

# Balanced Condition による 代数的組合せ論入門

(Version 2.1)

鈴木 寛

Hiroshi SUZUKI\*

国際基督教大学教養学部理学科数学教室

〒181-8585 東京都三鷹市大沢 3-10-2

平成 10 年 8 月 17 日

\*Electric mail : [hsuzuki@icu.ac.jp](mailto:hsuzuki@icu.ac.jp)

## はじめに

この講義録は、1998 年 6 月 29 日から 7 月 3 日にかけて、北海道大学理学研究科で行なった集中講義を元にしたものである。Wisconsin 大学の Paul Terwilliger が Balanced Condition を定義し、非常に美しい理論とともに紹介したのは、1980 年代後半のことだからすでに 10 年ほどたっている。Balanced Set の持つ、幾何的な性質と、表現図式の性質を、Terwilliger Algebra の部分空間の性質に解釈し直して結び付けた素晴らしい理論であるが、Terwilliger のその後の仕事がすべて、 $P$  and  $Q$ -Polynomial Scheme に限られていたことなどから、一般にはあまり知られていないようである。この理論は、 $Q$ -Polynomial という性質を理解しようとして考えられたものであることは確かであるが、Balanced Condition 自体非常に魅力に富んだものだと思う。その紹介を、代数的組合せ論をこれから勉強していこうという人たち、また、代数的組合せ論は、どのようなものかに興味を持っている人たちに紹介することができればとの願いから、このトピックを集中講義の題材として選ぶことにした。代数的組合せ論とは何かということは簡単に規定できるものではないが、Balanced Condition という非常に限られたトピックを通して代数的組合せ論の一端をかいま見、そしてその広がりと魅力を感じていただければ幸いである。

「未解決問題」とあるのは文字通り少なくとも筆者は未解決だと認識している問題であり、研究課題としても十分な価値があると信じるものである。それに対して「問題」は、筆者自身が今日にでも考えたい問題、また、皆さんに考えてもらいその後の研究の出発点としてもらいたい問題である。「練習問題」は、理解を助けるために設けたもので、そのいくつかについては付録において解答またはヒントをつけておいた。

中心となる文献は本論で順次紹介していくが、[20, 22, 23, 24, 26, 27] である。P. Terwilliger の二つの文献は是非とも読んでいただきたい。この講義録がそのための動機づけとなればと願う。

筆者は 1996 年に Philippine の De La Salle University において、“Introduction to  $Q$ -Polynomial Association Schemes” と題した連続講義をし、1997 年には国際基督教大学で、また、1997/8 年には千葉大学でこれに関連した連続講義を行なっている。今回の講義録は、それらの時に用いた英語版の講義録をもとにしたものである。

平成 10 年 8 月 17 日

鈴木 寛  
東京三鷹の国際基督教大学にて

# 目次

第1章	オーバービュー	1
1.1	Balanced Conditions	1
1.2	いくつかの例	3
1.3	アソシエーションスキーム	5
1.4	Krein パラメーターと表現グラフ	7
1.5	群スキームの表現図式	9
第2章	アソシエーションスキーム	14
2.1	アソシエーションスキームと隣接行列	14
2.2	半単純(行列)代数	16
2.3	可換アソシエーションスキームの原始冪等元	19
第3章	Krein パラメタと表現図式	22
3.1	Hadamard 積と Krein パラメタ	22
3.2	$\text{Mat}_X(C)$ 上のエルミート内積	23
3.3	Terwilliger 代数と Krein condition	26
3.4	表現図式と分配図式	28
第4章	Balanced Conditions	30
4.1	Balanced Conditions と Terwilliger の定理	30
4.2	Terwilliger Algebra の部分空間	32
4.3	表現グラフの連結性	35
4.4	Terwilliger の定理の証明	37
第5章	いくつかの例	42
5.1	群の作用とアソシエーションスキーム	42
5.2	高次元立方体とハミングスキーム	43
5.3	ジョンソンスキーム	44
付録A	英文講義録からの補遺	46
A.1	Distance-Regular Graphs	46
A.2	$s$ -distance Sets and Absolute Bound Conditions	50
A.3	Representation of Graphs	54

A.4	Association Schemes with $m = 3$ . . . . .	56
付 録 B	練習問題の略解とヒント	<b>62</b>
B.1	第 1 章 オーバービュー . . . . .	62
B.2	第 2 章 アソシエーションスキーム . . . . .	63
B.3	第 3 章 Krein パラメタと表現図式 . . . . .	66
B.4	第 4 章 Balanced Conditions . . . . .	68
B.5	第 5 章 いくつかの例 . . . . .	69
B.6	付録 A 英文講義録からの補遺 . . . . .	71

# 第1章 オーバービュー

## 1.1 Balanced Conditions

ベクトル空間の部分集合  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  に対し、 $\text{Span}(S)$  または  $\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$  は、 $v_1, v_2, \dots, v_n$  によって張られる線形部分空間を意味するものとする。

以下のような組  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を考える。

- $X \subset \mathbf{R}^m$ 。すなわち  $X$  は  $m$  次元実 Euclid 空間の有限部分集合。 $\mathbf{R}^m$  の元は列ベクトルで表し、内積は、 $\langle x, y \rangle = {}^t x \cdot y$  で表す。
- $R_i \subset X \times X$ 。すなわち  $R_i$  は空でない関係 (relation), ( $i = 0, 1, \dots, d$ )。

$\mathcal{X}$  は以下の条件を満たしているものとする。

$$C0 \text{ Span}(X) = \mathbf{R}^m.$$

$$C1 \ R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

$$C2 \ X \times X = R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_d, \text{ (disjoint union).}$$

$$C3 \ {}^t R_i = \{(x, y) \mid (y, x) \in R_i\} \text{ とすると、} {}^t R_i = R_{i'} \text{ となる } i' \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ が存在する。}$$

$$C4 \text{ 内積は } R_i \text{ 上で一定。すなわち、} \gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(d) \text{ が存在して、任意の } (x, y) \in R_i \text{ に対して } x \cdot y = \gamma(i). \text{ (} \gamma(i) = \gamma(j) \text{ となるような } i \neq j \text{ があっても良いとする。)}$$

$x, y \in X, 0 \leq i, j \leq d$  に対して、

$$\begin{aligned} P_{i,j}(x, y) &= \{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\} \subset \mathbf{R}^m, \\ \widehat{P_{i,j}}(x, y) &= \sum_{z \in X: (x,z) \in R_i, (z,y) \in R_j} z \in \mathbf{R}^m. \end{aligned}$$

と定義する。

定義 1.1.1  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を上の条件を満たすものとする。

1. 次の2条件を満たす時  $\mathcal{X}$  は *balanced condition* を満たす、または  $X$  は ( $m$  次元の) *balanced set* であるという。

(a) すべての  $x \in X, i \in \{0, 1, \dots, d\}$  について

$$P_{i,i'}(\widehat{x}, x) \in \text{Span}(x).$$

(b) すべての  $x, y \in X, i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$  について

$$P_{i,j}(\widehat{x}, y) - P_{j,i}(\widehat{x}, y) \in \text{Span}(x - y).$$

2. すべての  $x, y \in X, i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$  について次の条件を満たす時  $\mathcal{X}$  は *strongly balanced condition* を満たす、または  $X$  は ( $m$  次元の) *strongly balanced set* であるという。

$$P_{i,j}(\widehat{x}, y) \in \text{Span}(x, y).$$

注意.

1. 条件 C1, C4 より適当な定数  $c$  をとり、各ベクトルを  $c$  倍することにより  $X$  は、 $m-1$  次元単位球面  $S^{m-1}$  上の点と見ることができる。この定数倍による変形は定義 1.1.1 の条件に影響を及ぼさないことは簡単にわかる。また逆に有限集合  $\emptyset \neq X \subset S^{m-1}$  が  $\text{Span}(X) = \mathbf{R}^m$  を満たせば、

$$\Delta := \Delta(X) = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in X\} = \{\gamma_0 = 1 > \gamma_1 > \dots > \gamma_d\}$$

としたとき、 $R_i = \{(x, y) \mid \langle x, y \rangle = \gamma_i\}$  とおくことにより、 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  は条件 C0–C4 を満たす。この場合は、 ${}^t R_i = R_i$  である。

2. 一般に  $X \subset S^{m-1}$  が  $|\Delta(X)| = s+1$  を満たす時、 $X$  を  $s$  距離集合 ( $s$ -distance set) という。上の定義で述べた balanced condition は、P. Terwilliger が [26, 27] で定義した比較的新しいものであるが、球面上の有限集合に関しては、spherical code, spherical design, sphere packing, regular polytopes など代数的組合せ論に関する興味深い問題がたくさんある。これらについてはほとんど触れないが、興味のあるかたは、以下の文献を参照してほしい。[4, 7, 8, 9, 10]. ここでは、単に  $s$  距離集合  $X \subset S^{m-1}$  は、

$$|X| \leq \binom{m+s-1}{s} + \binom{m+s-2}{s-1}$$

を満たすことのみを述べておくこととする。定理 A.2.6 参照。

3.  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  が balanced (または strongly balanced) condition を満たすとする。 $\Delta(X) = \{\gamma_0 = 1 > \gamma_1 > \dots > \gamma_s\}$  を用いて上の様に  $X \times X$  の新しい分割  $\{R'_i \mid i = 0, 1, \dots, s\}$  を定義すると、 $\mathcal{X}' = (X, \{R'_i\}_{0 \leq i \leq s})$  も同様に balanced (または strongly balanced) condition を満たす。その意味では最初から  $\gamma(0) > \gamma(1) > \dots > \gamma(d)$  を仮定しても良いが、一般の場合を考えるメリットも大きいのでここでは、 $\gamma(i) = \gamma(j)$  となる  $i \neq j$  の存在も考慮に入れて考察する。
4. Strongly balanced set は balanced かという問題は未解決である。これについては後述する。

## 1.2 いくつかの例

まず次元が小さい時から見ていこう。 $m = 1$  のときは  $S^0 = \{-1, 1\}$  だから  $S^0$  の任意の空でない部分集合が balanced かつ strongly balanced になってしまう。

$m = 2$  とすると  $X$  は単位円  $S^1$  の部分集合と考えられるがこの場合も簡単に  $S$  は正  $n$  角形になることが確かめられる。このことを練習問題の形で下に記す。 $m = 2$  のときは定義 1.1.1 1 (a) の条件のみで十分であることもわかる。

**練習問題 1.2.1**  $X \subset S^1 \subset \mathbb{R}^2$  かつ  $\text{Span}(X) = \mathbb{R}^2$  とする。このとき次は同値である。

- (i)  $X$  は正  $n$  角形 ( $n \geq 3$ ) の頂点をなす。
- (ii)  $X$  は balanced condition を満たす。
- (iii)  $X$  は strongly balanced condition を満たす。
- (iv) すべての  $x \in X$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, d\}$  について  $P_{i,i'}(\widehat{x}, x) \in \text{Span}(x)$ 。

$m = 3$  とすると  $X$  は今度は単位球  $S^2$  の部分集合と考えられる。 $x, y \in X$  は一次独立すなわち  $\dim \text{Span}(x, y) = 2$  を満たすとする。 $\gamma(0) = 1 > \gamma(1) \geq \dots \geq \gamma(d)$  を最初の定義のようにとる。すると、

$$\begin{aligned} P_{i,j}(x, y) &= \{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\} \\ &\subset \{z \in S^2 \mid \langle x, z \rangle = \gamma(i), \langle z, y \rangle = \gamma(j)\} \end{aligned}$$

となるが、この右辺は高々2点からなる。ここで  $X$  は3次元の balanced set であるとし  $S = \{x - y \mid x, y \in X, \dim \text{Span}(x, y) = 2\}$  とおくと、上の考察から  $X$  は鏡映群 (reflection group)  $\Sigma(S) = \langle \sigma_s \mid s \in S \rangle$  で不変であることがわかる。ここで、 $\sigma_s$  は鏡映といわれる線形写像で次の式で定義されるものである。

$$\sigma_s(v) = v - \frac{2 \langle v, s \rangle}{\langle s, s \rangle} s.$$

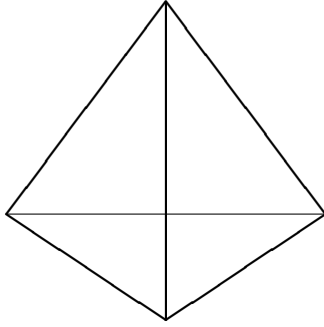
3次元の strongly balanced set についても同種類のことがいえる。鏡映群については文献が多いが例えば [16] を参照されたい。

**練習問題 1.2.2** 3次元の balanced set および strongly balanced set を分類せよ。(上に述べたことから、鏡映群が点上に可移に作用することが示せるので、定理 A.4.4 の系としても得られるが、できるだけ直接的な方法での証明を考えよ。)

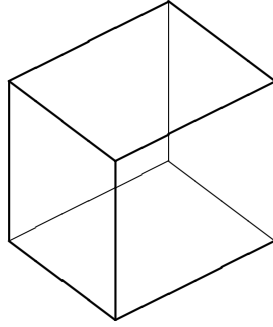
**例 1.2.1** 正多面体 (Platonic Solids) : 5つの正多面体が知られている。正四面体 (tetrahedron) 正六面体 (cube) 正八面体 (octahedron) 正十二面体 (dodecahedron) 正二十面体 (icosahedron) である。図 1.2 参照。面の数  $f$  辺の数  $e$  頂点の数  $v$  各面を囲む辺 (頂点) の数  $n$  各点に隣接している辺 (面) の数  $k$  を表にしたものを以下に添える。

これらの5つの正多面体は、1つを除いてすべて balanced かつ strongly balanced である。

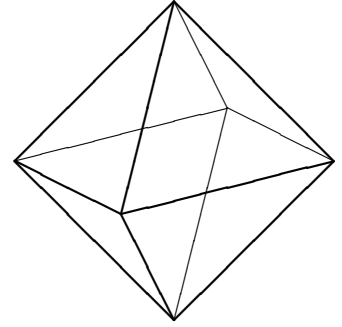
Name	$f$	$e$	$v$	$n$	$k$
正四面体 (Tetrahedron)	4	6	4	3	3
正六面体 (Cube)	6	12	8	4	3
正八面体 (Octahedron)	8	12	6	3	4
正十二面体 (Dodecahedron)	12	30	20	5	3
正二十面体 (Icosahedron)	20	30	12	3	5



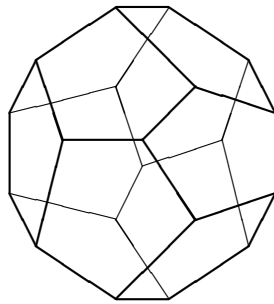
Tetrahedron



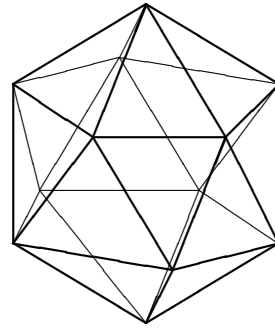
Cube



Octahedron



Dodecahedron



Icosahedron

図 1.1: Platonic Solids

練習問題 1.2.3 5つの正多面体の頂点の座標を決定し直接 balanced condition および strongly balanced condition を検証せよ。

一般の次元でも種々の balanced set および strongly balanced set が存在する。

例 1.2.2 高次元立方体 (*Hyper-cubes*) :  $H_m$  を次のようなものとする。

$$H_m = \{ {}^t(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i = \pm 1, i = 1, 2, \dots, m \}.$$

通常の立方体は  $H_3$  と見ることができる。  $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $y = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_m)$  とする。

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i = |\{i \mid x_i = y_i\}| - |\{j \mid x_j \neq y_j\}| = m - 2|\{j \mid x_j \neq y_j\}|$$



だから

$$R_i = \{({}^t(x_1, x_2, \dots, x_m), {}^t(y_1, y_2, \dots, y_m)) \in H_m \times H_m \mid |\{j \mid x_j \neq y_j\}| = i\}$$

とおく。条件  $C0 \sim C4$  を満たすことは明らかだが、 $H_m$  はさらに balanced condition および strongly balanced condition をみたす。

ここであげた例はすべてアソシエーションスキーム (association scheme) というものに密接に関係している。実際、現時点で知られている例はすべてアソシエーションスキームから得られるものである。

