ 两个值。因此 $A$ 到 $B$ 可定义 $2^3$ 种不同的函数。图 3.40 所示的是这 8 种不同函数的取值过程:

一般地讲,当 $A$ 和 $B$ 为有限集时,若 $|A| = n$, $|B| = m$,则 $A$ 到 $B$ 可以定义 $m^n$ 个

不同的函数。

**定义 3.5.2** 设 $A, B$ 是集合,由所有 $A$ 到 $B$ 的函数作为元素构成的集合记作 $B^A$。

易知,当 $A, B$ 为有限集时,若 $|A| = n$, $|B| = m$,则 $|B^A| = |B|^{|A|}$。

例如,$A = \{a, b\}$, $B = \{1,2,3\}$,由于 $|A| = 2$, $|B| = 3$,所以 $|B|^{|A|} = 3^2 = 9$,即 $A$ 到 $B$ 可以定义 9 种不同的函数。图 3.41 所示的是这 9 种不同函数的取值过程:

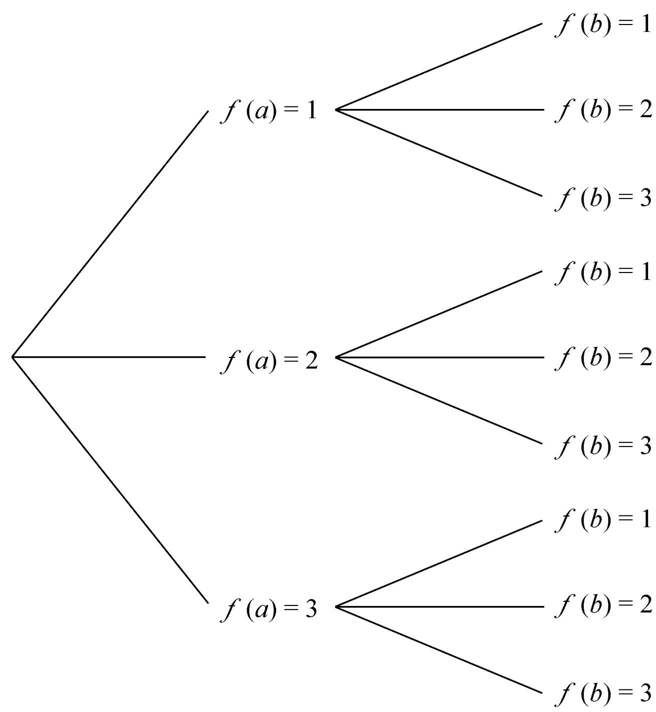



图 3.41

如果令:

$$f_1(a) = 1, f_1(b) = 1; f_2(a) = 1, f_2(b) = 2; f_3(a) = 1, f_3(b) = 3;$$
$$f_4(a) = 2, f_4(b) = 1; f_5(a) = 2, f_5(b) = 2; f_6(a) = 2, f_6(b) = 3;$$
$$f_7(a) = 3, f_7(b) = 1; f_8(a) = 3, f_8(b) = 2; f_9(a) = 3, f_9(b) = 3。$$

则 $B^A = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$。

## 3.5.2 特殊函数

**1.入射函数**

**定义 3.5.3** 设 $A, B$ 是集合, $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数,对于 $A$ 中任意两个元素 $x_1, x_2$,当 $x_1 \neq x_2$ 时,都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 $f$ 为入射函数,也常称为单射函数。

入射函数要求不同的自变元有不同的函数值。

例如,集合 $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数,且有:

$$f(x) = 1$$
$$f(y) = 2$$
$$f(z) = 3$$

易知 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的入射函数。

又如, $Z^+$ 是正整数集合, $f$ 是 $Z^+$ 到 $Z^+$ 的函数,且对于任意正整数 $n$,都有 $f(n) = n^2$。当正整数 $n_1 \neq n_2$ 时, $n_1^2 \neq n_2^2$,即 $f(n_1) \neq f(n_2)$,所以 $f$ 是入射函数。

再如,在图 3 .42 所示的两个函数中,图(a) 是入射函数;图(b) 不是入射函数。

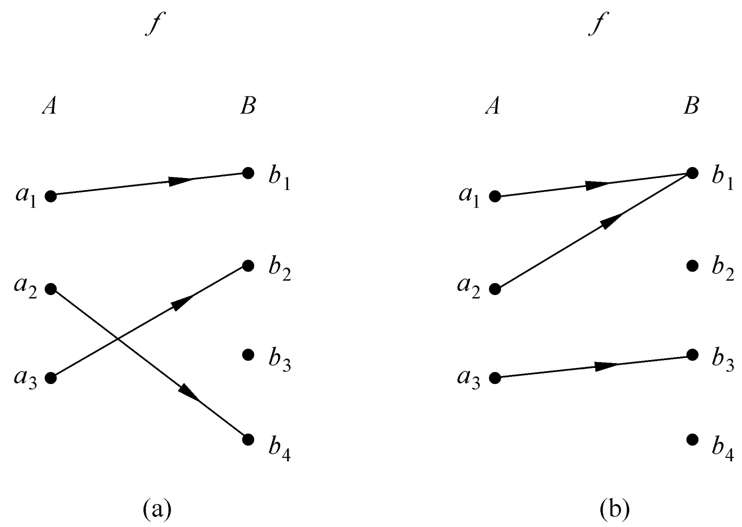



图 3 .42

易知,当 $A, B$ 为有限集时,若有 $A$ 到 $B$ 的入射函数,则 $|A| \leq |B|$。

**2 .满射函数**

**定义 3 .5 .4** 设 $A, B$ 是集合, $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数, 如果函数的值域恰好是 $B$, 即 $f(A) = B$,则称 $f$ 为 $A$ 到 $B$ 的满射函数。

例如,集合 $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a, b\}$, $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数,且有

$$f(1) = a$$

$$f(2) = b$$

$$f(3) = b$$

则 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的满射函数。

又如, $Z^+$ 是正整数集合, $E^+$ 是正偶数集合, $f$ 是 $Z^+$ 到 $E^+$ 的函数,且 $f(n) = 2n$。易知, $f$ 是满射函数。

再如,在图 3 .43 所示的两个函数中,图(a) 是满射函数,图(b) 不是满射函数。

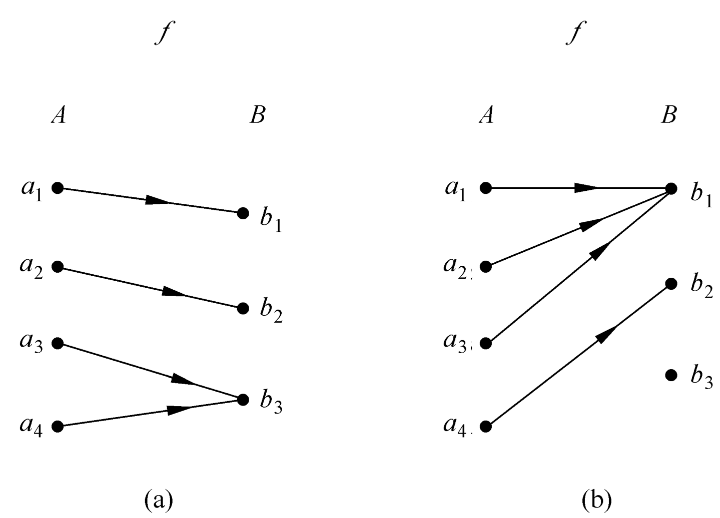



图 3 .43

易知,当 $A, B$ 为有限集时,若有 $A$ 到 $B$ 的满射函数,则 $|A| \geq |B|$。

**3. 双射函数**

**定义 3. 5. 5** 设 $A$ 和 $B$ 是集合, $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数,如果 $f$ 既是入射函数又是满射函数,则称 $f$ 为 $A$ 到 $B$ 的双射函数。双射函数也称为一一对应函数。

例如,集合 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1,2,3\}$, $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数,且有

$$f(a) = 1$$
$$f(b) = 3$$
$$f(c) = 2$$

则 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的双射函数。

又如, $Z^+$ 是正整数集合, $E^+$ 是正偶数集合, $f$ 是 $Z^+$ 到 $E^+$ 的函数,且 $f(n) = 2n$。已知 $f$ 是 $Z^+$ 到 $E^+$ 的满射函数,又由于当 $n_1 \neq n_2$ 时, $2n_1 \neq 2n_2$,即 $f(n_1) \neq f(n_2)$,所以 $f$ 又是 $Z^+$ 到 $E^+$ 的入射函数,所以 $f$ 是 $Z^+$ 到 $E^+$ 的双射函数。

再如,在图 3.44 所示的两个函数中,图(a) 是双射函数,图(b) 不是双射函数。

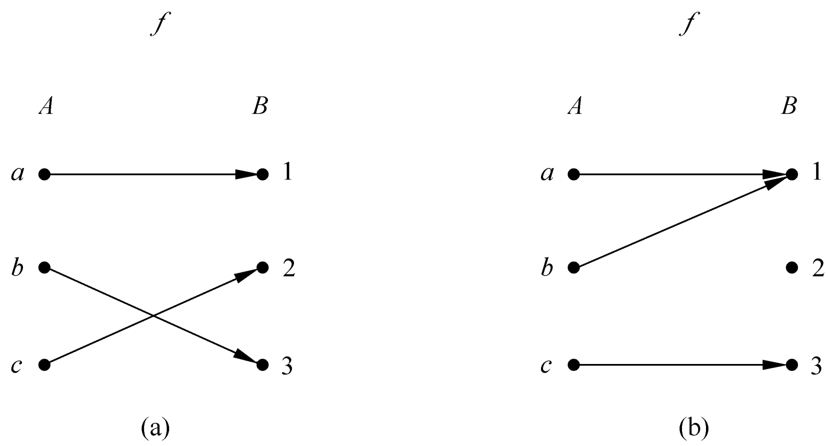



图 3.44

易知,当 $A, B$ 为有限集时,若有 $A$ 到 $B$ 的双射函数,则 $|A| = |B|$。

## 3.5.3 复合函数与逆函数

**1. 复合函数**

由于函数是一种特殊的二元关系,所以函数的复合可以采用二元关系的复合方法。并可证明当函数被看作二元关系时,经关系的复合后所得的复合关系是函数。

**定理 3.5.1** 设 $A, B, C$ 是集合, $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系, $g$ 是 $B$ 到 $C$ 的二元关系。当 $f$ 和 $g$ 都是函数时,则复合关系 $f \circ g$ 是 $A$ 到 $C$ 的函数。

证明从略。

复合函数和复合关系在记法上稍有不同。

**定义 3.5.6** 设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数, $g$ 是 $B$ 到 $C$ 的函数, $f$ 和 $g$ 的复合函数记作 $g \circ f$,它是 $A$ 到 $C$ 的函数,当 $a \in A, b \in B, c \in C$,且 $f(a) = b, g(b) = c$ 时, $g \circ f(a) = c$。

请注意,当把 $f$ 和 $g$ 看作二元关系时,其复合关系记作 $f \circ g$;但当把 $f$ 和 $g$ 看作是函数时,其复合函数应记作 $g \circ f$。

复合函数之所以采用这样的记法,是为了便于函数进行复合运算。采用这样的记法,使得

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

例如,设集合 $A = \{x, y, z\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{1, 2, 3\}$。$f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数, $g$ 是 $B$ 到 $C$ 的函数,且有

$$f(x) = a,\ f(y) = c,\ f(z) = d$$
$$g(a) = 1,\ g(b) = 1,\ g(c) = 3,\ g(d) = 2$$

复合函数 $g \quad f$ 是 $A$ 到 $C$ 的函数,且

$$g \quad f(x) = g(f(x)) = g(a) = 1$$

$$g \quad f(y) = g(f(y)) = g(c) = 3$$

$$g \quad f(z) = g(f(z)) = g(d) = 2$$

由此可知,复合函数记作 $g \quad f$ 时,能方便地进行函数的复合运算。

由于二元关系的复合运算满足结合律,所以函数的复合运算也满足结合律,即有

$$(f \quad g) \quad h = f \quad (g \quad h)$$

对于特殊函数的复合运算有如下定理:

**定理 3.5.2** 设 $A, B, C$ 是集合, $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数, $g$ 是 $B$ 到 $C$ 的函数。

(1) 如果 $f$ 和 $g$ 都是入射函数,则 $g \quad f$ 也是入射函数。

(2) 如果 $f$ 和 $g$ 都是满射函数,则 $g \quad f$ 也是满射函数。

(3) 如果 $f$ 和 $g$ 都是双射函数,则 $g \quad f$ 也是双射函数。

**证明** (1) 由于 $f$ 和 $g$ 都是入射函数,所以当 $x_1, x_2 \in A$,且 $x_1 \neq x_2$ 时,有

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$$

即当 $x_1 \neq x_2$ 时, $g \quad f(x_1) \neq g \quad f(x_2)$,所以 $g \quad f$ 是入射函数。

(2) 由于 $g$ 是 $B$ 到 $C$ 的满射函数,对于 $C$ 中任意元素 $c$,必有 $b \in B$,使得 $g(b) = c$;又由于 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的满射函数,所以必有 $a \in A$,使得 $f(a) = b$,由此可得

$$g \quad f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

因此,对于 $C$ 中任意元素 $c$,必有 $a \in A$,使得 $g \quad f(a) = c$,由此证得 $g \quad f$ 是满射函数。

(3) 由(1) 和(2) 的证明结果即可得证。

**2. 逆函数**

对于二元关系 $R$,只要颠倒 $R$ 中所有有序对中两个元素的顺序,就能得到逆关系 $R^{-1}$。但对于函数 $f$,把 $f$ 看作是二元关系时,其逆关系不一定是函数。

例如, $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1,2,3\}$, $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数,且 $f(x) = 1$, $f(y) = 1$, $f(z) = 3$;如果把 $f$ 写成二元关系的形式

$$f = \{(x,1),(y,1),(z,3)\}$$

其逆关系为

$$f^{-1} = \{(1, x),(1, y),(3, z)\}$$

易见,关系 $f^{-1}$ 不能构成 $B$ 到 $A$ 的函数。

显然,只有当 $f$ 是双射函数,其逆关系才是函数。

**定理 3.5.3** 设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的双射函数,则 $f$ 的逆关系 $f^{-1}$ 是 $B$ 到 $A$ 的函数,且是 $B$ 到 $A$ 的双射函数。

**定义 3.5.7** 设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的双射函数,其逆关系 $f^{-1}$ 称为 $f$ 的逆函数(或反函数),也记作 $f^{-1}$。

例如, $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1,2,3\}$, $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的双射函数,且有

$$f(x) = 1$$

$$f(y) = 3$$

$$f(z) = 2$$

**即有**

$$f = \{(x,1),(y,3),(z,2)\}$$

**其逆关系为:**

$$f^{-1} = \{(1,x),(3,y),(2,z)\}$$

**其逆函数为:**

$$f^{-1}(1) = x$$
$$f^{-1}(2) = z$$
$$f^{-1}(3) = y$$

**定义 3.5.8** 设 $f$ 是 $A$ 到 $A$ 的函数,且对于 $A$ 中任意元素 $a$,都有 $f(a) = a$,则称 $f$ 为 $A$ 上的恒等函数,并记作 $I_A$。

**定理 3.5.4** 设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的双射函数,$g$ 是 $B$ 到 $C$ 的双射函数,则 $f^{-1} \quad f = I_A$,$f \quad f^{-1} = I_B$。

**证明从略。**

**定理 3.5.5** 设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的双射函数,$g$ 是 $B$ 到 $A$ 的双射函数,则 $(g \quad f)^{-1} = f^{-1} \quad g^{-1}$。

**证明从略。**

## 3.5.4 重点和难点分析

**本节重点是:充分理解函数是特殊的二元关系;熟练掌握入射函数、满射函数和双射函数的定义和判别方法;理解复合函数、逆函数的定义和特性。**

**难点是:熟练地判别 3 类特殊函数和求复合函数。**

**例 3.30** 集合 $A = \{x, y, z\}$,$B = \{1,2,3\}$,说明下列 $A$ 到 $B$ 的二元关系中,哪些关系可以构成函数?

(1) $\{(x,1),(x,2)\}$

(2) $\{(x,1),(y,1)(z,1)\}$

(3) $\{(x,1),(y,2),(z,3),(z,1)\}$

(4) $\{(x,2),(y,3),(z,3)\}$

(5) $\{(x,2),(y,3),(y,1)\}$

**解** 由函数的定义可知,只有(2) 和(4) 是函数。

**例 3.31** 设集合 $A = \{1,2,3,4\}$,$B = \{a, b, c\}$,问在 $A$ 到 $B$ 的二元关系中,有多少种关系不能构成函数?

**解** 由于 $|A \times B| = 12$,所以 $A$ 到 $B$ 可定义 $2^{12} = 4096$ 种不同的二元关系;而 $A$ 到 $B$ 可定义 $3^4 = 81$ 种不同的函数,所以 $A$ 到 $B$ 的二元关系中有 $4096 - 81 = 4015$ 种二元关系不能构成 $A$ 到 $B$ 的函数。

**例 3.32** 下列函数哪些是入射函数?满射函数?双射函数?

(1) $f: A \to B, A = \{0,1,2\}, B = \{0,1,2,3,4\}, a \in A, f(a) = a^2$

(2) $f: Z^+ \to Z^+, f(i) = 2i$

(3) $f: Z \to Z$($Z$ 是整数集合), $f(i) = |i|$

(4) $f: R \to R$($R$ 是实数集合), $f(r) = r + 2$

(5) $f: Z \to \{0,1\}$, $f(i) = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ 1 & i \neq 0 \end{cases}$

**解** (1) $f$ 是入射函数,但不是满射函数。

(2) $f$ 是入射函数,但不是满射函数。

(3) $f$ 不是入射函数,因为 $f(i) = f(-i) = |i|$。$f$ 也不是满射函数,如对于 $-1$,不存在整数 $i$,使得 $f(i) = |i| = -1$。

(4) $f$ 是双射函数,当 $r_1 \neq r_2$ 时, $r_1 + 2 \neq r_2 + 2$,即 $f(r_1) \neq f(r_2)$,所以 $f$ 是入射函数。又由于对于任意实数 $r$,存在着实数 $r_1 = r - 2$,使得 $f(r_1) = f(r - 2) = r$,所以 $f$ 是满射函数。

(5) $f$ 是满射函数但不是入射函数。

**例 3.33** 设 $A, B$ 是集合,且 $|A| = 2$, $|B| = 5$,问:

(1) $A$ 到 $B$ 可定义多少种入射函数?

(2) $B$ 到 $A$ 可定义多少种满射函数?

(3) $B$ 到 $B$ 可定义多少种双射函数?

**解** (1) 由入射函数的定义可知, $A$ 到 $B$ 可定义 $A_5^2$(5 个元素中取 2 个元素的排列)种入射函数,即有 $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$(种)。

(2) 由于 $|B| = 5$, $|A| = 2$。在集合 $B$ 中仅有两个划分块的划分,共有两类:

第一类是一个划分块中含有 1 个元素,另一个划分块中含有 4 个元素。易知,这样的划分共有 $C_5^1 = 5$ 种。

第二类是一个划分块中含有 2 个元素,另一个划分块中含有 3 个元素。易知,这样的划分共有 $C_5^2 = 10$ 种。

如果把其中一个划分块中的元素都与 $A$ 中一个元素对应,另一个划分块中的元素都与 $A$ 中另一个元素对应,建立这样对应关系的函数就是 $B$ 到 $A$ 的满射函数。

例如,令 $B = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{a, b\}$;取 $B$ 中仅有两个划分块的划分:$\{\{1,2,3\}, \{4,5\}\}$;设 $f$ 是 $B$ 到 $A$ 的函数,且有

$$f(1) = f(2) = f(3) = a$$
$$f(4) = f(5) = b$$

则 $f$ 是 $B$ 到 $A$ 的满射函数。显然,若设

$$f(1) = f(2) = f(3) = b$$
$$f(4) = f(5) = a$$

则 $f$ 也是 $B$ 到 $A$ 的满射函数。所以当 $|B| = 5$, $|A| = 2$ 时, $B$ 到 $A$ 共有 $15 \times 2 = 30$ 种满射函数。

(3) 由于 $|B| = 5$,不妨设 $B = \{1,2,3,4,5\}$,如果 $B$ 到 $B$ 的双射函数 $f$ 如图 3.45 所示。

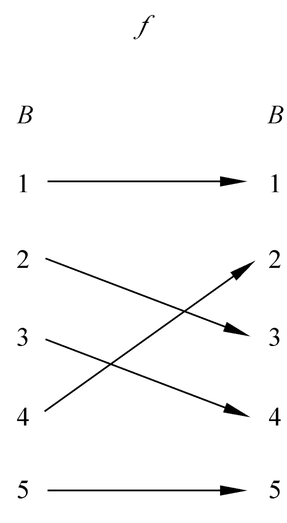



图 3.45

可以把 $f$ 所建立的对应关系,写成如下形式:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

由此可见,当 $|B| = 5$ 时, $B$ 到 $B$ 的双射函数共有 $5! = 120$ 种。

**例 3.34** 在不含 0 和 1 的实数集上定义函数:

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_3(x) = 1 - x \qquad f_4(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_5(x) = \frac{x-1}{x} \qquad f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

证明 $f_2 \circ f_3 = f_4$, $f_3 \circ f_4 = f_6$, $f_5 \circ f_6 = f_1$。

**证明** 由题设可知:

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_3(x) &= f_2(f_3(x)) \\ &= f_2(1-x) \\ &= \frac{1}{1-x} \\ &= f_4(x) \end{aligned}$$

由此证得: $f_2 \circ f_3 = f_4$。又由于

$$\begin{aligned} f_3 \circ f_4(x) &= f_3(f_4(x)) \\ &= f_3\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{x}{x-1} \\ &= f_6(x) \end{aligned}$$

由此证得: $f_3 \circ f_4 = f_6$。再由于

$$\begin{aligned} f_5 \circ f_6(x) &= f_5\left(\frac{x}{x-1}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{x-1} - 1}{\frac{x}{x-1}} \\ &= x \\ &= f_1(x) \end{aligned}$$

由此证得: $f_5 \circ f_6 = f_1$。

**例 3.35** 设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数, $g$ 是 $B$ 到 $C$ 的函数, $g \circ f$ 是 $A$ 到 $C$ 的函数。问:

(1) 如果 $g \circ f$ 是入射函数,是否 $f$ 和 $g$ 都必须是入射函数?

(2) 如果 $g \circ f$ 是满射函数,是否 $f$ 和 $g$ 都必须是满射函数?

(3) 如果 $g \circ f$ 是双射函数,是否 $f$ 和 $g$ 都必须是双射函数?

**解** (1) 当 $g \circ f$ 是入射函数时, $f$ 和 $g$ 不一定都是入射函数。

例如,设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$; $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数,且有

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, f(a_3) = b_3$$

$g$ 是 $B$ 到 $C$ 的函数，且有

$$g(b_1) = c_1,\ g(b_2) = c_2,\ g(b_3) = c_3,\ g(b_4) = c_3$$

即有如图 3.46 所示的函数关系。

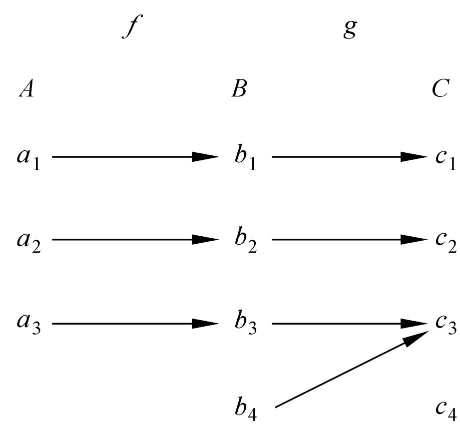



图 3.46

易见，$g \circ f$ 是入射函数，但 $g$ 不是入射函数。

(2) 当 $g \circ f$ 是满射函数时，$f$ 和 $g$ 不一定都是满射函数。

例如，设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$，$B = \{b_1, b_2, b_3\}$，$C = \{c_1, c_2\}$。$f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数，且有

$$f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2,\ f(a_3) = b_2$$

$g$ 是 $B$ 到 $C$ 的函数，且有

$$g(b_1) = c_1,\ g(b_2) = c_2,\ g(b_3) = c_2$$

即有如图 3.47 所示的函数关系。

易见，$g \circ f$ 是满射函数，但 $f$ 不是满射函数。

(3) 当 $g \circ f$ 是双射函数时，$f$ 和 $g$ 不一定都是双射函数。

例如，设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$，$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$，$C = \{c_1, c_2, c_3\}$。$f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数，且有

$$f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2,\ f(a_3) = b_3$$

$g$ 是 $B$ 到 $C$ 的函数，且有

$$g(b_1) = c_1,\ g(b_2) = c_2,\ g(b_3) = c_3,\ g(b_4) = c_3$$

即有如图 3.48 所示的函数关系。

易见，$g \circ f$ 是双射函数，但 $f$ 和 $g$ 都不是双射函数。

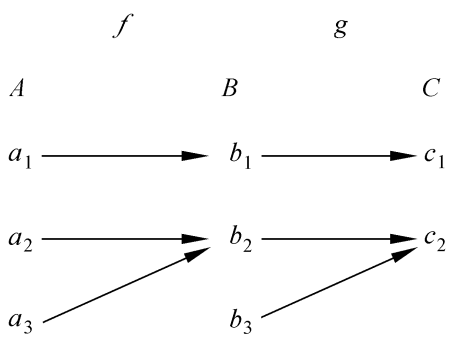



图 3.47

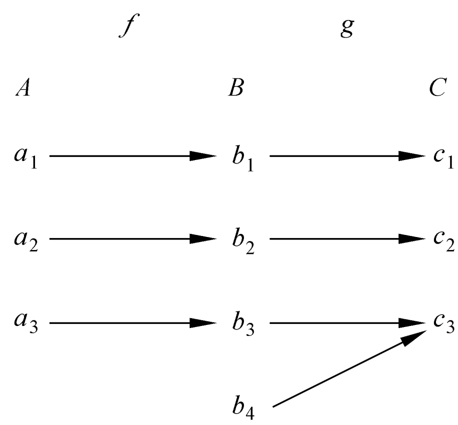



图 3.48

### 3.5.5 自测练习

1. 设 $A = \{x, y, z\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$，下列二元关系哪些是函数？

(1) $\{(x,1), (x,2), (y,3), (z,4)\}$

(2) $\{(x,2), (y,3), (z,4)\}$

(3) $\{(y,2), (z,3)\}$

(4) $\{(x,4), (y,4), (z,4)\}$

(5) $\{(x,1), (y,2), (z,3), (z,4)\}$

(6) $\{(x,1), (y,2)\}$

2. 设集合 $A = \{a, b, c\}$，问：

(1) $A$ 到 $A$ 可定义多少种不同的函数?

(2) $A\times A$ 到 $A$ 可定义多少种不同的函数?

(3) $A$ 到 $A\times A$ 可定义多少种不同的函数?

(4) $A\times A$ 到 $A\times A$ 可定义多少种不同的函数?

3. 设集合 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{0,1\}$,请写出所有 $A$ 到 $B$ 的函数和所有 $B$ 到 $A$ 的函数。

4. 设集合 $A=\{1,2\}$,求 $A^A$。

5. 下列函数中,哪些是入射函数?哪些是满射函数?哪些是双射函数?

(1) $f: A\to B, A=\{1,2,3\}, B=\{1,2,3,4,5,6\}, f(a)=2a$

(2) $f: Z^+\to Z^+, f(i)=i^2$

(3) $f: Z\to Z, f(i)=i^2$

(4) $f: R\to R, f(x)=x^2+2x$

(5) $f: R\to R, f(x)=2x+3$

(6) $f: Z\to Z, f(i)=x^3$

(7) $f: Z^+\to Z^+, f(i)=\begin{cases}0 & i\text{是偶数}\\ 1 & i\text{是奇数}\end{cases}$

(8) $f: Z\to\{0,1\}, f(i)=\begin{cases}0 & i\text{是偶数}\\ 1 & i\text{是奇数}\end{cases}$

(9) $f: R\to R, f(x)=2^x$

(10) $f: Z^+\to Z^+, f(i)=i+1$

6. 设 $A=\{x,y\}$, $B=\{1,2,3\}$,写出

(1) $A$ 到 $B$ 的所有入射函数。

(2) $B$ 到 $A$ 的所有满射函数。

(3) $A$ 到 $A$ 的所有双射函数。

(4) $B$ 到 $B$ 的所有双射函数。

7. 设集合 $A$ 具有 3 个元素,集合 $B$ 具有 4 个元素,问:

(1) $A$ 到 $B$ 可定义多少种入射函数?

(2) $B$ 到 $A$ 可定义多少种满射函数?

8. 如果 $f$ 是 $A$ 到 $A$ 的入射函数,那么 $f$ 是否一定是 $A$ 到 $A$ 的双射函数?

9. 如果 $f$ 是 $A$ 到 $A$ 的满射函数,那么 $f$ 是否一定是 $A$ 到 $A$ 的双射函数?

10. 在不含 0 和 1 的实数集上定义函数:

$$f_1(x)=x \qquad f_2(x)=\frac{1}{1-x} \qquad f_3(x)=\frac{x-1}{x}$$

证明 $f_2\ \ f_3=f_3\ \ f_2$, $f_2\ \ f_2=f_3$, $f_3\ \ f_3=f_2$。

11. 设 $A=\{a,b\}$, $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ 是 $A$ 到 $A$ 的函数,其中

$$f_1(a)=a, f_1(b)=b$$
$$f_2(a)=b, f_2(b)=a$$
$$f_3(a)=a, f_3(b)=a$$
$$f_4(a)=b, f_4(b)=b$$

证明 $f_2 \quad f_3 = f_4$, $f_3 \quad f_2 = f_3$。

12. 设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的函数,在 $A$ 上定义二元关系 $R$ 为:对于 $A$ 中元素 $a$、$b$,当且仅当 $f(a) = f(b)$ 时,$(a, b) \in R$。证明 $R$ 是 $A$ 上的等价关系。

13. 说明下列函数中,哪些有逆函数?

(1) $f: R \to R, f(x) = 2x + 1$

(2) $f: R \to R, f(x) = x^2$

(3) $f: A \to B$,其中 $A = \{0,1,2\}, B = \{0,2,4\}, f(a) = 2a$

(4) $f: Z \to Z, f(i) = |i|$

14. 设 $A = \{1,2,3\}, B = \{a, b, c\}$, $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的双射函数,且

$$f(1) = b, f(2) = c, f(3) = a$$

求 $f^{-1}$ 和 $f \quad f^{-1}$ 和 $f^{-1} \quad f$。

### 3.5.6 自测练习答案

1. 仅有(2) 和 (4) 是函数。

2. (1) $A$ 到 $A$ 可定义 27 种函数。

(2) $A \times A$ 到 $A$ 可定义 $3^9$ 种函数。

(3) $A$ 到 $A \times A$ 可定义 $9^3$ 种函数。

(4) $A \times A$ 到 $A \times A$ 可定义 $9^9$ 种函数。

3. $A$ 到 $B$ 的函数共有 8 种,分别是:

$$f_1(a) = 0, f_1(b) = 0, f_1(c) = 0$$
$$f_2(a) = 0, f_2(b) = 0, f_2(c) = 1$$
$$f_3(a) = 0, f_3(b) = 1, f_3(c) = 0$$
$$f_4(a) = 0, f_4(b) = 1, f_4(c) = 1$$
$$f_5(a) = 1, f_5(b) = 0, f_5(c) = 0$$
$$f_6(a) = 1, f_6(b) = 0, f_6(c) = 1$$
$$f_7(a) = 1, f_7(b) = 1, f_7(c) = 0$$
$$f_8(a) = 1, f_8(b) = 1, f_8(c) = 1$$

$B$ 到 $A$ 的函数共有 9 种,分别是:

$$f_1(0) = a, f_1(1) = a$$
$$f_2(0) = a, f_2(1) = b$$
$$f_3(0) = a, f_3(1) = c$$
$$f_4(0) = b, f_4(1) = a$$
$$f_5(0) = b, f_5(1) = b$$
$$f_6(0) = b, f_6(1) = c$$
$$f_7(0) = c, f_7(1) = a$$
$$f_8(0) = c, f_8(1) = b$$
$$f_9(0) = c, f_9(1) = c$$

4. $A \to A$ 可定义 4 种函数:

$$f_1(1) = 1, f_1(2) = 2$$
$$f_2(1) = 2, f_2(2) = 1$$
$$f_3(1) = 1, f_3(2) = 1$$
$$f_4(1) = 2, f_4(2) = 2$$

所以 $A^A = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$。

5. (1) $f$ 是入射函数。

(2) $f$ 是入射函数。

(3) $f$ 既不是入射函数,也不是满射函数。

(4) 由于 $f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$,所以 $f(x) \geq -1$,由此可知,$f$ 不是满射函数。又由于 $f(0) = 0$, $f(-2) = 0$,所以 $f$ 也不是入射函数。

(5) $f$ 是双射函数。因为当 $x_1 \neq x_2$ 时,$2x_1 + 3 \neq 2x_2 + 3$,即 $f(x_1) \neq f(x_2)$,所以 $f$ 是入射函数。又因为对于任意实数 $r$,存在着 $f\left(\frac{r-3}{2}\right) = r$,所以 $f$ 是满射函数。由此可知,$f$ 是 $R \to R$ 的双射函数。

(6) $f$ 是入射函数。

(7) $f$ 既不是入射函数,也不是满射函数。

(8) $f$ 是满射函数。

(9) $f$ 是入射函数。

(10) $f$ 是入射函数。

6. (1) $A$ 到 $B$ 的入射函数共有 6 种,分别是:

$$f_1(x) = 1, f_1(y) = 2$$
$$f_2(x) = 2, f_2(y) = 1$$
$$f_3(x) = 1, f_3(y) = 3$$
$$f_4(x) = 3, f_4(y) = 1$$
$$f_5(x) = 2, f_5(y) = 3$$
$$f_6(x) = 3, f_6(y) = 2$$

(2) $B$ 到 $A$ 的满射函数也有 6 种,分别是:

$$f_1(1) = x, f_1(2) = x, f_1(3) = y$$
$$f_2(1) = y, f_2(2) = y, f_2(3) = x$$
$$f_3(1) = x, f_3(2) = y, f_3(3) = x$$
$$f_4(1) = y, f_4(2) = x, f_4(3) = y$$
$$f_5(1) = y, f_5(2) = x, f_5(3) = x$$
$$f_6(1) = x, f_6(2) = y, f_6(3) = y$$

(3) $A$ 到 $A$ 的双射函数也有 6 种,分别是:

$$f_1(1) = 1, f_1(2) = 2, f_1(3) = 3$$
$$f_2(1) = 1, f_2(2) = 3, f_2(3) = 2$$
$$f_3(1) = 2, f_3(2) = 1, f_3(3) = 3$$
$$f_4(1) = 2, f_4(2) = 3, f_4(3) = 1$$

$$f_5(1) = 3,\ f_5(2) = 1,\ f_5(3) = 2$$
$$f_6(1) = 3,\ f_6(2) = 2,\ f_6(3) = 1$$

(4) $B$ 到 $B$ 的双射函数仅有 2 种:

$$f_1(x) = y,\ f_1(y) = x$$
$$f_2(x) = x,\ f_2(y) = y$$

7. (1) $A$ 到 $B$ 可定义 $A_4^3$ 种入射函数,即 $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ 种入射函数。

(2) 如果把 $B$ 中 4 个元素中的 2 个"合并"成 1 个元素,即把 $B$ 看作由 3 个元素组成的集合。由于 3 个元素的集合到 3 个元素集合的双射函数共有 6 种;而把 4 个元素"合并"成 3 个元素的做法共有 $C_4^2 = 6$ 种,所以 $B$ 到 $A$ 的满射函数共有 $6 \times 6 = 36$ 种。

8. 当 $A$ 为有限集时,此结论是正确的;但当 $A$ 为无限集时,此结论不一定正确。例如,$f: Z^+ \to Z^+$ 的函数,且 $f(n) = n + 1$,易知 $f$ 是入射函数,但不是双射函数。

9. 当 $A$ 为有限集时,此结论是正确的;但当 $A$ 为无限集时,此结论不一定正确。例如,$f: Z^+ \to Z^+$ 的函数,且有

$$f(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ n - 1 & n \geq 2 \end{cases}$$

易知 $f$ 是满射函数,但 $f(1) = f(3)$,所以 $f$ 不是入射函数,也就不是双射函数。

10. 证明　由题设可知:

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_3(x) &= f_2(f_3(x)) \\ &= f_2\left(\frac{x-1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 \circ f_2(x) &= f_3(f_2(x)) \\ &= f_3\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{\frac{1}{1-x}} \\ &= x \end{aligned}$$

由此证得: $f_2 \circ f_3 = f_3 \circ f_2$。

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_2(x) &= f_2\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} \\ &= \frac{x-1}{x} \\ &= f_3(x) \end{aligned}$$

**由此证得**: $f_2 \quad f_2 = f_3$。

$$
\begin{aligned}
f_3 \quad f_3(x) &= f_3(f_3(x)) \\
&= f_3\left(\frac{x-1}{x}\right) \\
&= \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} \\
&= \frac{1}{1-x} \\
&= f_2(x)
\end{aligned}
$$

**由此证得**: $f_3 \quad f_3 = f_2$。

11 .**由题设可知**:

$$f_2 \quad f_3(a) = f_2(f_3(a)) = f_2(a) = b$$
$$f_2 \quad f_3(b) = f_2(f_3(b)) = f_2(a) = b$$

**由于** $f_4(a) = b$, $f_4(b) = b$;**所以** $f_2 \quad f_3 = f_4$。

$$f_3 \quad f_2(a) = f_3(f_2(a)) = f_3(b) = a$$
$$f_3 \quad f_2(b) = f_3(f_2(b)) = f_3(a) = a$$

**由于** $f_3(a) = a$, $f_3(b) = a$;**所以** $f_3 \quad f_2 = f_3$。

12. **对于** $A$ **中任意元素** $a$,**必有** $f(a) = f(a)$,**即**$(a, a) \in R$。**由此证得** $R$ **是** $A$ **上的自反关系。**

**当** $f(a) = f(b)$ **时,必有** $f(b) = f(a)$,**即当**$(a, b) \in R$**时,必有**$(b, a) \in R$。**由此证得** $R$ **是** $A$ **上的对称关系。**

**当** $f(a) = f(b)$,**且** $f(b) = f(c)$ **时,必有** $f(a) = f(c)$,**即当**$(a, b) \in R$ **且**$(b, c) \in R$ **时,必有**$(a, c) \in R$。**由此证得** $R$ **是** $A$ **上的传递关系。**

**综上证得**: $R$ **是** $A$ **上的等价关系。**

13. **其中**(1),(3) **所示函数是双射函数,所以它们有逆函数。**

14. **先写出** $f$ **的关系表示**:

$$f = \{(1, b), (2, c), (3, a)\}$$

**由此可得**:

$$f^{-1} = \{(b,1), (c,2), (a,3)\}$$

**所以** $f$ **的逆函数为**:

$$f^{-1}(a) = 3,\ f^{-1}(b) = 1,\ f^{-1}(c) = 2$$

**由定理** 3.5.4 **可知**: $f^{-1} \quad f = I_A$, $f \quad f^{-1} = I_B$。

**所以**

$$f \quad f^{-1} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$
$$f^{-1} \quad f = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

**或写成**:

$$f \quad f^{-1}(a) = a,\ f \quad f^{-1}(b) = b,\ f \quad f^{-1}(c) = c$$
$$f^{-1} \quad f(1) = 1,\ f^{-1} \quad f(2) = 2,\ f^{-1} \quad f(3) = 3$$

# 第 4 章　代 数 结 构

代数结构也称为代数系统,它使用代数的方法构建数学模型。在计算机科学理论和编码理论中有重要用途。

本章主要介绍抽象代数的基本内容,其中有代数系统的基本概念,特殊的二元运算和特殊元素,常用的特殊代数系统:半群、独异点、群、子群、循环群、环、域以及格和布尔代数等。

本章内容中,按自学考试大纲的要求,其中代数系统的基本概念,特殊运算和特殊元素需要达到"领会"层次;半群和独异点需要达到"识记"层次;群、子群和循环群需要达到"简单应用"层次;环和域需要达到"识记"层次;格和布尔代数需要达到"领会"层次。

## 4.1　代数系统的基本概念

### 4.1.1　代数系统的定义

**定义 4.1.1**　设 $A$ 是非空集合,由 $A$ 和 $A$ 上若干个运算 $*_1, *_2, \cdots, *_k$ 构成的系统称为代数系统,记作 $(A, *_1, *_2, \cdots, *_k)$。

例如,$R$ 是实数集,$(R, +)$,$(R, \times)$,$(R, +, \times)$ 都是代数系统。

在代数系统中,运算主要是一元运算和二元运算,例如集合的取补运算是一元运算,数集上的加、乘等运算都是二元运算。本章介绍的各种代数系统中的运算大都是二元运算。下面介绍 3 种在代数系统中常用的二元运算。

**1.模 $k$ 的加法运算**

设 $N_k$ 表示由前 $k$ 个自然数构成的集合,即 $N_k = \{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$,$N_k$ 上的二元运算模 $k$ 加法记作 $\oplus_k$,其定义为:对于 $N_k$ 中的任意元素 $a$ 和 $b$,有

$$a \oplus_k b = \begin{cases} a + b & a + b < k \\ a + b - k & a + b \geq k \end{cases}$$

模 $k$ 加法运算 $a \oplus_k b$ 也可记作 $(a + b) \bmod k$。

例如,在代数系统 $(N_7, \oplus_7)$ 中,有

$$4 \oplus_7 2 = 6$$

$$4 \oplus_7 5 = 2$$

如果把 $N_7$ 中的元素:0,1,2,…,6 分别看作是星期日,星期一,星期二,…,星期六,那么 $4 \oplus_7 2 = 6$ 表示星期四再过两天后是星期六;$4 \oplus_7 5 = 2$ 表示星期四再过五天后是星期二。这是模 7 加法实际意义的一种解释。

**2.模 $k$ 的乘法运算**

模 $k$ 的乘法运算记作 $\otimes_k$,其定义为:当 $a, b \in N_k$ 时,有

$$a\,\text{í}_k\,b = \begin{cases} a \times b & a \times b < k \\ a \times b \text{ 被 } k \text{ 除后的余数} & a \times b \geq k \end{cases}$$

例如,在代数系统$(N_6, \text{í}_6)$中,$2\,\text{í}_6\,2 = 4$, $2\,\text{í}_6\,4 = 2$, $4\,\text{í}_6\,5 = 2$。

**3 .按位加运算**

设 $A$ 是由若干个 $n$ 位二进制序列作为元素的集合, $A$ 上的按位加运算记作 ī ,它是一种不计进位的二进制加法。例如:

$$\begin{array}{rccccc} & & \text{不计进位} & & \text{不计进位} & \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \text{ī} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

由按位加的定义可知,按位加的运算规则是:同位数码相同时(同时为 0 或 1),则这一位的运算结果为 0;同位数码不相同时,则这一位的运算结果为 1。按位加是编码中经常使用的二元运算。

当 $A$ 为有限集合时,使用运算表来描述二元运算是方便的。运算表的构建方法如下所示:

如果集合 $A$ 有 $n$ 个元素,可先画出 $n \times n$ 的表格,在表格的上方和表格的左侧分别写上 $A$ 中的元素,当 $a, b \in A$,且 $a$ 在表格左侧的第 $i$ 行, $b$ 在表格上方的第 $j$ 列,则在表中第 $i$ 行,第 $j$ 列的方格上写上 $a * b$ 的运算结果,这就是二元运算 $*$ 的运算表。

例如, $N_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$,对于模 6 的乘法,其运算表如表 4 .1 所示。

设集合 $A = \{00,01,10,11\}$, $A$ 上的二元运算是按位加运算,则其运算表如表 4 2 所示。

**表 4 .1**

| $\text{í}_6$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 2 | 4 |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 4 | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

**表 4 .2**

| ī | 00 | 01 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 00 | 01 | 10 | 11 |
| 01 | 01 | 00 | 11 | 10 |
| 10 | 10 | 11 | 00 | 01 |
| 11 | 11 | 10 | 01 | 00 |

集合 $A$ 上的二元运算,实际上就是对 $A$ 中的任意两个元素规定一个运算结果,不同的规定就得到不同的二元运算。因此经常使用运算表来定义有限集合上的二元运算,特别当有限集合上的二元运算不能用表达式简明地表示时,只能借助于运算表来定义。

例如, $A = \{1,2,3,4\}$, $A$ 上的二元运算 $*$ 的定义如表 4 3 所示。

**表 4 .3**

| * | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 0 | 8 | 6 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 4 |
| 3 | 1 | 2 | 1 | 5 |
| 4 | 0 | 4 | 2 | 0 |

易见, $A$ 上的二元运算 $*$ 无法用表达式表示,只能

借助于运算表来定义。

另外,运算表还便于我们对二元运算进行抽象的讨论,更形象地了解二元运算的有关特征。

### 4.1.2　特殊运算和特殊元素

**1.特殊运算**

**定义 4.1.2**　设$(A, *)$是代数系统,如果对于 $A$ 中任意元素 $a$ 和 $b$,都有

$$a * b = c \in A$$

则称二元运算 $*$ 对于 $A$ 是封闭的,也简称 $*$ 是封闭的。

例如,在代数系统$(R, +)$中,由于任何两个实数相加后仍然是实数,因此加法运算对于实数集 $R$ 是封闭的。

易见,乘法运算对于实数集也是封闭的。

同样,加法运算和乘法运算对于自然数集、整数集、有理数集也都是封闭的。

在代数系统($N_k$, ī $_k$)和($N_k$, í $_k$)中,模 $k$ 加法运算 ī $_k$ 和模 $k$ 乘法运算 í $_k$ 对于集合 $N_k$ 都是封闭的。

**定义 4.1.3**　设$(A, *)$是代数系统,如果对于 $A$ 中任意元素 $a$ 和 $b$,都有

$$a * b = b * a$$

则称 $*$ 为可交换运算,或称 $*$ 满足交换律。

例如,加法和乘法运算在实数集、有理数集和整数集上都是可交换运算。

容易验证,模 $k$ 加法 ī $_k$ 和乘法运算 í $_k$ 对于集合 $N_k$ 都是可交换运算。

但矩阵的乘法运算不是可交换运算。

**定义 4.1.4**　设$(A, *)$是代数系统,对于 $A$ 中任意元素 $a, b$ 和 $c$,都有

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

则称 $*$ 为可结合运算,或称 $*$ 满足结合律。

例如,在实数集、有理数集和整数集上的加法和乘法运算都是可结合运算。

又如,矩阵的加法运算和乘法运算也都是可结合运算。

现在证明,在($N_k$, ī $_k$)中,模 $k$ 加法是可结合运算,即证对于 $N_k$ 中的任意元素 $a, b$ 和 $c$,都有

$$(a\,ī_k\,b)\,ī_k\,c = a\,ī_k\,(b\,ī_k\,c)$$

由模 $k$ 加法的定义可知:

$$a\,ī_k\,b = \begin{cases} a + b & a + b < k \\ a + b - k & a + b \geq k \end{cases}$$

为了便于证明,首先把模 $k$ 加法的“分段”表示形式改写为单一的表示形式:

$$a\,ī_k\,b = a + b - k\,\frac{a + b}{k}$$

其中方括号表示取整运算,即对于任何实数 $x$, $[x]$ 表示 $x$ 的整数部分,如$[1.7] = 1$, $[8.3] = 8$, $[5] = 5$ 等。

因为当 $a + b < k$ 时, $\frac{a + b}{k} = 0$,所以有

$$a+b-k\frac{a+b}{k}=a+b$$

**当** $a+b\geq k$**时,** $\frac{a+b}{k}=1$**,所以有**

$$a+b-k\frac{a+b}{k}=a+b-k$$

**由此可知:**

$$a\oplus_k b=a+b-k\frac{a+b}{k}$$

**于是有:**

$$\begin{aligned}(a\oplus_k b)\oplus_k c &= \left(a+b-k\frac{a+b}{k}\right)\oplus_k c\\ &= a+b-k\frac{a+b}{k}+c-k\frac{a+b-k\frac{a+b}{k}+c}{k}\\ &= a+b+c-k\frac{a+b}{k}-k\left(\frac{a+b+c}{k}-\frac{a+b}{k}\right)\end{aligned}$$

**由于** $\frac{a+b}{k}$ **是非负整数,所以**

$$\begin{aligned}\text{上式} &= a+b+c-k\frac{a+b}{k}+k\frac{a+b}{k}-k\frac{a+b+c}{k}\\ &= a+b+c-k\frac{a+b+c}{k}\end{aligned}$$

**由此证得:**

$$(a\oplus_k b)\oplus_k c=a+b+c-k\frac{a+b+c}{k}$$

**同样有**

$$\begin{aligned}a\oplus_k(b\oplus_k c) &= a\oplus_k\left(b+c-k\frac{b+c}{k}\right)\\ &= a+b+c-k\frac{b+c}{k}-k\frac{a+b+c-k\frac{b+c}{k}}{k}\\ &= a+b+c-k\frac{b+c}{k}-k\left(\frac{a+b+c}{k}-\frac{b+c}{k}\right)\\ &= a+b+c-k\frac{b+c}{k}+k\frac{b+c}{k}-k\frac{a+b+c}{k}\\ &= a+b+c-k\frac{a+b+c}{k}\end{aligned}$$

**由此证得:**

$$(a\oplus_k b)\oplus_k c=a\oplus_k(b\oplus_k c)$$

**所以** $\oplus_k$ **对于** $N_k$ **是可结合运算。**

**类似地,把模** $k$ **乘法运算:**

$$a\otimes_k b=\begin{cases}a\times b & a\times b<k\\ a\times b\text{被}k\text{除后的余数} & a\times b\geq k\end{cases}$$

可改写成:

$$a \times_k b = ab - k \frac{ab}{k}$$

同样可得:

$$(a \times_k b) \times_k c = a \times_k (b \times_k c)$$
$$= abc - k \frac{abc}{k}$$

所以模 $k$ 乘法 $\times_k$ 是可结合运算。

当代数系统$(A, *)$中的运算 $*$ 是可结合运算时,圆括号内的优先运算作用已没有意义,常把圆括号省略,写成

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$
$$= a * b * c$$

特别当 $a = b = c$ 时,有

$$(a * a) * a = a * (a * a)$$
$$= a * a * a$$

可把 $a * a * a$ 记作 $a^3$。由此可见,当 $*$ 是可结合运算时,$(A, *)$中元素 $a$ 的幂是有意义的,于是可令:

$$a^n = \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n个}$$

显然,当 $i$ 和 $j$ 是正整数时,有

$$a^i * a^j = a^{i+j}$$
$$(a^i)^j = a^{i \cdot j}$$

**定义 4.1.5** 设$(A, *)$是代数系统,如果对于 $A$ 中任意元素 $a$,都有

$$a * a = a$$

则称 $*$ 为等幂运算。

例如,在代数系统$(R, *)$中,$R$ 是实数集,运算 $*$ 定义为:

$$a * b = \max(a, b)$$

由于 $a * a = \max(a, a) = a$,所以 $*$ 是等幂运算。

又如,集合的并、交运算也都是等幂运算。

**定义 4.1.6** 设$(A, *, \circledast)$是含有两种二元运算的代数系统,对于 $A$ 中任意元素 $a, b$ 和 $c$,都有

$$a * (b \circledast c) = (a * b) \circledast (a * c)$$
$$(b \circledast c) * a = (b * a) \circledast (c * a)$$

则称运算 $*$ 对于 $\circledast$ 是可分配的,或称运算 $*$ 对于 $\circledast$ 满足分配律。

例如,在实数集上,乘法对于加法是可分配的,即 $a(b + c) = ab + ac$。

又如,集合的并、交运算中,并对交是可分配的,交对并也是可分配的。

还可以证明模 $k$ 乘法对于模 $k$ 加法是可分配的,即有

$$a \times_k (b +_k c) = (a \times_k b) +_k (a \times_k c)$$

**2 .特殊元素**

**定义 4 .1 .7** 设$(A, *)$是代数系统,如果 $A$ 中存在元素 $a$,使得

$$a * a = a$$

则称 $a$ 为$(A, *)$的等幂元。

例如,在$(R, +)$中,0 是惟一的等幂元;在$(R, \times)$中,0 和 1 都是等幂元。

又如,在( $N_k$ , ī $_k$ )中,0 是惟一的等幂元;在( $N_k$ , í $_k$ )中,除了 0 和 1 是等幂元外,往往还可能有多个等幂元,如在( $N_{10}$ , í $_{10}$ )中,0 ,1 ,5 ,6 都是等幂元。

显然,当$(A, *)$中的运算为等幂运算时,$A$ 中的每一个元素都是等幂元。

**定义 4 .1 .8** 设$(A, *)$是代数系统,如果 $A$ 中存在元素 $e_l$,使得对于 $A$ 中任意元素 $a$,都有

$$e_l * a = a$$

则称 $e_l$ 为$(A, *)$的左幺元(或左单位元)。

如果 $A$ 中存在元素 $e_r$,使得对于 $A$ 中任意元素 $a$,都有

$$a * e_r = a$$

则称 $e_r$ 为$(A, *)$的右幺元(或右单位元)。

如果 $A$ 中存在元素 $e$,它既是$(A, *)$的左幺元,又是$(A, *)$的右幺元,则称 $e$ 为$(A, *)$的幺元(或单位元)。

显然,当 $e$ 为$(A, *)$的幺元时,对于 $A$ 中任意元素 $a$,都有

$$e * a = a * e = a$$

例如,设$(R, *)$是代数系统,$R$ 是实数集,$R$ 上的二元运算 $*$ 定义为:

$$a * b = b$$

易见,$R$ 中的每一个元素都是左幺元,但$(R, *)$没有右幺元。

又如,设$(R, \circledast)$是代数系统,$R$ 上的二元运算 $\circledast$ 定义为:

$$a \circledast b = a$$

则 $R$ 中的每一个元素都是右幺元,但$(R, \circledast)$没有左幺元。

显然,当代数系统$(A, *)$中的运算 $*$ 是可交换运算时,$(A, *)$的左幺元(或右幺元)一定是幺元。

例如,在$(R, +)$中,0 是幺元;在$(R, \times)$中,1 是幺元。在( $N_k$ , ī $_k$ )中,0 是幺元;在( $N_k$ , í $_k$ )中,1 是幺元。

