Capítulo 4 | Distribuições de probabilidade discreta

LARSON | FARBER
estatística aplicada
4ª edição

Descrição do capítulo

- 4.1 Distribuições de probabilidades
- 4.2 Distribuições binomiais
- 4.3 Mais distribuições de probabilidades discretas

Seção 4.1

Distribuições de probabilidades

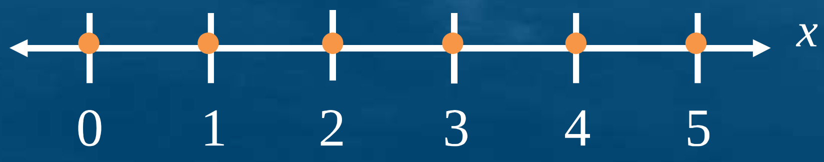
Variáveis aleatórias

Variáveis aleatórias

- Variável quantitativa cujo resultado depende de valores aleatórios
- Denotado por ***x***
- Exemplos:
  - x = Número de vendas que um vendedor faz em um dia
  - x = Horas gastas em ligações de venda em um dia

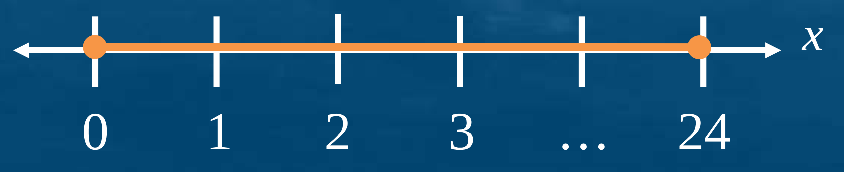
Variáveis aleatórias discretas

- Tem um número finito ou contável de possíveis resultados que podem ser listados
- Exemplo:
  - x = Número de vendas que um vendedor faz em um dia



Variáveis aleatórias contínuas

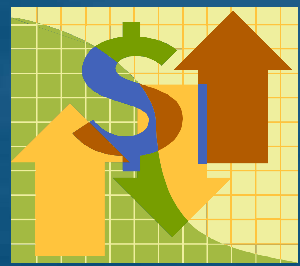
- Tem um número incontável de resultados possíves, representados por um intervalo na reta numérica
- Exemplo:
  - *x* = Horas gastas em ligações de venda em um dia



Exemplo: variáveis aleatórias

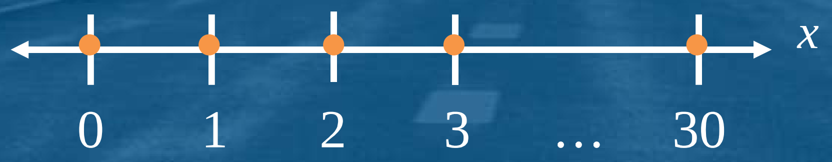
Decida se a variável aleatória *x* é discreta ou contínua.

1. *x* = O número de ações na média industrial da Dow Jones que tiveram aumento no preço em um dia.



Solução:

Variável aleatória discreta (o número de ações que tiveram aumento de preço pode ser contado).

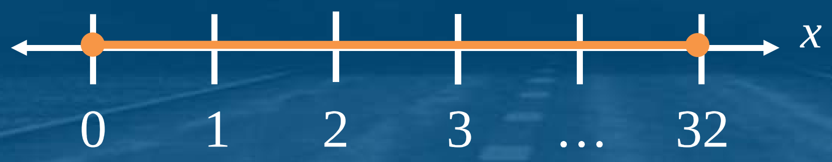


Decida se a variável aleatória *x* é discreta ou contínua.

2. *x* = O volume de água em um recipiente de 32 onças.

Solução:

Variável aleatória contínua (a quantidade de água pode ser qualquer volume entre 0 até 32 onças).



Distribuições de probabilidade discreta

Distribuição de probabilidade discreta

- Lista cada possível valor que a variável aleatória possa assumir, juntamente com sua probabilidade
- Precisa satisfazer as seguintes condições:

Em palavras	*Em símbolos*
1. A probabilidade de cada valor da variável discreta aleatória precisa estar entre 0 e 1.	$0 \leq P(x) \leq 1$
2. A soma de todas as probabilidades tem de ser 1.	$\Sigma P(x) = 1$

Construindo uma distribuição de probabilidade discreta

Seja x uma variável discreta aleatória com resultados possíveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1. Faça uma distribuição de frequências para os resultados possíveis.
2. Encontre a soma das frequências.
3. Encontre a probabilidade de cada resultado possível dividindo sua frequência pela soma das frequências.
4. Certifique-se de que cada probabilidade esteja entre 0 e 1 e que a soma seja 1.