未解決問題 1.2.1 4次元の balanced set および strongly balanced set を分類せよ。

### 1.3 アソシエーションスキーム

この節では、代数的組合せ論において重要な役割を果たすアソシエーションスキームについて述べるが、一般論については、次の本を参照されたい [2, 6, 13]。

定義 1.3.1  $X$  を有限集合、 $R_i$  を  $X$  上の空でない関係 ( $\emptyset \neq R_i \subset X \times X, i = 0, 1, \dots, d$ ) とし以下の条件を考える。

$$A1 \ R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

$$A2 \ X \times X = R_0 \cup \dots \cup R_d, \text{ かつ } i \neq j \text{ のとき } R_i \cap R_j = \emptyset.$$

$$A3 \ \text{各 } i \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ に対して } {}^tR_i = R_{i'} \text{ となる } i' \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ が存在する。ここで } {}^tR_i = \{(x, y) \mid (y, x) \in R_i\}.$$

$$A4 \ \text{各 } h, i, j \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ と } (x, y) \in R_h \text{ に対して}$$

$$p_{i,j}^h = |\{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}|$$

は  $h, i, j$  だけによって決まり  $(x, y) \in R_h$  のとり方によらない。

$$A5 \ \text{各 } h, i, j \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ に対して } p_{i,j}^h = p_{j,i}^h.$$

$$A6 \ \text{各 } i \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ に対して } {}^tR_i = R_i.$$

条件 A1–A4 を満たす時  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  をアソシエーションスキーム (association scheme)、条件 A1–A5 を満たす時 可換アソシエーションスキーム (commutative association scheme)、条件 A1–A6 を満たす時 対称アソシエーションスキーム (symmetric association scheme) と呼ぶ。

$X$  を有限集合とした時、 $\text{Mat}_X(\mathcal{C})$  によって行と列が  $X$  の元でラベルづけられている  $|X|$  次の複素正方形行列全体を表すとする。

$R_i$  を  $X$  上の空でない関係 ( $\emptyset \neq R_i \subset X \times X, i = 0, 1, \dots, d$ ) としたとき  $A_i \in \text{Mat}_X(\mathcal{C})$  ( $i = 0, 1, \dots, d$ ) を次の様に定義する。

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & (x, y) \in R_i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

すると上の定義 1.3.1 の条件のそれぞれが行列  $A_i$  たちの次の条件と対応している。

$$A1' \quad A_0 = I.$$

$$A2' \quad A_0 + A_1 + \dots + A_d = J. \text{ ここで } J \text{ は成分がすべて } 1 \text{ の行列.}$$

$$A3' \quad \text{各 } i = 0, 1, \dots, d \text{ について } {}^t A_i = A_{i'} \text{ となる } i' \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ が存在する.}$$

$$A4' \quad A_i A_j = \sum_{h=0}^d p_{i,j}^h A_h, \quad p_{i,j}^h \in \mathcal{C} \text{ と書ける.}$$

$$A5' \quad \text{すべての } i, j = 0, 1, \dots, d \text{ について } A_i A_j = A_j A_i.$$

$$A6' \quad \text{すべての } i = 0, 1, \dots, d \text{ について } {}^t A_i = A_i.$$

$A_0, A_1, \dots, A_d$  を  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  の隣接行列 (adjacency matrices) という。

ここで条件  $A5'$  に注目すると、 $A_i$  たちの線形結合全体が積に関して閉じていることがわかる。

そこで  $\mathcal{X}$  を可換アソシエーションスキームとし、

$$\mathcal{M} = \text{Span}(A_0, A_1, \dots, A_d) \subset \text{Mat}_X(\mathcal{C})$$

とすると、条件  $A1', A3', A5'$  に注目することにより、 $\mathcal{M}$  は半単純可換代数になることがわかる。従って、 $\mathcal{M}$  には  $d$  個の原始冪等元  $E_0, E_1, \dots, E_d$  が存在して、

$$\mathcal{M} = \text{Span}(E_0, E_1, \dots, E_d) \subset \text{Mat}_X(\mathcal{C}), \quad E_i E_j = \delta_{i,j} E_i$$

となっている。条件  $A2'$  より  $E_0 = (1/|X|)J$  として良いこともわかる。この代数  $\mathcal{M}$  を Bose-Mesner 代数と呼ぶ。

$\tilde{\mathcal{X}} = (X, \{\tilde{R}_i\}_{0 \leq i \leq \delta})$  は balanced condition または strongly balanced condition をみたすとする。 $\tilde{A}_i \in \text{Mat}_X(\mathcal{C})$  ( $i = 0, 1, \dots, \delta$ ) を

$$(\tilde{A}_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & (x, y) \in \tilde{R}_i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定義する。

未解決問題 1.3.1  $\tilde{\mathcal{X}} = (X, \{\tilde{R}_i\}_{0 \leq i \leq \delta})$  は balanced condition (または strongly balanced condition) を満たすとする。このとき (可換) アソシエーションスキーム  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  で

$$\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_\delta \in \text{Span}(A_0, A_1, \dots, A_d)$$

となるものがあるか。

上の問題のように、 $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_\delta$  があるアソシエーションスキームの Bose-Mesner 代数に含まれている時、その balanced set (または strongly balanced set) はアソシエーションスキームに付随しているということにする。

Blanced condition (または strongly balanced condition) を満たす  $\tilde{\mathcal{X}} = (X, \{\tilde{R}_i\}_{0 \leq i \leq \delta})$  が可換アソシエーションスキーム  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  に付随しているとする。 $X$  の Gram 行列  $E$  ( $E_{x,y} = \langle x, y \rangle$ ) は  $E = \sum_{i=0}^{\delta} \gamma(i) \tilde{A}_i$  と書けるから  $E$  は  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  の Bose-Mesner 代数に含まれることがわかる。従って、原始冪等元たちの一次結合で書けるが、もし  $\tilde{A}_i$  たちがこの Bose-Mesner 代数を生成すれば、ある一つの原始冪等元の定数倍であることがわかる。その原始冪等元を  $E_j$  とすると Gram 行列の性質から  $E_j = \overline{E}_j = {}^t E_j$  となっていることがわかる。従って、可換アソシエーションスキームから balanced set または strongly balanced set を構成する時には、 $E_j = \overline{E}_j = {}^t E_j$  なる条件を満たす原始冪等元から構成することを考えれば良いことがわかる。

## 1.4 Krein パラメーターと表現グラフ

$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を可換アソシエーションスキーム、 $A_0, A_1, \dots, A_d$  を隣接行列とする。Bose-Mesner 代数

$$\mathcal{M} = \text{Span}(A_0, A_1, \dots, A_d) = \text{Span}(E_0, E_1, \dots, E_d)$$

は通常の積に関して半単純可換代数になっていたが、 $\circ$  で行列の成分ごとの積 (Hadamard 積、 $\circ$ -積などと呼ばれる) を表すと、 $A_i$  たちは  $(0, 1)$  行列だったから条件 A2 または A2' に注意すると、

$$A_i \circ A_j = \delta_{i,j} A_i, \quad i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$$

を満たすことがわかる。すなわちこの積に関して、 $A_i$  たちは冪等元になっている。

$\text{Span}(A_0, A_1, \dots, A_d)$  に積を  $\circ$  で定義したものを  $\mathcal{M}^*$  で表すことにすると、 $\mathcal{M}^*$  も半単純可換代数になる。 $E_0, E_1, \dots, E_d \in \mathcal{M}^*$  だから  $E_i \circ E_j$  も  $E_0, E_1, \dots, E_d$  の一次結合で書けることがわかる。そこで、

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{|X|} \sum_{h=0}^d q_{i,j}^h E_h$$

と書く。ここで  $q_{i,j}^h$  は Krein パラメーターと呼ばれ、定義からは複素数であるが、実際には非負実数であることが知られている。(補題 3.3.1 参照。)

定義 1.4.1  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を可換アソシエーションスキームとする。Bose-Mesner 代数の原始冪等元  $E = E_h$  が  $E = \overline{E} = {}^t E$  を満たすとする。 $\mathcal{X}$  の  $E$  に関する表現図式 (representation diagram)  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  とは  $\{0, 1, \dots, d\}$  を点集合とし、次の条件のもとで  $i$  と  $j$  の隣接関係を定義したものである。

$$i \sim j \Leftrightarrow q_{h,i}^j \neq 0.$$

相異なる  $i, j$  が隣接している時、辺とよび、 $i$  とそれ自身が隣接している時、ループと呼ぶ。表現グラフという時はループをすべて無視したものを考えることとする。

$E$  が対称行列であることから辺には向きがないことがわかる。

$V = CX$  によって、 $X$  の元を単位ベクトルとする、 $|X|$  次元列ベクトル空間とする。自然に  $\text{Mat}_X(C)$  が作用する。

命題 1.4.1  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を可換アソシエーションスキームとし、

$$E = E_h = {}^t E_h = \overline{E}_h = \frac{1}{|X|} \sum_{l=0}^d q_h(l) A_l$$

を原始冪等元とする。 $\hat{x} = Ex$ 、 $\hat{X} = \{\hat{x} \mid x \in X\}$  とする。この時以下は同値である。

- (i) 表現図式  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  は連結である。
- (ii) すべての  $l > 0$  に対して  $q_h(l) \neq q_h(0)$  である。
- (iii)  $x$  に対して  $\hat{x}$  を対応させる写像は単射である。

グラフが木 (tree) であるとは、連結でかつ自明でない閉路がないことである。このことは、連結でかつ、(辺の数) = (点の数) - 1 であることとも同値である。

定理 1.4.2  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を可換アソシエーションスキームとし、

$$E = E_h = {}^t E_h = \overline{E}_h = \frac{1}{|X|} \sum_{l=0}^d q_h(l) A_l$$

を原始冪等元とする。 $\hat{x} = Ex$ 、 $\hat{X} = \{\hat{x} \mid x \in X\}$  とする。すべての  $l > 0$  に対して  $q_h(l) \neq q_h(0)$  であると仮定する。この時以下が成立する。

(I) 次は同値。

- (i)  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  は表現グラフとして木 (tree) である。
- (ii)  $\hat{X} \subset EV$  は balanced set である。

(II) 次は同値。

(i)  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  は表現グラフとして木 (*tree*) でありかつループの数は高々1個。

(ii)  $\hat{X} \subset EV$  は *strongly balanced set* である。

特に、可換アソシエーションスキームに付随した *strongly balanced set* は、*balanced set* である。

定理の証明においては本質的ではないが、[26, 27] において P. Terwilliger は、対称アソシエーションスキームの場合にのみに対し上の定理を示している。証明においては、Terwilliger 代数といわれる  $\mathcal{M}$  を含み、 $\mathcal{M}^*$  と同型な代数も含む代数の部分空間に関する条件に翻訳して示している。

その意味でも、上の定理は、balanced conditions という幾何的な条件と、表現図式の性質、そして Terwilliger 代数の部分空間の性質を結び付けた興味深い定理だといえると思う。

**定義 1.4.2** 可換アソシエーションスキーム  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  が  $Q$ -polynomial であるとは、ある原始冪等元  $E = E_h$  に関する表現グラフ  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  が路 (path) となることである。

$Q$ -polynomial スキームは常に対称アソシエーションスキームである。また、表現グラフ  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  が路すなわち一本線となれば、それは木でもあるから  $Q$ -polynomial スキームがあればその定義に現れる原始冪等元を用いて balanced set が構成できることがわかる。 $Q$ -polynomial スキームは Lie 型の群に対応するいくつかの無限系列以外には、有限個しか知られていない。また、 $m = \text{rank} E > 2$  を固定すると、有限個の  $Q$ -polynomial スキームしか存在しないのではないかとされているが、balanced set についてはどの程度たくさん存在するのだろうか。 $Q$ -polynomial スキームとは関係しない balanced set の例はどうなっているのだろうか。

なお  $Q$ -polynomial スキームの研究、可換アソシエーションスキームに付随する balanced set の研究には Krein パラメーターの性質を調べるのが本質的である。しかし、これについてはほとんど知られていない。このことについては、[22, 23] を見よ。

## 1.5 群スキームの表現図式

アソシエーションスキームの例はそのほとんどが群  $G$  が可移に作用する集合から得られるが、可換アソシエーションスキームの最も基本的な例は、群自身から得られる。

**定義 1.5.1**  $G$  を有限群  $C_0, C_1, \dots, C_d$  をその共役類とする。

$$R_i = \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid g_2 g_1^{-1} \in C_i\}.$$

とすると  $\mathcal{X}(G) = (G, \{R_i \mid i = 0, 1, \dots, d\})$  は可換アソシエーションスキームとなる。 $\mathcal{X}(G)$  を群スキーム (group association scheme または group scheme) と呼ぶ。共役類  $C$  に

対して  $\hat{C} = \{g, g^{-1} \mid g \in C\}$  とする。上の  $R_i$  の定義で  $\hat{C}_i$  を  $C_i$  の代わりにとると対称アソシエーションスキーム  $\mathcal{X}(\hat{G})$  ができる。これを群スキームの対称化 (the symmetrization of the group association scheme) と呼ぶ。

群スキームにおいては Bose-Mesner 代数は、群環の中心  $Z(C[G])$  と同型であることが知られており、原始冪等元  $E_0, E_1, \dots, E_d$  は既約指標  $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_d$  と 1 対 1 に対応している。また、Krein パラメーター  $q_{i,j}^h$  は以下の様になる。

$$q_{i,j}^h = \frac{\chi_i(1)\chi_j(1)}{\chi_h(1)} \langle \chi_h, \chi_i\chi_j \rangle .$$

$E_h = {}^t E_h = \overline{E}_h$  なる条件は、対応する既約指標が実数値のみをとる (real valued character) であることと同値であるから、群スキームの表現図式についての性質を得ることは、指標の積の分解の様子を調べることに帰着される。

次の結果は McKay observation といわれるものの一つである。[21, 15, 19] 参照。

**定理 1.5.1**  $G$  を有限群  $\chi$  を実数値の忠実な指標で  $\chi(1) = 2$  を満たすものとする。  $\mathcal{D}^*$  で対応する表現図式を表すものとする、以下のいずれかが成り立つ。

- (1)  $Z_{n+1}$  : 位数が  $n+1$  の巡回群で  $\mathcal{D}^* \simeq \tilde{A}_n$ . (Figure 1.2)
- (2)  $D_{4(n-2)}$  : 位数が  $4(n-2)$  の二面体群、または  
 $Q_{4(n-2)} = (2, 2, n-2)$  : 位数が  $4(n-2)$  の一般四元数群で  $\mathcal{D}^* \simeq \tilde{D}_n$ . (Figure 1.3)
- (3)  $SL_2(3) = (2, 3, 3)$  で  $\mathcal{D}^* \simeq \tilde{E}_6$ . (Figure 1.4)
- (4)  $SL(2, 3) \cdot 2 = (2, 3, 4)$  で  $\mathcal{D}^* \simeq \tilde{E}_7$ . (Figure 1.5)
- (5)  $SL_2(5) = (2, 3, 5)$  で  $\mathcal{D}^* \simeq \tilde{E}_8$ . (Figure 1.6)
- (6)  $D_{2(2l+1)}$  位数が  $2(2l+1)$  の二面体群で  $\mathcal{D}^* \simeq \tilde{D}L_n$ . (Figure 1.7)

従って最初の可約な  $Z_n$  の場合を除いて、表現グラフがすべて木になっている。従って、これらの表現から得られる  $S^3 \subset R^4$  の集合は、すべて strongly balanced set である。とくに balanced set である。

なお、 $(l, m, n)$  は以下のような群を表すものとする。

$$(l, m, n) = \langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = xyz \rangle .$$

この群が有限群となるのは、 $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$  となる時で、次のいずれかである。

$$(l, m, n) = (2, 2, n), (2, 3, 3), (2, 3, 4) \text{ or } (2, 3, 5)$$

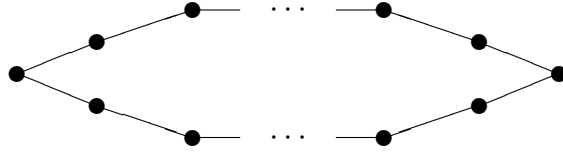


图 1.2:  $\tilde{A}_n$



图 1.3:  $\tilde{D}_n$

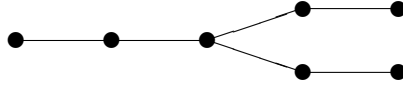


图 1.4:  $\tilde{E}_6$

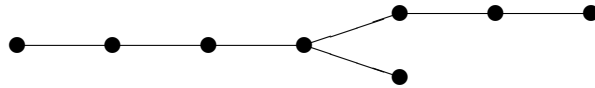


图 1.5:  $\tilde{E}_7$

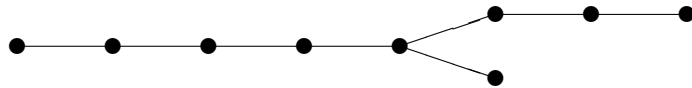


图 1.6:  $\tilde{E}_8$

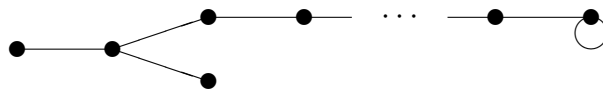


图 1.7:  $\tilde{D}L_n$

いくつか記号を定義する。 $G$  を有限群とし複素絶対既約指標の全体を  $\text{Irr}(G)$  とする。 $\phi \in \text{Irr}(G)$  に対して

$$\hat{\phi} = \begin{cases} \phi & \text{if } \phi \text{ is real valued,} \\ \phi + \bar{\phi} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とする。ここで  $\bar{\phi}$  は  $\phi$  を指標とする表現の随伴表現の指標を表す。すなわち任意の  $g \in G$  に対して  $\bar{\phi}(g) = \overline{\phi(g)} = \phi(g^{-1})$ 。  $\text{RIrr}(G) = \{\hat{\phi} \mid \phi \in \text{Irr}(G)\}$  とおく。

