Лекция №7

Фракталы. Их назначение и построение
Стереоскопические изображения
Стереоскопическая визуализация

Рябинин Константин Валентинович

e-mail: icosaeder@ya.ru
jabber: icosaeder@jabber.ru

Пермь, 2011

Фрактал

Фрактал – это структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому

Свойства:

- Обладает нетривиальной структурой на всех шкалах
- Является самоподобным или приближённо самоподобным
  - → Часть фрактала содержит полную информацию о целом
  - → Сложность структуры не изменяется при изменении масштаба
  - → Каждая часть так же сложна, как и целое
  - → Фрактал позволяет осуществить бесконечное погружение в свою структуру
- Может быть построен при помощи рекурсивной процедуры
- Обладает дробной размерностью

Фрактальная размерность

Размер объекта – числовая характеристика, определяющая количество занимаемого объектом пространства

Размерность Минковского:

$$D_M = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln N_\epsilon}{-\ln \epsilon}$$

где D_M – размерность множества M,

N_ε – минимальное число множеств диаметра ε, которыми можно покрыть множество M

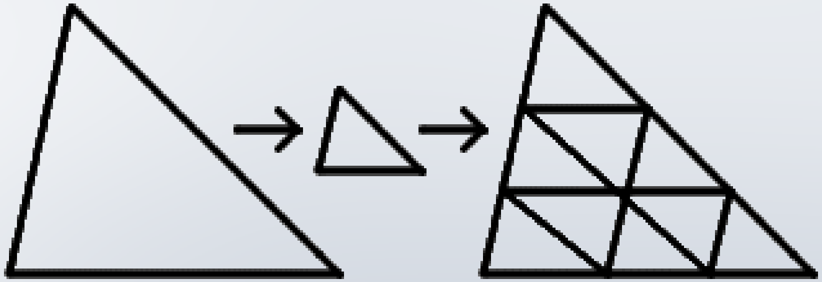
Фрактальная размерность

Размер объекта – числовая характеристика, определяющая количество занимаемого объектом пространства

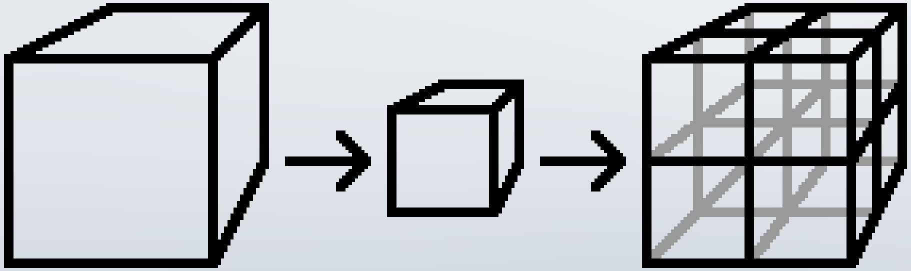
Размерность объекта:

$$D = \frac{\ln n}{\ln N}$$

где *D* – размернось объекта, *N* – коэффициент уменьшения размера исходного объекта,
n – количество раз, которые умещается полученный уменьшением объект в исходном



$N = 3$ $n = 9$ $D = 2$



$N = 2$ $n = 8$ $D = 3$

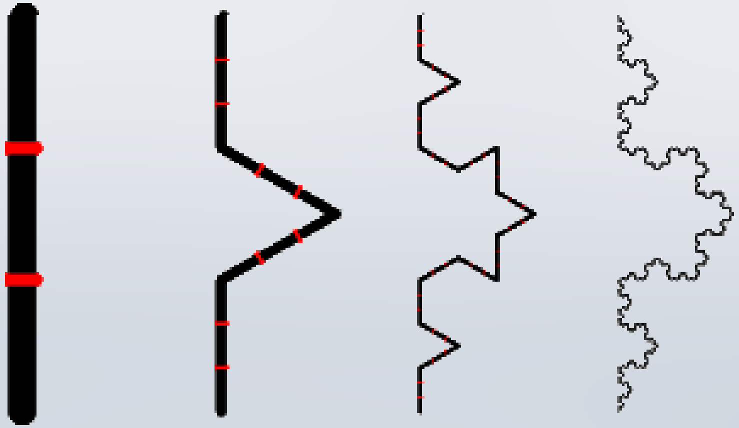
Фрактальная размерность

Размер объекта – числовая характеристика, определяющая количество занимаемого объектом пространства

