PROBABILIDADE

PROF. ELVIS STANCANELLI

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE QUIXADÁ

23 de agosto de 2024

Conteúdo

Probabilidade é uma medida das chances de que um evento ocorrerá. Esse evento pode se referir a uma simples amostra do nosso conjunto populacional. O artigo de PORTER publicado na página da *Encyclopædia Britannica* aprofunda-se na origem e o significado do ramo do estudo da Probabilidade, esmiuçando os aspectos históricos envolvidos. O artigo destaca a importância da Probabilidade no seguinte contexto (em tradução livre): "O homem pode não ser capaz de atingir o conhecimento perfeito, mas pode saber o suficiente para tomar decisões sobre os problemas da vida diária".

Neste contexto, a aleatoriedade é um conceito essencial, a qual surge quando resultados ocorrem de forma imprevisível ou ao acaso. O livro de MLODINOW, "O Andar do Bêbado", explora muito bem nossos enganos de compreensão da influência do acaso em nossas vidas. A aleatoriedade exerce um papel de suma importância. Capacidade não garante sucesso; sucesso não reflete capacidade.

Para nos aprofundarmos nesse conhecimento sem nos perdermos em abstrações, vamos definir primeiramente o **experimento de probabilidade**.

1 Experimento de Probabilidade

Um **experimento de probabilidade** consiste em uma ação ou tentativa por meio da qual resultados (medições, respostas ou contagens) são obtidos. O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento de probabilidade é o **espaço amostral**, enquanto um **evento** é um subconjunto do espaço amostral. Os eventos são frequentemente representados por letras maiúsculas, como A, B e C. Um evento que consiste em um único resultado é chamado de **evento simples**.

Exemplo 1. Consideremos um experimento probabilístico que consiste em lançar um dado de seis lados. Podemos aqui determinar o número de resultados e construir o espaço amostral. Ao se lançar o dado e aguardar sua parada, o lado voltado para cima determinará o resultado do experimento. Há seis resultados possíveis, os quais podem ser identificados por 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Assim o espaço amostral será dado pelo conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Caso estejamos especialmente interessado no resultado '6'. Isso determinará nosso evento {6}, o qual é simples.

Pode ser que, em alguns casos, não seja fácil delimitar o espaço amostral, sobretudo quando o evento puder ocorrer de diversas maneiras diferentes. Nesses casos, o princípio fundamental da contagem torna-se imprescindível. O princípio fundamental da contagem pode ser usado para encontrar o número de maneiras pelas quais vários eventos podem ocorrer em sequência. O número de maneiras é dado pelo produtório dos números de maneiras pelas quais cada evento pode ocorrer.

Se um evento A pode ocorrer de m maneiras distintas, por exemplo, e um evento B pode ocorrer de n maneiras, o número de maneiras pelas quais os dois eventos podem ocorrer em sequência é mn.

A probabilidade de ocorrência do evento E é escrita como P(E) e é lida como “a probabilidade do evento E”. Probabilidades podem ser escritas como frações, decimais ou porcentagens.

A probabilidade clássica é usada quando cada resultado em um espaço amostral tem a mesma probabilidade de ocorrer, podendo ser calculada como:

$$\boxed{P(E) = \frac{\text{número de resultados no evento E}}{\text{número total de resultados no espaço amostral}}}.$$

Como o evento E é subconjunto do espaço amostral S, fica claro que o valor que representa a probabilidade será entre 0 e 1 (incluindo os extremos).

Com o auxílio dos diagramas de Venn, temos:

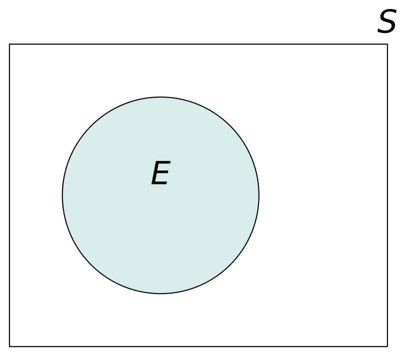


Figura 1: Diagrama de Venn para um evento E no espaço amostral S.

