

Produit Mixte ou Determinant dans \mathbb{R}^3

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Cette semaine on a défini une nouvelle opération qui s'appelle *produit mixte*:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Exercice 1. (*Produit mixte*)

- (a) Montrer que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$.
- (b) Expliquer géométriquement ce que le produit mixte mesure.
- (c) Déterminer si $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (1, 4, -1)$ et $\vec{w} = (1, -3, 4)$ sont coplanaires en utilisant le produit mixte.

Exercice 2. (*Determinant*) Un autre nom pour le produit mixte dans \mathbb{R}^3 est déterminant.

- (a) Montrer que le déterminant est une application multilinéaire et alternée.

Soit $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = c$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculer

- (b) $\det(\alpha \vec{u}, \alpha \vec{v}, \alpha \vec{w})$
- (c) $\det(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \vec{v}, \vec{w})$
- (d) $\det(\vec{v}, \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \vec{w})$

Exercice 3. (*Mesures géométriques*) Soient $\vec{u} = (2, 1, -2)$, $\vec{v} = (3, -2, 4)$.

- (a) Calculer l'aire du parallélogramme déterminé par \vec{u} et \vec{v} .
- (b) Sans faire de calcul, déterminer le volume du parallélépipède déterminé par \vec{u} , \vec{v} et $\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$.

Exercice 4. (*Bonus*) Trouver l'équation d'un plan dans \mathbb{R}^3 .