Exemplo: construindo uma distribuição de probabilidade discreta

Um psicólogo industrial identificou traços passivo-agressivos em 150 funcionários. Os indivíduos receberam pontuações de 1 a 5, em que 1 era extremamente passivo e 5 extremamente agressivo. Uma pontuação de 3 indica neutralidade de traços. Construa uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória *x*. Então faça um gráfico da distribuição usando um histograma.

Pontuação, x	Frequência, f
1	24
2	33
3	42
4	30
5	21

Solução: construindo uma distribuição de probabilidade discreta

- Divida a frequência de cada pontuação pelo número total de indivíduos no estudo para encontrar a probabilidade para cada valor da variável aleatória

$$P(1) = \frac{24}{150} = 0.16 \qquad P(2) = \frac{33}{150} = 0.22 \qquad P(3) = \frac{42}{150} = 0.28$$

$$P(4) = \frac{30}{150} = 0.20 \qquad P(5) = \frac{21}{150} = 0.14$$

- Distribuição da probabilidade discreta:

x	1	2	3	4	5
P(x)	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14

Essa é uma distribuição de probabilidade discreta válida, já que

1. Cada probabilidade está entre 0 e 1, $0 \leq P(x) \leq 1$.
2. A soma das probabilidades é igual a 1,

$\Sigma P(x) = 0{,}16 + 0{,}22 + 0{,}28 + 0{,}20 + 0{,}14 = 1$.

Histograma

Como a largura de cada barra é 1, a área de cada barra é igual à probabilidade de um resultado em particular.

Média

Média de uma distribuição de probabilidade discreta

- $\mu = \Sigma x P(x)$
- Cada valor de x é multiplicado por sua probabilidade correspondente e os produtos são somados

Exemplo: encontrando a média

A distribuição de probabilidade para a tentativa de personalidade para traços passivo-agressivos é dada. Encontre a média.

Solução:

x	$P(x)$	$xP(x)$
1	0,16	1(0.16) = 0.16
2	0,22	2(0.22) = 0.44
3	0,28	3(0.28) = 0.84
4	0,20	4(0.20) = 0.80
5	0,14	5(0.14) = 0.70

$$\mu = \Sigma xP(x) = 2{,}94$$

Variância e desvio padrão

Variância de uma distribuição de probabilidade discreta

- $\sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 P(x)$

Desvio padrão de uma distribuição de probabilidade discreta

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\Sigma(x-\mu)^2 P(x)}$$

Exemplo: encontrando a variância e o desvio padrão

A distribuição de probabilidade para a tentativa de personalidade para traços passivo-agressivos é dada. Encontre a variância e o desvio padrão ($\mu = 2{,}94$).

x	$P(x)$
1	0,16
2	0,22
3	0,28
4	0,20
5	0,14

Solução: encontrando a variância e o desvio padrão

Lembre-se: μ = 2,94

x	$P(x)$	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$	$(x - \mu)^2 P(x)$
1	0,16	1 – 2,94 = –1,94	$(-1.94)^2 = 3.764$	3.764(0.16) = 0.602
2	0,22	2 – 2,94 = –0,94	$(-0.94)^2 = 0.884$	0.884(0.22) = 0.194
3	0,28	3 – 2,94 = 0,06	$(0.06)^2 = 0.004$	0.004(0.28) = 0.001
4	0,20	4 – 2,94 = 1,06	$(1.06)^2 = 1.124$	1.124(0.20) = 0.225
5	0,14	5 – 2,94 = 2,06	$(2.06)^2 = 4.244$	4.244(0.14) = 0.594

Variância: $\sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 P(x) = 1.616$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.616} \approx 1.3$

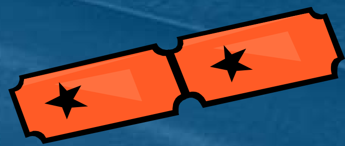
Valor esperado

Valor esperado de uma variável aleatória discreta

- Igual à média da variável aleatória
- **$E(x) = \mu = \Sigma x P(x)$**

Exemplo: encontrando um valor esperado

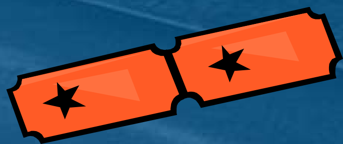
Em uma rifa, 1.500 bilhetes são vendidos a R$ 2 cada para quatro prêmios de R$ 500, R$ 250, R$ 150 e R$ 75. Você compra um bilhete. Qual o valor esperado do seu ganho?