Retomemos então o exemplo do lançamento dos dados, criando alguns exercícios para cálculo de probabilidade.

Exercício 1. Se você lança um dado de seis lados, qual a probabilidade de que o resultado seja 3? Nesse caso, 3 é o único resultado que satisfaz o evento dentre um total de seis resultados possíveis que compõem o espaço amostral. Desse modo, temos $P('3') = 1/6$.

Exercício 2. Se você lança um dado de seis lados, qual a probabilidade de que o resultado seja menor do que 5? Nesse caso, não há um único resultado que satisfaça o evento. '1', '2', '3' e '4' são todos os resultados que satisfazem o evento. Portanto, $P(<' 5') = 4/6 = 2/3$.

<u>Exercício 3</u>. *Se você lança um dado de seis lados, qual a probabilidade de que o resultado seja 7?* Nesse caso, não há qualquer resultado que satisfaça o evento, o que leva para o conjunto vazio: $E = \varnothing$. Portanto, $P('7') = 0/6 = 0$.

Quando um experimento é repetido muitas vezes, padrões regulares podem ser observados. Esses padrões tornam possível encontrar probabilidades empíricas. A probabilidade empírica pode ser usada mesmo que cada resultado de um evento não tenha a mesma probabilidade de ocorrer.

A probabilidade empírica é baseada em observações obtidas em experimentos de probabilidade. A probabilidade empírica de um evento E é calculada como a frequência relativa desse evento E. Ou seja,

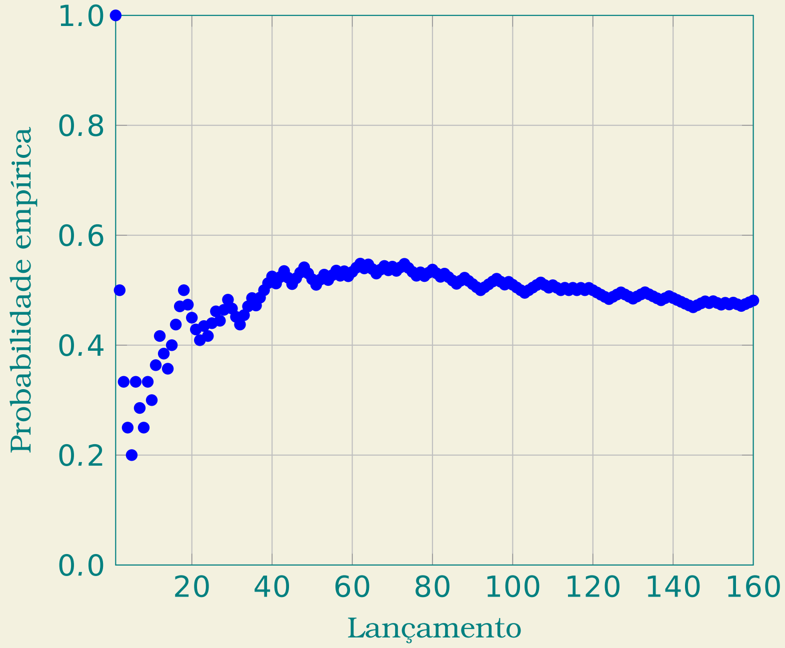
$$\boxed{P(E) = \frac{\text{frequência do evento E}}{\text{frequência total}}}.$$

À medida que se aumenta o número de vezes que um experimento de probabilidade é repetido, a probabilidade empírica se aproxima da probabilidade clássica. O conhecimento desse comportamento assintótico advém da lei dos grandes números.

