Sistemas de Numeração

Números Fracionários

Alex Dias Gonsales

Números Fracionários

- Notação posicional
- Conversão
  - Decimal Fracionário ↔ Binário Fracionário
- Representação Binários Fracionários
  - Ponto Fixo
  - Ponto Flutuante

Números Fracionários

- Relembrando Notação Posicional
  - Exemplo: número 5396 na base 10

6 unidades	$= 6 \times 10^0$	$= 6\times1$	=	6
9 dezenas	$= 9 \times 10^1$	$= 9\times10$	=	90
3 centenas	$= 3 \times 10^2$	$= 3\times100$	=	300
5 milhares	$= 5 \times 10^3$	$= 5\times1000$	=	5000
Total			=	5396

Números Fracionários

- Relembrando Notação Posicional
  - Exemplo: número 0,874 na base 10

4 milésimos	= 4 x 10^{-3}	= 4x0,001	=	0,004
7 centésimos	= 7 x 10^{-2}	= 7x0,01	=	0,07
8 décimos	= 8 x 10^{-1}	= 8x0,1	=	0,8
Total			=	0,874

Números Fracionários

- Relembrando Notação Posicional
  - Exemplo: número 5396,874 na base 10

4 milésimos	=	4×10^{-3}	=	4x0,001	=	0,004
7 centésimos	=	7×10^{-2}	=	7x0,01	=	0,07
8 décimos	=	8×10^{-1}	=	8x0,1	=	0,8
6 unidades	=	6×10^{0}	=	6x1	=	6,0
9 dezenas	=	9×10^{1}	=	9x10	=	90,0
3 centenas	=	3×10^{2}	=	3x100	=	300,0
5 milhares	=	5×10^{3}	=	5x1000	=	5000,0
Total					=	5396,874

Números Fracionários

- Generalizando para números fracionários
  - $v = d_{n-1}.b^{n-1} + d_{n-2}.b^{n-2} + ... + d_1.b^1 + d_0.b^0 + d_{-1}.b^{-1} + d_{-2}.b^{-2} + d_{-3}.b^{-3} + ...$
- Exemplo: número 5396,874 na base 10

$v = 5x10^3 + 3x10^2 + 9x10^1 + 6x10^0 + 8x10^{-1} + 7x10^{-2} + 4x10^{-3}$

$v = 5000 + 300 + 90 + 6 + 8x0,1 + 7x0,01 + 4x0,001$

$V = 5000 + 300 + 90 + 6 + 0,8 + 0,07 + 0,004$

$v = 5396,874$

Números Fracionários

- Generalizando para números fracionários
  - $v = d_{n-1}.b^{n-1} + d_{n-2}.b^{n-2} + ... + d_1.b^1 + d_0.b^0 + d_{-1}.b^{-1} + d_{-2}.b^{-2} + d_{-3}.b^{-3} + ...$
- Exemplo: número 5396,874 na base 10

$v = 5x10^3 + 3x10^2 + 9x10^1 + 6x10^0 + 8x10^{-1} + 7x10^{-2} + 4x10^{-3}$

v = 5000 + 300 + 90 + 6 + 8x0,1 + 7x0,01 + 4x0,001

V = 5000 + 300 + 90 + 6 + 0,8 + 0,07 + 0,004

v = 5396,874

$5x10^3$	=	5x1000	=	5000,0
$3x10^2$	=	3x100	=	300,0
$9x10^1$	=	9x10	=	90,0
$6x10^0$	=	6x1	=	6,0
$8x10^{-1}$	=	8x0,1	=	0,8
$7x10^{-2}$	=	7x0,01	=	0,07
$4x10^{-3}$	=	4x0,001	=	0,004
			=	5396,874

