

# **Вычислительная геометрия и алгоритмы компьютерной графики**

## ***Лекция №6: Кривые и поверхности***

к.ф.-м.н.  
Рябинин Константин Валентинович

e-mail: [kostya.ryabinin@gmail.com](mailto:kostya.ryabinin@gmail.com)

Пермь, 2016

**Подавляющее большинство моделей в мультимедийных системах загружается из внешних файлов**

- Как минимум в файле хранятся координаты вершин и данные о смежности вершин (рёбра)
- Как правило рёбра задаются неявно в виде списка обхода вершин, предполагая, что все вершины образуют  $n$ -угольники, где  $n = \text{const}$ , чаще всего  $n = 3$ 
  - Экономия памяти: не хранятся дублирующиеся вершины
- Как правило хранятся текстурные координаты
- Могут храниться нормали, но это не обязательно, так как нормали можно вычислить на основании сглаживающих групп
- Могут храниться данные об анимации
- Возможна дополнительная информация

- **Анимация по ключевым кадрам**
  - Хранится множество состояний модели в разные моменты времени
  - В каждом конкретном кадре программа должна осуществлять интерполяцию соседних состояний
- **Скелетная анимация**
  - Помимо поверхности модели хранится её «скелет» – древовидная структура «костей» (отрезков прямых), расположенных внутри поверхности
  - Кости подвижны в рамках присвоенных сочленениям ограничений
  - Каждая вершина поверхности имеет список действующих на неё костей (возможно, с весом) и сохраняет своё положение относительно них
  - Таким образом движения костей приводит к движению соответствующих групп вершин

**При использовании скелетной анимации необходимо организовать распространение движения по иерархии костей:**

- **Прямая кинематика – при движении родительской кости двигаются и все её кости-потомки в рамках введённых ограничений на сочленения**
- **Инверсная кинематика – при движении кости-потомка двигаются и его родительские кости, если того требуют ограничения, введённые на сочленения**

## ● STL

- Только поверхность
- Перечисляются многоугольники (**дублирование вершин**) с нормальями к ним
- Текстовый либо бинарный способ хранения

## ● 3DS

- Бинарный способ хранения на основе фрагментов (chunks)
- Предназначен для описания целых трёхмерных сцен (**без дублирования вершин**), с камерами, источниками света и анимацией на базе ключевых кадров
- Для трёхмерных моделей определяет полный набор свойств материала (предполагает даже имена файлов с текстурами)
- Предполагает хранение списков вершин, образующих сглаживающие группы, но **не содержит самих нормалей**

## ● OBJ

- Более популярен, чем 3DS
- Текстовый либо бинарный способ хранения
- Предполагает описание вершин, нормалей к ним и свойств материала, связанных с ними
- Материалы могут описываться в других файлах, на которые указываются ссылки
- Хранятся имена файлов с текстурами
- **Отсутствуют данные об анимации**

## ● MD2

- Бинарный способ хранения на основе блоков фиксированного размера
- Хранит **21 анимационную последовательность** на основе ключевых кадров
- Хранит списки вершин, текстурные координаты и нормали к ним
- Развитие формата – спецификации MD3, MD4 и MD5

- **BLEND**
  - Дамп памяти программы Blender
  - Не рекомендуется использовать внутренние форматы редакторов для извлечения из них моделей в своей программе!

- Часто возникает задача построить кривую по множеству известных заранее контрольных точек
- Такая кривая не имеет аналитического описания и является результатом интерполяции функции по таблице значений
- Важные задачи:
  - Сохранение непрерывности и гладкости кривой
  - Управление кривизной
- Решение задачи осуществляется при помощи аппарата численных методов
- На основе кривой может быть получена **поверхность** либо **тело вращения**



1.