Exemplo 2. Suponha que queiramos determinar a probabilidade de sair o resultado 'cara' ao lançar uma moeda honesta. Digamos que ao repetir o lançamento da moeda cinco vezes, tenhamos obtido 'cara' duas vezes, resultando portanto em um probabilidade empírica de $^2/_5$, o que, a princípio, pode soar intrigante, visto destoar da probabilidade clássica, que é de $^1/_2$. Como lançamos a moeda poucas vezes, a probabilidade empírica não leva ao mesmo valor da probabilidade clássica. Se lançarmos a moeda mais algumas vezes, essa probabilidade empírica irá se atualizar, mas ainda assim não podemos prever seu valor. Digamos que tenhamos lançado essa moeda mais cinco vezes, após os cinco primeiros lançamentos. Pode até ser que aconteça, mas não há nada que nos assegure que agora teremos 'cara' exatamente mais três vezes. Se, no entanto, lançarmos a moeda centenas ou mesmo milhares de vezes, então, pela lei dos grandes números, a probabilidade empírica deverá levar a um valor muito próxima ao da probabilidade clássica. Tão somente para facilitar a visualização, representamos cada ocorrência de cara com "1" e a de coroa com "0". Digamos que tenhamos lançado essa moeda 160 vezes, desse modo gerando a seguinte sequência de resultados:

10000100101100111100001011011000111011110110011100
01101101011101001101011000101100100011000011110010
00011110010010101010000011100011100001100000011101
00101001110010001010111101100111101100111100110111

O gráfico de dispersão mostra a probabilidade empírica calculada a cada lançamento. À medida que o número de lançamentos aumenta, a probabilidade de lançar cara fica cada vez mais próxima da probabilidade teórica de $^1/_2$.



2 Eventos Complementares

A soma das probabilidades de todos os resultados em um espaço amostral é unitária. Um resultado importante disso é que se nós conhecemos a probabilidade de um evento E, você pode encontrar a probabilidade do complemento do evento E. O complemento do evento E é o conjunto de todos os resultados num espaço amostral que não estão incluídos no evento E. O complemento do evento E é denotado por E'. Se o evento E compreende um número $|E|$ de resultados, seu evento complementar, E', compreenderá os resultados $|S|-|E|$ resultados complementares. Portanto, $P(E') = 1 - P(E)$.

Em termos de diagrama de Venn:

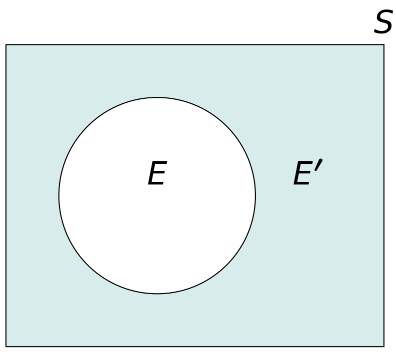
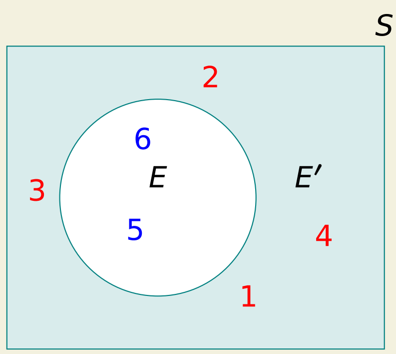


Figura 2: Diagrama de Venn para o evento E e seu complemento E' no espaço amostral S.

Exemplo 3. Se lançarmos um dado e E for o evento "o resultado é pelo menos 5", então o complemento de E é o evento "o resultado é menor que 5". Desse modo, teremos o seguinte diagrama de Venn:



Destarte, respectivamente, as cardinalidades do evento e do evento complementar, são $|E| = 2$ e $|E'| = 4$, levando às probabilidades $2/5$ e $3/5$, que se somadas resultam em 1, sendo $|\cdot|$ o operador cardinalidade.

