1.14. 将下列命题符号化.

(1) 刘晓月跑得快, 跳得高.
(2)老王是山东人或河北人.
(3)因为天气冷, 所以我穿了羽绒服.
(4)王欢与李乐组成一个小组.
(5)李辛与李末是兄弟.
(6)王强与刘威都学过法语.
(7)他一面吃饭, 一面听音乐.
(8)如果天下大雨, 他就乘班车上班.
(9)只有天下大雨, 他才乘班车上班.
(10)除非天下大雨, 他才乘班车上班.
(11)下雪路滑, 他迟到了.
(12)2 与 4 都是素数, 这是不对的.
(13)"2 或 4 是素数 这是不对的"是不对的.

(1)$p\wedge q$, 其中, p: 刘晓月跑得快, q: 刘晓月跳得高.

(2)$p\vee q$, 其中, p: 老王是山东人, q: 老王是河北人.

(3)$p\rightarrow q$, 其中, p: 天气冷, q: 我穿了羽绒服.

(4)p, 其中, p: 王欢与李乐组成一个小组, 是简单命题.

(5)p, 其中, p: 李辛与李末是兄弟.

(6)$p\wedge q$, 其中, p: 王强学过法语, q: 刘威学过法语.

(7)$p\wedge q$, 其中, p: 他吃饭, q: 他听音乐.

(8)$p\rightarrow q$, 其中, p: 天下大雨, q: 他乘班车上班.

(9)$p\rightarrow q$, 其中, p: 他乘班车上班, q: 天下大雨.

(10)$p\rightarrow q$, 其中, p: 他乘班车上班, q: 天下大雨.

(11)$p\rightarrow q$, 其中, p: 下雪路滑, q: 他迟到了.

(12) $\neg(p\wedge q)$或$\neg p\vee\neg q$, 其中, p: 2 是素数, q: 4 是素数.

(13) $\neg\neg(p\vee q)$或 $p\vee q$, 其中, p: 2 是素数, q: 4 是素数.

1.19. 用真值表判断下列公式的类型:

(1)$p\rightarrow(p\vee q\vee r)$

(2)$(p\rightarrow\neg q)\rightarrow\neg q$

(3) $\neg(q\rightarrow r)\wedge r$

(4)$(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

(5)$(p\wedge r)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$

(6)$((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)$

(7)$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(r\leftrightarrow s)$

(1), (4), (6)为重言式.

(3)为矛盾式.

(2), (5), (7)为可满足式.

2.4. 用等值演算法证明下面等值式:

(1) $p\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$

(3) $\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

(4) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

(1) $(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\Leftrightarrow p\wedge(q\neg\vee q)\Leftrightarrow p\wedge 1\Leftrightarrow p$.

(3) $\neg(p\leftrightarrow q)$

$\Leftrightarrow\neg((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$

$\Leftrightarrow\neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p))$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p)$

$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

(4) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

$\Leftrightarrow(p\vee\neg p)\wedge(p\vee q)\wedge(\neg q\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee q)$

$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

2.7. 求下列公式的主析取范式, 再用主析取范式求合取范式:

(1)$(p\wedge q)\vee r$

(2)$(p\to q)\wedge(q\to r)$

(1)$m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$

(2)$m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_7\Leftrightarrow M_2\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$

2.27. 某电路中有一个灯泡和三个开关 A,B,C. 已知在且仅在下述四种情况下灯亮:

(1)C 的扳键向上, A,B 的扳键向下.

(2)A 的扳键向上, B,C 的扳键向下.

(3)B,C 的扳键向上, A 的扳键向下.

(4)A,B 的扳键向上, C 的扳键向下.

设 F 为 1 表示灯亮, p,q,r 分别表示 A,B,C 的扳键向上.

(a)求 F 的主析取范式.

(b)在联结词完备集$\{\neg,\wedge\}$上构造 F.

(c)在联结词完备集$\{\neg,\to,\leftrightarrow\}$上构造 F.