Размерность объекта:

$$D = \frac{\ln n}{\ln N}$$

где *D* – размерносось объекта, *N* – коэффициент уменьшения размера исходного объекта, *n* – количество раз, которые умещается полученный уменьшением объект в исходном



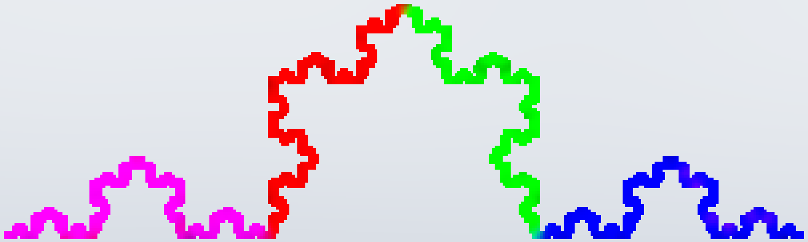
Фрактальная размерность

Размер объекта – числовая характеристика, определяющая количество занимаемого объектом пространства

Размерность объекта:

$$D = \frac{\ln n}{\ln N}$$

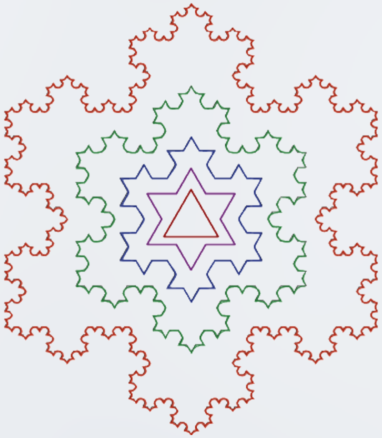
где *D* – размернось объекта, *N* – коэффициент уменьшения размера исходного объекта,
n – количество раз, которые умещается полученный уменьшением объект в исходном

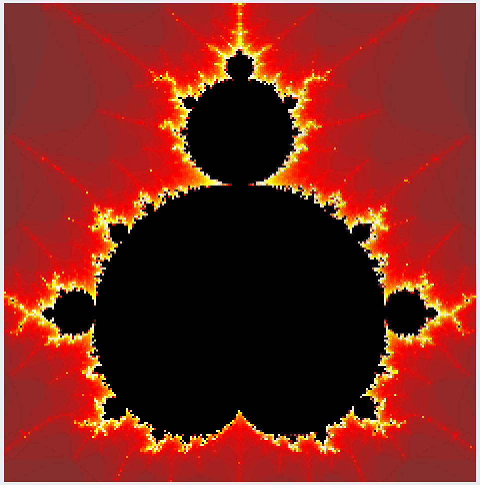


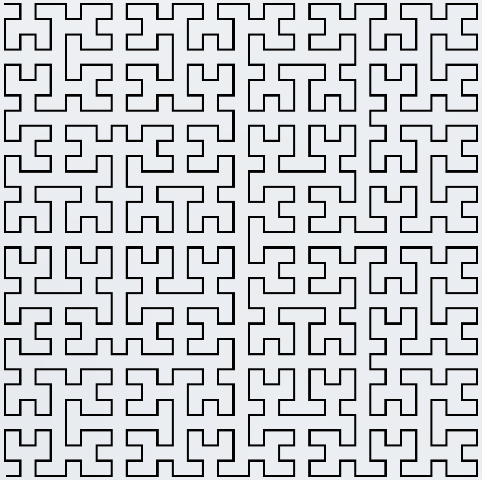
N = 3 *n* = 4 *D* ≈ 1,26

Примеры фракталов

Абстрактные







Природные

Примеры фракталов

- Классический фрактал обладает «всюду пустой» структурой, которая при проникновении в неё «расступается» до бесконечности
- Реальные природные системы являются лишь фракталоподобными, так как теряют свою фрактальность на определённом уровне приближения
- Единственным реально существующим фракталом является Вселенная, будучи рассмотренной как единая система (гипотеза Хайтуна)

Назначение фракталов

- Сжатие информации
  - Поиск фракталоподобных структур в сжимаемом множестве, а затем сохранение лишь их меньших частей
- Анализ информации
  - Классификация, кластеризация, поиск, пронозирование, статичтический анализ на основе выделения фракталоподобных структур
- Генерация двумерных узоров
- Генерация пространственных структур
- Эффективная генерация природных объектов
  - Гор, деревьев, облаков, ...