$\bar{Q}$  で  $Q$  の  $C$  における代数閉包を表し、 $G$  の指標  $\phi$  に対して  $\bar{Q}$  に  $\phi$  の値を付け加えた体を  $Q(\phi)$  で表す。 $\text{Gal}(L/K)$  は体の拡大  $L/K$  の Galois 群を表すものとする。

$\chi \in \text{Irr}(G)$  に対して

$$\hat{\chi}^2 = b \cdot 1 + a \cdot \hat{\chi} + \Psi \quad (1.1)$$

とする。ここで  $\Psi$  は  $G$  の指標で  $\chi$  も単位指標 1 を含まないものとする。式 (1.1) により  $\Psi$  は Galois 群  $\text{Gal}(\bar{Q}/Q(\hat{\chi}))$  で不変である。次の定理は最も単純なケース、すなわち  $\Psi$  が  $\text{Gal}(\bar{Q}/Q(\hat{\chi}))$  の作用に関してただ一つの軌道にはいる指標の和の定数倍である場合を扱ったものである。

**定理 1.5.2**  $G$  を有限群  $\chi, \psi_1, \dots, \psi_r \in \text{Irr}(G)$  とする。非負整数  $a, b, c$  と Galois 群  $\text{Gal}(\bar{Q}/Q(\hat{\chi}))$  の軌道  $\{\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_r\}$  に対して

$$\hat{\chi}^2 = b \cdot 1 + a \cdot \hat{\chi} + c \cdot (\hat{\psi}_1 + \dots + \hat{\psi}_r) \quad (1.2)$$

が成立しているとする。もし  $\chi$  が忠実ならば以下の条件のどれか一つが成立する。

- (i)  $\chi(1) = 1$  で  $G$  は巡回群。
- (ii)  $G$  は Frobenius 群でその補群は素数位数  $p$  かつ  $p = \chi(1) = 2r + 1$ 。
- (iii)  $\chi(1) = \hat{\chi}(1) = 2$ 、 $r = 1$  で  $G$  は 3 次対称群  $S_3$  と同型。
- (iv)  $\chi(1) = \hat{\chi}(1) = 2$ 、 $r = 1$  で  $G$  は位数 24、48、または 120 の正多面体群  $SL(2, 3)$ 、 $SL(2, 3) \cdot 2$ 、 $SL(2, 5)$  と同型である。
- (v)  $\chi(1) = \hat{\chi}(1) = 3$ 、 $r = 1$  で  $G$  は 5 次交代群  $A_5$  と同型である。

以下の参考文献の定理も参照 [18, 24]。

もし有限群  $G$  の群スキームの対称化が  $Q$ -polynomial ならば指標  $\chi, \psi \in \text{Irr}(G)$  で次の条件を満たすものが存在する。

$$\hat{\chi}^2 = b \cdot 1 + a \cdot \hat{\chi} + c \cdot \hat{\psi} \quad (1.3)$$

従って定理 1.5.2 において  $r = 1$  とすることにより次の定理が得られる。

**定理 1.5.3**  $G$  を有限群とする。 $G$  の群スキームの対称化が  $Q$ -polynomial ならば次のいずれかが成立する。



- (i)  $G \simeq Z_n$  : 位数  $n$  の巡回群。
- (ii)  $G \simeq S_3$  : 次数 3 の対称群。
- (iii)  $G \simeq A_4$  : 次数 4 の交代群。
- (iv)  $G \simeq SL(2, 3)$  : 3 元体上の 2 次特殊線形群。
- (v)  $G \simeq F_{21}$  : 位数 21 の *Frobenius* 群。

群スキームの表現グラフが木となる時、どのような木になるだろうか。いくつかの制限は知られている。筆者が位数の小さい場合を Computer Program の GAP を用いて調べたところ、2-群で表現グラフが木となる時、その木は、 $\tilde{D}_l$  型であるか、または、星型であった。それ以外にあるだろうか。このうち、星型になるものは、central type とよばれる群と関連しており、Gagola [12] によって調べられたものになることがわかっているが、 $\tilde{D}_l$  型の場合はどのような群になるのであろうか。前の例にもあるように、二面体群、一般四元数群はこのタイプである。

問題 1.5.1 表現グラフが  $\tilde{D}_l$  型となる忠実な既約表現を持つ群を特徴づけよ。

未解決問題 1.5.1 群スキームの表現グラフとなりうる木をすべて決定せよ。

未解決問題 1.5.2 表現グラフが木となりうる表現を持つ群を特徴づけよ。

## 第2章 アソシエーションスキーム

### 2.1 アソシエーションスキームと隣接行列

ここで、もう一度アソシエーションスキームの定義（定義 1.3.1 再述）から始める。

定義 2.1.1  $X$  を有限集合、 $R_i$  を  $X$  上の空でない関係 ( $\emptyset \neq R_i \subset X \times X, i = 0, 1, \dots, d$ ) とし以下の条件を考える。

$$A1 \ R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

$$A2 \ X \times X = R_0 \cup \dots \cup R_d \text{ で } i \neq j \text{ ならば } R_i \cap R_j = \emptyset.$$

$$A3 \ \text{各 } i \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ に対して } {}^t R_i = R_{i'} \text{ となる } i' \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ が存在する。ここで}$$
$${}^t R_i = \{(x, y) \mid (y, x) \in R_i\}.$$

$$A4 \ \text{各 } h, i, j \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ と } (x, y) \in R_h \text{ に対して}$$

$$p_{i,j}^h = |\{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}|$$

は  $h, i, j$  だけによって決まり  $(x, y) \in R_h$  のとり方によらない。

$$A5 \ \text{各 } h, i, j \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ に対して } p_{i,j}^h = p_{j,i}^h.$$

$$A6 \ \text{各 } i \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ に対して } {}^t R_i = R_i.$$

条件 A1–A4 を満たす時  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  をアソシエーションスキーム (*association scheme*)、条件 A1–A5 を満たす時 可換アソシエーションスキーム (*commutative association scheme*)、条件 A1–A6 を満たす時 対称アソシエーションスキーム (*symmetric association scheme*) と呼ぶ。

一般に、 $X$  を有限集合とした時、 $\text{Mat}_X(C)$  によって行と列が  $X$  の元でラベルづけられている  $|X|$  次の複素正方行列全体を表すとする。

$R$  を  $X$  上の空でない関係 ( $\emptyset \neq R \subset X \times X$ ) としたとき  $A \in \text{Mat}_X(C)$  を次の様に定義する。

$$A_{x,y} = \begin{cases} 1 & (x, y) \in R \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この行列を、関係  $R$  の隣接行列 (adjacency matrix) という。

練習問題 2.1.1  $X$  を有限集合、 $R_i$  を  $X$  上の空でない関係 ( $\emptyset \neq R_i \subset X \times X$ ,  $i = 0, 1, \dots, d$ ) とした時、定義 2.1.1 の各条件  $A1 - A6$  は行列  $A_i$  たちの下記の条件  $A1' - A6'$  と対応していることを示せ。

$$A1' \quad A_0 = I.$$

$$A2' \quad A_0 + A_1 + \dots + A_d = J. \text{ ここで } J \text{ は成分がすべて } 1 \text{ の } \text{Mat}_X(C) \text{ の行列である。}$$

$$A3' \quad \text{各 } i = 0, 1, \dots, d \text{ について } {}^t A_i = A_{i'} \text{ となる } i' \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ が存在する。}$$

$$A4' \quad A_i A_j = \sum_{h=0}^d p_{i,j}^h A_h \text{ となる } p_{i,j}^h \in C \text{ がある。}$$

$$A5' \quad \text{すべての } i, j = 0, 1, \dots, d \text{ について } A_i A_j = A_j A_i.$$

$$A6' \quad \text{すべての } i = 0, 1, \dots, d \text{ について } {}^t A_i = A_i.$$

$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  をアソシエーションスキームとしたとき  $A_0, A_1, \dots, A_d$  を  $\mathcal{X}$  の隣接行列 (adjacency matrices) という。 $A_0, A_1, \dots, A_d$  は上の条件  $A1' - A4'$  を満たすから、特に条件  $A4'$  に注目すると、 $A_i$  たちの線形結合全体が積に関して閉じていることがわかる。そこで、

$$\mathcal{M} = \text{Span}(A_0, A_1, \dots, A_d) = \left\{ \sum_{i=0}^d c_i A_i \mid c_i \in C \right\} \subset \text{Mat}_X(C)$$

とすると、 $\mathcal{M}$  は  $C$  上の行列からなる ( $C$  上の) 代数 (または多元環、英語では algebra) で行列の場合には、ベクトル空間で積に関して閉じたものとして良い) である。この代数をアソシエーションスキームの Bose-Mesner 代数 (BM-代数) と呼ぶ。

さらに、 $M = \sum_{i=0}^d c_i A_i \in \mathcal{M}$  とし、 $M^*$  で  $M$  の随伴行列  ${}^t \bar{M}$  を表すことにすると、

$$M^* = {}^t \bar{M} = \sum_{i=0}^d \bar{c}_i {}^t \bar{A}_i = \sum_{i=0}^d \bar{c}_i A_{i'} \in \mathcal{M}$$

である。複素行列  $M$  が正規行列であるとは、 $MM^* = M^*M$  が成り立つことだったから、条件  $A5'$  はこの代数が、可換であることを意味することに注意すると、以下のようにまとめることができる。

補題 2.1.1 アソシエーションスキームの Bose-Mesner 代数 は随伴行列をとる作用に関して閉じている。特に、可換アソシエーションスキームの Bose-Mesner 代数 は可換な正規行列からなる。

次の節で、上の補題の性質を用いて可換アソシエーションスキームの Bose-Mesner 代数 には原始冪等元からなる基底が存在することを示すが、その前に、Bose-Mesner 代数 に関するいくつかの性質を以下に練習問題の形で述べる。

練習問題 2.1.2 条件  $A1 - A4$  と  $A6$  を満たせば自動的に  $A5$  を満たす。すなわち対称アソシエーションスキームの定義に条件  $A5$  は不要。

練習問題 2.1.3  $A_0, A_1, \dots, A_d$  は一次独立であることを示せ。

$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  をアソシエーションスキームとする。この時各  $h = 0, 1, \dots, d$  について、 $d+1$  次の正方行列  $L_h$  を  $(L_h)_{i,j} = p_{h,j}^i$  で定義する。 $L_0, L_1, \dots, L_d$  をアソシエーションスキームの交叉行列 (intersection matrix) という。

練習問題 2.1.4 立方体  $H_3$  の場合の隣接行列  $A_0, A_1, A_2, A_3$  および交叉行列  $L_0, L_1, L_2, L_3$  を求めよ。

練習問題 2.1.5  $L_0, L_1, \dots, L_d$  をアソシエーションスキームの交叉行列とする。このとき、次の式を示せ。

$$L_i L_j = \sum_{h=0}^d p_{i,j}^h L_h.$$

## 2.2 半単純 (行列) 代数

この節では、半単純代数の基本的な定理について述べる。標準的な内容なので、様々な教科書に書かれているが、互いに交換可能な正規行列は、ユニタリ行列によって同時対角化できるということを特に学部で授業で既知とするのはかなり乱暴だと思われる。また、大学院生にも基本的なことがらは何回も繰り返して取り扱われることは無意味だとは思わないので、ここで証明をつけて取り扱うことにした。しかし、ここで必要な最小限に限るため、すべて複素数体上の行列環  $\text{Mat}_n(C)$  の中だけの議論とした。 $V = C^n$  は複素数体上の  $n$ -次元列ベクトル全体のなるベクトル空間を表し、 $u, v \in V$  に対し、 $\langle u, v \rangle = {}^t \bar{u}v$  で  $u$  と  $v$  のエルミート内積を表すこととする。 $\text{Mat}_n(C)$  の元  $M$  は、 $Mu$  と左からかけることにより、 $V$  (の元) に作用する。随伴行列  $M^* = {}^t \bar{M}$  の記号は  $\text{Mat}_n(C)$  においても通常通り用いる。

定義 2.2.1 1.  $\mathcal{A} \subset \text{Mat}_n(C)$  が代数 (algebra 多元環ともいう) であるとは、 $\mathcal{A}$  が  $C$  上のベクトル空間としての  $\text{Mat}_n(C)$  の部分空間であり、単位行列  $I$  を含みさらに行列の積に関して閉じていることである。

2. 代数  $\mathcal{A}$  が半単純 (semisimple) であるとは、 $A^* \in \mathcal{A}$  が任意の  $A \in \mathcal{A}$  について成り立つことである。

3.  $W \subset V$  が  $\mathcal{A}$ -加群 (module) であるとは、 $W$  が  $V$  の線形空間としての部分空間であり、かつ  $\mathcal{A}$  の作用に関して閉じていること、すなわち  $AW \subset W$  を満たすことである。 $AW \subset W$  という条件が満たされる時、 $W$  は  $\mathcal{A}$ -不変 ( $\mathcal{A}$ -invariant) だともいう。

4.  $\mathcal{A}$ -加群  $W \subset V$  が  $\{0\}$  とは異なりかつ、 $W$  に真に含まれる  $\mathcal{A}$ -加群が  $\{0\}$  以外に存在しないとき  $W$  を既約 (irreducible)  $\mathcal{A}$ -加群という。

半単純代数の加群は、既約加群の直和で書くことができるという一般に完全可約性 (complete reducibility) といわれている性質と、Schur の補題として知られている命題を示すが、線形代数の基本的な記号といくつかの命題を練習問題の形で下にあげる。以下の証明で用いるのはここにあげたもののみである。

$u_1, \dots, u_t \in V$  が  $i \neq j$  のとき  $\langle u_i, u_j \rangle = 0$  を満たせば、これらのベクトルは直交する (orthogonal) という。また、 $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$  を満たす時、正規直交系 (orthonormal) であるという。ここで、 $\delta$  は Kronecker のデルタをあらわす。二つの部分空間  $U$  と  $W$  が直交するとは、 $U$  の各元と  $W$  の各元が直交することである。

練習問題 2.2.1 以下のことを示せ。

1.  $\langle u, u \rangle$  は非負実数で、 $\langle u, u \rangle = 0$  であることと、 $u = 0$  であることは同値である。
2.  $W$  を  $V$  の部分空間とし  $u_1, \dots, u_t$  を  $W$  の正規直交系とすると、 $W$  の正規直交基底で  $u_1, \dots, u_t$  を含むものが存在する。
3.  $U$  と  $W$  を  $V$  の部分空間で  $W \subset U$  を満たすものとする。

$$W^\perp = \{v \in V \mid (v, w) = 0, \text{ for every } w \in W\}.$$

とすると、 $U = W \oplus (W^\perp \cap U)$  (直交直和)、すなわち  $U = W + (W^\perp \cap U)$  でかつ  $W \cap (W^\perp \cap U) = \{0\}$  である。

4.  $W$  を  $V$  の部分空間とし、 $M \in \text{Mat}_n(C)$  が  $MW \subset W$  をみたすとする。このとき零ベクトルではないベクトル  $v \in W$  とスカラー  $\lambda \in C$  で  $Mv = \lambda v$  を満たすものが存在する。

命題 2.2.1  $\mathcal{A}$  を  $\text{Mat}_n(C)$  の半単純環とする。 $\mathcal{A}$ -加群  $U$  と  $W$  ( $W \subset U$ ) をとると次が成り立つ。

- (1)  $W^\perp$  と  $W^\perp \cap U$  は  $\mathcal{A}$ -加群であり、 $U = W \oplus (W^\perp \cap U)$  (直交直和)。
- (2)  $U$  は既約  $\mathcal{A}$ -加群たちの直交直和で書ける。

証明.