**定理 4 .1 .1** 设$(A, *)$是代数系统,如果 $A$ 中既有左幺元 $e_l$,又有右幺元 $e_r$,则 $e_l = e_r = e$,且$(A, *)$中的幺元是惟一的。

**证明** 因为 $e_l$ 是左幺元,所以对于 $A$ 中任意元素 $a$,都有

$$e_l * a = a$$

若取 $a$ 为右幺元,即 $a = e_r$,则有

$$e_l * e_r = e_r$$

又因为 $e_r$ 是右幺元,所以对于 $A$ 中任意元素 $a$,都有

$$a * e_r = a$$

若取 $a$ 为左幺元,即 $a = e_l$,则有

$$e_l * e_r = e_l$$

由此可得

$$e_l = e_r = e$$

现再证幺元的惟一性。

设$(A, *)$中另有幺元 $e'$,则应有

$$e' * e = e$$

又由于 $e$也是幺元,所以有

$$e' * e = e'$$

由此证得 $e' = e$,所以$(A, *)$中幺元是惟一的。

**定义 4.1.9** 设$(A, *)$是代数系统, $a \in A$,如果 $A$中存在元素 $b$,使得

$$b * a = e(\text{幺元})$$

则称 $b$为 $a$ 的左逆元。

如果 $A$中存在着元素 $c$,使得

$$a * c = e$$

则称 $c$为 $a$ 的右逆元。

如果 $A$中存在着元素 $x$,使得 $x$既是 $a$的左逆元,又是 $a$的右逆元,则称 $x$为 $a$的逆元,记作 $a^{-1}$。

显然,当 $b$是 $a$ 的逆元时, $a$也是 $b$的逆元,常称 $a$和 $b$互逆;幺元 $e$的逆元是其自身,以自身为逆元的元素称为自逆元。

在通常情况下,一个元素可以仅有左逆元而没有右逆元,或者仅有右逆元而没有左逆元,甚至有这样的情况,一个元素既有左逆元,又有右逆元,但左逆元和右逆元却是不相等的。

例如,在代数系统$(A, *)$中, $A = \{e, a, b, c, d\}$,其中 $e$为幺元,运算 $*$ 的定义如表 4.4 所示。

表 4.4

| * | e | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c | d |
| a | a | b | e | c | a |
| b | b | a | c | c | b |
| c | c | e | a | b | c |
| d | d | a | b | b | b |

由表 4.4 可知, $c * a = e$, $a * b = e$,所以 $a$有左逆元 $c$且有右逆元 $b$,但 $a$的左、右逆元是不相同的;对于元素 $b$,仅有 $a * b = e$,所以 $b$仅有左逆元而没有右逆元;对于元素 $c$,仅有 $c * a = e$,所以 $c$仅有右逆元而没有左逆元;易见元素 $d$既没有左逆元也没有右逆元。所以在代数系统$(A, *)$中,除幺元 $e$以自身为逆元外,其他元素都没有逆元。

当$(A, *)$中的运算 $*$ 为可结合运算时,则有以下重要定理。

**定理 4.1.2** 设$(A, *)$是代数系统, $e$是其幺元,如果 $*$是可结合运算,且 $A$中每一个元素都有左(右)逆元,则 $A$中每一个元素的左(右)逆元就是其逆元,且 $A$中每一个元素的逆元是惟一的。

**证明** 在 $A$中任取一个元素 $a$,由于 $A$中每一个元素都有左逆元,不妨设 $a$的左逆元为 $b$,因此有

$$b * a = e$$

于是有

$$b = e * b = (b * a) * b$$

又由于 $b$ 也有左逆元,不妨设 $b$ 的左逆元为 $c$,于是有

$$c * b = e$$

或者有

$$c * \quad (b * a) * b \quad = e$$

由于运算 * 是可结合运算,所以有

$$(c * b) * (a * b) = e$$

$$e * (a * b) = e$$

$$a * b = e$$

由此证得 $b$ 也是 $a$ 的右逆元,所以 $b$ 是 $a$ 的逆元。

现再证逆元的惟一性。

如果 $a$ 有两个逆元 $b$ 和 $c$,则

$$\begin{aligned} b &= b * e \\ &= b * (a * c) \\ &= (b * a) * c \\ &= e * c \\ &= c \end{aligned}$$

由此可见,$a$ 的逆元是惟一的。所以 $(a^{-1})^{-1} = a$。

例如,在 $(R, +)$ 中,0 是幺元,$R$ 中的元素 $a$ 的逆元是 $-a$。在 $(R, \times)$ 中,1 是幺元,元素 0 没有逆元,其他元素 $a$ 的逆元是 $1/a$。

又如,在 $(N_k, \oplus_k)$ 中,0 是幺元,其他元素 $p$ 的逆元为 $k-p$。在 $(N_k, \otimes_k)$ 中,除 0 没有逆元外,其他元素也可能没有逆元,如在 $(N_6, \otimes_6)$ 中,元素 0,2,3,4 都没有逆元,只有 1 的逆元是 1,5 的逆元是 5。

**定义 4.1.10** 设 $(A, *)$ 是代数系统,如果 $A$ 中存在元素 $\theta_l$,使得对于 $A$ 中任意元素 $a$,都有

$$\theta_l * a = \theta_l$$

则称 $\theta_l$ 为 $(A, *)$ 的左零元。

如果 $A$ 中存在元素 $\theta_r$,使得对于 $A$ 中任意元素 $a$,都有

$$a * \theta_r = \theta_r$$

则称 $\theta_r$ 为 $(A, *)$ 的右零元。

如果 $A$ 中存在元素 $\theta$,它既是左零元,又是右零元,则称 $\theta$ 为 $(A, *)$ 的零元。

同幺元相仿,零元也有如下定理。

**定理 4.1.3** 设 $(A, *)$ 是代数系统,如果 $A$ 中存在着左零元 $\theta_l$,又存在着右零元 $\theta_r$,则 $\theta_l = \theta_r = \theta$,且 $A$ 中的零元是惟一的。

例如,在 $(R, \times)$ 和 $(N_k, \otimes_k)$ 中,都有零元为 0;但在 $(R, +)$ 和 $(N_k, \oplus_k)$ 中,都没有零元。

### 4.1.3 子代数

在代数系统中,某些特殊元素(如幺元和零元)在显示代数系统的特征时具有重要作用,常称这样的特殊元素为代数常数。当需要强调代数系统中的特殊元素时,常把代数常数写入代数系统中。

例如,在代数系统$(R, +)$中,为了强调幺元的存在,可写成$(R, +, 0)$。在代数系统$(R, \times)$中,可写成$(R, \times, 1, 0)$,其中 1 是幺元,0 是零元。

**定义 4.1.11** 设$(A, *_1, *_2, \cdots, *_k)$和$(B, *_1', *_2', \cdots, *_k')$都是代数系统,其中$*_i$和$*_j'$是元数相同的运算(通常是一元或二元运算),且这两个代数系统中代数常数的个数相同,则称$(A, *_1, *_2, \cdots, *_k)$和$(B, *_1', *_2', \cdots, *_k')$是同类型的代数系统。

例如,$(R, +, 0)$和$(N_k, \text{ī}_k, 0)$是同类型的代数系统,它们都只含一个二元运算和一个代数常数(幺元)。

**定义 4.1.12** 设$(A, *_1, *_2, \cdots, *_k)$是代数系统,$B$是$A$的子集,如果$*_1, *_2, \cdots, *_k$对于$B$是封闭的,且$(A, *_1, *_2, \cdots, *_k)$和$(B, *_1, *_2, \cdots, *_k)$含有相同的代数常数,则称$(B, *_1, *_2, \cdots, *_k)$为$(A, *_1, *_2, \cdots, *_k)$的子代数系统,简称子代数。

例如,设$Z$是整数集合,则$(Z, +, 0)$是$(R, +, 0)$的子代数。

又如,在代数系统$(N_8, \text{í}_8)$中,若取其子集$B = \{0, 2, 4, 6\}$,易见$\text{í}_8$对于$B$是封闭的,由于$(N_8, \text{í}_8)$中的幺元为 1,而$(B, \text{í}_8)$中没有幺元,所以$(B, \text{í}_8)$不是$(N_8, \text{í}_8)$的子代数。

再如,设$Z^+$是正整数集合,即$Z^+ = \{1, 2, \cdots\}$,$Z^+$上的二元运算$*$定义为取大值运算,即对于任意正整数$a$和$b$,有

$$a * b = \max(a, b)$$

易知,代数系统$(Z^+, *)$中含有幺元 1(因为对于任何正整数$i$,都有$1 * i = i * 1 = \max(1, i) = i$)。

若取$Z^+$的子集为$E^+$,$E^+$是正偶数集合,即$E^+ = \{2, 4, \cdots\}$,容易验证,对于取大值运算,$(E^+, *)$中的幺元为 2(因为对于任何正偶数$k$,都有$2 * k = k * 2 = \max(2, k) = k$)。

由于$(Z^+, *)$和$(E^+, *)$含有不同的幺元,所以$(E^+, *)$不是$(Z^+, *)$的子代数。

### 4.1.4 重点和难点分析

本节的重点是:理解代数系统和子代数的定义;熟练地掌握特殊运算(主要是可结合运算和可交换运算)的定义和判定方法;熟练地掌握特殊元素的定义和判定方法。

难点是:熟练地掌握特殊运算和特殊元素的判定方法。

**例 4.1** 在代数系统$(R, *)$中,运算$*$定义为:

$$a * b = a + b - ab$$

证明$*$是可结合运算,并指出$(R, *)$的幺元和零元。

**证明** 对于任意实数$a, b$和$c$,由于

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b - ab) * c \\ &= a + b - ab + c - (a + b - ab) \cdot c\end{aligned}$$

$$= a + b + c - ab - ac - bc + abc$$

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c - bc) \\ &= a + b + c - bc - a(b + c - bc) \\ &= a + b + c - ab - ac - bc + abc \end{aligned}$$

所以

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

由此证得 * 是可结合运算。

由于 $0 * a = 0 + a - 0 \cdot a = a$,易见 * 是可交换运算,所以 0 是 $(R, *)$ 的幺元。

又由于 $1 * a = 1 + a - 1 \cdot a = 1$,所以 1 是 $(R, *)$ 的零元。

**例 4.2** 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $A$ 上的二元运算 * 定义为取大值运算,即

$$a * b = \max(a, b)$$

证明 * 是可结合运算,并指出 $(A, *)$ 的幺元、零元和各元素的逆元。

证明 由 * 运算的定义可知:

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (\max(a, b)) * c \\ &= \max(\max(a, b), c) \\ &= \max(a, b, c) \end{aligned}$$

同样有:

$$a * (b * c) = \max(a, b, c)$$

所以

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

由此证得 * 是可结合运算。

$A$ 中数值最小的元素 1 是幺元。因为

$$\begin{aligned} 1 * 1 &= \max(1, 1) = 1 \\ 1 * 2 &= \max(1, 2) = 2 \\ 1 * 3 &= \max(1, 3) = 3 \\ 1 * 4 &= \max(1, 4) = 4 \end{aligned}$$

所以 1 是幺元。

$A$ 中数值最大的元素 4 是零元。因为

$$\begin{aligned} 4 * 1 &= \max(4, 1) = 4 \\ 4 * 2 &= \max(4, 2) = 4 \\ 4 * 3 &= \max(4, 3) = 4 \\ 4 * 4 &= \max(4, 4) = 4 \end{aligned}$$

所以 4 是零元。

除幺元 1 有其自身为逆元外,其他元素都没有逆元。

**例 4.3** 写出代数系统 $(N_7, ī_7)$ 的幺元和零元,各元素的逆元。

解 在 $(N_7, ī_7)$ 中,0 是幺元,但没有零元。0 的逆元是 0,1 和 6 互为逆元,2 和 5 互为逆元,3 和 4 互为逆元。

**例 4.4** 写出代数系统 $(N_7, í_7)$ 的幺元和零元,并写出各元素的逆元。

**解** 在$(N_7, \times_7)$中,1 是幺元,0 是零元。1 和 6 都是以自身为逆元,2 和 4 互为逆元,3 和 5 互为逆元,0 没有逆元。

**例 4.5** 在代数系统$(R, *)$中,运算 * 定义为:

$$a * b = ab + 2(a + b + 1)$$

证明运算 * 是可结合运算,并指出其幺元和零元,各元素的逆元。

**证明** 由于

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (ab + 2(a + b + 1)) * c \\ &= (ab + 2(a + b + 1))c + 2(ab + 2(a + b + 1) + c + 1) \\ &= abc + 2ac + 2bc + 2c + 2ab + 4a + 4b + 2c + 6 \\ &= abc + 2(ab + ac + bc) + 4(a + b + c) + 6 \\ a * (b * c) &= a * (bc + 2(b + c + 1)) \\ &= a(bc + 2(b + c + 1)) + 2(a + bc + 2(b + c + 1) + 1) \\ &= abc + 2ab + 2ac + 2a + 2a + 2bc + 4b + 4c + 6 \\ &= abc + 2(ab + ac + bc) + 4(a + b + c) + 6\end{aligned}$$

所以

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

由此证得 * 是可结合运算。

在证明 * 是可结合运算时,还可先把 * 的定义改写如下:

$$\begin{aligned}a * b &= ab + 2(a + b + 1) \\ &= ab + 2a + 2b + 2 \\ &= a(b + 2) + 2(b + 2) - 2 \\ &= (a + 2)(b + 2) - 2\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= ((a + 2)(b + 2) - 2) * c \\ &= (((a + 2)(b + 2) - 2) + 2)(c + 2) - 2 \\ &= (a + 2)(b + 2)(c + 2) - 2 \\ a * (b * c) &= a * ((b + 2)(c + 2) - 2) \\ &= (a + 2)(((b + 2)(c + 2) - 2) + 2) - 2 \\ &= (a + 2)(b + 2)(c + 2) - 2\end{aligned}$$

于是证得

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

显然,上述证明方法不仅简明清晰,而且可以对运算过程和运算结果有较好的把握和预测,避免了盲目性。

下面再求$(R, *)$的幺元。

若设 $e$ 是$(R, *)$的幺元,则对于 $R$ 中任何元素 $a$,都有

$$a * e = a$$

由 * 的定义可知:

$$a * e = (a + 2)(e + 2) - 2$$

所以有

$$(a+2)(e+2)-2=a$$

解此方程可得 $e=-1$,即$(R,*)$的幺元为 $-1$。

现再求$(R,*)$的零元。

若设 θ是$(R,*)$的零元,则对于 $R$中任何元素 $a$,都有

$$a*\theta=\theta$$

于是可得:

$$(a+2)(\theta+2)-2=\theta$$

解此方程可得 $\theta=-2$,即$(R,*)$的零元为 $-2$。

最后求$(R,*)$中各元素的逆元。

设任意实数 $a$的逆元为 $b$,由于 $-1$ 是幺元,所以

$$a*b=-1$$

$$(a+2)(b+2)-2=-1$$

由此可得

$$b=\frac{1}{a+2}-2$$

因此当 $a\neq-2$ 时,$a$的逆元为$\frac{1}{a+2}-2$,$a=-2$ 时,$a$没有逆元。

## 4.1.5 自测练习

1.设集合 $A=\{1,2,3,4\}$,$*$ 是 $A$上的二元运算,其定义为:$a*b=a+ab$,请写出 $*$ 的运算表。

2.写出$(N_5,\bar{i}_5)$的运算表,其中 $N_5=\{0,1,2,3,4\}$,$\bar{i}_5$ 是模 5 加法运算。

3.设 $A=\{1,2,3,4\}$,$*$ 是 $A$上的二元运算,其定义为:$a*b=\min(a,b)$,请写出 $*$ 的运算表。

4.设$(A,*)$是代数系统,$A$是有限集,那么

(1) 当运算 $*$ 对于 $A$是封闭运算时,其运算表有何特征?

(2) 当运算 $*$ 是可交换运算时,其运算表有何特征?

5.设$(Z,*)$是代数系统,$*$ 的定义分别为:

(1) $a*b=|a+b|$

(2) $a*b=a^b$

(3) $a*b=a+b-1$

(4) $a*b=a+2b$

(5) $a*b=2ab$

问:哪些运算对于 $Z$是封闭的?哪些运算是可交换运算?哪些运算是可结合运算?

6.设 $A=\{2,4,6,8,10\}$,$*$ 是 $A$上的二元运算,其定义分别为:

(1) $a*b=\min(a,b)$

(2) $a*b=a$

(3) $a * b = ab + a$

(4) $a * b = gcd(a, b)$,其中 $gcd(a, b)$ 表示 $a$ 和 $b$ 的最大公约数

(5) $a * b = lcm(a, b)$,其中 $lcm(a, b)$ 表示 $a$ 和 $b$ 的最小公倍数

问:哪些运算是等幂运算?

7 .设 $A = \{a, b, c, d\}$, * 的定义见表 4 .5,说明哪些元素是左幺元,哪些元素是右零元。

表 4 .5

| * | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | b | a | c | d |
| b | a | b | c | d |
| c | a | b | c | d |
| d | d | d | c | c |

8 .设 $A = \{a, b, c, d\}$, * 的定义见表 4 .6,说明哪些元素是右幺元,哪些元素是左零元。

表 4 .6

| * | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | a | b | d |
| b | b | b | b | b |
| c | c | d | b | a |
| d | d | a | c | a |

9 .设 $(A, *)$ 是代数系统,其中 $A = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$, $A$ 上的二元运算为按位加运算 ī ,写出 $(A$, ī $)$ 的幺元和各元素的逆元。

10 .写出 $(N_{10}$ , í $_{10})$ 的所有等幂元。

11 .在代数系统 $(Z, *)$ 中, $Z$ 是整数集合,运算 * 定义为 $a * b = a + b + ab$,证明运算 * 对于 $Z$ 是封闭的, * 是可交换运算,是可结合运算,并指出其幺元。

12 .设 $A$ 是集合, $P(A)$ 是其幂集,写出代数系统 $(P(A), \cup)$ 的幺元和零元;代数系统 $(P(A), \cap)$ 的幺元和零元。

## 4 .1 .6 自测练习答案

1 .其运算表如表 4 .7 所示。

表 4 .7

| * | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |

2 .代数系统$( N_5 , \bar{\imath}_5 )$ 的运算表如表 4 .8 所示。

**表 4 .8**

| $\bar{\imath}_5$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

3 .其运算表如表 4 .9 所示。

**表 4 .9**

| * | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |

4 .(1) 当运算表中的元素都属于 $A$ 时, * 对于 $A$ 是封闭的。

(2) 当运算表中的元素关于运算表的对角线对称时, * 为可交换运算。

5 . (1) $a * b = | a + b |$,易见 * 对于 $Z$是封闭的,是可交换运算,但 * 不是可结合运算,因为

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= | a + b | * c \\ &= \big|\, | a + b | + c \,\big| \\ a * (b * c) &= a * | b + c | \\ &= \big|\, a + | b + c | \,\big|\end{aligned}$$

当取 $a = 1, b = - 1, c = - 1$ 时,就有

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= \big|\, | a + b | + c \,\big| = 1 \\ a * (b * c) &= \big|\, a + | b + c | \,\big| = 3\end{aligned}$$

所以

$$(a * b) * c \neq a * (b * c)$$

由此说明 * 不是可结合运算。

(2) $a * b = a^b$,易见 * 对于 $Z$不是封闭的,若取 $a = 2, b = - 1$,则 $a * b = 2^{-1} = 1/2$,它不是整数。

* 也不是可交换运算,若取 $a = 2, b = 3$,则 $a * b = 2^3 = 8, b * a = 3^2 = 9$,所以 $a * b \neq b * a$。

* 也不是可结合运算,因为

$$(a*b)*c = a^b * c = (a^b)^c = a^{bc}$$
$$a*(b*c) = a*b^c = a^{b^c}$$

**所以**

$$(a*b)*c \neq a*(b*c)$$

**由此说明 * 不是可结合运算。**

(3) $a*b = a+b-1$,**易见 * 对于 $Z$ 是封闭的,且是可交换运算,也是可结合运算。**

(4) $a*b = a+2b$, * **对于 $Z$ 是封闭的,但不是可交换运算,因为**

$$a*b = a+2b$$
$$b*a = b+2a$$

**所以** $a*b \neq b*a$。

* **也不是可结合运算,因为**

$$\begin{aligned}(a*b)*c &= (a+2b)*c \\ &= a+2b+2c \\ a*(b*c) &= a*(b+2c) \\ &= a+2(b+2c) \\ &= a+2b+4c\end{aligned}$$

**所以**$(a*b)*c \neq a*(b*c)$。

(5) $a*b = 2ab$,**易见 * 对于 $Z$ 是封闭的,且是可交换运算和可结合运算。**

6 .(1),(2),(4),(5) **都是等幂运算。**

7 .$b$ **和** $c$ **都是左幺元**,$c$ **是右零元。**

8 .$a$ **是右幺元**,$b$ **是左零元。**

9 .( $A$, ī ) **的幺元是** 000, $A$ **中每个元素都是自逆元(以自身为逆元的元素)。**

10 .( $N_{10}$ , í $_{10}$ ) **的等幂元为**:0,1,5,6。

11 .**证明　由于任何整数相加和相乘后仍然是整数,所以运算 * 对于 $Z$ 是封闭的。又由于加法和乘法运算都是可交换运算,所以 * 也是可交换运算。**

**对于 $Z$ 中任意元素** $a,b$ **和** $c$,**由 * 的定义可知**

$$\begin{aligned}(a*b)*c &= (a+b+ab)*c \\ &= a+b+ab+c+(a+b+ab)\cdot c \\ &= a+b+c+ab+ac+bc+abc \\ a*(b*c) &= a*(b+c+bc) \\ &= a+b+c+bc+a(b+c+bc) \\ &= a+b+c+ab+ac+bc+abc\end{aligned}$$

**所以有**

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

**由此证得 * 是可结合运算。**

**因为** $a*0 = a+0+a\cdot 0 = a$,**所以** 0 **是**$(Z,*)$ **的幺元。**

12 .**在代数系统**$(P(A),\cup)$ **中,　是幺元**,$A$ **是零元;在代数系统**$(P(A),\cap)$ **中**,$A$ **是幺元,　是零元。**

# 4.2　半群和独异点

从本节起,将讨论一些常用的代数系统。

## 4.2.1　半群和子半群

**1.半群的定义**

**定义 4.2.1**　设$(A, *)$为代数系统,且满足:

(1) $*$ 对于 $A$ 是封闭的。

(2) $*$ 是可结合运算。

则称$(A, *)$为半群。

由于普通加法和乘法运算对于实数集、有理数集和整数集都是封闭的,且它们都是可结合运算,所以$(R, +)$,$(R, \times)$,$(Q, +)$,$(Q, \times)$,$(Z, +)$,$(Z, \times)$都是半群。

同样,模 $k$ 加法和模 $k$ 乘法运算对于 $N_k$ 是封闭的,且它们都是可结合运算,所以$(N_k$, ī$_k)$和$(N_k$, í$_k)$都是半群。

又如,在代数系统$(A, *)$中,$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $A$ 上的二元运算 $*$ 为取大值运算($a * b = \max(a, b)$)。易知, $*$ 是封闭的且是可结合运算,所以$(A, *)$是半群。

**2.子半群的定义**

**定义 4.2.2**　设$(A, *)$是半群, $B$是 $A$ 的子集,且$(B, *)$也是半群,则称$(B, *)$是$(A, *)$的子半群。

例如,$(N_8$, ī$_8)$是半群,若取 $N_8$ 的子集 $B = \{0, 2, 4, 6\}$,可以验证运算 ī$_8$ 对于 $B$是封闭的,为此可先列出$(B$, ī$_8)$的运算表,见表 4.10。

**表　4.10**

| ī$_8$ | 0 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 0 |
| 4 | 4 | 6 | 0 | 2 |
| 6 | 6 | 0 | 2 | 4 |

由表 4.10 可知,表中元素都属于 $B$,所以 ī$_8$ 对于 $B$ 是封闭的。并且 ī$_8$ 是可结合运算。由此可知,$(B$, ī$_8)$是$(N_8$, ī$_8)$的子半群。

当 $B$是 $A$ 的子集,$(A, *)$是半群时,要验证$(B, *)$是否是$(A, *)$的子半群,只需验证运算 $*$ 对于 $B$是否封闭即可,因为 $*$ 的可结合性是可以"继承"的,所以有以下定理。

**定理 4.2.1**　设$(A, *)$是半群, $B$是 $A$的子集,如果运算对于 $B$是封闭的,则$(B, *)$是$(A, *)$的子半群。

## 4.2.2　独异点和子独异点

**1.独异点的定义**

**定义 4.2.3**　设$(A, *)$是代数系统,且满足:

(1) 运算 $*$ 对于 $A$是封闭的。

(2) 运算 $*$ 是可结合运算。

(3) $(A, *)$ 中含有幺元。

则称$(A, *)$ 为独异点。

易见,独异点就是含幺元的半群。

例如,代数系统$(R, +)$,$(Q, +)$ 和$(Z, +)$ 都是半群,且都含有幺元 0,所以$(R, +)$,$(Q, +)$ 和$(Z, +)$ 都是独异点。

又如,代数系统$(R, \times)$,$(Q, \times)$ 和$(Z, \times)$ 都是半群,且都含有幺元 1,所以$(R, \times)$,$(Q, \times)$ 和$(Z, \times)$ 都是独异点。

在半群$(N_k, \text{ī}_k)$ 中,0 是其幺元,所以$(N_k, \text{ī}_k)$ 是独异点。在半群$(N_k, \text{í}_k)$ 中,1 是其幺元,所以$(N_k, \text{í}_k)$ 是独异点。

设 $A = \{1,2,3,4\}$, $*$ 为取大值运算,易知$(A, *)$ 是半群,且 $A$ 中数值最小的元素 1 是幺元,所以$(A, *)$ 是独异点。

**2 .子独异点的定义**

由于代数系统与其子代数应有相同的代数常数,所以子独异的定义如下:

**定义 4 .2 .4** 设$(A, *)$是独异点,$B$是$A$的子集,如果$(B, *)$是独异点,且其幺元与$(A, *)$ 的幺元相同,则称$(B, *)$ 为$(A, *)$ 的子独异点。

例如,$(R, +)$和$(Z, +)$ 都是独异点,它们都有幺元为0,而 $Z$是 $R$ 的子集,所以$(Z, +)$ 是$(R, +)$ 的子独异点。

又如,$(N_5, \text{í}_5)$ 是独异点,幺元为 1。若取 $N_5$ 的子集为 $B = \{0,1,4\}$,容易验证,$(B, \text{í}_5)$ 是独异点,其幺元也是 1,所以$(B, \text{í}_5)$ 是$(N_5, \text{í}_5)$ 的子独异点。

有时也会有这样的情形:$(A, *)$ 是独异点,$B$ 是 $A$ 的子集,且$(B, *)$ 也是独异点,但$(B, *)$ 的幺元与$(A, *)$ 的幺元是不相同的,这时$(B, *)$ 就不是$(A, *)$ 的子独异点。

例如,$A = \{1,2,3,4,5,6\}$,$A$上的二元运算为取大值运算,即 $a * b = \max(a, b)$。容易验证,$(A, *)$ 为独异点,其幺元为 1($A$中数值最小的元素为幺元)。若取 $A$的两个子集 $B_1$ 和 $B_2$,且 $B_1 = \{1,3,5\}$,$B_2 = \{2,4,6\}$。易见,对于取大值运算 $*$,$(B_1, *)$ 和$(B_2, *)$ 都是独异点,而$(B_1, *)$ 的幺元为 1,它和$(A, *)$ 的幺元相同,所以$(B_1, *)$ 是$(A, *)$ 的子独异点。但$(B_2, *)$ 的幺元为 2,所以$(B_2, *)$ 不是$(A, *)$ 的子独异点。

### 4 .2 .3 重点和难点分析

本节的重点是:了解半群、子半群、独异点、子独异点的定义。

本节的难点是:子独异点的定义。

**例 4 .6** 在代数系统$(Z, *)$ 中,二元运算 $*$ 的定义分别为:

(1) $a * b = ab + 1$

(2) $a * b = a^b$

(3) $a * b = a$

(4) $a * b = a + b + ab$

(5) $a * b = \min(a, b)$

问:哪些运算可使$(Z, *)$ 为半群 ?

解 (1) 易见 $*$ 对于 $Z$ 是封闭的,但不是可结合运算,因为

$$
\begin{aligned}
(a*b)*c &= (ab+1)*c \\
&= (ab+1)c+1 \\
&= abc+c+1 \\
a*(b*c) &= a*(bc+1) \\
&= a(bc+1)+1 \\
&= abc+a+1
\end{aligned}
$$

所以

$$(a*b)*c \neq a*(b*c)$$

由于 $*$ 不满足结合律,所以$(Z,*)$不是半群。

(2) 易见 $*$ 对于 $Z$ 不是封闭的,若取 $a=2, b=-1, a*b=a^b=2^{-1}=1/2\notin Z$。所以$(Z,*)$不是半群。

(3) $*$ 对于 $Z$ 是封闭的,且满足结合律,因为

$$
\begin{aligned}
(a*b)*c &= a*c = a \\
a*(b*c) &= a*b = a
\end{aligned}
$$

所以 $*$ 是可结合运算,$(Z,*)$是半群。

(4) 已证明 $*$ 是封闭的,且是可结合运算(见 4.1.5 一节中的第 11 题),所以$(Z,*)$是半群。

(5) $*$ 对于 $Z$ 的封闭性是显然的,且 $*$ 是可结合运算,因为

$$
\begin{aligned}
(a*b)*c &= (\min(a,b))*c \\
&= \min(\min(a,b),c) \\
&= \min(a,b,c)
\end{aligned}
$$

同样有

$$a*(b*c) = \min(a,b,c)$$

所以 $*$ 是可结合运算,$(Z,*)$是半群。

**例 4.7** 在代数系统$(Z,*)$中,二元运算 $*$ 定义为:$a*b=3(a+b+2)+ab$,证明$(Z,*)$是独异点。

证明 由于整数相加和相乘后仍然是整数,所以运算 $*$ 对于 $Z$ 是封闭的。

再证 $*$ 是可结合运算。

首先把 $*$ 的定义改写为:

$$
\begin{aligned}
a*b &= 3(a+b+2)+ab \\
&= 3a+3b+6+ab \\
&= a(b+3)+3b+6 \\
&= a(b+3)+3(b+3)-3 \\
&= (a+3)(b+3)-3
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
(a*b)*c &= \quad (a+3)(b+3)-3 \quad *c \\
&= \quad ((a+3)(b+3)-3)+3 \quad (c+3)-3 \\
&= (a+3)(b+3)(c+3)-3
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} a*(b*c) &= a*((b+3)(c+3)-3) \\ &= (a+3)(((b+3)(c+3)-3)+3)-3 \\ &= (a+3)(b+3)(c+3)-3 \end{aligned}$$

所以

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

由此证得 * 是可结合运算。

最后求其幺元,设幺元为 $e$,则有

$$a*e = a$$

$$(a+3)(e+3)-3 = a$$

解此方程可得 $e=-2$。

所以$(Z, *)$是含幺元的半群,即独异点。

**例 4.8** 写出$(N_4, \times_4)$的所有子半群,并说明哪些子半群又是$(N_4, \times_4)$的子独异点。

解 由于 $N_4 = \{0,1,2,3\}$,要找$(N_4, \times_4)$的子半群,只需找 $N_4$ 的子集,并使运算 $\times_4$ 对于此子集是封闭的即可,若取 $N_4$ 的子集为:

$$A_1 = \{0\} \qquad A_2 = \{1\}$$

$$A_3 = \{0,1\} \qquad A_4 = \{0,2\}$$

$$A_5 = \{1,3\} \qquad A_6 = \{0,1,2\}$$

$$A_7 = \{0,1,3\} \qquad A_8 = \{0,1,2,3\}$$

则$(A_i, \times_4)$都是$(N_4, \times_4)$的子半群$(i = 1,2,\cdots,8)$。由于$(N_4, \times_4)$的幺元为 1,所以其中的$(A_2, \times_4)$,$(A_3, \times_4)$,$(A_5, \times_4)$,$(A_6, \times_4)$,$(A_7, \times_4)$和$(A_8, \times_4)$都是其子独异点。

### 4.2.4 自测练习

1.在代数系统$(Z, *)$中,二元运算 * 的定义分别为:

(1) $a*b = a+b-1$

(2) $a*b = (a+b)^2$

(3) $a*b = a^2+b^2$

(4) $a*b = b$

(5) $a*b = 3ab$

问:哪些运算 * 可使$(Z, *)$为半群或独异点?

2.$A = \{1,2,3,4,5,6\}$,$A$ 上二元运算 * 的定义分别为:

(1) $a*b = |a+b|$

(2) $a*b = \min(a, b)$

(3) * 为模 7 乘法

(4) * 为模 7 加法

(5) $a*b = a^2+b$

问:哪些运算 * 可使$(A, *)$为独异点?

表 4.11

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | a | a |
| c | c | a | a |

3.设$(A, *)$是代数系统,$A = \{a, b, c\}$,* 的定义如表 4.11

所示。问$(A, *)$是否是独异点?

4 .在代数系统$(R, *)$中,二元运算 * 定义为:$a * b = (a-3)(b-3)+3$,证明$(R, *)$是独异点。

5 .设 $A$ 是所有形状如 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ 的 2 阶方阵为元素的集合,其中 $a$ 和 $b$ 为整数,即

$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in Z \right\}$,对于矩阵的乘法运算 ×,证明$(A, \times)$是独异点。

6 .试写出$(N_5, +_5)$的所有子独异点。

7 .设 $A = \{1,2,3,4\}$, * 为取大值运算,写出$(A, *)$的所有子独异点。

8 .设$(A, *)$是半群,其中 $A = \{a, b\}$,且有 $a^2 = b$,证明

(1) * 是可交换运算。

(2) $b^2 = b$

9 .证明在一个独异点中,左逆元的集合是子独异点。

10 .设$(A, *)$是半群,$x$ 是 $A$ 中的一个确定的元素,在 $A$ 上定义二元运算 ⊛ 为:对于 $A$ 中任意元素 $a$ 和 $b$,$a ⊛ b = a * x * b$,证明$(A, ⊛)$是半群。

### 4 .2 .5　自测练习答案

1 .(1) 易见,$a * b = a + b - 1$,运算 * 对于 $Z$ 是封闭的,且满足结合律,幺元为 1。所以$(Z, *)$是独异点。

(2) 运算 $a * b = (a+b)^2$ 对于 $Z$ 是封闭的,但不是可结合运算。因为

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a+b)^2 * c \\ &= ((a+b)^2 + c)^2 \\ a * (b * c) &= a * (b+c)^2 \\ &= (a + (b+c)^2)^2\end{aligned}$$

所以

$$(a * b) * c \neq a * (b * c)$$

由此可知, * 不是可结合运算,$(Z, *)$不是半群。

(3) 同样运算 $a * b = a^2 + b^2$ 也不是可结合运算,因为

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a^2 + b^2) * c \\ &= (a^2 + b^2)^2 + c^2 \\ a * (b * c) &= a * (b^2 + c^2) \\ &= a^2 + (b^2 + c^2)^2\end{aligned}$$

所以

$$(a * b) * c \neq a * (b * c)$$

由此可知, * 不是可结合运算,$(Z, *)$不是半群。

(4) 运算 $a * b = b$,易见它对于 $Z$ 是封闭的,且满足结合律。因为

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= c \\ a * (b * c) &= c\end{aligned}$$

所以

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

由此可知,$(Z, *)$ 是半群,但没有幺元,所以$(Z, *)$ 不是独异点。

(5) 运算 $a * b = 3ab$,易见它对于 $Z$ 是封闭的,且是可结合运算,但没有幺元,所以$(Z, *)$ 是半群。

2 .(1) 运算 $a * b = |a + b|$ 对于 $A$ 是不封闭的,如 $5 \in A, 6 \in A, |5 + 6| = 11 \notin A$。所以$(A, *)$ 不是半群,也不是独异点。

(2) 运算为取小值运算,所以 $*$ 对 $A$ 是封闭的,且是可结合运算,幺元为 6。由此可知,$(A, *)$ 是独异点。

(3) $*$ 为模 7 乘法,为了验证 $*$ 对于 $A$ 是否封闭,可先列出运算表,见表 4 .12。

表 4 .12

| * | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 4 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 5 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

由表 4 .12 可知,模 7 乘法对 $A$ 是封闭的。已证明模 7 乘法是可结合运算,1 是幺元,所以$(A, *)$ 是独异点。

(4) $*$ 为模 7 加法时,$*$ 对于 $A$ 不是封闭的,如 $3 * 4 = 0$,但 $0 \notin A$,所以$(A, *)$ 不是半群,也不是独异点。

(5) 运算 $a * b = a^2 + b$,易见 $2 * 3 = 7 \notin A$,所以 $*$ 不是封闭运算,$(A, *)$ 不是半群,也不是独异点。

3 .由表 4 .11 可知,$*$ 不是可结合运算,如

$$(b * b) * c = a * c = c$$
$$b * (b * c) = b * a = b$$

所以虽有幺元 $a$,但$(A, *)$ 不是独异点。

4 .$*$ 对于 $R$ 的封闭性是显然。现证 $*$ 是可结合运算,由于

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= ((a - 3)(b - 3) + 3) * c \\ &= (((a - 3)(b - 3) + 3) - 3) + 3 \\ &= (a - 3)(b - 3)(c - 3) + 3 \\ a * (b * c) &= a * ((b - 3)(c - 3) + 3) \\ &= (a - 3)(((b - 3)(c - 3) + 3) - 3) + 3 \\ &= (a - 3)(b - 3)(c - 3) + 3\end{aligned}$$

所以

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

由此可知,$*$ 是可结合运算。又由于

$$a * 4 = (a - 3)(4 - 3) + 3 = a$$

可知 4 是幺元,所以$(R, *)$ 是独异点。

5 .由于矩阵的乘法运算满足结合律,且幺阵 $\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 是幺元,所以只需证明矩阵的乘法运算对于 $A$ 是封闭的即可。由于

$$\begin{pmatrix}a & 0 \\ b & a\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}c & 0 \\ d & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ac & 0 \\ bc + ad & ac\end{pmatrix}$$

其中 $ac$ 和 $bc + ad$ 都是整数,所以矩阵乘法运算对于 $A$ 是封闭的,$(A, \times)$ 是独异点。

6 .$N_5 = \{0,1,2,3,4\}$,$(N_5, \text{í}_5)$ 的幺元为 1。所以只需取 $N_5$ 的子集,使其含有幺元 1,且使运算为封闭的即可。取 $A_1 = \{1\}$,$A_2 = \{0,1\}$,$A_3 = \{1,4\}$,$A_4 = \{0,1,4\}$,$A_5 = \{1,2,3,4\}$,$A_6 = \{0,1,2,3,4\}$。则$(A_i, \text{í}_5)$ 都是子独异点$(i = 1,2,3,4,5,6)$。

7 .由于$(A, *)$ 的幺元为 1,且 $*$ 为取大值运算,所以 $A$ 中含有 1 的子集都能形成子独异点。取子集 $A_1 = \{1\}$,$A_2 = \{1,2\}$,$A_3 = \{1,3\}$,$A_4 = \{1,4\}$,$A_5 = \{1,2,3\}$,$A_6 = \{1,2,4\}$,$A_7 = \{1,3,4\}$,$A_8 = \{1,2,3,4\}$,则$(A_i, *)$ 都是$(A, *)$ 的子独异点,其中 $i = 1,2,3,4,5,6,7,8$。

8 .(1) 由于 $A$ 中仅有两个元素 $a$ 和 $b$,且 $b = a^2$,所以

$$a * b = a * a^2 = a^3 = a^{2+1} = a^2 * a = b * a$$

由此证得 $*$ 是可交换运算。

(2) 首先考察 $a * b = ?$,由运算 $*$ 的封闭性可知,$a * b = a$ 或 $a * b = b$。

若设 $a * b = a$,在等式两边各以 $a$ 运算之,可得

$$a * (a * b) = a * a$$
$$(a * a) * b = a * a$$

由于 $a^2 = b$,所以有

$$b * b = b$$

由此证得 $b^2 = b$。

若设 $a * b = b$,仍在等式两边各以 $a$ 运算之,可得

$$a * (a * b) = a * b$$
$$(a * a) * b = a * b$$
$$b * b = a * b$$

由于假设 $a * b = b$,所以证得 $b^2 = b$。

9 .设$(A, *)$ 是独异点,$a$ 是 $A$ 中具有左逆元的元素,记 $a$ 的左逆元为 $a_l^{-1}$,并将所有左逆元构成的集合记为 $B$。

要证$(B, *)$ 是$(A, *)$ 的子独异点,需证 $*$ 对于 $B$ 是封闭的,且$(A, *)$ 的幺元 $e$ 也是$(B, *)$ 的幺元。

首先证明 $*$ 对于 $B$ 是封闭的。

在 $B$ 中任取两个元素 $a_l^{-1}$ 和 $b_l^{-1}$,由于 $B$ 是所有左逆元构成的集合,所以要证 $a_l^{-1} * b_l^{-1}$ 属于 $B$,即需证明 $a_l^{-1} * b_l^{-1}$ 是 $A$ 中某个元素的左逆元即可。

$a_l^{-1}$ 是 $a$ 的左逆元,$b_l^{-1}$ 是 $b$ 的左逆元,$a$ 和 $b$ 都是 $A$ 中元素,$*$ 对于 $A$ 是封闭的,所以 $b * a$ 也是 $A$ 中元素,由于

$$\begin{aligned}(a_l^{-1} * b_l^{-1}) * (b * a) &= a_l^{-1} * (b_l^{-1} * b) * a \\ &= a_l^{-1} * e * a \\ &= a_l^{-1} * a \\ &= e\end{aligned}$$

由此可见,$a_l^{-1} * b_l^{-1}$ 是 $A$ 中元素 $b * a$ 的左逆元,所以 $a_l^{-1} * b_l^{-1}$ 属于 $B$,$*$ 对于 $B$ 的封闭性得证。

再证$(B, *)$中含有幺元 $e$。

由于 $e$的左逆元也是 $e$,所以 $e$也是 $B$ 中的元素。

综上所述,$(B, *)$是$(A, *)$的子独异点。

10 .由 $\circledast$ 的定义可知:

$$a \circledast b = a * x * b$$

而 $a, x$ 和 $b$ 都是 $A$ 中元素,由于 $*$ 对于 $A$ 是封闭的,所以 $a * x * b$ 属于 $A$,即 $a \circledast b$ 属于 $A$,由此证得 $\circledast$ 对于 $A$ 是封闭的。又由于

$$\begin{aligned}(a \circledast b) \circledast c &= (a * x * b) \circledast c \\ &= (a * x * b) * x * c \\ &= a * x * b * x * c \\ a \circledast (b \circledast c) &= a \circledast (b * x * c) \\ &= a * x * (b * x * c) \\ &= a * x * b * x * c\end{aligned}$$

所以有

$$(a \circledast b) \circledast c = a \circledast (b \circledast c)$$

由此证得 $\circledast$ 是可结合运算,$(A, *)$是半群。

# 4.3 群

群是用途广泛且得到充分研究的、重要的代数系统。

## 4.3.1 群的定义和性质

**1 .群的定义**

**定义 4.3.1** 设$(G, *)$是代数系统,且满足:

(1) $*$ 对于 $G$ 是封闭的;

(2) $*$ 是可结合运算;

(3) $G$ 中含有幺元;

(4) $G$ 中每个元素都有逆元。

则称$(G, *)$为群。

显然,群是每个元素都有逆元的独异点。

例如,已经验证$(R, +)$是独异点,其幺元为 0,$R$ 中任意元素 $a$ 都有逆元 $-a$,所以$(R, +)$是群。同样,在$(N_k$, ī$_k)$中,0 是其幺元,0 的逆元是 0,$N_k$ 中其他元素 $a$ 的逆元是 $k - a$,所以$(N_k$, ī$_k)$是群。

但$(R, \times)$不是群,其幺元为 1,对于乘法运算,0 没有逆元,所以$(R, \times)$不是群。如果考虑不含 0 的实数集:$R - \{0\}$,则$(R - \{0\}, \times)$是群,$R - \{0\}$中任意元素 $a$的逆元为 $1/a$。

$(N_k$, í$_k)$也不是群,1 是其幺元,对于模 $k$乘法 í$_k$,0 没有逆元,所以$(N_k$, í$_k)$不是群。如果在 $N_k$ 中删去元素 0 后,$(N_k - \{0\}$, í$_k)$也不一定是群。

例如,在$(N_6, \text{í}_6)$中,$N_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$,其幺元为1,0没有逆元。在$N_6$中删去0后,所得的集合$N_6 - \{0\} = \{1,2,3,4,5\}$,那么$(N_6 - \{0\}, \text{í}_6)$仍然不是群,因为在$(N_6 - \{0\}, \text{í}_6)$中,2,3,4都没有逆元;并且$2 \text{ í}_6 3 = 0$ 隐 $N_6 - \{0\}$,即$\text{í}_6$对于$N_6 - \{0\}$是不封闭的,所以$(N_6 - \{0\}, \text{í}_6)$不是群。

但可以证明,当$k$为素数时,$(N_k - \{0\}, \text{í}_k)$是群。例如,7是素数,$N_7 - \{0\} = \{1,2,3,4,5,6\}$,为了验证$\text{í}_7$对于$N_7 - \{0\}$的封闭性,先列出$(N_7 - \{0\}, \text{í}_7)$的运算表,如表4.13所示。

**表 4.13**

| $\text{í}_7$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 4 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 5 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

由表4.13可知,$\text{í}_7$对于$(N_7, - \{0\})$是封闭的;又由于$2 \text{ í}_7 4 = 1$,$3 \text{ í}_7 5 = 1$,$6 \text{ í}_7 6 = 1$,所以2和4互为逆元,3和5互为逆元,1和6都是自逆元(以自身为逆元的元素)。由此可知,$(N_7 - \{0\}, \text{í}_7)$是群。

**定义4.3.2** 在群$(G, *)$中,如果$G$是无限集,则称$(G, *)$是无限群;如果$G$是有限集,则称$(G, *)$为有限群,$G$中元素的个数称为该有限群的阶数。

例如,$(R, +)$和$(Z, +)$都是无限群。$(N_6, \text{ī}_6)$是有限群,且是6阶群。

**定义4.3.3** 设$(G, *)$是群,如果$*$是可交换运算,则称$(G, *)$为可交换群,或称为阿贝尔群。

例如,群$(R, +)$,$(R - \{0\}, \times)$,$(N_k, \text{ī}_k)$,$(N_p - \{0\}, \text{í}_p)$都是可交换群(或阿贝尔群),其中$p$是素数。

**2.群的基本性质**

**性质1** 群中有惟一的等幂元,即幺元。

**证明** 设$(G, *)$是群,$a \in G$,且$a$是等幂元,即$a * a = a$。由于群$G$中每个元素都有逆元,设$a$的逆元为$a^{-1}$,则

$$a^{-1} * a * a = a^{-1} * a$$

$$e * a = e$$

$$a = e$$

由此可知,群中的等幂元必是幺元,由于幺元是惟一的,所以群中有惟一的等幂元:幺元。

**性质2** 设$(G, *)$是群,对于$G$中元素$a$,$b$和$c$,如果$a * b = a * c$或$b * a = c * a$成立,则必有$b = c$。

**证明** 由于$a * b = a * c$,以$a^{-1}$从左边运算于等式两边,可得

$$a^{-1} * a * b = a^{-1} * a * c$$

$$e * b = e * b$$

$$b = c$$

当$b * a = c * a$时,同样可证得$b = c$。

此性质表明群中运算$*$满足消去律。

**性质3** 设$(G, *)$是群,对于$G$中任意元素$a$和$b$,都有$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$。

**证明** 由于

$$\begin{aligned}(a*b)*(b^{-1}*a^{-1}) &= a*(b*b^{-1})*a^{-1}\\ &= a*e*a^{-1}\\ &= a*a^{-1}\\ &= e\end{aligned}$$

所以$(b^{-1}*a^{-1})$是$(a*b)$的逆元,即$(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$。

**性质 4** 设$(G,*)$是有限群,则其运算表中每一行(或每一列)的元素都是不相同的。

**证明** 设 $G=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,运算表中第 $i$ 行元素分别为:

$$a_i*a_1,a_i*a_2,\cdots,a_i*a_n$$

如果其中有两个元素相同,不妨设 $a_i*a_p$ 和 $a_i*a_q$ 相同$(p\neq q)$,即

$$\begin{aligned}a_i*a_p &= a_i*a_q\\ a_i^{-1}*a_i*a_p &= a_i^{-1}*a_i*a_q\\ e*a_p &= e*a_q\\ a_p &= a_q\end{aligned}$$

表 4.14

| * | e | a | b |
|---|---|---|---|
| e | e | a | b |
| a | a | b | e |
| b | b | e | a |

这和 $a_p$ 和 $a_q$ 是不同元素的假设矛盾,所以运算表各行的元素是不相同的。同样可证运算表中各列的元素也不相同。

例如,$(G,*)$是 3 阶群,设 $G=\{e,a,b\}$,其中 $e$ 是幺元。由性质 4 可知,其运算表必如表 4.14 所示。

### 4.3.2 子群

**1.子群的定义**

**定义 4.3.4** 设$(G,*)$是群,$A$是$G$的子集,且$(A,*)$是群,则称$(A,*)$是$(G,*)$的子群。

在子独异点的定义中,要求子独异点必须与独异点有相同的幺元,而在子群的定义中却没有提出这样的要求,因为可以证明,对于群 $G$ 的子集 $A$,如果$(A,*)$是群,那么$(A,*)$必与$(G,*)$有相同的幺元(作为练习,请读者自己证明)。

显然,由于$\{e\}$和 $G$ 也都是 $G$ 的子集,所以$(\{e\},*)$和$(G,*)$也都是$(G,*)$的子群,称这两个子群为平凡子群。

由子群的定义可知,如果 $A$ 是群 $G$ 的子集,在验证$(A,*)$是其子群时,即需验证$(A,*)$是群。除了运算 $*$ 的可结合性是"继承"的外,还应当验证:

(1) $*$ 对于 $A$ 是封闭的。

(2) 群 $G$ 中幺元 $e$ 也属于 $A$。

(3) $A$ 中任意元素 $a$,其逆元 $a^{-1}$ 也属于 $A$。

下面介绍两条定理,它们使子群的验证过程得到简化。

**定理 4.3.1** 设$(G,*)$是群,$A$是 $G$ 的子集,如果对于 $A$ 中任意元素 $a$ 和 $b$,都有

$$a*b^{-1}\in A$$

则$(A,*)$是$(G,*)$的子群。

证明从略。

当 $A$ 是群 $G$ 的子集且 $A$ 是有限集合时,则有以下条件更简单的定理。

**定理 4 .3 .2** 设 $(G, *)$ 是群, $A$ 是 $G$ 的有限子集,如果运算 $*$ 对于 $A$ 是封闭的,则 $(A, *)$ 是 $(G, *)$ 的子群。

证明从略。

例如,在群 $(N_4,$ ī$_4)$ 中,取 $N_4$ 的子集 $A = \{0, 2\}$。容易验证,运算 ī$_4$ 对于 $A$ 是封闭的,所以 $(A,$ ī$_4)$ 是 $(N_4,$ ī$_4)$ 的子群。

又如,11 是素数,所以 $(N_{11} - \{0\},$ í$_{11})$ 是群,其中 $N_{11} - \{0\} = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$。在 $N_{11} - \{0\}$ 中,取其子集 $A = \{1, 3, 4, 5, 9\}$,可以验证运算 í$_{11}$ 对于 $A$ 是封闭的,为此可先列出 $(A,$ í$_{11})$ 的运算表,见表4 .15。

表 4 .15

| í$_{11}$ | 1 | 3 | 4 | 5 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 4 | 5 | 9 |
| 3 | 3 | 9 | 1 | 4 | 5 |
| 4 | 4 | 1 | 5 | 9 | 3 |
| 5 | 5 | 4 | 9 | 3 | 1 |
| 9 | 9 | 5 | 3 | 1 | 4 |

由于运算表内的元素都属于 $A$,所以 í$_{11}$ 对于 $A$ 是封闭的, $(A, *)$ 是 $(N_{11} - \{0\},$ í$_{11})$ 的子群。

上例说明,虽然定理 4 3 2 给出了验证有限子群的简便方法,但如何求出子群仍然是个没有解决的问题,因为在群 $(G, *)$ 中,找出一个子集,使其对于 $*$ 是封闭的,却不是简单的。为了深入讨论求子群的方法,先介绍著名的拉格朗日定理,它揭示了有限群与其子群的内在联系,是有限群研究的理论基础。

**定理4 3 3(拉格朗日定理)** 设 $(G, *)$ 是 $n$ 阶有限群,如果 $(G, *)$ 具有 $k$ 阶子群,则 $k$ 必能整除 $n$。

证明从略。

拉格朗日定理说明了子群的元素个数必然是群的元素个数的乘法因子,这就使我们在求子群时,避免了很大的盲目性。

例如,一个 10 阶群,其非平凡子群的阶数只可能是 2 或 5,不可能有其他阶数的非平凡子群,从而可以集中精力去讨论其 2 阶和 5 阶子群。

但请注意,拉格朗日定理之逆不成立,也就是说,当 $k$ 能整除 $n$ 时, $n$ 阶群不一定有 $k$ 阶子群,如可以举例说明有这样的 12 阶群但他没有 6 阶子群。

下面介绍一个重要的概念:群中元素的阶数。它在求子群时有重要作用。

**2 .群中元素的阶数**

**定义 4 .3 .5** 设 $(G, *)$ 是群, $a \in G$,如果存在着正整数 $k$,使得

$$a^k = e$$

则称 $a$ 为有限阶元素,满足上述等式的最小正整数 $k$ 称为元素 $a$ 的阶数。如果不存在这样的正整数 $k$,使得 $a^k = e$,则称 $a$ 为无限阶元素。

显然,群中幺元 $e$ 的阶数为 1。

例如,在群 $(N_6,$ ī$_6)$ 中, 0 是幺元,其阶数为 1。现考察元素 2 的阶数。易知

$2^3 = 2$ ī$_6$ $2$ ī$_6$ $2 = 0$

$2^6 = 2^3$ ī$_6$ $2^3 = 0$ ī$_6$ $0 = 0$

$2^9 = 2^3$ ī$_6$ $2^3$ ī$_6$ $2^3 = 0$ ī$_6$ $0$ ī$_6$ $0 = 0$

……

由此可见，存在着正整数 $k=3,6,9,\cdots$，使得 $2^k=0$，其中最小正整数为 3，所以元素 2 的阶数为 3。

再考察群 $(N_6,\text{ī}_6)$ 中元素 3 的阶数，由于

$$
\begin{aligned}
3^2 &= 3\,\text{ī}_6\,3 = 0\\
3^4 &= 3^2\,\text{ī}_6\,3^2 = 0\,\text{ī}_6\,0 = 0\\
3^6 &= 3^2\,\text{ī}_6\,3^2\,\text{ī}_6\,3^2 = 0\,\text{ī}_6\,0\,\text{ī}_6\,0 = 0\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