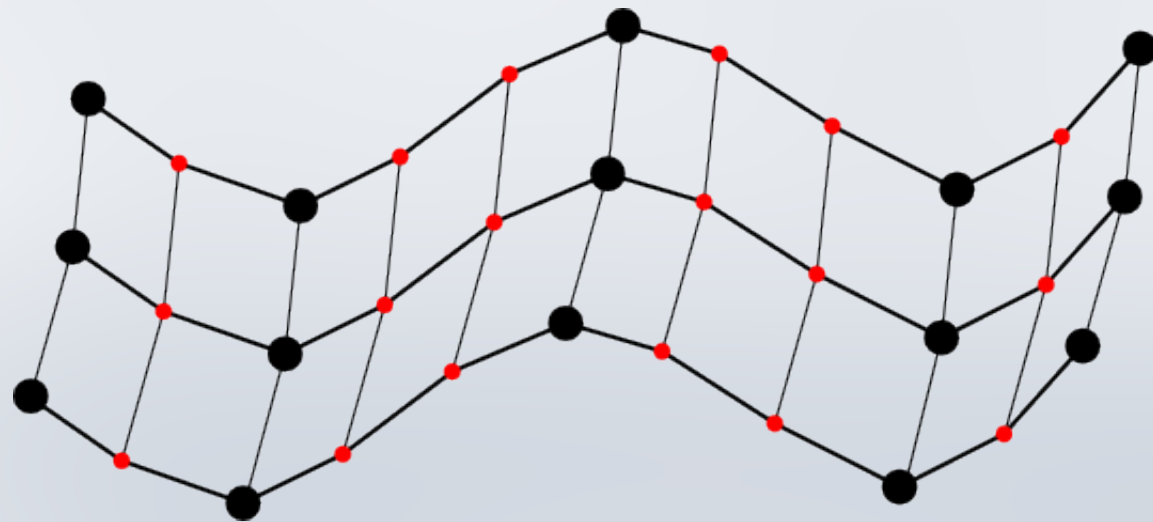
2.



3.



4.



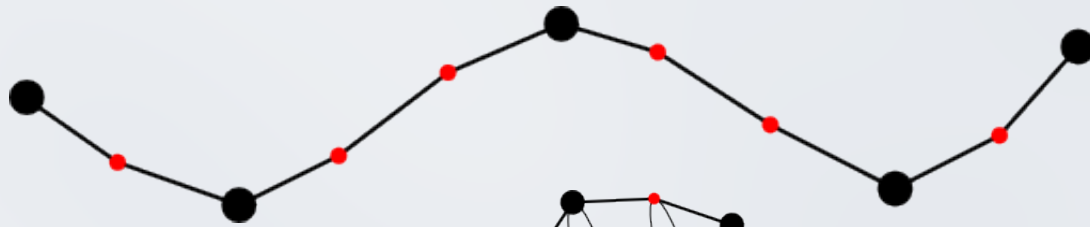
1.



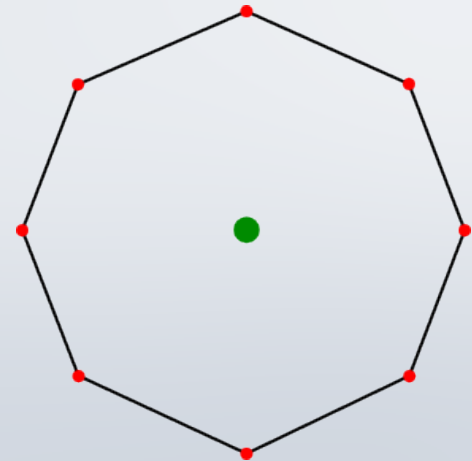
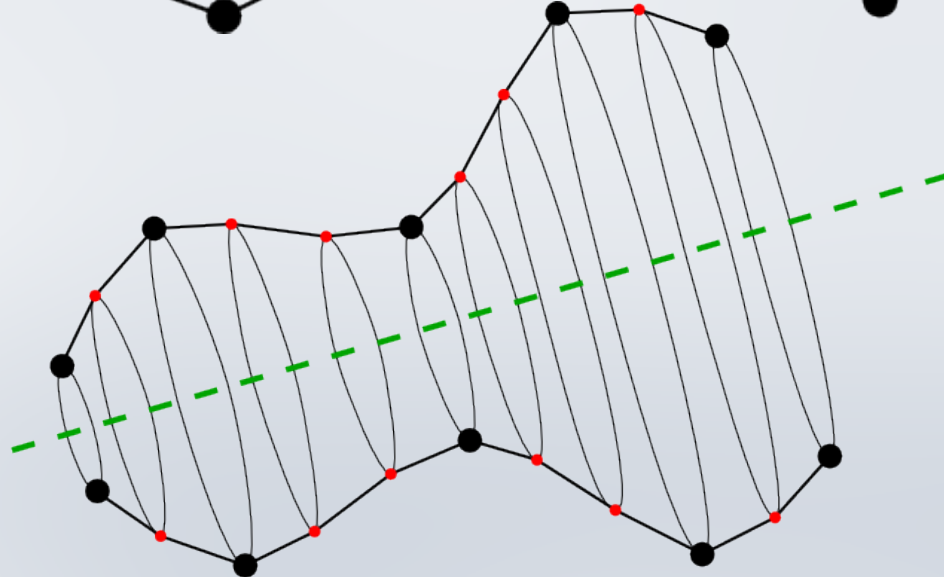
2.