(a)由条件(1)-(4)可知, F 的主析取范式为

$F\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_4\vee m_3\vee m_6$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_6$

(b)先化简公式

$F\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow\neg q\wedge((\neg p\wedge r)\vee(p\wedge\neg r))\vee q\wedge((\neg p\wedge r)\vee(p\wedge\neg r))$

$\Leftrightarrow(\neg q\vee q)\wedge((\neg p\wedge r)\vee(p\wedge\neg r))$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge r)\vee(p\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg(\neg p\wedge r)\wedge\neg(p\wedge\neg r))$ (已为$\{\neg,\wedge\}$中公式)

(c)

$F\Leftrightarrow(\neg p\wedge r)\vee(p\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow\neg\neg(\neg p\wedge r)\vee(p\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\wedge r)\to(p\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow(p\vee\neg r)\to\neg(\neg p\vee r)$

$\Leftrightarrow(r\to p)\to\neg(p\to r)$ (已为$\{\neg,\to,\leftrightarrow\}$中公式)

3.14.在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明:

(1)前提: $p\to(q\to r)$, p, q

结论: $r\vee s$

(2)前提: $p\to q$, $\neg(q\wedge r)$, r

结论: $\neg p$

(3)前提: $p\to q$

结论: $p\to(p\wedge q)$

(4)前提: $q\to p$, $q\Rightarrow s$, $s\Rightarrow t$, $t\wedge r$

结论: $p\wedge q$

(5)前提: $p\to r$, $q\to s$, $p\wedge q$

结论: $r\wedge s$

(6)前提: $\neg p\vee r$, $\neg q\vee s$, $p\wedge q$

结论: $t\to(r\vee s)$

(1)证明:

①	$p\to(q\to r)$	前提引入
②	p	前提引入
③	$q\to r$	①②假言推理
④	q	前提引入
⑤	r	③④假言推理
⑥	$r\vee s$	⑤附加律

(2)证明:

①	$\neg(q\wedge r)$	前提引入
②	$\neg q\vee\neg r$	①置换
③	r	前提引入
④	$\neg q$	②③析取三段论
⑤	$p\to q$	前提引入
⑥	$\neg p$	④⑤拒取式

(3)证明:

①	$p\to q$	前提引入
②	$\neg p\vee q$	①置换
③	$(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee p)$	②置换
④	$\neg p\vee(p\wedge q)$	③置换
⑤	$p\to(p\wedge q)$	④置换

也可以用附加前提证明法, 更简单些.

(4)证明:

①	$s\Rightarrow t$	前提引入
②	$(s\to t)\wedge(t\to s)$	①置换
③	$t\to s$	②化简
④	$t\wedge r$	前提引入
⑤	t	④化简
⑥	s	③⑤假言推理
⑦	$q\Rightarrow s$	前提引入
⑧	$(s\to q)\wedge(q\to s)$	⑦置换
⑨	$s\to q$	⑧化简
⑩	q	⑥⑨假言推理
⑪	$q\to p$	前提引入
⑫	p	⑩⑪假言推理
⑬	$p\wedge q$	⑩⑫合取

(5)证明:

①	$p\to r$	前提引入
②	$q\to s$	前提引入
③	$p\wedge q$	前提引入
④	p	③化简
⑤	q	③化简
⑥	r	①④假言推理
⑦	s	②⑤假言推理
⑧	$r\wedge s$	⑥⑦合取

(6)证明:

①	t	附加前提引入
②	$\neg p\vee r$	前提引入
③	$p\wedge q$	前提引入
④	p	③化简
⑤	r	②④析取三段论
⑥	$r\vee s$	⑤附加

说明: 证明中, 附加提前 t, 前提$\neg q\vee s$ 没用上. 这仍是正确的推理.

3.15.在自然推理系统 P 中用附加前提法证明下面各推理:

(1)前提: $p\to(q\to r), s\to p, q$

结论: $s\to r$

(2)前提: $(p\vee q)\to(r\wedge s), (s\vee t)\to u$

结论: $p\to u$

(1)证明:

①	s	附加前提引入
②	$s\to p$	前提引入
③	p	①②假言推理
④	$p\to(q\to r)$	前提引入
⑤	$q\to r$	③④假言推理
⑥	q	前提引入
⑦	r	⑤⑥假言推理

(2)证明:

①	P	附加前提引入
②	$p\vee q$	①附加
③	$(p\vee q)\to(r\wedge s)$	前提引入
④	$r\wedge s$	②③假言推理
⑤	S	④化简
⑥	$s\vee t$	⑤附加
⑦	$(s\vee t)\to u$	前提引入
⑧	u	⑥⑦假言推理

3.16.在自然推理系统 P 中用归谬法证明下面推理:

(1)前提: $p\to\neg q, \neg r\vee q, r\wedge\neg s$

结论: $\neg p$

(2)前提: $p\vee q, p\to r, q\to s$

结论: $r\vee s$

(1)证明:

①	P	结论否定引入
②	$p\to\neg q$	前提引入
③	$\neg q$	①②假言推理
④	$\neg r\vee q$	前提引入
⑤	$\neg r$	③④析取三段论
⑥	$r\wedge\neg s$	前提引入
⑦	r	⑥化简
⑧	$\neg r\wedge r$	⑤⑦合取

⑧为矛盾式, 由归谬法可知, 推理正确.

(2)证明:

①	$\neg(r\vee s)$	结论否定引入
②	$p\vee q$	前提引入
③	$p\to r$	前提引入
④	$q\to s$	前提引入
⑤	$r\vee s$	②③④构造性二难
⑥	$\neg(r\vee s)\wedge(r\vee s)$	①⑤合取

⑥为矛盾式, 所以推理正确.

3.17.P53 17. 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明:

只要 A 曾到过受害者房间并且 11 点以前没用离开, A 就犯了谋杀罪. A 曾到过受害者房间. 如果 A 在 11 点以前离开, 看门人会看到他. 看门人没有看到他. 所以 A 犯了谋杀罪.

令 p: A 曾到过受害者房间; q: A 在 11 点以前离开了

; r: A 就犯了谋杀罪; s:看门人看到 A.

前提: $p\neg\wedge q \to r, p, q \to s, \neg s$;   结论: r.

证明:

① $\neg s$ 前提引入

② $q \to s$ 前提引入

③ $\neg q$ ①②拒取

④ p 前提引入

⑤ $p\neg\wedge q$ ③④合取

⑥ $p\neg\wedge q \to r$ 前提引入

⑦ r ⑤⑥假言推理

4.4. 在一阶逻辑中将下列命题符号化:

(1)没有不能表示成分数的有理数.

(2)在北京卖菜的人不全是外地人.

(3)乌鸦都是黑色的.

(4)有的人天天锻炼身体.

没指定个体域, 因而使用全总个体域.

(1) $\neg\exists x(F(x) \wedge\neg G(x))$或$\forall x(F(x) \to G(x))$, 其中, $F(x)$: x 为有理数, $G(x)$: x 能表示成分数.

(2) $\neg\forall x(F(x) \to G(x))$或$\exists x(F(x) \wedge\neg G(x))$, 其中, $F(x)$: x 在北京卖菜, $G(x)$: x 是外地人.

(3) $\forall x(F(x) \to G(x))$, 其中, $F(x)$: x 是乌鸦, $G(x)$: x 是黑色的.

(4) $\exists x(F(x) \wedge G(x))$, 其中, $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 天天锻炼身体.

4.5. 在一阶逻辑中将下列命题符号化:

(1)火车都比轮船快.

(2)有的火车比有的汽车快.

(3)不存在比所有火车都快的汽车.

(4)"凡是汽车就比火车慢"是不对的.

因为没指明个体域, 因而使用全总个体域

(1) $\forall x\forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y))$, 其中, $F(x)$: x 是火车, $G(y)$: y 是轮船, $H(x,y)$:x 比 y 快.

(2) $\exists x\exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge H(x,y))$, 其中, $F(x)$: x 是火车, $G(y)$: y 是汽车, $H(x,y)$:x 比 y 快.

(3) $\neg\exists x(F(x) \wedge\forall y(G(y) \to H(x,y)))$

或$\forall x(F(x) \to\exists y(G(y) \wedge\neg H(x,y)))$, 其中, $F(x)$: x 是汽车, $G(y)$: y 是火车, $H(x,y)$:x 比 y 快.

(4) $\neg\forall x\forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y))$

或$\exists x\exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge\neg H(x,y))$, 其中, $F(x)$: x 是汽车, $G(y)$: y 是火车, $H(x,y)$:x 比 y 慢.