- (1)  $\mathcal{A}$  は半単純だから任意の  $A \in \mathcal{A}$  に対して  $A^* \in \mathcal{A}$  が成立する。このことを踏まえてまず  $W^\perp$  が  $\mathcal{A}$ -加群であることを示す。

$A \in \mathcal{A}$ 、 $u \in W^\perp$ 、 $w \in W$  とすると

$$\langle Au, w \rangle = {}^t(\overline{Au})w = {}^t\bar{u}A^*w = \langle u, A^*w \rangle.$$

ここで  $A^* \in \mathcal{A}$  で  $W$  は  $\mathcal{A}$ -不変だから  $A^*w \in W$ 。  $u \in W^\perp$  だったから  $\langle u, A^*w \rangle = 0$  である。これは  $\langle Au, w \rangle = 0$  を意味するから  $Au \in W^\perp$  すなわち  $W^\perp$  は  $\mathcal{A}$ -不変である。これより  $W^\perp$  が  $\mathcal{A}$ -加群であることがわかる。

$W$  が  $\mathcal{A}$ -不変であるから、 $W^\perp \cap U$  が  $\mathcal{A}$ -加群であることは明らかである。最後の主張は、練習問題 2.2.1 (3) から得られる。

- (2)  $U = \{0\}$  のときは、既約加群の零個の直和と見ることができるから、 $U \neq \{0\}$  としてよい。 $W_1$  を  $U$  に含まれる  $\mathcal{A}$ -加群で (部分空間としての) 次元が最小のものとする。(1) によって、 $U = W_1 \oplus (W_1^\perp \cap U)$  (直交直和) と書くことができる。 $U_1 = W_1^\perp \cap U$  とする。 $U_1 = \{0\}$  ならば、 $U = W_1$  だから良い。そうでない時は、 $W_2$  を  $U_1$  に含まれる  $\mathcal{A}$ -加群で次元が最小のものとする。(1) によって  $U_1 = W_2 \oplus (W_1^\perp \cap U_1)$  (直交直和) と書くことができる。 $U_2 = W_1^\perp \cap U_1$  と置き、この操作を続けていけば  $\dim U < \infty$  だからある番号  $m$  において  $U_m = \{0\}$  となる。従って、 $U = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$  (直交直和) となり  $U$  は既約  $\mathcal{A}$ -加群たちの直交直和で書ける。 ■

命題 2.2.2 (Schur の補題)  $\mathcal{A} \subset \text{Mat}_n(C)$  を代数とし、 $W$  を既約  $\mathcal{A}$ -加群とする。 $A \in \mathcal{A}$  が  $\mathcal{A}$  のすべての元と可換な元とすると、 $A$  は  $W$  上にスカラーとして作用する。すなわち、ある  $\lambda \in C$  が存在して、 $Aw = \lambda w$  が任意の  $w \in W$  について成立する。

証明.  $AW \subset W$  だから練習問題 2.2.1 (4) により、零ベクトルとは異なるベクトル  $w \in W$  とスカラー  $\lambda \in C$  で  $Aw = \lambda w$  を満たすものが存在する。 $W$  は既約で、 $w \neq 0$  だから  $Aw$  が  $\mathcal{A}$ -不変部分空間であることを考え合わせると、 $W = \mathcal{A}w$  を得る。 $A \in \mathcal{A}$  は  $\mathcal{A}$  のすべての元と可換だから、 $(A - \lambda I)w = Aw - \lambda w = 0$  より

$$(A - \lambda I)W = (A - \lambda I)\mathcal{A}w = \mathcal{A}(A - \lambda I)w = \{0\}.$$

従って  $Av = \lambda v$  がすべての  $v \in W$  に対して成り立つ。これは、 $A$  が  $W$  上スカラーで作用することを意味する。 ■

定理 2.2.3  $\mathcal{A} \subset \text{Mat}_n(C)$  を可換な半単純代数とする。この時以下が成立する。

- (1)  $W$  を既約  $\mathcal{A}$ -加群とすると、 $\dim W = 1$  である。
- (2)  $V = C^n$  の正規直交基底  $w_1, w_2, \dots, w_n$  で  $\mathcal{A}$  の元の共通の固有ベクトルとなるものが存在する。すなわち、代数としての準同型 (線形写像で、積を積に移す)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n : \mathcal{A} \rightarrow C$  で  $Aw_i = \lambda_i(A)w_i$  がすべての  $A \in \mathcal{A}$  について成り立つものが存在する。
- (3) ユニタリ行列  $U \in \text{Mat}_n(C)$  ( $U^*U = UU^* = I$  を満たす行列) で、すべての  $A \in \mathcal{A}$  に対して、 $U^*AU$  が対角行列となるものが存在する。
- (4) (1) の  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  のうち相異なるものを  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_t$  とする。 $V_i = \text{Span}(w_j \mid \lambda_j = \mu_i)$  とすると、 $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$  (直交直和) と書ける。特に、 $A \in \mathcal{A}$  と任意の  $v_i \in V_i$  に対して  $Av_i = \mu_i(A)v_i$  である。

証明.

- (1) 命題 2.2.2 により  $\mathcal{A}$  の各元はスカラーで作用するから、 $0 \neq w \in W$  とすると、 $Aw \in \text{Span}(w)$ 、従って  $W = \mathcal{A}w = \text{Span}(w)$ 。これは  $\dim W = 1$  であることを示す。

- (2) 命題 2.2.1 より  $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$  (直交直和) と既約  $\mathcal{A}$ -加群の直和に書けるが (1) より  $\dim W_i = 1$  だから  $m = n$ 。  $W_i = \text{Span}(\mathbf{w}_i)$  とすれば、  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$  が求めるものである。
- (3)  $U = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n) \in \text{Mat}_n(C)$  と置く。  ${}^t\bar{\mathbf{w}}_i \mathbf{w}_j = \delta_{i,j}$  でこれは、  $U^*U$  の  $(i, j)$ -成分でもあるから  $U^*U = I$  となる。  $U$  は正則行列となり、  $UU^* = I$  も成立する。さらに  $A \in \mathcal{A}$  をとると、

$$\begin{aligned}
AU &= A(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) \\
&= (A\mathbf{w}_1, \dots, A\mathbf{w}_n) \\
&= (\lambda_1(A)\mathbf{w}_1, \dots, \lambda_n(A)\mathbf{w}_n) \\
&= (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(A) \end{pmatrix} \\
&= U \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(A) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- (4)  $V_i$  は、  $A \in \mathcal{A}$  の固有値が  $\mu_i(A)$  となる固有ベクトルで張られた部分空間だから主張は明らか。 ■

## 2.3 可換アソシエーションスキームの原始幂等元

$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を可換アソシエーションスキーム  $A_0, A_1, \dots, A_d$  をその隣接行列とし、  $\mathcal{M} = \text{Span}(A_0, A_1, \dots, A_d)$  を Bose-Mesner 代数 とする。練習問題 2.1.3 より、  $A_0, A_1, \dots, A_d$  は  $\mathcal{M}$  の一つの基底をなす。この節では、定理 2.2.3 を適用することにより  $\mathcal{M}$  に原始幂等元からなるもう一つの基底があることを示し、その基本性質を述べる。

まず  $V = C^X$  を行が  $X$  の元でラベルづけられた複素数体上  $|X|$  次元の列ベクトル空間とし  $x \in X$  によって、  $x$  に対応する成分が 1 で他が零の単位ベクトルを表すこととする。  $\mathcal{M}$  の元は自然に  $V$  に作用し、  $\mathcal{M}$  は補題 2.1.1 および定義 2.2.1 により可換な半単純代数となるから定理 2.2.3 を適用することができる。記号もそのまま用いると以下のようになる。

$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$  (直交直和)  $\dim V_i = m_i$ 、  $u_1^{(i)}, \dots, u_{m_i}^{(i)}$  を  $V_i$  の正規直交基底とし、  $U_i = (u_1^{(i)}, \dots, u_{m_i}^{(i)})$  を  $|X| \times m_i$  行列とする。

$$u_1^{(0)}, \dots, u_{m_0}^{(0)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{m_1}^{(1)}, \dots, u_1^{(t)}, \dots, u_{m_t}^{(t)}$$

は  $V$  の正規直交基底をなすから、

$$({}^t\bar{U}_i U_j)_{h,k} = {}^t\bar{u}_h^{(i)} u_k^{(j)} = \langle u_h^{(i)}, u_k^{(j)} \rangle = \delta_{i,j} \delta_{h,k}$$

である。従って、

$${}^t\bar{U}_i U_j = \delta_{i,j} I_{m_i}$$

となる。ここで、 $I_{m_i}$  は、 $m_i$  次の単位行列である。

$$E_i = U_i {}^t\bar{U}_i \in \text{Mat}_X(C) \text{ と置く。}$$

**補題 2.3.1** (1) すべての  $i, j = 0, 1, \dots, t$  に対して  $E_i E_j = \delta_{i,j} E_i$ 。

(2) すべての  $i = 0, 1, \dots, t$  に対して  ${}^t E_i = \bar{E}_i$ 。

(3)  $v_j \in V_j$  とすると  $E_i v_j = \delta_{i,j} v_j$ 。

(4)  $I = E_0 + E_1 + \dots + E_t$ 。

(5)  $M \in \mathcal{M}$  と各  $i = 0, 1, \dots, t$  に対して  $M E_i = \mu_i(M) E_i$ 。

(6)  $(E_i)_{x,y} = \langle E_i x, E_i y \rangle$  すなわち、 $E_i$  は、 $\{E_i x \mid x \in X\}$  の Gram 行列である。

**練習問題 2.3.1** 補題 2.3.1 を証明せよ。

**命題 2.3.2** 上の記号の元で、 $t = d$  すなわち

$$\mathcal{M} = \text{Span}(A_0, A_1, \dots, A_d) = \text{Span}(E_0, E_1, \dots, E_d).$$

であり、 $E_0, E_1, \dots, E_d$  は  $\mathcal{M}$  の基底である。

**証明.** 補題 2.3.1(4)、(5) により

$$A_i = A_i(E_0 + \dots + E_t) = \mu_0(A_i)E_0 + \dots + \mu_t(A_i)E_t.$$

従って、 $\text{Span}(A_0, A_1, \dots, A_d) \subset \text{Span}(E_0, E_1, \dots, E_t)$ 。 $A_0, A_1, \dots, A_d$  は一次独立だったから (練習問題 2.1.3)  $d \leq t$  を得る。

$i$  を固定する。 $j \neq i$  とすると、 $\mu_i$  と  $\mu_j$  は相異なりかつ、 $\mathcal{M}$  は、 $A_0, A_1, \dots, A_d$  によって張られているから、 $A_{l_j}$  で  $\mu_i(A_{l_j}) \neq \mu_j(A_{l_j})$  を満たすものが存在する。

$$F_i = \prod_{j \neq i} (A_{l_j} - \mu_j(A_{l_j}) I).$$

と置く。定義により  $F_i \in \mathcal{M} \subset \text{Span}(E_0, E_1, \dots, E_t)$  でありかつ  $i \neq j$  ならば  $F_i E_j = 0$  であり、

$$F_i E_i = \prod_{j \neq i} (\mu_i(A_{l_j}) - \mu_j(A_{l_j})) E_i \neq 0.$$

ここで、 $0 \neq c = \prod_{j \neq i} (\mu_i(A_{l_j}) - \mu_j(A_{l_j}))$  と置くと、

$$F_i = F_i I = F_i (E_0 + E_1 + \dots + E_t) = F_i E_i = c E_i$$



を得る。従って、 $E_i = c^{-1}F_i \in \mathcal{M}$  である。

$$\text{Span}(E_0, E_1, \dots, E_t) \subset \text{Span}(A_0, A_1, \dots, A_d).$$

さらに  $E_0, E_1, \dots, E_t$  は一次独立である。なぜなら  $\alpha_0 E_0 + \alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_t E_t = O$  とすると、両辺から  $E_i$  をかけることにより  $\alpha_i E_i = O$  を得るからである。(一般に零ベクトルを含まない直交系は一次独立である。) 従って、 $t \leq d$  を得る。 ■

**補題 2.3.3** (1)  $E \in \mathcal{M}$  が  $E^2 = E$  を満たせば  $E = E_{i_1} + \dots + E_{i_t}$ 、すなわち 原始冪等元のいくつかの和で書ける。

(2)  $\frac{1}{|X|}J = E_i$  となる  $E_i$  が存在する。

証明.

(1)  $E = \alpha_0 E_0 + \dots + \alpha_d E_d$  とする。 $E^2 = E$  だから  $E_i E_j = \delta_{i,j} E_i$  に注意すると、

$$E^2 = \alpha_1^2 E_1 + \dots + \alpha_d^2 E_d = E = \alpha_0 E_0 + \dots + \alpha_d E_d.$$

$E_0, E_1, \dots, E_d$  は一次独立だったから  $\alpha_i^2 = \alpha_i$  すなわち  $\alpha_i = 0$  または  $1$  を得る。

(2)  $J^2 = |X|J$  だから  $E = \frac{1}{|X|}J$  は  $E^2 = E$  を満たす。(1) より  $E$  は原始冪等元のいくつかの和で書けるが、 $J$  の階数は  $1$  であり、直交する冪等元の和の階数は、それぞれの冪等元の階数の和だから (対角化して考えてもいいし、補題 2.3.1 (3) を用いても良い)  $E$  が  $1$  個の原始冪等元と一致することがわかる。 ■

今後、 $E_0 = \frac{1}{|X|}J$  とする。

**練習問題 2.3.2** 各  $i$  について  ${}^t E_i = \bar{E}_i = E_{\hat{i}}$  となる  $0 \leq \hat{i} \leq d$  が存在する。

## 第3章 Krein パラメタと表現図式

この章では、 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を可換アソシエーションスキームとする。

### 3.1 Hadamard 積 と Krein パラメタ

Bose-Mesner 代数 には隣接行列  $A_0, A_1, \dots, A_d$  からなる基底と、もう一つ原始冪等元  $E_0, E_1, \dots, E_d$  からなる基底があった。さらに、隣接行列  $A_0, A_1, \dots, A_d$  は成分が 0 と 1 だけからなる行列だったから  $A1' - A2'$  の条件を考えると  $A_i \circ A_j = \delta_{i,j} A_i$  となっていることがわかる。ここで  $\circ$  は行列の成分ごとの積で  $\circ$ -積、Hadamard 積 などといわれるものである。 $E_0, E_1, \dots, E_d$  が  $\mathcal{M}$  の基底であることから  $E_i \circ E_j$  も  $E_h$  たちの一次結合で書けることがわかる。

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{|X|} \sum_{h=0}^d q_{i,j}^h E_h.$$

この係数に現れる  $q_{i,j}^h$  を Krein パラメタとよぶ。定義からは、Krein パラメタは複素数であるが、実際には、非負の実数であることがのちにわかる。

このことを含めて Bose-Mesner 代数 に関する式を列挙する。

- $\mathcal{M} = \text{Span}(A_0, A_1, \dots, A_d) = \text{Span}(E_0, E_1, \dots, E_d).$
- $A_i A_j = \sum_{h=0}^d p_{i,j}^h A_h.$
- $A_i \circ A_j = \delta_{i,j} A_i.$
- $E_i E_j = \delta_{i,j} E_i.$
- $E_i \circ E_j = \frac{1}{|X|} \sum_{h=0}^d q_{i,j}^h E_h.$

$A_0, A_1, \dots, A_d$  も  $E_0, E_1, \dots, E_d$  も基底だったから 行列  $P, Q \in \text{Mat}_{d+1}(\mathbb{C})$ 、 $P_{i,j} = p_j(i)$ 、 $Q_{i,j} = q_j(i)$  が存在して、以下を満たす。

- $A_i = \sum_{j=0}^d p_i(j) E_j.$
- $E_i = \frac{1}{|X|} \sum_{j=0}^d q_i(j) A_j.$

$P$  を第一固有行列 (*first eigen matrix*) または  $P$ -行列と呼び、 $Q$  を第二固有行列 (*second eigen matrix*) または  $Q$ -行列と呼ぶ。

練習問題 3.1.1 以下が成り立つことを示せ。

1.  $PQ = QP = |X|I$ .
2.  $\frac{1}{|X|} \sum_{h=0}^d p_h(i)q_j(h) = \frac{1}{|X|} \sum_{h=0}^d p_i(h)q_h(j) = \delta_{i,j}$ .