所以元素 3 的阶数为 2。

读者可以自己验证，在群 $(N_6,\text{ī}_6)$ 中，元素 1 的阶数为 6，元素 4 的阶数为 3，元素 5 的阶数为 6。

又如，在群 $(N_{11}-\{0\},\text{í}_{11})$ 中，幺元是 1，现考察元素 3 的阶数。由于

$$
\begin{aligned}
3^1 &= 3\\
3^2 &= 3\,\text{í}_{11}\,3 = 9\\
3^3 &= 3\,\text{í}_{11}\,3\,\text{í}_{11}\,3 = 5\\
3^4 &= 3\,\text{í}_{11}\,3\,\text{í}_{11}\,3\,\text{í}_{11}\,3 = 4\\
3^5 &= 3\,\text{í}_{11}\,3\,\text{í}_{11}\,3\,\text{í}_{11}\,3\,\text{í}_{11}\,3 = 1
\end{aligned}
$$

由此可知，元素 3 的阶数为 5。

读者可以自己验证，在群 $(N_{11}-\{0\},\text{í}_{11})$ 中，其他元素的阶数分别为：元素 2 的阶数为 10，元素 4 的阶数为 5，元素 5 的阶数为 5，元素 6 的阶数为 10，元素 7 的阶数为 10，元素 8 的阶数为 10，元素 9 的阶数为 5，元素 10 的阶数为 2。

易知，在群 $(R,+)$ 中，除幺元 0 是 1 阶元素外，其他元素都是无限阶元素。

**定理 4.3.4** 设 $(G,*)$ 是 $n$ 阶群，$G$ 中任意元素 $a$ 都是有限阶元素，且其阶数 $k\leq n$。

证明从略。

下面将介绍利用群中元素的阶数来构造子群的方法。

**定理 4.3.5** 设 $(G,*)$ 是群，$a$ 是 $G$ 中元素，且 $a$ 的阶数为 $k$，令 $A=\{a,a^2,a^3,\cdots,a^k\}$，则 $(A,*)$ 为 $(G,*)$ 的 $k$ 阶子群。

证明 首先证明 $(A,*)$ 是 $(G,*)$ 的子群，为此只需证明 $*$ 对于 $A$ 是封闭的即可。

在 $A$ 中任取两个元素 $a^i$ 和 $a^j$，这两个元素经 $*$ 运算后为：

$$a^i * a^j = a^{i+j}$$

当 $i+j\leq k$ 时，则 $a^i*a^j\in A$；当 $i+j>k$ 时，由于 $a$ 是 $k$ 阶元素，所以 $a^k=e$，于是有

$$
\begin{aligned}
a^i * a^j &= a^{i+j}\\
&= a^{i+j-k+k}\\
&= a^{i+j-k} * a^k\\
&= a^{i+j-k} * e\\
&= a^{i+j-k}
\end{aligned}
$$

易见，$1\leq i+j-k<k$，所以 $a^{i+j-k}\in A$。由此证得 $*$ 对于 $A$ 是封闭的，$(A,*)$ 是 $(G,*)$ 的子群。

现再证 $(A,*)$ 是 $k$ 阶子群，即需证明 $A$ 中 $k$ 个元素是各不相同的。

用反证法,设 $A$ 中有两个元素是相同的,不妨设

$$a^i = a^{i+p} \qquad (1 \leq p < k)$$
$$a^i = a^i * a^p$$

由于$(A, *)$是群,每个元素都有逆元,以 $a^i$ 的逆元从左运算于上述等式的两边,可得

$$(a^i)^{-1} * a^i = (a^i)^{-1} * a^i * a^p$$
$$e = e * a^p$$
$$e = a^p$$

由此可见,$p < k$,但 $a^p = e$,这和 $a$ 是 $k$ 阶元素的假设矛盾,所以$(A, *)$是 $k$ 阶子群。

例如,在群$(N_{12}, \text{ī}_{12})$中,容易验证 2 是 6 阶元素,令 $A_6 = \{2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 0\}$,所以$(A_6, \text{ī}_{12})$是$(N_{12}, \text{ī}_{12})$的 6 阶子群。还可以验证 3 是 4 阶元素,4 是 3 阶元素,6 是 2 阶元素,于是令

$$A_4 = \{3, 3^2, 3^3, 3^4\}$$
$$= \{3, 6, 9, 0\}$$
$$A_3 = \{4, 4^2, 4^3\}$$
$$= \{4, 8, 0\}$$
$$A_2 = \{6, 6^2\}$$
$$= \{6, 0\}$$

则$(A_4, \text{ī}_{12})$,$(A_3, \text{ī}_{12})$,$(A_2, \text{ī}_{12})$分别是$(N_{12}, \text{ī}_{12})$的 4 阶,3 阶和 2 阶子群。

又如,在群$(N_{11} - \{0\}, \text{í}_{11})$中,曾验证元素 3 的阶数为 5,令 $A = \{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5\} = \{3, 9, 5, 4, 1\}$,则$(A, \text{í}_{11})$是$(N_{11} - \{0\}, \text{í}_{11})$的 5 阶子群。

利用 $k$ 阶元素去构造 $k$ 阶子群是寻求子群的一种途径,但并非是惟一途径,对于更复杂情况的讨论已超出本书的范围,不再作进一步的介绍。

**定理 4.3.6** 设$(G, *)$是 $n$ 阶群,$a$ 是 $G$ 中元素,且 $a$ 是 $k$ 阶元素,则 $k$ 必能整除 $n$。

**证明** 由于 $a$ 是 $k$ 阶元素,可构造一个群 $G$ 的 $k$ 阶子群。由拉格朗日定理可知,$k$ 必能整除 $n$。

上述定理说明了群的阶数与群中元素的阶数之间的紧密联系。

### 4.3.3 循环群

循环群是一种常用的且简单的群。

**1.循环群的定义**

**定义 4.3.6** 设$(G, *)$是群,如果 $G$ 中存在元素 $a$,使得对于 $G$ 中任意元素 $g$,都能使 $g$ 表示为 $a$ 的幂,即

$$g = a^k$$

则称 $a$ 为$(G, *)$的生成元,具有生成元的群称为循环群。

例如,在群$(N_6, \text{ī}_6)$中,由于

$$1^1 = 1$$
$$1^2 = 1 \text{ ī}_6 1 = 2$$
$$1^3 = 1 \text{ ī}_6 1 \text{ ī}_6 1 = 3$$

$$1^4 = 1\,\text{ī}_6\,1\,\text{ī}_6\,1\,\text{ī}_6\,1 = 4$$
$$1^5 = 1\,\text{ī}_6\,1\,\text{ī}_6\,1\,\text{ī}_6\,1\,\text{ī}_6\,1 = 5$$
$$1^6 = 1\,\text{ī}_6\,1\,\text{ī}_6\,1\,\text{ī}_6\,1\,\text{ī}_6\,1\,\text{ī}_6\,1 = 0$$

所以元素 1 是群$(N_6, \text{ī}_6)$的生成元,$(N_6, \text{ī}_6)$是循环群。

又由于 $5^1 = 5, 5^2 = 4, 5^3 = 3, 5^4 = 2, 5^5 = 1, 5^6 = 0$,所以元素 5 也是$(N_6, \text{ī}_6)$的生成元。由此可见,循环群中的生成元不是惟一的。

一般地讲,群$(N_k, \text{ī}_k)$都有生成元 1,所以$(N_k, \text{ī}_k)$都是循环群。

又如,群$(N_7 - \{0\}, \text{í}_7)$也是循环群,因为

$$3^1 = 3$$
$$3^2 = 3\,\text{í}_7\,3 = 2$$
$$3^3 = 3\,\text{í}_7\,3\,\text{í}_7\,3 = 6$$
$$3^4 = 3\,\text{í}_7\,3\,\text{í}_7\,3\,\text{í}_7\,3 = 4$$
$$3^5 = 3\,\text{í}_7\,3\,\text{í}_7\,3\,\text{í}_7\,3\,\text{í}_7\,3 = 5$$
$$3^6 = 3\,\text{í}_7\,3\,\text{í}_7\,3\,\text{í}_7\,3\,\text{í}_7\,3\,\text{í}_7\,3 = 1$$

所以元素 3 是生成元,$(N_7 - \{0\}, \text{í}_7)$是循环群。

但并非所有群都有生成元。

例如,$G = \{00, 01, 10, 11\}$,$G$ 上的二元运算为按位加 ī,则群 $G$ 中没有生成元,$(G, \text{ī})$不是循环群。

因为在群$(G, \text{ī})$中,每个元素都是自逆元(以自身为逆元的元素,这样的群也称为克来因群),所以除幺元外,每个非幺元都是 2 阶元素,每个非幺元的幂只能“生成”幺元和自身,如对于非幺元 01,由于

$$01^1 = 01$$
$$01^2 = 01\,\text{ī}\,01 = 00$$
$$01^3 = 01\,\text{ī}\,01\,\text{ī}\,01 = 01$$
$$01^4 = 01\,\text{ī}\,01\,\text{ī}\,01\,\text{ī}\,01 = 00$$
$$\cdots\cdots$$

由此可见,$(G, \text{ī})$中不存在生成元,$(G, \text{ī})$不是循环群。

群$(Z, +)$是无限循环群,其中 1 是生成元,$n = 1^n$, $-n = 1^{-n}$。

**2 .循环群的性质**

**性质 1** 设$(G, *)$是 $n$ 阶循环群,$a$ 是生成元,则生成元 $a$ 的阶数也是 $n$。

**证明** 用反证法。

设生成元 $a$ 的阶数为 $k$, $k \neq n$,由定理 4 .3 .4 可知,$k < n$。

由于 $a^k = e$,所以 $a^{k+1} = a^k * a = e * a = a$, $a^{k+2} = a^k * a^2 = e * a^2 = a^2, \cdots$,由此可见,$a$ 的幂仅能表示 $G$ 中 $k$ 个元素:$a, a^2, \cdots, a^k$,而不能表示 $G$ 中所有元素($G$ 中有 $n$ 个元素,$k < n$),这和 $a$ 是 $G$ 的生成元的假设矛盾。

**性质 2** 设$(G, *)$是 $n$ 阶群,$a \in G$,且 $a$ 是 $n$ 阶元素,则 $a$ 是群$(G, *)$的生成元,$(G, *)$是循环群。

**证明** 首先考察以下 $n$ 个元素:

$$a, a^2, \cdots, a^n$$

**由于** $a$ **是** $n$ **阶元素,所以上述** $n$ **个元素是各不相同的,否则若有**

$$a^i = a^{i+k} \qquad (1 \leq k < n)$$

$$a^i = a^i * a^k$$

$$(a^i)^{-1} * a^i = (a^i)^{-1} * a^i * a^k$$

$$e = a^k$$

**这和** $a$ **是** $n$ **阶元素的假设矛盾**$(k < n)$。**因此**, $a, a^2, \cdots, a^n$ **是各不相同的。**

**由于**$(G, *)$ **是** $n$ **阶群,即** $G$ **中仅有** $n$ **个元素,所以** $G$ **中** $n$ **个元素可分别表示为** $a, a^2, \cdots, a^n$, **也即** $a$ **是**$(G, *)$ **的生成元**, $(G, *)$ **是循环群。**

**由性质** 2 **即得**:

**性质 3**　**设**$(G, *)$ **是** $n$ **阶循环群**, $a$ **是生成元,则** $G = \{a, a^2, \cdots, a^n\}$。

**通常把循环群记作**$(a)$,**其中** $a$ **是生成元。**

**性质 4**　**循环群必是可交换群(阿贝尔群)。**

**证明**　**设**$(G, *)$ **是循环群**, $a$ **是生成元,对于** $G$ **中任意元素** $g$ **和** $g$,**能表示成**

$$g = a^i$$

$$g = a^j$$

**于是有**

$$g * g = a^i * a^j = a^{i+j} = a^{j+i} = a^j * a^i = g * g$$

**所以**$(G, *)$ **是可交换群。**

**性质 5**　**设**$(G, *)$ **是** $n$ **阶循环群,正整数** $k$ **能整除** $n$,**则**$(G, *)$ **必有** $k$ **阶子群。**

**证明**　**设** $a$ **是** $n$ **阶循环群**$(G, *)$ **的生成元,于是有**

$$G = \{a, a^2, \cdots, a^n\}$$

**因为** $k$ **能整除** $n$,**所以可设** $n = pk$,**令**

$$A = \{a^p, a^{2p}, \cdots, a^{kp}\}$$

**由于** $a^{kp} = a^n = e$,**所以运算** $*$ **对于** $A$ **是封闭的。由此可知**,$(A, *)$ **是**$(G, *)$ **的** $k$ **阶子群。**

**例如**,$(N_{12}, \bar{\imath}_{12})$ **是** 12 **阶循环群**,1 **是其生成元。易知**,2,3,4,6 **都能整除** 12。

**若取** $12 = 2 \times 6$,**可得**

$$A_6 = \{1^2, 1^{2\times2}, 1^{2\times3}, 1^{2\times4}, 1^{2\times5}, 1^{2\times6}\}$$

$$= \{2, 4, 6, 8, 10, 0\}$$

**若取** $12 = 3 \times 4$,**可得**

$$A_4 = \{1^3, 1^{3\times2}, 1^{3\times3}, 1^{3\times4}\}$$

$$= \{3, 6, 9, 0\}$$

**若取** $12 = 4 \times 3$,**可得**

$$A_3 = \{1^4, 1^{4\times2}, 1^{4\times3}\}$$

$$= \{4, 8, 0\}$$

**若取** $12 = 6 \times 2$,**可得**

$$A_2 = \{1^6, 1^{6\times2}\}$$

$$= \{6, 0\}$$

由此得到$(N_{12}, \bar{\imath}_{12})$的 6 阶、4 阶、3 阶和 2 阶子群分别为:$(A_6, \bar{\imath}_{12})$, $(A_4, \bar{\imath}_{12})$, $(A_3, \bar{\imath}_{12})$和$(A_2, \bar{\imath}_{12})$。

**性质 6**　素数阶群必是循环群。

**证明**　设$(G, *)$是 $p$ 阶群,且 $p$ 是素数。由于 $p$ 仅能被 1 和 $p$ 整除,由定理 4.3.6 可知,群中各元素的阶数必能整除群的阶数,所以群$(G, *)$中各元素的阶数只能是 1 和 $p$,而幺元是群中惟一的 1 阶元素,所以$(G, *)$中的每个非幺元都是 $p$ 阶元素,由性质 2 可知,$(G, *)$中的非幺元都是生成元,所以$(G, *)$是循环群。

### 4.3.4　重点和难点分析

本节的重点是:掌握群的定义与性质,子群的定义和验证方法,利用群的元素的阶数构造子群的方法,循环群的定义与性质。

难点是:如何熟练地求群中元素的阶数并由此求出子群。

**例 4.9**　设 $A = \{x \mid x = 2^n, n \in Z\}$,证明对于普通乘法×,$(A, \times)$是群。

**证明**　首先证明×对于 $A$ 是封闭的。

由于 $2^n \times 2^m = 2^{n+m}$,其中 $n$ 和 $m$ 都是整数,所以 $n + m$ 也是整数,$2^{n+m} \in A$,×对于 $A$ 是封闭的。

普通乘法是可结合运算。

$(A, \times)$中的幺元为 1,$A$ 中任意元素 $2^k$ 的逆元为 $2^{-k}$。

所以$(A, \times)$是群。

**例 4.10**　设 $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$,证明对于矩阵的乘法运算×,代数系统$(A, \times)$是群。

**证明**　首先验证矩阵乘法运算×对于 $A$ 是封闭的。由于

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}$$

当 $a, b, c, d$ 分别取值为 1 或 -1 时,$ac$ 和 $bd$ 的值也为 1 或 -1,所以矩阵的乘法运算×对于 $A$ 是封闭的。

矩阵的乘法运算是可结合运算。

$(A, \times)$中的幺元为幺阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

$(A, \times)$中的每个元素都是自逆元。

由此证得$(A, \times)$是群。

**例 4.11**　设 $R_1$ 是所有不等于 1 的实数构成的集合,即 $R_1 = R - \{1\}$,$R_1$ 上的二元运算 * 定义为:$a * b = a + b - ab$,证明$(R_1, *)$是群。

**证明**　首先验证 * 对于 $R_1$ 是封闭的。

由于 $a * b = a + b - ab = 1 - (1 - a)(1 - b)$,所以当 $a$ 和 $b$ 都是不等于 1 的实数时,$1 - a \neq 0$,$1 - b \neq 0$。由此可知,$a * b = 1 - (1 - a)(1 - b)$也是不等于 1 的实数,所以 * 对于 $R_1$ 是封闭的。

曾证明 * 是可结合运算。

由于 $0 * a = 0 + a - 0 \cdot a = a$,所以 0 是$(R_1, *)$的幺元。

又由于 $a * \frac{a}{a-1} = a + \frac{a}{a-1} - a \cdot \frac{a}{a-1} = 0$,所以每一个不等于 1 的实数 $a$ 的逆元为$\frac{a}{a-1}$,由此证得$(R_1, *)$是群。

**例 4.12** 设$(G, *)$是群,对于 $G$ 中任意元素 $a$ 和 $b$,都有

$$(a * b)^2 = a^2 * b^2$$

证明$(G, *)$是可交换群(阿贝尔群)。

**证明** 由于

$$(a * b)^2 = a^2 * b^2$$

$$a * b * a * b = a * a * b * b$$

在等式两边各以 $a^{-1}$ 从左进行运算:

$$a^{-1} * a * b * a * b = a^{-1} * a * a * b * b$$

$$e * b * a * b = e * a * b * b$$

$$b * a * b = a * b * b$$

在等式两边各以 $b^{-1}$ 从右运算之:

$$b * a * b * b^{-1} = a * b * b * b^{-1}$$

$$b * a * e = a * b * e$$

$$b * a = a * b$$

由此证得$(G, *)$是可交换群。

**例 4.13** 写出$(N_{11}, \text{ī}_{11})$中各元素的阶数。

**解** 由于 11 是素数,所以在$(N_{11}, \text{ī}_{11})$中,除 0 是 1 阶元素外,其他元素都是 11 阶元素(见循环群中的性质 6)。

**例 4.14** 求$(N_{13} - \{0\}, \text{í}_{13})$的 2 阶、3 阶、4 阶和 6 阶子群。

**解** 如果能求得$(N_{13} - \{0\}, \text{í}_{13})$的 2 阶、3 阶、4 阶和 6 阶元素,则问题就容易解决。但目前尚不知哪些元素是 2 阶、3 阶、4 阶和 6 阶元素,只能用“试一试”的办法。不妨先试一试元素 2 是几阶元素。由于

| | |
|---|---|
| $2^1 = 2$ | $2^2 = 4$ |
| $2^3 = 8$ | $2^4 = 3$ |
| $2^5 = 6$ | $2^6 = 12$ |
| $2^7 = 11$ | $2^8 = 9$ |
| $2^9 = 5$ | $2^{10} = 10$ |
| $2^{11} = 7$ | $2^{12} = 1$ |

易见,2 是$(N_{13} - \{0\}, \text{í}_{13})$的 12 阶元素,但仍可由此得到$(N_{13} - \{0\}, \text{í}_{13})$的 2 阶、3 阶、4 阶和 6 阶元素。因为

$$(2^6)^2 = 2^{12} = 1$$

所以 $2^6$ 是 2 阶元素,即 12 是 2 阶元素。

同样,因为

$$(2^4)^3 = 2^{12} = 1$$
$$(2^3)^4 = 2^{12} = 1$$
$$(2^2)^6 = 2^{12} = 1$$

所以 $2^4, 2^3, 2^2$ 是 $(N_{13} - \{0\}, \text{í}_{13})$ 的 3 阶、4 阶和 6 阶元素,即 3, 8, 4 是其 3 阶、4 阶和 6 阶元素。令

$$A_2 = \{2^6, 2^{12}\} = \{12, 1\}$$
$$A_3 = \{2^4, (2^4)^2, (2^4)^3\} = \{3, 9, 1\}$$
$$A_4 = \{2^3, (2^3)^2, (2^3)^3, (2^3)^4\} = \{8, 12, 5, 1\}$$
$$A_6 = \{2^2, (2^2)^2, (2^2)^3, (2^2)^4, (2^2)^5, (2^2)^6\} = \{4, 3, 12, 9, 10, 1\}$$

则 $(A_2, \text{í}_{13})$, $(A_3, \text{í}_{13})$, $(A_4, \text{í}_{13})$, $(A_6, \text{í}_{13})$ 分别是 $(N_{13} - \{0\}, \text{í}_{13})$ 的 2 阶、3 阶、4 阶、6 阶子群。

**例 4.15** 写出 10 阶循环群 $(a)$ 的 5 阶子群

**解** 由于生成元 $a$ 是 10 阶元素,所以 $a^2$ 是 5 阶元素,令

$$A = \{a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10} = e\}$$

则 $(A, *)$ 是其 5 阶子群。

## 4.3.5 自测练习

1 .设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$,对于下列运算 $*$:

(1) $a * b = a + b$

(2) $*$ 是模 5 乘法

(3) $*$ 是模 5 加法

(4) $a * b = \max(a, b)$

说明哪些运算使得 $(A, *)$ 为群。

2 .设 $A = \{a, b, c\}$, $(A, *)$ 的运算表如表 4.16 和表 4.17 所示,说明哪个运算表构成的代数系统是群。

**表 4.16**

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | b | c |
| c | c | a | b |

**表 4.17**

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | a | c |
| c | c | c | a |

3 .设 $A = \{x \mid x = 2^n \cdot 3^m, n$ 和 $m$ 是整数$\}$,对于普通乘法 ×,证明 $(A, \times)$ 是群。

4 .设 $A = \{a, b\}$,试构造代数系统 $(P(A), \cup)$ 的运算表,并说明 $(P(A), \cup)$ 是否是群 ?说明理由。

5 .设 $(G, *)$ 是 3 阶群,其中 $G = \{e, a, b\}$, $e$ 是幺元,证明 $a^2 = b$, $a^3 = e$。

6 .设 $R_2$ 是所有不等于 2 的实数构成的集合,即 $R_2 = R - \{2\}$, $R_2$ 上的二元运算 $*$ 定

义为:$a * b = 2 - (2 - a)(2 - b)$,证明$(R_2, *)$是群。

7 .设$(G, *)$是可交换群,$a$和$b$是$G$中任意元素,证明$(a * b)^n = a^n * b^n$($n$是任意正整数)。

8 .设$(G, *)$是可交换群,如果$a$是其2阶元素,$b$是其3阶元素,证明$a * b$是其6阶元素。

9 .设$(G, *)$是群,对于$G$中任意元素$a$和$b$,都有$(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$,证明$(G, *)$是可交换群。

10 .设$(G, *)$是群,对于$G$中任意元素$a$,都有$a * a = e$,即$G$中每个元素都是自逆元,证明$(G, *)$是可交换群。

11 .设$G = \{1, -1, i, -i\}$,对于复数的乘法运算,证明$(G, \times)$是循环群。

12 .设$G = \ \ 1, -1, \frac{1 + \ \ 3i}{2}, \frac{-1 + \ \ 3i}{2}, \frac{1 - \ \ 3i}{2}, \frac{-1 - \ \ 3i}{2}$ ,对于复数的乘法运算,证明$(G, \times)$是循环群。

13 .写出$(N_7$, ī $_7)$中各元素的阶数。

14 .写出$(N_7 - \{0\}$, í $_7)$的2阶子群和3阶子群。

15 .证明9阶群必有3阶子群。

16 .设$(G, *)$是偶数阶群,证明在$G$中必存在非幺元$a$,使得$a * a = e$。

17 .证明偶数阶群中必有2阶子群。

18 .设$G = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$,$G$上的二元运算为按位加 ī ,写出群$(G$, ī $)$的所有2阶子群和一个4阶子群。

19 .写出8阶循环群$(a)$的4阶子群。

20 .设$(G, *)$是群,$(A, *)$和$(B, *)$都是$(G, *)$的子群,证明$(A \cap B, *)$也是$(G, *)$的子群。

### 4 .3 .6 自测练习答案

1 .(1) 由于 * 对于$A$是不封闭的,所以$(A, *)$不是群。

(2) $(A, *)$是群。因为$A = N_5 - \{0\}$,* 是模5乘法,即为 í $_5$,由于5是素数,$(N_5 - \{0\}$, í $_5)$是群,所以$(A, *)$是群。

(3) $(A, *)$不是群。因为模5加法对于$A$不是封闭的。

(4) $(A, *)$不是群。因为在$A$中除元素1有逆元外,其他元素都没有逆元。

2 .由于这两个运算表中,有些行中有相同元素,所以这两个运算表构成的代数系统都不是群。

3 .首先证明乘法运算对于$A$是封闭的。设$a = 2^{n_1} \times 3^{m_1}$,$b = 2^{n_2} \times 3^{m_2}$,$a \times b = 2^{n_1} \times 3^{m_1} \times 2^{n_2} \times 3^{m_2} = 2^{n_1 + n_2} \times 3^{m_1 + m_2}$,由于$n_1, n_2, m_1, m_2$都是整数,所以$n_1 + n_2$和$m_1 + m_2$也是整数,由此可知乘法运算对于$A$是封闭的。

普通乘法是可结合运算。

$2^0 \times 3^0 = 1$是其幺元。

$A$中任意元素$2^n \times 3^m$的逆元为$2^{-n} \times 3^{-m}$。

综上所述,$(A, *)$ 是群。

4 .$A = \{a, b\}$, $P(A) = \{\ ,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$。$(P(A), \cup)$ 的运算表如表 4 .18 所示。

由表 4 .18 可知,第 2,3,4 行都有相同元素,所以$(P(A), \cup)$ 不是群。

5 .证明　先写出群 $G$ 的运算表,由群的性质可知,运算表中各行、各列都没有相同元素,且 $e$ 是幺元,所以 3 阶群 $G$ 的运算表是惟一的,见表 4 .19。

**表 4 .18**

| $\cup$ | | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{a,b\}$ |
|---|---|---|---|---|
| | | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{a,b\}$ |
| $\{a\}$ | $\{a\}$ | $\{a\}$ | $\{a,b\}$ | $\{a,b\}$ |
| $\{b\}$ | $\{b\}$ | $\{a,b\}$ | $\{b\}$ | $\{a,b\}$ |
| $\{a,b\}$ | $\{a,b\}$ | $\{a,b\}$ | $\{a,b\}$ | $\{a,b\}$ |

**表 4 .19**

| * | $e$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $e$ |
| $b$ | $b$ | $e$ | $a$ |

由运算表可知,$a^2 = b$, $a^3 = e$。

另一种证明方法是:由于 3 是素数,3 阶群一定是循环群,且每一个非幺元都是生成元(3 阶元素),所以 $a^3 = e$。

由于 $e$ 是群中惟一的等幂元,所以 $a^2 \neq a$;又由于 $a$ 是 3 阶元素,所以 $a^2 \neq e$;由此可知,$a^2 = b$。

6 .首先证明 * 对于 $R_2$ 是封闭的。

对于 $R_2$ 中任意元素 $a$ 和 $b$,由于 $a$ 和 $b$ 都是不等于 2 的实数,所以 $2 - a \neq 0$,$2 - b \neq 0$,所以 $2 - (2 - a)(2 - b) \neq 2$,由此可知 $a * b = 2 - (2 - a)(2 - b)$ 是不等于 2 的实数,$a * b \in R_2$,* 对于 $R_2$ 的封闭性得证。

再证 * 是可结合运算。由于

$$
\begin{aligned}
(a * b) * c &= (2 - (2 - a)(2 - b)) * c \\
&= 2 - (2 - (2 - (2 - a)(2 - b)))(2 - c) \\
&= 2 - (2 - a)(2 - b)(2 - c) \\
a * (b * c) &= a * (2 - (2 - b)(2 - c)) \\
&= 2 - (2 - a)(2 - (2 - (2 - b)(2 - c))) \\
&= 2 - (2 - a)(2 - b)(2 - c)
\end{aligned}
$$

所以

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

* 是可结合运算。

又由于 $a * 1 = 2 - (2 - 1)(2 - a) = a$,所以 1 是幺元。

$$a * \left(\frac{1}{a - 2} + 2\right) = 2 - (2 - a)\left(2 - \left(\frac{1}{a - 2} + 2\right)\right) = 1$$

所以 $a$ 的逆元为$\frac{1}{a - 2} + 2$,由此证得$(R_2, *)$ 是群。

7 .由于 * 是可交换运算,所以

$$
\begin{aligned}
(a * b)^n &= \underbrace{a * b * a * b * \cdots * a * b}_{2n个} \\
&= \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n个} * \underbrace{b * b * \cdots * b}_{n个} \\
&= a^n * b^n
\end{aligned}
$$

**由此证得**$(a * b)^n = a^n * b^n$。

8 .**由于 * 是可交换运算,所以**

$$
\begin{aligned}
(a * b)^6 &= a^6 * b^6 \\
&= (a^2)^3 * (b^3)^2 \\
&= e^3 * e^2 \\
&= e
\end{aligned}
$$

**现再证,对于任何正整数** $k$,**当** $k < 6$ **时**,$(a * b)^k \neq e$。**由群中元素阶数的定义可知,只需验证当** $k$ **为** 6 **的乘法因子**$(k = 1,2,3)$ **时**,$(a * b)^k \neq e$**即可。**

**当** $k = 1$ **时**,$(a * b)^1 \neq e$,**否则若有**

$$
\begin{aligned}
a * b &= e \\
(a * b)^2 &= e \\
a^2 * b^2 &= e \\
e * b^2 &= e \\
b^2 &= e
\end{aligned}
$$

**这和题设** $b$**是** 3 **阶元素矛盾。**

**当** $k = 2$ **时**,$(a * b)^2 \neq e$,**否则若有**

$$(a * b)^2 = e$$

**同样可得** $b^2 = e$,**与** $b$**是** 3 **阶元素的假设矛盾。**

**当** $k = 3$ **时**,$(a * b)^3 \neq e$,**否则若有**

$$
\begin{aligned}
(a * b)^3 &= e \\
a^3 * b^3 &= e \\
a^3 * e &= e \\
a^3 &= e \\
a &= e
\end{aligned}
$$

**这和题设** $a$**是** 2 **阶元素矛盾。**

**由此证得** $a * b$**为** 6 **阶元素。**

9 .**由题设可知**

$$(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$$

**由群的性质可知**

$$(b * a)^{-1} = a^{2} * b^{-1}$$

**所以有**

$$
\begin{aligned}
(a * b)^{-1} &= (b * a)^{-1} \\
((a * b)^{-1})^{-1} &= ((b * a)^{-1})^{-1}
\end{aligned}
$$

$$a * b = b * a$$

**由此证得 $*$ 是可交换运算,$(G, *)$ 是可交换群。**

10 .**在 $G$ 中任取元素 $a$ 和 $b$,由于 $a^2 = e, b^2 = e$,所以有**

$$a^2 * b^2 = e$$

**又由于 $a * b$ 也是 $G$ 中元素,所以有**

$$(a * b)^2 = e$$

**由此可得**

$$(a * b)^2 = a^2 * b^2$$

$$a * b * a * b = a * a * b * b$$

**因为群的运算满足消去律,所以**

$$b * a = a * b$$

**由此证得$(G, *)$ 是可交换群。**

11 .**首先列出$(G, \times)$ 的运算表,见表** 4 .20。

**由表** 4 .20 **可知,复数的乘法运算 $\times$ 对于 $G$ 是封闭的;复数的乘法运算是可结合运算;**1 **是幺元;**1 **和** $-1$ **都是自逆元,$i$ 和 $-i$ 互为逆元。所以$(G, \times)$ 是群。又由于**

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

**所以 $i$ 是生成元,$(G, \times)$ 是循环群。**

**表　4 .20**

| $\times$ | 1 | $-1$ | $i$ | $-i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $-1$ | $i$ | $-i$ |
| $-1$ | $-1$ | 1 | $-i$ | $i$ |
| $i$ | $i$ | $-i$ | $-1$ | 1 |
| $-i$ | $-i$ | $i$ | 1 | $-1$ |

12 .**先列出$(G, \times)$ 的运算表,见表** 4 .21。

**表　4 .21**

| $\times$ | 1 | $-1$ | $\frac{1+3i}{2}$ | $\frac{-1+3i}{2}$ | $\frac{1-3i}{2}$ | $\frac{-1-3i}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $-1$ | $\frac{1+3i}{2}$ | $\frac{-1+3i}{2}$ | $\frac{1-3i}{2}$ | $\frac{-1-3i}{2}$ |
| $-1$ | $-1$ | 1 | $\frac{-1-3i}{2}$ | $\frac{1-3i}{2}$ | $\frac{-1+3i}{2}$ | $\frac{1+3i}{2}$ |
| $\frac{1+3i}{2}$ | $\frac{1+3i}{2}$ | $\frac{-1-3i}{2}$ | $\frac{-1+3i}{2}$ | $-1$ | 1 | $\frac{1-3i}{2}$ |
| $\frac{-1+3i}{2}$ | $\frac{-1+3i}{2}$ | $\frac{1-3i}{2}$ | $-1$ | $\frac{-1-3i}{2}$ | $\frac{1+3i}{2}$ | 1 |
| $\frac{1-3i}{2}$ | $\frac{1-3i}{2}$ | $\frac{-1+3i}{2}$ | 1 | $\frac{1+3i}{2}$ | $\frac{-1-3i}{2}$ | $-1$ |
| $\frac{-1-3i}{2}$ | $\frac{-1-3i}{2}$ | $\frac{1+3i}{2}$ | $\frac{1-3i}{2}$ | 1 | $-1$ | $\frac{-1+3i}{2}$ |

**由表** 4 .21 **可知,复数乘法对于 $G$ 是封闭的;**1 **是幺元;**1 **和** $-1$ **都是自逆元,** $\frac{1+3i}{2}$

和$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$互为逆元,$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$和$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$是互为逆元。所以$(G,\times)$是群。又由于

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3=-1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^4=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^5=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^6=1$$

所以$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$是生成元,$(G,*)$是循环群。

13 .$(N_7,+_7)$是7阶群,7是素数,所以除幺元0为1阶元素外,其他元素:1,2,3,4,5,6都是7阶元素。

14 .先考察元素2,由于$2^1=2,2^2=4,2^3=1$。所以2是3阶元素,由此可得$(N_7-\{0\},\times_7)$的3阶子群为:$(\{2^1,2^2,2^3\},\times_7)$或写成:$(\{2,4,1\},\times_7)$。

再考察元素6,由于$6^1=6,6^2=1$。所以6是2阶元素,由此可得$(N_7-\{0\},\times_7)$的2阶子群为:$(\{6^1,6^2\},\times_7)$,或写成$(\{6,1\},\times_7)$。

15 .设$(G,*)$是9阶群,由定理4 .3 .6可知,群中元素的阶数必能整除群的阶数,由此可知,9阶群$(G,*)$中,除幺元外,其他元素的阶数只可能是3或9。

如果$G$中有9阶元素,则由循环群的性质5可知,$(G,*)$中必有3阶子群。

如果$G$中没有9阶元素,则$G$中非幺元为3阶元素,设$a$为3阶元素,令$A=\{a,a^2,a^3\}$则$(A,*)$是$(G,*)$的3阶子群。

由此证得9阶群必有3阶子群。

16 .在有限群中,非自逆元都是成对出现的,所以非自逆元的总数为偶数;由于题设$(G,*)$是偶数阶群,即$G$中有偶数个元素,所以$G$中应有偶数个自逆元;而幺元是自逆元,由此可知,$G$中至少有一个非幺元$a$是自逆元,于是有$a*a=e$。

17 .由题16的证明结果可知,偶数阶群中存在着非幺元$a$,使得$a*a=e$,也即$a$是2阶元素,所以令$A=\{a,a^2\}$,则$(A,*)$是群$G$的2阶子群。因此偶数阶群必有2阶子群。

18 .由于$G$中除幺元000外,其他元素都是2阶元素。所以$(G,*)$中共有7个2阶子群。若令

$$A_1=\{000,001\}$$

$$A_2=\{000,010\}$$

$$A_3=\{000,011\}$$

$$A_4 = \{000, 100\}$$
$$A_5 = \{000, 101\}$$
$$A_6 = \{000, 110\}$$
$$A_7 = \{000, 111\}$$

则$(A_i, \bar{\imath})$都是$(G, \bar{\imath})$的 2 阶子群$(i = 1, 2, \cdots, 7)$。

若取 $B = \{000, 001, 010, 011\}$,容易验证$(B, \bar{\imath})$是$(G, \bar{\imath})$的 4 阶子群。

19 .8 阶循环群的 4 阶子群为: $A = \{a^2, a^4, a^6, a^8 = e\}$。

20 .由定理 4 .3 .1 可知, 对于 $A \cap B$ 中任意元素 $a, b$, 若有 $a * b^{-1} \in A \cap B$, 则$(A \cap B, *)$是$(G, *)$的子群。

由于 $a, b \in A \cap B$,所以 $a, b \in A$,且 $a, b \in B$;而$(A, *)$和$(B, *)$都是群, 于是有 $a * b^{-1} \in A$和 $a * b^{-1} \in B$, 由此证得 $a * b^{-1} \in A \cap B$,所以$(A \cap B, *)$是$(G, *)$的子群。

# 4 .4 环 和 域

环和域都是具有两种二元运算的代数系统, 它们在编码理论和自动机理论中有着广泛的应用。

## 4 .4 .1 环

**1 .环的定义**

**定义 4 .4 .1** 设$(A, \bar{\imath}, \acute{\imath})$是代数系统,如果满足:

(1) 对于 $\bar{\imath}$, $(A, \bar{\imath})$是可交换群。

(2) 对于 $\acute{\imath}$, $(A, \acute{\imath})$是半群。

(3) 运算 $\acute{\imath}$ 对 $\bar{\imath}$ 是可分配的, 即有

$$a \acute{\imath} (b \bar{\imath} c) = (a \acute{\imath} b) \bar{\imath} (a \acute{\imath} c)$$
$$(b \bar{\imath} c) \acute{\imath} a = (b \acute{\imath} a) \bar{\imath} (c \acute{\imath} a)$$

则称$(A, \bar{\imath}, \acute{\imath})$是环。

例如,由于$(R, +)$是可交换群, $(R, \times)$是半群, 且乘法运算对于加法运算是可分配的,所以$(R, +, \times)$是环。同样, $(Q, +, \times)$, $(Z, +, \times)$都是环。

又如,在$(N_k, \bar{\imath}_k, \acute{\imath}_k)$中, $(N_k, \bar{\imath}_k)$是可交换群, $(N_k, \acute{\imath}_k)$是半群,还可以证明 $\acute{\imath}_k$ 对于 $\bar{\imath}_k$ 是可分配的。因为

$$a \bar{\imath}_k b = a + b - k \frac{a + b}{k}$$

$$a \acute{\imath}_k b = a \cdot b - k \frac{a \cdot b}{k}$$

从而有

$$a \acute{\imath}_k (b \bar{\imath}_k c) = a \acute{\imath}_k \quad b + c - k \frac{b + c}{k}$$

$$= a \quad b + c - k \frac{b + c}{k} \quad - k \frac{a(b + c) - k \frac{b + c}{k}}{k}$$

$$= ab + ac - ak\frac{b+c}{k} - k\frac{a(b+c)}{k} - \frac{b+c}{k}$$

$$= ab + ac - k\frac{ab+ac}{k}$$

又由于

$$(a\,\text{í}_k b)\,\text{ī}_k(a\,\text{í}_k c) = ab - k\frac{ab}{k}\;\text{ī}_k\; ac - k\frac{ac}{k}$$

$$= ab + ac - k\frac{ab}{k} - k\frac{ac}{k} - k\frac{ab - k\frac{ab}{k} + ac - k\frac{ac}{k}}{k}$$

$$= ab + ac - k\frac{ab}{k} - k\frac{ac}{k} - k\frac{ab+ac}{k} - \frac{ab}{k} - \frac{ac}{k}$$

$$= ab + ac - k\frac{ab+ac}{k}$$

所以有

$$a\,\text{í}_k(b\,\text{ī}_k c) = (a\,\text{í}_k b)\,\text{ī}_k(a\,\text{í}_k c)$$

由于 $\text{í}_k$ 和 $\text{ī}_k$ 都是可交换运算,于是有

$$(b\,\text{ī}_k c)\,\text{í}_k a = (b\,\text{í}_k a)\,\text{ī}_k(c\,\text{í}_k a)$$

由此证得 $\text{í}_k$ 对于 $\text{ī}_k$ 是可分配的,$(N_k, \text{ī}_k, \text{í}_k)$ 是环。

**定理 4.4.1** 设 $(A, \text{ī}, \text{í})$ 是环,则可交换群 $(A, \text{ī})$ 的幺元 $\theta$ 是半群 $(A, \text{í})$ 中的零元。

**证明** 因为 $\theta$ 是 $(A, \text{ī})$ 的幺元,所以有

$$\theta\,\text{ī}\,\theta = \theta$$

又因为 í 对 ī 是可分配的,所以有

$$a\,\text{í}\,\theta = a\,\text{í}\,(\theta\,\text{ī}\,\theta)$$

$$= (a\,\text{í}\,\theta)\,\text{ī}\,(a\,\text{í}\,\theta)$$

上式表明 $a\,\text{í}\,\theta$ 是 $(A, \text{ī})$ 的等幂元,由于 $(A, \text{ī})$ 是群,所以 $a\,\text{í}\,\theta$ 是幺元。即

$$a\,\text{í}\,\theta = \theta$$

由此证得 $\theta$ 是 $(A, \text{í})$ 的右零元。同样可证

$$\theta\,\text{í}\,a = \theta$$

由此证得 $\theta$ 是 $(A, \text{í})$ 的左零元。所以 $\theta$ 是 $(A, \text{í})$ 的零元。

**定理 4.4.2** 设 $(A, \text{ī}, \text{í})$ 是环,对于可交换群 $(A, \text{ī})$,元素 $a$ 的逆元为 $a^{-1}$,则有

(1) $a^{-1}\,\text{í}\,b = a\,\text{í}\,b^{-1} = (a\,\text{í}\,b)^{-1}$

(2) $a^{-1}\,\text{í}\,b^{-1} = a\,\text{í}\,b$

**证明** (1) 由于 í 对于 ī 是可分配的,所以

$$(a^{-1}\,\text{í}\,b)\,\text{ī}\,(a\,\text{í}\,b) = (a^{-1}\,\text{ī}\,a)\,\text{í}\,b$$

$$= \theta\,\text{í}\,b$$

$$= \theta$$

而 $\theta$ 是 $(A, \text{ī})$ 的幺元,所以 $a^{-1}\,\text{í}\,b$ 是 $a\,\text{í}\,b$ 的逆元,即

$$a^{-1}\,\text{í}\,b = (a\,\text{í}\,b)^{-1}$$

**同样可证**

$$a\,\text{í}\,b^{-1} = (a\,\text{í}\,b)^{-1}$$

**所以有** $a^{-1}\,\text{í}\,b = a\,\text{í}\,b^{-1} = (a\,\text{í}\,b)^{-1}$。

(2) **利用**(1) **的证明结果可知**

$$\begin{aligned} a^{-1}\,\text{í}\,b^{-1} &= a\,\text{í}\,(b^{-1})^{-1} \\ &= a\,\text{í}\,b \end{aligned}$$

**如果把可交换群**$(A, \text{ī})$ **中元素** $a$ **的逆元记作** $-a$,**则定理** 4.4.1 **和定理** 4.4.2 **的结论可改写为**:

$$\begin{aligned} &a\,\text{ī}\,(-a) = \theta \\ &a\,\text{í}\,\theta = \theta\,\text{í}\,a = \theta \\ &(-a)\,\text{í}\,b = a\,\text{í}\,(-b) = -(a\,\text{í}\,b) \\ &(-a)\,\text{í}\,(-b) = a\,\text{í}\,b \end{aligned}$$

**由此可知**,**环**$(A, \text{ī}, \text{í})$ **中的第一种运算** ī **和第二种运算** í **的运算规则与普通加法和乘法的运算规则相似**,**所以常把环**$(A, \text{ī}, \text{í})$ **直接记作**$(A, +, \times)$;**对于交换群**$(A, +)$,$a$ **的 逆元记作** $-a$(**也称为负元**),**于是定理** 4.4.1 **和定理** 4.4.2 **的结论可写为**:

$$\begin{aligned} &a + (-a) = \theta \\ &a \times \theta = \theta \times a = \theta \\ &(-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b) \\ &(-a) \times (-b) = a \times b \end{aligned}$$

**如果把** $a + (-b)$ **记作** $a - b$,**则有**

$$\begin{aligned} a \times (b - c) &= a \times b - a \times c \\ (b - c) \times a &= b \times a - c \times a \end{aligned}$$

**2**.**特殊环**

**定义 4.4.2** **设**$(A, +, \times)$ **是环**,**如果半群**$(A, \times)$ **中的运算** $\times$ **是可交换运算**,**则称**$(A, +, \times)$ **是可交换环**。

**定义 4.4.3** **设**$(A, +, \times)$ **是环**,**如果半群**$(A, \times)$ **中含有幺元**,**则称环**$(A, +, \times)$ **是含幺元环**。

**例如**,$(R, +, \times)$,$(Q, +, \times)$,$(Z, +, \times)$ **和**$(N_k, \text{ī}_k, \text{í}_k)$ **都是可交换环**,**也都是含幺元环**。

**定义 4.4.4** **设**$(A, +, \times)$ **是环**,**对于半群**$(A, \times)$,**如果** $A$ **中任意非零元** $a$ **和** $b$,**都有** $a \times b \neq \theta$,**则称**$(A, +, \times)$ **为无零因子环**。

**例如**,**在环**$(R, +, \times)$ **中**,**任意的实数** $a$ **和** $b$,**如果** $a \neq 0$,$b \neq 0$,**则必有** $a \times b \neq 0$,**所以环**$(R, +, \times)$ **是无零因子环**。

**但在环**$(N_6, \text{ī}_6, \text{í}_6)$ **中**,$2 \neq 0$,$3 \neq 0$,**而** $2\,\text{í}_6\,3 = 0$,**所以环**$(N_6, \text{ī}_6, \text{í}_6)$ **不是无零因子环**。

**定义 4.4.5** **含幺元、可交换、无零因子环称为整环**。

**例如**,$(Z, +, \times)$ **是整环**。

**又如**,$(N_7, \text{ī}_7, \text{í}_7)$ **是整环**,**一般地讲**,**当** $p$ **为素数时**,$(N_p, \text{ī}_p, \text{í}_p)$ **是整环**。

**定理 4.4.3** 设$(A, +, \times)$是整环,则乘法运算满足消去律,即当 $a \neq \theta$,且 $a \times b = a \times c$ 时,必有 $b = c$。

**证明** 由假设可知

$$a \times b = a \times c$$
$$a \times b - a \times c = \theta$$
$$a \times (b - c) = \theta$$

由于 $a \neq \theta$,且整环$(A, +, \times)$中没有零因子,所以

$$b - c = \theta$$
$$b = c$$

### 4.4.2 域

**定义 4.4.6** 设$(A, +, \times)$是代数系统,如果满足

(1) $(A, +)$是可交换群。

(2) $(A - \{\theta\}, \times)$是群。

(3) $\times$ 对于 $+$ 是可分配的。

则称$(A, +, \times)$为除环。

**定义 4.4.7** 设$(A, +, \times)$是代数系统,如果满足

(1) $(A, +)$是可交换群。

(2) $(A - \{0\}, \times)$是可交换群。

(3) $\times$ 对 $+$ 是可分配的。

则称$(A, +, \times)$为域。

例如,$(R, +, \times)$是除环,也是域。

### 4.4.3 重点和难点分析

本节重点是:了解环和一些特殊环的定义;了解域的定义。

难点是:如何判定代数系统是否是环,整环和域。

**例 4.16** 在代数系统$(A, +, \times)$中,$A = \{x \mid x = a + b\ 2, a$ 和 $b$ 是任意有理数$\}$,证明$(A, +, \times)$是环。

**证明** 首先证明$(A, +)$是可交换群。

对于 $A$ 中任意元素 $a_1 + b_1\ 2$, $a_2 + b_2\ 2$,由于$(a_1 + b_1\ 2) + (a_2 + b_2\ 2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\ 2$,仍属于 $A$,所以加法对 $A$ 是封闭的。

加法运算是可结合运算,也是可交换运算。

在$(A, +)$中幺元为 0。

$A$ 中任意元素 $a + b\ 2$ 的逆元是 $-a - b\ 2$。

所以$(A, +)$是可交换群。

再证$(A, \times)$是半群。

由于$(a_1 + b_1\ 2)(a_2 + b_2\ 2) = (a_1 a_2 + 2 b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\ 2$,仍属于 $A$,所以乘

法运算对 $A$ 是封闭的。

乘法运算是可结合运算。

所以 $(A, \times)$ 是半群。乘法对加法是可分配运算，由此证得 $(A, +, \times)$ 是环。

**例 4.17** 设 $A$ 是集合，$P(A)$ 是其幂集，对于集合的对称差运算 $\oplus$ 和交运算 $\cap$，证明代数系统 $(P(A), \oplus, \cap)$ 是环，且是含幺元的可交换环，但不是整环。

**证明** 首先证明 $(P(A), \oplus)$ 是可交换群。

由于 $P(A)$ 中的任意两个元素（即集合 $A$ 的任意两个子集）经对称差运算后，仍然是 $A$ 的子集，所以 $\oplus$ 对于 $P(A)$ 是封闭的。

对称差是可结合且是可交换运算。

空集 是 $(P(A), \oplus)$ 的幺元。

对于 $P(A)$ 中的任意元素 $A_1$，由于 $A_1 \oplus A_1 =$ ，所以 $P(A)$ 中的每一个元素都是自逆元。由此证得 $(P(A), \oplus)$ 是可交换群。

易见，$(P(A), \cap)$ 是半群。

现证 $\cap$ 对 $\oplus$ 是可分配的，由于 $\cap$ 是可交换运算，只需证明对于 $P(A)$ 中任意元素 $A_0, B_0, C_0$，都成立着

$$A_0 \cap (B_0 \oplus C_0) = (A_0 \cap B_0) \oplus (A_0 \cap C_0)$$

由于 $P \oplus Q = (P \cup Q) - (P \cap Q)$，所以

$$\begin{aligned}
\text{右式} &= (A_0 \cap B_0) \oplus (A_0 \cap C_0) \\
&= ((A_0 \cap B_0) \cup (A_0 \cap C_0)) - (A_0 \cap B_0 \cap A_0 \cap C_0) \\
&= ((B_0 \cup C_0) \cap A_0) - (A_0 \cap B_0 \cap C_0) \\
&= (B_0 \cup C_0) \cap A_0 \cap (\overline{A_0 \cap B_0 \cap C_0}) \\
&= (B_0 \cup C_0) \cap A_0 \cap (\overline{A_0} \cup (\overline{B_0 \cap C_0})) \\
&= (B_0 \cup C_0) \cap ((A_0 \cap \overline{A_0}) \cup (A_0 \cap (\overline{B_0 \cap C_0}))) \\
&= A_0 \cap (B_0 \cup C_0) \cap (\overline{B_0 \cap C_0}) \\
&= A_0 \cap ((B_0 \cup C_0) - (B_0 \cap C_0)) \\
&= A_0 \cap (B_0 \oplus C_0) \\
&= \text{左式}
\end{aligned}$$

由此证得 $\cap$ 对 $\oplus$ 是可分配的。所以 $(P(A), \oplus, \cap)$ 是环。又由于半群 $(P(A), \cap)$ 中含有幺元 $A$，且 $\cap$ 是可交换运算，所以 $(P(A), \oplus, \cap)$ 是含幺元的可交换环。

现说明 $(P(A), \oplus, \cap)$ 不是整环，因为 $(P(A), \cap)$ 中含有零因子。如 $A_1$ 是 $A$ 的真子集（$A$ $A_1$），且 $A_1 \neq$ ，易知其补集 $\overline{A_1}$ 也是 $A$ 的真子集（$A$ $\overline{A_1}$），且 $\overline{A_1} \neq$ ，但 $A_1 \cap \overline{A_1} =$ 。所以 $(P(A), \cap)$ 中含有零因子，$(P(A), \oplus, \cap)$ 不是整环。

**例 4.18** 设 $(A, +, \times)$ 是环，对于 $A$ 中任意元素 $a$，都有 $a \times a = a$，证明 $a + a = \theta$。

**证明** 设 $a \in A$，由题设可知

$$(a + a) \times (a + a) = (a + a)$$

由于 $\times$ 对 $+$ 是可分配的，所以有

$$a \times a + a \times a + a \times a + a \times a = a + a$$

又由于 $a \times a = a$,所以有

$$(a + a) + (a + a) = (a + a)$$

由此可知,$(a + a)$ 是群$(A, +)$ 的等幂元,即幺元 θ,于是证得 $a + a = θ$。

**例 4 .19** 在代数系统$(R, ī, í)$ 中,$R$ 是实数集,$R$ 上的二元运算 ī 定义为:$a ī b = a + b - 1$;二元运算 í 定义为:$a í b = a + b - ab$。证明$(R, ī, í)$ 是域。

**证明** 首先证明$(R, ī)$ 是可交换群。由于 $a ī b = a + b - 1$,所以当 $a, b$为实数时,$a ī b$也是实数,即 ī 对于 $R$ 是封闭的。又由于

$$(a ī b) ī c = a + b + c - 2$$

$$a ī (b ī c) = a + b + c - 2$$

所以 ī 是可结合运算。易见

$$a ī b = b ī a$$

所以 ī 是可交换运算。又由于

$$a ī 1 = a + 1 - 1 = a$$

所以 1 是$(R, ī)$ 的幺元。且对于任意实数 $a$,都有

$$a ī (2 - a) = a + 2 - a - 1 = 1$$

所以 $a$的逆元为 $2 - a$。

由此证得$(R, ī)$ 是可交换群。

曾证明$(R - \{1\}, í)$是群(见例 4 .11)。易见,í 是可交换运算,所以$(R - \{1\}, í)$是可交换群。

现证明 í 对 ī 是可分配的。

$$\begin{aligned} a í (b ī c) &= a í (b + c - 1) \\ &= a + b + c - 1 - a(b + c - 1) \\ &= 2a + b + c - ab - ac - 1 \\ (a í b) ī (a í c) &= (a + b - ab) ī (a + c - ac) \\ &= a + b - ab + a + c - ac - 1 \\ &= 2a + b + c - ab - ac - 1 \end{aligned}$$

