Sala: 2103 **Octombrie 2014**

CURS 4: ALGEBRĂ

Conf. univ. dr.: Dragoş-Pătru Covei *Specializarea: C.E., I.E., S.P.E.*

4.1 Suma şi intersecţia a două subspaţii vectoriale

Amintim următorul rezultat:

Teoremă 4.1.1 *Dacă* (V, K) *este spaţiu vectorial iar* V_1, V_2 *sunt subspaţii vectoriale în* V *atunci*

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 &= \{v \in V \mid v \in V_1 \text{ şi } v \in V_2\} \\ V_1 + V_2 &= \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1 \text{ şi } v_2 \in V_2\} \\ &= \{v \in V \mid \exists v_1 \in V_1 \text{ şi } \exists v_2 \in V_2 \text{ astfel încât } v = v_1 + v_2\} \end{aligned}$$

sunt subspaţii vectoriale ale lui V*.*

Remarcă 4.1.1 $V_1 \cap V_2$ *este numit subspaţiul vectorial intersecţie iar* $V_1 + V_2$ *este numit subspaţiul vectorial sumă.*

4.2 Teorema lui Hermann Günther Grassmann (1809–1877)

Teoremă 4.2.1 *Dacă* (V, K) *este spaţiu vectorial cu* $\dim_K V \in \mathbb{N}^*$ *iar* V_1, V_2 *sunt subspaţii vectoriale în* V *atunci*

$$\dim_K (V_1 + V_2) - \dim_K V_2 = \dim_K V_1 - \dim_K (V_1 \cap V_2).$$

Demonstraţie. Fie $B_{V_1 \cap V_2} = \{v_1, ..., v_m\}$ bază în $V_1 \cap V_2$. Dacă extindem această bază la

$$B_{V_1} = \{v_1, ..., v_m, u_{m+1}, ..., u_r\} \overset{bază}{\subset} V_1 \text{ şi } B_{V_2} = \{v_1, ..., v_m, w_{m+1}, ..., w_s\} \overset{bază}{\subset} V_2$$

atunci

$$S = \{v_1, ..., v_m, u_{m+1}, ..., u_r, w_{m+1}, ..., w_s\}$$

este sistem de generatori pentru $V_1 + V_2$. Arătăm că S este liniar independent. Realizăm o combinaţie liniară, egală cu vectorul nul

$$0_V = \Sigma_{i=1}^m a_i v_i + \Sigma_{j=m+1}^r b_j u_j + \Sigma_{k=r+1}^s c_k w_k.$$

Rezultă că v definit prin

$$v = \underbrace{\Sigma_{i=1}^m a_i v_i + \Sigma_{j=m+1}^r b_j u_j}_{\in V_1} = \underbrace{-\Sigma_{k=r+1}^s c_k w_k}_{\in V_2}$$

este un vector din $V_1 \cap V_2$ şi $b_j = 0$ $(j = m + 1, ..., r)$ deoarece B_{V_1} este liniar independent. Mai mult

$$0_V = \Sigma_{i=1}^m a_i v_i + \Sigma_{k=r+1}^s c_k w_k$$

iar deoarece B_{V2} este liniar independent deducem că $a_i = c_k = 0$. Aşadar

$$\dim_K (V_1 + V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2 - \dim_K (V_1 \cap V_2).$$

■

4.3 Sumă directă de subspaţii vectoriale

Definiţie 4.3.1 *Fie (V, K) spaţiu vectorial. Spunem că suma $V_1 + V_2$ a subspaţiilor vectoriale V_1, V_2 din spaţiul vectorial V este directă, dacă oricare ar fi $v \in V_1 + V_2$ există $v_1 \in V_1$ şi $v_2 \in V_2$ unici, astfel încât $v = v_1 + v_2$. Notăm această situaţie prin $V_1 \oplus V_2$. Aşadar*

$$V_1 \oplus V_2 = \{ v \in V \,|\, \exists! v_1 \in V_1 \text{ şi } \exists! v_2 \in V_2 \text{ astfel încât } v = v_1 + v_2 \}.$$

Teoremă 4.3.1 *Fie (V, K) spaţiu vectorial. Dacă V_1, V_2 sunt subspaţii vectoriale în V atunci suma $V_1 + V_2$ este directă dacă şi numai dacă $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.*

Demonstraţie. "$\subset$" Presupunem $v \in V_1 \cap V_2$. Atunci

$$v = \underset{\in V_1}{v} + 0_V = 0_V + \underset{\in V_2}{v}$$

iar ţinând cont că scrierea lui v este unică, deducem că $v = 0_V$.