Números Fracionários

- Exemplo Base 2
  - número $110,1101_2$

$$v = 1x2^{2} + 1x2^{1} + 0x2^{0} + 1x2^{-1} + 1x2^{-2} + 0x2^{-3} + 1x2^{-4}$$

$$v = 1x4 + 1x2 + 0x1 + 1x0,5 + 1x0,25 + 0x0,125 + 1x0,0625$$

$$v = 4 + 2 + 0 + 0,5 + 0,25 + 0 + 0,0625$$

$$v = 6,8125$$

Números Fracionários

- Exemplo Base 2
  - número $110{,}1101_2$

$v = 1x2^{2} + 1x2^{1} + 0x2^{0} + 1x2^{-1} + 1x2^{-2} + 0x2^{-3} + 1x2^{-4}$

$v = 1x4 + 1x2 + 0x1 + 1x0{,}5 + 1x0{,}25 + 0x0{,}125 + 1x0{,}0625$

$v = 4 + 2 + 0 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0 + 0{,}0625$

$v = 6{,}8125$

$1x2^{2}$	$= 1x4$	$= 4$
$1x2^{1}$	$= 1x2$	$= 2$
$0x2^{0}$	$= 0x1$	$= 0$
$1x2^{-1}$	$= 1x0{,}5$	$= 0{,}5$
$1x2^{-2}$	$= 1x0{,}25$	$= 0{,}25$
$0x2^{-3}$	$= 0x0{,}125$	$= 0{,}000$
$1x2^{-4}$	$= 1x0{,}0625$	$= 0{,}0625$
		6,8125

Números Fracionários

- Exemplo Base 3
  - Número $2102{,}102_3$

$v = 2x3^3 + 1x3^2 + 0x3^1 + 2x3^0 + 1x3^{-1} + 0x3^{-2} + 2x3^{-3}$

$v = 2x27 + 1x9 + 0x3 + 2x1 + 1x1/3 + 0x1/9 + 2x1/27$

$v = 540 + 9 + 0 + 2 + 0{,}33... + 0{,}11... + 0{,}074074074...$

$v = 551{,}518518...$

Números Fracionários

- Exemplo Base 3
  - Número $0{,}1_3$

$v = 1 \times 3^{-1}$

$v = 1 \times 1/3$

$v = 0{,}3333333333...$

Representação de terço (1/3):

Não tem representação exata em decimal = 0,33333333...

Mas tem representação exata na base 3 = $0{,}1_3$

Números Fracionários

- Exemplo Base 5
  - Número $423{,}143_5$

$v = 4x5^2 + 2x5^1 + 3x5^0 + 1x5^{-1} + 4x5^{-2} + 3x5^{-3}$

$v = 4x25 + 2x5 + 3x1 + 1x0{,}2 + 4x0{,}04 + 3x0{,}008$

$v = 100 + 10 + 3 + 0{,}2 + 0{,}16 + 0{,}024$

$v = 113{,}384$

$$
\begin{array}{llll}
4x5^{2} & = 4x25 & = & 100 \\
2x5^{1} & = 2x5 & = & 10 \\
3x5^{0} & = 3x1 & = & 3 \\
1x5^{-1} & = 1x0{,}2 & = & 0{,}2 \\
4x5^{-2} & = 4x0{,}04 & = & 0{,}16 \\
3x5^{-3} & = 3x0{,}008 & = & 0{,}024 \\
 & & = & 113{,}384
\end{array}
$$

Conversão Decimal → Binário

- Exemplo: 25,4375 = 25 + 0,4375
  - $25 = 11001_2$
  - $0,4375 = 0,?_2$

Conversão Decimal → Binário

- Exemplo: 25,4375 = 25 + 0,4375
  - 25 = 11001_2
  - 0,4375 = $0{,}\underline{0}?_2$
  - 0,4375 x 2 = $\underline{0}$,875 ← (parte fracionária <> zero)

Conversão Decimal → Binário

- Exemplo: 25,4375 = 25 + 0,4375
  - $25 = 11001_2$
  - $0{,}4375 = 0{,}0\underline{1}?_2$
  - 0,4375 x 2 = 0,875
  - 0,875 x 2 = $\underline{1}$,75 ← (parte fracionária <> zero)