練習問題 3.1.2 以下が成り立つことを示せ。

1.  $\mu_j(A_i) = p_i(j)$  で、 $A_i E_j = p_i(j) E_j$ 。
2.  $(x, y) \in R_i$  のとき、 $(E_j)_{x,y} = \langle E_j x, E_j y \rangle = \frac{1}{|X|} q_j(i)$  であり、 $A_i \circ E_j = \frac{1}{|X|} q_j(i) A_i$ 。

## 3.2 $\text{Mat}_X(C)$ 上のエルミート内積

行列  $M \in \text{Mat}_X(C)$  に対して  $\text{tr}(M)$  で  $M$  のトレース (対角成分の和) を表し、 $\tau(M)$  で  $M$  の全成分の和を表すものとする。

練習問題 3.2.1 トレースに関して以下が成り立つことを示せ。

1.  $M$  を  $n \times m$  行列  $N$  を  $m \times n$  行列とすると、 $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$ 。
2.  $E_i$  を可換アソシエーションスキームの原始冪等元とすると、

$$\text{tr}(E_i) = \text{rank}(E_i) = \dim(V_i) = m_i.$$

$\text{Mat}_X(C)$  を  $C$  上のベクトル空間と考え、 $\text{Mat}_X(C)$  上にエルミート内積を以下のように定義する。  $M, N \in \text{Mat}_X(C)$  に対して、

$$\langle\langle M, N \rangle\rangle = \text{tr}({}^t \bar{M} N) = \text{tr}(M^* N).$$

練習問題 3.2.2  $L, M, N \in \text{Mat}_X(C)$  とすると以下が成立する。

1.  $\langle\langle M, N \rangle\rangle = \tau(\bar{M} \circ N) = \overline{\tau(\bar{N} \circ M)} = \overline{\langle\langle N, M \rangle\rangle}$ 。
2.  $\langle\langle M, M \rangle\rangle$  は非負実数であり、 $\langle\langle M, M \rangle\rangle = 0$  と  $M = O$  は同値。
3.  $\langle\langle L \circ M, N \rangle\rangle = \langle\langle L, \bar{M} \circ N \rangle\rangle$ 。
4.  $\langle\langle LM, N \rangle\rangle = \langle\langle L, NM^* \rangle\rangle = \langle\langle M, L^* N \rangle\rangle$ 。

上で定義したエルミート内積を可換アソシエーションスキームの Bose-Mesner 代数 に制限すると興味深い結果を得るがそれを述べる前に一つ定義と、簡単な性質を述べる。

$k_i = p_i(0)$  とおき  $i$  番めの次数 ( $i$ -th valency) と呼ぶ。

補題 3.2.1 以下が成立する。

(1)  $A_i J = J A_i = k_i J$ 。特に  $A_i$  の行和、列和はともに  $k_i$  に等しい。すなわち  $x \in X$  に対して、 $(x, y) \in R_i$  となる  $y \in X$  の数は  $x \in X$  のとり方によらず一定で  $k_i$  に等しい。

(2)  $k_i = k_{i'} = p_{i,i'}^0$  であり、また  $k_0 = 1$ 。

証明. 補題 3.1.2 により  $A_i E_0 = p_i(0) E_0$  であったが、補題 2.3.3 により  $|X| E_0 = J$  だったから、 $J A_i = A_i J = k_i J$ 。ここで  $J$  は成分がすべて 1 の行列だったから  $A_i J = k_i J$  および  $J A_i = k_i J$  の意味を考えると主張を得る。上の 2 式の転置をとると、(2) の主張も得られる。 ■

補題 3.2.2 以下が成立する。

- (1)  $\ll E_i, E_j \gg = m_i \delta_{i,j} = q_{i,j}^0$ .
- (2)  $\ll A_i, A_j \gg = |X| k_i \delta_{i,j} = |X| p_{i',j}^0$ .
- (3)  $\ll E_i, A_j \gg = m_i p_j(i) = k_j \overline{q_i(j)}$ .

証明.  $E_i^* = E_i$  にまず注意する。また  $|X| E_0 = J$  は、 $\circ$ -積に関する単位元である。

(1)  $\ll E_i, E_j \gg = \text{tr}(E_i^* E_j) = \text{tr}(E_i E_j) = \delta_{i,j} \text{tr}(E_i) = m_i \delta_{i,j}$ 。これを用いると、

$$\begin{aligned} \ll E_i, E_j \gg &= \ll J, E_i \circ E_j \gg = \frac{1}{|X|} \sum_{h=0}^d q_{i,j}^h \ll |X| E_0, E_h \gg \\ &= \sum_{h=0}^d q_{i,j}^h \ll E_0, E_h \gg = q_{i,j}^0 m_0 = q_{i,j}^0. \end{aligned}$$

(2) 補題 3.2.1 より  $\tau(A_i) = |X| k_i$  だから、

$$\ll A_i, A_j \gg = \tau(A_i \circ A_j) = \delta_{i,j} \tau(A_i) = |X| k_i \delta_{i,j}.$$

これを用いると、

$$\ll A_i, A_j \gg = \ll A_0, A_{i'} A_j \gg = \sum_{h=0}^d p_{i',j}^h \ll A_0, A_h \gg = p_{i',j}^0 \ll A_0, A_0 \gg = |X| p_{i',j}^0.$$

(3)  $\ll E_i, A_j \gg = \text{tr}(E_i A_j) = \text{tr}(p_j(i) E_i) = m_i p_j(i)$ 。一方、

$$E_i = \frac{1}{|X|} \sum_{h=0}^d q_i(h) A_h,$$

だから、

$$\ll E_i, A_j \gg = \frac{\overline{q_i(j)}}{|X|} |X| k_j = k_j \overline{q_i(j)}.$$

■

練習問題 3.2.3 1.  $\ll E_j, E_h \circ E_i \gg$  を計算することにより以下を示せ。

$$m_h q_{i,j}^h = m_j q_{h,i}^j = m_i q_{h,j}^i, \quad m_h = m_{\hat{h}}, \quad \text{また} \quad q_{i,j}^h = q_{i,\hat{j}}^{\hat{h}}.$$

2.  $\ll A_j, A_h A_i \gg$  を計算することにより以下を示せ。

$$k_h p_{i',j}^h = k_j p_{h,i}^j = k_i p_{h',j}^i, \quad k_h = k_{h'}, \quad \text{また} \quad p_{i,j}^h = p_{i',j'}^{h'}.$$

以下に、 $p_i(j)$ ,  $q_i(j)$ ,  $p_{i,j}^h$  および  $q_{i,j}^h$  についての重要な性質を述べる。この講義では以後用いないが基本的であるのでここに収録する。

補題 3.2.3  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を可換アソシエーションスキームとする。各  $i = 0, 1, \dots, d$  について以下が成立する。

- (1)  $p_0(i) = q_0(i) = 1$ 。
- (2)  $p_i(0) = k_i = \tau(A_i)/|X|$  かつ  $|X| = k_0 + k_1 + \dots + k_d$ 。
- (3)  $q_i(0) = m_i = \text{tr}(E_i) = |X|(E_i)_{x,x} = |X| \langle E_i x, E_i x \rangle$  が任意の  $x \in X$  について成立し、かつ  $|X| = m_0 + m_1 + \dots + m_d$ 。

証明. 殆んどすでに述べられているかまたは定義より明らかなことばかりである。 ■

命題 3.2.4  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を可換アソシエーションスキームとする。各  $0 \leq i, j \leq d$  について以下が成り立つ。

- (1) 任意の  $(x, y) \in R_i$  に対して  $\gamma_j(i) = \frac{q_j(i)}{m_j} = \frac{\overline{p_i(j)}}{k_i} = \frac{\langle E_j x, E_j y \rangle}{\langle E_j x, E_j x \rangle}$ 。
- (2)  $\frac{m_i}{|X|} \sum_{h=0}^d \frac{1}{k_h} p_h(i) \overline{p_h(j)} = \frac{m_i}{|X|} \sum_{h=0}^d k_h \gamma_i(h) \overline{\gamma_j(h)} = \frac{1}{|X| m_i} \sum_{h=0}^d k_h q_i(h) \overline{q_j(h)} = \delta_{i,j}$ 。
- (3)  $\frac{1}{k_i |X|} \sum_{h=0}^d m_h p_i(h) \overline{p_j(h)} = \frac{k_i}{|X|} \sum_{h=0}^d m_h \gamma_h(i) \overline{\gamma_h(j)} = \frac{k_i}{|X|} \sum_{h=0}^d \frac{1}{m_h} q_h(i) \overline{q_h(j)} \delta_{i,j}$ 。

証明.

- (1) これは、補題 3.2.2 からの直接の帰結である。
- (2)  $(P)_{i,h} = p_h(i)$ 、 $(Q)_{h,i} = q_i(h) = m_i \overline{p_h(i)} / k_h$  であるから、直交性は  $PQ = |X|I$  から得られる。
- (3)  $PQ = |X|I$  であるから  $P$  は正則行列で  $QP = |X|I$  も同時に成り立つ。練習問題 3.1.1 参照。 ■

補題 3.2.5 (1)  $q_{i,j}^h = \frac{m_i m_j}{|X|} \sum_{l=0}^d \frac{1}{k_l^2} \overline{p_l(i) p_l(j)} p_l(h)$ 。

$$(2) \ p_{i,j}^h = \frac{k_i k_j}{|X|} \sum_{l=0}^d \frac{1}{m_l^2} q_l(i) q_l(j) \overline{q_l(h)}.$$

証明.

(1) 補題 3.2.2 によって

$$\frac{1}{|X|} q_{i,j}^h m_h = \ll E_h, E_i \circ E_j \gg = \tau(\bar{E}_h \circ E_i \circ E_j).$$

あとは  $E_l$  たちを  $A_l$  たちの線形結合で書き表すことによって得られる。

(2) (1) と同様。 ■

練習問題 3.2.4 補題 3.2.5 の証明を完結させよ。

### 3.3 Terwilliger 代数 と Krein condition

$x \in X$  と  $M \in \text{Mat}_X(C)$  に対して  $x_M$  によって対角成分が  $(x_M)_{y,y} = M_{x,y}$  である対角行列を表すものとする。

定義 3.3.1  $x \in X$  を可換アソシエーションスキームの点としたとき、

$$x_{\mathcal{M}} = \{x_M \mid M \in \mathcal{M}\}$$

を  $x$  に関する双対 Bose-Mesner 代数 ( *dual Bose-Mesner algebra* ) という。また、 $\mathcal{M}$  に含まれる  $\mathcal{M}$  と  $x_{\mathcal{M}}$  で生成された代数

$$T(x) = \langle \mathcal{M}, x_{\mathcal{M}} \rangle_{alg} = \langle M, x_M \mid M \in \mathcal{M} \rangle_{alg} \subset \text{Mat}_X(C).$$

を  $x$  に関する Terwilliger 代数 ( *Terwilliger algebra* または *subconstituent algebra* ) という。

Terwilliger 代数 の特別な元についてその直交性を述べる。その帰結として Krein Condition も得られる重要な結果である。

補題 3.3.1  $M, N \in \text{Mat}_X(C)$ 、  $x, y \in X$  とする。このとき以下が成り立つ。

$$(1) \ \ll E_h x_M E_i, E_j y_N E_k \gg = \delta_{h,j} \delta_{i,k} (\bar{M}(E_h \circ E_i)^t N)_{x,y}.$$

$$(2) \ \ll E_i x_{E_h} E_j, E_i x_{E_h} E_j \gg = \frac{1}{|X|^2} q_{i,j}^{\hat{h}} m_{\hat{h}} = \frac{1}{|X|^2} q_{h,i}^j m_j \geq 0. \text{ 特に Krein パラメタ } q_{h,i}^j \text{ はすべて非負実数である。}$$

$$(3) \ \ll E_i x_{E_h} E_j, E_i x_{E_h} E_j \gg = 0 \Leftrightarrow E_i x_{E_h} E_j = O \Leftrightarrow q_{h,i}^j = 0.$$

証明.

- (1)  $E_i E_j = \delta_{i,j} E_i$  だから練習問題 3.2.2 におけるエルミート内積の性質を用いることにより以下を得る。

$$\begin{aligned}
\langle\langle E_h x_M E_i, E_j y_N E_k \rangle\rangle &= \langle\langle E_h x_M, E_j y_N E_k E_i \rangle\rangle \\
&= \delta_{i,k} \langle\langle x_M, E_h E_j y_N E_i \rangle\rangle \\
&= \delta_{i,k} \delta_{h,j} \langle\langle x_M, E_h y_N E_i \rangle\rangle \\
&= \delta_{i,k} \delta_{h,j} \operatorname{tr}(\overline{x_M} E_h y_N E_i) \\
&= \delta_{i,k} \delta_{h,j} \sum_{z \in X} (\overline{x_M} E_h y_N E_i)_{z,z} \\
&= \delta_{i,k} \delta_{h,j} \sum_{z,w \in X} (\overline{x_M})_{z,z} (E_h)_{z,w} (y_N)_{w,w} (E_i)_{w,z} \\
&= \delta_{i,k} \delta_{h,j} \sum_{z,w \in X} \bar{M}_{x,z} (E_h \circ E_i)_{z,w} {}^t N_{w,y} \\
&= \delta_{h,j} \delta_{i,k} (\bar{M} (E_h \circ E_i)^t N)_{x,y}.
\end{aligned}$$

- (2) (1) を適用することにより

$$\begin{aligned}
\langle\langle E_i x_{E_h} E_j, E_i x_{E_h} E_j \rangle\rangle &= (\bar{E}_h (E_i \circ E_j)^t E_h)_{x,x} \\
&= ((E_i \circ E_j) E_{\hat{h}})_{x,x} \\
&= \frac{q_{i,\hat{j}}^{\hat{h}}}{|X|} (E_{\hat{h}})_{x,x} \\
&= \frac{q_{i,\hat{j}}^{\hat{h}} m_{\hat{h}}}{|X|^2} = \frac{q_{h,i}^j m_j}{|X|^2},
\end{aligned}$$

最後の等号は練習問題 3.2.3 を用いた。以下のことに注意。

$$(E_h)_{x,x} = \left( \frac{1}{|X|} \sum_{i=0}^d q_h(i) A_i \right)_{x,x} = \frac{q_h(0)}{|X|} = \frac{1}{|X|} \operatorname{tr}(E_h) = \frac{m_h}{|X|}.$$

- (3) これは練習問題 3.2.2 より明か。 ■

**練習問題 3.3.1**  $\langle\langle x_{A_i} A_h x_{A_j}, x_{A_l} A_k x_{A_m} \rangle\rangle$  を計算することにより同様の結果を示せ。

Terwilliger 代数 については研究が進んでおり、代数的組合せ論の研究への応用が試みられている。しかし、その殆んどは、P. Terwilliger とその学生たちによる  $P$ - かつ  $Q$ -多項式型アソシエーションスキームの研究への応用である。ここでは、Terwilliger 代数 自体に立ち入ることはできないが、以下にその半単純性のみを練習問題の形で記す。

**練習問題 3.3.2**  $T(x)$  を  $x$  に関する Terwilliger 代数 とする。このとき  $T(x)$ 、 $E_i T(x) E_i$  および  $x_{A_i} T(x) x_{A_i}$  はすべて  $\operatorname{Mat}_X(C)$  に含まれる半単純代数であることを示せ。

注意. 高次元立方体  $H_m$  において  $T(x)$  を考えると、 $T(x)$  の中にリー代数  $sl_2$  と同型なリー代数をとることができ、代数としては、 $T(x)$  を生成している。実際、 $T(x)$  の既約表現はこのリー代数の既約表現と対応している。

### 3.4 表現図式と分配図式

まず図式とグラフの定義からはじめる。

**定義 3.4.1** 図式 ( *diagram* )  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  とは点集合 ( *vertex set* ) と呼ばれる  $V\Gamma \neq \emptyset$  と、隣接集合と呼ばれる  $V\Gamma$  の対からなる集合  $E\Gamma$  からなるものである。 $(x, y) \in E\Gamma$  が  $x \neq y$  である時弧 ( *arc* ) とよび、 $x = y$  である時ループ ( *loop* ) とよぶ。以下においては  $(x, y) \in E\Gamma \Leftrightarrow (y, x) \in E\Gamma$  である場合のみを考える時は、 $\{x, y\}, (x, y) \in E\Gamma$  を辺 ( *edge* ) とよぶ。図式において、ループがない時またはループを無視して考える時その図式をグラフ ( *graph* ) とよぶ。

以後点集合  $V\Gamma$  が有限集合からなる図式およびグラフのみ考える。

**定義 3.4.2**  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  をグラフとする。 $\Gamma$  の点の列  $x_0, x_1, \dots, x_l$  は

$$x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_l$$

を満たす時  $x_0$  と  $x_l$  を結ぶ長さ  $l$  の道 ( *walk* ) と呼ぶ。さらに、道が  $i = 0, 1, \dots, l-2$  において  $x_i \neq x_{i+2}$  を満たす時、路 ( *path* ) とよぶ。 $x_0 = x_l$  である道を閉道 ( *closed walk* ) と呼び、閉道である路を閉路 ( *circuit* ) と呼ぶ。任意の 2 点  $x, y$  について  $x$  と  $y$  を結ぶ道が存在する時グラフは連結 ( *connected* ) であるという。連結でかつ閉路を含まないグラフを木 ( *tree* ) と呼ぶ。長さが  $|X| - 1$  の路を含む木を路グラフまたは単に路と呼ぶ。

後で使うので、木に関する良く知られた事実を練習問題として記す。

**練習問題 3.4.1**  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  を連結なグラフとする。

1. この時次が同値であることを示せ。
  - (a)  $\Gamma$  は木である。
  - (b)  $|V\Gamma| = |E\Gamma| + 1$ .
2. 生成木がある。すなわち、グラフ  $\Delta = (V\Delta, E\Delta)$ 、 $V\Delta = V\Gamma$ 、 $E\Delta \subset E\Gamma$  で  $\Delta$  が木になるものが存在する。