LARSON | FARBER
estatística aplicada
4ª edição

Solução: encontrando um valor esperado

- Para encontrar o ganho de cada prêmio, subtraia o valor do bilhete do prêmio:
  - Seu ganho para o prêmio de R$ 500 é R$ 500 – R$ 2 = R$ 498
  - Seu ganho para o prêmio de R$ 250 é R$ 250 – R$ 2 = R$ 248
  - Seu ganho para o prêmio de R$150 é R$ 150 – R$ 2 = R$ 148
  - Seu ganho para o prêmio de R$ 75 é R$ 75 – R$ 2 = R$ 73
- Se você não ganhar um prêmio, seu ganho é R$ 0 – R$ 2 = –R$ 2



- A distribuição da probabilidade para os possíveis ganhos (resultados)

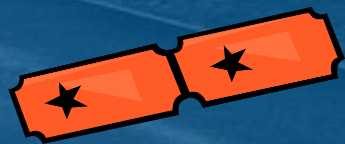
Ganho, *x*	R\$ 498	R\$ 248	R\$ 148	R\$ 73	–R\$ 2
P(x)	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1496}{1500}$

$$E(x) = \Sigma xP(x)$$

$$= \$498 \times \frac{1}{1500} + \$248 \times \frac{1}{1500} + \$148 \times \frac{1}{1500} + \$73 \times \frac{1}{1500} + (-\$2) \times \frac{1496}{1500}$$

$$= -\$1.35$$

Você pode esperar perder uma média de R\$ 1,35 para cada bilhete que comprar.



LARSON | FARBER
estatística aplicada
4ª edição

Seção 4.2

Distribuições binomiais

Experimento Bernoulli

Considere um experimento cujo resultado possa ser sucesso (*S*) ou falha (*F*).

Seja p a probabilidade de sucesso e q a probabilidade de fracasso, com $p+q=1$. Assim, $q=1-p$

Definimos a seguinte v.a. discreta: X número de sucessos em uma única tentativa do experimento.

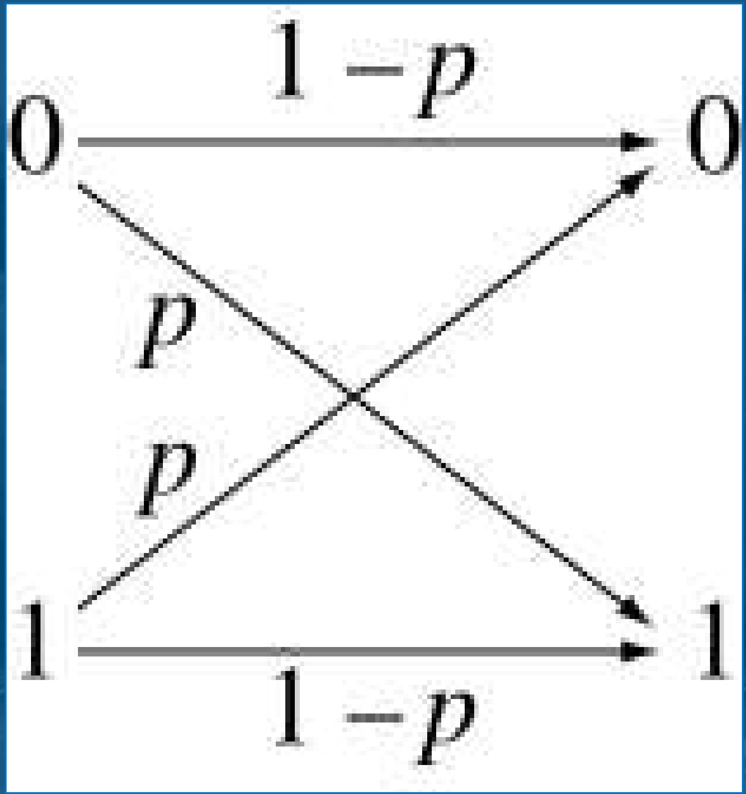
X assume valor $x=0$ para fracasso e $x=1$ para sucesso.