Построение фракталов

Наиболее общий метод

- Рекурсивные соотношения

Общие методы

- Система итерирующих функций (IFS)
- Система Линдермайера

Частные методы

- Метод последовательных приближений
- Вероятностный метод
- Преобразование комплексных чисел

Рекурсовные соотношения

Рекурсивные соотношения – это наиболее общий способ построения фрактала, проистекающий из самого определения этой геометрической сущности

Система итерирующих функций

Система итерирующих функций – это совокупность сжимающих аффинных преобразований, т. е. таких преобразований, коэффициент масштабирования в которых меньше 1

$$\begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y + e \\ y' = c \cdot x + d \cdot y + f \end{cases}$$

Коэффициенты для системы координат, в которой кратчайший поворот от одного базисного вектора к другому происходит против часовой стрелки (правоорентированная система координат) могут быть вычислены так:

$$\begin{cases} a = scale_x \cdot \cos\alpha \\ b = -scale_x \cdot \sin\alpha \\ c = scale_y \cdot \sin\alpha \\ d = scale_y \cdot \cos\alpha \\ e = move_x \\ f = move_y \end{cases}$$

- Для каждого «звена» фрактала строится функция преобразования координат порождающей фигуры
  => строится система функций, итеративно описывающих фрактал
- Последовательным изменением координат получаются всё новые точки фрактала

Система итерирующих функций

Пример (система для фрактала Коха):

a	b	c	d	e	f
0.3333	0	0	0.3333	0	0
0.1667	−0.2887	0.2887	0.1667	0.3333	0
−0.1667	0.2887	0.2887	0.1667	0.6667	0
0.3333	0	0	0.3333	0.6667	0

Вывод:

1. Для получения первого звена достаточно сжать исходный отрезок в три раза
2. Следующее звено строится с использованием всех возможных преобразований, а именно: параллельный перенос на 1/3 по оси *OX*, поворот на 60° (против часовой стрелки) и сжатие в три раза
3. Третье звено строится аналогично второму: параллельный перенос на 2/3 по оси *OX*, поворот на 60° (против часовой стрелки), сжатие в 3 раза по оси *OY* и сжатие в -3 раза по оси *OX*
4. Последнее звено: параллельный перенос на 2/3 по оси *OX*, сжатие в три раза

Система Линдермайера

Система Линдермайера – это зацикленный алгорифм Маркова, генерирующий программу построения фрактала

- Программа, вообще говоря, бесконечна, однако на практике алгорифм Маркова принудительно останавливается, когда результирующая строка достигает определённой длины
- Пример исполнителя:
  - Входные параметры
    - x; y – начальные координаты
    - a – начальный угол поворота исполнителя
    - step – величина шага вперёд
    - angle – величина угла поворота
  - СКИ:
    - S – переместиться на step вперёд, оставив след (отрезок)
    - J – переместиться на step вперёд, не оставив следа
    - > – повернуться на angle по часовой стрелке
    - < – повернуться на angle против часовой стрелки
    - [– занести в стек состояние (x; y; a)
    -] – взять из стека состояние (x; y; a)

Пример (система для фрактала Коха):

x = y = 0; a = 0; step = 1; angle = 60°
Входная строка (аксиома): S > > S > > S
Правило вывода: S → S < S > > S < S

Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений – это последовательное применение элементов системы итерирующих функций

На каждом шаге будет получаться новое приближение фрактала

Вероятностный метод

Вероятностный метод – это построение фрактала по системе итерирующих функций с использованием алгоритма:

1. Взять начальную точку P
2. Случайным образом выбрать номер функции *j* из системы
3. Получить следующую точку как результат преобразования исходной при помощи выбранной функции
   $P = S_j(P)$
   Перейти к шагу (2)

Для более хорошего результата число $j \in [1; m]_{\mathbb{N}}$
следует выбирать с вероятностью $p_j = r_j^k$
где r_j – *коэффициент сжатия функции* S_j, k – *решение уравнения*
$r_1^k + \ldots + r_m^k = 1$