**定義 3.4.3** (1)  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を可換アソシエーションスキームとし、 $E = E_h = {}^t E_h$  を対称な原始冪等元とする。 $\mathcal{X}$  の  $E$  に関する表現図式 ( *representation diagram* ) とは、 $\{0, 1, \dots, d\}$  を点集合とし、

$$i \sim j \Leftrightarrow q_{h,i}^j \neq 0.$$

によって結合関係を定義したものである。これを  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  と書く。 $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  において、ループを無視し辺のみを考えたものを表現グラフと呼ぶ。



- (2)  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を可換アソシエーションスキームとし、 $A = A_h = {}^t A_h$  を対称な隣接行列とする。 $\mathcal{X}$  の  $A$  に関する分配図式 (*distribution diagram*) または 交叉図式 (*intersection diagram*) であるとは、 $\{0, 1, \dots, d\}$  を点集合とし、

$$i \sim j \Leftrightarrow p_{h,i}^j \neq 0.$$

によって結合関係を定義したものである。これを  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{X}, A)$  と書く。 $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{X}, A)$  において、ループを無視し辺のみを考えたものを分配グラフと呼ぶ。

上の定義に置いて、 $E$  や  $A$  を対称としているので、結合関係は対称になっている。次に定義する  $Q$ -多項式型 または、 $P$ -多項式型 アソシエーションスキームは、ここでは示さないが必然的にともに対称アソシエーションスキームになる。

**定義 3.4.4**  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を可換アソシエーションスキームとする。

- (1) 対称な原始冪等元  $E$  に関する表現グラフ  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  が路であるとき  $\mathcal{X}$  を ( $E$  に関して)  $Q$ -多項式型 (*Q-polynomial*) であるという。
- (2) 対称な隣接行列  $A$  に関する分配グラフ  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{X}, A)$  が路であるとき  $\mathcal{X}$  を ( $A$  に関して)  $P$ -多項式型 (*P-polynomial*) であるという。
- (3)  $\mathcal{X}$  が ( $A$  に関して)  $P$ -多項式型である時、 $X$  を点集合とし、 $A$  に対応する関係  $R$  で辺を定義したグラフ  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  を距離正則グラフ (*distance-regular graph*) と呼ぶ。

距離正則グラフについては後述する。 $P$ - かつ  $Q$ -多項式型のアソシエーションスキームは古典型の直交多項式と深い関係があり、分類もかなり進んでいる。

## 第4章 Balanced Conditions

### 4.1 Balanced Conditions と Terwilliger の定理

まず、Balanced Condition をもう一度定義し、それに関する Terwilliger の定理について述べる。

オーバービューで定義したように、ベクトル空間の部分集合  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  に対し、 $\text{Span}(S)$  または  $\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$  は、 $v_1, v_2, \dots, v_n$  によって張られる線形部分空間を意味するものとする。

以下のような組  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を考える。

- $X \subset \mathbf{R}^m$ 。すなわち  $X$  は  $m$  次元実 Euclid 空間の有限部分集合。 $\mathbf{R}^m$  の元は列ベクトルで表し、内積は、 $\langle x, y \rangle = {}^t x \cdot y$  で表す。
- $R_i \subset X \times X$ 。すなわち  $R_i$  は空でない関係 (relation), ( $i = 0, 1, \dots, d$ )。

$\mathcal{X}$  は以下の条件を満たしているものとする。

$$C0 \quad \text{Span}(X) = \mathbf{R}^m.$$

$$C1 \quad R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

$$C2 \quad X \times X = R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_d, \text{ (disjoint union).}$$

$$C3 \quad {}^t R_i = \{(x, y) \mid (y, x) \in R_i\} \text{ とすると、} {}^t R_i = R_{i'} \text{ となる } i' \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ が存在する。}$$

$$C4 \quad \text{内積は } R_i \text{ 上で一定。すなわち、} \gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(d) \text{ が存在して、任意の } (x, y) \in R_i \text{ に対して } x \cdot y = \gamma(i) \text{。} (\gamma(i) = \gamma(j) \text{ となるような } i \neq j \text{ があっても良いとする。})$$

$x, y \in X, 0 \leq i, j \leq d$  に対して、

$$\begin{aligned} P_{i,j}(x, y) &= \{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\} \subset \mathbf{R}^m, \\ \widehat{P_{i,j}(x, y)} &= \sum_{z \in X: (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j} z \in \mathbf{R}^m. \end{aligned}$$

と定義する。

定義 4.1.1  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を上の条件を満たすものとする。

1. 次の2条件を満たす時  $\mathcal{X}$  は *balanced condition* を満たす、または  $X$  は ( $m$  次元の) *balanced set* であるという。

(a) すべての  $x \in X, i \in \{0, 1, \dots, d\}$  について

$$P_{i,i'}(\widehat{x, x}) \in \text{Span}(x).$$

(b) すべての  $x, y \in X, i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$  について

$$P_{i,j}(\widehat{x, y}) - P_{j,i}(\widehat{x, y}) \in \text{Span}(x - y).$$

2. すべての  $x, y \in X, i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$  について次の条件を満たす時  $\mathcal{X}$  は *strongly balanced condition* を満たす、または  $X$  は ( $m$  次元の) *strongly balanced set* であるという。

$$P_{i,j}(\widehat{x, y}) \in \text{Span}(x, y).$$

定義 4.1.1 において Balanced Set や Strongly Balanced Set は、アソシエーションスキームとは無関係に定義されている。しかし、定義の背景にアソシエーションスキームがあることは容易に想像できる。実際、最初のオーバービューで述べたように、現在のところ知られているものはすべて、アソシエーションスキームから構成されている。

次の定理は P. Terwilliger [26, 27] によるものである。実際の記述は原論文とは多少異なる。

定理 4.1.1  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を可換アソシエーションスキームとし、 $\mathcal{M}$  を Bose-Mesner 代数、

$$E = E_h = {}^t E_h = \overline{E}_h = \frac{1}{|X|} \sum_{l=0}^d q_h(l) A_l$$

を原始冪等元とする。  $\hat{x} = Ex$ 、  $\hat{X} = \{\hat{x} \mid x \in X\}$  とする。すべての  $l > 0$  に対して  $q_h(l) \neq q_h(0)$  であると仮定する。この時以下が成立する。

(I) 次は同値。

(i)  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  は表現グラフとして木 (*tree*) である。

(ii)  $\text{Span}(Mx_E N - Nx_E M \mid M, N \in \mathcal{M}) = \text{Span}(x_E M - Mx_E \mid M \in \mathcal{M})$ 。

(ii)  $\hat{X} \subset EV$  は *balanced set* である。

(II) 次は同値。

(i)  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  は表現グラフとして木 (*tree*) でありかつループの数は高々1個。

(ii)  $\text{Span}(Mx_E N \mid M, N \in \mathcal{M}) = \text{Span}(x_E M, Mx_E \mid M \in \mathcal{M})$ 。

(iii)  $\hat{X} \subset EV$  は *strongly balanced set* である。

特に、可換アソシエーションスキームに付随した *balanced set* は、*strongly balanced set* である。

以下の節において、この定理の証明を与えるが、上の定理は  $E = {}^t E$  なる原始冪等元についての定理である。では、対称でない時はどうか。

未解決問題 4.1.1 対称ではない原始冪等元から作られる表現グラフについての良い性質を見つけよ。

後日筆者はこの問題について一定の解答を得た。

## 4.2 Terwilliger Algebra の部分空間

$\mathcal{X}$  を可換アソシエーションスキームとする。記号を復習しよう。

- $A_0, A_1, \dots, A_d$  : 隣接行列
- $E_0, E_1, \dots, E_d$  : 原始冪等元
- $\mathcal{M} = \text{Span}(A_0, A_1, \dots, A_d) = \text{Span}(E_0, E_1, \dots, E_d)$ , Bose-Mensser 代数
- $x \in X$  と  $M \in \mathcal{M}$  に対して  $x_M$  は対角成分が  $(x_M)_{y,y} = M_{x,y}$  によって定義される対角行列を表す。
- $T(x) = \langle M, x_M \mid M \in \mathcal{M} \rangle_{alg} \subset \text{Mat}_X(\mathcal{C})$  :  $x$  に関する Terwilliger 代数

以後簡単のため  $E = E_1 = {}^t E_1$  とし、 $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  について考える。

定理 4.1.1 の主張に現れた以下のような  $T(x)$  の部分空間 4 個を考える。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \mathcal{M}x_Ex\mathcal{M} = \text{Span}(E_ix_Ex_j \mid 0 \leq i, j \leq d) \\
 &= \text{Span}(A_ix_EA_j \mid 0 \leq i, j \leq d) \\
 \mathcal{N} &= x_Ex\mathcal{M} + \mathcal{M}x_E = \text{Span}(x_EA_i, A_ix_E \mid 0 \leq i \leq d), \\
 \mathcal{L}_0 &= \text{Span}(Mx_EN - Nx_EM \mid M, N \in \mathcal{M}) \\
 &= \text{Span}(E_ix_Ex_j - E_jx_Ex_i \mid 0 \leq i < j \leq d) \\
 &= \text{Span}(A_ix_EA_j - A_jx_EA_i \mid 0 \leq i < j \leq d) \\
 \mathcal{N}_0 &= \text{Span}(x_EM - Mx_E \mid M \in \mathcal{M}) \\
 &= \text{Span}(x_EA_i - A_ix_E \mid 0 \leq i \leq d).
 \end{aligned}$$

定義から明らかに次が成り立つ。

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{N}, \mathcal{L}_0, \text{ かつ } \mathcal{N}, \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{N}_0$$

定理 4.1.1 における条件 (ii) は  $I, II$  においてそれぞれ、 $\mathcal{L}_0 = \mathcal{N}_0$ 、 $\mathcal{L} = \mathcal{N}$  である。

補題 4.2.1  $A_i x_E$  および  $x_E A_i$  の成分は以下ようになる。

$$(1) (x_E A_i)_{yz} = \begin{cases} E_{x,y} & (y, z) \in R_i \\ 0 & (y, z) \notin R_i, \end{cases} \quad (A_i x_E)_{yz} = \begin{cases} E_{x,z} & (y, z) \in R_i \\ 0 & (y, z) \notin R_i. \end{cases}$$

(2) 特に  $(x, y), (z, x) \in R_i$  とすると

$$(a) (x_E A_i)_{x,y} = E_{x,x} = q_1(0)/|X| = m_1/|X|.$$

$$(b) (A_i x_E)_{x,y} = E_{x,y} = q_1(i)/|X|.$$

$$(c) (x_E A_i)_{z,x} = E_{x,z} = q_1(i)/|X|.$$

$$(d) (A_i x_E)_{z,x} = E_{x,x} = q_1(0)/|X| = m_1/|X|.$$

証明.  $A_i$  の  $(x, y)$  成分は、 $(x, y) \in R_i$  の時のみ 1 でそれ以外は 0 であった。 $x_E$  は対角行列だったからそれを左からかけることは各行を定数倍することであり、右からかけることは各列を定数倍することであった。従って、 $x_E A_i$  および  $A_i x_E$  の  $(x, y)$  成分は、 $(x, y) \notin R_i$  ならば 0 である。一方

$$E = E_1 = \frac{1}{|X|} \sum_{i=0}^d q_1(i) A_i$$

だったから  $(x, y) \in R_i$  のとき

$$(x_E)_{y,y} = E_{x,y} = \frac{1}{|X|} q_1(i)$$

である。これより (2) を得る。 ■

補題 3.3.1 および 練習問題 3.2.3 より次が成り立つ。

1.  $\ll E_i x_E E_j, E_k x_E E_l \gg = \delta_{i,k} \delta_{j,l} \frac{1}{|X|^2} q_{1,i}^j m_j \geq 0$ .
2.  $\ll E_i x_E E_j, E_i x_E E_j \gg = 0 \Leftrightarrow E_i x_E E_j = O \Leftrightarrow q_{1,i}^j = 0$ .

まず最初の式は  $E_i x_E E_j$  が直交系をなすことを意味している。0 でないベクトルからなる直交系は一次独立で、 $E_i x_E E_j = O$  となる条件は後の同値条件で与えられている。また、表現図式  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  においては、

$$i \sim j \Leftrightarrow q_{1,i}^j \neq 0 \Leftrightarrow E_i x_E E_j \neq O$$

であった。以下において、 $\text{edge}(\mathcal{D}^*)$  で表現グラフの辺の個数、 $\text{loop}(\mathcal{D}^*)$  で表現図式のループの個数を表す。以上のことより、次の補題は明らかである。

補題 4.2.2  $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{L}_0$  の次元は次の式で与えられる。

$$(1) \dim \mathcal{L} = |\{(i, j) \mid q_{1,i}^j \neq 0 \text{ を満たす } 0 \leq i, j \leq d\}| = 2 \cdot \text{edge}(\mathcal{D}^*) + \text{loop}(\mathcal{D}^*).$$

$$(2) \dim \mathcal{L}_0 = |\{(i, j) \mid q_{1,i}^j \neq 0 \text{ を満たす } 0 \leq i < j \leq d\}| = \text{edge}(\mathcal{D}^*).$$

補題 4.2.3 次の式が成り立つ。

$$(1) \mathcal{N} = \bigoplus_{i=0}^d \text{Span}(x_E A_i, A_i x_E).$$

$$(2) 1 \leq \dim \text{Span}(x_E A_i, A_i x_E) \leq 2.$$

$$(3) \dim \text{Span}(x_E A_i, A_i x_E) = 1 \Leftrightarrow q_1(0) = \pm q_1(i) \Leftrightarrow x_E A_i = \pm A_i x_E.$$

(4) すべての  $i = 1, 2, \dots, d$  に対して  $q_1(0) \neq q_1(i)$  が成り立つとする。このとき次が成り立つ。

(a) ある  $i$  について  $q_1(i) = -q_1(0)$  ならば  $j \neq i$  については  $q_1(j) \neq -q_1(0)$  でありかつ  $\dim \mathcal{N} = 2d$ 、 $\dim \mathcal{N}_0 = d$  である。さらに  $\hat{X} = \{Ez \mid z \in X\}$  とすると  $\hat{X} = -\hat{X}$  である。このとき対極的 (antipodal) と言う。

(b) すべての  $i$  について  $q_1(i) \neq -q_1(0)$  であれば  $\mathcal{N} = 2d + 1$  かつ  $\dim \mathcal{N}_0 = d$  である。

証明. (1) 直和であることを言えば良い。そこで

$$\sum_{i=0}^d (\alpha_i x_E A_i + \beta_i A_i x_E) = O$$

とおく。  $(y, z) \in R_i$  を取り両辺の  $(y, z)$  成分を見ると

$$0 = \left( \sum_{i=0}^d (\alpha_i x_E A_i + \beta_i A_i x_E) \right)_{y,z} = (\alpha_i x_E A_i + \beta_i A_i x_E)_{y,z}.$$

しかし  $(y, z)$  が  $R_i$  に入らない時は  $\alpha_i x_E A_i + \beta_i A_i x_E$  の  $(y, z)$  成分はいつでも 0 だったから  $\alpha_i x_E A_i + \beta_i A_i x_E = O$  を得る。

(2) 補題 4.2.1 によって  $(x, y) \in R_i$  としたとき、 $(x_E A_i)_{x,y} = q_1(0)/|X| = m_1/|X| \neq 0$  だから  $x_E A_i \neq O$ 。従って (2) を得る。

(3) ある  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  について  $\alpha x_E A_i + \beta A_i x_E = O$  とする。  $(x, y), (z, x) \in R_i$  をとり両辺の  $(x, y)$   $(z, x)$  成分を考えると、

$$\begin{cases} \alpha q_1(0) + \beta q_1(i) = 0 & (x, y) \text{ 成分} \\ \alpha q_1(i) + \beta q_1(0) = 0 & (z, x) \text{ 成分}. \end{cases}$$

斉次の連立一次方程式が自明でない解を持つから、 $q_1(0)^2 - q_1(i)^2 = 0$  すなわち  $q_1(0) = \pm q_1(i)$  を得る。

逆にある  $i$  について  $q_1(0) = \pm q_1(i)$  とする。すると 補題 4.2.1 によって各  $(y, z) \in R_i$  について

$${}^t y {}^t E E z = {}^t y E z = E_{y,z} = \frac{q_1(i)}{|X|} = \pm \frac{q_1(0)}{|X|} = \pm E_{y,y} = \pm {}^t y E y = \pm {}^t y {}^t E E y.$$