$P(X=x)=p^x q^{1-x}$

$E(X)=p$ e $Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=p-p^2=pq$

Experimento Bernoulli

- Exemplo: Canal Simétrico Binário



Experimentos binomiais

1. Experimento Bernoulli é repetido para um número fixo de tentativas; cada tentativa é independente das outras.
2. Há apenas dois resultados possíveis de interesse para cada tentativa: sucesso (*S*) ou falha (*F*).
3. A probabilidade de um sucesso *P*(*S*) é a mesma para cada tentativa.
4. A variável aleatória *x* conta o número de tentativas bem-sucedidas.

Notações para experimentos binomiais

Símbolo	*Descrição*
n	Número de vezes que uma tentativa é repetida
$p = P(s)$	Probabilidade de sucesso em uma única tentativa
$q = P(F)$	Probabilidade de falha em uma única tentativa ($q = 1 - p$)
x	A variável aleatória representa a contagem do número de sucessos em n tentativas: $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$.

Exemplo: experimentos binomiais

Decida se o experimento é um experimento binomial. Se for, especifique os valores de *n*, *p* e *q* e liste os valores possíveis da variável aleatória *x*.

1. Um certo procedimento cirúrgico tem uma chance de sucesso de 85%. Um médico realiza o procedimento em oito pacientes. A variável aleatória representa o número de cirurgias bem-sucedidas.

Solução: experimentos binomiais

Experimento binomial

1. Cada cirurgia representa uma tentativa. Há oito cirurgias, e cada uma é independente das outras.
2. Há apenas dois resultados possíveis de interesse para cada cirurgia: um sucesso (S) ou uma falha (F).
3. A probabilidade de um sucesso, $P(S)$, é 0,85 para cada cirurgia.
4. A variável aleatória x conta o número de cirurgias bem-sucedidas.

Experimento binomial

- $n = 8$ (número de tentativas)
- $p = 0{,}85$ (probabilidade de sucesso)
- $q = 1 - p = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$ (probabilidade de falha)
- $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (número de cirurgias bem-sucedidas)

Exemplo: experimentos binomiais

Decida se o experimento é um experimento binomial. Se for, especifique os valores de *n*, *p* e *q* e liste os possíveis valores da variável aleatória *x*.

2. Uma jarra contém cinco bolinhas vermelhas, nove bolinhas azuis e seis bolinhas verdes. Você pega aleatoriamente três bolinhas do jarro, *sem recolocá-las*. A variável aleatória representa o número de bolinhas vermelhas.

Solução: experimentos binomiais

Não é um experimento binomial

- A probabilidade de selecionar uma bolinha vermelha na primeira tentativa é de 5/20
- Como a bolinha não é recolocada no jarro, a probabilidade de sucesso (vermelho) para as tentativas subsequentes já não será mais 5/20
- As tentativas não são independentes e a probabilidade de sucesso não é a mesma para cada tentativa

Fórmula de probabilidade binomial

Fórmula de probabilidade binomial

- A probabilidade de exatamente *x* sucessos em *n* tentativas é:

$$P(x) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$$

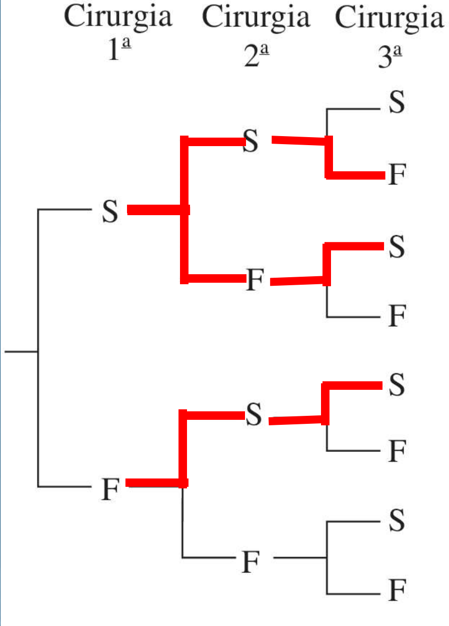
- n = número de tentativas
- p = probabilidade de sucesso
- $q = 1 - p$ probabilidade de falha
- x = número de sucessos em n tentativas

Exemplo: encontrando probabilidades binomiais

Cirurgias de microfraturas no joelho têm 75% de chance de sucesso em pacientes com problemas degenerativos no joelho. A cirurgia é realizada em três pacientes. Encontre a probabilidade da cirurgia ser bem-sucedida em exatamente dois pacientes.