由此可见,$a í (b ī c) = (a í b) ī (a í c)$,即 í 对于 ī 是可分配的。

综上证得$(R, ī, í)$ 是域。

### 4 .4 .4 自测练习

1 .设$(A, +, \times)$ 是代数系统,其中 + 和 × 是普通加法和乘法,$A$ 为下列集合

(1) $A$ 是所有偶数组成的集合。

(2) $A$ 是所有奇数组成的集合。

(3) $A$ 是正整数集合。

(4) $A$ 是整数集合。

问:哪些$(A, +, \times)$ 是环。

2 .设 $A = \{x \mid x = \begin{matrix} a & 0 \\ 0 & b \end{matrix}$, $a$ 和 $b$ 都是实数$\}$, 对于矩阵加法与乘法运算, 证明

$(A, +, \times)$ 是环。

3 .证明例 4 .16 给出的环是域。

4 .证明$(Z, +, \times)$ 是整环, 但不是域。

5 .在代数系统$(R, ī\ , í\ )$ 中, 实数集 $R$ 上的二元运算 ī 定义为: $a ī\ b = a + b - 3$, 二元运算 í 定义为: $a í\ b = 3 - (3 - a)(3 - b)$。证明$(R, ī\ , í\ )$ 是域。

6 .写出具有 5 个元素的域。

### 4 .4 .5 自测练习答案

1 .其中(1) 和(4) 是环。

2 .首先证明$(A, +)$ 是可交换群。

由于 $\begin{matrix} a & 0 \\ 0 & b \end{matrix} + \begin{matrix} c & 0 \\ 0 & d \end{matrix} = \begin{matrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{matrix}$, 而 $a + c$ 和 $b + d$ 都是实数, 所以矩阵加法对于 $A$ 是封闭的; 矩阵加法是可结合运算; $(A, +)$ 的幺元是零阵: $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$; $A$ 中任意元素 $\begin{matrix} a & 0 \\ 0 & b \end{matrix}$ 的逆元是 $\begin{matrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{matrix}$。所以$(A, +)$ 是群, 且矩阵加法是可交换运算, 由此证得$(A, +)$ 是可交换群。

再证$(A, \times)$ 是半群。

由于 $\begin{matrix} a & 0 \\ 0 & b \end{matrix} \times \begin{matrix} c & 0 \\ 0 & d \end{matrix} = \begin{matrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{matrix}$, 而 $ac$ 和 $bd$ 都是实数, 所以矩阵乘法对于 $A$ 是封闭的; 矩阵乘法是可结合运算。由此证得$(A, \times)$ 是半群。

综上证得$(A, +, \times)$ 是环。

3 .只需证明$(A - \{0\}, \times)$ 是可交换群。

首先证明乘法运算 $\times$ 对于 $A - \{0\}$ 是封闭的。也即证明: 当 $a + b\ 2 \neq 0$, $c + d\ 2 \neq 0$ 时, $(a + b\ 2)(c + d\ 2) \neq 0$。

用反证法, 设 $a + b\ 2 \neq 0$ 和 $c + d\ 2 \neq 0$, 而$(a + b\ 2)(c + d\ 2) = 0$, 或$(ac + 2bd) + (ad + bc)\ 2 = 0$。由于 $a, b, c, d$ 都是有理数, 要使$(ac + 2bd) + (ad + bc)\ 2 = 0$, 必须是

$$ac + 2bd = 0$$

$$ad + bc = 0$$

如果把上述两式看作是关于 $a$ 和 $b$ 的齐次线性方程组, 其系数行列式为:

$$\begin{vmatrix} c & 2d \\ d & c \end{vmatrix} = c^2 - 2d$$

由假设可知, $c + d\ 2 \neq 0$, 也即 $c$ 和 $d$ 不能同时为 0, 所以有 $c - d\ 2 \neq 0$, 于是有 $(c + d\ 2)(c - d\ 2) \neq 0$ 或 $c^2 - 2d \neq 0$, 也即关于 $a$ 和 $b$ 的线性方程组的系数行列式不为 0, 因此此齐次线性方程组只有零解, 由此得到 $a = 0$ 和 $b = 0$, 这和假设 $a + b\ 2 \neq 0$ 矛盾。所以证得$(a + b\ 2)(c + d\ 2) \neq 0$, 即乘法运算对于 $A - \{0\}$ 是封闭的。

乘法运算是可结合运算,也是可交换运算。

$(A - \{0\}, \times)$ 的幺元是 1。

$(A - \{0\}, \times)$ 的任意元素 $a + b\ \ 2$ 的逆元为:$\dfrac{1}{a + b\ \ 2} = \dfrac{a - b\ \ 2}{a^2 - 2b}$。

综上证得$(A - \{0\}, \times)$ 是可交换群,$(A, +, \times)$ 是域。

4 .容易验证$(Z, +, \times)$ 是环,且是含幺元,可交换环。由于任何非零整数 $a$ 和 $b$,都有 $a \times b \neq 0$,所以$(Z, +, \times)$ 是无零因子环,由此可知$(Z, +, \times)$ 是整环。但$(Z - \{0\}, \times)$ 不是群,所以$(Z, +, \times)$ 不是域。

5 .容易证明$(R, \text{ī})$ 是可交换群,且其幺元为 3。

再证明$(R - \{3\}, \text{í})$ 是可交换群。

对于任何不等于 3 的实数 $a$ 和 $b$,易见,$a \text{ í } b = 3 - (3 - a)(3 - b)$ 也是不等于 3 的实数,所以运算 í 对于 $R - \{3\}$ 是封闭的。

再证 í 是可结合运算。由于

$$\begin{aligned}(a \text{ í } b) \text{ í } c &= (3 - (3 - a)(3 - b)) \text{ í } c \\ &= 3 - (3 - (3 - (3 - a)(3 - b)))(3 - c) \\ &= 3 - (3 - a)(3 - b)(3 - c) \\ a \text{ í } (b \text{ í } c) &= a \text{ í } (3 - (3 - b)(3 - c)) \\ &= 3 - (3 - a)(3 - (3 - (3 - b)(3 - c))) \\ &= 3 - (3 - a)(3 - b)(3 - c)\end{aligned}$$

所以有

$$(a \text{ í } b) \text{ í } c = a \text{ í } (b \text{ í } c)$$

由此可见,í 是可结合运算;显然,í 是可交换运算。

$(R - \{3\}, \text{í})$ 的幺元为 2。

$(R - \{3\}, \text{í})$ 中的任意元素 $a$ 的逆元为 $3 + \dfrac{1}{a - 3}$,所以$(R - \{3\}, \text{í})$ 是可交换群。

最后证明 í 对 ī 是可分配的。

$$\begin{aligned}a \text{ í } (b \text{ ī } c) &= a \text{ í } (b + c - 3) \\ &= 3 - (3 - a)(3 - (b + c - 3)) \\ &= 3 - (3 - a)(6 - (b + c)) \\ (a \text{ í } b) \text{ ī } (a \text{ í } c) &= (3 - (3 - a)(3 - b)) \text{ ī } (3 - (3 - a)(3 - c)) \\ &= 3 - (3 - a)(3 - b) + 3 - (3 - a)(3 - c) - 3 \\ &= 3 - (3 - a)(6 - (b + c))\end{aligned}$$

所以有

$$a \text{ í } (b \text{ ī } c) = (a \text{ í } b) \text{ ī } (a \text{ í } c)$$

由此可见,í 对 ī 是可分配的。

综上证得$(R, \text{ī}, \text{í})$ 是域。

6 .$(N_5, \text{ī}_5, \text{í}_5)$ 是具有 5 个元素的域。

# 4.5　格和布尔代数

## 4.5.1　格和子格

**1. 格的定义**

**定义 4.5.1**　设$(A, \vee, \wedge)$是代数系统，二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 对于 $A$ 是封闭的，且对于 $A$ 中任意元素 $a, b, c$ 满足：

(1) $a \vee b = b \vee a$
$\wedge b = b \wedge a$　　(交换律)

(2) $a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$　　(结合律)

(3) $a \vee (a \wedge b) = a$
$a \wedge (a \vee b) = a$　　(吸收律)

则称$(A, \vee, \wedge)$为格。

常称二元运算 $\vee$ 为并，二元运算 $\wedge$ 为交。

例如，$A$ 是集合，$P(A)$ 是其幂集，对于集合的并、交运算，代数系统$(P(A), \cup, \cap)$是格。因为集合的并、交运算对于 $P(A)$ 是封闭的，且满足交换律、结合律和吸收律，所以$(P(A), \cup, \cap)$是格。

又如，$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$A$ 上的二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别定义为：

$$a \vee b = \max(a, b)$$
$$a \wedge b = \min(a, b)$$

可以证明$(A, \vee, \wedge)$是格。

因为二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 对于 $A$ 的封闭性以及它们分别满足交换律、结合律是显然的，所以只证 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足吸收律。由于

$$a \vee (a \wedge b) = \max(a, \min(a, b))$$

所以当 $a \geq b$ 时

$$a \vee (a \wedge b) = \max(a, b) = a$$

当 $a < b$ 时

$$a \vee (a \wedge b) = \max(a, a) = a$$

由此证得：$a \vee (a \wedge b) = a$；同样可证 $a \wedge (a \vee b) = a$。所以$(A, \vee, \wedge)$满足吸收律，$(A, \vee, \wedge)$是格。

再如，在代数系统$(A, \vee, \wedge)$中，$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$，$A$ 上的二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别定义为：

$$a \vee b = \mathrm{lcm}(a, b)$$
$$a \wedge b = \gcd(a, b)$$

其中 $\mathrm{lcm}(a, b)$ 表示 $a$ 和 $b$ 的最小公倍数；$\gcd(a, b)$ 表示 $a$ 和 $b$ 的最大公约数。可以证明$(A, \vee, \wedge)$是格。

同样,二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 对于 $A$ 的封闭性以及它们分别满足交换律和结合律是显然的,现证 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足吸收律。

由于 $a\wedge b$ 是 $a$ 和 $b$ 的最大公约数,所以 $a\wedge b$ 必能整除 $a$;又由于 $a\vee(a\wedge b)$ 是 $a$ 和 $a\wedge b$ 的最小公倍数,而 $a\wedge b$ 能整除 $a$,所以 $a$ 和 $a\wedge b$ 的最小公倍数就是 $a$,由此可见:

$$a\vee(a\wedge b)=a$$

同样可证:

$$a\wedge(a\vee b)=a$$

所以 $(A,\vee,\wedge)$ 满足吸收律,$(A,\vee,\wedge)$ 是格。

**定理 4.5.1** 设 $(A,\vee,\wedge)$ 是格,对于 $A$ 中任意元素 $a$,都有

$$a\vee a=a$$
$$a\wedge a=a$$

即 $(A,\vee,\wedge)$ 中每个元素都是等幂元。

证明 由于格满足吸收律,所以

$$a\vee(a\wedge x)=a$$

若取 $x=a\vee b$,则有

$$a\vee(a\wedge(a\vee b))=a$$

而 $a\wedge(a\vee b)=a$,所以

$$a\vee a=a$$

同样可证 $a\wedge a=a$。

**2.格和偏序集**

格和偏序集有着密切联系,下面作简要的介绍。

**定理 4.5.2** 设 $(A,\vee,\wedge)$ 是格,在 $A$ 上定义二元关系 $R$ 为:当 $a\vee b=b$(或 $a\wedge b=a$)时,$(a,b)\in R$,则 $R$ 是 $A$ 上的偏序关系,$R$ 可记为 $\mathrm{t}$,偏序集 $(A,\mathrm{t})$ 称为由格 $(A,\vee,\wedge)$ 导出的偏序集,且偏序集 $(A,\mathrm{t})$ 中的任意两个元素 $a$ 和 $b$ 构成的子集都有上确界和下确界(以后简称为 $a$ 和 $b$ 有上确界和下确界)。

证明从略。

**定理 4.5.3** 设 $(A,\mathrm{t})$ 是偏序集,且 $A$ 中任意两个元素都有上确界和下确界;如果在 $A$ 上定义二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别为:

$$a\vee b=\sup(a,b)$$
$$a\wedge b=\inf(a,b)$$

其中 $\sup(a,b)$ 表示 $a$ 和 $b$ 的上确界;$\inf(a,b)$ 表示 $a$ 和 $b$ 的下确界。则代数系统 $(A,\vee,\wedge)$ 是格,并称 $(A,\vee,\wedge)$ 是由偏序集 $(A,\mathrm{t})$ 导出的格。

证明从略。

**定理 4.5.4** 设 $(A,\vee,\wedge)$ 是格,由格 $(A,\vee,\wedge)$ 导出的偏序集为 $(A,\mathrm{t})$;则由偏序集 $(A,\mathrm{t})$ 导出的格就是 $(A,\vee,\wedge)$。

证明从略。

例如,在格 $(P(A),\cup,\cap)$ 中,定义 $P(A)$ 上的二元关系 $R$ 为:对于 $P(A)$ 中的元素

$A_i$ 和 $A_j$($A_i$ 和 $A_j$ 是 $A$ 的子集),$A_i \cup A_j = A_j$ 成立时,$(A_i, A_j) \in R$。由于 $A_i \cup A_j = A_j$ 的充分必要条件是 $A_i \quad A_j$,所以二元关系 $R$ 是 $P(A)$ 上的包含关系,它是偏序关系。由此可知,$(P(A), \cup, \cap)$ 导出的偏序集为:$(P(A), \quad)$。

若设 $A = \{a, b, c\}$,则偏序集 $(P(A), \quad)$ 的哈斯图如图 4.1 所示。

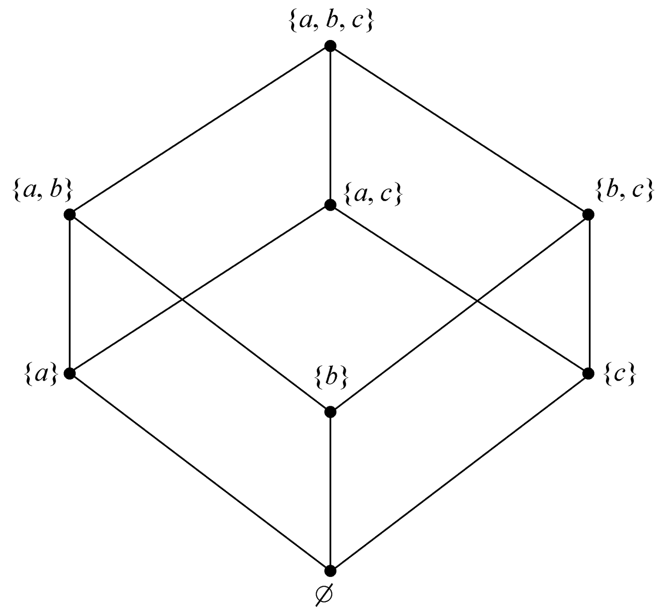


图 4.1

由图 4.1 可知,$P(A)$ 中任意两个元素 $A_i$ 和 $A_j$ 的上确界和下确界分别为:

$$\sup(A_i, A_j) = A_i \cup A_j$$
$$\inf(A_i, A_j) = A_i \cap A_j$$

由此可知,由偏序集 $(P(A), \quad)$ 导出的格就是 $(P(A), \cup, \cap)$。

又如,设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,$A$ 上的二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别定义为:$a \vee b = \max(a, b)$,$a \wedge b = \min(a, b)$。已证明 $(A, \vee, \wedge)$ 是格。若在 $A$ 上定义二元关系 $R$ 为:当 $a \vee b = b$ 时,$(a, b) \in R$,也即当 $\max(a, b) = b$ 时,$(a, b) \in R$。由此可知,$R$ 是 $A$ 上的小于等于关系,所以格 $(A, \vee, \wedge)$ 导出的偏序集为:$(A, \leq)$。

由于在 $(A, \leq)$ 中,$\sup(a, b) = \max(a, b)$,$\inf(a, b) = \min(a, b)$,所以 $(A, \leq)$ 导出的格就是 $(A, \vee, \wedge)$。

再如,设 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,$A$ 上的二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别定义为:$a \vee b = \mathrm{lcm}(a, b)$,即 $a$ 和 $b$ 的最小公倍数;$a \wedge b = \gcd(a, b)$,即 $a$ 和 $b$ 的最大公约数。已证明 $(A, \vee, \wedge)$ 是格。若在 $A$ 上定义二元关系 $R$ 为:当 $a \vee b = b$ 时,$(a, b) \in R$,也即当 $a$ 和 $b$ 的最小公倍数为 $b$ 时,$(a, b) \in R$,由此可知 $R$ 为 $A$ 上的整除关系。所以格 $(A, \vee, \wedge)$ 导出的偏序集为:$(A, \mathbf{t})$,其中 $\mathbf{t}$ 为整除关系。

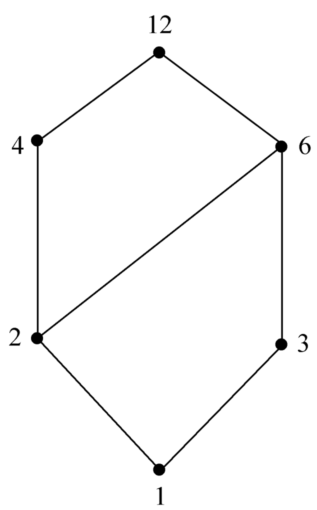


图 4.2

偏序集 $(A, \mathbf{t})$ 的哈斯图如图 4.2 所示。

由图 4.2 可知,$A$ 中任意两个元素 $a$ 和 $b$ 的上确界和下确界分别为

$$\sup(a, b) = \mathrm{lcm}(a, b)$$
$$\inf(a, b) = \gcd(a, b)$$

由此可知,由偏序集 $(A, \mathbf{t})$ 导出的格就是 $(A, \vee, \wedge)$。

定理 4.5.4 表明了格和偏序集之间的互导性。由此可得到关于格的另一种定义。

**定义 4.5.2** 设 $(A, \mathbf{t})$ 为偏序集,且 $A$ 中任意两个元素都有上确界和下确界,则称 $(A, \mathbf{t})$ 为格。

由于偏序集可以用哈斯图形象地表示,所以这种定义方式使格的表示更形象、更直观。今后在讨论格的有关特征时,将同时采用格的两种定义方式。

**3.子格**

**定义 4.5.3** 设 $(A, \vee, \wedge)$ 是格,$B$ 是 $A$ 的非空子集,如果二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 关于 $B$

是封闭的,则称$(B, \vee, \wedge)$是$(A, \vee, \wedge)$的子格。

例如,$(P(A), \cup, \cap)$是格,取$P(A)$的子集为:$B = \{\ \ , A\}$,由于

$$\cup \quad = \qquad\qquad \cap \quad =$$

$$A \cup A = A \qquad\qquad A \cap A = A$$

$$A \cup \quad = A \qquad\qquad A \cap \quad =$$

所以$\cup$和$\cap$对于$B$是封闭的,$(B, \cup, \cap)$是$(P(A), \cup, \cap)$的子格。

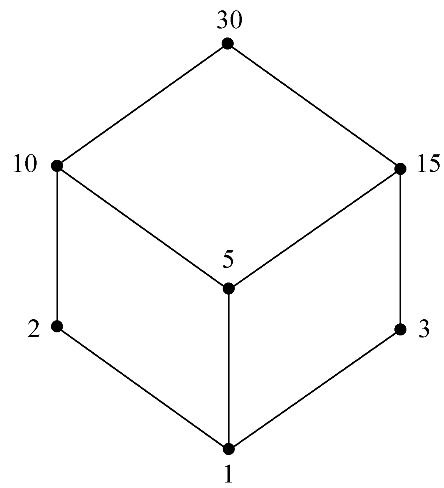



图 4.3

又如,$A = \{1,2,3,5,10,15,30\}$,t 是整除关系,容易验证$(A, t)$是格,其哈斯图如图 4.3 所示。

若取$A$的子集为:$B = \{1,2,5,10\}$,可以验证$(B, t)$是$(A, t)$的子格,为此可先列出$(B, \vee, \wedge)$的运算表,见表 4.22。

**表 4.22**

| $\vee$ | 1 | 2 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 5 | 10 |
| 2 | 2 | 2 | 10 | 10 |
| 5 | 5 | 10 | 5 | 10 |
| 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |

| $\vee$ | 1 | 2 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 1 | 5 | 5 |
| 10 | 1 | 2 | 5 | 10 |

由表 4.22 可知,运算$\vee$和$\wedge$对于$B$是封闭的,所以$(B, t)$是$(A, t)$的子格。

若取$A$的子集为:$B = \{1,2,3,5\}$,由于$3 \vee 5 = 15$,而$15 | B$,所以运算$\vee$对于$B$不是封闭的,由此可知,$(B, t)$不是$(A, t)$的子格。

若取$A$的子集为:$B = \{1,2,3,10,15,30\}$,由于$10 \wedge 15 = 5 | B$,所以运算$\wedge$对于$B$不是封闭的,$(B, t)$不是$(A, t)$的子格(虽然$(B, t)$是格)。

## 4.5.2 特殊格

**1 .分配格**

**定义4.5.4** 设$(A, \vee, \wedge)$是格,如果格中的交运算对于并运算是可分配的;并运算对于交运算也是可分配的,即对于$A$中任意元素$a, b$和$c$都有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

则称$(A, \vee, \wedge)$为分配格。

例如,$(P(A), \cup, \cap)$是分配格,因为集合的交运算对于并运算是可分配的;并运算对于交运算也是可分配的,所以$(P(A), \cup, \cap)$是分配格。

**定理4.5.5** 设$(A, \vee, \wedge)$是格,如果格中的并运算对于交运算是可分配的,即对于$A$中任意元素$a, b$和$c$,都有

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

则格中的交运算对于并运算也是可分配的,即有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

且反之亦然。

证明　由吸收律可知

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge (a \vee b)) \wedge (b \vee c) \\ &= a \wedge ((a \vee b) \wedge (b \vee c)) \\ &= a \wedge (b \vee (a \wedge c)) \\ &= (a \vee (a \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)) \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{aligned}$$

由此证得,当并对交可分配时,则交对并也是可分配的。

反之,当交对并可分配时,可用同样方法证明并对交也是可分配的。

由定理 4.5.5 可知,当需要验证一个格是否是分配格时,只需要验证并对交是否可分配,或验证交对并是否可分配即可。

例如,在$(A, \vee, \wedge)$中,$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 为:$a \vee b = \max(a, b)$,$a \wedge b = \min(a, b)$。已证明$(A, \vee, \wedge)$是格,现再证$(A, \vee, \wedge)$是分配格。只需验证交对于并是可分配的。

对于 $A$ 中元素 $a, b, c$ 的取值,可分为两种情况讨论:

(1) $a \leq b$ 或 $a \leq c$;

(2) $a \geq b$ 或 $a \geq c$。

对于(1):$a \wedge (b \vee c) = a$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \vee a = a$$

所以 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

对于(2):$a \wedge (b \vee c) = b \vee c$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee c$$

所以 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$。由此证得交对于并是可分配的;$(A, \vee, \wedge)$是分配格。

又如,$A = \{1, 2, 3, 5, 30\}$,t 是整除关系,容易验证$(A, \mathrm{t})$是格。现再证$(A, \mathrm{t})$不是分配格。

先画出$(A, \mathrm{t})$的哈斯图,见图 4.4。

由图 4.4 可知:

$$2 \wedge (3 \vee 5) = 2 \wedge 30 = 2$$

$$(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = 1 \vee 1 = 1$$

所以 $2 \wedge (3 \vee 5) \neq (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5)$,交对并不是可分配的,$(A, \mathrm{t})$不是分配格。

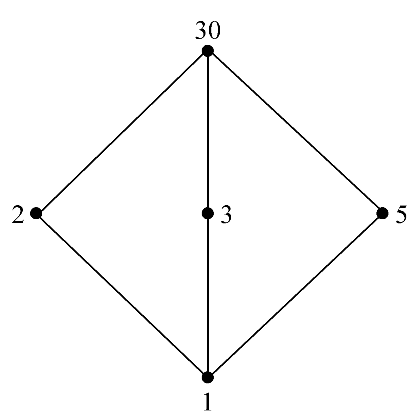



图　4.4

分配格有如下重要性质。

**定理 4.5.6**　设$(A, \vee, \wedge)$是分配格,对于 $A$ 中元素 $a, b, c$,如果 $a \wedge b = a \wedge c$ 且 $a \vee b = a \vee c$,则有 $b = c$。

证明　由吸收律可得

$$
\begin{aligned}
b &= b \vee (a \wedge b) \\
&= b \vee (a \wedge c) \\
&= (b \vee a) \wedge (b \vee c) \\
&= (a \vee c) \wedge (b \vee c) \\
&= (a \wedge b) \vee c \\
&= (a \wedge c) \vee c \\
&= c
\end{aligned}
$$

由此证得 $b = c$。

**2 .有界格**

**定义 4 .5 .5** 设$(A, \leq)$是格,如果 $A$ 中存在元素 $a$,使得对于 $A$ 中任何元素 $x$,都有

$$x \leq a$$

则称 $a$ 为格的全上界。

**定义 4 .5 .6** 设$(A, \leq)$是格,如果 $A$ 中存在元素 $b$,使得对于 $A$ 中任何元素 $x$,都有

$$b \leq x$$

则称 $b$ 为格的全下界。

例如,在格$(P(A),\quad)$中,$A$ 是全上界,空集  是全下界。

又如,$A = \{1,2,3,4,5\}$,已证明对于小于等于关系,$(A, \leq)$是格,在格$(A, \leq)$中,5 是全上界,1 是全下界。

**定理 4 .5 .7** 在格$(A, \leq)$中,若有全上界,则全上界是惟一的。

证明 用反证法。

设 $A$ 中有两个全上界 $a$ 和 $a$ $(a \neq a)$,由于 $a$ 是全上界,所以有 $a \leq a$;同样由于 $a$ 是全上界,所以有 $a \leq a$,由此可得 $a = a$,这与假设 $a \neq a$ 矛盾。所以格$(A, \leq)$若有全上界,则全上界是惟一的。

**定理 4 .5 .8** 在格$(A, \leq)$中,若有全下界,则全下界是惟一的。

证明与定理 4 .5 .7 相仿。

通常把格的全上界记为 1,全下界记为 0。

**定义 4 .5 .7** 设$(A, \vee, \wedge)$是格,如果格 $A$ 中,既有全上界 1 又有全下界 0,则称格$(A, \vee, \wedge)$为有界格。有界格常记作$(A, \vee, \wedge, 0, 1)$。

例如,$(P(A), \cup, \cap)$是有界格,常记为:$(P(A), \cup, \cap, \quad, A)$。

**定理 4 .5 .9** 设$(A, \vee, \wedge, 0, 1)$是有界格,则对于 $A$ 中任意元素 $a$,都有

$$a \vee 1 = 1 \qquad a \wedge 1 = a$$
$$a \vee 0 = a \qquad a \wedge 0 = 0$$

证明从略。

**定理 4 .5 .10** 有限格必是有界格。

证明从略。

**3 .有补格**

**定义 4 .5 .8** 设$(A, \vee, \wedge, 0, 1)$是有界格,$a \in A$,如果 $A$ 中存在元素 $b$,使得

$$a \vee b = 1$$

$$a \wedge b = 0$$

则称 $b$ 是 $a$ 的补元。

显然,当 $b$ 是 $a$ 的补元时,$a$ 也是 $b$ 的补元。

例如,设 $(A, t)$ 是格,其哈斯图如图 4.5 所示。

由图可知,在 $(A, t)$ 中,0 和 1 互为补元,$a$ 和 $b$ 互为补元。

注意,并非格中每一个元素都有补元,且一个元素可以有多个补元。

例如,$(A, t)$ 是格,其中 $A = \{1,2,3,4,6,9,36\}$,t 为整除关系。$(A, t)$ 的哈斯图如图 4.6 所示。

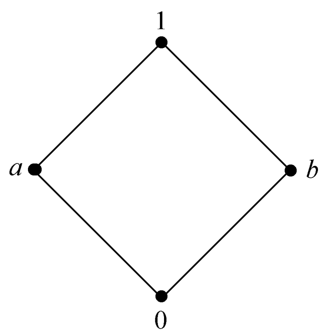



图 4.5

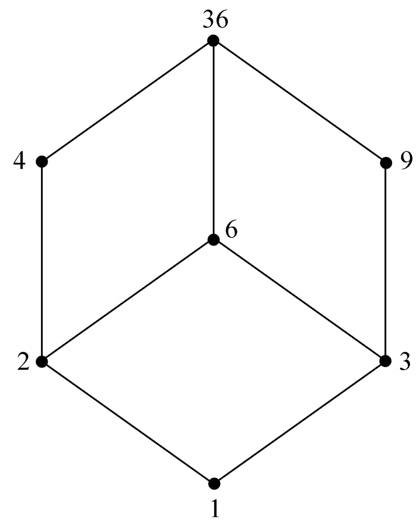



图 4.6

由图 4.6 可知,4 和 3 互补,且 4 和 9 又是互补的,所以 4 有两个补元;另外,9 也有两个补元:4 和 2;1 和 36 互补;但 6 没有补元。

**定义 4.5.9** 在有界格中,如果每个元素都有补元,则称此格为有补格。

例如,$(A, t)$ 是格,其中 $A = \{1,2,3,6\}$,t 是整除关系,由于 1 和 6 互补,2 和 3 互补,所以 $(A, t)$ 是有补格。

又如,$(A, t)$ 是格,其哈斯图如图 4.7 所示。

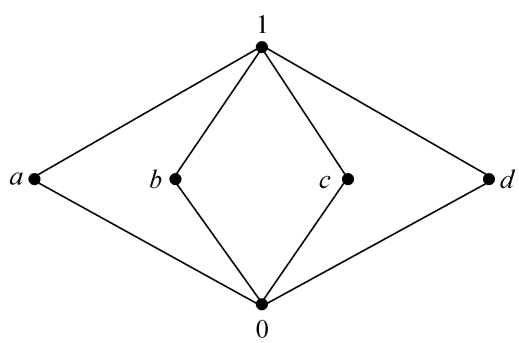



图 4.7

由图 4.7 可知,0 和 1 互为补元,$a$ 有 3 个补元:$b, c, d$;$b$ 有 3 个补元:$a, c, d$;$c$ 有 3 个补元:$a, b, d$;$d$ 有 3 个补元:$a, b, c$。由此可知,格 $(A, t)$ 中每个元素都有补元,所以 $(A, t)$ 是有补格。

### 4.5.3 布尔代数

**定义 4.5.10** 有补分配格称为布尔格或布尔代数。

在有补格中,每个元素都有补元,但可能有多个补元,而在有补分配格(布尔格)中有如下定理。

**定理 4.5.11** 设$(A, t)$是有补分配格,则 $A$ 中每个元素的补元是惟一的。

**证明** 设 $a$ 是 $A$ 中元素,如果 $a$ 有两个补元 $b$ 和 $c$,于是有

$$a \vee b = 1 \qquad a \wedge b = 0$$
$$a \vee c = 1 \qquad a \wedge c = 0$$

由此可知,$a \vee b = a \vee c$ 和 $a \wedge b = a \wedge c$,由于$(A, t)$是分配格,所以 $b = c$(见定理 4.5.6)。由此证得 $A$ 中每个元素的补元是惟一的。

由于布尔代数(有补分配格)中每个元素 $a$ 仅有一个补元,可把 $a$ 的补元记作 $\bar{a}$,若把 $\bar{a}$ 看作是对 $a$ 进行取补运算后所得的元素,常把布尔代数记作$(A, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$。

当 $A$ 为有限集合时,$(P(A), \cup, \cap, ^{-}, ?, A)$是具有普遍意义的布尔代数。

例如,当 $A = \{a, b, c\}$ 时,$P(A) = \{\ , \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$。易见, 和$\{a, b, c\}$互为补元,$\{a\}$和$\{b, c\}$互为补元,$\{b\}$和$\{a, c\}$互为补元,$\{c\}$和$\{a, b\}$互为补元。$\{P(A), \cup, \cap\}$又是分配格,所以$(P(A), \cup, \cap, ^{-}, \ , A)$是布尔代数。

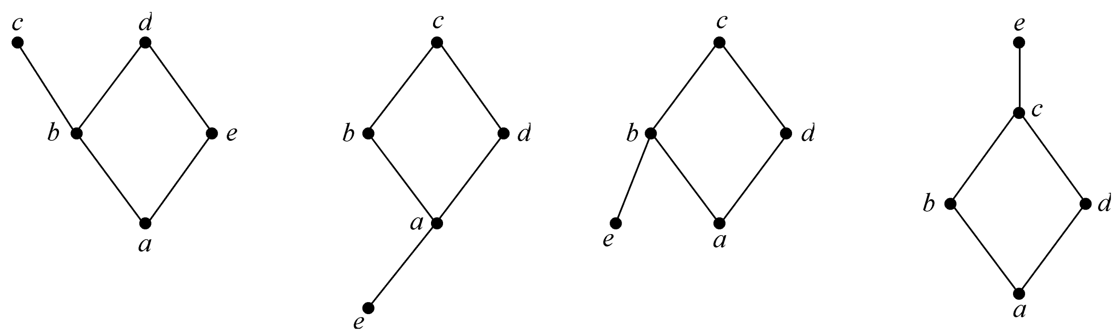
可以证明,有限布尔代数与某个$(P(A), \cup, \cap, ^{-}, \ , A)$有相同的结构。由于当 $|A| = n$ 时,$|P(A)| = 2^n$,所以有限布尔代数都有 $2^n$ 个元素。

## 4.5.4 重点和难点分析

本节的重点是:理解格和子格的定义,了解特殊格(包括布尔代数)的定义和有关特征。

本节的难点是:能同时运用格的两种定义去分析问题。

**例 4.20** 图 4.8(a),(b),(c),(d)分别是 4 个偏序集的哈斯图表示。问:其中哪些偏序集是格?




(a) (b) (c) (d)

图 4.8

**解** 在图4.8(a)中,由于 $c$, $d$ 没有上确界,所以它不是格;在图 4.8(c)中,由于 $a$, $e$ 没有下确界,所以它也不是格。

图 4.8(b)和(d)都是格。

**例 4.21** 设 $A = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$,$A$ 上的偏序关系 t 是整除关系,请画出$(A, t)$的哈斯图,并说明$(A, t)$不是格。

**解** 图 4.9 是$(A, t)$的哈斯图表示。

由图4.9可知,$A$ 中元素 2 和 3 的上界为 12,18,36。但由于 12 和 18 是“不可比”的,所以 2 和 3 没有上确界,$(A, t)$不是格。

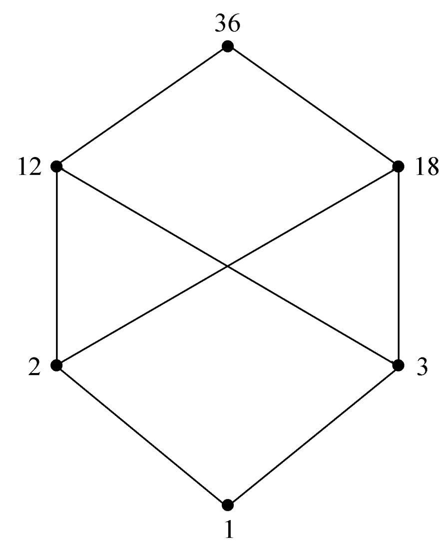



图 4.9

**例 4.22** 在格$(A, t)$中,$A = \{1, 2, 3, 5, 30, 60\}$,t 是

**整除关系。请写出( *A*, t ) 导出的格( *A*, ∨, ∧) 中, ∨ 和 ∧ 的运算表。**

**解** **为了方便地写出 ∨ 和 ∧ 的运算表,可先画出( *A*, t ) 的哈斯图(见图** 4 .10)。**由图** 4 .10 **可知, ∨ 的运算表和 ∧ 的运算表如表** 4 .23 **所示。**

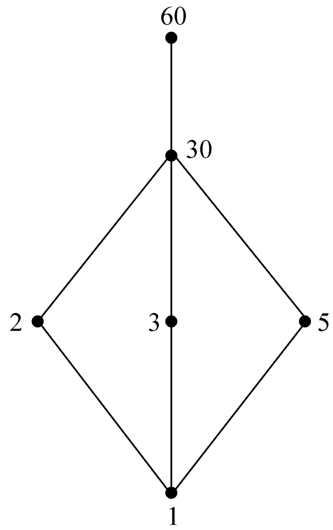



**图** 4 .10

**表 4 .23**

| ∨ | 1 | 2 | 3 | 5 | 30 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 30 | 60 |
| 2 | 2 | 2 | 30 | 30 | 30 | 60 |
| 3 | 3 | 30 | 3 | 30 | 30 | 60 |
| 5 | 5 | 30 | 30 | 5 | 30 | 60 |
| 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 60 |
| 60 | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 |

| ∧ | 1 | 2 | 3 | 5 | 30 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 |
| 30 | 1 | 2 | 3 | 5 | 30 | 30 |
| 60 | 1 | 2 | 3 | 5 | 30 | 60 |

**例 4 .23** **图** 4 .11( a) , ( b) , ( c) , ( d) **是** 4 **个格的哈斯图表示,说明其中哪些格不是分配格。**

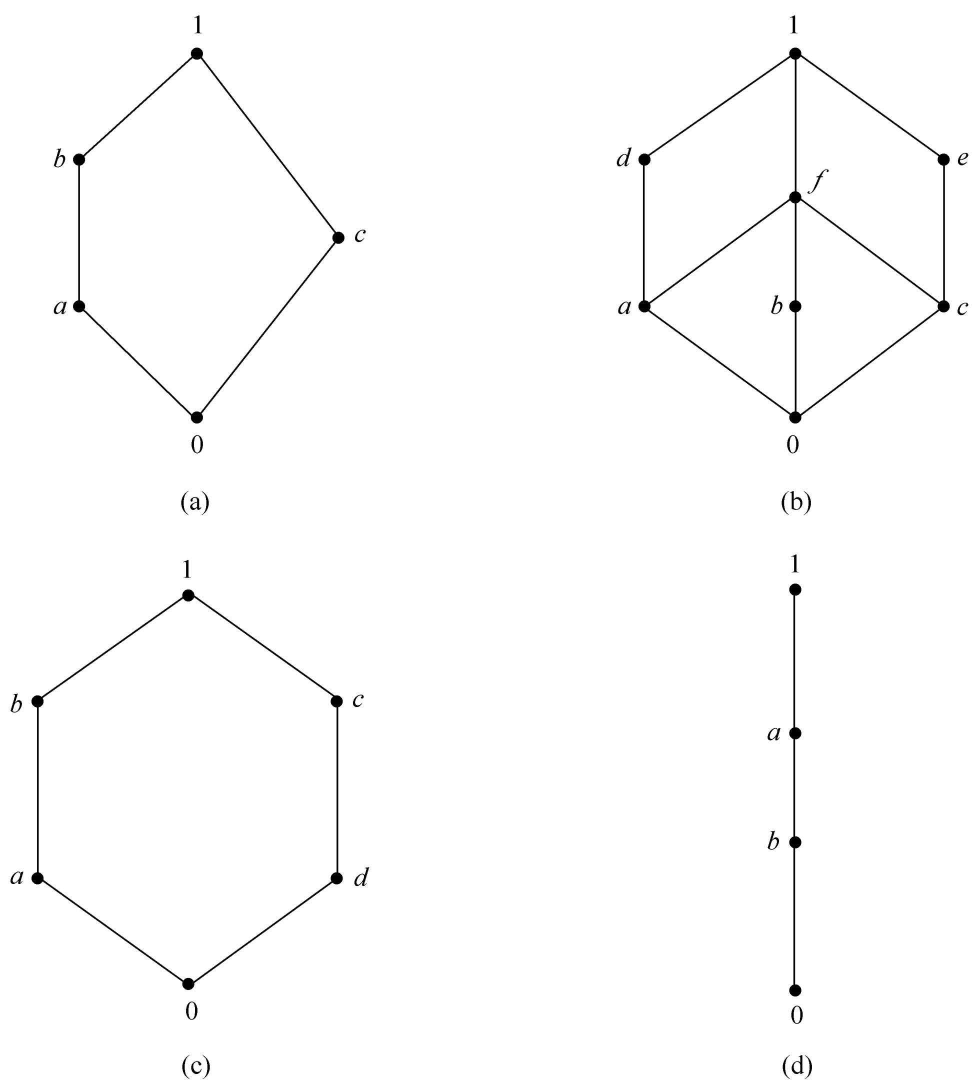



**图** 4 .11

**解**　图 4 .11(a) 所示的格不是分配格,因为

$$b \wedge (c \vee a) = b \wedge 1 = b$$

$$(b \wedge c) \vee (b \wedge a) = 0 \vee a = a$$

由此可知,$b \wedge (c \vee a) \neq (b \wedge c) \vee (b \wedge a)$,所以图 4 .11(a) 所示的格不是分配格。

图 4 .11(b) 所示的格也不是分配格。因为

$$b \wedge (c \vee a) = b \wedge f = b$$

$$(b \wedge c) \vee (b \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$$

由此可知,$b \wedge (a \vee c) \neq (b \wedge a) \vee (b \wedge c)$,所以图 4 .11(b) 所示的格不是分配格。

可以验证,图 4 .11(c) 和(d) 所示的格都是分配格。

**例 4 .24**　指出图 4 .12(a),(b) 所示的两个格中,各元素的补元。

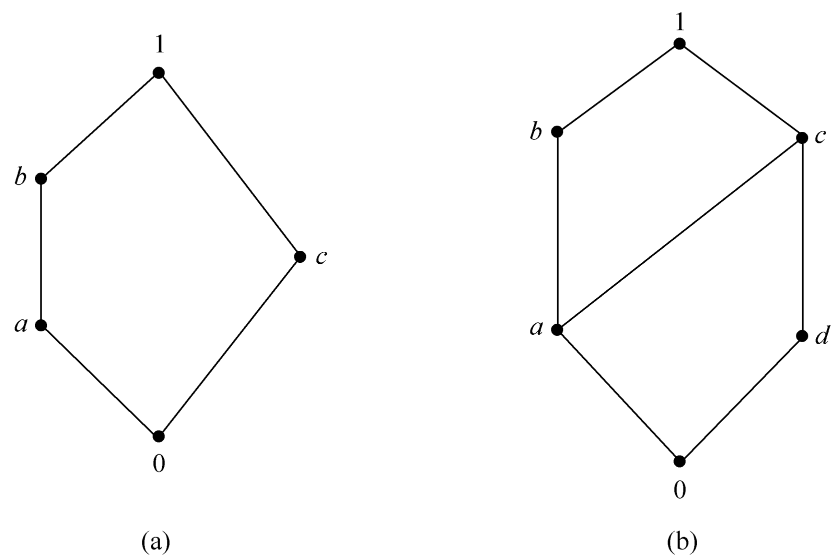



图　4 .12

**解**　在图 4 .12(a) 中,0 和 1 互为补元;$a$ 和 $c$ 互为补元且 $b$ 和 $c$ 也互为补元。所以 $c$ 有两个补元:$a$ 和 $b$。

在图 4 .12(b) 中,0 和 1 互为补元;$b$ 和 $d$ 互为补元;但 $a$ 和 $c$ 都没有补元。

**例 4 .25**　说明图 4 .13 所示的格是布尔代数。

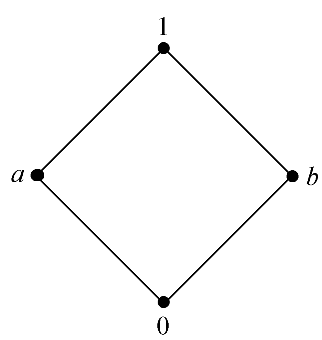



图　4 .13

**解**　由于此格是有限格,所以是有界格;又由于格中每个元素都有补元:0 和 1 互补,$a$ 和 $b$ 互补,所以此格是有补格;还可以验证此格是分配格,如

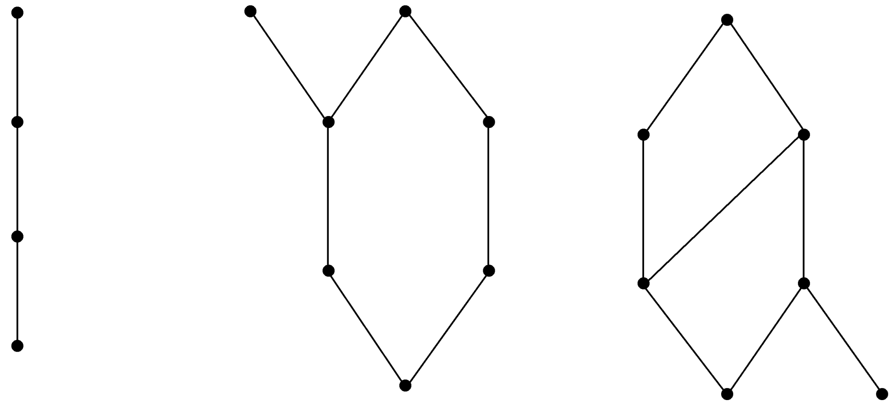
$$a \wedge (b \vee 1) = a \wedge 1 = a$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge 1) = 0 \vee a = a$$

所以此格是有补分配格,即布尔代数。

## 4.5.5　自测练习

1.图 4.14(a),(b),(c),(d) 分别是 4 个偏序集的哈斯图,请指出其中哪些偏序集是格。



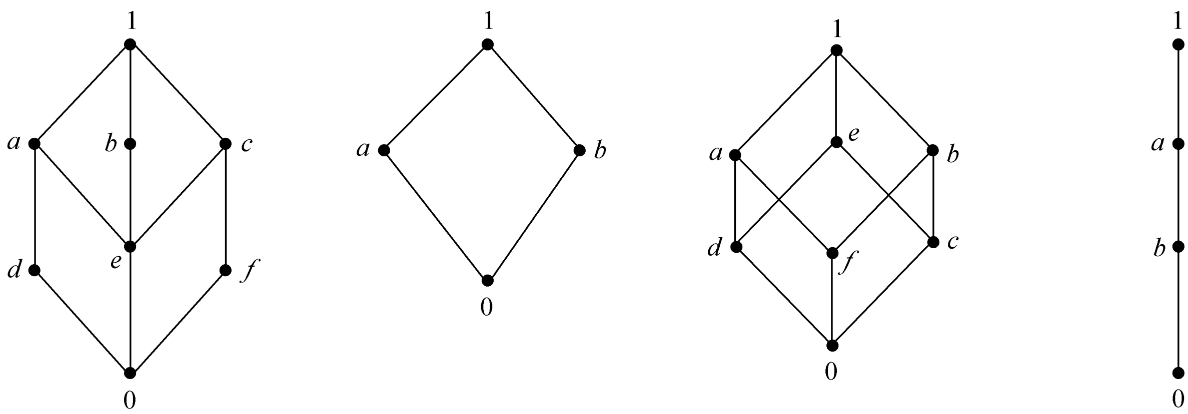
(a)　(b)　(c)　(d)

图　4.14

2.在偏序集$(A, t)$中, $A = \{1,2,3,4,6,36,24,72\}$, t 是整除关系,说明$(A, t)$不是格。

3.在格$(A, t)$中, $A = \{1,2,3,4,6,12\}$, t 是整除关系。请写出由$(A, t)$导出格$(A, \vee, \wedge)$中的 $\vee$ 和 $\wedge$ 的运算表。

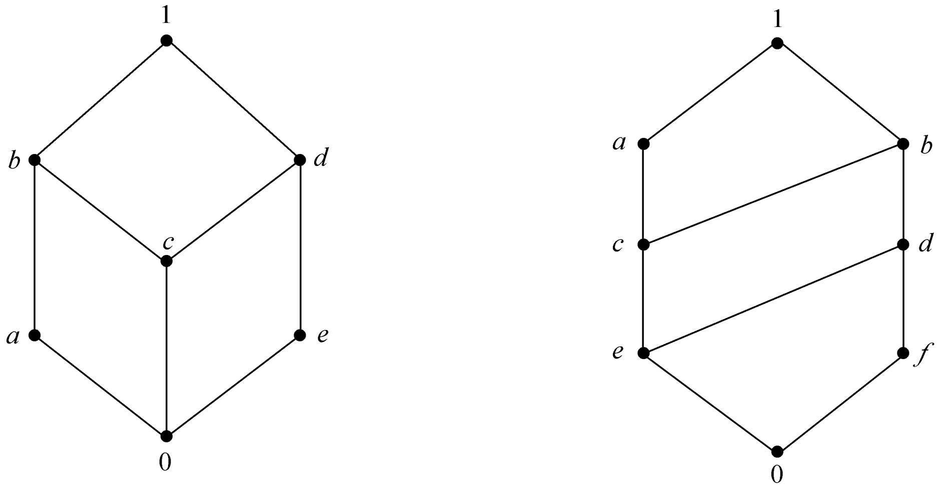
4.在图 4.15(a),(b),(c),(d) 所示的格中,哪些不是分配格。




(a)　(b)　(c)　(d)

图　4.15

5.指出图 4.16(a),(b) 所示的格中,哪个格是有补格。




(a)　(b)

图　4.16

6 .设 $A = \{a, b\}$,请画出布尔格$(P(A), \quad)$的哈斯图。

## 4 .5 .6　自测练习答案

1 .只有图 4 .14 中(a) 和(d) 所示的偏序集是格。

2 .先画出$(A, \mathbf{t}\ )$的哈斯图(见图 4 .17)。由图可知,元素 3 和 4 的上界为:24,36,72;由于 24 和 36 是“不可比”的,所以 3 和 4 没有上确界,$(A, \mathbf{t}\ )$不是格。

3 .格$(A, \vee, \wedge)$的运算表如表 4 .24 所示。

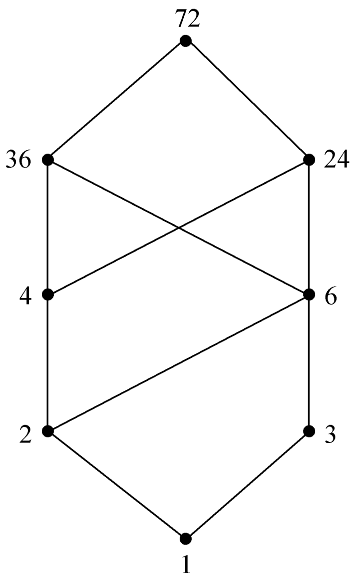



图　4 .17

表　4 .24

| $\vee$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |
| 2 | 2 | 2 | 6 | 4 | 6 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 3 | 12 | 6 | 12 |
| 4 | 4 | 4 | 12 | 4 | 12 | 12 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 12 | 6 | 12 |
| 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |

| $\wedge$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 4 | 1 | 2 | 1 | 4 | 2 | 4 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 2 | 6 | 6 |
| 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |

4 .图 4 .15(a) 所示的格不是分配格。因为

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = e \vee e = e$$

所以 $\wedge$ 对 $\vee$ 不是可分配的,此格不是分配格。

可以验证,图 4 .15(b),(c),(d) 所示的格都是分配格。

5 .图 4 .16(a) 所示的格不是有补格,因为元素 $c$ 没有补元。

图 4 .16(b) 所示格也不是有补格,因为元素 $c$ 没有补元。

6 .$(P(A), \quad)$的哈斯图如图 4 .18 所示。

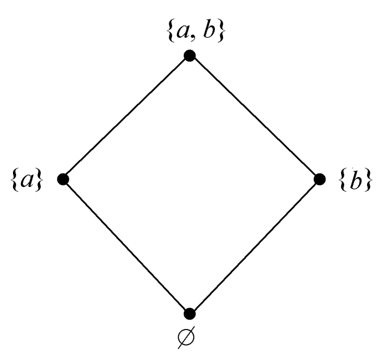



图　4 .18

# 第 5 章　图　论

图论创建于 18 世纪 30 年代,在近 50 年里有了飞速的发展,成为受到广泛关注的数学分支。图论中的很多研究成果已经在各个科技领域得到颇有成效的应用,如在计算机科学中的开关理论、逻辑设计、人工智能、形式语言、计算机图像以及信息的组织和检索等方面都有重要用途。

在第 3 章中曾介绍了二元关系的图形表示,即关系图。在关系图中,主要关心研究对象之间的关系,因此图中顶点的位置以及顶点和顶点之间连线的曲直长短都是无关紧要的,重要的是两个顶点之间是否有连线(图论中称为边),这样的图正是图论的主要研究对象。图论中还根据实际需要,对这类图进行了推广,并且把图当作一个抽象的数学系统来进行研究。

本章主要介绍图论的基本概念,图的连通性以及有着广泛应用的特殊图:欧拉图、哈密顿图、偶图、平面图和树等。

按照自学考试大纲的考核要求,其中图的基本概念要求达到"识记"层次;图的连通性要求达到"领会"层次;欧拉图和哈密顿图要求达到"简单应用"层次;平面图要求达到"简单应用"层次;树要求达到"综合应用"层次。

## 5.1　图的基本概念

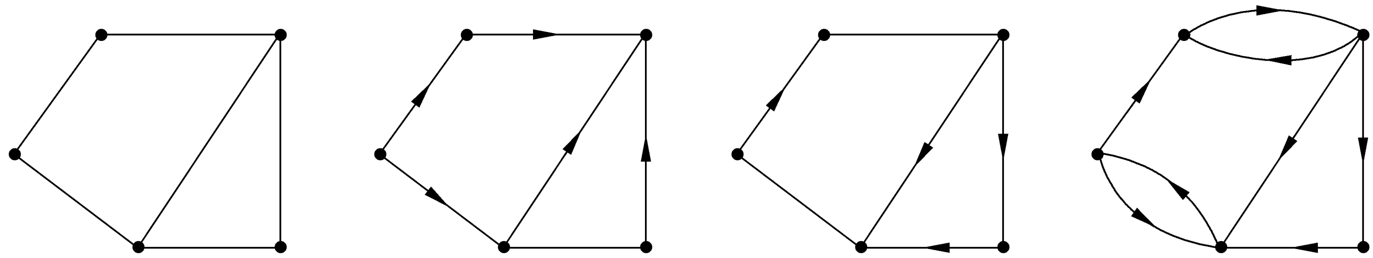
### 5.1.1　图的基本类型

一个图是由一些顶点以及连接顶点的边构成的。边又分为两种:有向边和无向边。在有向边的两个端点中,一个是始点,另一个是终点,有向边的箭头方向自始点指向终点。在无向边中,每个端点都可作为始点或终点。