3.



4.



**Нормали к полученным поверхностям могут быть определены**

- Аналитически,  
однако зачастую это достаточно трудоёмко
- При помощи алгоритма сглаживающих групп

Пусть  $f(x)$  задана на  $[a; b]$ , разбитом на  $[x_{i-1}; x_i]$ .

**Кубический сплайн дефекта 1** – это функция  $S(x)$ , которая

- на каждом отрезке  $[x_{i-1}; x_i]$  является многочленом не выше третьей степени
  - имеет непрерывные первую и вторую производные на всём отрезке  $[a; b]$
  - в точках  $x_i$  выполняется равенство
$$S(x_i) = f(x_i)$$
- Для однозначного задания сплайна перечисленных условий не достаточно

**Естественный кубический сплайн дефекта 1**  
– это кубический сплайн, удовлетворяющий  
граничным условиям

$$S''(a) = S''(b) = 0$$

→ Для любой функции  $f$  и любого разбиения отрезка  $[a; b]$  существует один и только один естественный кубический сплайн дефекта 1  $S(x)$

На отрезке  $[x_{i-1}; x_i]$  функция  $S(x)$  допускает запись вида

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

тогда

$$S_i(x_i) = a_i, \quad S'_i(x_i) = b_i, \quad S''_i(x_i) = c_i$$

Условия непрерывности производных до второго порядка включительно имеют вид

$$S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i)$$

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i)$$

$$S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i)$$