Solução: encontrando probabilidades binomiais

Método 1: Desenhar um diagrama de árvore e usar a regra da multiplicação.



Resultado	Número de sucessos	Probabilidade
SSS	3	$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{64}$
SSF	2	$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$
SFS	2	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$
SFF	1	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$
FSS	2	$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$
FSF	1	$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$
FFS	1	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$
FFF	0	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$

$$3\left(\frac{9}{64}\right)\approx 0{,}422.$$

Método 2: Fórmula da probabilidade binomial.

$$n = 3, \quad p = \frac{3}{4}, \quad q = 1 - p = \frac{1}{4}, \quad x = 2$$

$$P(2 \text{ cirurgias com sucesso}) = \frac{3!}{(3-2)!2!}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$$

$$= 3\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = 3\left(\frac{9}{64}\right) = \frac{27}{64} \approx 0,422 .$$

Distribuição de probabilidade binomial

Distribuição de probabilidade binomial

- Lista os valores possíveis de *x* com a correspondente probabilidade de cada um
- Exemplo: Distribuição de probabilidade binomial para a cirurgia de microfraturas no joelho: $n = 3$, $p = 3/4$
- Usa a fórmula da probabilidade binomial para encontrar probabilidades

x	0	1	2	3
P(x)	0,016	0,141	0,422	0,422

Exemplo: construindo uma distribuição binomial

Em uma pesquisa, foi pedido a trabalhadores dos EUA as fontes de renda esperadas na aposentadoria. Sete trabalhadores que participaram da pesquisa são aleatoriamente selecionados e perguntados se eles planejam confiar no Seguro Social para sua renda na aposentadoria. Crie uma distribuição de probabilidade binomial para o número de trabalhadores que responderam sim.

(*Fonte: The Gallup Organization.*)

Solução: construindo uma distribuição binomial

- 25% dos trabalhadores americanos esperam confiar no Seguro Social para recebimento de renda na aposentadoria
- $n = 7$, $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$$P(x = 0) = {}_7C_0(0{,}25)^0(0{,}75)^7 = 1(0{,}25)^0(0{,}75)^7 \approx 0{,}1335$$

$$P(x = 1) = {}_7C_1(0{,}25)^1(0{,}75)^6 = 7(0{,}25)^1(0{,}75)^6 \approx 0{,}3115$$

$$P(x = 2) = {}_7C_2(0{,}25)^2(0{,}75)^5 = 21(0{,}25)^2(0{,}75)^5 \approx 0{,}3115$$

$$P(x = 3) = {}_7C_3(0{,}25)^3(0{,}75)^4 = 35(0{,}25)^3(0{,}75)^4 \approx 0{,}1730$$

$$P(x = 4) = {}_7C_4(0{,}25)^4(0{,}75)^3 = 35(0{,}25)^4(0{,}75)^3 \approx 0{,}0577$$

$$P(x = 5) = {}_7C_5(0{,}25)^5(0{,}75)^2 = 21(0{,}25)^5(0{,}75)^2 \approx 0{,}0115$$

$$P(x = 6) = {}_7C_6(0{,}25)^6(0{,}75)^1 = 7(0{,}25)^6(0{,}75)^1 \approx 0{,}0013$$

$$P(x = 7) = {}_7C_7(0{,}25)^7(0{,}75)^0 = 1(0{,}25)^7(0{,}75)^0 \approx 0{,}0001$$

x	*P*(*x*)
0	0,1335
1	0,3115
2	0,3115
3	0,1730
4	0,0577
5	0,0115
6	0,0013
7	0,0001

Todas as probabilidades estão entre 0 e 1 e a soma das probabilidades é 1,00001 ≈ 1.

Exemplo: encontrando probabilidades binomiais

Uma pesquisa indica que 41% das mulheres nos EUA consideram leitura como seu lazer favorito. Você seleciona aleatoriamente quatro mulheres dos EUA e as pergunta se ler é o passatempo preferido delas. Encontre a probabilidade de pelo menos duas delas dizer sim.