Jogos de baralhos são bastantes ilustrativos para explorarmos as probabilidades. Consideraremos um jogo de baralho simples composto por 52 cartas distintas, sendo 13 valores diferentes $('A','J','Q','K','2','3','4',\cdots,'10')$, cada um desses apresentado em quatro cartas com naipes diferentes $(\diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit)$.

Dessarte, o espaço amostral do jogo de baralho simples será:

$A\diamondsuit$	$2\diamondsuit$	$3\diamondsuit$	$4\diamondsuit$	$5\diamondsuit$	$6\diamondsuit$	$7\diamondsuit$	$8\diamondsuit$	$9\diamondsuit$	$10\diamondsuit$	$J\diamondsuit$	$Q\diamondsuit$	$K\diamondsuit$
$A\spadesuit$	$2\spadesuit$	$3\spadesuit$	$4\spadesuit$	$5\spadesuit$	$6\spadesuit$	$7\spadesuit$	$8\spadesuit$	$9\spadesuit$	$10\spadesuit$	$J\spadesuit$	$Q\spadesuit$	$K\spadesuit$
$A\heartsuit$	$2\heartsuit$	$3\heartsuit$	$4\heartsuit$	$5\heartsuit$	$6\heartsuit$	$7\heartsuit$	$8\heartsuit$	$9\heartsuit$	$10\heartsuit$	$J\heartsuit$	$Q\heartsuit$	$K\heartsuit$
$A\clubsuit$	$2\clubsuit$	$3\clubsuit$	$4\clubsuit$	$5\clubsuit$	$6\clubsuit$	$7\clubsuit$	$8\clubsuit$	$9\clubsuit$	$10\clubsuit$	$J\clubsuit$	$Q\clubsuit$	$K\clubsuit$

Agora podemos explorar alguns exemplos de obtenção de probabilidade relacionada a esse jogo de baralho simples. Em particular, o primeiro desses exemplos, Exemplo 4, trata de um evento simples.

Exemplo 4. Uma carta é extraída ao acaso de um baralho simples de 52. Qual a probabilidade de ocorrer dama de copas, $'Q\heartsuit'$? Aqui podemos recorrer à probabilidade clássica. O espaço amostral já é sabido conter 52 elementos. Sabendo que todas as cartas são distintas e únicas, o evento é contém um único elemento. Desse modo: $P('Q\heartsuit') = 1/52$.

Tanto o Exemplo 5 como o Exemplo 6 lidam com eventos não simples.

Exemplo 5. Uma carta é extraída ao acaso de um baralho simples de 52. Qual a probabilidade de ocorrer dama, $'Q'$? Do que já exploramos no exemplo anterior, aqui muda apenas o conjunto evento. Sabendo que o mesmo valor de carta está presente com cada um dos quatro naipes, o evento é composto por um quatro elementos. Desse modo: $P('Q') = 4/52 = 1/13$.

Exemplo 6. Uma carta é extraída ao acaso de um baralho simples de 52. Qual a probabilidade de ocorrer o naipe de copas, $'\heartsuit'$? Novamente, aqui muda apenas o conjunto evento. Sabendo que o um certo naipe está presente em cada uma dos valores das cartas, o evento é composto por um treze elementos. Desse modo: $P('\heartsuit') = 13/52 = 1/4$.

3 Probabilidade Condicional

Agora veremos como calcular a probabilidade de um evento ocorrer como consequência de outro. Uma probabilidade condicional é a probabilidade de um evento ocorrer, dado que um outro evento já ocorreu. A probabilidade condicional de ocorrência do evento B, dado que o evento A ocorreu, é denotada por $P(B|A)$ e lida como "probabilidade de B, dado A".

Em outras palavras: dado que o evento A ocorreu, qual a probabilidade do evento B ocorrer?

Ou seja, podemos primeiramente nos focar o subconjunto que define o evento A, e dentro deste subconjunto avaliamos a probabilidade de ocorrer B.