従って、 $Ey = \pm Ez$  がすべての  $(y, z) \in R_i$  について成立することがわかる。よって、すべての  $(y, z) \in R_i$  について

$$(x_E A_i)_{y,z} = E_{x,y} = {}^t x E y = \pm {}^t x E z = \pm E_{x,z} = \pm (A_i x_E)_{y,z}$$

であり、この場合には、 $x_E A_i = \pm A_i x_E$  となっていることがわかる。

(4) (a) 上で見たようにこの場合は、 $\hat{X} = -\hat{X}$  となっている。仮定から  $Ey = Ez \Leftrightarrow (y, z) \in R_0$ , i.e.,  $y = z$  である。そこで、 $q_1(0) = q_1(i) = q_1(j)$  とすると、 $(x, y) \in R_i$ 、 $(x, z) \in R_j$  とするとき、 $Ey = -Ex = Ez$  だから、 $y = z$  となるから  $i = j$ 。このようにして  $q_1(0) = -q_1(i)$  となる  $i$  はただ一つに決まることがわかる。従って、

$$\dim \text{Span}(x_E A_j, A_j x_E) = 1 \Leftrightarrow j \in \{0, i\}.$$

これは  $\dim \mathcal{N} = 2d$  を意味する。我々の仮定から、 $x_E A_j - A_j x_E = O$  となるのは、 $j = 0$  となるときまたその時に限るから、 $\dim \mathcal{N}_0 = d$  は明らかである。補題 4.2.1 (2) 参照。

(b) この場合は (a) における考察により  $\dim \text{Span}(x_E A_j, A_j x_E) = 1 \Leftrightarrow j = 0$  だから明らか。■

### 4.3 表現グラフの連結性

命題 4.3.1  $E = E_1 = {}^t E_1$  とし  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  を表現グラフとする。

(1)  $C_{\mathcal{M}}(x_E) := \{M \in \mathcal{M} \mid Mx_E = x_E M\}$  とすると、

$$C_{\mathcal{M}}(x_E) = \text{Span}(A_i \mid i = 0, 1, \dots, d, q_1(0) = q_1(i)).$$

(2) 次は同値。

(i)  $\mathcal{D}^*$  は連結。

(ii)  $\hat{X} = \{Ex \mid x \in X\} \subset EV = V_1$  はすべてことなる。すなわち  $|X| = |\hat{X}|$ 。

(iii) すべての  $i \geq 1$  に対して  $q_1(0) \neq q_1(i)$ 。

証明. (1)  $M = \sum_{h=0}^d \alpha_h A_h \in \mathcal{M}$  とおくと、

$$x_E M - M x_E = \sum_{h=0}^d \alpha_h (x_E A_h - A_h x_E).$$

ここで、 $x_E M - M x_E = O$  とすると、補題 4.2.3 (1) により すべての  $h$  について  $\alpha_h (x_E A_h - A_h x_E) = O$  を得る。 $x_E A_h - A_h x_E = O$  は  $q_1(0) = q_1(h)$  と同値だったから、左辺は右辺に含まれる。同様にして、逆の包含関係も得られる。

(2) (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)  $(x, y) \in R_i$  とすると、

$$Ex = Ey \Leftrightarrow \langle Ex, Ey \rangle = \langle Ex, Ex \rangle \Leftrightarrow (E)_{x,y} = (E)_{x,x} \Leftrightarrow q_1(i) = q_1(0).$$

これより (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) を得る。

(i)  $\Leftrightarrow$  (iii)  $\Delta$  を  $\mathcal{D}^*$  の連結成分とする。  $F = \sum_{i \in \Delta} E_i$  とおく。次のことに注意する。

$$E_j x_E E_i = O \Leftrightarrow q_{1,j}^i = 0 \Leftrightarrow j \not\sim i.$$

すると、  $i \in \Delta$ 、  $j \notin \Delta$  であるとする、  $E_j x_E E_i = O$  だから

$$\begin{aligned} x_E F &= I x_E F = \left( \sum_{j=0}^d E_j \right) x_E \left( \sum_{i \in \Delta} E_i \right) \\ &= \left( \sum_{j \in \Delta} E_j \right) x_E \left( \sum_{i \in \Delta} E_i \right) \\ &= \left( \sum_{j \in \Delta} E_j \right) x_E \left( \sum_{i=0}^d E_i \right) \\ &= F x_E \end{aligned}$$

ここで  $i \geq 1$  について  $q_1(0) \neq q_1(i)$  であるとする、上で証明したことから、  $F \in \text{Span}(I)$  すなわち  $\Delta = \{0, 1, \dots, d\}$  を得る。

(i)  $\Rightarrow$  (iii) は練習問題としておく。こちら向きは本論では用いない。 ■

練習問題 4.3.1  $S = \{i \mid q_1(0) = q_1(i)\} \neq \{0\}$  とする時次を示せ。

1. 任意の  $i, j \in S$  に対して、  $i' \in S$  であり  $A_i A_j$  は  $h \in S$  なる  $A_h$  たちの一次結合で書ける。
2.  $F = \sum_{i \in S} A_i$  また  $f = \sqrt{\sum_{i \in S} k_i}$  とおく。すると、  $F^2 = f^2 F$  である。
3.  $T \subset \{0, 1, \dots, d\}$  で 0 と 1 を含み  $(1/f)F = \sum_{j \in T} E_j$  を満たすものが存在する。
4. 任意の  $i, j \in T$  に対して、  $E_i \circ E_j$  は  $h \in T$  なる  $E_h$  たちの一次結合で書ける。
5. 0 を含む  $\mathcal{D}^*$  の連結成分は  $T$  に含まれかつ  $T \neq \{0, 1, \dots, d\}$  である。

$S \neq \{0\}$  である時、可換アソシエーションスキーム  $\mathcal{X}$  は非原始的 (*imprimitive*) と言う。

補題 4.3.2 すべての  $i \geq 1$  について  $q_1(i) \neq q_1(0)$  であり、かつある  $h \geq 0$  について  $q_1(h) = -q_1(0)$  であるとする。すると、すべての  $i = 0, 1, \dots, d$  について  $E_i x_E E_i = O$  である。すなわち表現グラフ  $\mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E)$  はループを持たない。

証明. 補題 4.2.3 によって  $x_E A_h = -A_h x_E$  である。従って、  $A_h^2 \in C_{\mathcal{M}}(x_E)$ 。命題 4.3.1 の中で示したことにより、  $A_h^2$  は  $I$  の零でない定数倍であることがわかる。特に  $A_h$  は正則行列で、その固有値  $p_h(i)$  はすべて零でない。  $A_h E_i = p_h(i) E_i$  だったから、

$$p_h(i) E_i x_E E_i = A_h E_i x_E E_i = E_i A_h x_E E_i = -E_i x_E A_h E_i = -p_h(i) E_i x_E E_i.$$

従って、  $E_i x_E E_i = O$  すなわち  $q_{1,i}^i = 0$  を得る。 ■



補題 4.3.3  $\Delta = \{q_1(i) \mid i = 0, 1, \dots, d\}$  また  $\delta = |D| - 1$  すなわち、相異なる  $q_1(i)$  の数から 1 を引いたものを  $\delta$  とする。  $d_{\mathcal{D}^*}$  でグラフ  $\mathcal{D}^*$  の直径 ( *diameter* ) すなわち

$$d_{\mathcal{D}^*} = \max\{\partial(i, j) \mid 0 \leq i, j \leq d\}$$

とする。この時次が成り立つ。

$$d_{\mathcal{D}^*} \leq \delta.$$

証明.  $\Delta = \{\alpha_0 = q_1(0), \alpha_1, \dots, \alpha_\delta\}$  とし  $F \in \text{Mat}_X(C)$  を次のように定義する。

$$F = (E - \frac{\alpha_1}{|X|}J) \circ \dots \circ (E - \frac{\alpha_\delta}{|X|}J).$$

まず、 $F$  の定義式から、 $F \in \mathcal{M} = \text{Span}(A_0, A_1, \dots, A_d)$ 。また任意の  $i \neq 0$  について、 $A_i \circ E = (q_1(i)/|X|)A_i$  で、 $q_1(i) \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_\delta\}$  だから  $A_i \circ F = O$ 。そこで

$$c = (\frac{\alpha_0}{|X|} - \frac{\alpha_1}{|X|}) \circ \dots \circ (\frac{\alpha_0}{|X|} - \frac{\alpha_\delta}{|X|}) \neq 0$$

とおくと  $F = cA_0$  を得る。任意に  $i$  をとると

$$E_i \circ F = \frac{q_i(0)}{|X|}cA_0 = \frac{q_i(0)c}{|X|}(E_0 + E_1 + \dots + E_d)$$

となる。この式は、どの  $j$  とも  $\mathcal{D}^*$  上での  $i$  との距離は、 $\delta$  以下であることを示している。従って、 $d_{\mathcal{D}^*} \leq \delta$  である。 ■

## 4.4 Terwilliger の定理の証明

この節では、定理 4.1.1 の証明を与える。

まず、次の補題を示す。

補題 4.4.1  $E = E_1 = {}^tE_1$  とし、 $\hat{x} = Ex \in V_1$  とする。このとき、次の式が成り立つ。

- (1)  $P_{i,i'}(\widehat{x}, x) = p_i(1)\hat{x} = p_{i'}(1)\hat{x}$ 。
- (2)  $u, v \in X$  とすると、 $(A_i x_E A_j)_{u,v} = \langle \hat{x}, P_{i,j}(\widehat{u}, v) \rangle$ 。
- (3)  $(u, v) \in R_h$  とすると、 $(x_E A_h - A_h x_E)_{u,v} = \langle \hat{x}, \hat{u} - \hat{v} \rangle$ 。

証明. (1)  $A_i E = p_i(1)E$  であるが、 $E = {}^tE = \bar{E}$  であることから、

$$\overline{p_i(1)E} = (p_i(1)E)^* = (A_i E)^* = EA_{i'} = A_{i'}E = p_{i'}(1)E$$

である。特に、 $p_i(1) = p_{i'}(1)$  である。

$$p_{i'}(1)\hat{x} = A_{i'}Ex = EA_{i'}x = E(\sum_{y \in X: (y,x) \in R_{i'}} y) = \sum_{y \in X: (x,y) \in R_i} \hat{y} = P_{i,i'}(\widehat{x}, x)$$

となり、求める式が得られる。

(2)  $u, v \in X$  とする。

$$(A_i x_E A_j)_{u,v} = \sum_{z \in X} (A_i)_{u,z} (x_E)_{z,z} (A_j)_{z,v} = \sum_{z \in X: (u,z) \in R_i, (z,v) \in R_j} E_{x,z} = \langle \hat{x}, P_{i,j}(\widehat{u}, v) \rangle .$$

(3)  $(x_E A_h - A_h x_E)_{u,v} = E_{x,u} - E_{x,v} = \langle \hat{x}, \hat{u} - \hat{v} \rangle$ . ■

$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を可換アソシエーションスキームとし、

$$E = E_h = {}^t E_h = \overline{E}_h = \frac{1}{|X|} \sum_{l=0}^d q_h(l) A_l$$

を定理の仮定をみたす原始冪等元とする。

仮定より任意の  $i \geq 1$  について  $q_1(0) \neq q_1(i)$  だったから、命題 4.3.1 により  $\mathcal{D}^*$  は連結である。

まず I, II それぞれにおいて、(i) と (ii) の同値性を示す。

$$\begin{aligned} I(i) : \mathcal{D}^* \text{ は木} &\Leftrightarrow \text{edge}(\mathcal{D}^*) = d \quad (\text{練習問題 3.4.1}) \\ &\Leftrightarrow \dim \mathcal{L}_0 = \dim \mathcal{N}_0 \quad (\text{補題 4.2.2, 4.2.3}) \\ &\Leftrightarrow I(ii) : \mathcal{L}_0 = \mathcal{N}_0 \end{aligned}$$

II(i) :  $\mathcal{D}^*$  は木でループの数は 1 以下

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2 \cdot \text{edge}(\mathcal{D}^*) + \text{loop}(\mathcal{D}^*) \leq 2d + 1 \quad (\text{練習問題 3.4.1}) \\ &\Leftrightarrow \dim \mathcal{N} \leq 2d + 1 \quad (\text{補題 4.2.2}) \\ &\Leftrightarrow I(ii) : \mathcal{L} = \mathcal{N} \end{aligned}$$

最後の同値の  $\Leftarrow$  は補題 4.2.3 より明らかである。 $\dim \mathcal{L} \leq 2d + 1$  で  $\mathcal{L} \neq \mathcal{N}$  とすると、可能性があるのは補題 4.2.3 の (1) の場合で、そのときは、補題 4.3.2 よりループは一つもないから、 $\mathcal{N} = 2d + 1$  となり、結局  $\mathcal{L} = \mathcal{N}$  となる。

$I(ii) \Rightarrow I(iii)$  を示す。

補題 4.4.1 (1) より (2) の条件のみ示せば良い。まず仮定から、各  $x \in X$  について

$$A_i x_E A_j - A_j x_E A_i = \sum_{l=0}^d \alpha_{i,j}^l(x) (x_E A_l - A_l x_E)$$

となる  $\alpha_{i,j}^l(x) \in C$  が存在する。 $(u, v) \in R_h$  とすると、補題 4.4.1 (2) より左辺は

$$(A_i x_E A_j - A_j x_E A_i)_{u,v} = \langle \hat{x}, P_{i,j}(\widehat{u}, v) - P_{j,i}(\widehat{u}, v) \rangle .$$

右辺は補題 4.2.1 (1)、4.4.1 (3) より

$$\left( \sum_{l=0}^d \alpha_{i,j}^l(x) (x_E A_l - A_l x_E) \right)_{u,v} = \langle \hat{x}, \alpha_{i,j}^h(x) (\hat{u} - \hat{v}) \rangle .$$

従って、

$$\langle \hat{x}, P_{i,j}(\widehat{u}, v) - P_{j,i}(\widehat{u}, v) \rangle = \langle \hat{x}, \alpha_{i,j}^h(x)(\hat{u} - \hat{v}) \rangle.$$

$\alpha_{i,j}^h(x)$  が  $x$  に関係せずにとれることを示す。 $h = 0$  とすると、 $x_E A_0 - A_0 x_E = O$  だから  $\alpha_{i,j}^0(x) = 0$  としておいて良い。 $h \neq 0$  とし、上の式で、特に、 $u = x$  の場合を考え  $|X|$  倍すると、

$$p_{i,j}^h(q_1(i) - q_1(j)) = \alpha_{i,j}^h(x)(q_1(0) - q_1(h))$$

で  $h \neq 0$  だったから、 $\alpha_{i,j}^h(x)$  は  $x$  によらずに決まることがわかった。すなわち  $x$  に関係せず、 $h, i, j$  だけによって決まる定数  $\alpha_{i,j}^h$  によって、

$$\langle \hat{x}, P_{i,j}(\widehat{u}, v) - P_{j,i}(\widehat{u}, v) \rangle = \langle \hat{x}, \alpha_{i,j}^h(\hat{u} - \hat{v}) \rangle.$$

この式は任意の  $x \in X$  について成り立ちまた、 $\hat{X}$  は  $V_1$  を生成するから、

$$P_{i,j}(\widehat{u}, v) - P_{j,i}(\widehat{u}, v) = \alpha_{i,j}^h(\hat{u} - \hat{v})$$

を得る。

$I(iii) \Rightarrow I(ii)$  を示す。

$(u, v) \in R_h$  とする。

$$P_{i,j}(\widehat{u}, v) - P_{j,i}(\widehat{u}, v) = \alpha_{i,j}^h(u, v)(\hat{u} - \hat{v})$$

と書けているとする。係数に現れる  $\alpha_{i,j}^h(u, v)$  が  $h, i, j$  のみによって決まり、 $u, v$  のとり方には依存しないことを示す。 $h = 0$  のときは、 $\hat{u} - \hat{v} = 0$  だから、 $\alpha_{i,j}^0(u, v) = 0$  として良い。従って、 $h \neq 0$  の時のみ考えれば良い。

$\hat{u}$  との内積をとると、右辺は

$$\alpha_{i,j}^h(u, v) \left( \frac{q_1(0)}{|X|} - \frac{q_1(h)}{|X|} \right)$$

となる。左辺は

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}, P_{i,j}(\widehat{u}, v) - P_{j,i}(\widehat{u}, v) \rangle &= \langle \hat{u}, \sum_{z \in X: (u, z) \in R_i, (z, v) \in R_j} \hat{z} - \sum_{z' \in X: (u, z') \in R_j, (z', v) \in R_i} \hat{z}' \rangle \\ &= \frac{1}{|X|} (p_{i,j}^h q_1(i) - p_{j,i}^h q_1(j)) \\ &= \frac{p_{i,j}^h}{|X|} (q_1(i) - q_1(j)) \end{aligned}$$