Условие интерполяции имеет вид

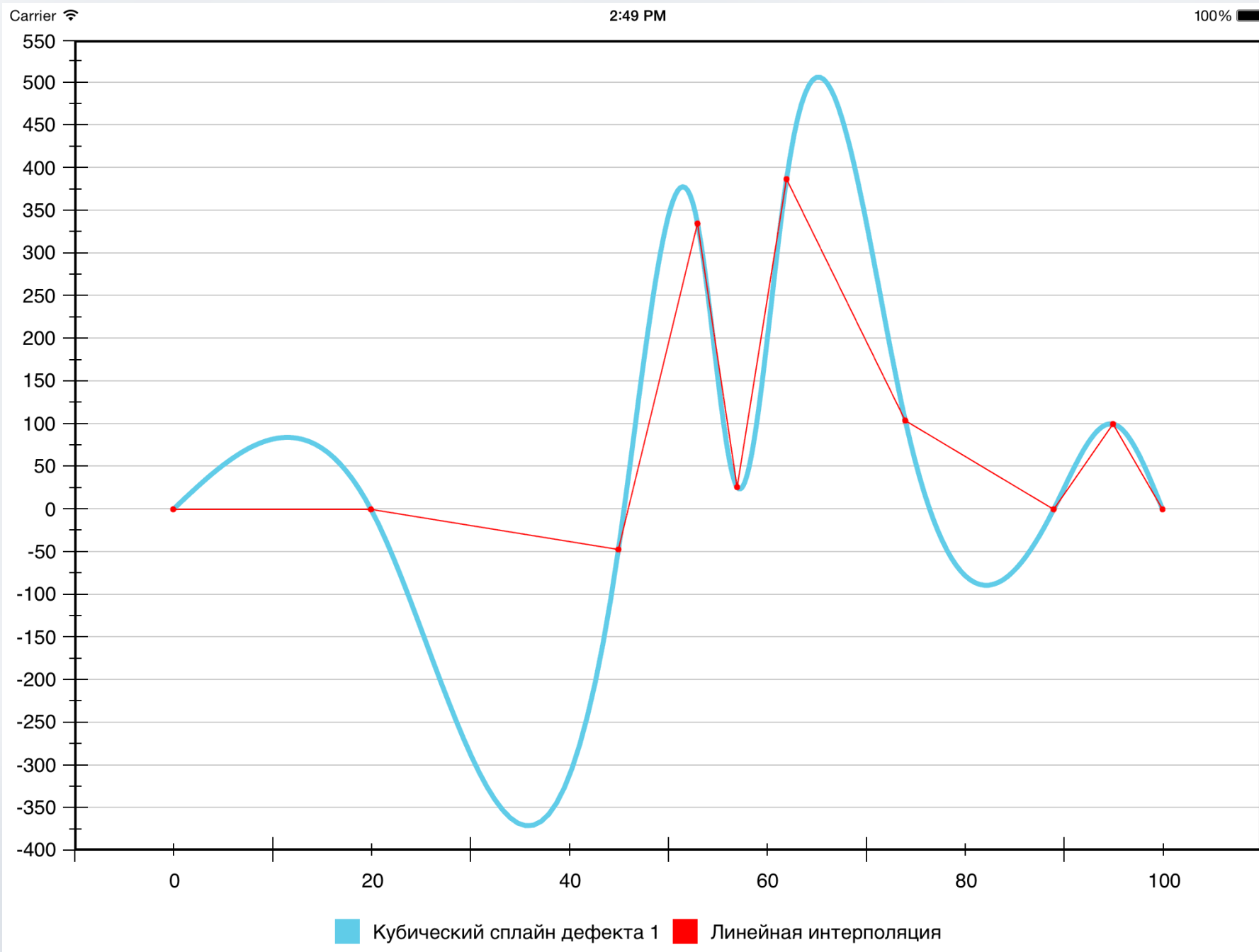
$$S_i(x_i) = f(x_i)$$

Обозначим

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1, n-1}$$

Тогда коэффициенты могут быть найдены решением системы

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i = f(x_i) \\ c_{i-1}h_i + 2c_i(h_i + h_{i+1}) + c_{i+1}h_{i+1} = 6 \left( \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right) \\ d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i} \\ b_i = \frac{1}{2}c_i h_i - \frac{1}{6}d_i h_i^2 + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \\ c_0 = c_n = 0 \end{array} \right.$$





**Кривая Безье** – это параметрическая кривая, заданная выражением

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t), \quad t \in [0; 1]$$

где  $P_i$  – контрольные точки,  
 $b_{i,n}$  – полиномы Бернштейна:

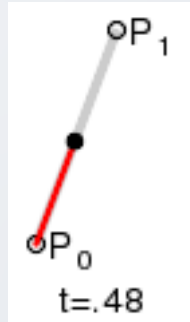
$$b_{i,n} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

где

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

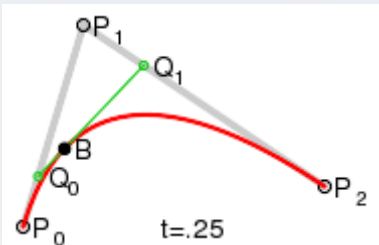
**Линейная кривая:**

$$B(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$



**Квадратичная кривая:**

$$B(t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2$$



**Кубическая кривая:**

$$B(t) = (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3$$