如果图中各边都是有向边,则称此图为有向图。

如果图中各边都是无向边,则称此图为无向图。

如果图中既有有向边又有无向边,则称此图为混合图。



(a)　(b)　(c)　(d)

图　5.1

通常用两条箭头方向相反,端点相同的有向边来替代一条无向边,所以混合图可以转

化为有向图。本章不再对混合图作单独的讨论。

在图5.1中,图5.1(a)是无向图,图5.1(b)是有向图,图5.1(c)是混合图,图5.1(d)是此混合图转化成的有向图。

如果把有向图 $D$ 中每条有向边的箭头去掉,使之成为无向图,由此而得到的无向图 $G$ 称为有向图 $D$ 的底图。在图5.2中,图5.2(b)是图5.2(a)的底图。

(a)　　　　　　(b)

图　5.2

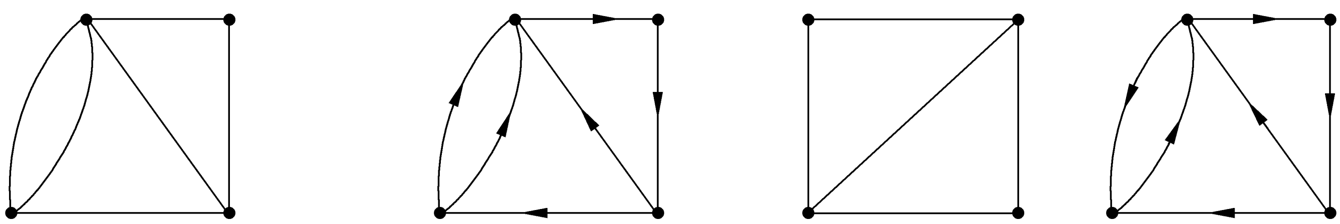
当图中仅有有限个顶点时,称为有限图,否则称为无限图。本书只讨论有限图。

具有 $n$ 个顶点的有限图称为 $n$ 阶图。具有 $n$ 个顶点,$m$ 条边的图常记作 $(n, m)$ 图。

在图(有向图或无向图)中,若顶点 $a$ 和 $b$ 是边 $e$ 的端点,称顶点 $a$ 和 $b$ 是邻接的,并称边 $e$ 关联于顶点 $a$ 和 $b$。如果一条边的两个端点重合,称为自环或自回路。

如果两个顶点之间有多条边(对于有向图,则有多条同方向的边),则称这些边为平行边,两个顶点 $a$ 和 $b$ 间平行边的条数称为边 $ab$ 的重数。含有平行边的图称为多重图,不含平行边且不含自环的图称为简单图。

例如,在图5.3中,图5.3(a)是无向多重图,图5.3(b)是有向多重图,图5.3(c)是无向简单图,图5.3(d)是有向简单图。



(a)　　　　(b)　　　　(c)　　　　(d)

图　5.3

只含顶点而没有边的图称为零图。

## 5.1.2　图中顶点的度数

**1.无向图中顶点的度数**

**定义5.1.1**　设图 $G$ 是无向图,$v$ 是图 $G$ 中的顶点,与 $v$ 关联的边的条数称为顶点 $v$ 的度数,记作 $\deg(v)$。

例如,在图5.4中,顶点 $a$ 的度数为1,$b$ 的度数为3,$c$ 的度数为4,$d$ 的度数为2,$e$ 的度数为3,$f$ 的度数为3。

度数为零的点称为孤立点,度数为1的点称为悬挂点,与悬挂点关联的边称为悬挂边。今后常把度数为 $k$ 的顶点称为 $k$ 度点。

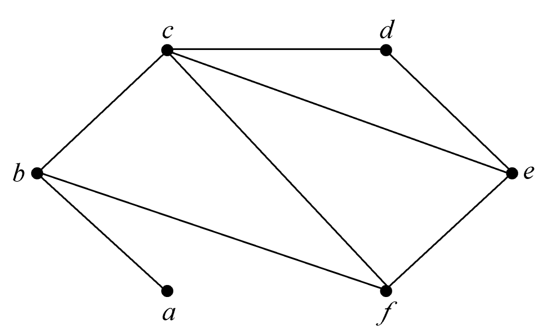



图　5.4

**定理 5.1.1** 设图 $G$ 是无向图，$G$ 中含有 $n$ 个顶点：$v_1, v_2, \cdots, v_n$，$m$ 条边，则图中各顶点的度数之和等于边数的两倍，即

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m$$

**证明** 因为在无向图中，每一条边使其所关联的两个顶点各增加 1 度，由此得证。

由定理 5.1.1 可知，无向图中各顶点的度数之和为偶数，由此易得下列推论。

**推论** 在无向图中，度数为奇数的顶点个数为偶数。

**2. 有向图中顶点的度数**

**定义 5.1.2** 设图 $G$ 是有向图，$v$ 是图 $G$ 的顶点，以 $v$ 为始点的有向边的条数称为 $v$ 的出度，记为 $\deg^{+}(v)$；以 $v$ 为终点的有向边的条数称为 $v$ 的入度，记为 $\deg^{-}(v)$。

例如，在图 5.5 中，点 $a$ 的出度为 3，入度为 1，点 $b$ 的出度为 2，入度为 1；点 $c$ 的出度为 1，入度为 2；点 $d$ 的出度为 1，入度为 3；点 $e$ 的出度为 1，入度为 1。即有

$$\deg^{+}(a) = 3 \qquad \deg^{-}(a) = 1$$
$$\deg^{+}(b) = 2 \qquad \deg^{-}(b) = 1$$
$$\deg^{+}(c) = 1 \qquad \deg^{-}(c) = 2$$
$$\deg^{+}(d) = 1 \qquad \deg^{-}(d) = 3$$
$$\deg^{+}(e) = 1 \qquad \deg^{-}(e) = 1$$

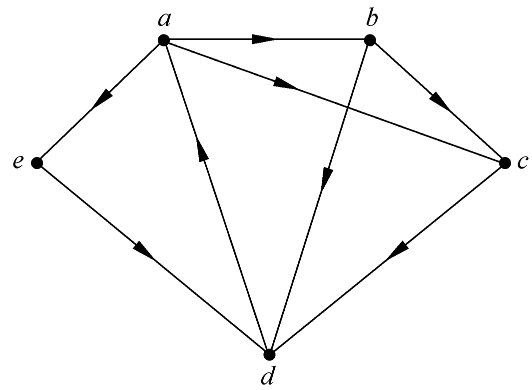



图 5.5

**定理 5.1.2** 设图 $G$ 是有向图，$G$ 中含有 $n$ 个顶点：$v_1, v_2, \cdots v_n$，$m$ 条边，则图中各顶点的出度之和与各顶点的入度之和相等，且等于图的边数，即

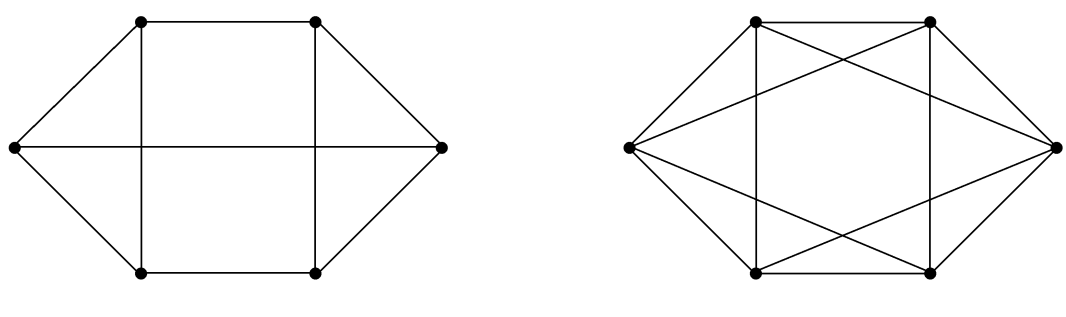
$$\sum_{i=1}^{n} \deg^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \deg^{-}(v_i) = m$$

**证明** 由于每一条有向边为始点提供 1 个出度，为终点提供 1 个入度，而图 $G$ 中所有各顶点的出度之和与入度之和是由 $m$ 条边提供的，所以定理得证。

### 5.1.3 正则图与完全图

**定义 5.1.3** 设图 $G$ 是无向简单图，如果图中每一个顶点的度数都为 $k$，则称图 $G$ 为 $k$ 度正则图。

例如，图 5.6 中，图 5.6(a) 是 3 度正则图，图 5.6(b) 是 4 度正则图。

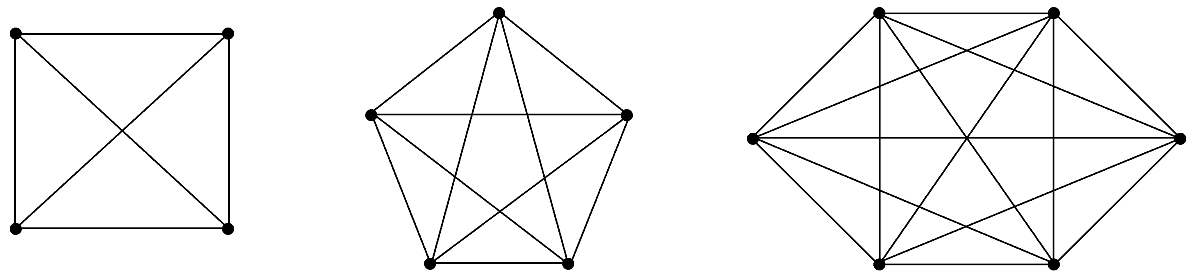


(a) (b)

图 5.6

**定义 5.1.4** 在 $n$ 阶无向简单图中，如果任意两个不同的顶点之间都有一条边关联，则称此无向图为无向完全图，记作 $K_n$。

例如,图 5.7(a) 是 4 阶无向完全图;图 5.7(b) 是 5 阶无向完全图;图 5.7(c) 是 6 阶无向完全图。



(a)　　(b)　　(c)

图　5.7

易见,$n$ 阶无向完全图 $K_n$ 是 $(n-1)$ 度正则图。

**定理 5.1.3**　在 $n$ 阶无向完全图 $K_n$ 中,共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边。

**证明**　由无向完全图的定义可知,在 $n$ 阶无向完全图 $K_n$ 中,每个顶点的度数均为 $n-1$,所以无向完全图 $K_n$ 中各顶点的度数之和为:$n(n-1)$。又由定理 5.1.1 可知,无向图中各顶点的度数之和为边数的两倍,由此证得无向完全图 $K_n$ 的边数为 $\frac{n(n-1)}{2}$。

**定义 5.1.5**　在无向图 $G$ 中,各顶点度数的最大者称为图 $G$ 的最大度,记作 $\Delta(G)$;各顶点度数的最小者称为图 $G$ 的最小度,记作 $\delta(G)$。

易见,在 $k$ 度正则图和无向完全图中,都有 $\Delta(G) = \delta(G)$。

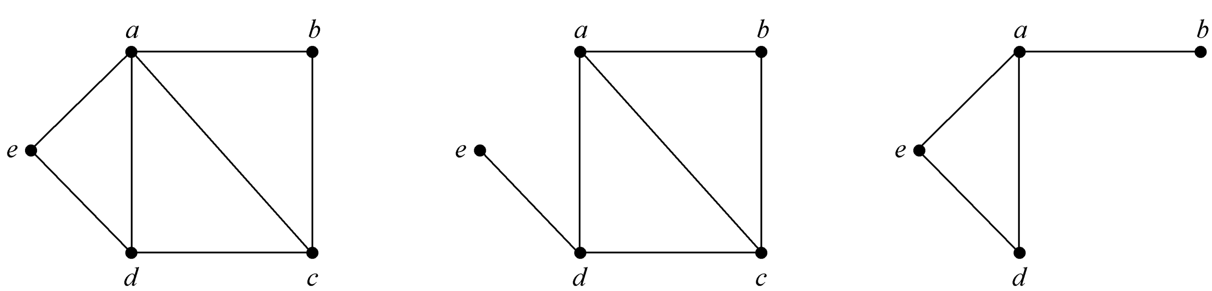
### 5.1.4　子图

首先介绍图的两种操作。

删边:删去图中某一条边,但仍保留这条边的两个端点。

删点:删去图中某一点以及与这个点关联的所有边。

例如,图 5.8(a) 删去边 $ae$ 后所得的图如图 5.8(b) 所示,图 5.8(a) 删去点 $c$ 后所得的图如图 5.8(c) 所示。




(a)　　(b)　　(c)

图　5.8

**定义 5.1.6**　在图 $G$ 中删去一些边或顶点后所得的图称为图 $G$ 的子图。

如果图 $G$ 中所有顶点组成的集合为 $V$,所有边组成的集合为 $E$;子图 $G'$ 中所有顶点组成的集合为 $V'$,所有边组成的集合为 $E'$。则有:$V \quad V'$, $E \quad E'$。

**定义 5.1.7**　由图 $G$ 删去一些边后所得的子图称为图 $G$ 的生成子图。

由于在图中删去一条边时,仍保留边的两个端点,所以图 $G$ 的生成子图必然含有图 $G$ 的所有顶点。因此生成子图也可以这样定义:保留图 $G$ 的所有顶点的子图称为图 $G$ 的生成子图。

例如,图 5.9(b) 是图 5.9(a) 的生成子图,但图 5.9(c) 不是图 5.9(a) 的生成子图。

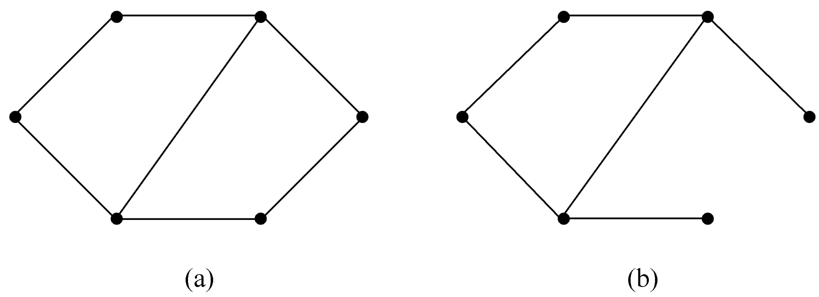



图　5.9

## 5.1.5　图的同构

当需要画出4阶无向完全图 $K_4$ 的图形表示时,由于4个顶点的位置不同,可以画成如图5.10(a) 所示的样子,也可以画成如图 5.10(b) 所示的样子。这两个图都表现出 4 阶无向完全图 $K_4$ 的"图中每一个顶点都与其他 3 个顶点邻接"的特点,称这两个图是同构的。

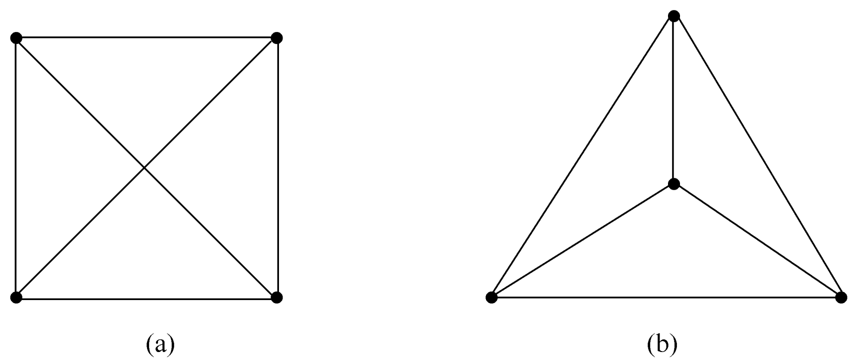



图　5.10

下面给出两个图同构的定义。

**定义 5.1.8**　设图 $G$ 的所有顶点构成的集合为 $V$($V$ 也称为点集),所有边构成的集合为 $E$($E$ 也称为边集);图 $G'$ 的点集为 $V'$,边集为 $E'$。如果存在着 $V$ 到 $V'$ 的双射函数 $f$,使得对于任意的顶点 $u, v \in V$,边$(uv) \in E$,当且仅当边$(f(u)f(v)) \in E'$,则称图 $G$ 和图 $G'$ 同构,并记作 $G \cong G'$。

上述定义说明,如果两个图的点和边能建立一一对应关系,且点和边的关联关系也能保持一一对应关系,则这两个图是同构的。

两个同构的图,除了顶点所在的位置不同外,实际上代表了同样的组合结构。

例如,图 5.11(a) 和图 5.11(b) 是同构的,图 5.11(c) 和图 5.11(d) 是同构的,这表明由于图中顶点位置的不同而形成图的不同的"外貌"。

显然,判断两个图是否同构是困难的,但至今尚没有一种简单而有效的判断图同构的方法,这是图论中的一个重要难题。

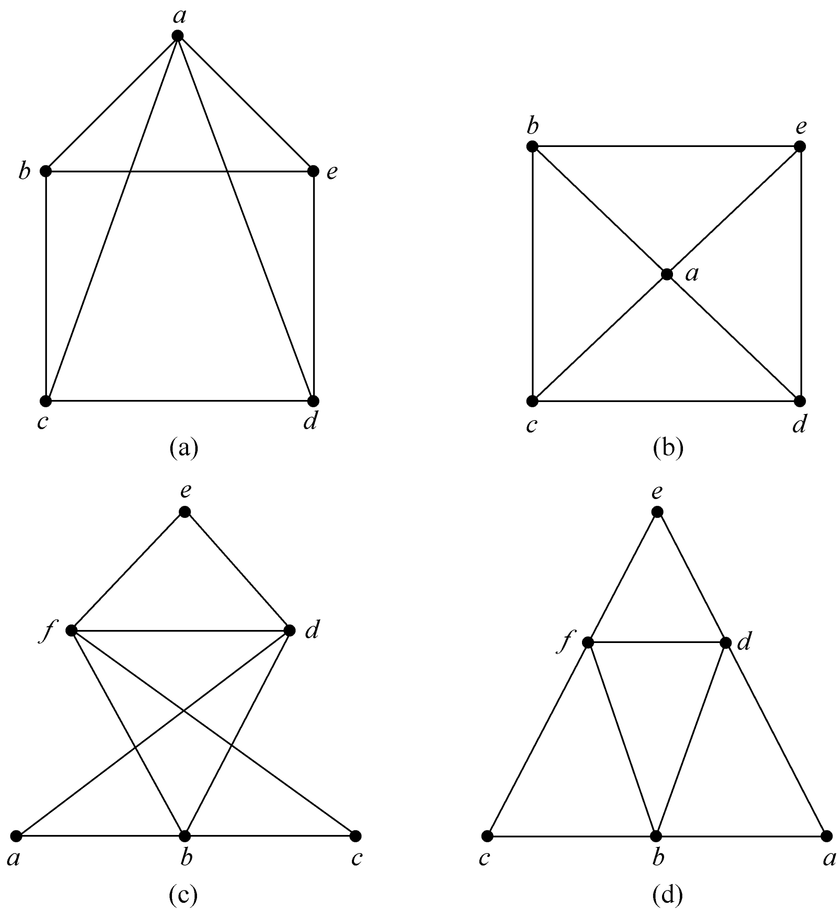



图　5.11

## 5.1.6　图和矩阵

简单图除了用图形表示外,还可以用矩阵表示。

**定义 5.1.9**　设图 $G$ 中的顶点集为 $V$,边集为 $E$, $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $v_i$ 为始点, $v_j$ 为终点的边记作 $(v_i, v_j)$。令

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ 为图 $G$ 的邻接矩阵。

例如,图 5.12 的邻接矩阵为:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

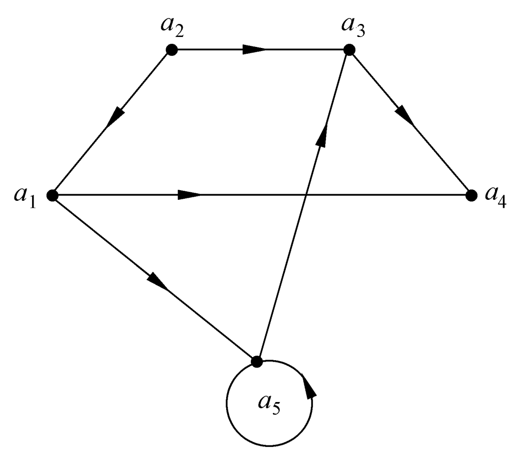



图　5.12

又如,图 5.13 的邻接矩阵为:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

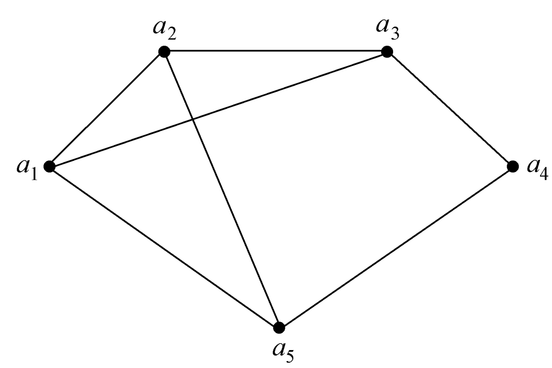



图　5.13

由图的邻接矩阵的定义可知:

当图为无向图时,其邻接矩阵是对称方阵。当图为无

向完全图时,其邻接矩阵中,除对角线元素都为 0 外,其他元素都为 1。

邻接矩阵中,第 $k$ 行元素相加的值,就是顶点 $v_k$ 的出度,第 $k$ 列元素相加的值,就是顶点 $v_k$ 的入度。

在无向简单图中,其邻接矩阵各行元素相加的值都为 $k$,则此无向简单图是 $k$ 度正则图。

### 5.1.7 重点和难点分析

本节的重点是:熟练掌握和运用"图中各顶点的度数之和是边数两倍"的重要结论:掌握完全图、正则图、主子图、生成子图的定义和特性;能判别一些简单图形的同构与否。

难点是:判别图的同构。

**例 5.1** 设图 $G$ 是 4 度正则图,若图中有 $n$ 个顶点,$m$ 条边,证明 $m = 2n$。

**证明** 由于图 $G$ 是 4 度正则图,所以图 $G$ 中各顶点的度数之和为:$4n$;又由于图中各顶点的度数之和是边数的两倍,所以有 $4n = 2m$;从而证得 $m = 2n$。

**例 5.2** 设图 $G$ 是 4 度正则图,图中顶点数 $n$ 和边数 $m$ 满足:$n = m - 6$。求 $n$ 和 $m$,并画出一种符合题设条件的图形。

**解** 由上例可知,$m = 2n$,代入 $n = m - 6$ 后,即得 $n = 6$ 和 $m = 12$。图 5.14 所示的图即为所求的一种图形。

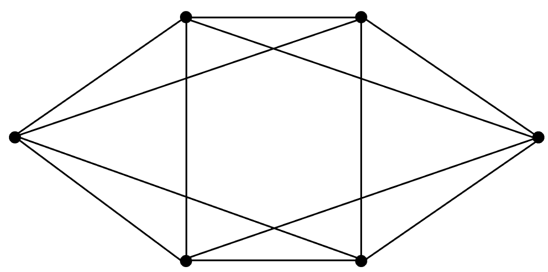


图 5.14

**例 5.3** 画出 4 阶无向完全图 $K_4$ 的所有不含孤立点(零度点)的生成子图。

**解** 一个图的生成子图就是含有图中所有顶点的子图。$K_4$ 的所有不含孤立点的生成子图如图 5.15(a),(b),(c),(d),(e) 所示。

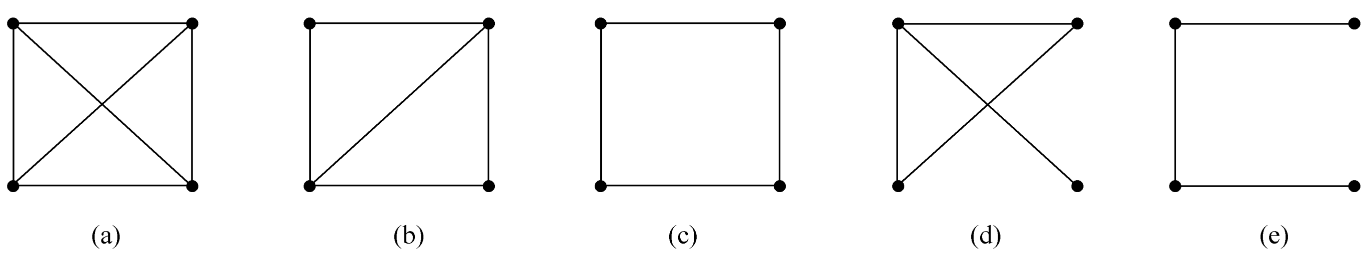



图 5.15

**例 5.4** 设无向图有 8 条边,其中有 3 个 3 度点,2 个 2 度点,其他都是 1 度点。请画出一种符合上述条件的图形。

**解** 设图中有 $x$ 个 1 度点,利用"图中各顶点的度数之和为边数两倍"可得:

$$x + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 2 \times 8$$

由此可知,$x = 3$。即此图有 3 个 3 度点,2 个 2 度点和 3 个 1 度点。图 5.16 所示的图即为所求的一种图形。

**例 5.5** 设图 $G$ 是 $n$ 阶有向简单图,其 $n$ 个顶点分别为:$v_1, v_2, \cdots, v_n$。如果图 $G$ 的底图为无向完全图 $K_n$。证明图 $G$ 中各个顶点的出度平方之和等于各个顶点的入度平方之和,即

$$\sum_{i=1}^{n}(\deg^+(v_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}(\deg^-(v_i))^2$$

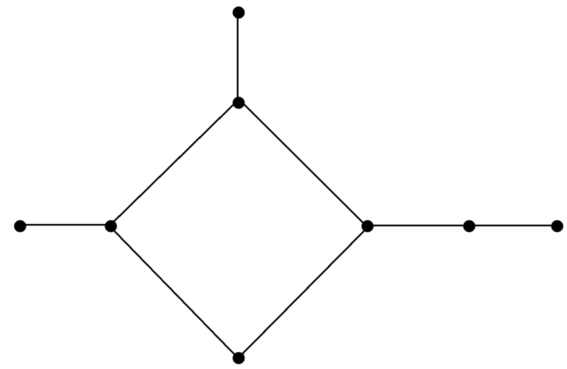


图 5.16

**证明** 在证明过程中,主要利用以下两点:

(1) 由于图 $G$ 的底图为 $K_n$,而在 $K_n$ 中,每一个顶点的度数为 $n-1$,所以图 $G$ 中每一点的出度和入度之和等于 $n-1$,即有

$$\deg^+(v_i) + \deg^-(v_i) = n-1$$

(2) 利用定理 5.1.2 可知,在有向图中,各个顶点的出度之和等于各个顶点的入度之和,即有

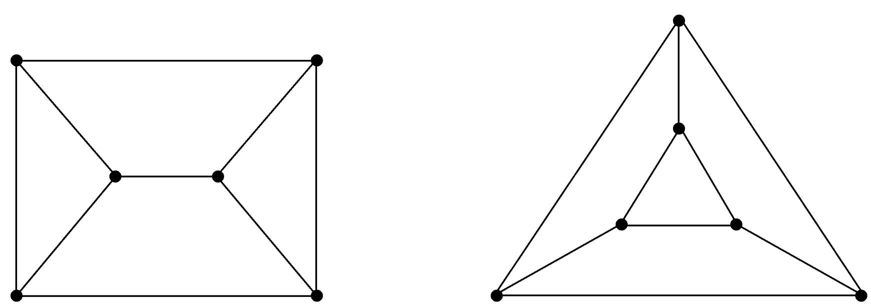
$$\sum_{i=1}^{n}\deg^+(v_i) = \sum_{i=1}^{n}\deg^-(v_i)$$

现在证明本题,由于

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\deg^+(v_i))^2 - \sum_{i=1}^{n}(\deg^-(v_i))^2 &= \sum_{i=1}^{n}((\deg^+(v_i))^2 - (\deg^-(v_i))^2)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\deg^+(v_i) + \deg^-(v_i))(\deg^+(v_i) - \deg^-(v_i))\\ &= (n-1)\sum_{i=1}^{n}(\deg^+(v_i) - \deg^-(v_i))\\ &= (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\deg^+(v_i) - \sum_{i=1}^{n}\deg^-(v_i)\right)\\ &= (n-1)\times 0 = 0\end{aligned}$$

由此证得:$\sum_{i=1}^{n}(\deg^+(v_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}(\deg^-(v_i))^2$。

**例 5.6** 证明下列两个图是同构的(见图 5.17)。



(a) (b)

图 5.17

**证明** 首先对图 5.17(a) 中各点分别标记为 1,2,3,4,5,6。见图 5.18(a)。把点 4,5 移至点 1,2 的左方,见图 5.18(b)。

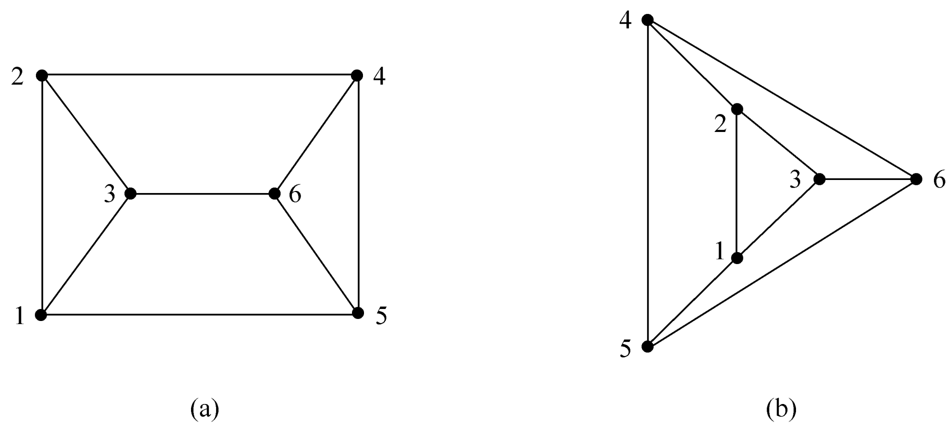



图 5.18

由此可知,图 5.17 所示两个图是同构的。

**例 5.7** 设 $G$ 是具有 $n$ 个顶点的 $k$ 度正则图, $\boldsymbol{A}$ 是其邻接矩阵,证明 $\boldsymbol{A}^2$ 中的对角线元素都为 $k$。

证明 设 $G$ 的邻接矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2$

$$\boldsymbol{B} = \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}$$

由线性代数知识可知, $\boldsymbol{B}$ 的对角线元素

$$b_{ii} = a_{i1}a_{1i} + a_{i2}a_{2i} + \cdots + a_{in}a_{ni}$$

由于 $G$ 是无向图,所以 $a_{i1} = a_{1i}, a_{i2} = a_{2i}, \cdots, a_{in} = a_{ni}$。由此可得

$$b_{ii} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2$$

又由于 $a_{ij}$ 取值仅为 1 或 0,所以 $a_{i1}^2 = a_{i1}, a_{i2}^2 = a_{i2}, \cdots, a_{in}^2 = a_{in}$,于是有

$$\begin{aligned} b_{ii} &= a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} \\ &= \deg(v_i) \\ &= k \end{aligned}$$

由此证得矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的对角元素都为 $k$。

### 5.1.8 自测练习

1. 指出图 5.19 中,哪些是简单图?

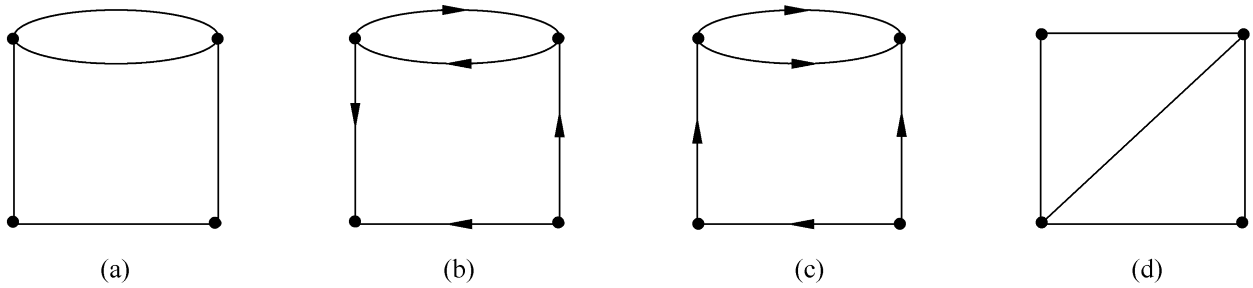



图 5 .19

2 .设无向图 $G$有 16 条边,有 3 个 4 度点,4 个 3 度点,其余顶点的度数均小于 3。问: $G$中 至少有几个顶点 ?

3 .证明 3 度正则图必有偶数个顶点。

4 .设无向图 $G$共有 9 个顶点,每个顶点的度数不是 5 就是 6。证明图 $G$中至少有 5 个 6 度点或至少有 6 个 5 度点。

5 .设图 $G$有 $n$ 个顶点,$n+1$ 条边。证明图 $G$中至少有一个顶点,其度数大于等于 3。

6 .画出图 5 .20 的所有主子图。

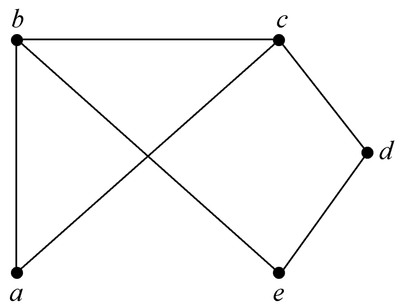



图 5 .20

7 .画出图 5 .21 的所有生成子图。

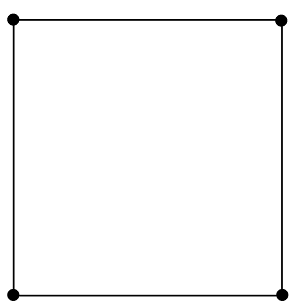


图 5 .21

8 .说明图 5 .22(a) 和(b) 是同构的。

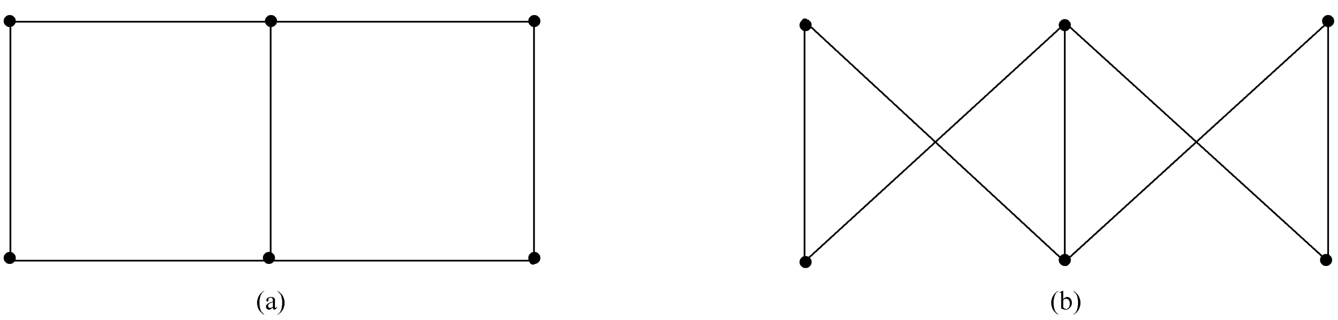



图 5 .22

9 .设简单图 $G$有 5 个顶点: $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ , $a_4$ , $a_5$ 。其邻接矩阵为:

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

**请画出图** $G$**的图形。**

### 5.1.9 自测练习答案

1.**图** 5.19(b) **和**(d) **是简单图。**

2.**由题设可知,图** $G$**有** 16 **条边,因此图** $G$**中各顶点度数之和为** 32。**由于图中有** 4 **个** 3 **度点,**3 **个** 4 **度点,这** 7 **个顶点已经"占用了"**24 **度,尚余下的** 8 **度,最少由** 4 **个** 2 **度点"占用"。所以图** $G$**中至少有** 11 **个顶点。**

3.**易知,**3 **度正则图中各顶点的度数之和为** $3n$($n$ **为图中顶点数**)。**由于图中各顶点的度数之和为边数的两倍,也即图中各顶点的度数之和为偶数,所以** $3n$**应为偶数,即** $n$**为偶数。由此证得** 3 **度正则图有偶数个顶点。**

4.**如果图中已至少有**6**个**5**度点,问题得证;否则,如果图中**5**度点的个数小于等于**5。**首先说明,图中不能有** 5 **个** 5 **度点,因为图中若有** 5 **个** 5 **度点,则图中各点的度数之和为:** $5\times5+4\times6=49$,**它不是偶数。由此可知,图中** 5 **度点的个数小于等于** 4,**所以图中** 6 **度点的个数大于等于** 5。**证毕。**

5.**用反证法,设图中** $n$ **个顶点为:** $v_1, v_2, \cdots, v_n$。**由题设可知**

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2n+2$$

**若设图中各点的度数都小于等于** 2,**于是有**

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) \leq 2n$$

**由此可得** $2n+2 \leq 2n$,**这是不可能的,所以图中至少有一个度数大于等于** 3 **的顶点。**

6.**其主子图如图** 5.23(a),(b),(c),(d),(e) **所示。**

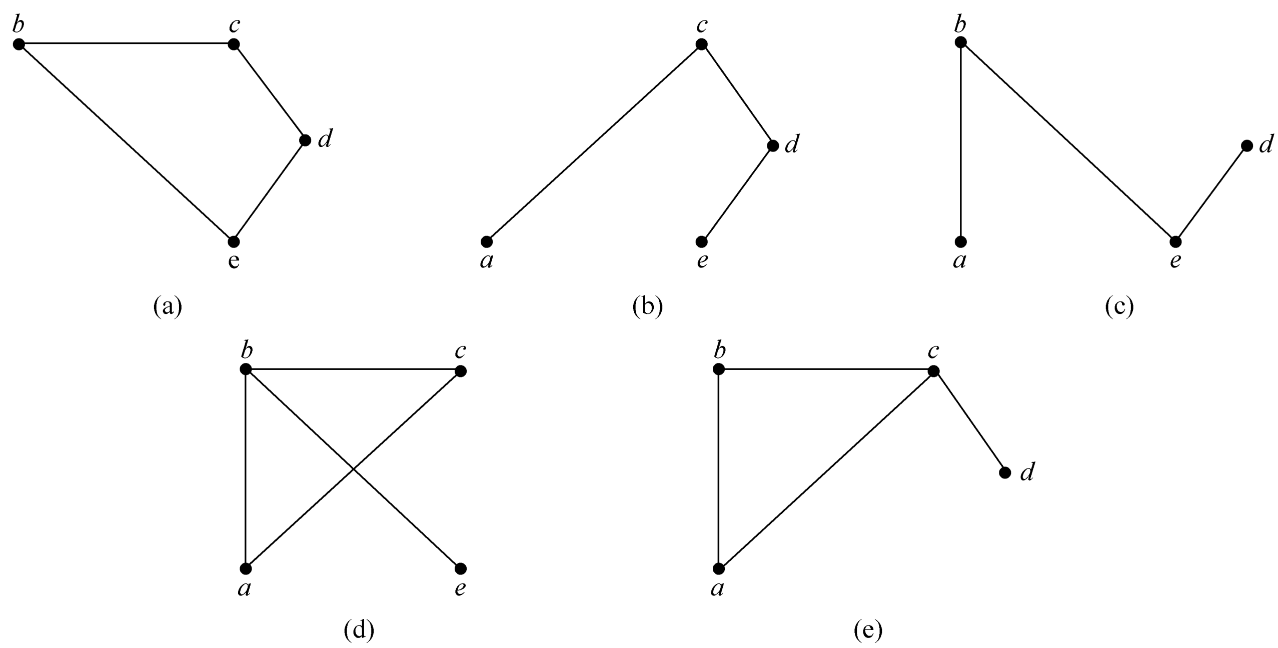



**图** 5.23

7 .其生成子图如图 5 .24(a),(b),(c),(d),(e),(f) 所示。

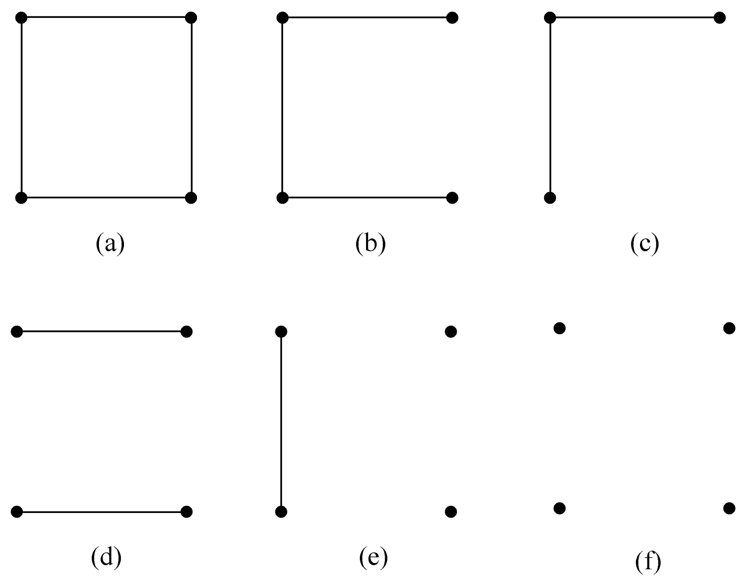


图　5 .24

8 .首先对图 5 .22(a) 中的顶点加以标记(见图 5 .25(a)),然后把点 3 和 6 交换位置即得图5 .25(b)。由此可知,题中两个图是同构的。

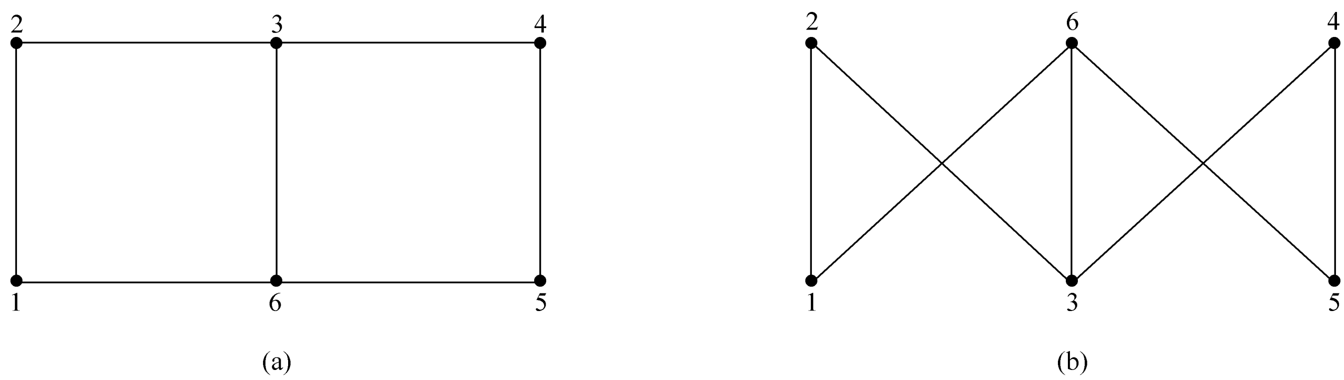


图　5 .25

9 .图 $G$ 如图 5 .26 所示。

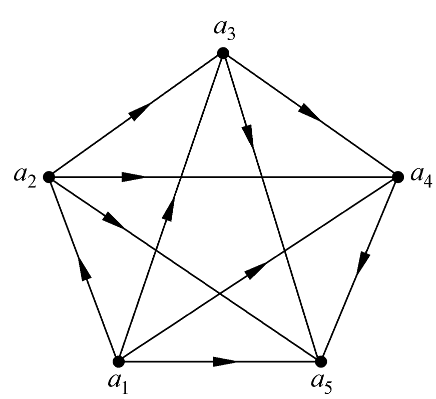



图　5 .26

# 5 .2　图的连通性

## 5 .2 .1　通路与回路

在图中,一条通路是顶点与边的交替序列: $v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots v_n$,它以顶点开始,以顶点结束,

其中边 $e_i$ 以 $v_i$ 为始点,以 $v_{i+1}$ 为终点。在简单图中,可以用顶点序列:$v_1 v_2 \cdots v_n$ 表示通路。通路中所含的边的条数称为该通路的长度。通路也可简称为路。

当通路中的始点和终点重合时,称为回路。

**定义 5.2.1** 如果通路中的各边都不相同,则称此通路为简单通路或迹。如果回路中的各边都不相同,则称此回路为简单回路。

**定义 5.2.2** 如果通路中的各顶点都不相同,则称此通路为初级通路或初级路。如果回路中各顶点都不相同,则称此回路为初级回路或圈。

例如,在图 5.27 所示的图中。$abcdfceg$ 是一条简单通路(迹);$abcefg$ 是一条初级路;$abcdfca$ 是一条简单回路,$abdfeca$ 是一条初级回路。

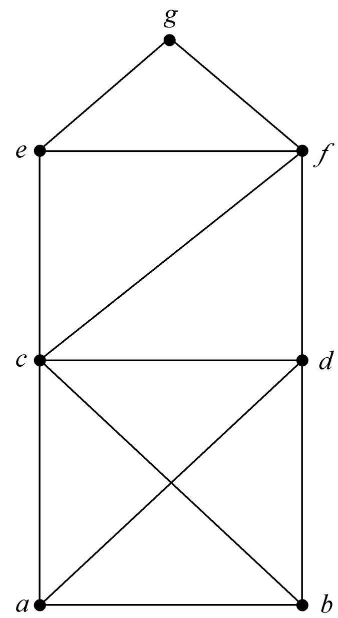



图 5.27

显然,初级通(回)路一定是简单通(回)路,反之不然。

**定理 5.2.1** 在 $n$ 阶简单图中,如果存在一条从 $v_1$ 到 $v_k$ 的通路,则从 $v_1$ 到 $v_k$ 中必有一条长度不大于 $n-1$ 的初级通路。

证明从略。

**定理 5.2.2** 在 $n$ 阶简单图中,如果存在一条通过 $v_i$ 的回路,则必有一条长度不大于 $n$ 的通过 $v_i$ 的初级回路。

证明从略。

## 5.2.2 连通图

**1.无向图的连通性**

**定义 5.2.3** 在图 $G$ 中,如果顶点 $v_1$ 到 $v_2$ 存在一条通路,则称 $v_1$ 和 $v_2$ 是连通的。

**定义 5.2.4** 在无向图中,如果任意两点都是连通的,则称此无向图是连通图;否则称为非连通图。

如果无向图是非连通图,则图能分解为 $k$ 个不相交的连通子图,称连通子图为此非连通图的连通分支。

图 5.28 所示的图是具有两个连通分支的非连通图。

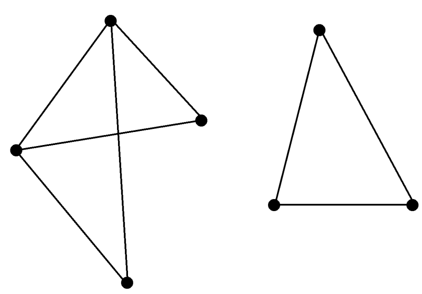


图 5.28

**2.有向图的连通性**

**定义 5.2.5** 在有向图中,如果存在着 $v_i$ 到 $v_j$ 的通路,则称 $v_i$ 到 $v_j$ 是可达的。

**定义 5.2.6** 在有向图中,如果图中任意两点 $v_i$ 和 $v_j$ 是互为可达的(即 $v_i$ 到 $v_j$ 是可达的,$v_j$ 到 $v_i$ 也是可达的),则称此有向图为强连通图。

**定义 5.2.7** 在有向图中,如果图中任意两点 $v_i$ 和 $v_j$,有 $v_i$ 到 $v_j$ 是可达的,或者 $v_j$ 到 $v_i$ 是可达的。则称此有向图为单向连通图(也称单侧连通图)。

**定义 5.2.8** 如果有向图的底图是连通图,则称此有向图为弱连通图。

例如,在图 5.29 中,(a) 是强连通图,(b) 是单向连通图,(c) 是弱连通图。

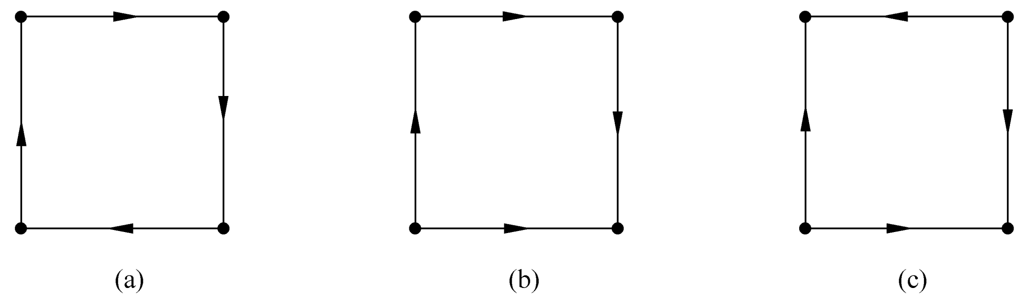


图 5.29

**定理 5.2.3** 有向图是强连通图的充分必要条件是:存在一条通过图中各顶点的回路。

证明从略。

**定理 5.2.4** 有向图是单向连通图的充分必要条件是:存在一条通过图中各顶点的通路。

证明从略。

**3.点割集和边割集**

**定义 5.2.9** 设图 $G$ 是无向连通图,其点集为 $V$。如果存在 $V$ 的真子集 $V'$,使得图 $G$ 中删除了 $V'$ 的所有顶点后,所得的子图为非连通图;而删除 $V'$ 的任何真子集的顶点后,所得的子图仍为连通图。则称 $V'$ 为图 $G$ 的一个点割集。若某一个顶点就是一个点割集,则称此顶点为割点。

例如,在图 5.30 中,$\{g, d\}$,$\{g, c\}$,$\{h, d\}$,$\{h, c\}$ 等都是点割集。

又如,在图 5.31 中,$a$ 是割点。

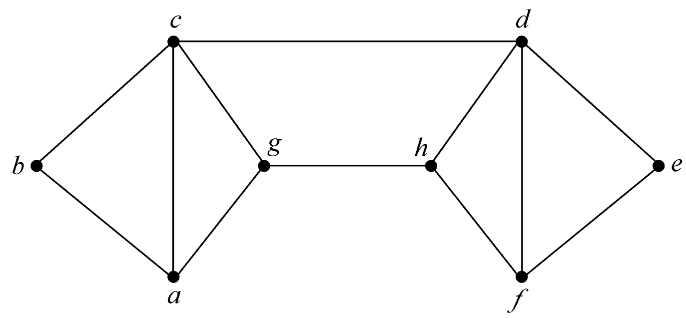



图 5.30

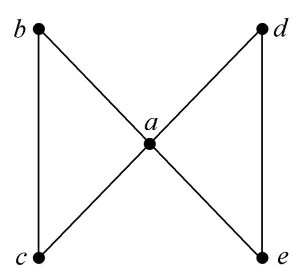



图 5.31

**定义 5.2.10** 设图 $G$ 是无向连通图,其边集为 $E$。如果存在 $E$ 的真子集 $E'$,使得图 $G$ 中删除了 $E'$ 的所有边后,所得到的子图为非连通图;而删除了 $E'$ 的任何真子集的所有边后,所得的子图仍为连通图。则称 $E'$ 为图 $G$ 的一个边割集。如果一条边就是一个边割集,则称此边为割边或桥。

例如,图 5.32 中,$\{bc, gh, fe\}$,$\{ab, af\}$,$\{cd, de\}$ 都是边割集。

又如,在图 5.33 中,边 $ab$ 是割边。

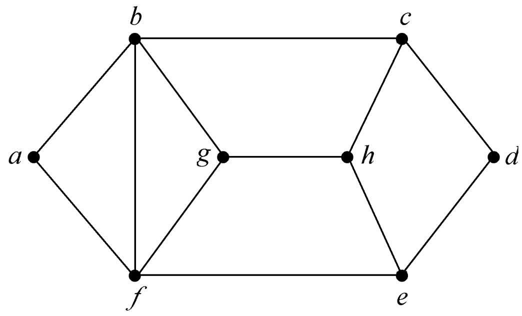



图 5.32

图 5.33

### 5.2.3 重点和难点分析

**本节重点是:了解无向连通图的定义,3 类有向连通图的定义,点割集和边割集的定义,并能求出一些简单图形的点割集和边割集。**

**难点是:能熟练地求出点割集和边割集。**

**例 5.8** **找出图 5.34 中, $a$到 $d$ 的所有初级道路。**

**解** **为了不遗漏地求出 $a$到 $d$ 的所有初级道路,可构造一个图,把 $a$到 $d$ 的初级通路一一列举出来,见图 5.35。**

图 5.34

图 5.35

**由图可知, $a$到 $d$ 共有 7 条初级通路,它们分别是:**

$a \to d$

$a \to b \to d$

$a \to b \to e \to d$

$a \to b \to c \to d$

$a \to e \to d$

$a \to e \to b \to d$

$a \to e \to b \to c \to d$

**例 5.9** **指出在图 5.36 所示的有向图中,哪个是强连通图?哪个是单向连通图?哪个是弱连通图?**

**解** **图 5.36(a) 是强连通图。因为在此有向图中存在着一条通过图中各个顶点的回**

路,如有:

$$a \to b \to c \to d \to e \to b \to f \to a$$

所以图 5.36(a) 是强连通图。

图 5.36

图 5.36(b) 不是强连通图,因为顶点 $a$ 的入度为 0,所以不可能存在一条通过图中各个顶点的回路,由此可知图 5.36(b) 不是强连通图。但图 5.36(b) 中存在一条通过图中各个顶点的通路:

$$a \to b \to c \to e \to d \to c \to f$$

所以图 5.36(b) 是单向连通图。

在图 5.36(c) 中,由于顶点 $a$ 的出度为 0;顶点 $d$ 的出度也为 0,因此不可能存在通过图中各个顶点的回路和通路。由此可知,图 5.36(c) 是弱连通图。

**例 5.10** 设图 $G$ 是具有 $n$ 个顶点的无向简单图。如果图 $G$ 中任意两个不同顶点的度数之和大于等于 $n-1$。说明图 $G$ 是连通图。

证明 用反证法。

设图 $G$ 是非连通图,不妨设 $G$ 由两个连通分支 $G_1$ 和 $G_2$ 组成($G$ 由更多的连通分支构成时,证法相同)。其中 $G_1$ 含有 $k$ 个顶点($1 \leq k \leq n-1$),$G_2$ 含有 $n-k$ 个顶点。由于 $G_1$ 和 $G_2$ 都是简单无向图,所以在连通分支 $G_1$ 中任取一个顶点 $v_1$,则有:

$$\deg(v_1) \leq k-1$$

在连通分支 $G_2$ 中任取一个顶点 $v_2$,则有

$$\deg(v_2) \leq n-k-1$$

于是有

$$\begin{aligned}\deg(v_1)+\deg(v_2) &\leq (k-1)+(n-k-1)\\ &= n-2\end{aligned}$$

这和简单图 $G$ 中任意两个不同顶点的度数之和大于等于 $n-1$ 的假设矛盾。由此证得简单图 $G$ 是连通图。

**例 5 .11　是否存在着每一条边都是割边的连通图?**

**解　存在。见图** 5 .37,**此图中每条边都是割边。**

图　5 .37

**例 5 .12　写出图** 5 .38 **中,仅含两条边的所有边割集。**

**解　图**5 .38**中,仅含两条边的边割集共有**6**个**:$\{ab, bc\}$,$\{cd, de\}$,$\{de, ef\}$,$\{ab, af\}$,$\{bc, af\}$,$\{cd, ef\}$。

图　5 .38

## 5 .2 .4　自测练习

1 .**设图** $G$**如图** 5 .39 **所示,求出图** $G$ **中** $a$ **到** $f$ **的所有初级通路。**

图　5 .39

2 .**设图** $G$**如图** 5 .40 **所示,求出图** $G$**中所有初级回路。**

图　5 .40

3 .**设** $V'$**和** $E'$**分别为无向连通图** $G$ **的点割集和边割集,删去边割集后,所得图的连通**

分支数一定是多少?删去点割集后,所得图的连通分支数是否是定数?