Em alguns experimentos, um evento não afeta a probabilidade de outro. Por exemplo, se você lançar um dado e uma moeda, observando um evento A de o resultado do dado ser '5' e outro evento B de a moeda resultar em 'cara'. O resultado do lançamento do dado em nada afeta a probabilidade de a moeda resultar em cara ou em coroa. Esses dois eventos A e B são independentes. Desse modo, podemos usar probabilidades condicionais para determinar se os eventos são independentes.

Para determinar se A e B são eventos independentes, primeiro calculamos a probabilidade de o evento B ocorrer. Em seguida, calculamos a probabilidade de B ocorrer, dada a ocorrência de A. Se os valores dessas duas probabilidades forem iguais, os eventos são **independentes**:

$$P(B|A) = P(B)$$

ou

$$P(A|B) = P(A).$$

Senão, então dizemos que os eventos A e B são **dependentes**, visto que a ocorrência de um afeta a probabilidade de ocorrência do outro.

Em termos de diagrama de Venn, podemos ilustrar um caso hipotético de dois eventos dependentes A e B na Figura 3.

Retomemos os jogos de baralhos para explorar algumas probabilidades condicionais.

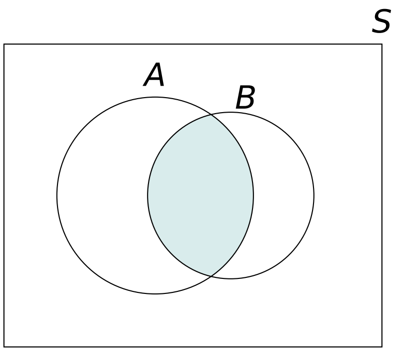


Figura 3: Diagrama de Venn para dois eventos dependentes A e B no espaço amostral S.

Exemplo 7. De um jogo de baralho simples de 52 cartas, duas cartas são extraídas ao acaso, em sequência. As cartas não são devolvidas ao baralho. Dado que a primeira carta já foi retirada, sendo um ás de espadas, $'A\spadesuit'$, qual a probabilidade de ocorrer uma dama de copas, $'Q\heartsuit'$, para a próxima carta retirada? Note que estamos preocupados aqui com as chances para a segunda carta retirada, visto que a primeira já foi retirada, é conhecida e não foi reposta. Nessa condição, não estamos mais interessado em todo o espaço amostral, mas sim em um subconjunto deste, o qual contém todas as cartas exceto $'A\spadesuit'$, visto não estar mais disponível. Portanto, esse subconjunto de $|S|$ contém 51 elementos. O evento é dado por uma carta única. Desse modo, $P('Q\heartsuit'|'A\spadesuit') = 1/51$.

Exemplo 8. Novamente, de um jogo de baralho simples de 52 cartas, duas cartas são extraídas ao acaso, em sequência. As cartas não são devolvidas ao baralho. Dado que a primeira carta já foi retirada, sendo um ás de espadas, $'A\spadesuit'$, qual a probabilidade de ocorrer um outro ás qualquer, $'A'$, para a próxima carta retirada? Note que estamos preocupados aqui com as chances para a segunda carta retirada, visto que a primeira já foi retirada, é conhecida e não foi reposta. Nessa condição, não estamos mais interessado em todo o espaço amostral, mas sim em um subconjunto deste, o qual contém todas as cartas exceto $'A\spadesuit'$, visto não estar mais disponível. Portanto, esse subconjunto de $|S|$ contém 51 elementos. O evento é dado composto agora pelos três ases remanescentes. Desse modo, $P('A'|'A\spadesuit') = 3/51$.

Apesar de a independência de eventos poder ser vista como uma situação muito particular, há inúmeras maneiras de se recair nessa situação. A mais ilustrativa dela talvez seja o caso em que o evento B coincida perfeitamente com o espaço amostral. Desse modo, $P(A) = \frac{|A|}{|S|} = P(A|B) = \frac{|A|}{|B|}$. Na Figura 4 temos a representação dessa situação em termos de diagrama de Venn.