"$\supset$" Dacă $v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$ pentru $v_1, v_2 \in V_1$ iar $v_1', v_2' \in V_2$ atunci $\underbrace{v_1 - v_1'}_{\in V_1} = \underbrace{v_2' - v_2}_{\in V_2}$. Aşadar

$$\underset{\text{deoarece } v_1 - v_1' \in V_1 \cap V_2 = \{0_V\}}{v_1 = v_1'} \quad \text{şi} \quad \underset{\text{deoarece } v_2 - v_2' \in V_1 \cap V_2 = \{0_V\}}{v_2 = v_2'}$$

adică reprezentarea ca sumă este unică. ∎

Remarcă 4.3.1 *Dacă (V, K) este spaţiu vectorial cu $\dim_K V \in \mathbb{N}^*$ iar V_1, V_2 sunt subspaţii vectoriale în V astfel încât suma $V_1 + V_2$ este directă, atunci*

$$\dim_K (V_1 + V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2.$$

Demonstraţie. Deoarece $\dim_K (V_1 \cap V_2) = 0$ rezultatul este o consecinţă a Teoremei 4.2.1. ∎

4.4 Teorema de caracterizare a sumei directe

Definiţie 4.4.1 *Fie V_1, V_2, ... , V_m subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial de tip finit (V, K). Spunem că V este sumă directă de V_1, V_2, ... , V_m şi scriem $V = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} V_i$ sau $V = V_1 \oplus ... \oplus V_m$ dacă orice vector din V se scrie în mod unic ca o sumă de vectori din V_1, V_2, ... , V_m. În această situaţie se mai spune că subspaţiile vectoriale V_1, V_2, ... , V_m sunt suplimentare.*

Dăm următoarea caracterizare a sumei directe.

Teoremă 4.4.1 *Fie (V, K) spaţiu vectorial de dimensiune finită. Următoarele sunt echivalente*

i) $V = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} V_i$.

ii) $V = V_1 + ... + V_m = \Sigma_{i=1}^m V_i$ *şi* $V_i \cap \left(\Sigma_{j=1, j \neq i}^m V_j \right) = \{0_V\}$ $\forall i = 1, ..., m$.

iii) $V = \Sigma_{i=1}^m V_i$ *şi* $\dim_K V = \dim_K V_1 + ... + \dim_K V_m = \Sigma_{i=1}^m \dim_K V_i$.

4.5 Teorema de existenţă a suplimentului

Teoremă 4.5.1 *Fie (V, K) spaţiu vectorial cu $\dim_K V = n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $X \subset V$ este subspaţiu vectorial în V atunci există $Y \subset V$ subspaţiu vectorial astfel încât $V = X \oplus Y$.*

Demonstraţie. Fie $p = \dim_K X \leq n$ şi $B_X = \{b_1, ..., b_p\}$ o bază a lui X. Cum $\dim_K V = n$ putem completa B_X până la o bază B_V a lui V, astfel

$$B_V = \{b_1, ..., b_p, g_1, ..., g_{n-p}\}.$$

Demonstrăm că $Y = Span\{g_1, ..., g_{n-p}\}$ are proprietatea că $V = X \oplus Y$. Evident

$$X + Y \subset V. \tag{4.5.1}$$

Pe de altă parte

$$\forall v \in V,\, v = \underbrace{\Sigma_{i=1}^{p} \alpha_i b_i}_{x \in X} + \underbrace{\Sigma_{i=1}^{n-p} \beta_i g_i}_{y \in Y} = x + y \in X + Y \Longrightarrow V \subset X + Y. \tag{4.5.2}$$

Relaţiile (4.5.1) şi (4.5.2) implică

$$V = X + Y. \tag{4.5.3}$$

Mai mult, observăm că

$$\dim_K X + \dim_K Y = p + (n - p) = n = \dim_K V = n. \tag{4.5.4}$$

În final (4.5.3) şi (4.5.4) arată că este aplicabil punctul iii) al Teoremei 4.5.1 şi deci $V = X \oplus Y$. ∎

4.6 Exemple de operatori liniari

Exemplul 4.6.1 *Fie (V, K) spaţiu vectorial.*

1) Aplicaţia $1_V : V \to V$ definită prin $1_V(x) = x$ pentru orice $x \in V$ este un operator liniar, numit operatorul identic.