4 .设 $a, b, c, d, e, f, g$ 分别表示 7 个人,已知:$a$ 会讲英语,$b$ 会讲汉语和英语,$c$ 会讲英语、意大利语和俄语,$d$ 会讲日语和汉语,$e$ 会讲德语和意大利语,$f$ 会讲法语、日语和俄语,$g$ 会讲法语和德语。试问这 7 个人可以交谈吗?(必要时,可借助别人翻译)

5 .若简单图有 $2n$ 个顶点,每个顶点的度数至少为 $n$,证明此图为连通图。

6 .若简单图 $G$ 有 $n$ 个顶点,$m$ 条边,如果 $m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$,证明图 $G$ 是连通图。

7 .设无向图有 11 条边,其中有 2 个 4 度点,3 个 3 度点,如果此图是连通图,问:图中最少有几个顶点?最多有几个顶点?并画出最少顶点图和最多顶点图各一个。

## 5 .2 .5 自测练习答案

1 .仿照例 1,构造一个图,把 $a$ 到 $f$ 的初级通路一一列举出来。见图 5 .41。

由图可知,$a$ 到 $f$ 共有 7 条初级通路:

$a \to b \to c \to e \to f$

$a \to b \to c \to f$

$a \to b \to e \to f$

$a \to b \to e \to c \to f$

$a \to d \to e \to f$

$a \to d \to e \to c \to f$

$a \to d \to e \to b \to c \to f$

图 5 .41

2 .初级回路有两条:$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_1$;$v_1 \to v_2 \to v_4 \to v_1$。

3 .删去边割集后,所得图有两个连通分支;删去点割集后,所得图的连通分支数不是定数。例如,在图 5 .42(a) 中,删去割点 $a$ 后,所得的图有两个连通分支;在图 5 .42(b) 中,删去割点 $a$ 后,所得的图有 3 个连通分支。

图 5.42

4.用 7 个点分别表示这 7 个人。当两人会一种相同语种时,就用边连接这两个点。见图 5.43。由于图 5.43 是连通图,所以这 7 个人是可以交谈的。

图 5.43

5.由于图中任意不同的两点度数之和大于等于 $2n$,而 $2n > 2n - 1$,由例 3 可知,此图为连通图。

6.可以证明满足题设条件的简单图 $G$ 中,任意不同两点的度数之和大于等于 $n - 1$。然后利用例 3,即可证得此图是连通图。

现证图中任意两个不同顶点的度数之和大于等于 $n - 1$。用反证法。

设图 $G$ 中存在着两个顶点 $v_1$ 和 $v_2$,其度数之和小于 $n - 1$,即

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) < n - 1$$

或者有

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) \leq n - 2$$

显然,在图 $G$ 中删去顶点 $v_1$ 和 $v_2$ 后,所得的图是具有 $n - 2$ 个顶点的图,其边数 $m'$ 为:

$$m' > \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - (n - 2)$$

或者有

$$m' > \frac{(n - 2)(n - 3)}{2}$$

但具有 $n - 2$ 个顶点的简单无向图最多有 $\frac{(n - 2)(n - 3)}{2}$ 条边,所以其边数不可能大于 $\frac{(n - 2)(n - 3)}{2}$,由此引出矛盾。这样就证得图 $G$ 中任意不同两点的度数之和大于等于

$n - 1$,图 $G$ 是连通图。

7 .由于图中有 11 条边,所以图中各顶点的度数之和为 22。由题设可知,图中有 2 个 4 度点和 3 个 3 度点,这 5 个点已“占用”了 17 度,尚余下 5 度。所以此图最少有 6 个顶点:2 个 4 度点,3 个 3 度点和 1 个 5 度点。又由于此图是连通图,不存在孤立点(零度点),所以此图最多有 10 个顶点:2 个 4 度点,3 个 3 度点,5 个 1 度点。图 5 .44(a) 是具有 2 个 4 度点,3 个 3 度点和 1 个 5 度点的一种图形;图 5 .44(b) 是具有 2 个 4 度点,3 个 3 度点和 5 个 1 度点的一种图形。

图 5 .44

# 5 .3 欧拉图和哈密顿图

## 5 .3 .1 欧拉图

1736 年,瑞士数学家欧拉在解决哥尼斯堡七桥问题后,撰写了第一篇关于图的研究论文,从而开创了图的理论研究,被誉为图论之父。

图 5 .45

哥尼斯堡(现为立陶宛的加里宁格勒) 位于普雷格尔河畔,河中有两个小岛,在小岛与河岸之间架设了 7 座桥,把两岸和两岛连接起来(如图 5 .45(a) 所示)。当时居民们热衷于这样一个智力游戏:游人从任何一个地点出发走过七座桥且每座桥只走过一次,最后又回到出发地点。问:这是否可能 ?

欧拉在研究这个问题时,首先用顶点表示陆地,用边表示桥,从而把这个问题转化为:从图中任意一点出发一笔画出这个图并且最后回到出发点(见图 5 .45(b))。欧拉证明了这是不可能的,并由此引出了欧拉回路、欧拉通路、欧拉图和半欧拉图等概念。

**定义 5 .3 .1** 如果图中存在一条通过图中各边一次且仅一次的回路,则称此回路为欧拉回路,具有欧拉回路的图称为欧拉图。

由上述定义可知,具有欧拉回路的图(欧拉图) 就是此图能从任一点出发一笔画出这个图且最后又回到出发点。例如,图 5 .46(a) 是一个欧拉图,图 5 .46(b) 是此图中的一条欧拉回路。

图 5 .46

**定义 5 .3 .2** 如果图中存在一条通过图中各边一次且仅一次的通路,则称此通路为欧拉通路,具有欧拉通路的图称为半欧拉图。

由上述定义可知,具有欧拉通路的图(半欧拉图) 也是可以一笔画出的图,但必须从

图 5 .47

图中某一点出发,一笔画出这个图后,终止于图中的另外一点。例如,图 5.47(a) 是一个半欧拉图,图 5.47(b) 是此图中的一条欧拉通路。

如何判定一个图是欧拉图或半欧拉图呢?下面作简单而又形象的说明。

当图中的顶点为偶数度时,如图 5.48(a) 所示的顶点 $a$ 为 4 度,易见若从边 $e_1$ 画入点 $a$ 时,可从边 $e_2$ 画出,然后适当地画了图的其他边后,又可从边 $e_3$ 画入顶点 $a$,再从边 $e_4$ 画出。所以当顶点的度数为偶数时,可以形象地称为“能进能出”的点。

当图中的顶点为奇数度时,如图 5.48(b) 所示的顶点 $b$ 为 3 度,易见若从边 $e_1$ 画入点 $b$ 时,可从边 $e_2$ 画出,然后适当地画了图的其他边后,又可从边 $e_3$ 画入顶点 $b$,但以后就不可能去画图中其他的边了。所以当顶点的度数为奇数时,可以形象地称为“能进不能出”或“能出不能进”的点。

图 5.48

由此可知,在无向连通图中,每一个顶点都是偶数度点时,此图可以一笔画出,且可以从图中任意一点作为出发点一笔画出图后终止于这个出发点(见图5.49(a))。

图 5.49

在无向连通图中,仅有两个顶点是奇数度点,其他各顶点都是偶数度点时,此图也可以一笔画出,只是必须以某个奇数度点作为出发点,一笔画出图后终止于另外一个奇数度点(见图5.49(b))。

由以上分析可得以下两个定理:

**定理 5.3.1**　一个无向连通图是欧拉图的充分必要条件是:图中各顶点的度数都为偶数。

**定理 5.3.2**　一个无向连通图是半欧拉图的充分必要条件是:图中除有两个顶点为奇数度外,其他各点的度数都为偶数。

由上述定理可知,在七桥图中,4 个顶点的度数都是奇数,所以七桥图不是欧拉图也不是半欧拉图,七桥图不可能一笔画成。

容易把无向图的欧拉图和半欧拉图等概念推广到有向图。

**定义 5.3.3**　在有向图中,如果存在一条通过图中各边一次且仅一次的单向回路,则称此回路为单向欧拉回路,具有单向欧拉回路的图称为有向欧拉图,也简称为欧拉图。

**定义 5.3.4**　在有向图中,如果存在一条通过图中各边一次且仅一次的单向通路,则称此通路为单向欧拉通路,具有单向欧拉通路的图称为有向半欧拉图,也简称为半欧拉图。

**定理 5.3.3**　一个有向连通图是欧拉图的充分必要条件是:图中每个顶点的入度和出度相等。

**定理 5.3.4**　一个有向连通图是半欧拉图的充分必要条件是:图中除两个顶点外,其他顶点的入度和出度相等,而在这两个顶点中,一个顶点的入度比出度大 1,另一个顶点的入度比出度少 1。

例如,图 5.50(a) 是欧拉图,图 5.50(b) 是半欧拉图。

图　5.50

## 5.3.2　哈密顿图

1856 年,爱尔兰数学家哈密顿(Hamilton) 在给友人的一封信中提出了一个智力游戏:用一个正 12 面体表示地球,正 12 面体的 20 个顶点分别表示 20 个城市(见图 5.51(a));要求从任一城市出发,沿正 12 面体的边走过每一个城市一次且仅一次,最后回到出发地点。这个问题归结为:求通过图 5.51(b) 中各个顶点一次且仅一次的回路(图 5.51(b) 中的粗线,就是一种符合条件的回路)。由此引出哈密顿回路、哈密顿通路、哈密顿图和半哈密顿图等概念。

**定义 5.3.5**　如果图 $G$ 中存在一条通过图 $G$ 中各个顶点一次且仅一次的回路,则称此回路为图 $G$ 的哈密顿回路,具有哈密顿回路的图称为哈密顿图。

**定义 5.3.6** 如果图 $G$ 中存在一条通过图 $G$ 中各个顶点一次且仅一次的通路,则称此通路为图 $G$ 的哈密顿通路,具有哈密顿通路的图称为半哈密顿图。

图 5.51

从表面上看,哈密顿问题与欧拉问题似乎很相似,哈密顿问题着眼于"点",欧拉问题着眼于"边",但两者之间却有极大的差异,欧拉问题已基本解决,而关于哈密顿图存在的、简明的充分必要条件至今没有得到,成为图论中的基本难题之一。

下面分别介绍一个图是哈密顿图的必要条件和充分条件。

首先介绍必要条件。

**定理 5.3.5** 设图 $G$ 是哈密顿图,如果从图 $G$ 中删去 $p$ 个顶点后得到图 $G'$,则图 $G'$ 的连通分支数小于等于 $p$。

证明从略。

利用这个定理,可以判定某些图不是哈密顿图。

例如,在图 5.52(a) 中,删去点 $v_1$ 和 $v_2$ 后所得的图如图 5.52(b) 所示。由于在图 5.52(a) 中删去两个顶点后所得的图具有 3 个连通分支,所以图 5.52(a) 不是哈密顿图。

图 5.52

易见,当图中含有割点或割边(桥)时,此图不是哈密顿图。

现再介绍哈密顿图的充分条件。

**定理 5.3.6** 设图 $G$ 是具有 $n$ 个顶点$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$的无向简单图,如果图中任意两个不同顶点的度数之和大于等于 $n$,即

$$\deg(v_i) + \deg(v_j) \geq n \qquad (i \neq j)$$

则图 $G$ 中具有哈密顿回路,即图 $G$ 是哈密顿图。

证明从略。

**定理 5.3.7** 设图 $G$ 是具有 $n$ 个顶点 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 的无向简单图,如果图中任意两个不同顶点的度数之和大于等于 $n-1$,即

$$\deg(v_i) + \deg(v_j) \geq n-1 \qquad (i \neq j)$$

则图 $G$ 中具有哈密顿通路,即图 $G$ 是半哈密顿图。

证明从略。

利用上述定理,可确定某些图是哈密顿图或半哈密顿图。

请注意,上述定理仅仅是哈密顿图或半哈密顿存在的充分条件而非必要条件,因此有些哈密顿图或半哈密顿图不满足上述定理所设的条件。例如,在图 5.53 中,每个顶点仅为 2 度,但此图是哈密顿图。

图 5.53

## 5.3.3 重点和难点分析

本节的重点是:熟练掌握欧拉图和半欧拉图的定义和判定一个图是欧拉图或半欧拉图的充分必要条件;熟练掌握哈密顿图和半哈密顿图的定义和判定一个图是哈密顿图的必要条件以及充分条件。

难点是:如何从图的结构特点去判定图是否是欧拉图或哈密顿图。

**例 5.13** 画出满足下列条件的无向简单图各一个:

(1) 具有 6 个顶点 6 条边的欧拉图。

(2) 具有 6 个顶点 7 条边的欧拉图。

(3) 具有 6 个顶点 8 条边的欧拉图。

(4) 具有 6 个顶点 9 条边的欧拉图。

(5) 具有 6 个顶点 10 条边的欧拉图。

(6) 具有 6 个顶点 11 条边的欧拉图。

(7) 具有 6 个顶点 12 条边的欧拉图。

解 本例主要利用“图中各顶点的度数之和等于图的边数的两倍”这一结论,对图中各顶点所含度数进行讨论,从而求得解答。

(1) 由于图中有 6 个顶点和 6 条边,所以这 6 个顶点的度数之和为 12,又由题设要求可知,画出的图是欧拉图,所以各顶点的度数必须是偶数,由此可知,这 6 个顶点的度数都为 2。图 5.54(a) 所示的图即为解。

(2) 由于图中有 6 个顶点和 7 条边,所以这 6 个顶点的度数之和为 14,要使画出的图为欧拉图,所以这 6 个顶点的度数应分别为:

$$2,2,2,2,2,4$$

图 5.54(b) 所示的图即为解。

(3) 同样理由,图中 6 个顶点的度数应分别为:

$$2,2,2,2,4,4$$

图 5.54(c) 所示的图即为解。

(4) 图中 6 个顶点的度数应为:

2, 2, 2, 4, 4, 4

**图** 5 .54(d) **所示的图即为解**。

(5) **图中** 6 **个顶点的度数应为**:

2, 2, 4, 4, 4, 4

**图** 5 .54(e) **所示的图即为解**。

(6) **图中** 6 **个顶点的度数应为**:

2, 4, 4, 4, 4, 4

**图** 5 .54(f) **所示的图即为解**。

(7) **图中** 6 **个顶点的度数应为**:

4, 4, 4, 4, 4, 4

**图** 5 .54(g) **所示的图即为解**。

**图** 5 .54

**例 5.14**　设图 $G$ 中含有割边(桥),证明图 $G$ 不是欧拉图。

**证明**　用反证法,设图 $G$ 是含有割边的欧拉图。

由割边的定义可知,在图 $G$ 中删去割边后成为不连通图(含有两个连通分支),不妨设其中一个连通分支为 $G_1$,另一个连通分支为 $G_2$,于是图 $G$ 可画成如图 5.55 所示,其中两个圆分别表示 $G_1$ 和 $G_2$,边 $ab$ 是割边。

又由欧拉图存在的充分必要条件可知,图 $G$ 中每个顶点都是偶数度点,所以割边的两个端点 $a$ 和 $b$ 的度数也是偶数。删去割边 $ab$ 后,顶点 $a$ 的度数成为奇数,于是得到这样的结果:在连通分支图 $G_1$ 中,除顶点 $a$ 为奇数度点外,其他顶点的度数都是偶数,这和定理 5.1.1 的推论(无向图中,奇数度点的个数为偶数) 矛盾。由此证得含有割边的图不是欧拉图。

图　5.55

**例 5.15**　设无向简单图 $G$ 是 $k$ 度正则图且是欧拉图,其顶点数 $n$ 和边数 $m$ 满足条件 $n+8=m$,求 $n$ 和 $m$。

**解**　由于图 $G$ 是 $k$ 度正则图且是欧拉图,所以有:$2m=kn$,且 $k$ 是偶数。

又由题设条件可知:$n+8=m$,即

$$2n+16=2m$$

也即有

$$2n+16=kn$$

$$n=\frac{16}{k-2}$$

显然,偶数 $k=2$ 时,上述方程无解;偶数 $k=4$ 时,$n=8$, $m=16$;而当偶数 $k=6$ 时,可得 $n=4$, $m=12$,这样的无向简单图不存在;当偶数 $k>6$ 时,也有上述结论。所以本例的惟一解是:$n=8$, $m=16$。图 5.56 所示的图是满足题设条件的一种图。

图　5.56

**例 5.16**　设图 $G$ 是具有 6 个顶点、12 条边的无向简单图,证明图 $G$ 是哈密顿图。

**证明**　已知一个图是哈密顿图的充分条件是:图中任意不同两点的度数之和大于等于 $n$($n$ 是图中顶点数)。

现证图 $G$ 中任意不同两点的度数之和大于等于 6。

用反证法,设图 $G$ 中存在两个顶点 $v_1$ 和 $v_2$,其度数之和不大于等于 6,即

$$\deg(v_1)+\deg(v_2)\leq 5$$

删去这两个点后,至多删去图 $G$ 中的 5 条边。由于图 $G$ 是具有 6 个顶点、12 条边的无向简单图,删去顶点 $v_1$ 和 $v_2$ 后,得到的子图为:具有 4 个顶点,至少 7 条边的无向简单图,但这样的无向简单图不存在(4 阶无向简单图最多有 6 条边)。由此证得图 $G$ 中任意不同两点的度数之和大于等于 6,图 $G$ 是哈密顿图。

### 5.3.4 自测练习

1. 在图 5.57 所示的 4 个图中,哪些是欧拉图?哪些是半欧拉图?如果是,请画出欧拉回路或欧拉通路。

图 5.57

2. 画出满足下列条件的无向简单图各一个:

(1) 具有偶数个点、偶数条边的欧拉图。

(2) 具有奇数个点、奇数条边的欧拉图。

(3) 具有奇数个点、偶数条边的欧拉图。

(4) 具有偶数个点、奇数条边的欧拉图。

3. 当 $n$ 取什么值时,无向完全图 $K_n$ 是欧拉图?

4. 设图 $G$ 是具有 8 个顶点的无向简单图,如果图 $G$ 是欧拉图,问:在图 $G$ 中最多有几条边?

5. 画出两种不同构的具有 7 个顶点、9 条边的欧拉图(要求画出的图是简单图)。

6. 若一个有向图是欧拉图,它是否一定是强连通的?若一个有向图是强连通的,它是否一定是欧拉图?说明理由。

7. 画一个无向简单图,使其为:

(1) 是欧拉图又是哈密顿图。

(2) 是欧拉图但不是哈密顿图。

(3) 是哈密顿图但不是欧拉图。

(4) 不是欧拉图也不是哈密顿图。

8. 图 5.58 所示的图是哈密顿图,请找出哈密顿回路。

9. 图 5.58 所示的图是一个 10 阶无向简单图,且是 3 度正则图,请再画一个 10 阶无向简单图,也是 3 度正则图,但它不是哈密顿图。

图 5.58

10. 说明图 5.59 所示的图不是哈密顿图。

图 5 .59

11 .图 $G$ 是具有 7 个顶点、17 条边的无向简单图,证明图 $G$ 是哈密顿图。

12 .某次会议有 20 人参加,其中每人至少有 10 个朋友,这 20 人围一圆桌入座,要想使每人相邻的两位都是朋友是否可能?

## 5 .3 .5 自测练习答案

1 .其中(a) 是欧拉图,(b),(d) 是半欧拉图。(a) 的欧拉回路如图 5 .60(a) 所示,(b),(d) 的欧拉通路如图 5 .60(b),(c) 所示。

图 5 .60

2 .(1) 如图 5 .61(a) 所示。

(2) 如图 5 .61(b) 所示。

(3) 如图 5 .61(c) 所示。

(4) 如图 5 .61(d) 所示。

本题的求解并不困难,但应当给出尽量简洁的图形作为解答,图 5 .61 不仅给出了本题的一种比较简洁的解答,而且其“组装式”的构思也有一定的启示作用。

图 5 .61

3 .当 $n$ 为大于 1 的奇数时, $K_n$ 是欧拉图。

4 .在 8 阶无向简单欧拉图中, 各个顶点的度数最多是 6, 所以 8 个顶点的度数之和为: $6 \times 8 = 48$, 由此可知, 8 阶无向简单欧拉图最多有 24 条边。

5 .由题设可知, 图中有 7 个顶点、9 条边, 所以这 7 个顶点的度数之和为 18。又由于要求画出的图是简单欧拉图, 因此每个顶点的度数都是偶数且都小于 7, 由此可知这 7 个顶点的度数分别为:

$$2, 2, 2, 2, 2, 4, 4$$

或者是

$$2, 2, 2, 2, 2, 2, 6$$

图 5 .62(a) 所示的图是 7 个顶点的度数分别为 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4 的一种欧拉图(它不是惟一的)。图5 .62(b) 所示的图是 7 个顶点的度数分别为 2, 2, 2, 2, 2, 2, 6 的欧拉图。

图 5 .62

6 .若有向图是欧拉图, 则此图一定是强连通的, 因为有向欧拉图具有欧拉回路, 也即具有通过图中各顶点至少一次的回路, 所以有向欧拉图一定是强连通的。但强连通图不一定是欧拉图, 如图 5 .63 所示, 此图是强连通的, 但不是欧拉图。

图 5 .63

7 .(1) 如图 5 .64(a) 所示。

(2) 如图 5 .64(b) 所示。

(3) 如图 5 .64(c) 所示。

(4) 如图 5 .64(d) 所示。

图 5 .64

8 .其哈密顿回路为: $aiedcjhgfba$。见图 5 .65 中粗线画出的回路。

图 5 .65

9 .图 5 .66 所示的图就是满足题设条件的图。由于图中含有割边(桥),所以此图不是哈密顿图。

图 5 .66

10 .由于图中有割边 $af$,所以此图不是哈密顿图。

11 .只需证明图 $G$是满足哈密顿图存在的充分条件,即证图 $G$中任意不同两个顶点的度数之和大于等于 7。

用反证法,设图 $G$ 中存在两个顶点 $v_1$ 和 $v_2$,其度数之和不大于等于 7,即

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) \leq 7$$

删去顶点 $v_1$ 和 $v_2$ 后,得到的子图为:具有 5 个顶点,至少 11 条边的无向简单图,但这样的无向简单图不存在(5 阶无向简单图最多有 10 条边)。由此证得图 $G$ 中任意不同两点的度数之和大于等于 7,图 $G$ 是哈密顿图。

12 .首先用 20 个顶点分别表示参加会议的人,当两个人是朋友时,就在表示这两个人的顶点之间连一条无向边,由此得到一个无向简单图 $G$。由题设要求可知,即需说明图 $G$ 是否是哈密顿图。

由于图 $G$是具有 20 个顶点的无向简单图,且图中每个顶点的度数大于等于 10,所以图中任意两个不同顶点的度数之和大于等于 20,由此可知,图 $G$是哈密顿图,也即这 20 人围一圆桌入座,使每个人相邻的两位都是朋友是可能的。

# 5 .4 偶图和平面图

## 5 .4 .1 偶图

偶图也称为二部图,其定义如下。

**定义 5 .4 .1** 若无向图 $G$的点集 $V$ 可以划分成两个子集 $V_1$ 和 $V_2$,即

$$V_1 \cup V_2 = V$$

$$V_1 \cap V_2 =$$

并使图中每一条边的端点一个在 $V_1$ 中,另一个在 $V_2$ 中,则称图 $G$ 为偶图。偶图 $G$ 常记为 $G(V_1, V_2)$, 并称 $V_1$ 和 $V_2$ 是互补点集。

例如,图 5 .67(a) 和(b) 都是偶图。

图 5 .67

在图 5 .67(a) 中, $V_1 = \{x, y, z\}$, $V_2 = \{a, b, c, d\}$。在图 5 .67(b) 中, $V_1 = \{x, y, z\}$, $V_2 = \{a, b, c\}$。

**定义 5 .4 .2** 设图 $G(V_1, V_2)$ 是偶图,且 $V_1$ 中的每一个顶点都与 $V_2$ 中的每一个顶点有边相连(邻接), 则称图 $G(V_1, V_2)$ 为完全偶图,记作 $K_{n,m}$,其中 $n$ 是 $V_1$ 的顶点数, $m$ 是 $V_2$ 的顶点数,即 $n = |V_1|$, $m = |V_2|$。

例如,图 5 .68(a) 是完全偶图 $K_{2,3}$,图 5 .68(b) 是完全偶图 $K_{3,3}$。

图 5 .68

由偶图的定义可知,偶图中的任意一条通路,其顶点序列往返于 $V_1$ 和 $V_2$ 之间,因此偶图最显著的特性是:图中任意一条回路都由偶数条边构成,由此可得以下定理。

**定理 5 .4 .1** 图 $G$ 是偶图的充分必要条件为:图中每一条回路都由偶数条边构成。

例如,在图 5 .69(a) 中,易见图中任意一条回路由偶数条边构成,如果把图中邻接的两点分别标记为 $a_i$ 和 $b_j$,于是此图可改画成如图 5 .69(b) 所示,由此可见,图 5 .69(a) 是偶图。

图 5 .69

## 5.4.2 平面图

**1.平面图的定义**

**定义 5.4.3** 如果能把一个图在平面上画成除端点外,任何两边都不相交,则称此图为平面图,或称此图为可平面的。

例如图 5.70 所示的两个图都是平面图。

图 5.70

在图 5.71(a) 中,所示的图是 4 阶无向完全图 $K_4$ 的一种画法,图中有两条边是相交的;但此图能改画成如图 5.71(b) 所示的图形,所以 4 阶无向完全图是平面图。通常把已画成边不相交形式的平面图称为图的平面表示或图的平面嵌入。

图 5.71

由平面图的定义可知,平面图的研究在印刷电路、集成电路的布线设计中有重要的实用价值。

并非所有图都是可平面的,下面介绍两个基本的非平面图。

**2.两个基本的非平面图**

具有 5 个顶点的无向完全图 $K_5$ (如图 5.72(a) 所示),它是一个非平面图,图 5.72(b) 表明它无法改画成边不相交的图形。

图 5.72

完全偶图 $K_{3,3}$ (见图 5.73(a)),它也是非平面图,图 5.73(b) 表明它无法改画成边不相交的图形。

图 5.73

由于 5 阶无向完全图 $K_5$ 是顶点数最少的非平面图,完全偶图 $K_{3,3}$ 是边数最少的非平面图;所以它们在图的非平面性研究中有重要作用。

**3.欧拉公式及其推论**

首先介绍区域(或称为面) 的概念和有关定理。

由于平面图(今后提到的平面图都是指已画成平面表示的图) 中各边是不相交的,所以平面图的边把平面划分成若干个块,这样的块称为区域(或称为面),其中面积有限的块称为有限区域(或称为有限面),面积无限的块称为无限区域(或称为无限面)。

例如,在图5.74所示的平面图中,它把平面划分成4 个区域,其中 $R_1$, $R_2$ 和 $R_3$ 是有限区域, $R_4$ 是无限区域。

围成区域 $R$ 的回路称为区域 $R$ 的边界,边界中所含的边的数目称为区域 $R$ 的次数,记作 $\deg(R)$。

例如,在图 5.74 中,区域 $R_1$ 的次数为 4,即 $\deg(R_1) = 4$;区域 $R_2$ 的次数为 3,即 $\deg(R_2) = 3$;区域 $R_3$ 的次数为 4,即 $\deg(R_3) = 4$;无限区域 $R_4$ 的次数为 5。

又如,在图 5.75 中,区域 $R_1$ 的次数为 4,无限区域 $R_2$ 的次数为 6。注意,无限区域 $R_2$ 的边界看作是由边 $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{ad}$ 和 $\overline{de}$, $\overline{ed}$ 构成的,所以其次数为 6。

图 5.74

图 5.75

由区域次数的定义可知,平面图中的边数和区域的次数有如下关系。

**定理 5.4.2** 设图 $G$ 是无向连通平面图,且有 $k$ 个区域($R_1$, $R_2$, …, $R_k$) 和 $m$ 条边,则

图 $G$ 中各个区域的次数之和等于边数的两倍,即

$$\sum_{i=1}^{k} \deg(R_i) = 2m$$

例如,无向连通平面图 $G$ 如图 5.76 所示,其中有限区域 $R_1$ 由 4 条边围成,即 $ab, bc, cd, da$,所以其次数 $\deg(R_1) = 4$;有限区域 $R_2$ 由 3 条边围成,即 $bc, ce, eb$,所以其次数 $\deg(R_2) = 3$(注意:边 $bc$ 作为区域 $R_1$ 和 $R_2$ 的公共边界,已被使用两次);有限区域 $R_3$ 由 4 条边围成,即 $cd, df, fe, ce$,所以其次数 $\deg(R_3) = 4$(注意:边 $cd$, $ec$ 作为区域 $R_1$ 和 $R_3$, $R_2$ 和 $R_3$ 的公共边界被使用了两次);而无限区域 $R_4$ 由 7 条边围成,即 $ab, be, ef, fd, ad$ 和 $eg, ge$,所以其次数 $\deg(R_4) = 7$(注意:边 $ab, ad, be, ef, df$ 是有限区域 $R_1, R_2, R_3$ 和无限区域 $R_4$ 的公共边界,被使用了两次)。由此可知,图 $G$ 中各条边作为边界都被使用了两次,所以图 $G$ 中各区域的次数应是图 $G$ 的边数的两倍。易见图 $G$ 中有 9 条边,而 $\deg(R_1) + \deg(R_2) + \deg(R_3) + \deg(R_4) = 4 + 3 + 4 + 7 = 18$,它确实是边数的两倍。

图 5.76

在平面图中,顶点数、边数和区域数有着密切的联系。

**定理 5.4.3** 设图 $G$ 是无向连通平面图,它具有 $n$ 个顶点、$m$ 条边和 $r$ 个区域,则

$$n - m + r = 2$$

上述公式称为欧拉公式。

证明 用归纳法,对边数进行归纳。

归纳基础:当无向连通平面图中仅有一条边时,它有两种结构,一是有两个顶点和一条关联这两个顶点的边,易知:$n = 2, m = 1, r = 1$(仅有一个无限区域),所以欧拉公式成立;另一种是由一条自回路(环)构成的图,此时有:$n = 1, m = 1, r = 2$,所以欧拉公式成立。

归纳步骤:设当无向连通平面图具有 $m$ 条边时,欧拉公式成立($n - m + r = 2$),现证对于具有 $m + 1$ 条边的无向连通平面图,欧拉公式也成立。

易见,任何具有 $m + 1$ 条边的无向连通平面图都可以由某一个具有 $m$ 条边的无向连通平面图适当添加一条边后构成。

在一个含有 $m$ 条边的无向连通平面图中添加一条边后,可能有 3 种不同的情况。

第一种情况:在具有 $m$ 条边的无向连通图(以后简记作 $G_m$)原有的两个顶点中添加一条边。用图 5.77(a) 表示 $G_m$,为了形象地说明问题,将图用虚实相结合的方法画出,图中虚线表示 $G_m$ 中的其他部分图形。

在 $G_m$ 原有的两个顶点间添加一条边后所得的 $m + 1$ 条边的无向简单平面图(以后简记作 $G_{m+1}$),如图 5.77(b) 和图 5.77(c) 所示。

如果令 $G_{m+1}$ 的顶点数为 $n'$, 边数为 $m'$, 区域数 $r'$, 由图 5.77 可知,$n' = n$, $m' = m + 1, r' = r + 1$, 所以对于 $G_{m+1}$ 有:

图 5.77

$$\begin{aligned} n' - m' + r' &= n - (m+1) + (r+1) \\ &= n - m + r \\ &= 2 \end{aligned}$$

由此可知,这种有 $m+1$ 条边的无向连通平面图满足欧拉公式。

第二种情况:在 $G_m$ 中的某一个顶点添加一条自回路(环),如图5.78 所示,此时得到图 $G_{m+1}$,其顶点数 $n' = n$,边数 $m' = m+1$,区域数 $r' = r+1$,所以对于 $G_{m+1}$ 有:

$$\begin{aligned} n' - m' + r' &= n - (m+1) + (r+1) \\ &= n - m + r \\ &= 2 \end{aligned}$$

图 5.78

图 5.79

由此可知,这种有 $m+1$ 条边的无向连通平面图满足欧拉公式。

第三种情况:在 $G_m$ 中的某一个顶点上添加一条割边,如图 5.79 所示,此时得到图 $G_{m+1}$,其顶点数 $n' = n+1$,边数 $m' = m+1$,区域数 $r' = r$,所以对于 $G_{m+1}$ 有:

$$\begin{aligned} n' - m' + r' &= (n+1) - (m+1) + r \\ &= n - m + r \\ &= 2 \end{aligned}$$

由此可知,这种有 $m+1$ 条边的无向连通平面图满足欧拉公式。

综上所述,定理 5.4.3 得证。

欧拉公式适用于无向连通平面图,没有要求图是简单图。当图是无向连通平面图且是简单图时,则有如下重要推论:

**推论** 设图 $G$ 是具有 $n$ 个顶点、$m$ 条边的无向连通平面图且是简单图,则

$$3n - 6 \geq m$$

**证明** 由于 $G$ 是简单图,所以 $G$ 中每一个区域至少由 3 条边围成,若 $G$ 中有 $r$ 个区域,围成 $r$ 个区域的总边数为 $2m$(见定理 5.4.2),所以有

$$2m \geq 3r$$

或有

$$r \leq \frac{2m}{3}$$

代入欧拉公式后可得:

$$n - m + \frac{2m}{3} \geq 2$$

整理后可得

$$3n - 6 \geq m$$

由证明过程可知,当且仅当无向连通简单平面图中,每个区域都是由 3 条边围成的(包括无限区域),则上述等式成立,即有

$$3n - 6 = m$$

上述推论是无向连通简单平面图的必要条件而非充分条件,它常常用来说明某些图不是平面图。

例如,在无向完全图 $K_5$ 中,顶点数 $n = 5$,边数 $m = 10$,于是有

$$3n - 6 = 3 \times 5 - 6 = 9 \ngeq m = 10$$

由此可知,无向完全图 $K_5$ 不满足平面图的必要条件,所以 $K_5$ 不是平面图。

又如,在完全偶图 $K_{3,3}$ 中,顶点数 $n = 6$,边数 $m = 9$,易见 $K_{3,3}$ 满足条件:

$$3n - 6 = 12 > m = 9$$

但 $K_{3,3}$ 不是平面图,所以欧拉公式的推论仅仅是无向连通简单图为平面图的必要条件而非充分条件。

现在证明完全偶图 $K_{3,3}$ 是非平面图。

由于 $K_{3,3}$ 是偶图,由定理 5.4.1 可知,$K_{3,3}$ 中每一条回路由偶数条边构成;又由于 $K_{3,3}$ 是简单图,所以 $K_{3,3}$ 中每一条回路至少有 4 条边构成。

当一个无向连通简单平面图中,每一个区域至少有 4 条边围成时,由定理 5.4.2 可知:

$$2m \geq 4r$$

或有

$$r \leq \frac{m}{2}$$

代入欧拉公式后可得:

$$n - m + \frac{m}{2} \geq 2$$

整理后可得

$$2n - 4 \geq m$$

上述不等式是无向连通简单平面图且每个区域至少有 4 条边围成所必须满足的条件。但在 $K_{3,3}$ 中,$n = 6$,$m = 9$,所以

$$2n - 4 = 12 - 4 = 8 \ngeq m = 9$$

由此证得 $K_{3,3}$ 是非平面图。

**4 .库拉托夫斯基定理**

1930 年波兰数学家库拉托夫斯基在充分研究了两个基本的非平面图 $K_5$ (点数最少的非平面图) 和 $K_{3,3}$ (边数最少的非平面图) 后,揭示了任意非平面图与 $K_5$ 以及 $K_{3,3}$ 的内在联系,从而找到了一个简单连通图是平面图的充分必要条件,推动了平面图的研究工作。人们常把 $K_5$ 和 $K_{3,3}$ 称为库拉托夫斯基图。

在介绍库拉托夫斯基定理之前,先介绍一个有关的重要概念:二度同构(或称同胚)。

如果两个图是由在同一个图的边上插入一些新的顶点(它一定 2 度点) 而得到的,则称这两个图是二度同构的。例如,图 5 .80 所示的两个图就是二度同构的,它们分别是在 $K_3$ 的边上插入一些 2 度点构成的。

图　5 .80

易见,在一个图的边上插入一些 2 度点后不影响这个图的平面性或非平面性。

下列定理就是库拉托夫斯基定理,由于证明过程比较复杂,这里不作介绍。

**定理 5 .4 .4**　一个图是平面图的充分必要条件是此图不含有二度同构于 $K_5$ 或 $K_{3,3}$ 的子图。

或者说:一个图是非平面图的充分必要条件是此图含有二度同构于 $K_5$ 或 $K_{3,3}$ 的子图。

例如,证明图 5 .81(a) 所示的图是非平面图。

图　5 .81

证明如下:在图 5 .81(a) 中,删去顶点 $e$ 和 $f$ 后所得子图如图 5 .81(b) 所示,易见此子图就是 $K_5$,所以由库拉托夫斯基定理可知,此图是非平面图。

又如,证明图 5 .82(a) 所示的图是非平面图。

证明如下:把图 5 .82(a) 中的两条边 $ae$ 和 $db$ 删去,所得的子图如图 5 .82(b) 所示,此子图可改画成如图 5 .82(c) 所示,易知它与 $K_{3,3}$ 二度同构,由库拉托夫斯基定理可知,图 5 .82(a) 是非平面图。

图　5 .82

### 5 .4 .3　重点和难点分析

**本节的重点是:了解偶图和完全偶图的定义以及判定偶图的充分必要条件;熟练掌握平面图的定义,无向连通简单平面图的必要条件和库拉托夫斯基定理。**

**本节的难点是:熟练地运用库拉托夫斯基定理去证明一个图是非平面图。**

**例 5 .17**　当 $n$ 和 $m$ 取何值时,完全偶图 $K_{n,m}$ 是:

(1) 欧拉图。

(2) 哈密顿图。

(3) 平面图。

(4) 非平面图。

解　(1) 无向连通图是欧拉图的充分必要条件是图中每一个顶点的度数都是偶数。由于完全偶图 $K_{n,m}$ 是连通图,所以当 $n$ 和 $m$ 都是正偶数时, $K_{n,m}$ 是欧拉图。

(2) 设完全偶图 $K_{n,m}$ 中的两个互补点集分别为 $V_1$ 和 $V_2$,由于偶图中的每一条回路必定穿梭于 $V_1$ 和 $V_2$ 之间,所以当 $n = m$,且 $n \geq 2$ 时, $K_{n,m}$ 是哈密顿图。

(3) 当 $n \leq 2$ 时, $K_{n,m}$ 是平面图。例如图 5 .83(a) 是完全偶图 $K_{2,5}$,它可以改画成如图 5 .83(b) 所示。所以它是平面图。

图　5 .83

(4) 当 $n \geq 3, m \geq 3$ 时,完全偶图 $K_{n,m}$ 必有子图为 $K_{3,3}$,所以它是非平面图。

**例 5.18** 设偶图 $G(V_1, V_2)$ 中有 $n$ 个顶点和 $m$ 条边,证明 $m \leq \frac{n^2}{4}$。

**证明** 设 $V_1$ 中有 $k$ 个顶点,则 $V_2$ 中应有 $n-k$ 个顶点。易见 $G(V_1, V_2)$ 中的边数 $m \leq k(n-k)$,又由求极值的知识可知,当 $k = \frac{n}{2}$ 时,$k(n-k)$ 取到极大值,所以 $m \leq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$。

**例 5.19** 设 $G$ 是边数小于 30 的简单连通平面图,证明 $G$ 中必存在顶点 $v$,其度数小于等于 4。

**证明** 用反证法,设 $G$ 有 $n$ 个顶点:$v_1, v_2, \cdots, v_n$,并设 $G$ 中每一个顶点的度数都大于等于 5,于是有

$$2m = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) \geq 5n$$

$$n \leq \frac{2m}{5}$$

由简单连通平面图的必要条件可知:

$$3n - 6 \geq m$$

$$\frac{2m}{5} - 6 \geq m$$

由此得到 $m \geq 30$,这和 $G$ 中边数小于 30 的题设矛盾。

**例 5.20** 画出具有 6 个顶点、12 条边的简单平面图和非平面图各一个。

**解** 首先画出一种具有 6 个顶点、12 条边的平面图。

在欧拉公式推论的证明中,曾指出当且仅当简单连通平面图中每个区域都是由 3 条边围成时,则有 $3n - 6 = m$。由于 6 个顶点、12 条边的简单平面图满足上述等式,所以在画该平面图时,只需使其每个区域都由 3 条边围成即可,图 5.84(a) 就是一种满足题设条件的平面图。

现再画一种具有 6 个顶点、12 条边的非平面图。

由于 $K_{3,3}$ 是具有 6 个顶点、9 条边的非平面图,所以只要在 $K_{3,3}$ 中适当添加 3 条边就得所求的非平面图。图 5.84(b) 是一种满足题设条件的非平面图。

图 5.84

**例 5.21** 证明图 5.85 所示的图是非平面图。

**证明**　介绍 3 种证明方法。

**方法一**:在图中去掉两条边: $de$ 和 $db$,所得子图如图 5.86(a) 所示。易知它和 $K_5$ 二度同构(见图 5.86(b))。所以此图是非平面图。

图　5.85

图　5.86

**方法二**:在图中删去 4 条边: $ab$, $bd$, $ce$, $ef$,所得子图如图 5.87(a) 所示。易知它和 $K_{3,3}$ 同构(见图 5.87(b))。所以它是非平面图。

图　5.87

**方法三**:由于此图是简单连通图,图中有 6 个顶点、13 条边。它不满足简单连通平面图的必要条件: $3n - 6 \geq m$(因为 $3n - 6 = 3 \cdot 6 - 6 = 12 \ngeq m = 13$)。所以此图是非平面图。

**例 5.22**　证明图 5.88 所示的图是非平面图,此图也称为彼得逊图。

**证明**　介绍两种证明方法。

**方法一**:在彼得逊图中删去一个顶点,如删去顶点 $b$ 后,所得子图如图 5.89(a) 所示。然后把关联 2 度点的两条边画成插入一个 2 度点的边,如图 5.89(b)

图　5.88

所示。易见在图 5 .89(b) 中有 6 个 3 度点,把其中互不邻接的 3 个 3 度点画在上方,把另外互不邻接的 3 个 3 度点画在下方,即可把图 5 .89(b) 改画成如图 5 .89(c) 所示,显然它和 $K_{3,3}$ 二度同构,所以彼得逊图是非平面图。

图 5 .89

方法二:在彼得逊图中删去两条边 $fh$ 和 $ed$,所得子图如图 5 .90(a) 所示。同样把关联 2 度点的两条边画成插入一个 2 度点的边,见图 5 .90(b),再把图中互不邻接的 3 个 3 度点画在上方,把另外互不邻接的 3 个 3 度点画在下方,即可把图 5 .90(b) 改画成如图 5 .90(c) 所示。它和 $K_{3,3}$ 二度同构,所以彼得逊图是非平面图。

图 5 .90

### 5.4.4 自测练习

1.在图 5.91 所示的图中,哪些是偶图?

图 5.91

2.证明在无向简单连通平面图中,必存在一个顶点,其度数小于等于 5。

3.画出一种具有 7 个顶点、15 条边的简单平面图。

4.设图 $G$是具有 $n$个顶点、$m$条边和 $r$个区域的简单平面图,它由 $k$个连通分支构成,证明 $n - m + r = k + 1$。

5.问:具有 8 个顶点的简单连通平面图,最多有几条边?

6.设 $G$是具有 11 个顶点的简单连通平面图,证明 $G$中必存在一个顶点,其度数小于等于 4。

7.在一个简单连通平面图中,如果它有 $n$个顶点、$m$条边,且每一个区域都由 $k$条边围成($k \geq 3$),证明 $m = \dfrac{k(n-2)}{k-2}$。

8.画出两种不同构的,具有 6 个顶点和 11 条边的非平面图。

9.设图 $G$是简单连通平面图,且其每个区域至少由 4 条边围成,证明图 $G$中必存在一个顶点,其度数小于等于 3。

10.在图 5.92 所示的两个图中,哪个是平面图?

图 5.92

11.证明图 5.93 所示的图是非平面图。

图 5.93

12 .利用库拉托夫斯基定理证明图 5 .94 所示的 3 个图都是非平面图。

图 5 .94

13 .已知 3 度正则图 $G$ 具有 $n$ 个顶点和 $m$ 条边,且有 $2n - 3 = m$,问:在同构意义下,$G$ 是惟一的吗?

### 5 .4 .5 自测练习答案

1 .图 5 .91(b) 是偶图。

2 .用反证法。

设无向简单连通平面图 $G$ 中有 $n$ 个顶点:$v_1, v_2, \cdots, v_n$。如果 $G$ 中没有一个顶点其度数小于等于 5,也即对于任意的顶点 $v_i$,都有

$$\deg(v_i) \geq 6$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) \geq 6n$$

由于图 $G$ 是简单连通平面图,所以

$$3n - 6 \geq m$$

或有

$$6n - 12 \geq 2m$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m$$

由此得到

$$6n - 12 \geq 6n$$

这是不可能的。所以图 $G$ 中必存在一个顶点,其度数小于等于 5。

3 .所求图如图 5 .95 所示。

图 5 .95

4 .证明　设图 $G$的 $k$ 个连通分支分别为:$G_1$ , $G_2$ , …, $G_k$ ,并设 $G_i$ 有 $n_i$ 个顶点、$m_i$ 条边和 $r_i$ 个区域。由于每一个连通分支都是简单连通平面图,所以有:

$$n_1 - m_1 + r_1 = 2$$

$$n_2 - m_2 + r_2 = 2$$

$$\cdots\cdots$$

$$n_k - m_k + r_k = 2$$

将等式两边相加得:

$$(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) - (m_1 + m_2 + \cdots + m_k) + (r_1 + r_2 + \cdots + r_k) = 2k$$

易知, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m$,但在图 $G$中仅有一个无限区域,而在每一个连通分支 $G_i$ 中,其区域数 $r_i$ 都把无限区域各计算了一次,所以有

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = r + (k - 1)$$

于是得到

$$n - m + (r + (k - 1)) = 2k$$

由此证得

$$n - m + r = k + 1$$

5 .由于 $3n - 6 \geq m$,即 $3 \cdot 8 - 6 = 18 \geq m$,所以 8 个顶点的简单平面图最多有 18 条边。

6 .由于 $3n - 6 = 3 \cdot 11 - 6 = 27$,所以具有 11 个顶点的简单连通平面图 $G$中最多有 27 条边,也即图 $G$中 11 个顶点的度数之和最多为 54,所以图 $G$中必有一个顶点的度数小于等于 4。

7 .由定理 5 .4 .2 可知:

$$2m = kr$$

$$r = \frac{2m}{k}$$

代入欧拉公式后可得:

$$n - m + \frac{2m}{k} = 2$$

整理后可得:

$$m = \frac{k(n - 2)}{k - 2}$$

8 .如图 5 .96(a), (b) 所示。

图　5 .96

9 .用反证法。

设图 $G$ 中有 $n$ 个顶点: $v_1$ , $v_2$ , …, $v_n$ , 并设图 $G$ 中每一个顶点的度数都不小于等于 3, 也即有

$$\deg(v_i) \geq 4$$

或者有

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) \geq 4n$$

由于图 $G$ 中每个区域至少由 4 条边围成, 所以有

$$2n - 4 \geq m$$

或者有

$$4n - 8 \geq 2m = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) \geq 4n$$

这是不可能的, 所以图 $G$ 中必有一个顶点的度数小于等于 3。

10 .这两个图都是平面图。图 5 .92(a) 可改画成如图 5 .97(a) 所示, 易知它是平面图。

图　5 .97

把图5.92(b)中的顶点 $a$ 移动至边 $bf$ 的上方(见图5.97(b)),再把图改画成如图5.97(c)所示,易知它是平面图。

11.由于图中仅有6个顶点而有14条边,即 $3n-6=3\cdot 6-6=12 \not\geq m=14$,所以此图是非平面图。

12.首先证明图5.94(a)是非平面图。

在图5.94(a)中,删去边 $bf$, $bh$ 和 $ed$ 后所得子图如图5.98(a)所示,易知它和 $K_{3,3}$ 二度同构(见图5.98(b)),所以此图是非平面图。

图 5.98

再证图5.94(b)是非平面图。

方法一:图中删去边 $bc$ 后所得子图如图5.99(a)所示,易知此图和 $K_5$ 二度同构(见图5.99(b)),所以此图是非平面图。

图 5.99

方法二:在图中删去边 $ac$, $df$ 和 $ec$ 后,所得子图如图5.100(a)所示,易知它和 $K_{3,3}$ 同构(见图5.100(b)),所以此图是非平面图。

图 5.100

最后证明图5.94(c)是非平面图。

方法一:在图中删去顶点 $a$ 和两条边 $cd$, $fg$ 后所得子图如图5.101(a)所示。易见,此

子图和 $K_5$ 二度同构(见图 5 .101(b))。所以此图是非平面图。

图 5 .101

方法二:在图中删去顶点 $a$ 和 4 条边 $bd$, $fh$, $de$ 和 $ef$ 后,所得子图如图 5 .102(a) 所示。易见,它和 $K_{3,3}$ 二度同构(见图 5 .102(b)),所以此图是非平面图。

图 5 .102

13 .由于图 $G$ 是 3 度正则图,所以图 $G$ 中各个顶点的度数之和为 $3n$,即有 $2m = 3n$。又由题设条件可知,$2n - 3 = m$,由此可得 $n = 6$。所以图 $G$ 是具有 6 个顶点的 3 度正则图,这样的图不是惟一的,如图 5 .103 所示的两个图都是具有 6 个顶点的 3 度正则图,其中图 5 .103(a) 是平面图,图 5 .103(b) 是完全偶图 $K_{3,3}$,它是非平面图。

图 5 .103

## 5 .5 树

树是计算机科学理论和计算机技术中使用最为广泛的图形之一。

### 5.5.1 无向树

**1.无向树的定义**

**定义 5.5.1** 一个连通且没有回路的无向简单图称为无向树或简称为树。

例如,图 5.104 所示的图是一个无向树。

在无向树中,度数为 1 的顶点称为树叶,度数大于 1 的顶点称为分支点或内结点。

以树作为连通分支的不连通图称为森林。

**2.无向树的性质**

由无向树的定义易得无向树的基本性质:

**性质 1** 若树有 $n$ 个顶点, $m$ 条边,则 $n = m + 1$。

图 5.104

**性质 2** 无向树中任意两个顶点之间有且仅有一条通路相连。

**性质 3** 在无向树中任意删去一条边后,则成为不连通图,即无向树中每条边都是割边,这表明树是"连通程度"最小的图。

**性质 4** 在无向树中任意两个不邻接的顶点之间添加一条边,则构成惟一的回路。

**3.赋权图的最小生成树**

首先介绍生成树的概念。

**定义 5.5.2** 设图 $G$ 是无向连通简单图,若 $G$ 的一个生成子图(含有图 $G$ 的所有顶点的子图)是一棵树,则称此树为图 $G$ 的生成树。

例如,图 5.105(a)是一个无向连通简单图,图 5.105(b)和图 5.105(c)都是它的生成树。

图 5.105

**定理 5.5.1** 无向简单连通图必有生成树。

证明从略。

**定义 5.5.3** 设图 $G$ 是无向简单连通图, $T$ 是其生成树,属于 $G$ 但不属于生成树 $T$ 的边称为 $T$ 的弦,由所有弦(包括弦的两个端点)构成的 $G$ 的子图称为 $G$ 的余树。

例如,图 5.106(b)是图 5.106(a)的生成树,图 5.106(c)是图 5.106(a)的余树。

图 5.106

现在讨论一个很有实用意义的问题:赋权图的最小生成树。

如在一个新建的城市中,煤气厂需要铺设煤气管道给几个住宅区供应煤气。图 5 .107 中的 $A$ 表示煤气厂, $B, C, D, E, F, G$ 表示各住宅区, 煤气管道必须沿着图中所示的路线(图中的边) 铺管道,每条路线上的数字表示铺设煤气管道的费用。现在问: 应怎样铺设煤气管道, 使煤气能供应给各个住宅区, 且其费用最少 ?易见,图 5 .107 是个赋权图, 这个图的生成树是连接图中所有顶点的最小连通子图,所以这个问题可以归结为在图 5 .107 中找一棵生成树 $T$, 使 $T$ 中各边的权之和最小,称这样的树为赋权图的最小生成树。