Преобразования комплексных чисел

Преобразования комплексных чисел – это подход к построению фрактала на основе вычисления точек на комплексной плоскости по некоторой формуле

Пример (множество Мандельброта):

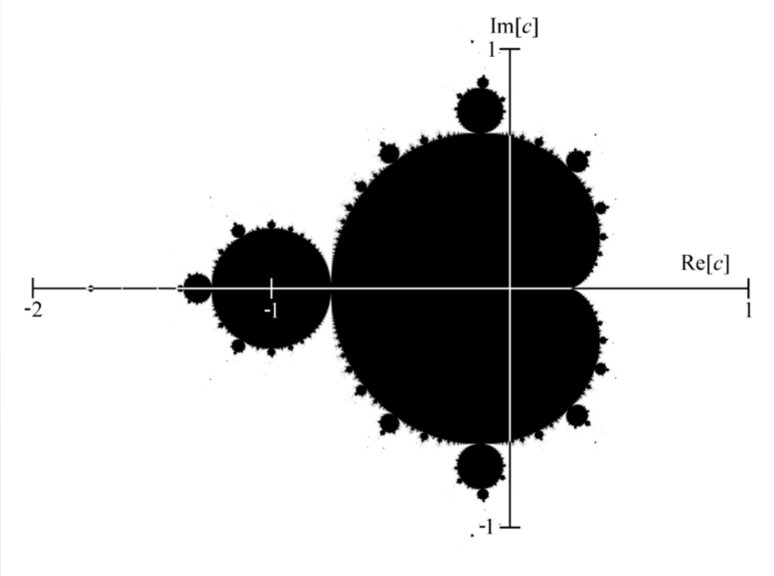
итеративная последовательность преобразований для каждой точки комплексной плоскости

$$c = a + i \cdot b$$

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{i+1} = z_i^2 + c \end{cases}$$

$$\sim$$

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i^2 - y_i^2 + a \\ y_{i+1} = 2 x_i y_i + b \end{cases}$$



Чёрным цветом закрашены точки, которые при бесконечном числе итераций преобразования **не уходят** в бесконечность (принадлежат множеству Мандельброта), белым – которые уходят

c уходит в $\infty \leftrightarrow \exists n \mid |z_n| > 2$

Стереоскопическая визуализация

Стереоизображение – это изображение, которое, являясь плоским, создаёт у наблюдателя эффект объёмного восприятия, то есть передаёт протяжённость пространства и рельефность, свойственные реальным объектам

Сетереоскопическая визуализация – это построение и демонстрация стереоизображений

Области применения стереоскопической визуализации:

- Индустрия развлечений: кино и видеоигры
- Симуляция среды и условий
- Научные визуализации

