

Sistemas de Numeração

Bases Numéricas e Notação Posicional

Alex Dias Gonsales

Definições

- Número: é a expressão de uma quantidade, é a ideia que temos de alguma quantidade.
- Numeral: é a forma como representamos (escrevemos) uma quantidade em um sistema de numeração.
- Algarismos: são os símbolos existentes em um sistema de numeração.
- Dígitos: são os algarismos utilizados em um numeral.
- Observação: é comum o uso dos termos “número” e “numeral” como sinônimos.

Definições

- Exemplo: o sistema de numeração indo-arábico é composto pelos **algarismos** 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Nesse sistema, o **número** quinhentos e trinta e cinco é representado pelo **numeral** 535 o qual contém os **dígitos** 5, 3 e 5.

Sistemas de Numeração

- O principal objetivo de um sistema de numeração é a de representar números
- Exemplos
 - Sistema unário
 - I, II, III, IIII, IIIII, IIIIII, ...
 - Números Romanos
 - I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX, XXI, ..., L, ..., C, ..., M, ...
 - Números arábicos e notação posicional
 - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Sistema Unário

- Existe um único símbolo (algarismo) no sistema. Exemplo: algarismo “I”
- O número representado pelo numeral é a quantidade de vezes que o algarismo foi escrito (repetido).
- Exemplos de numerais:
 - I = um
 - II = dois
 - III = três
 - IIII = quatro
 - e assim sucessivamente...
- Problema para representar números grandes.
 - Exemplo: IIIIIIIIIIIIIIIIIIII = vinte e cinco

Números Romanos

- Algarismos:
 - I = um
 - V = cinco
 - X = dez
 - L = cinquenta
 - C = cem
 - D = quinhentos
 - M = mil

Números Romanos

- Não utiliza notação posicional clássica, ou seja, o algarismo tem sempre o mesmo valor, independente da posição do algarismo dentro do numeral
- Dificuldade em realizar operações aritméticas

Números Romanos

- Exemplos de numerais:
 - I = um
 - II = dois
 - III = três
 - IV = quatro
 - V = cinco
 - VI = seis
 - VII = sete
 - VIII = oito
 - X = dez
 - XX = vinte
 - XXX = trinta

Notação Posicional

- Exemplo: algarismos indo-arábicos e base 10 (decimal).
- Algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Nota-se a existência de um algarismo para representação do zero
- A quantidade de algarismos é sempre igual ao valor da base (neste caso, dez)
- O valor do maior algarismo é sempre o valor da base subtraído de um: $10 - 1 = 9$ (maior algarismo)

Notação Posicional

- O algarismo tem um valor relativo que depende da sua posição dentro do numeral (dígito)
- O valor do numeral é a soma dos valores relativos de cada dígito dentro do numeral
- Exemplo: numerais com os algarismos 2 e 7
 - $27 = \text{vinte e sete} (20 + 7)$
 - $72 = \text{setenta e dois} (70 + 2)$

Notação Posicional

- Exemplo: Base 10 (decimal).
- Algarismos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

10 algarismos

Valor do maior algarismo = Base - 1

Valor do maior algarismo = 10 - 1

Valor do maior algarismo = 9

Notação Posicional

- Exemplo: Base 10 (decimal).
- Algarismos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
- Um número em base 10 é formado por quantidades de potências de 10

Exemplo: numeral 5748							
Posição do dígito	5	4	3	2	1	0	
Potência	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	
Peso do dígito	100000	10000	1000	100	10	1	
Dígito			5	7	4	8	
Valor do dígito			5000	700	40	8	
Valor do número	$5000 + 700 + 40 + 8 =$						5748

$$5 \times 1000 = 5000$$

$$7 \times 100 = 700$$

$$4 \times 10 = 40$$

$$8 \times 1 = 8$$

Notação Posicional

- Exemplo: Base 10 (decimal).
- Algarismos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
- Um número em base 10 é formado por quantidades de potências de 10

Exemplo: numeral 5748						
Posição do dígito	5	4	3	2	1	0
Potência	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Peso do dígito						1
Dígito						8
Valor do dígito						8
Valor do número					0 + 8	= 5748

Parece óbvio!
 Sim, porque estamos trabalhando
 somente com uma base, a base 10.
 Fará mais sentido nos próximos exemplos
 quando vamos converter de outra base
 para decimal (base 10).