图 5 .107

下面介绍一种求赋权图的最小生成树的算法,这是克鲁斯卡尔于 1956 年首先提出的,此算法常称为破圈法。

设 $G$ 是具有 $n$ 个顶点、$m$ 条边的无向连通图。首先把图 $G$ 中 $m$ 条边按权由小到大顺序排列,不妨设排列顺序为 $e_1, e_2, \cdots, e_m$。然后将图 $G$ 中权最小的两条边 $e_1$ 和 $e_2$ 作为所求最小生成树的两条边;在余下的边中, 对权最小的边 $e_3$, 需检查 $e_1 e_2 e_3$ 是否构成回路,如果不构成回路, 则把边 $e_3$ 作为所求最小生成树的一条边,否则将 $e_3$ 删去;继续取 $G$ 的余下边中权最小的边 $e_4$ 作同样处理: 当 $e_4$ 与前面已作为最小生成树的边不构成回路时, 则将边 $e_4$ 作为所求最小生成树的一条边, 否则删去 $e_4$; ……,如此不断地取 $G$ 中余下的权最小的边, 不断地检查它们是否与已成为最小生成树的边构成回路以决定取舍, 直到取到 $n-1$ 条边为止。

例如,需求图 5 .107 的最小生成树时, 可先取权最小的两条边 $EF$ 和 $AF$ 作为最小生成树的两条边,余下边中权最小的边是 $AE$, 由于 $AE$, $EF$ 和 $AF$ 构成回路, 所以舍去边 $AE$;再取余下边中权最小的边 $FG$ 和 $AC$, 它们和 $EF$, $AF$ 都不构成回路,所以 $FG$ 和 $AC$ 都可作为最小生成树的边;再取余下边中权最小的边 $AG$, 由于 $AG$ 和 $AF$, $GF$ 构成回路, 所以舍去边 $AG$;再取余下边中权最小的边 $BG$ 和 $EC$, 由于 $EC$ 和 $AC$, $AF$, $EF$ 构成回路, 所以舍去边 $EC$,而边 $BG$ 可以作为最小生成树的边;同样理由可知, $ED$ 可以作为最小生成树的边,到此已求得图 5 .107 的最小生成树, 如图 5 .108 所示。

图 5 .108

现把克鲁斯卡尔算法完整地叙述如下:

步骤 1 把图 $G$ 中各边按权由小到大顺序排列, 设为 $e_1, e_2, \cdots, e_m$。置 $S =$ , $i = 0$, $j = 1$。

步骤 2 若 $|S| = i = n-1$, 则计算结束。此时所得 $S$ 的导出子图即为所求最小生成树, 否则转步骤 3。

步骤 3 若 $S \cup \{e_i\}$ 不构成回路, 则置 $S = S \cup \{e_i\}$, $i = i+1$, $j = j+1$, 转向步骤 2, 否则置 $j = j+1$, 转向步骤 3。

### 5.5.2 有向树

**1.有向树的定义**

**定义 5.5.4** 若把有向图中各条有向边的箭头删去使之成为无向边,由此而得的无向图是树,则称此有向图为有向树。

简单地讲,底图为树的有向图称为有向树。

例如,图 5.109 所示的图是有向树。

图 5.109

**2.有根树**

**定义 5.5.5** 满足以下条件的有向树 $T$ 称为有根树:

(1) $T$ 中有一个且仅有一个顶点的入度为零,称此顶点为根。

(2) $T$ 中除根外,其他顶点的入度都为 1。

例如,图 5.110(a) 所示的图是有根树,其中顶点 $a$ 是根,出度为零的顶点称为树叶或叶片,出度不为零的顶点称为分支点或内结点。

在画有根树时,经常把树根画在最上面,并使有根树中各有向边(有向边也可称作弧)的箭头朝下,经此约定后,可把各有向边的箭头省略,于是图 5.110(a) 所示的有根树可简画为如图 5.110(b) 所示。

在有根树中,从树根到顶点 $t$ 的通路长度(即自根到顶点 $t$ 的通路中所含边的条数)称为顶点 $t$ 的层次或水平。

例如,在图 5.110(b) 所示的有根树中,根 $a$ 的层次为 0,顶点 $b$ 和 $c$ 的层次为 1,顶点 $d$, $e$, $f$, $g$, $h$ 的层次为 2,顶点 $i$ 和 $j$ 的层次为 3。

图 5.110

**在有根树中,最长通路的长度称为此有根树的高度。**

**例如,**在图 5.110(b) **所示的有根树中,其高度为** 3。

**设** $ab$ **是有根树** $T$ **中的一条有向边(弧),如果** $a$**是始点,**$b$**是终点,则称** $a$**是** $b$**的父亲,**$b$**是** $a$**的儿子。如果有根树** $T$ **中有一条以** $a$ **为始点,**$t$**为终点的有向通路,则称** $a$**是** $t$**的祖先,**$t$**是** $a$**的后裔。**

**例如,**在图 5.110(b) **所示的有根树中,**$a$**是** $b$**和** $c$ **的父亲,**$b$**和** $c$**是** $a$**的儿子;**$b$**是** $d, e$ **和** $f$ **的父亲,**$d, e$**和** $f$**都是**$b$**的儿子;**$c$**是** $g$**和** $h$**的父亲,**$g$**和** $h$**都是**$c$**的父亲;**$g$**是** $i$**和** $j$ **的父亲,**$i$**和** $j$ **是** $g$ **的儿子;**$a$**是** $d, e, f, g, h, i, j$ **的祖先,**$d, e, f, g, h, i, j$ **是** $a$ **的后裔等。**

**在有根树** $T$**中取一个顶点**$t$**,由** $t$**以及** $t$**的所有后裔构成的树称为有根树** $T$ **的子树。易见顶点** $t$**是子树的根。**

**例如,**图 5.111(b) **是图** 5.111(a) **的一棵子树。**

**图** 5.111

**定义 5.5.6** **设** $T$**是有根树,如果** $T$**中各个分支点的儿子数最多为** $k$**,则称有根树** $T$ **为** $k$ **叉树。**

**例如,**图 5.112(a) **是四叉树。**

**定义 5.5.7** **在有根树中,如果每一个分支点的儿子数都是** $k$**,则称此有根树为完全** $k$**叉树。**

**例如,**图 5.112(b) **是完全三叉树。**

**定义 5.5.8** **设** $T$**是完全** $k$ **叉树,如果其树叶的层次相同,则称** $T$**为正则** $k$ **叉树。**

**图** 5.112

例如,图 5 .112(c) 是正则二叉树。

**定理 5 .5 .2** 设 $T$ 为完全 $k$ 叉树,如果其分支点数为 $i$,树叶数为 $t$,则

$$i = \frac{t - 1}{k - 1}$$

证明 因为任何有向树的底图是无向树,所以在有向树中同样有“边数比顶点数少 1”的结论。易见,在完全 $k$ 叉树中,边数为 $ki$,顶点数为 $i + t$,于是有

$$i + t = ki + 1$$

由此证得

$$i = \frac{t - 1}{k - 1}$$

**3 .有序树**

给有根树中的顶点规定某种次序,称为有序树,有序树有多种定义方法,本书采用下列定义:

**定义 5 .5 .9** 在有根树中,顶点按层次自左到右指定次序,则称此有根树为有序树。

例如,图 5 .113(a) 和(b) 都是有序树,并认为是不同的有序树。

图 5 .113

二叉树是计算机技术中使用最广泛的一类树。在二叉有序树中,常把分支点的两个儿子分别画在分支点的左下方和右下方,分别称为左儿子或右儿子。当分支点只有一个儿子时,将儿子画在左下方或右下方也认为是不同的。

例如,在图 5 .114 中,两个二叉有序树是不同的。

图 5 .114

**4 .周游算法**

在数据结构中,经常需要遍访二叉树的每一个顶点,或称周游二叉树。常用的算法有 3 种:前序、中序、后序周游算法。

(1) 前序周游算法

若需要周游的二叉树为 $T$,根的左、右两个儿子构成的子树分别称为左子树和右子树。

设二叉树 $T$ 的左子树为 $T_1$,右子树为 $T_2$,则前序周游算法的递归定义为:

首先处理二叉树 $T$ 的根;其次处理左子树 $T_1$,在处理左子树时,用前序周游算法,接着处理右子树,在处理右子树时,用前序周游算法。

例如,在图5.115(a)所示的二叉树 $T$ 中,用前序算法,首先应当处理二叉树 $T$ 的根 $a$,即首先访问 $a$。其次处理左子树 $T_1$(见图5.115(b)),在处理左子树 $T_1$ 时,仍然首先访问其根,易见 $b$ 是左子树 $T_1$ 的根,因此 $b$ 是第2个被访问的顶点;然后处理 $T_1$ 的左子树,即 $d$,因此 $d$ 是第3个被访问的顶点;再处理 $T_1$ 的右子树,易见 $e$ 是 $T_1$ 的右子树的根,因此 $e$ 是第4个被访问的顶点;而 $e$ 的左子树为 $h$,因此 $h$ 是第5个被访问的顶点。处理完了 $T$ 的左子树 $T_1$ 后,应当处理 $T$ 的右子树 $T_2$(见图5.115(c))。易见 $c$ 是右子树 $T_2$ 的根,因此 $c$ 是第6个被访问的顶点;然后处理 $T_2$ 的左子树,其根为 $f$,因此 $f$ 是第7个被访问的顶点;接着再处理 $f$ 的左子树 $i$ 和右子树 $j$,因此 $i$ 和 $j$ 是第8和第9的被访问的顶点;最后处理 $T_2$ 的右子树,即 $g$,因此 $g$ 是第10个被访问的顶点。

由此可知,用前序周游算法,二叉树 $T$ 中各顶点的访问顺序为:

$$a \to b \to d \to e \to h \to c \to f \to i \to j \to g$$

图 5.115

又如,在图5.116中所示的二叉树 $T$,用前序周游算法,$T$ 中各个顶点的访问顺序为:

$$a \to b \to d \to h \to i \to l \to e \to c \to f \to j \to k \to m \to o \to n \to g$$

(2) 中序周游算法

若需周游二叉树 $T$ 的各个顶点,用中序周游算法,其递归定义如下。

首先处理二叉树 $T$ 的左子树,再处理 $T$ 的根,最后处理 $T$ 的右子树。

在处理子树时,用中序周游算法。

例如,仍以图5.115(a)所示的二叉树为例。用中序周游算法时,首先处理 $T$ 的左子树 $T_1$,在处理左子树 $T_1$ 时,用中序周游算法,所以 $d$ 是第1个被访问的顶点,$b$ 是第2个被访问的顶点,$h$ 和 $e$ 是第3和第4个被访问的顶点,处理完了左子树 $T_1$,应处理根 $a$,因此 $a$ 是被访问的第5个顶点;再处理 $T$ 的右子树 $T_2$ 时,先处理 $T_2$ 的左子树,易知 $i$、$f$ 和 $j$ 是第6、第7和第8个被访问的顶点,然后处理 $T_2$ 的根 $c$,因此 $c$ 是第9个被访问的顶点,最后处理

$T_2$ 的右子树,即 $g$,因此 $g$ 是第 10 个被访问的顶点。

图 5.116

由此可知,用中序周游算法,图 5.115(a) 所示的二叉树各顶点访问顺序为:

$$d \to b \to h \to e \to a \to i \to f \to j \to c \to g$$

(3) 后序周游算法

其递归定义如下:

首先处理 $T$ 的左子树,再处理 $T$ 的右子树,最后处理 $T$ 的根。

在处理子树时,用后序周游算法。

例如,仍以图 5.115(a) 为例。用后序周游算法, $T$ 中各顶点的访问顺序为:

$$d \to h \to e \to b \to i \to j \to f \to g \to c \to a$$

**5**.表达式的波兰表示法

在算术表达式中,乘方是最优先的运算,其次是乘和除,最后是加和减。但圆括号可以改变运算的优先规则,从而给计算机处理带来很大的不便。波兰数学家鲁加实维支提出了算术表达式的“前缀式”表示(通常称为波兰表示法),即把运算符写在运算对象的前面。例如, $a+b$ 写作 $+ab$; $a-b$ 写作 $-ab$; $a\times b$ 写作 $\times ab$; $a/b$ 写作 $/ab$ 等。由此可使表达式中不再使用圆括号。

例如, $(a+bc)d$ 用波兰表示法可写成:

$$\times + a \times bcd$$

又如, $((a+b)c+6d)(a-c)$ 用波兰表示法可写成:

$$\times + \times + abc \times 6d - ac$$

当算术表达式比较复杂时,写出其波兰表示有一定的难度,但利用二叉树的前序周游算法,能方便地得到表达式的波兰表示。

例如,表达式为: $((a+3b)c-ad)/(a+2d)$。

首先用二叉树来表示上述表达式。其方法是用树中的分支点表示运算符,叶片表示运算对象,运算由底层向上逐步进行。图 5.117 是上述表达式: $((a+3b)c-ad)/(a+2d)$ 的二叉树表示。

图 5.117

此二叉树经前序周游算法后,即得

$$/ - \times + a \times 3bc \times ad + a \times 2d$$

可以验证,它就是上述表达式的波兰表示。

## 5.5.3 重点和难点分析

本节的重点是:熟练地掌握无向树的定义与性质,特别是无向树中顶点数比边数多 1 的重要特征;掌握求最小生成树的方法;掌握有根树、$k$叉树、完全 $k$叉树、有序树的定义和有关性质;掌握 3 种周游算法。

难点是:熟练地运用无向树的特征去分析和解决问题,熟练掌握 3 种周游算法。

**例 5.23** 设 $T$ 是具有 $n$ 个顶点的无向树,证明 $T$ 中各顶点的度数之和为 $2n-2$。

证明 由于无向树 $T$ 中的边数 $m$ 比顶点数 $n$ 少 1,即 $m=n-1$,所以 $2m=2n-2$。而图中各顶点的度数之和是边数的两倍。由此证得无向树 $T$ 中各顶点的度数之和为 $2n-2$。

**例 5.24** 设 $T$ 是无向树,$T$ 中有 2 个 2 度点,4 个 3 度点,3 个 4 度点,$T$ 中没有 4 度以上的顶点,问:$T$ 中有几片树叶?

解 设 $T$ 中有 $x$ 片树叶。由于

$$T \text{ 中各点度数之和} = 2 \times \text{顶点数} - 2$$

所以

$$x + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 2(x + 2 + 4 + 3) - 2$$

由此解得 $x = 12$,即 $T$ 中有 12 片树叶。

**例 5.25** 设 $T$ 是无向树,$T$ 中有 2 个 2 度点,3 个 3 度点,4 个 4 度点,……,$k$ 个 $k$ 度点。问 $T$ 中有几片树叶?

解 设 $T$ 中有 $x$ 片树叶。于是有

$$x + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + \cdots + k \cdot k = 2(x + 2 + 3 + 4 + \cdots + k) - 2$$

由此解得 $x = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \cdots + k(k - 2) + 2$。

**例 5.26** 设 $T$ 是无向树，$T$ 中有 3 度点和 4 度点，但没有 5 度和 5 度以上的顶点，如果 $T$ 中有 6 片树叶，问：$T$ 中有几个 3 度点？有几个 4 度点？

解　设 $T$ 中有 $x$ 个 2 度点，$y$ 个 3 度点，$z$ 个 4 度点。于是有

$$6 + 2x + 3y + 4z = 2(6 + x + y + z) - 2$$

由此可得：$y + 2z = 4$。由于 $y$ 和 $z$ 都是正整数，所以上述方程有惟一的正整数解：$y = 2, z = 1$，也即 $T$ 中有 2 个 3 度点和 1 个 4 度点。

**例 5.27** 画出所有具有 6 个顶点的无向树。

解　由例 1 可知，6 个顶点的无向树中，这 6 个顶点的度数之和为 10。所以这 6 个顶点的度数应分别为：

(1) 1,1,2,2,2,2(见图 5.118(a))。

(2) 1,1,1,2,2,3(见图 5.118(b)(c))。

(3) 1,1,1,1,3,3(见图 5.118(d))。

(4) 1,1,1,1,2,4(见图 5.118(e))。

(5) 1,1,1,1,1,5(见图 5.118(f))。

图　5.118

**例 5.28** 证明完全三叉树必有奇数片树叶。

证明　在完全 $k$ 叉树中，分支点数 $i$ 和叶片数 $t$，成立着如下公式：

$$i = \frac{t - 1}{k - 1}$$

当 $k = 3$ 时，$i = \frac{t - 1}{2}$，所以有 $t = 2k + 1$，由此证得完全三叉树的叶片为奇数。

**例 5.29** 对于图 5.119 所示的二叉树，用前序、中序、后序周游算法写出各顶点的访

问次序。

图 5.119

**解** 用前序周游算法可得各顶点访问顺序为:

$$a\to b\to d\to e\to h\to l\to m\to e\to c\to f\to i\to j\to n\to o\to g\to k$$

用中序周游算法可得各顶点访问顺序为:

$$d\to b\to l\to h\to m\to e\to a\to i\to f\to n\to j\to o\to c\to g\to k$$

用后序周游算法可得各顶点访问顺序为:

$$d\to l\to m\to h\to e\to b\to i\to n\to o\to j\to f\to k\to g\to c\to a$$

**例 5.30** 利用前序周游算法求算术表达式:$\frac{(a+b)c-8d}{a}+(a-2b)$ 的波兰表示。

**解** 先画出表达式$\frac{(a+b)c-8d}{a}+(a-2b)$ 的二叉树表示(见图5.120)

图 5.120

由图可知,表达式$\frac{(a+b)c-8d}{a}+(a-2b)$的波兰表示为:

$$+/\ -\times+\ abc\times 8\,da\ -\ a\times 2\,b$$

### 5.5.4 自测练习

1.说明下列序列中哪些可构成无向树顶点的度序列。

(1) 1,1,2,2,2,2,2

(2) 1,1,1,2,3,4,5

(3) 1,1,1,1,2,2,4

(4) 1,1,1,1,1,1,2

(5) 1,1,2,2,3,3,3

(6) 1,1,1,1,1,1,6

2.画出所有5个顶点的无向树。

3.说明仅有两片树叶的无向树的特征。

4.设$T$是无向树,$T$中有100个2度点,5个3度点,2个4度点且$T$中没有大于4度的顶点,问$T$中有几片树叶?

5.设$T$是无向树,$T$中有8片树叶,4个3度点,问$T$中有几个4度点?

6.设$T$是无向树,$T$中有$n_2$个2度点,$n_3$个3度点,……,$n_k$个$k$度点,问$T$中有几片树叶?

7.求图5.121所示图的最小生成树。

8.证明完全二叉树有奇数个顶点。

9.设有根树T的顶点为:$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6$;$T$的邻接矩阵为:

图 5.121

$$\begin{array}{cccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

试确定哪个顶点是根?哪些顶点是树叶?

10.对于图5.122所示的二叉树,用前序、中序和后序算法写出顶点的访问顺序。

11.利用前序周游算法,求表达式:

$((a+b)c+d)e+((a-b))d$的波兰表示。

图 5.122

## 5.5.5 自测练习答案

1.由于 7 个顶点的无向树,各个顶点的度数总和为 12。所以(1),(3)和(6)可构成无向树的顶点度序列。

2.由于 5 个顶点的无向树中,各个顶点的度数之和为 8,所以无向树中 5 个顶点的度数应分别为:

(1) 1,1,2,2,2(见图 5.123(a))。

(2) 1,1,1,2,3(见图 5.123(b))。

(3) 1,1,1,1,4(见图 5.123(c))。

3.设无向树有 $n$ 个顶点,这 $n$ 个顶点的度数总和为 $2n-2$。若无向树中仅有 2 片树叶(1 度点),那么其他 $n-2$ 个顶点的度数总和为 $2(n-2)$,所以其他顶点的度数都为 2。

4.设 $T$ 中有 $x$ 片树叶,于是有

$$x+2\cdot 100+5\cdot 3+2\cdot 4=2(x+100+5+2)-2$$

由此解得 $x=11$,即 $T$ 中有 11 片树叶。

图 5.123

5.设 $T$ 中有 $x$ 个 2 度点,$y$ 个 4 度点,于是有

$$8+2x+4\cdot 3+4y=2(8+x+4+y)-2$$

由此解得 $y=1$,即 $T$ 中有 1 个 4 度点。

6.设 $T$ 中有 $x$ 片树叶,于是有

$$x+2n_2+3n_3+\cdots+kn_k=2(x+n_2+n_3+\cdots+n_k)-2$$

由此解得 $x=n_3+2n_4+\cdots+(k-2)n_k+2$。所以 $T$ 中有 $n_3+2n_4+\cdots+(k-2)n_k+2$ 片树叶。

7.其最小生成树如图 5.124 所示。

8.由于完全 $k$ 叉树中的分支点数 $i$ 和树叶数 $t$ 成立着下列等式:

$$i=\frac{t-1}{k-1}$$

当 $k=2$ 时,有 $i=t-1$ 或 $i+t=2t-1$。易知完全二叉树中顶点数为 $i+t$,所以完全二叉树的顶点数为奇数。

图 5.124

9.由于矩阵中的第 3 列元素全为 0,这表明顶点 $a_3$ 的入度为 0,所以 $a_3$ 是有根树 $T$ 的根。又由于矩阵中的第 2,4,5,6 行的元素都为 0,这表明顶点 $a_2,a_4,a_5,a_6$ 的出度为 0,所以 $a_2,a_4,a_5,a_6$ 是树叶。

10.用前序周游算法,各顶点的访问顺序为:

$$a\to b\to d\to c\to e\to g\to h\to k\to l\to f\to i\to j$$

用中序周游算法,各顶点的访问顺序为:

$$d\to b\to a\to g\to e\to k\to h\to l\to c\to i\to f\to j$$

用后序周游算法,各顶点的访问顺序为:

$$d \rightarrow b \rightarrow g \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow h \rightarrow e \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow f \rightarrow c \rightarrow a$$

11 .**先画出表达式的二叉树表示**(**见图** 5 .125)

**图** 5 .125

**由图可知**,**表达式的波兰表示为**:

$$+ \times + \times + \ abcde \times - \ abd$$

# 第 6 章　复习应试指南

离散数学主要由数理逻辑、集合(包括二元关系和函数)、代数结构、图论 4 部分组成。它们虽然有一定的联系,但基本上是独立的,自成体系的。因此离散数学具有"内容广泛,抽象理论多"的特点,这无疑给自学者带来一定的难度。为了能使自学者在较短的时间内,对离散数学的课程内容有较好的把握,建议在初读时,以"节"为单位进行自学,尽量做到学一节,掌握一节。本书每一节的前半部分是离散数学课程内容的详尽介绍,这部分内容要花较多的时间和精力去读懂它,着重掌握基本概念。在此基础上,再阅读"重点和难点分析"。在"重点和难点分析"中所举的例子中,一部分是为了帮助自学者加深对基本概念的理解,另一部分则是给出一些解题的思路和技巧以提高自学者的应试能力。对课程的内容有了基本的理解和掌握后,可以做自测练习。自测练习题一般都是由易到难,由浅入深的,对于某些不能解答的自测练习,不要轻易去翻看自测练习答案,因为做练习是自我检验,自我提高的过程,所以对于不会做的练习题,可以再一次去阅读"重点和难点分析"中的相关例题,以求获得解题的思路,提高自己的解题技巧。

本书的最后一章给出了 3 套模拟试题,其中有些试题是近年来离散数学自学考试的试题。给出模拟试题的目的并不是去猜题,而是让应试者了解离散数学自学考试试题的型式,以便能有效地准备考试。

## 6.1　数 理 逻 辑

命题逻辑和谓词逻辑是数理逻辑的基本内容。

在命题逻辑中,研究的主要对象是命题,而命题则是由一些原子命题经联结词组合而成的。在命题逻辑中,原子命题是最基本的单元,原子命题是不可分解的。在谓词逻辑中,不再把原子命题看作是一个不可分解的整体,在原子命题中引进谓词的概念,对原子命题的内部结构进行细致的分析,从而扩大了数理逻辑的研究领域。

自学时要注意命题逻辑与谓词逻辑的联系和差异。

### 6.1.1　命题逻辑

首先要充分理解命题的概念。命题是特殊的陈述句,它应具有判断的内容(即可判断其为真或为假)且具有惟一的真值。

还应当注意,陈述句能否判断真、假值与是否知道其真、假值是两回事。

例如,"2008 年奥运会开幕那一天,北京的天气晴朗",这个陈述句虽然目前还不知道它是真还是假,但到了那一天,其真、假值就可以惟一确定了。因此这个陈述句是命题。但"$x>0$"却不然,当 $x=1$ 时,"$x>0$"为真;当 $x=-1$ 时,"$x>0$"为假。由于 $x$ 的取值情况不确定而造成了"$x>0$"的真值无法确定,所以它不是命题。

联结词(否定、合取、析取、条件、双条件等)是命题逻辑的基础内容,要深入理解它们的定义,并能熟练地运用联结词把复杂命题符号化。

自学时需要注意:在数理逻辑中,复合命题的真值只取决于构成它的原子命题的真值以及联结原子命题联结词的定义,而与原子命题的含义以及它们之间有无联系是无关的。

例如,设 $P$:1 + 2 = 5, $Q$:地球比太阳大。则命题"如果1 + 2 = 5,则地球比太阳大"可符号化为 $P \to Q$。虽然这个命题在自然语言中是没有意义的,"1 + 2 = 5"和"地球比太阳大"是毫不相关的,但在数理逻辑中,由于前件1 + 2 = 5是假的,所以这个命题有惟一的真值:为真,即这是个真命题。

真值表是研究命题逻辑的有效工具。要求能熟练地写出给定命题公式的真值表,并能较好地理解由真值表定义的永真式(重言式)、永假式(矛盾式)、可满足式的概念。

命题公式的逻辑等价是命题逻辑中的重点内容。要深刻理解逻辑等价的定义。例如,对于命题公式: $P \wedge \neg Q$ 和 $\neg(P \to Q)$,它们的真值表如表6.1所示:

表 6.1

| $P$ | $Q$ | $P \wedge \neg Q$ | $\neg(P \to Q)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

由表可知, $P \wedge \neg Q \quad \neg(P \to Q)$。

如果令 $P$:西瓜是甜的, $Q$:西瓜的价钱很贵。那么命题 $P \wedge \neg Q$ 表示:"虽然西瓜是甜的,但西瓜的价钱不很贵"。命题 $\neg(P \to Q)$ 表示:"情况并非如此:如果西瓜是甜的,那么西瓜的价钱很贵"。易见,逻辑等价的命题公式具有相同的逻辑含义。

需要熟练地掌握运用真值表证明命题公式的逻辑等价。当命题公式中的分量较多时,使用真值表太冗长,所以还应当熟练地掌握以下技能:依据代换规则和常用的逻辑等价式,通过"演算"(也称等值演算)来证明命题公式的逻辑等价。

在常用的逻辑等价式中,联结词合取和析取分别满足等幂律、结合律、交换律、吸收律、摩根律,以及 $\neg\neg P \quad P$, $P \wedge \neg P \quad 0$, $P \vee \neg P \quad 1$ 等是容易理解和记忆的。应当熟记以下常用的逻辑等价式:

(1) $P \to Q \quad \neg P \vee Q$

(2) $\neg(P \to Q) \quad P \wedge \neg Q$

(3) $P \vee Q \quad \neg P \to Q$

(4) $P \quad Q \quad (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

(5) $P \quad Q \quad (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

(6) $P \quad Q \quad (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

并能在逻辑等价的证明中,熟练而又灵活地使用上述逻辑等价式。

命题公式的范式表示也是重点内容。主要应熟练掌握命题公式的主析取范式表示和

主合取范式表示。

要求能熟练地运用真值表法和等值演算法,求出给定命题公式的主析取范式和主合取范式。

特别要注意,充分理解和掌握小项(或称极小项) 和大项(或称极大项) 的概念。熟练地掌握由命题公式的主析取范式表示如何方便地转化为主合取范式表示,或由命题公式的主合取范式如何方便地转化为主析取范式表示。

例如,求命题公式$(Q\to R)\to(P\wedge R)$的主析取范式和主合取范式。

解　首先用等值演算法求出$(Q\to R)\to(P\wedge R)$的主析取范式。由于

$$\begin{aligned}(Q\to R)\to(P\wedge R)\quad & \neg(Q\to R)\vee(P\wedge R)\\ & \neg(\neg Q\vee R)\vee(P\wedge R)\\ & (Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge R)\\ & ((Q\wedge\neg R)\wedge(P\vee\neg P))\vee((P\wedge R)\wedge\\ & (Q\vee\neg Q))\\ & (P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\\ & Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\end{aligned}$$

所以求得$(Q\to R)\to(P\wedge R)$的主析取范式为:

$$(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)$$

为了方便地求得$(Q\to R)\to(P\wedge R)$的主合取范式,把$(Q\to R)\to(P\wedge R)$的主析取范式写成:

$$(Q\to R)\to(P\wedge R)\quad m_{110}\vee m_{010}\vee m_{111}\vee m_{101}$$

为便于观察把小项的下标写成十进制数表示,并记作:

$$m_{110}\vee m_{010}\vee m_{111}\vee m_{101}\quad\sum(2,5,6,7)$$

由此可知,在 0 到 7 这 8 个整数中,0,1,3,4 应是大项的下标,再把它们改写成二进制数表示,即得

$$\begin{aligned}(Q\to R)\to(P\wedge R)\quad & M_{000}\wedge M_{001}\wedge M_{011}\wedge M_{100}\\ & (P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\\ & \neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\end{aligned}$$

这就得到了$(Q\to R)\to(P\wedge R)$的主合取范式。

为了便于主析取范式和主合取范式的互换,常将主合取范式记作:

$$M_{000}\wedge M_{001}\wedge M_{011}\wedge M_{100}\quad\prod(0,1,3,4)$$

又如,求$(P\to Q)\wedge(Q\to R)$的主析取范式和主合取范式。

解　易见,求$(P\to Q)\wedge(Q\to R)$的主合取范式是方便的。

$$\begin{aligned}(P\to Q)\wedge(Q\to R)\quad & (\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R)\\ & ((\neg P\vee Q)\vee(R\wedge\neg R))\wedge((\neg Q\vee R)\vee\\ & (P\wedge\neg P))\\ & (\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge\\ & (P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\\ & \prod(4,5,2,6)\end{aligned}$$

由此可得$(P\to Q)\wedge(Q\to R)$的主析取范式为

$$\sum(0,1,2,7)\quad m_{000}\vee m_{001}\vee m_{010}\vee m_{111}$$

$$(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$$

另外,还请注意:不要把逻辑等价“ ”和双条件“ $\rightleftarrows$ ”混同看待,这是两个截然不同的概念,逻辑等价“ ”说明两个命题公式有相同的逻辑含义,而“ $\rightleftarrows$ ”是个联结词。

当命题公式 $A\to B$为永真式时,称 $A$蕴含 $B$,并记作 $A\quad B$。蕴含是推理理论的基础,蕴含是命题逻辑中极为重要的内容,必须细心领会,熟练掌握。

在自学时,要深刻领会蕴含的定义,领会它和推理理论的联系。更重要的是能非常熟练地掌握蕴含式的证明。熟记以下常用的蕴含式:

(1) $P\wedge Q\quad P$

$P\wedge Q\quad Q$

(2) $P\quad P\vee Q$

$Q\quad P\vee Q$

(3) $P\wedge(P\to Q)\quad P$

(4) $\neg Q\wedge(P\to Q)\quad\neg P$

(5) $(P\to Q)\wedge(Q\to R)\quad P\to R$

推理理论是命题逻辑中最重要的内容。要深刻理解前提、有效结论等概念;能熟练地运用推理规则(P 规则和 T 规则)进行推理;并能按不同的情况,灵活地使用直接证明法、间接证明法(包括使用 CP 规则)证明有效结论。

学好推理的关键是:能正确地分清前提和结论,并能把前提和结论符号化;熟练地证明蕴含式以推理出有效结论。

### 6.1.2 谓词逻辑

命题逻辑分析复合命题的逻辑结构,而不对简单命题内部的逻辑形式进行解剖。这样,命题逻辑还不足以包括所有的逻辑规律。对于“苏格拉底三段论”,命题逻辑显得无能为力。谓词逻辑是在命题逻辑的基础上,不但研究命题之间的逻辑结构,而且还深入到命题的内部对其逻辑形式加以分析。从这个意义上讲,谓词逻辑是命题逻辑的继承和发展。

在谓词逻辑中,要使用联结词和量词来构成命题,研究其逻辑形式与彼此之间的关系,特别是推理关系。关于联结词,命题逻辑已经有了较为充分的讨论,作为命题逻辑的继承,谓词逻辑只需承认已有的结论即可。而量词是谓词逻辑中所特有的新生事物,关于它们的讨论形成了谓词逻辑,是命题逻辑的发展的主要内容。因此,在谓词逻辑这部分理论的学习中,应该把注意力集中在对量词的理解以及量词与联结词、量词之间的关系上,以探索新的结论。

一个原子命题可以用个体和谓词来刻画,有时还需要通过量词对谓词进行量化来实现。每个谓词有自己谈论的对象,这种对象的全体所构成的非空集合称为个体域(或称为论域),而其中的元素,即所讨论的对象,称为个体。我们还将一切事物组成的个体域称为全总个体域。谓词有函数表示形式,称为原子命题函数。由原子命题函数与逻辑联结词组

合形成了复合命题函数,简称命题函数。在命题函数中,那些抽象的尚待确定的个体称为个体变元,不同的个体变元的个数称为相应谓词的元数。一般地,一元谓词用来说明个体的性质,$n$元谓词用来指出$n$个个体之间的关系。$n$元谓词中,这些个体是有序的。特别地,0元谓词中不含有个体变元。此时,命题函数有了确定的值,成为一个命题。这类命题是通过把谓词中的个体变元指定为个体常元来实现的。从这个角度上讲,命题可视为谓词的一种特殊情形。命题逻辑中得到的结论,如:等价定律、蕴含式和推理规则等在谓词逻辑中依旧成立,呈现出谓词逻辑是命题逻辑的继承的一面。

还有相当多的一类命题需要引入量词。量词是对个体域中的个体做出量的规定的词。全称量词$\forall$表示全部,不妨把$\forall$看成英文单词 *all* 中第一个字母 $A$ 的倒写,存在量词$\exists$表示部分,不妨把$\exists$看成英文单词 *existential* 中第一个字母 $E$ 的反写。在全总个体域中,用来描述所论及的个体之特性的特性谓词在不同量词后的处理方式有所不同。一般地,对全称量词,特性谓词常作条件式中的前件;而对存在量词,特性谓词常作合取式中的一个合取项(其原因和例子详见第2章)。希望读者对这一点给予足够的重视,熟练掌握。

关于多元谓词,可以用多个量词将其量化。使用时,务必要注意全称量词与存在量词并不对等,它们的先后次序通常不可改变。例如:任一实数均有一实数为其相反数。令$R(x)$表示$x$为实数,$Q(x,y)$表示$y$为$x$的相反数,上述命题可符号化为$\forall x(R(x)\rightarrow\exists y(R(y)\wedge Q(x,y)))$或$\forall x\exists y(R(x)\rightarrow(R(y)\wedge Q(x,y)))$,但不可符号化为$\exists y\forall x(R(x)\rightarrow(R(y)\wedge Q(x,y)))$。后者的意思是:“存在一个实数是所有实数的相反数”,与原命题大相径庭。

有了量词这一有效工具,我们就可以进行命题与谓词公式之间的简单翻译了。对此,读者应多加练习,熟练掌握。

与命题逻辑中命题公式的定义相似,谓词逻辑中的谓词公式(简称公式)也是归纳定义的。它的基始是原子谓词公式,通过对谓词公式$A,B$有限次地使用$\neg A$, $A\wedge B$, $A\vee B$, $A\rightarrow B$, $A\rightleftarrows B$以及$\forall xA$和$\exists xA$的手段而得。其中,我们特别关注量词出现的情形:称$\forall$(或$\exists$)后的$x$为指导变元,称$\forall xA$(或$\exists xA$)中的$A$为$\forall x$(或$\exists x$)的辖域,$A$中的$x$称为约束变元,它在$A$中的出现是约束出现,否则,称为自由变元,其出现是自由出现。为了避免不必要的混淆,我们可以利用约束变元的改名规则或自由变元的代入规则,将约束变元和自由变元在符号上一一区别开来。

在谓词逻辑中,同样有永真式、永假式和可满足式的定义。这些定义只需要把命题逻辑的相应定义中,关于命题公式$A$的指派改成谓词逻辑中关于谓词公式的赋值即可照搬。命题逻辑中关于它们之间关系的结论也可以原封不动地推广到谓词逻辑中来。

借助于永真式的概念,在谓词逻辑中可以给出谓词公式之等价式和蕴含式的定义:$A\Leftrightarrow B$当且仅当$A\rightleftarrows B$是永真式。$A\Rightarrow B$当且仅当$A\rightarrow B$是永真式。自然,$A\Leftrightarrow B$的充分必要条件为$A\Rightarrow B$并且$B\Rightarrow A$。

关于谓词逻辑中的等价式和蕴含式,首先是命题逻辑中的等价式和蕴含式皆可推广至谓词逻辑中使用。另一方面,作为命题逻辑的发展,当量词出现时,最常用的重要公式有以下几组:

(1) 在有限的个体域 $D = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 上,

$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)$

$\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)$

(2) $\forall$,$\exists$ 与 $\neg$ 之间

$\neg \forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

$\neg \exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

(3) $\forall$,$\exists$ 与 $\wedge$, $\vee$ 之间

$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$

$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))$

$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

(4) $\forall$,$\exists$ 的辖域之扩张与收缩

$\forall x(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge \forall xB(x)$

$\exists x(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge \exists xB(x)$

$\forall x(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee \forall xB(x)$

$\exists x(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee \exists xB(x)$

$\forall x(A \to B(x)) \Leftrightarrow A \to \forall xB(x)$

$\exists x(A \to B(x)) \Leftrightarrow A \to \exists xB(x)$

$\forall x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \to B$

$\exists x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \to B$

(5) $\forall$,$\exists$ 之间

$\forall x \forall yA(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall xA(x, y)$

$\exists x \exists yA(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists xA(x, y)$

$\exists x \forall yA(x, y) \Rightarrow \forall y \exists xA(x, y)$

$\exists y \forall xA(x, y) \Rightarrow \forall x \exists yA(x, y)$

其中, (1) 显示了 $\forall xA(x)$ 可以理解为命题逻辑中的合取式在谓词逻辑中的延伸, $\exists xA(x)$ 可以理解为命题逻辑中的析取式在谓词逻辑中的延伸。这一看法对我们认识、理解并记忆上述各个公式大有裨益,详细内容可见第 2 章。(2) 是关于 $\neg$ 与 $\forall$、$\exists$ 先后顺序转化的等价式。(3) 特别要注意两个蕴含式,并能以实例说明。(4) 讲的是关于量词的辖域扩张和收缩的等价式,常用于求谓词公式的前束范式。(5) 同样是蕴含式,值得注意。

在命题逻辑中,一个命题公式有其惟一的主析取范式和主合取范式(除永真式无主合取范式,永假式无主析取范式外)。我们期待:在谓词逻辑中,一个谓词公式有相应的比较规范的形式。由于量词的出现,首先面临着将量词前置的问题。于是,有了谓词公式的前束范式的概念。所谓前束范式,就是把所有出现在谓词公式中的量词放在该公式的最前面,而这些量词的辖域统统延伸到整个公式的末尾。类似于命题逻辑中关于命题公式的析取范式和合取范式的结论,在谓词逻辑中,任意一个谓词公式均有与其等价的前束范式。但同一个谓词公式的前束范式却是不惟一的,一方面体现在全称量词和存在量词出现的先后顺序可能不确定,另一方面由于等价交换时使用的规则不同,甚至会造成等价的两个前

束范式出现的量词个数不相同。

将一个谓词公式化为与其等价的前束范式,能充分检验对谓词逻辑中带量词的公式以及等价式、改名规则等内容的掌握程度,也直接影响着对谓词逻辑中推理理论特别是量词的指定和推广规则的理解能力。因而,谓词公式的前束范式化成为谓词逻辑中的一个重点内容。

在谓词逻辑的推理理论中,除了命题逻辑推理理论中的 P 规则、T 规则、反证法和 CP 规则以及等价式、蕴含式均可在推理过程中安全使用外,关于量词,有相应的指定和推广,规则如下:

(1) 全称指定规则(US 规则)

$\forall xP(x) \quad P(y)$

$\forall xP(x) \quad P(c)$

(2) 全称推广规则(UG 规则)

$P(y) \quad \forall xP(x)$

(3) 存在指定规则(ES 规则)

$\exists xP(x) \quad P(c)$

(4) 存在推广规则(EG 规则)

$P(c) \quad \exists xP(x)$

它们各有自己的使用条件,切记不可盲目使用,而且这 4 个规则中所有量词的辖域都是整个 $P(x)$,不能在公式的某一部分上直接使用它们。另外,在具体的推理过程中,一般应先对含存在量词的前提进行存在指定,然后再对含全称量词的前提进行全称指定,以保证常元 $c$ 的一致性。详细内容请见第 2 章。

总之,谓词逻辑的学习,应以量词为核心,重点理解谓词、命题函数、全称量词与存在量词、谓词公式、约束变元与自由变元等基本概念;熟练进行自然语言与谓词公式之间的简单翻译;熟练掌握量词之间和量词与联结词之间的转化关系,并对带量词的公式进行等价变换,如化成与其等价的前束范式等;灵活应用推理规则,特别是 US,UG,ES,EG 规则,进行直接或间接的证明。

## 6.2 集合、关系与函数

集合论是现代数学的基础,虽然本书仅仅介绍早期的朴素集合论的基本概念和基本运算,但它在学习离散数学时,也起到重要的基础作用。

### 6.2.1 集合的基本概念和基本运算

集合中的有些基本概念(如子集、空集、全集等),不少读者已经熟知了,因此,在自学集合的基本概念时,应着重理解幂集的定义和求幂集的方法。在 3.1 一节中曾给出用组合学的方法和用与 $n$ 位二进制序列对应的方法去寻求幂集,这两种方法都要熟练掌握。在集合 $A$ 中的元素用比较繁复的形式表示时,求其幂集往往容易出错。

例如,$A = \{\ ,\{\ \},\{\ ,\{\ \}\}\}$,求 $A$ 的幂集 $P(A)$。为避免出错,可先令 $a =\ $,$b = \{\ \}$,$c = \{\ ,\{\ \}\}$,于是有 $A = \{a, b, c\}$,易知其幂集为:

$$P(A)=\{\quad,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

再用代入法即得:

$$P(A)=\{\quad,\{\quad\},\{\{\quad\}\},\{\{\quad,\{\quad,\{\quad\}\}\},\{\quad,\{\quad\}\},\{\quad,\{\quad,\{\quad\}\}\},\{\{\quad\},$$
$$\{\{\quad\},\{\quad,\{\quad\}\}\},\{\quad,\{\quad\},\{\quad,\{\quad\},\{\quad,\{\quad\}\}\}\}$$

由幂集的定义还可知道,当集合 $A$ 中含有 $n$ 个元素时,$A$ 有 $2^n$ 个子集。

集合中有些基本运算(如并、交运算) 是不少读者已经熟知的,因此应着重掌握集合的减运算(相对补) 和对称差运算。要特别注意,减运算可以转化为:

$$A-B=A\cap\overline{B}$$

对称差运算的 4 种表示形式:

$$\begin{aligned} A\quad B &= (A\cup B)-(A\cap B)\\ &=(A-B)\cup(B-A)\\ &=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\\ &=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\end{aligned}$$

要求能够对不同的问题运用不同的形式灵活解决。

### 6.2.2 二元关系

首先要理解二元关系是一个集合。$A$ 到 $B$ 的二元关系是笛卡儿乘积 $A\times B$ 的子集,$A$ 上的二元关系是笛卡儿乘积 $A\times A$ 的子集。因此,集合的概念和运算都可施于二元关系。

二元关系有 3 种表示形式,表格表示、矩阵表示、图形表示都有其独特的作用。表格表示在二元关系的某些计数问题中(如计算给定有限集上自反或对称关系的个数等) 是个良好的分析工具,表格表示还能方便地显示等价关系的特征;二元关系的矩阵表示,即关系矩阵,可以使我们利用矩阵的运算对二元关系作深入讨论;二元关系的图形表示是使二元关系形象化的有效工具。对二元关系的 3 种表示形式应当掌握和理解,它们在以后的深入讨论中经常使用。

二元关系的5 种基本类型(自反的、反自反的、对称的、反对称的、传递的二元关系) 是深入讨论二元关系的基础内容,必须熟练掌握。读者应能利用命题逻辑中否定联结词的定义理解非自反的不一定是反自反的,非对称的不一定是反对称的。应能举例说明存在着既不是自反的,也不是反自反的二元关系;存在着既不是对称的,也不是反对称的二元关系;存在着既是对称的又是反对称的二元关系。

等价关系和划分是二元关系的重点内容,要充分理解等价关系的定义和特征,等价类和商集的定义。特别要掌握等价关系是一种“同组”关系,这样就容易理解集合上的等价关系和集合上的划分所建立的一一对应关系。

序关系也是二元关系的重点内容,在序关系中曾介绍了偏序关系、全序关系、良序关系和拟序关系。其中偏序关系是需要着重理解和掌握的内容。能熟练地画出偏序关系的哈斯图表示;熟练地利用哈斯图找出偏序集的极大元、极小元、最大元、最小元,偏序集子集的极大元、极小元、最大元、最小元、上界和上确界(最小上界)、下界和下确界(最大下界)。特别要掌握一个偏序集的子集可以有上界,但不一定有上确界;可以有下界,但不一定有下确界。例如,$A=\{1,2,3,12,18,36\}$,$R$ 是 $A$ 上的整除关系。子集 $B=\{2,3\}$,$B$ 的上界

为:12,18,36,但 $B$ 没有上确界;子集 $C=\{12,18\}$,$C$ 的下界为:1,2,3,但 $C$ 没有下确界。

相容关系也是一种较为重要的、特殊的二元关系。在自学时,应熟记相容关系的定义(满足自反性和对称性的二元关系),并能举出满足自反性、对称性但不满足传递性的实例。了解相容关系与覆盖之间的对应关系(这种对应关系不是一一对应的),并能写出集合上给定的覆盖所对应的相容关系。

复合关系也可以看作是二元关系的一种运算。要熟练掌握复合关系的定义,能熟练地写出两个二元关系经复合运算后的结果。特别要搞清楚对于 $A$ 上的二元关系,经复合运算后,是否能保持其自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性。能举例说明:

(1) 当 $R$ 和 $S$ 都是自反关系时,$R \circ S$ 也是自反关系。

(2) 当 $R$ 和 $S$ 都是反自反关系时,$R \circ S$ 不一定是反自反关系。

(3) 当 $R$ 和 $S$ 都是对称关系时,$R \circ S$ 不一定是对称关系。

(4) 当 $R$ 和 $S$ 都是反对称关系时,$R \circ S$ 不一定是反对称关系。

(5) 当 $R$ 和 $S$ 都是传递关系时,$R \circ S$ 不一定是传递关系。

而当 $R=S$ 时,能证明复合关系 $R \circ R$(可记作 $R^2$)保持 $R$ 的自反性、对称性和传递性,即能证明:

(1) 当 $R$ 是自反关系时,则 $R^2$ 也是自反关系。

(2) 当 $R$ 是对称关系时,则 $R^2$ 也是对称关系。

(3) 当 $R$ 是传递关系时,则 $R^2$ 也是传递关系。

逆关系比较简单,能证明逆关系 $R^{-1}$ 保持 $R$ 的自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性。

关系的闭包运算并非是重点内容,只需要作一般的了解即可。

能利用“缺什么补什么”的方法求出二元关系的自反闭包和对称闭包;对于一些简单的二元关系,能求出其传递闭包。

### 6.2.3 函数

函数是数学中最基本的概念之一。函数也称为映射,它是一种特殊的二元关系,$A$ 到 $B$ 的函数就是 $A$ 中每一个元素都和 $B$ 中一个且仅一个元素有关的二元关系,这表明我们所讨论的函数都是单值函数,且定义域就是集合 $A$。

要熟练地掌握函数的定义,并能熟练地判断给定的二元关系中,哪些是函数,哪些不能构成函数。

当集合 $A$ 含有 $n$ 个元素,集合 $B$ 含有 $m$ 个元素时,$A$ 到 $B$ 可定义 $m^n$ 个不同的函数,$B$ 到 $A$ 可定义 $n^m$ 个不同的函数。通常把 $A$ 到 $B$ 的所有函数构成的集合,记作 $B^A$,即

$$B^A=\{f \mid f: A \to B\}$$

能熟练地写出给定集合 $A$ 到 $B$ 的所有函数。

3 类特殊函数(入射函数,满射函数和双射函数)的定义和判别是重点内容。要求能熟练地判断给定函数是否是入射、满射、双射函数。这类问题看似简单,但也容易出错,要多做些练习巩固已学的知识。

还应当掌握一些关于函数的计数问题,对于一些简单情况,能求出 $A$ 到 $B$ 的入射函数

的个数或满射函数的个数以及双射函数的个数。其中求 $A$ 到 $B$ 的满射函数的个数难度最大,需要结合集合的划分概念来解决。

例如,集合 $A$ 中含有 7 个元素,集合 $B$ 中含有 2 个元素,即 $|A| = 7$, $|B| = 2$。问 $A$ 到 $B$ 可定义多少种不同的满射函数?