Conversão Decimal → Binário

- Exemplo: 25,4375 = 25 + 0,4375
  - $25 = 11001_2$
  - $0{,}4375 = 0{,}01\underline{1}?_2$
  - 0,4375 x 2 = 0,875
  - 0,875 x 2 = 1,75
  - $0{,}75 \times 2 = \underline{1}{,}5$ ← (parte fracionária <> zero)

Conversão Decimal → Binário

- Exemplo: 25,4375 = 25 + 0,4375
  - $25 = 11001_2$
  - $0,4375 = 0,011\underline{1}_2$
  - 0,4375 x 2 = 0,875
  - 0,875 x 2 = 1,75
  - 0,75 x 2 = 1,5
  - 0,5 x 2 = $\underline{1}$,0 ← (parte fracionária = zero)

Conversão Decimal → Binário

- Exemplo: 25,4375 = 25 + 0,4375
  - $25 = 11001_2$
  - $0,4375 = 0,0111_2$
  - 0,4375 x 2 = 0,875
  - 0,875 x 2 = 1,75
  - 0,75 x 2 = 1,5
  - 0,5 x 2 = 1,0

$$25,4375 = 11001,0111_2$$

Representação de Números Fracionários

- Representação em Ponto Fixo
- Representação em Ponto Flutuante

Representação Ponto Fixo

- O ponto (vírgula decimal) é fixado
  - Sendo n = quantidade de bits
  - t bits são reservados para parte inteira
  - f bits são reservados para parte fracionária
  - n = t + f
- Exemplo
  - n=8, t=5, f=3
  - 00000,000

Parte Inteira

Parte Fracionária

- Maior número = $(2^{n-1}-1)/2^f$
- Menor número = $-2^{n-1}/2^f$

Representação Ponto Fixo

- Exemplos (n=8, t=5, f=3)
  - 00000,001 = $0+2^{-3}$ = 0+0,125 = 0,125
  - 00001,001 = $1+2^{-3}$ + = 1+0,125 = 1,125
  - 00001,010 = $1+2^{-2}$ = 1+0,25 = 1,25
  - 00010,100 = $2+2^{-1}$ = 2+0,5 = 2,5
  - 00010,111 = $2+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}$ = 2,875
  - 01111,011 = 15+0,25+0,125 = 15,375
  - 11111,000 = -1 + 0 = -1
  - 11111,111 = -1 + 0.875 = -0,125

Representação Ponto Fixo

- Exemplos
  - $n=8$, $t=5$, $f=3$
  - Maior número = $(2^{n-1}-1)/2^{f}$ = $(2^{8-1}-1)/2^{3}$ = $(2^{7}-1)/8$ = $(128-1)/8$ = $127/8 = 15{,}875$
  - Menor número = $-2^{n-1}/2^{f}$ = $-2^{7}/2^{3}$ = $-128/8 = -16$

Binário	Parcelas	Decimal
00000,000	0+0	0
00000,001	0+0,125	0,125
00000,010	0+0,25	0,250
00000,011	0+0,375	0,375
00000,100	0+0,5	0,500
00000,101	0+0,625	0,625
00000,110	0+0,75	0,750
00000,111	0+0,875	0,875
00001,000	1+0	1,000
00001,001	1+0,125	1,125
...	...	...
01111,000	15+0	15,000
...	...	...
01111,111	15+0,875	15,875
10000,000	-16+0	-16
10000,001	-16+0,125	-15,875
...	...	...
10000,111	-16+0,875	-15,125
...	...	...
11110,000	-2+0	-2,000
11111,000	-1+0	-1,000
11111,001	-1+0,125	-0,875
11111,010	-1+0,25	-0,750
11111,011	-1+0,375	-0,625
11111,100	-1+0,5	-0,500
11111,101	-1+0,625	-0,375
11111,110	-1+0,75	-0,250
11111,111	-1+0,875	-0,125