4.9. 给定解释 $\boldsymbol{I}$ 如下:

(a)个体域 D_I 为实数集合$\mathbb{R}$.

(b)D_I 中特定元素 $\bar{a}=0$.

(c)特定函数 $\bar{f}(x,y)=x-y, x,y\in D_I$.

(d)特定谓词 $\bar{F}(x,y)$: $x=y$, $\bar{G}(x,y)$: $x<y, x,y\in D_I$.

说明下列公式在 $\boldsymbol{I}$ 下的含义, 并指出各公式的真值:

(1) $\forall x\forall y(G(x,y) \to\neg F(x,y))$

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,y),a) \to G(x,y))$

(3) $\forall x\forall y(G(x,y) \to\neg F(f(x,y),a))$

(4) $\forall x\forall y(G(f(x,y),a) \to F(x,y))$

(1) $\forall x\forall y(x<y\to x\neq y)$, 真值为 1.

(2) $\forall x\forall y((x-y=0) \to x<y)$, 真值为 0.

(3) $\forall x\forall y((x<y) \to (x-y\neq 0))$, 真值为 1.

(4) $\forall x\forall y((x-y<0) \to (x=y))$, 真值为 0.

4.11.判断下列各式的类型:

(1) $F(x, y) \to (G(x, y) \to F(x, y))$.

(3) $\forall x\exists yF(x, y) \to \exists x\forall yF(x, y)$.

(5) $\forall x\forall y(F(x, y) \to F(y, x))$.

(1) 是命题重言式 $p \to (q \to p)$ 的代换实例, 所以是永真式.

(3) 在某些解释下为假(举例), 在某些解释下为真(举例), 所以是非永真式的可满足式.

(5) 同(3).

5.8. 在一阶逻辑中将下列命题符号化, 要求用两种不同的等值形式.

(1) 没有小于负数的正数.

(2) 相等的两个角未必都是对顶角.

(1) 令 $F(x)$: x 小于负数, $G(x)$: x 是正数. 符合化为:

$$\exists\neg x((F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall x(G(x) \to \neg G(x)).$$

(2) 令 $F(x)$: x 是角, $H(x, y)$: x 和 y 是相等的, $L(x, y)$: x 与 y 是对顶角. 符合化为:

$$\neg\forall x\forall y(F(x) \wedge F(y) \wedge H(x, y) \to L(x, y))$$
$$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x) \wedge F(y) \wedge H(x, y) \wedge \neg L(x, y))$$
$$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge (\exists y(F(y) \wedge H(x, y) \wedge \neg L(x, y))).$$

5.12.求下列各式的前束范式.

(1) $\forall xF(x) \to \forall yG(x, y)$;

(3) $\forall xF(x, y) \leftrightarrow \exists xG(x, y)$;

(5) $\exists x_1F(x_1, x_2) \to (F(x_1) \to \exists\neg x_2G(x_1, x_2))$.

前束范式不是唯一的.

(1) $\forall xF(x) \to \forall yG(x, y)$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \to \forall yG(x, y))$
$\Leftrightarrow \exists x\forall y(F(x) \to G(x, y))$.

(3) $\forall xF(x, y) \leftrightarrow \exists xG(x, y)$

$\Leftrightarrow (\forall xF(x, y) \to \exists xG(x, y)) \wedge (\exists xG(x, y) \to \forall xF(x, y))$

$\Leftrightarrow (\forall x_1F(x_1, y) \to \exists x_2G(x_2, y)) \wedge (\exists x_3G(x_3, y) \to \forall x_4F(x_4, y))$

$\Leftrightarrow \exists x_1\exists x_2(F(x_1, y) \to G(x_2, y)) \wedge \forall x_3\forall x_4(G(x_3, y) \to F(x_4, y))$

$\Leftrightarrow \exists x_1\exists x_2\forall x_3\forall x_4((F(x_1, y) \to G(x_2, y)) \wedge (G(x_3, y) \to F(x_4, y)))$.

5.15.在自然推理系统 $\boldsymbol{F}$ 中构造下面推理的证明:

(1) 前提: $\exists xF(x) \to \forall y((F(y) \vee G(y)) \to R(y))$, $\exists xF(x)$

结论: $\exists xR(x)$.