解法如下:由于 $|B| = 2$,所以首先考虑在集合 $A$ 中含有 2 个划分块的划分的个数。$A$ 中含有 7 个元素,分成 2 个划分块的划分可以是其中一个划分块含有 1 个元素,另一个划分块含有 6 个元素,这样的划分共有 $C_7^1 = 7$(种);另一种情况是:其中一个划分块含有 2 个元素,另一个划分块含有 5 个元素,这样的划分共有 $C_7^2 = 21$(种);再有一种情况是:其中一个划分块有 3 个元素,另一个划分块有 4 个元素,这样的划分共有 $C_7^3 = 35$(种)。由此可得,当 $A$ 中含有 7 个元素时,$A$ 上仅有两个划分块的划分共有 $7 + 21 + 35 = 63$(种)。若把一个划分块中的元素都与 $B$ 中另一个元素对应,另一个划分块中的元素都与 $B$ 中另一个元素对应,这就得到了 $A$ 到 $B$ 的满射函数。所以 $A$ 到 $B$ 可定义 $63 \times 2 = 126$(种)满射函数。

复合函数的求法基本上与高等数学中复合函数的求法相似,比较容易掌握。还应掌握同类特殊函数经复合运算运算后可以保持其特殊性,即

(1) 当 $f$ 和 $g$ 都是入射函数时,$g \quad f$ 也是入射函数。

(2) 当 $f$ 和 $g$ 都是满射函数时,$g \quad f$ 也是满射函数。

(3) 当 $f$ 和 $g$ 都是双射函数时,$g \quad f$ 也是双射函数。

关于逆函数,应当知道只有双射函数才有逆函数,并能求出给定函数的逆函数。

## 6.3 代 数 结 构

这一章的内容是比较抽象的。实际上,半群、独异点、群、环、域等都是抽象代数的基本内容。在学习过程中,要有意识地训练和提高自己的抽象思维能力。

### 6.3.1 可结合运算和幺元、逆元

本章的前两节,即代数系统的基本概念、特殊运算和特殊元素是学习本章的基础,需要充分理解有关概念。

在特殊运算中,应着重掌握可结合运算,即满足:$(a * b) * c = a * (b * c)$ 的运算。能够熟练地判断哪种运算是可结合运算,哪种运算不是可结合运算。可以把书中提到的常用的可结合运算熟记在心。例如,普通加法、乘法运算,矩阵的加法、乘法运算,集合的并、交运算,模 $k$ 加法、乘法运算,取大值、取小值运算都是可结合运算。

另外,对于下列特殊运算:

$$a * b = a$$
$$a * b = b$$
$$a * b = a + b - ab$$
$$a * b = a + b + ab$$

能够证明它们都是可结合运算,以提高自己的解题能力。

在代数系统的特殊元素中,着重掌握幺元和逆元的定义,能够熟练地找出给定代数系

统中的幺元和逆元(如果存在的话)。也应当把常见代数系统中的幺元和逆元熟记在心。

例如,在代数系统$(R, +)$,$(Q, +)$,$(Z, +)$和$(N_k, \ _k)$中的幺元都是0;在$(R, \times)$,$(Q, \times)$,$(Z, \times)$$(N_k, \ _k)$中的幺元都是1。

又如,$A = \{2,4,6,8\}$,* 为取大值运算,即$a * b = \max(a, b)$,则$(A, *)$中的幺元是$A$中数值最小的元素,即幺元是2。

再如,在$(R, *)$中,* 定义为:$a * b = a + b - ab$,则其幺元是0;若令 * 定义为:$a * b = a + b + ab$,则其幺元也是0。

在上述给出的代数系统中,有些代数系统并非每个元素都有逆元。

例如,在$(R, \times)$,$(Q, \times)$中,0没有逆元。在$(Z, \times)$中,除1和-1有逆元外,其他元素都没有逆元,在$(N_k, \ _k)$中,当$k$为素数时,0没有逆元,其他非零元素都有逆元。

又如,在$(A, *)$中($A = \{2,4,6,8\}$,* 为取大值运算),除2有逆元外,其他元素都没逆元。

再如,在$(R, *)$中,当 * 定义为:$a * b = a + b - ab$时,1没有逆元,其他元素$x$的逆元为:$x^{-1} = \dfrac{x}{x - 1}$;当 * 定义为:$a * b = a + b + ab$时,-1没有逆元,其他元素$x$的逆元为:$x^{-1} = \dfrac{-x}{1 + x}$。

易见,$(R, +)$,$(Q, +)$,$(Z, +)$中的每一个元素$a$都有逆元,其逆元为$-a$;在$(N_k, \ _k)$中,0的逆元是0,其他元素$a$的逆元为:$k - a$。

### 6.3.2 群

本章在介绍了代数系统的基本概念和特殊运算、特殊元素后,依次介绍了一些特殊的代数系统:半群、独异点、群、环、域和格,其中最重要的内容是群。自学时应当用较多的精力和时间深入地理解群、子群、循环群等概念。

首先要充分理解群的定义和性质。一个代数系统能够构成群,必须满足以下4个条件:

(1) 运算是封闭的。

(2) 运算是可结合的。

(3) 含有幺元。

(4) 每个元素都有逆元。

其中第4条尤为重要,它是使群区别于其他代数系统的重要特征。群的有关性质也正是由于“每个元素都有逆元”这一重要特征才得到的。

在学习和理解群的定义时,可以结合具体的实例,训练自己判断一个代数系统是否是群的能力;还可以利用群的性质作为判定一个代数系统不是群的一种方法。例如,群的第1个性质是:群中有惟一的等幂元(即幺元)。因此,如果一个代数系统有多个等幂元,这个代数系统一定不是群。如在代数系统$(N_6, \text{í}_6)$中,0,1,3,4都是等幂元,所以可判定$(N_6, \text{í}_6)$不是群。群的其他性质可以类似地使用。

子群是重要的概念。子群的定义是容易理解的,但如何求出子群却是个难点。

本章中曾介绍一条简洁的关于有限子群的定理：当 $A$ 是群 $G$ 的有限子集时，如果 $*$ 对于 $A$ 是封闭的，则 $(A, *)$ 是 $(G, *)$ 的子群。这条定理使验证有限子群的方法显得比较简便，但对于如何寻求子群却是无济于事，因为在群 $G$ 中，找出一个子集使它对 $*$ 恰好是封闭的，并非易事，所以说上述定理的理论价值高于实用价值。

拉格朗日定理阐明了群的阶数与其子群的阶数之间的紧密联系：在 $n$ 阶群中，如果存在着 $k$ 阶子群，则 $k$ 能整除 $n$。拉格朗日定理使我们在寻求子群时避免了一定的盲目性。例如，一个 12 阶群，由拉格朗日定理可知，它只可能有 2 阶、3 阶、4 阶和 6 阶这 4 种类型的非平凡子群，这就使寻求子群的范围大大缩小。尽管如此，但拉格朗日定理仍然没有给出求子群的具体方法。为此，引出了群中元素阶数的概念：设 $a$ 是群 $G$ 中的元素，如果存在着最小正整数 $k$，使得

$$a^k = e(\text{幺元})$$

则称 $a$ 为 $k$ 阶元素。

可以利用群 $G$ 中的 $k$ 阶元素 $a$，构造出 $k$ 阶子群。若令

$$A = \{a, a^2, \cdots, a^k\}$$

由于 $k$ 是使得 $a^k = e$ 的最小正整数，所以 $A$ 中 $k$ 个元素是各不相同的；又由于 $a^k = e$，所以 $*$ 对于 $A$ 是封闭的，由此即得 $(A, *)$ 是群 $G$ 的 $k$ 阶子群。

例如，$(N_7 - \{0\}, \quad _7)$ 是 6 阶群，由于

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2 \quad _7 2 = 4$$

$$2^3 = 2 \quad _7 2 \quad _7 2 = 1$$

所以 2 是 3 阶元素，令 $A = \{2^1, 2^2, 2^3\} = \{2, 4, 1\}$，则 $(A, \quad _7)$ 是 $(N_7 - \{0\}, \quad _7)$ 的 3 阶子群。又由于

$$6^1 = 6$$

$$6^2 = 6 \quad _7 6 = 1$$

所以 6 是 2 阶元素，令 $B = \{6^1, 6^2\} = \{6, 1\}$，则 $(B, \quad _7)$ 是 $(N_7 - \{0\}, \quad _7)$ 的 2 阶子群。

循环群是简单而又常用的特殊群。

本章主要讨论有限循环群。一个有限群 $G$ 如果存在着生成元 $a$，则称此群为循环群。曾经指出有限群的生成元就是与群的阶数相同的元素。因此，一个 $n$ 阶群 $G$ 如果含有 $n$ 阶元素，那么 $n$ 阶群 $G$ 是循环群。

诚然，并非任何 $n$ 阶群都有 $n$ 阶元素。例如，$G = \{00, 01, 10, 11\}$，$G$ 上的二元运算为按位加 。易知，$(G, \quad)$ 是 4 阶群，但它没有 4 阶元素（$G$ 中幺元为 00，它是 1 阶元素，其他 3 个元素都是 2 阶元素）。所以 $(G, \quad)$ 不是循环群。

如果 $a$ 是生成元，也可把循环群记作 $(a)$，或 $\langle a\rangle$。

在自学循环群时，要注意以下两个要点：

(1) 若 $G$ 是 $n$ 阶循环群 $(a)$，则 $G = \{a, a^2, \cdots, a^n\}$。

(2) 拉格朗日定理只说明：当 $n$ 阶群如果有 $k$ 阶子群时，则 $k$ 能整除 $n$。但拉格朗日定理并不说明当 $k$ 能整除 $n$ 时，$n$ 阶群必有 $k$ 阶子群。我们曾经指出，可以有这样的 12 阶群，它没有 6 阶子群。然而对于循环群却有如下结论：当 $k$ 能整除 $n$ 时，$n$ 阶循环群必有 $k$ 阶子

群,且仅有一个 $k$ 阶子群(证明从略)。

例如,对于 12 阶循环群,它必有 2 阶、3 阶、4 阶和 6 阶子群各一个。

由上述两个要点,可以方便地求出 $n$ 阶循环群的所有非平凡子群。

例如,在 2000 年下半年北京市高等教育自学考试离散数学试题中,计算题中有如下试题:设 $G = (a)$ 为 20 阶循环群,求出 $G$ 的所有非平凡子群和所有生成元。

解法如下:首先求出 $G$ 的所有非平凡子群。

由要点(2) 可知,20 阶循环群必有 2 阶、4 阶、5 阶和 10 阶子群各一个。

由于 $a$ 是 20 阶循环群的生成元, 所以 $a^{20} = e$。由此可知元素 $a^{10}$ 是 2 阶元素, 因为 $(a^{10})^2 = a^{20} = e$。若令

$$A_2 = \{ a^{10}, (a^{10})^2 \} = \{ a^{10}, e\}$$

则$(A_2, *)$ 是 $G$ 的 2 阶子群。

同样可知,$(a^5)^4 = a^{20} = e$,所以元素 $a^5$ 是 4 阶元素,可令

$$\begin{aligned} A_4 &= \{ a^5, (a^5)^2, (a^5)^3, (a^5)^4 \} \\ &= \{ a^5, a^{10}, a^{15}, e\} \end{aligned}$$

则$(A_4, *)$ 是 $G$ 的 4 阶子群。

仍由于$(a^4)^5 = a^{20} = e$,所以 $a^4$ 是 5 阶元素,可令:

$$\begin{aligned} A_5 &= \{ a^4, (a^4)^2, (a^4)^3, (a^4)^4, (a^4)^5 \} \\ &= \{ a^4, a^8, a^{12}, a^{16}, e\} \end{aligned}$$

则$(A_5, *)$ 是 $G$ 的 5 阶子群。

最后,由于$(a^2)^{10} = a^{20} = e$,所以 $a^2$ 是 10 阶元素,可令

$$\begin{aligned} A_{10} &= \{ a^2, (a^2)^2, (a^2)^3, (a^2)^4, (a^2)^5, (a^2)^6, (a^2)^7, (a^2)^8, (a^2)^9, (a^2)^{10} \} \\ &= \{ a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}, a^{12}, a^{14}, a^{16}, a^{18}, e\} \end{aligned}$$

则$(A_{10}, *)$ 是 $G$ 的 10 阶子群。

再求 $G$ 的所有生成元。

由于子群中元素的阶数小于等于群的阶数,所以 $G$ 的 10 阶子群中元素的阶数小于等于 10;同样, $G$ 的 5 阶子群、4 阶子群、2 阶子群中元素的阶数分别小于等于 5,4,2。因此,对于有限循环群有如下结论:在有限循环群中,不属于任何非平凡子群的元素都是生成元。

由于 $G = \{ a, a^2, a^3, \cdots, a^{20} = e\}$,易见,其中 $a, a^3, a^7, a^9, a^{11}, a^{13}, a^{17}, a^{19}$ 是生成元。

### 6.3.3 其他特殊的代数系统

按自学考试大纲的考核要求,半群和独异点需要达到识记层次。自学时要熟记半群和子半群的定义,独异点和子独异点的定义,并能举出相关的例子。特别要注意独异点和子独异点必须有相同的幺元。

环和域也要求达到识记层次。自学时要熟记环和特殊环的定义,域的定义,并能举出相关的例子。

格是本章的难点,自学时要充分理解格的两种等价的定义,并能理解在格的有关论述中同时使用这两种定义的方法。理解子格的定义。

掌握分配格、有界格、有补格等 3 种特殊格的定义并能举出相关的例子。

掌握布尔代数的定义及其特征,如布尔代数中补元的惟一性等。

## 6.4 图　　论

在第 5 章中,除了介绍图的基本概念和图的连通性外,主要介绍几种具有较高实用价值的特殊图:欧拉图、哈密顿图、偶图、平面图和树。这些特殊图都有各自的实用领域,所以有较强的独立性。自学时可以逐个领会和理解,但这些特殊图形也有一定的联系,当对各个特殊图有了较好的掌握时,再去细心体会它们之间的联系。

### 6.4.1　图的基本概念和图的连通性

在图的基本概念中,除了熟记图论的一些专用术语(如:邻接、关联、平行边等)和无向完全图、正则图、子图、生成子图的定义外,着重需要理解图中顶点度数的定义和有关论述,特别是无向图中关于顶点度数的一个重要结论:“图中各顶点的度数之和等于图的边数的两倍。”这一结论在以后的一些定理证明和解答练习题时都有广泛的用途,务必要熟记并学会运用这一结论。

图的同构问题是个难点,只需要对某些简单图形,能够说明它们是否同构即可。

无向图的连通性是容易理解的。在无向图中,当两个顶点 $a$和 $b$之间有通路相连,则称这两个顶点 $a$和 $b$是连通的。当无向图中任意两点都有通路相连,则称此无向图为连通的,否则称为不连通的。

不连通的无向图可以有一些连通分支。

为了给出连通分支的明确定义,在无向图 $G$的顶点集 $V$ 上定义二元关系 $R$ 为:当 $a, b$ 是图 $G$的顶点,且 $a$、$b$是连通的(即 $a$和 $b$ 之间有通路相连),则$(a, b) \in R$。容易验证,$R$是自反的(若把点 $a$和点 $a$ 认作是连通的),对称的(当 $a$到 $b$有通路相连,在无向图中,$b$到 $a$ 也由这条通路相连),传递的(当 $a$和 $b$有通路相连,$b$和 $c$有通路相连时,$a$和 $c$必有通路相连)。所以 $R$是点集 $V$上的等价关系。如果令 $R$所对应的划分为 $S$,由于在同一划分块上的元素都是相关的,即在同一划分块中的任意两个顶点是连通的,不在同一划分块的元素是不相关的,所以划分 $S$中的划分块就是构成图 $G$ 的连通分支。

显然,当划分 $S$仅有一个划分块时,图 $G$是连通图。

有向图的连通性分成 3 类:强连通,单向连通和弱连通。

强连通的判定方法是:如果有向图中存在一条通过图中各个顶点的回路,则此有向图是强连通的,否则就不是强连通的。

单向连通的判定方法是:如果有向图中存在一条通过图中各个顶点的通路,则此有向图是单向连通的,否则就不是单向连通的。

弱连通的判定方法是:底图为无向连通图的有向图。

边割集和点割集也是重要的概念。要充分理解割集定义中,“最小性”的要求。

### 6.4.2 树

树是计算机科学技术中使用最广泛的特殊图。

1. 无向树

在自学时首先要理解无向树的定义和性质,其中性质:“无向树中顶点数比边数多1”有重要作用,不少问题的提出都和这个性质有直接关系。

例如,$T$是无向树,$T$有3个2度点,4个3度点,5个4度点,$T$中没有5度或5度以上的顶点,求 $T$的叶片数。

解 设 $T$中有 $n$个顶点,$m$条边。利用

$$m = n - 1$$

$$2m = 2n - 2$$

再利用“图中顶点的度数之和等于边数两倍”,可得

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2n - 2$$

在解本例时,可令 $T$有 $x$片树叶,于是有

$$x + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 2(x + 3 + 4 + 5) - 2$$

由此解得 $x = 16$。即 $T$有16片树叶。

又如,$T$是无向树,$T$有16片树叶,1个2度点,3个3度点,4个4度点,问 $T$有几个5度点?

解法如下:令 $T$中有 $x$个5度点,于是有

$$16 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5x = 2(16 + 1 + 3 + 4 + x) - 2$$

由此解得 $x = 1$,即 $T$中有一个5度点。

求最小生成树也是重点内容,要熟练地掌握利用“破圈法”求带权连通图的最小生成树。

2. 有向树

有向树中主要讨论的是有根树和有序树。在自学有向树时,除了熟记和理解一些专用名词(如父亲和儿子,祖先和后裔,有根树的层次,高度等)外,主要是掌握 $n$叉树和完全 $n$叉树的定义和性质。熟记在完全 $n$叉树中,内结点数 $i$和树叶数 $t$之间成立着下列等式:

$$i = \frac{t - 1}{n - 1}$$

由此可知,完全二叉树有奇数个顶点,完全三叉树有奇数片树叶等。

有根树的应用是重点内容,要熟练地掌握二叉树的3种周游算法(前序、中序和后序)。熟练地掌握算术表达式的二叉树表示,并能用前序算法求得算术表达式的波兰表示。

### 6.4.3 其他特殊图

1. 欧拉图和哈密顿图

欧拉图的定义是:图中存在着一条通过图中各边一次且仅一次的回路,则称此图为欧拉图。

哈密顿图的定义是:图中存在着一条通过图中各点一次且仅一次的回路,则称此图为哈密顿图。

从表面上看,欧拉图和哈密顿图的定义只有一字之差,但两者之间却有极大差异。欧

拉图的充分必要条件已经得到,而哈密顿图的简明的充分必要条件至今尚未得到,是图论中的基本难题之一。因此,把欧拉图和哈密顿图放在一起介绍,主要是为了说明它们的差异,而不是说明它们之间有什么联系。

对于欧拉图,要熟练地掌握其充分必要条件:“无向连通图中,每一个顶点的度数都是偶数”(无向欧拉图)和“有向连通图中,每一个顶点的出度与入度相等”(有向欧拉图)。并能运用这个充分必要条件判定一个图是否是欧拉图,能灵活地解答有关问题,如能按照规定的顶点数、边数画出欧拉图等。

对于哈密顿图,要熟练地掌握哈密顿图存在的必要条件:“在哈密顿图中,删去 $p$ 个顶点后所得到的图,其连通分支数小于等于 $p$。”能够运用这个必要条件去判定某些图不是哈密顿图。特别当图中含有割点、割边时,此图一定不是哈密顿图。

哈密顿图存在的充分条件,只需要熟记充分条件的内容:当图中任意两个不同顶点的度数之和大于等于 $n$($n$ 是图的顶点数),则此图是哈密顿图。了解本书中所提出的有关例题和练习题即可。

**2. 偶图和平面图**

按自学考试大纲的要求,偶图不是重点内容,只要熟记偶图和完全偶图的定义即可。

平面图是重点内容。平面图的内容繁多,有平面图的定义、两个基本的非平面图 $K_5$ 和 $K_{3,3}$(也称库拉托夫斯基图)、区域(面)和区域的次数、欧拉公式及其推论、库拉托夫斯基定理等。自学时,应把这些内容逐个领会和理解。在此基础上,进一步掌握判断一个图是否是平面图的方法。

在无向连通平面图中(不一定是简单图),成立着欧拉公式:

$$n - m + r = 2$$

其中 $n$ 是图中的顶点数,$m$ 是边数,$r$ 是区域数。欧拉公式说明了连通平面图中,顶点数、边数和区域数的密切联系。但欧拉公式对于判断一个图是否是平面图却是无济于事的。于是给出了欧拉公式的推论,简单连通平面图必有:

$$3n - 6 \geq m$$

由推论的证明可知,当且仅当简单平面图中,每个区域(包括无限区域)都由 3 条边围成时,上述结论的等号成立,即有 $3n - 6 = m$。因此,$n$ 个顶点的简单连通平面图最多有 $3n - 6$ 条边,它的每个区域由 3 条边围成。

例如,当 $n = 6$ 时,$3n - 6 = 12$,这说明 6 个顶点的简单平面图最多有 12 条边。要画出具有 6 个顶点 12 条边的简单平面图,必须使其每个区域都由 3 条边围成。图 6.1 是具有 6 个顶点 12 条边的一种简单平面图。

图 6.1

请注意,欧拉公式的推论仅仅是简单平面图的必要条件,它是用来判断某些图不是平面图的一种方法。

库拉托夫斯基定理则给出了判定平面图的充分必要条件:一个图是平面图的充分必要条件是该图不包含二度同构于 $K_5$ 或 $K_{3,3}$ 的子图。

或者一个图是非平面图的充分必要条件是该图含有子图与 $K_5$ 或 $K_{3,3}$ 二度同构。

由于库拉托夫斯基定理涉及到二度同构的概念,有较大难度,只要求对一些简单的图形能利用库拉托夫斯基定理证明它是非平面图。其难度不超过书中的例题和练习题。

# 第 7 章　模 拟 试 题

## 模拟试题 1

一、判断题(正确的在题后括号内划“ ”,错误的划“ ”。每小题 2 分,共 16 分)

1. 命题“如果 3 是有理数,则太阳从东方升起”的真值为假。 (　　)

2. $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \quad (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$ 是成立的。 (　　)

3. 设 $P$、$Q$ 是集合,$P - Q = P$ 的充分必要条件是:$Q =$ 　。 (　　)

4. 设 $R$ 是 $A = \{1,2,3\}$ 上的二元关系,且 $R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$,则 $R$ 既是等价关系又是偏序关系。 (　　)

5. 幺元是群中惟一的等幂元。 (　　)

6. 有限格一定是有界格。 (　　)

7. 一个图是非平面图的充分必要条件是:图中存在着子图与 $K_5$ 或 $K_{3,3}$ 同构。
(　　)

8. 在 $n$ 阶无向简单图中,如果任意不同两点的度数之和大于等于 $n-1$,则此图是连通图。 (　　)

二、填空题(每一空格 3 分,共 30 分)

9. $P \to Q$ 的主合取范式为:__________。

10. 令 $A(x)$: $x$ 是偶数,$B(x,y)$: $x$ 能整除 $y$。命题:“所有能被 2 整除的数都是偶数”符号化为:__________。

11. 无向完全图 $K_4$ 的 3 条边的不同构的连通子图共有__________个。

12. 具有 $n$ 个顶点的无向简单平面图,最多有__________条边。

13. 设 $A = \{x \mid x \in Z \wedge x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $B = \{x \mid x \in Z \wedge |x| \leq 3\}$,其中 $Z$ 为整数集合,那么 $P(A - B) =$ __________。

14. 设 $R$ 是集合 $A = \{a,b,c\}$ 上的二元关系,$R = \{(a,a),(a,b),(b,c)\}$,则 $r(R^2) =$ __________。

15. 设 $A = \{1,2,3,4\}$,$*$ 为 $A$ 上的取大值运算,即 $a,b \in A$, $a * b = \max(a,b)$,那么 $(A, *)$ 的幺元是__________,零元是__________。

16. 无向连通图是欧拉图的充分必要条件是__________。

17. 含有生成元的群称为__________。

三、计算与演算题(共 30 分)

18. (6 分) 用等值演算法求下列公式的主析取范式,并由主析取范式求出主合取范式。

$$(P \vee Q) \to (\neg Q \wedge R)$$

19. (6 分) 求下列公式的前束范式。

$$((\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)) \to (\forall x)R(x)$$

20. (6 分) 无向树 $T$ 中有 4 片树叶,2 个 2 度顶点,其余顶点的度数均为 4。

(1) 求 $T$ 中 4 度顶点的个数。

(2) 画出符合题设条件的所有不同构的无向树。

21. (6 分) 求下列带权图的最小生成树。并计算最小生成树的权(即最小生成树中各边的权之和)。

22. (6 分) 设 $G = \langle a \rangle$ 为 12 阶循环群。

(1) 求 $G$ 的所有非平凡子群;

(2) 指出 $G$ 的所有生成元。

四、证明题(共 24 分)

23. (6 分) 构造下面的推理证明。

前提:$\exists xR(x) \to \exists yG(y)$, $\forall xF(x) \to \forall y(G(y) \to H(y))$

结论:$\exists x(F(x) \wedge R(x)) \to \exists yH(y)$

24. (6 分) 设 $R$ 是 $A$ 上的传递关系,证明 $R^2$ 也是 $A$ 上的传递关系。

25. (6 分) 设 $(G, *)$ 是群, 对于 $G$ 中任意元素 $a$、$b$, 都有 $(a * b)^2 = a^2 * b^2$, 证明 $(G, *)$ 是可交换群。

26. (6 分) 证明欧拉图中必没有割边。

# 模拟试题 2

一、单项选择题(每小题 1 分,共 15 分。在每小题的 4 个备选答案中有一个正确的,将正确答案的序号写在题后的括号内)

1. 前提 $\neg P \vee Q, \neg Q \vee R, \neg R$ 的结论是 ( )

A. $Q$　　B. $\neg P$　　C. $P \vee Q$　　D. $\neg P \to R$

2. 下列语句中为命题的是 ( )

A. 暮春三月,江南草长。

B. 这是多么可爱的风景啊!

C. 大家想做什么,就做什么,行吗?

D. 请勿践踏草地!

3. 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,那么可定义 $A$ 到 $B$ 的不同单射函数的种数是 ( )

A. 12　　B. 64　　C. 24　　D. 4

4. **利用谓词的约束变元改名规则和自由变元代入规则,可将如下公式:**

$(\forall x)(P(x) \to Q(x,y)) \wedge R(x,y)$ **改写成** (　　)

A. $(\forall x)(P(y) \to Q(x,y)) \wedge R(z,s)$

B. $(\forall z)(P(z) \to Q(z,s)) \wedge R(x,s)$

C. $(\forall x)(P(s) \to Q(x,s)) \wedge R(x,y)$

D. $(\forall z)(P(s) \to Q(z,s)) \wedge R(z,s)$

5. **下列公式中正确的等价式是** (　　)

A. $\neg(\exists x)A(x) \quad (\exists x)\neg A(x)$

B. $\neg(\forall x)A(x) \quad (\exists x)\neg A(x)$

C. $(\forall x)(\forall y)A(x,y) \quad (\exists y)(\forall x)A(x,y)$

D. $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \quad (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$

6. **设** $A = \{\quad\}, B = P(P(A))$, **以下不正确的式子是** (　　)

A. $\{\{\quad\},\quad\} \in B$　　B. $\{\{\quad\}\} \in B$

C. $\{\{\quad\}\}$ **包含于** $B$　　D. $\{\{\{\{\quad\}\},\quad\}\}$ **包含于** $B$

7. **设** $|A| = n$, **则在** $A$ **上可定义不同二元关系的数目是** (　　)

A. $2^{n\times n}$　　B. $n\times n$　　C. $n$　　D. $2n$

8. **设集合** $A = \{1,2,3\}$, **下列关系** $R$ **中不是等价关系的是** (　　)

A. $R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

B. $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(3,2),(2,3)\}$

C. $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,4)\}$

D. $R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,3),(3,2)\}$

9. **设** $A = \{a,b,c\}, B = \{a,b\}$, **则下列命题不正确的是** (　　)

A. $A\quad B = \{a,b\}$　　B. $B\quad A$

C. $A\quad B = \{c\}$　　D. $B - A =$

10. **代数系统** $\langle A, *\rangle$ **中零元素** $Z_t$ **的定义是** (　　)

A. $\forall x \in A, \exists Z_t \in A, x * Z_t = Z_t * x = x$

B. $\forall x \in A, \exists Z_t \in A, x * Z_t = Z_t * x = Z_t$

C. $\exists Z_t \in A, \forall x \in A, x * Z_t = Z_t * x = x$

D. $\exists Z_t \in A, \forall x \in A$, **都有** $x * Z_t = Z_t * x = Z_t$

11. **在自然数集合** $N$ **上,下列定义的运算中可结合的只有** (　　)

A. $a * b = |a - b|$　　B. $a * b = a + 2b$

C. $a * b = \max(a,b)$　　D. $a * b = a^b$

12. **在下列代数系统中,不是群的只有** (　　)

A. $\langle Q, +\rangle$, **这里** $Q$ **为有理数集,** $+$ **为加法运算。**

B. $\langle R, *\rangle$ **这里** $R$ **为非零实数,** $*$ **为乘法运算。**

C. **全体** $n\times n$ **实对称矩阵集合,对矩阵的加法运算。**

D. $\langle Q, *\rangle$ **这里** $Q$ **为有理数集,** $*$ **为乘法运算。**

13. **设无向图 $G$ 有 12 条边，已知 $G$ 中 3 度结点有 6 个，其余结点的度数均小于 3，则 $G$ 中结点数至少是** ( )

A. 6　　B. 8　　C. 9　　D. 12

14. **下列为欧拉图的是** ( )

15. **一棵树有 2 个 4 度顶点，3 个 3 度顶点，其余是树叶，则该树中树叶的个数是** ( )

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

**二、填空题**(**每空 1 分，共 20 分**)

16. **设** $p$: $1+1=5$, $q$: **明天是阴天，则命题“只要 $1+1=5$，那么明天是阴天”可符号化为______，其真值是______。**

17. **在公式** $(" x)(P(z) \to Q(x, z)) \wedge (\mathrm{v}\ z) R(x, z)$ **中，" $x$ 的辖域是______，v $z$ 的辖域是______。**

18. **设 $R$ 为非空集合 $A$ 上的二元关系，如果 $R$ 具有自反性______、______，则称 $R$ 为 $A$ 上的一个偏序关系。**

19. **设** $A=\{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$，**$R$ 是 $A$ 上的整除关系，则 $R$ 是偏序，其最大元是______，极小元是______。**

20. **偏序集构成一个格，则它的任意两个元素都有______和______。**

21. **设 $Q$ 为有理数集，笛卡儿积 $S = Q \times Q$，$*$ 是 $S$ 上的二元运算。"** $(a, b)$, $(x, y) \in S$ **有** $(a, b) * (x, y) = (ax, y+b)$，**则 $*$ 运算的幺元是______，"** $(a, b) \in S$; $a \neq 0$，**则** $(a, b)$ **的逆元是______。**

22. **如果代数系统** $(S, *)$ **为半群，对 "** $a, b, c \in S$, $*$ **运算满足________、____________性质。**

23. **如果把可达性看成是有向图结点集上的一个二元关系，那么它具有______和______性质。**

24. 下面有两个有向图，试从连通性判断(a) 是______图，(b) 是______图。

25. 一个图是平面图的条件是当且仅当它不含与________或________二度同构的子图。

三、计算题(共 30 分)

26. (4 分) 设个体域 $D = \{2, 3, 6\}$, $F\{x\}: x \leq 3$, $G(x): x > 5$, 消去公式 " $x(F(x) \wedge$ v $yG(y))$ 中的量词，并讨论其真值。

27. (4 分) 用等值演算法求公式$\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ 的主合取范式。

28. (5 分) 设带权无向图如下，求其最小生成树 $T$ 及该树的权。

29. (6 分) 设 $A = \{a, b, c, d\}$, $R$ 是 $A$ 上的二元关系，其关系图如下所示。试用关系矩阵法求最小的自然数 $s, t$ 使 $s < t$ 且 $R^s = R^t$。

30. (5 分) 设 $A = \{a, b, c\}$, 求 $A$ 上所有等价关系。

31. (6 分) 给定算式$\{[(a + b) * c] * (d + e)\} - [f - (g * h)]$，试用根树表示。

四、证明题(共 20 分)

32. (6 分) 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系，试证：$R$ 是传递的当且仅当 $R^2$　　$R$，其中 $R^2$ 表示 $R$　$R$。

33. (6 分) 设 $G = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}, \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$，证明 $G$ 对于矩阵的乘法构成一个群。

34. (8 分) $R$ 是 $A$ 上的自反关系，且当$(a, b) \in R$ 和$(b, c) \in R$ 时，必有$(c, a) \in R$，证

明 $R$ 是等价关系。

五、应用题(共 15 分)

35. (6 分) 在程序设计语言中,如果一个过程 $P$ 直接调用自己或者通过调用别的过程再调用自己,则称为递归。一个过程是否递归是一个程序员必须关注的问题。试用图论知识说明这一点,并提出一个过程是递归的可编程实现的判定条件,但无须证明。

36. (9 分) 所有的主持人都很有风度。李明是个学生并且是个节目主持人。因此有些学生很有风度。请用谓词逻辑中的推理理论证明上述推理。(个体域:所有人的集合)

# 模拟试题 3

一、单项选择题(每小题 1 分,共 15 分。在每小题的 4 个备选答案中有一个正确的,将正确答案的序号写在题后括号内)

1. 前提 $P \rightarrow Q, R \rightarrow \neg Q, R$ 的结论是　　(　　)

A. $P$　　B. $\neg P$　　C. $Q$　　D. $\neg R$

2. 下面语句中为真命题的是　　(　　)

A. 地球不是恒星。　　B. $3 - x = 5$。

C. 请安静!　　D. 你会讲英语吗?

3. 设 $H(x)$ 表示 $x$ 是人,$c(y)$ 表示 $y$ 是颜色,$L(x, y)$ 表示 $x$ 喜欢 $y$。命题‘每个人都喜欢某种颜色。”的符号化表示是　　(　　)

A. $(\forall x)(H(x) \rightarrow (\exists y)(c(y) \wedge L(x,y)))$

B. $(\forall x)(H(x) \rightarrow (\exists y)(c(y) \rightarrow L(x,y)))$

C. $(\exists y)(\forall x)(H(x) \rightarrow (c(y) \wedge L(x,y)))$

D. $(\forall x)(H(x) \wedge (\exists y)(c(y) \wedge L(x,y)))$

4. 利用谓词的约束变元改名规则和自由变元代入规则,可将公式

$$(\exists x)(p(x) \rightarrow Q(x,y)) \wedge (\forall y)(Q(x,y) \rightarrow R(x))$$

改写成　　(　　)

A. $(\exists x)(p(x) \rightarrow Q(x,z)) \wedge (\forall y)(Q(s,y) \rightarrow R(t))$

B. $(\exists z)(p(z) \rightarrow Q(t,y)) \wedge (\forall s)(Q(s,y) \rightarrow R(s))$

C. $(\exists z)(p(x) \rightarrow Q(x,z)) \wedge (\forall y)(Q(s,y) \rightarrow R(s))$

D. $(\exists z)(p(z) \rightarrow Q(z,y)) \wedge (\forall s)(Q(z,s) \rightarrow R(z))$

5. 下列公式中正确的等价式是　　(　　)

A. $\neg(\forall x)A(x) \quad (\forall x)\neg A(x)$

B. $(\forall x)(\exists y)A(x,y) \quad (\exists y)(\forall x)A(x,y)$

C. $(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \quad (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$

D. $\neg(\exists x)A(x) \quad (\forall x)\neg A(x,y)$

6. 设 $A$ 是一个非空集合,$B = \{A, \{A\}\}$,以下不正确的式子是　　(　　)

A. $A \in B$　　B. $A \quad B$　　C. $\{A\} \quad B$　　D. $\{A\} \in B$

7. 设 $f$ 是整数集 $Z$ 到 $Z$ 的函数,则 $f$ 为双射函数的是　　(　　)

A. $f(x) = 2x$　　B. $f(x) = x + 10000$

C. $f(x) = \begin{cases} x & x\text{是奇数} \\ x/2 & x\text{是偶数} \end{cases}$

D. $f(x) = \begin{cases} 1 & x\text{是偶数} \\ 0 & x\text{是偶数} \end{cases}$

8. 设集合 $A = \{1,2,3,4\}$，下列关系 $R$ 中是等价关系的是　　(　　)

A. $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,4),(4,1)\}$

B. $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(3,2),(2,3)\}$

C. $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$

D. $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(3,4),(1,3),(1,4)\}$

9. 设 $A = \{1,2,3\}$，$B = \{1,2\}$，则下列命题不正确的是　　(　　)

A. $B \quad A$　　B. $A \quad B = \{1,2,3\}$　　C. $A - B = \{3\}$　　D. $A \cap B \neq$

10. 代数系统 $(A, *)$ 的幺元(单位元素) $e$ 的定义是　　(　　)

A. $\exists\, e \in A, \forall\, x \in A, x * e = e * x = e$

B. $\exists\, e \in A, \forall\, x \in A, x * e = e * x = x$

C. $\forall\, x \in A, \exists\, e \in A, x * e = e * x = e$

D. $\forall\, x \in A, \exists\, e \in A, x * e = e * x = x$

11. 在自然数集合上，下列定义的运算中可结合的只有　　(　　)

A. $a * b = |a - b|$　　B. $a * b = a + 3b$　　C. $a * b = \min(a, b)$　　D. $a * b = a^b$

12. 在下列代数系统中，不是群的只有　　(　　)

A. $(Q, \times)$，其中 $Q$ 是有理数，$\times$ 是通常的乘法运算

B. $(Q, +)$，其中 $Q$ 是有理数，$+$ 是通常的加法运算

C. 全体 $n$ 阶实对称矩阵集合，对矩阵的加法运算

D. $(R - \{0\}, \times)$，其中 $R$ 为实数集，$\times$ 是通常的乘法运算

13. 设无向图 $G$ 中有 10 条边，已知 $G$ 中 3 度顶点有 4 个，其余顶点的度均小于 3，则 $G$ 中顶点数至少是　　(　　)

A. 6　　B. 9　　C. 8　　D. 7

14. 下列既是欧拉图又是哈密顿图的是　　(　　)

15. 一棵树有 1 个 4 度顶点，4 个 3 度顶点，其余的顶点是树叶，则该树中顶点的个数是　　(　　)

A. 8　　B. 15　　C. 7　　D. 13

二、填空题(每空 1 分，共 20 分)

16. 设 $p$: $1 \times 2 = 5$; $q$: 太阳从西边升起，则命题“只要 $1 \times 2 = 5$，那么太阳从西边升

起。”可符号化为______,其真值是______。

17. 在公式$(\exists x)(P(y)\to Q(x,y))\wedge(\forall y)R(x,y)$中,$\exists x$的辖域是______,$\forall y$的辖域是______。

18. 设 $R$ 是非空集合 $A$ 上的二元关系,如果 $R$ 具有对称性、______、______,则称 $R$ 是 $A$ 上的一个等价关系。

19. 设 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$,$R$ 是 $A$ 上的整除关系,则 $R$ 是 $A$ 上的偏序关系,其极大元是______,最小元是______。

20. 设$(A,\vee,\wedge)$是代数系统,二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 对于 $A$ 是封闭的。如果对于 $A$ 中任意元素 $a,b,c$ 满足______律、______律和______律,则称$(A,\vee,\wedge)$是格。

21. 设$(A,*)$是半群,其中 $A=\{1,2,3\}$,且有 $1*1=2$,$2*2=3$,则 $3*3=$______。

22. 设 $a$ 是 12 阶循环群的生成元,那么 $a^8$ 是______阶元素。

23. 设 $A=\{1,2,3,4\}$,$R$ 是 $A$ 上的二元关系,$R$ 的关系图如图所示,则 $R$ 具有______和______性质。

24. 下面两个有向图,试从连通性判断(a)是______图,(b)是______图。

25. 在下列图中,可平面的图为______和______。

三、计算题(共 30 分)

26. (5 分) 设个体域 $D=\{1,2,5\}$,$F(x): x\le 2$,$G(x,y): x\ge y$,消去 $\forall x(F(x)\to\exists y\,G(y,x))$ 中的量词,并讨论其真值。

27. (5 分) 用等值演算法求$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$的主析取范式。

28. (6 分) 求下列图的所有不同构的最小生成树。

29. (8 分) 设 $A = \{a, b, c, d\}$, $R$ 是 $A$ 上的二元关系,其关系矩阵为:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

求 $R$ 的传递闭包。

30. (6 分) 设 $A = \{1,2,3\}$,问 $A$ 上可定义多少种等价关系?

四、证明题(共 20 分)

31. (8 分) 设 $R$ 是非空集合 $A$ 上的二元关系,试证明若 $R$ 是 $A$ 上的等价关系,则 $R \quad R$ 是 $A$ 上的等价关系。

32. (6 分) 设 $H_1$ 和 $H_2$ 是群 $(G, *)$ 的两个互不包含的子群,证明 $G$ 中存在一个元素,它既不属于 $H_1$,也不属于 $H_2$。

33. (6 分) 证明下面关于集合 $A$ 和 $B$ 的命题是相互等价的。

(1) $A = B$ (2) $A \quad B =$

五、应用题(共 15 分)

34. (6 分) 设 $A$ 代表 $m$ 个男生的集合, $B$ 代表 $n$ 个女生的集合。如果每个男生认识 $k$ 个女生,而每个女生也恰好认识 $k$ 个男生,且 $k > 0$。试证明 $m = n$。

35. (9 分) 给定 4 个命题:

对每一个实数 $x$,都存在一个实数 $y$,使 $x + y = 0$。

存在一个实数 $y$,对每一个实数 $x$,使 $x + y = 0$。

对每一个实数 $x$,存在一个实数 $y$,使 $x \cdot y = 0$。

存在一个实数 $y$,对每一个实数 $x$,使 $x \cdot y = 0$。

(1) 个体域取实数集, $A(x, y, z)$ 表示 $x + y = z$, $T(x, y, z)$ 表示 $x \cdot y = z$。试将这 4 个命题符号化。

(2) 确定它们的真值。

(3) 分析( " x)(v y) F(x, y) (v y)( " x) F(x, y) 是否成立。

# 模拟试题 1 答案

**一、判断题**

1. 2. 3. 4.

5. 6. 7. 8.

**二、填空题**

9. $\neg P \vee Q$　　10. $\forall x(B(2,x) \rightarrow A(x))$

11. 2　　12. $3n-6$

13. $\{\quad\}$　　14. $\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c)\}$

15. 1, 4

16. 图中各顶点的度数都是偶数

17. 循环群

**三、计算与演算题**

18. 先求其主析取范式。

$(P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R) \quad \neg(P \vee Q) \vee (\neg Q \wedge R)$

$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \wedge R)$

$((\neg P \wedge \neg Q) \wedge (R \vee \neg R)) \vee ((\neg Q \wedge R) \wedge (P \vee \neg P))$

$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

**由此可得**$(P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$ **的主析取范式为**:

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

**为了求其主合取范式,把**$(P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$ **的主析取范式写为**:

$$(P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R) \quad m_{000} \vee m_{001} \vee m_{101}$$

$$\sum(0,1,5)$$

**所以**$(P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$ **的主合取范式为**:

$$(P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R) \quad \prod(2,3,4,6,7)$$

$$M_{010} \wedge M_{011} \wedge M_{100} \wedge M_{110} \wedge M_{111}$$

**由引可得**$(P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$ **的主合取范式为**:

$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$

19. (**参考答案**)

$((\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)) \rightarrow (\forall x)R(x)$

$\neg((\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)) \vee (\forall x)R(x)$

$(\neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists y)Q(y)) \vee (\forall x)R(x)$

$((\exists x)\neg P(x) \wedge (\forall y)\neg Q(y)) \vee (\forall x)R(x)$

$$((\exists x)\neg P(x)\wedge(\forall y)\neg Q(y))\vee(\forall z)R(z)$$

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)((\neg P(x)\wedge\neg Q(y))\vee R(z))$$

**所以**$((\forall x)P(x)\vee(\exists y)Q(y))\rightarrow(\forall x)R(x)$ **的前束范式为**:

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)((\neg P(x)\wedge\neg Q(y))\vee R(z))$$

20. (1) **设** $T$ **中有** $x$ **个** 4 **度点,于是有**

$$4+2\cdot 2+4x=2(4+2+x)-2$$

**由此解得** $x=1$,**即** $T$ **中有一个** 4 **度点。**

(2) **符合题设条件的无向树仅有两种,如下图所示:**

21. **解　其最小生成树如下图所示:**

**最小生成树的权为**:$1+2+3+3+5+7=21$。

22. (1) $G$ **的所有非平凡子群为**:

$A_2=\{e,a^6\}$

$A_3=\{e,a^4,a^8\}$

$A_4=\{e,a^3,a^6,a^9\}$

$A_6=\{e,a^2,a^4,a^6,a^8,a^{10}\}$

(2) $G$ **的所有生成元为**: $a,a^5,a^7,a^{11}$。

**四、证明题**

23. **用直接证明法。**

| | |
|---|---|
| ① $\exists xR(x)\rightarrow\exists yG(y)$ | P |
| ② $R(c)\rightarrow G(c')$ | ES① |
| ③ $\forall xF(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow H(y))$ | P |
| ④ $F(c)\rightarrow(G(c')\rightarrow H(c'))$ | US③ |
| ⑤ $\neg F(c)\vee\neg G(c')\vee H(c')$ | T④ |
| ⑥ $G(c')\rightarrow(F(c)\rightarrow H(c'))$ | T⑤ |
| ⑦ $R(c)\rightarrow(F(c)\rightarrow H(c'))$ | T②,⑥ |
| ⑧ $\neg R(c)\vee\neg F(c)\vee H(c')$ | T⑦ |
| ⑨ $\neg(R(c)\wedge F(c))\vee H(c')$ | T⑧ |

⑩ $(R(c) \wedge F(c)) \to H(c')$ T⑨

1 $\vee\ x(R(x) \wedge F(x)) \to \vee\ y(H(y))$ EG⑩

24. 当$(a, b) \in R^2$, $(b, c) \in R^2$ 时,由复合关系的定义可知,在 $A$ 中存在元素 $x$ 和 $y$,使得

$$(a, x) \in R, \quad (x, b) \in R$$

和

$$(b, y) \in R, \quad (y, c) \in R$$

由题设可知, $R$ 是 $A$ 上的传递关系,所以有

$$(a, b) \in R \quad \text{和} \quad (b, c) \in R$$

又由复合关系的定义可知,$(a, c) \in R^2$。由此证得 $R^2$ 是 $A$ 上的传递关系。

25. 由题设可知:

$$(a * b)^2 = a^2 * b^2$$

$$a * b * a * b = a * a * b * b$$

由于群中运算满足消去律,所以

$$b * a = a * b$$

由此证得 * 是可交换运算,$(G, *)$ 是可交换群。

26. 主要利用“无向图中,奇数度顶点的个数为偶数”这一结论。

用反证法,设欧拉图中含有割边。由于欧拉图中每个顶点的度数为偶数,所以割边的两个端点也是偶数度顶点。删去割边后,构成两个连通分支,每个连通分支都含有割边的一个端点,此时割边的端点为奇数度顶点,所以每一个连通分支中仅有一个奇数度顶点,这和无向图中,奇数度顶点数为偶数的结论予盾。

所以欧拉图中没有割边。

# 模拟试题 2 答案

一、单项选择题

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. B | 2. A | 3. C | 4. B | 5. B |
| 6. D | 7. A | 8. C | 9. A | 10. D |
| 11. C | 12. D | 13. C | 14. C | 15. B |

二、填空题

16. $P \to Q$, $T$ 17. $(P(z) \to Q(x, z))$, $R(x, z)$

18. 反对称性,传递性 19. 45, 1

20. 最小上界,最大下界 21. $(1, 0)$, $\frac{1}{a}$, $-b$

22. $a * b \in S$, $(a * b) * c = a * (b * c)$ 23. 自反,传递

24. 弱连通,强连通 25. $K_5$, $K_{3,3}$

**三、计算题**

26. $\forall x(F(x) \wedge \exists y G(y)) \quad (F(2) \wedge F(3) \wedge F(6)) \wedge (G(2) \vee G(3) \vee G(6)) \quad (1 \wedge 1 \wedge 0) \wedge (0 \vee 0 \vee 1) \quad 0$。

27. $\neg(P \to Q) \to (P \to Q) \quad (P \to Q) \vee (P \to Q) \quad \neg P \vee Q$。

28. **其最小生成树如下图所示**:

**其权为** $W(T) = 1 + 2 + 3 + 3 + 3 = 12$

29. **由于**

$$\boldsymbol{M}_R = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{M}_{R^2} = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{R^3} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{M}_{R^4} = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

**由此可知**, $s = 2$, $t = 4$。

30. $A = \{a, b, c\}$ **的不同划分共有** 5 **种**:

$S_1 = \{\{a, b, c\}\}$

$S_2 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$

$S_3 = \{\{b\}, \{a, c\}\}$

$S_4 = \{\{c\}, \{a, b\}\}$

$S_5 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

**由于集合** $A$ **上的等价关系与划分一一对应**, **所以** $A$ **上不同的等价关系也有** 5 **种**:

$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b)\}$

$R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}$

$R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$

$R_4 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (a, b)\}$

$R_5 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

31. **所求树为:**

**四、证明题**

32. **首先证明当** $R$ **是** $A$ **上的传递关系时,必有** $R \quad R^2$ 。

**设** $(a, b) \in R^2$ **,由复合关系的定义可知,在** $A$ **中必存在元素** $x$ **,使得**

$$(a, x) \in R, \quad (x, b) \in R$$

**由于** $R$ **是传递关系,所以** $(a, b) \in R$。**由此证得** $R \quad R^2$ 。

**现再证当** $R \quad R^2$ **时,** $R$ **是传递关系。**

**当** $(a, b) \in R$ **且** $(b, c) \in R$ **时,由复合关系的定义可知,** $(a, c) \in R^2$ **,而** $R \quad R^2$ **,所以** $(a, c) \in R$。**由此证得** $R$ **是** $A$ **上的传递关系。**

**综上所证,** $R$ **是传递关系,当且仅当** $R \quad R^2$ 。

33. **由于**

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}$$

**而** $a$、$b$、$c$、$d$ **仅取值为** 1 **或** -1**,所以** $ac$ **和** $bd$ **的取值仅为** 1 **或** -1。**由此可知,矩阵乘法对于** $G$ **是封闭的。**

**矩阵乘法是满足结合律的。**

$(G, \times)$ **的幺元是** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

$(G, \times)$ **中的每个元素都有逆元:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**由此可知,** $(G, \times)$ **是群。**

34. **首先证明** $R$ **是对称关系,即证当** $(a, b) \in R$ **时,必有** $(b, a) \in R$。

**由题设条件可知,当** $(a, b) \in R, (b, c) \in R$ **时,必有** $(c, a) \in R$。

由于 $R$ 是自反关系,所以 $(b, b) \in R$,于是按照题设条件可得:$(a, b) \in R, (b, b) \in R$ 必有 $(b, a) \in R$,由于证得 $A$ 是对称关系。

现再证明 $R$ 是传递关系。

由于当 $(a, b) \in R, (b, c) \in R$ 时必有 $(c, a) \in R$,利用已证得的 $R$ 是对称关系,即得 $(a, c) \in R$,由此证得 $R$ 是传递关系。

$R$ 是自反的(题设)、对称的、传递的,所以 $A$ 是等价关系。

五、应用题

35. 若用顶点表示过程,当过程 $P_i$ 调用过程 $P_j$ 时,则由顶点 $P_i$ 到 $P_j$ 画一条有向边,由此得到有向图 $G$。

一个过程 $P_i$ 是否递归的问题,就是在有向图 $G$ 中是否存在着一条通过顶点 $P_i$ 的有向回路的问题。

若令有向图 $G$ 的邻接矩阵为 $P = [p_{ij}]_{n \times n}$,由线性代数的知识可知,令 $P^2$ 的元素为 $p_{ij}^{(2)}$,即 $P^2 = [p_{ij}^{(2)}]$,则

$$p_{ii}^{(2)} = p_{i1} p_{1i} + p_{i2} p_{2i} + \cdots + p_{in} \cdot p_{ni}$$

如果 $p_{ii}^{(2)} \neq 0$,则存在着 $p_{ik} \cdot p_{ki} = 1$,即有 $p_{ik} = 1$ 和 $p_{ki} = 1$,或者说存在着 $P_i$ 到 $P_k$ 的有向边,又存在着 $P_k$ 到 $P_i$ 的有向边,也就是说存在着通过顶点 $P_i$ 的长度为 2 的回路(当 $i = k$ 时,存在着 $p_{ii} = 1$,即存在着 $P_i$ 到 $P_i$ 的自回路)。

同样可说明,令 $P^m = [p_{ik}^{(m)}]\ (m \leq n)$,则当 $p_{ii}^{(m)} \neq 0$ 时,存在着通过 $P_i$ 的长度为 $m$ 的回路(或存在通过 $P_i$ 的自回路)。

由此可见,若令:

$$A = P + P^2 + \cdots + P^n$$

则当 $A$ 中对角线元素 $a_{ii} = 0$ 时,过程 $P_i$ 不是递归的;当 $a_{ii} \neq 0$ 时,过程 $P_i$ 是递归的。这就是判定递归的条件。

36. 若令

$F(x)$: $x$ 是主持人;

$Q(x)$: $x$ 很有风度;

$R(x)$: $x$ 是学生;

$a$:李明。

前提为:$\forall x(F(x) \rightarrow Q(x)), R(a) \wedge F(a)$。结论为:$\exists x(R(x) \wedge Q(x))$。现证此结论为有效结论。

| | |
|---|---|
| ① $\forall x(F(x) \rightarrow Q(x))$ | P |
| ② $F(a) \rightarrow Q(a)$ | US① |
| ③ $R(a) \wedge F(a)$ | P |
| ④ $F(a)$ | T③ |
| ⑤ $Q(a)$ | T②,④ |
| ⑥ $R(a)$ | T③ |
| ⑦ $R(a) \wedge Q(a)$ | T⑤,⑥ |
| ⑧ $\exists x(R(x) \wedge Q(x))$ | EG⑦ |

# 模拟试题 3 答案

**一、单项选择题**

1. B　2. A　3. A　4. C　5. D

6. B　7. B　8. C　9. B　10. B

11. C　12. A　13. C　14. b　15. D

**二、填空题**

16. $P \rightarrow Q$, $T$　　17. $P(z) \rightarrow Q(x, z)$, $R(x, z)$

18. **自反性,传递性**　　19. 12, 1

20. **交换,结合,吸收**　　21. 3

22. 3　　23. **反对称,传递**

24. **强连通,弱连通**　　25. $(a)$, $(c)$

**三、计算题**

26. " $x(F(x) \rightarrow$ v $y\,G(y, x))$　$(F(1) \rightarrow (G(1,1) \vee G(2,1) \vee G(5,1))) \wedge (F(2) \rightarrow (G(1,2) \vee G(2,2) \vee G(5,2))) \wedge (F(5) \rightarrow (G(1,5) \vee G(2,5) \vee G(5,5)))$　$T$。

27. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$　$(p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge (q \vee \neg q) \wedge r)$　$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$。

28. **不同构的最小生成树共有两种,如下图所示:**

29. $t(R) = A \times A$

30. 5 **个**

**四、证明题**

31. **首先证明** $R$　$R$ **是自反的,即证对于** $A$ **中每一个元素** $a$ **都有** $(a, a) \in R$　$R$。

**由题设条件** $R$ **是等价关系,因而是自反的,所以** $(a, a) \in R$, **即得** $(a, a) \in R$　$R$, **由此证得** $R$　$R$ **是自反的。**

**再证** $R$　$R$ **是对称的,即证当** $(a, b) \in R$　$R$, **必有** $(b, a) \in R$　$R$, **由复合关系的定义可知,若** $(a, b) \in R$　$R$, **在** $A$ **中必存在元素** $x$, **使** $(a, x) \in R$, $(x, b) \in R$。**由于** $R$ **是对称关系,所以** $(x, a) \in R$, $(b, x) \in R$, **这样就得到** $(b, a) \in R$　$R$, **由此证得** $R$　$R$ **是对称的。**

**最后证** $R$　$R$ **是传递的,即证当** $(a, b) \in R$　$R$, $(b, c) \in R$　$R$, **必有** $(a, c) \in R$　$R$。**由复合关系的定义可知,若** $(a, b) \in R$　$R$, $(b, c) \in R$　$R$, **在** $A$ **中必存在元素** $x_1$, $x_2$, **使** $(a, x_1)$, $(x_1, b)$, $(b, x_2)$, $(x_2, c) \in R$。**由于** $R$ **是传递关系,所以** $(a, b)$, $(b, c) \in R$, **即得** $(a, c) \in R$　$R$, **由此证得** $R$　$R$ **是传递的。**

$R$　$R$ **是自反的、对称的、传递的,所以** $R$　$R$ **是等价关系。**

32. **因为** $H_1$ ň $H_2$, **所以存在** $a \in H_1$ **且** $a \notin H_2$; **又因为** $H_2$ ň $H_1$, **所以存在** $b \in H_2$ **且**

$b\notin H_1$。

**显然** $a * b \in G, a * b$ **为所求元素。**

**反之,如果** $a * b \in H_1$,**因为** $a \in H_1$,$(H_1, *)$ **是** $(G, *)$ **的子群,可推出** $b \in H_1$ **与** $b\notin H_1$,**矛盾。**

**同理可证** $a * b\notin H_2$。

33. **由于** $A \quad A =$ ,**所以若** $A = B$ **则** $A \quad B =$ 。

**若** $A \quad B =$ ,**则**

$A = A \qquad = A \quad (A \quad B) = (A \quad A) \quad B$

$\quad = \qquad B = B$

**所以** $A = B$ **当且仅当** $A \quad B =$ 。

34. **解　首先画出一个偶图** $G(A, B)$,**其中** $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}, B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$,**当男生** $a_i$ **认识女生** $b_j$ **时在** $a_i$ **和** $b_j$ **之间连一条边,问题化为在一个既是偶图又是** $k$**度正则图的图中,证明** $|A| = |B|$。

**因为**

$$\text{边数} = \sum_{i=1}^{m} \deg(a_i) = k \cdot m$$

$$\text{边数} = \sum_{j=1}^{n} \deg(b_j) = k \cdot n$$

**所以** $k \cdot m = k \cdot n$。

**又因为** $k > 0$,**所以** $m = n$。

35.

(1) **将 4 个命题符号化为:**

$(\text{"} x)(\text{V}\ y) A(x, y, 0)$

$(\text{V}\ y)(\text{"} x) A(x, y, 0)$

$(\text{"} x)(\text{V}\ y) T(x, y, 0)$

$(\text{V}\ y)(\text{"} x) T(x, y, 0)$

(2)

**真值为** $T$,　**真值为** $F$,

**真值为** $T$,　**真值为** $T$。

(3) **由** ② ,　**可知**

$(\text{"} x)(\text{V}\ y) A(x, y, 0) \ \backslash\ (\text{V}\ y)(\text{"} x) A(x, y, 0)$

**所以** $(\text{"} x)(\text{V}\ y) F(x, y) \quad (\text{V}\ y)(\text{"} x) F(x, y)$ **不成立。**

# 参 考 文 献


[1] 左孝凌．离散数学．北京:经济科学出版社,2000

[2] 邵学才等．离散数学．北京:清华大学出版社,2001

[3] 邵学才等．离散数学习题与解答．北京:清华大学出版社,2002

[4] 邵学才等．离散数学．北京:电子工业出版社,2001

[5] 檀凤琴等．离散数学．北京:科学出版社,1999