Representação Ponto Flutuante

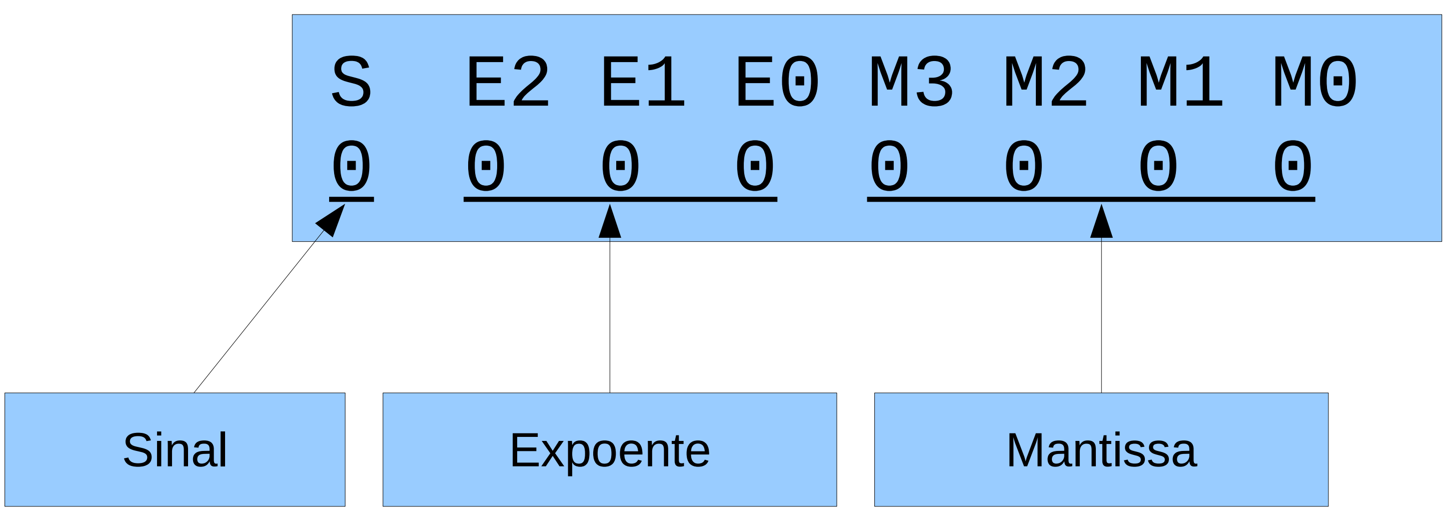
- Representação Normalizada (exemplos)
  - Decimal
    - $438{,}59 = 4{,}3859 \cdot 10^{2}$
    - $0{,}0043859 = 4{,}3859 \cdot 10^{-3}$
  - Binário
    - $9{,}625 = 1001{,}101_2$ (não normalizado)
      - $1001{,}101_2 = 1{,}001101_2 \cdot 2^{3}$ (normalizado)
    - $0{,}3125 = 0{,}0101_2$ (não normalizado)
      - $0{,}0101_2 = 1{,}01_2 \cdot 2^{-2}$ (normalizado)

Representação Ponto Flutuante

- Representar
  - Sinal (S)
  - Mantissa normalizada (M)
  - Expoente (E)
- Valor = (sinal) valor_mantissa * $2^{\text{valor\_expoente}}$