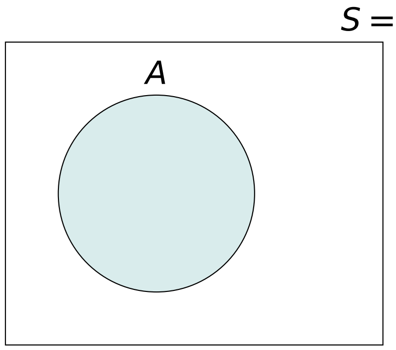


Figura 4: Diagrama de Venn para dois eventos independentes A e B no espaço amostral S.

Mesmo antes de tudo isso, se já sabemos que $P(B|A) = 0$ ou $P(A|B) = 0$, podemos dizer que A e B são eventos mutuamente exclusivos. Isso significa que nenhum resultado contido em A também esteja contido em B, e vice-versa.

4 Regra da Multiplicação

A probabilidade da ocorrência de dois eventos é dada por:

$$P(A \text{ e } B) = \frac{|A \text{ e } B|}{|S|} = P(A)P(B|A)$$

Em termos de diagrama de Venn, podemos nos referenciar novamente ao caso de dois eventos A e B dependentes Exemplo

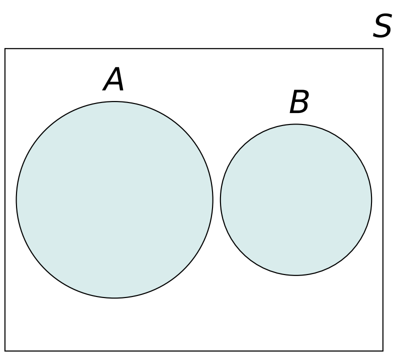


Figura 5: Diagrama de Venn para dois eventos mutuamente exclusivos A e B no espaço amostral S.

3. A área colorida destaca os resultados que sejam comuns aos dois eventos, referindo-se à cardinalidade da intersecção A e B.

No caso particular de que os eventos sejam independentes, isso se simplifica como:

$$P(A \text{ e } B) = P(A)P(B).$$

Esta regra simplificada pode ser estendida para qualquer número de eventos independentes.

Caso os eventos sejam mutuamente exclusivos:

$$P(A \text{ e } B) = 0.$$

Retomemos novamente os jogos de baralhos.

Exemplo 9. De um jogo de baralho simples de 52 cartas, duas cartas são extraídas ao acaso, em sequência. As cartas não são devolvidas ao baralho. Qual a probabilidade de ocorrer um ás de espadas, $'A\spadesuit'$, e uma dama de copas, $'Q\heartsuit'$? Preocupados inicialmente com o primeiro evento diante de um jogo de baralho completo, temos que $P('A\spadesuit') = 1/52'$ tal como já discutimos no Exemplo 4. Em seguida, como no Exemplo 7, temos que $P('Q\heartsuit'|'A\spadesuit') = 1/51$. Portanto, $P('A\spadesuit' \text{ e } 'Q\heartsuit') = P('A\spadesuit')P('Q\heartsuit'|'A\spadesuit')$.

5 Regra da Adição

A probabilidade da ocorrência de ao menos um de dois eventos é dada por:

$$P(A \text{ ou } B) = \frac{|A \text{ ou } B|}{|S|} = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B).$$

Na representação dos diagramas de Venn, a união dos dois eventos está destacada:

Caso os eventos sejam mutuamente exclusivos:

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B).$$

Esta regra simplificada pode ser estendida para qualquer número de eventos mutuamente exclusivos.

Retomemos novamente os jogos de baralhos.