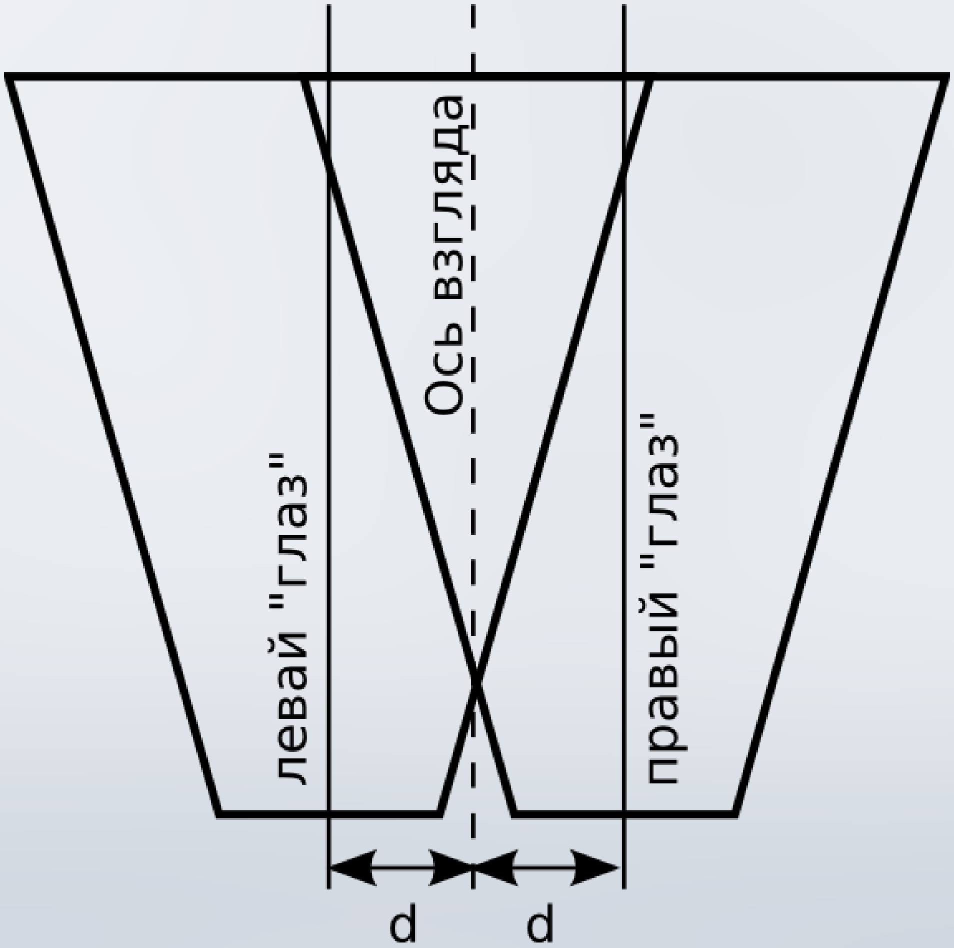
Стереоскопическая визуализация

Стереоскопическая визуализация

Стереоскопическая визуализация

Идея построения стереоизображений:

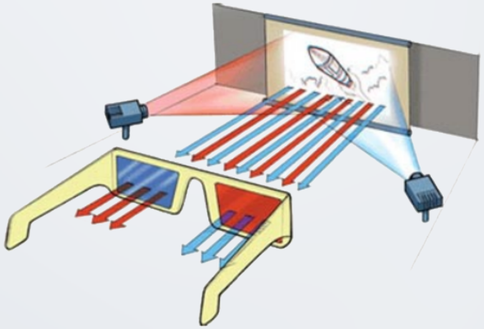
Моделирование зрения человека, отображение сцены с двух точек, моделируя восприятие двумя глазами



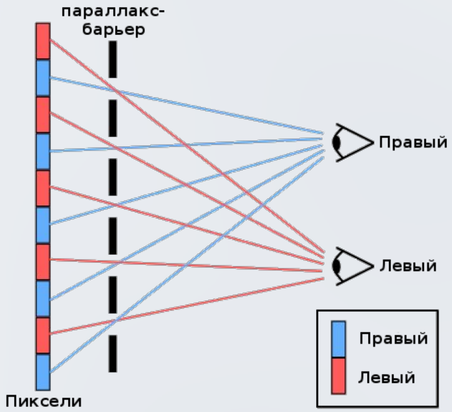
Стереоскопическая визуализация

Технологии стереоскопической визуализации:

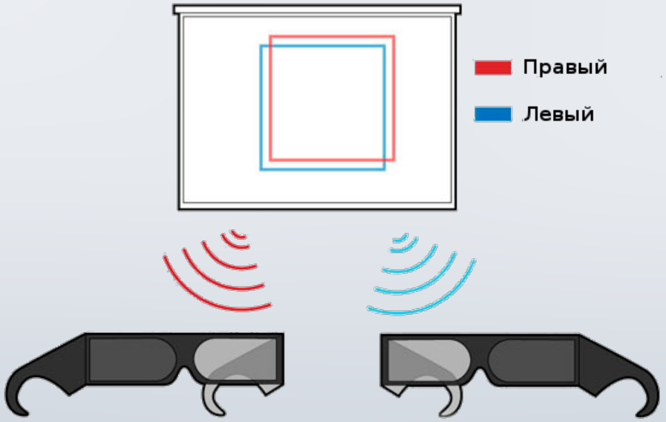
- Анаглифический метод
- Поляризационный метод



- Метод параллакс-барьера



- Эклипсный метод



- Метод пространственного разделения (использование стереоскопа)