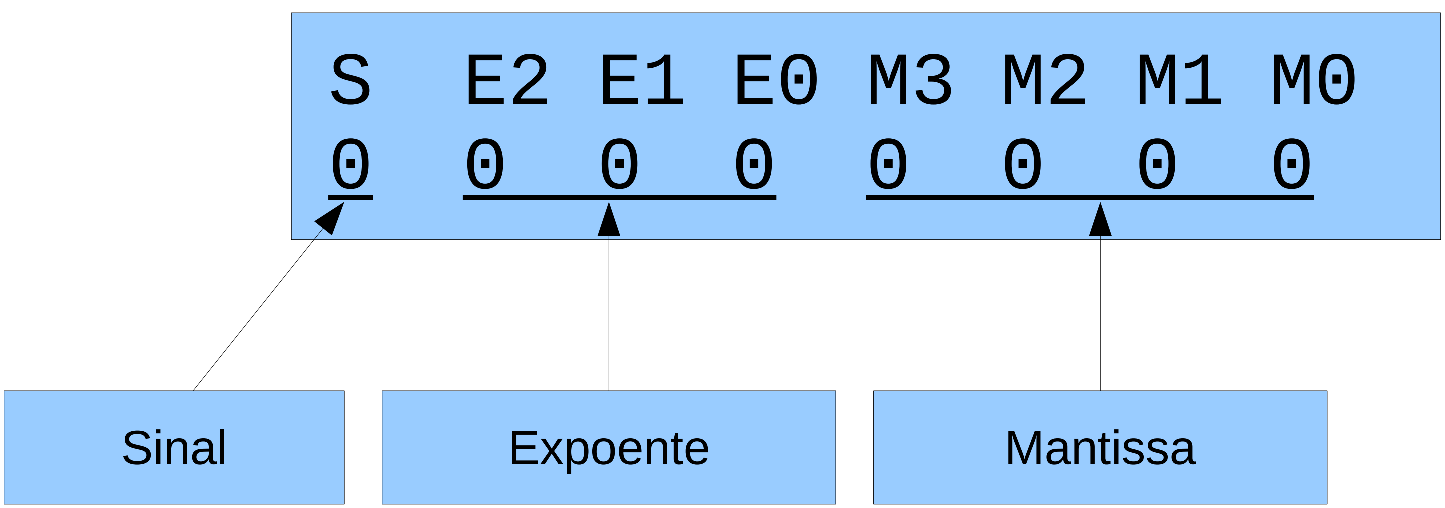
Representação Ponto Flutuante

- Exemplo simplificado: seja n = 8 bits
  - Mantissa (M) = 4 bits
  - Expoente (E) = 3 bits
  - Sinal (S) = 1 bit