Solução:

- $n = 4$, $p = 0{,}41$, $q = 0{,}59$
- Pelo menos duas significa duas ou mais
- Encontre a soma de $P(2)$, $P(3)$, e $P(4)$

Solução: encontrando probabilidades binomiais

$P(x = 2) = {}_4C_2(0{,}41)^2(0{,}59)^2 = 6(0{,}41)^2(0{,}59)^2 \approx 0{,}351094$

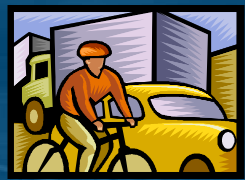
$P(x = 3) = {}_4C_3(0{,}41)^3(0{,}59)^1 = 4(0{,}41)^3(0{,}59)^1 \approx 0{,}162654$

$P(x = 4) = {}_4C_4(0{,}41)^4(0{,}59)^0 = 1(0{,}41)^4(0{,}59)^0 \approx 0{,}028258$

$$\begin{aligned} P(x \geq 2) &= P(2) + P(3) + P(4) \\ &\approx 0{,}351094 + 0{,}162654 + 0{,}028258 \\ &\approx 0{,}542 \end{aligned}$$

Exemplo: encontrando probabilidades binomiais usando uma tabela

Cerca de 30% dos adultos trabalhadores gastam menos de 15 minutos para ir e voltar ao trabalho. Você seleciona aleatoriamente seis adultos trabalhadores. Qual é a probabilidade de exatamente três deles gastarem menos de 15 minutos indo e voltando do trabalho? Use uma tabela para encontrar a probabilidade. (*Fonte: U.S. Census Bureau*.)



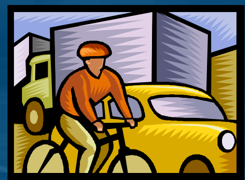
Solução:

Binomial com $n = 6$, $p = 0{,}30$, $x = 3$

Solução: encontrando probabilidades binomiais usando uma tabela

- Uma porção da Tabela 2 é exibida:

		p												
n	*x*	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
2	0	0,980	0,902	0,810	0,723	0,640	0,563	0,490	0,423	0,360	0,303	0,250	0,203	0,160
	1	0,020	0,095	0,180	0,255	0,320	0,375	0,420	0,455	0,480	0,495	0,500	0,495	0,480
	2	0,000	0,002	0,010	0,023	0,040	0,063	0,090	0,123	0,160	0,203	0,250	0,303	0,360
3	0	0,970	0,857	0,729	0,614	0,512	0,422	0,343	0,275	0,216	0,166	0,125	0,091	0,064
	1	0,029	0,135	0,243	0,325	0,384	0,422	0,441	0,444	0,432	0,408	0,375	0,334	0,288
	2	0,000	0,007	0,027	0,057	0,096	0,141	0,189	0,239	0,288	0,334	0,375	0,408	0,432
	3	0,000	0,000	0,001	0,003	0,008	0,016	0,027	0,043	0,064	0,091	0,125	0,166	0,216
6	0	0,941	0,735	0,531	0,377	0,262	0,178	0,118	0,075	0,047	0,028	0,016	0,008	0,004
	1	0,057	0,232	0,354	0,399	0,393	0,356	0,303	0,244	0,187	0,136	0,094	0,061	0,037
	2	0,001	0,031	0,098	0,176	0,246	0,297	0,324	0,328	0,311	0,278	0,234	0,186	0,138
	3	0,000	0,002	0,015	0,042	0,082	0,132	0,185	0,236	0,276	0,303	0,312	0,303	0,276
	4	0,000	0,000	0,001	0,006	0,015	0,033	0,060	0,095	0,138	0,186	0,234	0,278	0,311
	5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,004	0,010	0,020	0,037	0,061	0,094	0,136	0,187
	6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,008	0,016	0,028	0,047



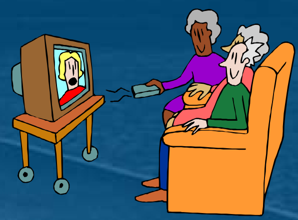
A probabilidade de exatamente três dos seis trabalhadores gastarem menos de 15 minutos indo e voltando do trabalho é de 0,185.