2) Dacă V_1, V_2 sunt subspaţii vectoriale în V atunci aplicaţia $O : V_1 \to V_2$ definită prin $O(x) = 0_{V_2}$ pentru orice $x \in V_1$ este un operator liniar, numit operatorul nul.

3) Notăm cu $C^1_{[a,b]}$ mulţimea tuturor funcţiilor $f(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile pe $[a, b]$ cu derivata continuă. Aplicaţia

$$D : C^1_{[a,b]} \to C^0_{[a,b]},\; D(f) = f'$$

este un operator liniar numit operator de derivare.

4) Notăm cu $C^0_{[a,b]}$ mulţimea tuturor funcţiilor $f(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue pe $[a, b]$. Aplicaţia

$$I : C^0_{[a,b]} \to C^1_{[a,b]},\; I(f) = \int_a^x f(t)\, dt,\;\; x \in [a, b]$$

este un operator liniar numit operatorul de integrare.

4.7 Proprietăţi ale operatorilor liniari

Teoremă 4.7.1 *Fie (V_1, K) şi (V_2, K) spaţii vectoriale iar $f : V_1 \to V_2$ operator liniar. Următoarele au loc*

i) $f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$.

ii) $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in V_1$.

iii) $f\left(\Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) = \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i)$, $\alpha_i \in K$, $x_i \in V_1$ *cu* $i = 1, ..., m$.

iv) *Dacă* X *este subspaţiu vectorial în* V_1 *atunci* $f(X)$ *este subspaţiu vectorial în* V_2.

4.8 Operaţii cu operatori liniari. Operator invers

Teoremă 4.8.1 *Fie* (V_1, K) *şi* (V_2, K) *spaţii vectoriale. Dacă pe mulţimea* $L_K(V_1, V_2)$ *considerăm operaţiile*

$$\begin{array}{ll} i) & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ ii) & (\alpha f)\, x = \alpha f(x) \end{array}$$

unde $f(x), g(x) \in L_K(V_1, V_2)$ *iar* $\alpha \in K$, *atunci* $(L_K(V_1, V_2), K)$ *are o structură de spaţiu vectorial în raport cu operaţiile definite.*

Definiţie 4.8.1 *Fie* (V_1, K), (V_2, K) *şi* (V_3, K) *spaţii vectoriale. Dacă* $f : V_1 \to V_2$ *şi* $g : V_2 \to V_3$ *sunt operatori liniari atunci aplicaţia*

$$(g \circ f)(\cdot) : V_1 \to V_3 \text{ definită prin } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru } x \in V_1$$

se numeşte produsul (sau compunerea) operatorilor liniari f, g.

Remarcă 4.8.1 *Fie* (V_1, K), (V_2, K) *şi* (V_3, K) *spaţii vectoriale. Dacă* $f : V_1 \to V_2$ *şi* $g : V_2 \to V_1$ *sunt operatori liniari atunci* $(g \circ f)(\cdot) : V_1 \to V_3$ *este operator liniar.*

Definiţie 4.8.2 *Fie* (V_1, K) *şi* (V_2, K) *spaţii vectoriale. Operatorul liniar* $f : V_1 \to V_2$ *se numeşte inversabil dacă există un operator* $g : V_2 \to V_1$ *astfel încât* $(g \circ f)(x) = x\ \forall x \in V_1$ *şi* $(f \circ g)(y) = y\ \forall y \in V_2$. *Dacă există* g *îndeplinind aceste condiţii atunci se notează cu* f^{-1} *şi se numeşte inversul operatorului liniar* f.

Teoremă 4.8.2 *Fie* (V_1, K) *şi* (V_2, K) *spaţii vectoriale. Operatorul liniar* $f : V_1 \to V_2$ *este inversabil dacă şi numai dacă este bijectiv.*