Notação Posicional

- Exemplo: Base 8 (octal).
- Algarismos: 0,1,2,3,4,5,6,7

8 algarismos

Valor do maior algarismo = Base - 1

Valor do maior algarismo = 8 - 1

Valor do maior algarismo = 7

Notação Posicional

- Exemplo: Base 8 (octal).
- Algarismos: 0,1,2,3,4,5,6,7
- Um número em base 8 é formado por quantidades de potências de 8

Exemplo: numeral 573 ₈							
Posição do dígito	5	4	3	2	1	0	
Potência	8 ⁵	8 ⁴	8 ³	8 ²	8 ¹	8 ⁰	
Peso do dígito	32768	4096	512	64	8	1	
Dígito				5	7	3	
Valor do dígito				320	56	3	
Valor do número	320 + 56 + 3 =						

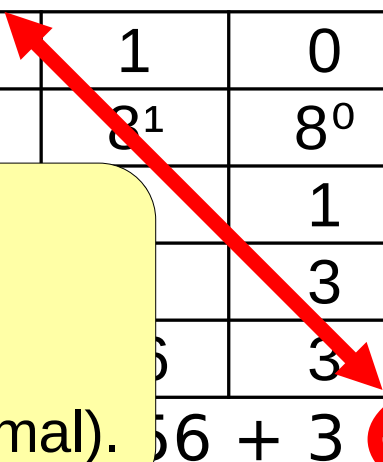
$$5 \times 64 = 320 \quad 7 \times 8 = 56 \quad 3 \times 1 = 3$$

Notação Posicional

- Exemplo: Base 8 (octal).
- Algarismos: 0,1,2,3,4,5,6,7
- Um número em base 8 é formado por quantidades de potências de 8

Exemplo: numeral 573₈							
Posição do dígito	5	4	3	2	1	0	
Potência	8^5	8^4	8^3	8^2	8^1	8^0	
Peso do						1	
Dígito						3	
Valor do						3	
Valor do						6	379

Agora fica mais fácil entender!
 573_8 (cinco sete três octal)
 é
 379 (trezentos e setenta e nove em decimal).



Notação Posicional

- Exemplo: Base 2 (binária).
- Algarismos: 0, 1

2 algarismos

Valor do maior algarismo = Base - 1

Valor do maior algarismo = 2 - 1

Valor do maior algarismo = 1

Notação Posicional

- Exemplo: Base 2 (binária).
- Algarismos: 0,1
- Obs.: Cada dígito em um número binário é chamado de bit (**binary digit** = dígito binário)

Exemplo: numeral 101001 ₂													
Posição do dígito	5	4	3	2	1	0							
Potência	2 ⁵	2 ⁴	2 ³	2 ²	2 ¹	2 ⁰							
Peso do dígito	32	16	8	4	2	1							
Dígito	1	0	1	0	0	1							
Valor do dígito	32	0	8	0	0	1							
Valor do número	32	+	0	+	8	+	0	+	0	+	1	=	41

$$1 \times 32 = 32 \quad 0 \times 16 = 0 \quad 1 \times 8 = 8 \quad 0 \times 4 = 0 \quad 0 \times 2 = 0 \quad 1 \times 1 = 1$$

Notação Posicional

- Exemplo: Base 2 (binária).
- Algarismos: 0,1
- Obs.: Cada dígito em um número binário é chamado de bit (**b**inary digit = dígito binário)

Exemplo: numeral 101001₂							
Posição do dígito	5	4	3	2	1	0	
Potência	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	
Peso do					2	1	
Dígito					0	1	
Valor do					0	1	
Valor do					0	+ 1	= 41

101001₂ (um zero um zero zero um binário)
é
41 (quarenta e um em decimal).

Notação Posicional

- Base 16 (hexadecimal).

Notação Posicional

- Base 16 (hexadecimal).
- Algarismos: Precisamos de 16 algarismos (símbolos).

Notação Posicional

- Base 16 (hexadecimal).
- Algarismos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

16 algarismos

Regra / Convenção:
Utilizamos os DEZ algarismos da base decimal
e completamos com as letras do alfabeto,
em ordem alfabética.