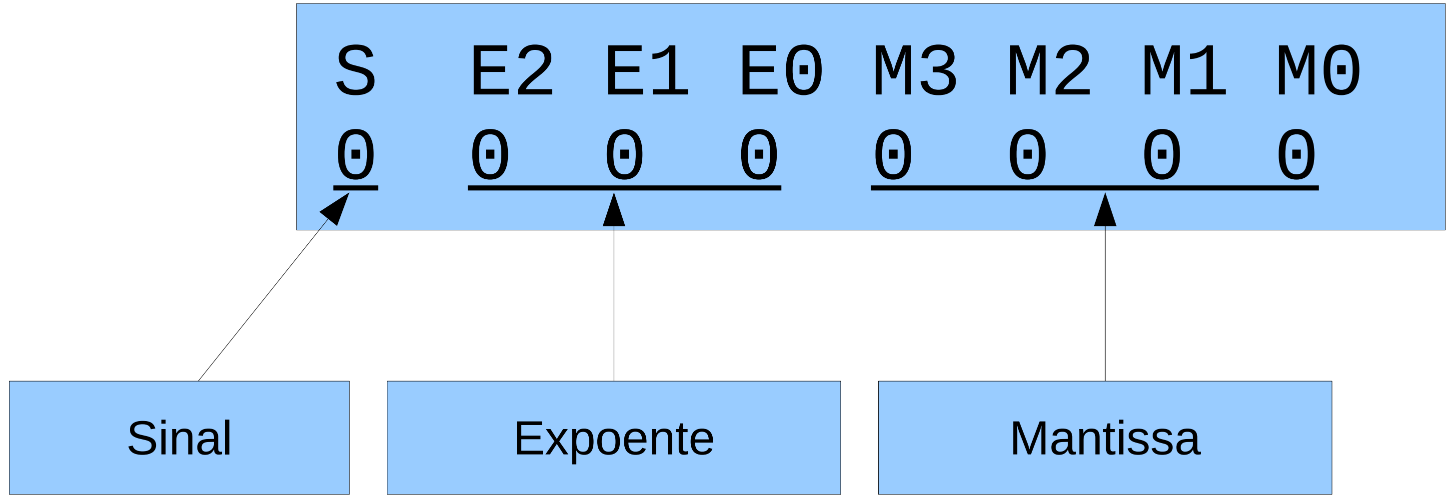
Representação Ponto Flutuante

- valor_expoente (VE)
  - VE = expoente - (2^{E-1} - 1)
  - VE = expoente - (2^{3-1} - 1)
  - VE = expoente - (2^{2} - 1)
  - VE = expoente - (4 - 1)
  - VE = expoente - 3



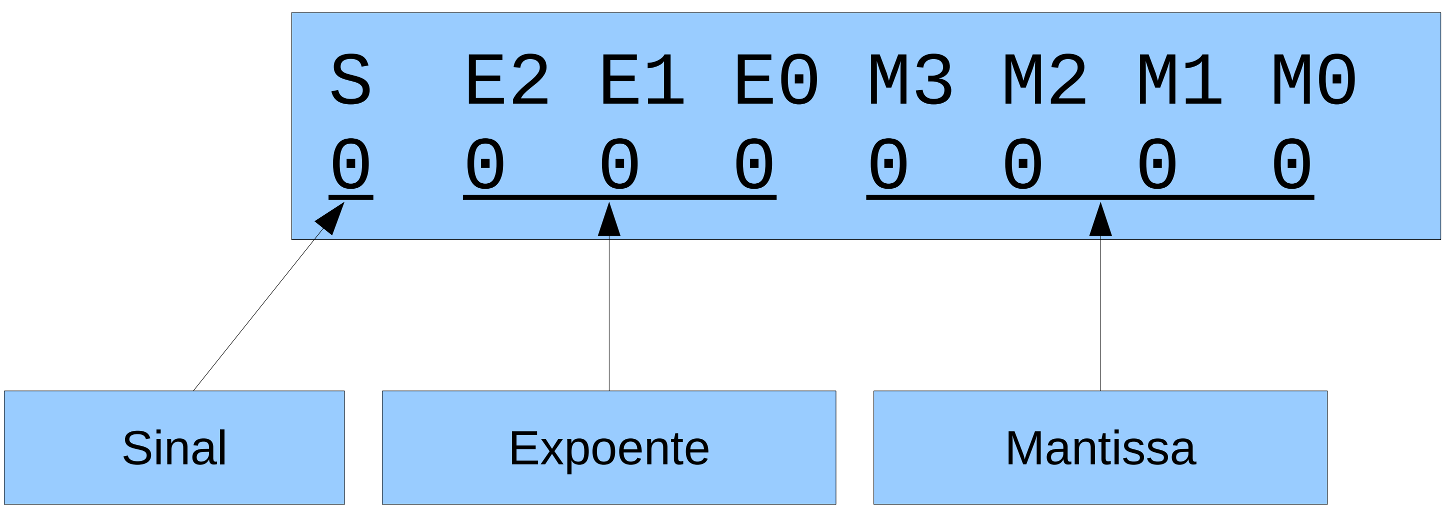
Representação Ponto Flutuante

- valor_expoente (VE)
  - VE = expoente - 3
  - $VE = E_2.2^2 + E_1.2^1 + E_0.2^0 - 3$