(2) 前提: $\forall x(F(x) \to (G(a) \wedge R(x)))$, $\exists xF(x)$

结论: $\exists x(F(x) \wedge R(x))$

(3) 前提: $\forall x(F(x) \vee G(x))$, $\neg\exists xG(x)$

结论: $\exists xF(x)$

(4) 前提: $\forall x(F(x) \vee G(x))$, $\forall x(\neg G(x) \vee \neg R(x))$, $\forall xR(x)$

结论: $\forall xF(x)$

5.24.在自然推理系统 F 中, 构造下面推理的证明:

每个喜欢步行的人都不喜欢骑自行车

. 每个人或者喜欢骑自行车或者喜欢乘汽车

. 有的人不喜欢乘汽车,

所以有的人不喜欢步行. (个体域为人类集合)

令 $F(x)$: x 喜欢步行, $G(x)$: x 喜欢骑自行车, $H(x)$: x 喜欢乘汽车.

前提: $\forall x(F(x)\to\neg G(x))$, $\forall x(G(x)\vee H(y))$, $\exists x\neg H(x)$.

结论: $\exists x\neg F(x)$.

① $\forall x(G(x)\vee H(y))$ 前提引入

② $G(c)\vee H(c)$ ①UI

③ $\exists x\neg H(x)$ 前提引入

④ $\neg H(c)$ ③UI

⑤ $G(c)$ ②④析取三段

⑥ $\forall x(F(x)\to\neg G(x))$ 前提引入

⑦ $F(c)\to\neg G(c)$ ⑥UI

⑧ $\neg F(c)$ ⑤⑦拒取

⑨ $\exists x\neg F(x)$ ⑧EG

8.5. 设 $X=\{a, b, c, d\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$, $f=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$, 判断以下命题的真假

(1)f 是从 X 到 Y 的二元关系, 但不是从 X 到 Y 的函数;

(2) f 是从 X 到 Y 的函数, 但不是从满射, 也不是单射

(3) f 是从 X 到 Y 的满射, 但不是从单射;

(4) f 是从 X 到 Y 的双射.

8.12.设 f: $S\to T$, 证明

(1)$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$, 其中 $A, B\subseteq S$.

(2)举出反例说明等式 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$不是永远为真的.

(3)说明对于什么函数, 上述等式为真.

8.16.16.设 $A=\{a, b, c\}$. R 为 A 上的等价关系, 且

$R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}\cup I_A$

求自然映射 g: $A\to A/R$.

8.21.21.设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $f(x)=\langle x, x+1\rangle$.

(1)说明 f 是否为单射和满射, 为什么

(2)f 的反函数是否存在, 如果存在, 求出 f 的反函数;

(3)求 ran f.

(1)f 是单射的, $\because\forall x_1, x_2\in\mathbb{N}$, 若 $x_1\neq x_2$, 则 $f(x_1)=\langle x_1, x_1+1\rangle\neq f(x_2)=\langle x_2, x_2+1\rangle$. F 不是满射的, 因为若$\langle 0, 0\rangle\in$ ran f, 则$\exists x\in\mathbb{N}$, 使得 $f(x)=\langle x, x+1\rangle=\langle 0, 0\rangle$, 而这是不可能的.

(2)因为 $f=\{\langle x, \langle x, x+1\rangle\rangle| x\in\mathbb{N}\}$是单射, 它的逆关系 $f^{-1}=\{\langle\langle x, x+1\rangle, x\rangle| x\in\mathbb{N}\}$是函数, 是从 ran f 到 dom $f=\mathbb{N}$ 的双射函数. 但 f^{-1} 不是$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$的函数, 因为 dom $f^{-1}=$ ran $f\neq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

(3) ran $f=\{\langle n, n+1\rangle | n\in\mathbb{N}\}$.

19．用真值表判断下列公式的类型：

（4）$(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$

（5）$(p\wedge r)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$

（6）$((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$

答： （4）

p	q	p→q	¬q	¬p	¬q→¬p	(p→q)→(¬q→¬p)
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

所以公式类型为永真式

（5）公式类型为可满足式（方法如上例）

（6）公式类型为永真式（方法如上例）