Exemplo: fazendo um gráfico de distribuição binomial

59% dos lares nos EUA são assinantes de TV a cabo. Você seleciona aleatoriamente 6 lares e pergunta se a casa tem TV a cabo. Construa uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória *x*. Depois, faça um gráfico da distribuição. (*Fonte: Kagan Research, LLC.*)

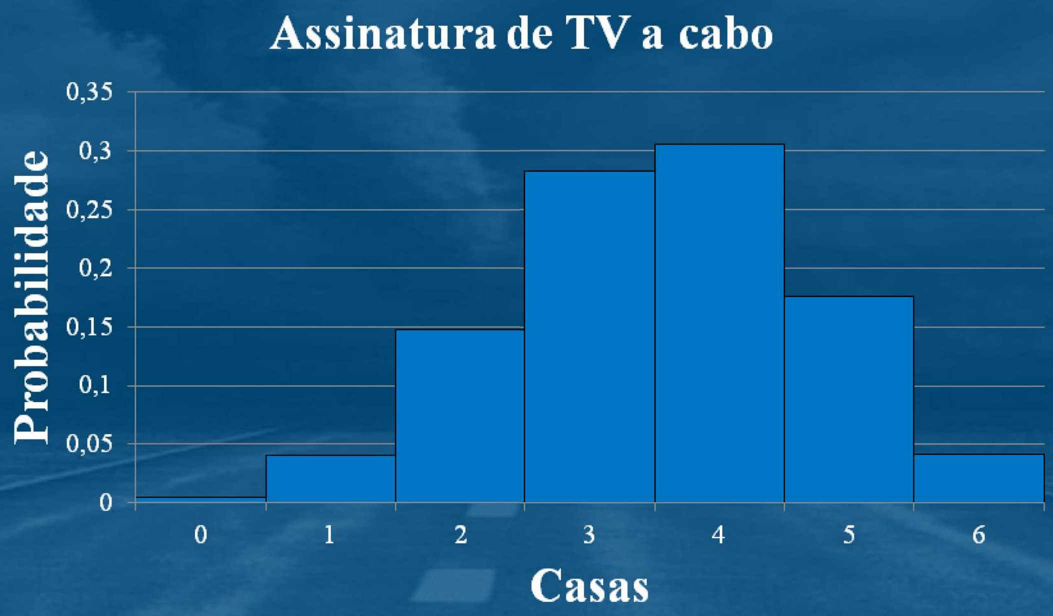
Solução:

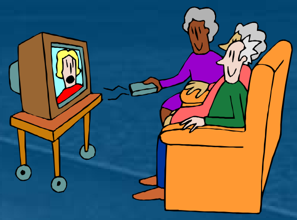
- $n = 6$, $p = 0{,}59$, $q = 0{,}41$
- Encontre a probabilidade para cada valor de x



x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	0,005	0,041	0,148	0,283	0,306	0,176	0,042

Histograma





Média, variância e desvio padrão

- **Média:** $\mu = np$
- **Variância:** $\sigma^2 = npq$
- **Desvio padrão:** $\sigma = \sqrt{npq}$

Exemplo: encontrando a média, variância e desvio padrão

Em Pitsburgo, Pensilvânia, cerca de 56% dos dias em um ano são nublados. Encontre a média, variância e desvio padrão para o número de dias nublados durante o mês de junho. Interprete os resultados e determine quaisquer valores incomuns. (*Fonte: National Climatic Data Center*.)

Solução: $n = 30$, $p = 0{,}56$, $q = 0{,}44$

Média: $\mu = np = 30 \cdot 0{,}56 = 16{,}8$

Variância: $\sigma^2 = npq = 30 \cdot 0{,}56 \cdot 0{,}44 \approx 7{,}4$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{30 \times 0.56 \times 0.44} \approx 2.7$

Solução: encontrando a média, variância e desvio padrão

$\mu = 16{,}8 \quad \sigma^2 \approx 7{,}4 \qquad \sigma \approx 2{,}7$

- Em média, há 16,8 dias nublados no mês de junho
- O desvio padrão é de cerca de 2,7 dias
- Valores maiores de dois desvios padrão da média são considerados incomuns
  - 16,8 – 2(2,7) = 11,4; junho com 11 dias nublados seria incomum
  - 16,8 + 2(2,7) = 22,2; junho com 23 dias nublados seria incomum também