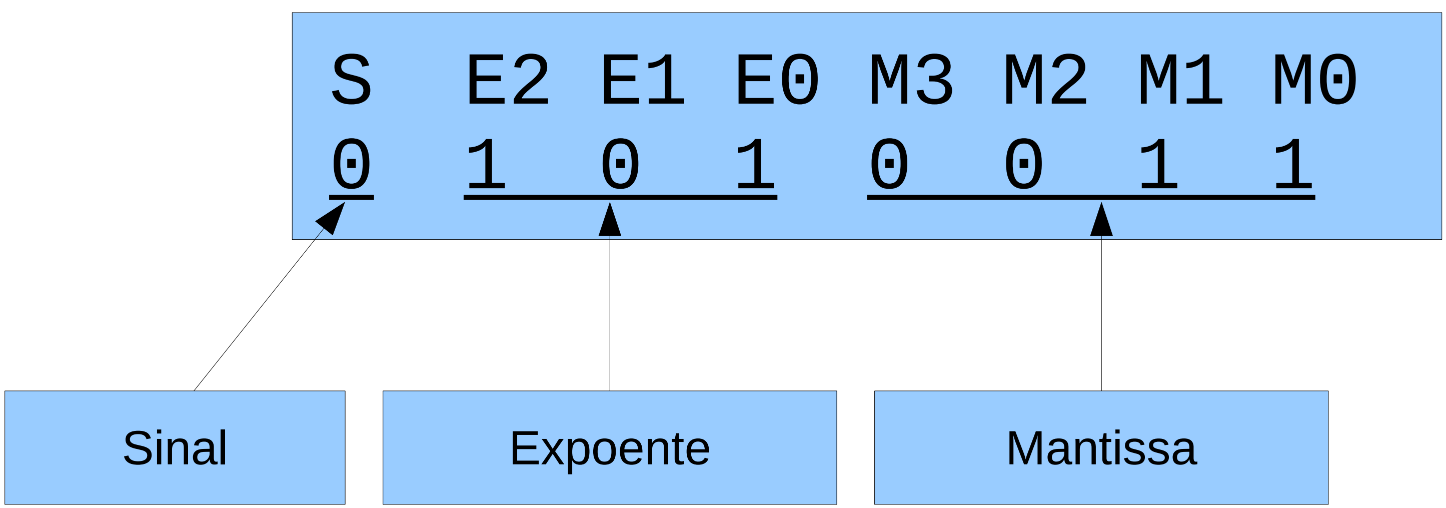
Representação Ponto Flutuante

- valor mantissa (VM)
  - $VM = 1 + M_3.2^{-1} + M_2.2^{-2} + M_1.2^{-3} + M_0.2^{-4}$
- valor sinal (VS)
  - S = 0 → positivo
  - S = 1 → negativo



Representação Ponto Flutuante

- Exemplo: 01010011
- S = 0 → positivo
- E = 101 → VE = 5 - 3 = 2
- M = 0011 → VM = 1 + 0,1875 = 1,1875
- V = 1,1875 . 2^2 = 4,75



Representação Ponto Flutuante

- Padrão IEEE 754 single precision
  - N = 32 bits
  - E = 8 bits
  - M = 23 bits
  - S = 1 bit

Representação Ponto Flutuante

- Padrão IEEE 754 single precision
  - Se E=0 e M=0 e S=0 → V = +0
  - Se E=0 e M=0 e S=1 → V = -0
  - Se E=255 e M<>0 → V = NaN (Not a Number)
  - Se E=255 e M=0 e S=1 → V = -Infinito
  - Se E=255 e M=0 e S=0 → V = +Infinito
  - Se 0<E<255 → V normalizado
    - $V = -1^{S} . 2^{E-127} . (1,M)$
  - Se E=0 e M<>0 → V não-normalizado
    - $V = -1^{S} . 2^{126} . (0,M)$

Representação Ponto Flutuante

- Padrão IEEE 754 double precision
  - N = 64 bits
  - E = 11 bits
  - M = 52 bits
  - S = 1 bit