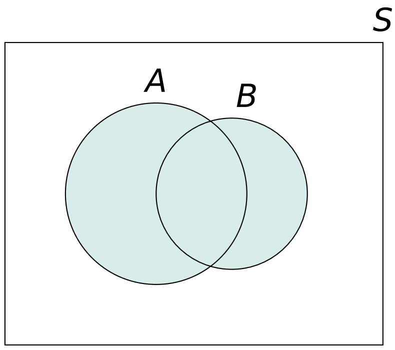


Figura 6: Diagrama de Venn representando a união de dois eventos A e B no espaço amostral S.

Exemplo 10. De um jogo de baralho simples de 52 cartas, uma carta é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de ocorrer um ás de espadas, $'A\spadesuit'$, ou uma dama de copas, $'Q\heartsuit'$? Podemos enxergar isso como dois eventos, os quais são mutuamente exclusivos, uma vez que nenhuma carta satisfará ambos. Aqui temos todo o espaço amostral à disposição, com seus 52 elementos. Desse modo: $P('A\spadesuit'$ ou $'Q\heartsuit') = P('A\spadesuit') + P('Q\heartsuit') = 2/52 = 1/26$.

Exemplo 11. De um jogo de baralho simples de 52 cartas, uma carta é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de ocorrer um ás, $'A'$, ou um naipe de espadas, $'\spadesuit'$? Notem que agora, os dois eventos não são mutuamente exclusivos, uma vez que existe uma carta que satisfaz ambos. Desse modo: $P('A'$ ou $'\spadesuit') = P('A') + P('\spadesuit') - P('A\spadesuit') = 4/52 + 4/52 - 1/52 = 7/52$.

6 Tópicos Adicionais

6.1 Fórmulas Básicas de Análise Combinatória

Uma permutação é um arranjo ordenado de objetos. O número de permutações diferentes de n objetos distintos é $n!$.

Já, o número de permutações de n objetos distintos tomados r por vez é

$$\boxed{{}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

em que $r \leq n$.

Agora sem levar em conta a ordem dos objetos, o número de maneiras de escolher r objetos dentre n é chamado de número de combinações de n objetos tomados r de cada vez:

$$\boxed{{}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}}$$

6.2 Lei da Probabilidade Total

Se $\{B_1, B_2, \cdots, B_N\}$ é uma partição[1] finita ou infinita contável de um espaço amostral, então, para qualquer evento A do mesmo espaço amostral:

$$\boxed{P(A) = \sum_n P(A \text{ e } B_n)}.$$

Com base no que já conhecemos da regra de multiplicação, poderemos reescrever essa probabilidade como:

$$P(A) = \sum_n P(A|B_n)P(B_n).$$

6.3 Teorema de Bayes

Visto que $P(A \text{ e } B) = P(B \text{ e } A)$, podemos reescrever:

$$P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

E desse modo, desde que $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$, podemos inter-relacionar as duas probabilidade condicionais:

$$\boxed{P(B|A) = P(A|B)\frac{P(B)}{P(A)}}.$$

.

Se obtermos uma partição de B, podemos lidar de forma similar com um elemento B_i.

$$P(B_i|A) = P(A|B_i)\frac{P(B_i)}{P(A)}.$$

Esta equação pode ser reescrita aproveitando-se agora da lei

[1] Em se tratando de uma partição, três condições são satisfeitas: (i) $B_n \neq \varnothing$ para $n = 1, 2, \cdots, N$; (ii) $\bigcup_n B_n = B$; (iii) $B_m \cap B_n = \varnothing$ para $m \neq n$.

da probabilidade total:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_n P(A|B_n)P(B_n)}.$$

7 Referência bibliográfica

1. LARSON, Ron; FARBER, Betsy. Estatística aplicada. 4. ed. São Paulo, SP: Pearson/ Prentice Hall, 2010. xiv,637 p. ISBN 9788576053729

2. MLODINOW, Leonard. O andar do bêbado: Como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009. ISBN 9788537801550

3. PORTER, Theodore M.. "probability and statistics". Encyclopædia Britannica, 24 Jan. 2024, https://www.britannica.com/science/probability. Acessado em 31 Jan. 2024.