A tem valor dez (10)
B tem valor onze (11)
C tem valor doze (12)
D tem valor treze (13)
E tem valor quatorze (14)
F tem valor quinze (15)

Valor do maior algarismo = Base - 1
Valor do maior algarismo = 16 - 1

Valor do maior algarismo = 15

Notação Posicional

- Base 16 (hexadecimal).
- Algarismos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F
- Um número em base 16 é formado por quantidades de potências de 16

Exemplo: numeral 2E5C ₁₆							
Posição do dígito	5	4	3	2	1	0	
Potência	16^5	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0	
Peso do dígito	1048576	65536	4096	256	16	1	
Dígito			2	E	5	C	
Valor do dígito			8192	3584	80	12	
Valor do número	$8192 + 3584 + 80 + 12 =$						11868

$$2 \times 4096 = 8192$$

$$E \times 256 = 14 \times 256 = 3584$$

$$5 \times 16 = 80$$

$$C \times 1 = 12 \times 1 = 12$$

Notação Posicional

- Base 16 (hexadecimal).
- Algarismos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F
- Um número em base 16 é formado por quantidades de potências de 16

Exemplo: numeral 2E5C ₁₆							
Posição do dígito	5	4	3	2	1	0	
Potência	16^5	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0	
						1	
						C	
						12	
						+ 12 =	11868

2E5C₁₆ (dois “E” cinco “C” hexadecimal)
é

11868 (onze mil oitocentos e sessenta e oito em decimal).

Notação Posicional

- Generalizando para números inteiros
 - $v = d_{n-1}.b^{n-1} + d_{n-2}.b^{n-2} + \dots + d_1.b^1 + d_0.b^0$
- b = base do sistema
- n = quantidade de dígitos no numeral
- d_x = dígito na posição x dentro do numeral
- v = valor do número (quantidade)
- Observações:
 - $d_0 \rightarrow$ dígito menos significativo
 - $d_{n-1} \rightarrow$ dígito mais significativo

Notação Posicional

- Exemplo: número 5748 na base 10
- $b=10$, $n = 4$, $d_3=5$, $d_2=7$, $d_1=4$, $d_0=8$
- $V = 5 \quad \quad \quad 7 \quad \quad \quad 4 \quad \quad \quad 8 \quad (\text{base } 10)$
- $V = 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 8 \times 10^0$
- $V = 5 \times 1000 + 7 \times 100 + 4 \times 10 + 8 \times 1$
- $V = 5000 + 700 + 40 + 8$
- $V = 5709$ (decimal) = cinco mil setecentos e quarenta e oito.

Notação Posicional

- Exemplo: número 573_8 (base 8)
- $b=8$, $n = 3$, $d_2=5$, $d_1=7$, $d_0=3$
- $v = 5 \quad \quad \quad 7 \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad (\text{base } 8)$
- $v = 5 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 3 \times 8^0$
- $v = 5 \times 64 + 7 \times 8 + 3 \times 1$
- $v = 320 + 56 + 3$
- $v = 379$ (decimal) = trezentos e setenta e nove.

Notação Posicional

- Exemplo: número 101001_2 (base 2)
- $b=2$, $n = 6$, $d_5=1$, $d_4=0$, $d_3=1$, $d_2=0$, $d_1=0$, $d_0=1$
- $V = 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1$ (bin)
- $V = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
- $V = 1 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$
- $V = 32 + 0 + 8 + 0 + 0 + 1$
- $V = 41$ (decimal) = quarenta e um.

Notação Posicional

- Exemplo: número $2E5C_{16}$ (base 16)
- $b=16$, $n = 5$, $d_3=2$, $d_2=E$, $d_1=5$, $d_0=C$
- $v = 2 \quad \quad \quad E \quad \quad \quad 5 \quad \quad \quad C$ (base 16)
- $v = 2 \times 16^3 + E \times 16^2 + 5 \times 16^1 + C \times 16^0$
- $v = 2 \times 4096 + 14 \times 256 + 5 \times 16 + 12 \times 1$
- $V = 8192 + 3584 + 80 + 12$
- $V = 11868$ (decimal) = onze mil oitocentos e sessenta e oito.

Bases mais utilizadas

- Base decimal: mais utilizada pelos seres humanos
- Base binária: uso interno no computador
- Bases octal e hexadecimal: bases que são facilmente convertidas para a base binária

Referências

- STALLINGS, William. Arquitetura e organização de computadores. 8.ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010. 624 p. ISBN: 9788576055648.
- VELLOSO, Fernando de Castro. Informática : conceitos básicos. 8. ed. rev. e atual. Rio de Janeiro, RJ : Elsevier, : Campus, c2011. xiii, 391 p. ISBN: 9788535243970.
- WEBER, Raul Fernando. Fundamentos de arquitetura de computadores. 3. ed. Porto Alegre : Instituto de Informática da UFRGS, : Sagra Luzzatto, c2004. 306 p. ISBN: 9788577803101.
- TOCCI, Ronald J.. Sistemas digitais : princípios e aplicações. 10. ed. São Paulo : Pearson Prentice Hall, c2007. xxii, 804 p. ISBN: 9788576050957.