すなわち、次の式を得る。

$$\alpha_{i,j}^h(u, v) \left( \frac{q_1(0)}{|X|} - \frac{q_1(h)}{|X|} \right) = \frac{p_{i,j}^h}{|X|} (q_1(i) - q_1(j)).$$

$h \neq 0$  として良かったから、

$$\alpha_{i,j}^h(u, v) = \frac{p_{i,j}^h(q_1(i) - q_1(j))}{q_1(0) - q_1(h)}.$$

従って、 $\alpha_{i,j}^h(u, v)$  は、 $(u, v) \in R_h$  のとり方に依存せず一定の値  $\alpha_{i,j}^h$  としてよい。

$$P_{i,j}(\widehat{u}, v) - P_{j,i}(\widehat{u}, v) = \alpha_{i,j}^h(\hat{u} - \hat{v})$$

の両辺と  $\hat{x}$  の内積をとり、補題 4.4.1 を用いると、任意の  $(u, v) \in R_h$  について

$$\begin{aligned} (A_i x_E A_j - A_j x_E A_i)_{u,v} &= \langle \hat{x}, P_{i,j}(\widehat{u}, v) - P_{j,i}(\widehat{u}, v) \rangle \\ &= \langle \hat{x}, \alpha_{i,j}^h(\hat{u} - \hat{v}) \rangle \\ &= \alpha_{i,j}^h(x_E A_h - A_h x_E)_{u,v} \\ &= \left( \sum_{l=0}^d \alpha_{i,j}^l (x_E A_l - A_l x_E) \right)_{u,v} \end{aligned}$$

従って、

$$A_i x_E A_j - A_j x_E A_i = \sum_{l=0}^d \alpha_{i,j}^l (x_E A_l - A_l x_E)$$

を得る。これは、 $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{L}_0$  であることを示す。一般に、 $\mathcal{N}_0 \supset \mathcal{L}_0$  だったから  $\mathcal{N}_0 = \mathcal{L}_0$  を得る。

$II(ii) \Rightarrow II(iii)$  を示す。

各  $x \in X$  について

$$A_i x_E A_j = x_E \left( \sum_{h=0}^d \beta_{i,j}^h A_h \right) + \left( \sum_{h=0}^d \gamma_{i,j}^h A_h \right) x_E$$

を満たすような定数  $\beta_{i,j}^h(x), \gamma_{i,j}^h(x) \in \mathbb{C}$  が存在する。ここで、 $(u, v) \in R_h$  とし両辺の  $(u, v)$  成分を考えると、補題 4.4.1 より

$$\langle \hat{x}, P_{i,j}(\widehat{u}, v) \rangle = \langle \hat{x}, \beta_{i,j}^h(x) \hat{u} + \gamma_{i,j}^h(x) \hat{v} \rangle$$

となる。ここで  $u = x$  および  $v = x$  とおき、 $|X|$  倍するとそれぞれ、

$$\begin{aligned} p_{i,j}^h q_1(i) &= \beta_{i,j}^h(x) q_1(0) + \gamma_{i,j}^h(x) q_1(h) & u = x \text{ とおいた時} \\ p_{i,j}^h q_1(j) &= \beta_{i,j}^h(x) q_1(h) + \gamma_{i,j}^h(x) q_1(0) & v = x \text{ とおいた時} \end{aligned}$$

ここで、 $q_1(0)^2 - q_1(h)^2 \neq 0$  ならば  $\beta_{i,j}^h(x), \gamma_{i,j}^h(x)$  は  $x$  に依存せずただ一通りに  $p_{i,j}^h, q_1(0), q_1(1), \dots, q_1(d)$  たちによって書ける。 $q_1(h) = \pm q_1(0)$  の場合には、 $A_h x_E = \pm x_E A_h$  だったから、最初から、 $\gamma_{i,j}^h(x) = \pm \beta_{i,j}^h(x)$  とおいておけば、 $\beta_{i,j}^h(x)$  も  $x$  に依存せずにとることができる。結局  $x$  に依存しない定数によって、

$$\langle \hat{x}, P_{i,j}(\widehat{u}, v) \rangle = \langle \hat{x}, \beta_{i,j}^h \hat{u} + \gamma_{i,j}^h \hat{v} \rangle$$

と書け、 $x$  は任意で  $\text{Span}(\hat{X}) = V_1$  だったから

$$P_{i,j}(\widehat{u}, v) = \beta_{i,j}^h \hat{u} + \gamma_{i,j}^h \hat{v}$$

を得る。

最後に  $II(iii) \Rightarrow II(ii)$  を示す。

$$P_{i,j}(\widehat{u}, v) = \beta_{i,j}^h(u, v) \hat{u} + \gamma_{i,j}^h(u, v) \hat{v}$$

と書けているとする。すると任意の  $x \in X$  について

$$\langle \hat{x}, P_{i,j}(\widehat{u}, v) \rangle = \langle \hat{x}, \beta_{i,j}^h(u, v) \hat{u} + \gamma_{i,j}^h(u, v) \hat{v} \rangle.$$

ここで、 $\beta_{i,j}^h(u, v), \gamma_{i,j}^h(u, v)$  は  $(u, v) \in R_h$  のとり方によらないでとれることを示す。 $x = u$  および  $x = v$  とおくと、

$$\begin{aligned} p_{i,j}^h q_1(i) &= \beta_{i,j}^h(u, v) q_1(0) + \gamma_{i,j}^h(u, v) q_1(h) & x = u \text{ とおいた時} \\ p_{i,j}^h q_1(j) &= \beta_{i,j}^h(u, v) q_1(h) + \gamma_{i,j}^h(u, v) q_1(0) & x = v \text{ とおいた時} \end{aligned}$$

$q_1(h) = \pm q_1(0)$  のときは、 $\hat{v} = \pm \hat{u}$  だったから  $\gamma_{i,j}^h(u, v) = \pm \beta_{i,j}^h(u, v)$  としておくと、すべての場合に  $\beta_{i,j}^h(u, v), \gamma_{i,j}^h(u, v)$  は  $p_{i,j}^h, q_1(0), q_1(1), \dots, q_1(d)$  を用いて表せるから  $u, v$  のとり方に依存しないことがわかる。そこでそれらを  $\beta_{i,j}^h, \gamma_{i,j}^h$  とおくと、次の式を得る。

$$A_i x_E A_j = x_E \left( \sum_{h=0}^d \beta_{i,j}^h A_h \right) + \left( \sum_{h=0}^d \gamma_{i,j}^h A_h \right) x_E.$$

■

練習問題 4.4.1 上の証明に現れる  $\alpha_{i,j}^h$ 、および  $\beta_{i,j}^h, \gamma_{i,j}^h$  を  $p_{i,j}^h, q_1(0), q_1(1), \dots, q_1(d)$  を用いて表せ。

[26] において P. Terwilliger は定理 4.1.1 を分配グラフについても証明している。さらに、複雑な計算を用いて、次のことを示した。

定理 4.4.2 (1) 分配グラフ  $\mathcal{D}(\mathcal{X}, A_1)$  が路グラフならば、表現グラフ  $\mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E_1)$  の次数 1 の点は 0 以外には高々一つである。

(2) 表現グラフ  $\mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E_1)$  が路グラフならば、分配グラフ  $\mathcal{D}(\mathcal{X}, A_1)$  の次数 1 の点は 0 以外には高々一つである。

系 4.4.3  $\mathcal{D}^*(\mathcal{X}, E_1)$  も  $\mathcal{D}(\mathcal{X}, A_1)$  もともに木であるとする。この時、一方が路グラフならばもう一方も路グラフである。

## 第5章 いくつかの例

### 5.1 群の作用とアソシエーションスキーム

群  $G$  が有限集合  $X$  に作用しているとする。すなわち、写像

$$X \times G \longrightarrow X \quad ((\alpha, g) \mapsto \alpha^g \in X)$$

が、任意の  $\alpha \in X$ ,  $g, h \in G$  に対して、 $\alpha^1 = \alpha$ 、 $\alpha^{gh} = (\alpha^g)^h$  を満たすとする。この時、 $X$  を  $G$ -集合とも言う。

$\alpha, \beta \in X$  に対して、関係  $\sim$  を

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha^g = \beta \text{ となる } g \in G \text{ がある}$$

によって定義すると、 $\sim$  は同値関係になる。この同値類を  $G$ -軌道と言う。 $\alpha \in X$  としたとき、 $\alpha$  を含む軌道は  $\{\alpha^g \mid g \in G\}$  となる。これを  $\alpha^G$  などとも書く。 $X$  が  $G$  の一つの軌道からなる時、 $G$  は  $X$  上可移 (*transitive*) であるという。

例 5.1.1 群  $G$  が有限集合  $X$  上に可移に作用しているとする。すると、 $G$  は、 $X \times X$  上に作用する。

$$(X \times X) \times G \longrightarrow X \times X \quad ((\alpha, \beta), g) \mapsto (\alpha, \beta)^g := (\alpha^g, \beta^g).$$

$G$  の  $X \times X$  上の軌道を  $R_0, R_1, \dots, R_d \subset X \times X$  とする。 $G$  は  $X$  上可移だから  $\{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in X\}$  は一つの軌道となる。これを  $R_0$  と置くことにする。この時、 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  はアソシエーションスキームになる (練習問題 5.1.1)。このスキームを群型 (*group type*) のアソシエーションスキームという。特に  ${}^t R_i = R_i$  が各  $i$  について成り立てば、 $\mathcal{X}$  は対称アソシエーションスキームになる。軌道がこのような性質を持つ置換群を *generously transitive* という。

練習問題 5.1.1 例 5.1.1 の記号で  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  とすると、 $\mathcal{X}$  はアソシエーションスキームになることを示せ。

練習問題 5.1.2 例 5.1.1 において、 $X = G$  を有限群とし、作用を以下のように定義する。

$$G \times (G \times G) \longrightarrow G \quad (x, (g_1, g_2)) \mapsto g_1^{-1} x g_2.$$

$G$  の共役類を  $C_0 = \{1\}, C_1, \dots, C_d$  とすると、以下が成り立つことを示せ。

- (1)  $R_i = \{(x, y) \mid yx^{-1} \in C_i\}$  となっている。
- (2)  $p_{i,j}^h = |\{(u, v) \in C_i \times C_j \mid uv = z_h\}|$ , ( $z_h \in C_h$ ) である。
- (3)  $\mathcal{X}(G, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  は可換アソシエーションスキームとなる。

$\mathcal{X}(G, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を群スキーム (group association scheme) と言う。

群型のスキーム、群スキームについては、[2] を参照せよ。

## 5.2 高次元立方体とハミングスキーム

例 5.2.1 高次元立方体 (Hyper-cubes) :  $H_m$  を次のようなものとする。

$$H_m = \{^t(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i = \pm 1, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

通常の立方体は  $H_3$  と見ることができる。  $x = ^t(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $y = ^t(y_1, y_2, \dots, y_m)$  とする。

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i = |\{i \mid x_i = y_i\}| - |\{j \mid x_j \neq y_j\}| = m - 2|\{j \mid x_j \neq y_j\}|$$

だから

$$R_i = \{(^t(x_1, x_2, \dots, x_m), ^t(y_1, y_2, \dots, y_m)) \mid |\{j \mid x_j \neq y_j\}| = i\}$$

とおく。  $O(m, \mathbf{R}) = \{T \in \text{Mat}_m(\mathbf{R}) \mid T^t T = {}^t T T = I\}$  を実直交群とし、  $\tau_i \in O(m, \mathbf{R})$  を第  $i$  成分を  $-1$  倍するもの、  $\sigma_i \in O(m, \mathbf{R})$  を第  $i$  成分と第  $i+1$  成分を入れ換えるものとする。このとき、

$$G = \langle \tau_i, \sigma_j \mid i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, m-1 \rangle$$

とおくと、  $G \simeq \mathbf{Z}_2 \text{wr} S_m \simeq \mathbf{Z}_2^m \cdot S_m$  で  $H_m$  の元を  $H_m$  の元に移すから  $H_m$  は  $G$ -集合となる。この作用は可移で  $H_m \times H_m$  上への作用の軌道が  $R_i$  になることがわかるから (練習問題 5.2.1)  $\mathcal{X} = (H_m, \{R_i\}_{0 \leq i \leq m})$  は対称アソシエーションスキームになる。 $H_m$  に結合関係を  $R_1$  で定義したものは、距離正則グラフになる (練習問題 5.2.2)。さらに  $H_m$  は balanced condition および strongly balanced condition をみたす (練習問題 5.2.3)。

練習問題 5.2.1 例 5.2.1 において、  $R_i$  が  $G$  の軌道になることを示し、それによって、  $\mathcal{X} = (H_m, \{R_i\}_{0 \leq i \leq m})$  は対称アソシエーションスキームになることを示せ。

練習問題 5.2.2 例 5.2.1 において、  $D = D(\mathcal{X}, A_1)$  を考えると、路になることを示せ。すなわち、  $\mathcal{X}$  は  $P$ -多項式型であり、  $\Gamma = (H_m, R_1)$  は距離正則グラフになる。

練習問題 5.2.3 例 5.2.1 において、  $\mathcal{X} = (H_m, \{R_i\}_{0 \leq i \leq m})$  は balanced condition および strongly balanced condition をみたすことを示せ。

以下にこの高次元立方体から得られる半高次元立方体と、一般のハミングスキームについて述べる。

例 5.2.2 半高次元立方体 (*Half Cubes*) :  $\frac{1}{2}H_m$  を次のようなものとする。

$$\frac{1}{2}H_m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i = \pm 1, x_1 x_2 \cdots x_m = 1, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

すなわち 半高次元立方体の元は、高次元立方体の元で偶数個の  $-1$  を含むものである。内積の値は、 $m - 4i$  の形になっているから、 $R_0, R_1, \dots, R_m$  を例 5.2.1 のものとしたとき、 $R'_i = R_{2i}$  とすると、 $\mathcal{X} = (\frac{1}{2}H_m, \{R'_i\}_{0 \leq i \leq [m/2]})$  は対称アソシエーションスキームになり、かつ  $P$ -多項式型であり、さらに、balanced condition および strongly balanced condition を満たす。 $\frac{1}{2}H_3$  は正四面体である。

$\frac{1}{2}H_m$  の点は  $H_m$  に含まれているが、関係は違った番号がついている。しかし、逆に  $H_m$  は関係を保って、 $\frac{1}{2}H_{2m}$  に埋め込むことができる。

例 5.2.3 ハミングスキーム (*Hamming Scheme*) :  $Q = \{1, 2, \dots, q\}$  とし、 $X = Q^d = \{(a_1, a_2, \dots, a_d) \mid a_i \in Q\}$  とする。

$$R_i = \{((a_1, a_2, \dots, a_d), (b_1, b_2, \dots, b_d) \mid |\{j \mid a_j \neq b_j, j = 1, 2, \dots, d\}| = i\}$$

とすると、 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  は対称アソシエーションスキームになる。これを  $H(d, q)$  と書き、ハミングスキームと言う。 $P$ -多項式型であり、さらに  $X$  は  $(q-1)d$  次元空間へのある埋め込みによって balanced set になる。しかし一般には、strongly balanced ではない。 $H_d$  は  $H(d, 2)$  と本質的に同じものである。

練習問題 5.2.4 例 5.2.3 の  $X$  を balanced set になるように  $(q-1)d$  次元空間に埋め込み。またこの時、直交群の部分群が可移に作用し、その作用から、 $H(d, q)$  は群型のアソシエーションスキームとなっていることを示せ。

## 5.3 ジョンソンスキーム

この節ではもう一つの基本的な例としてジョンソンスキームを定義する。

例 5.3.1 ジョンソンスキーム (*Johnson scheme*) : まず  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  とし、 $X$  で  $\Omega$  の  $d$  点部分集合全体とする。 $n \geq 2d$  とし

$$R_i = \{(\alpha, \beta) \in X \times X \mid |\alpha \cap \beta| = d - i\}$$

とおく。 $n$ -次対称群  $S_n$  は  $X$  上に可移に作用し、 $X \times X$  上の軌道が、 $R_0, R_1, \dots, R_d$  であることがわかるから (練習問題 5.3.1)  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  は対称アソシエーションスキームになる。これを  $J(n, d)$  と書き、ジョンソンスキームと呼ぶ。 $X$  に結合関係を  $R_1$  で定義したものは、距離正則グラフになる (練習問題 5.3.2)。



$V_0 = \mathbf{R}^n$  とし、 $\alpha \in X$  に対して第  $i$  成分は、 $i \in \alpha$  のとき 1、 $i \notin \alpha$  のとき 0 としたベクトルを  $\alpha_0$  で表す。成分がすべて 1 であるベクトルを  $j$  としたとき、

$$\hat{X} = \{\hat{\alpha} \mid \alpha \in X\}, \quad \hat{\alpha} = \alpha_0 - \frac{d}{n}j$$

$V = j^\perp$  とおくと、 $\hat{X} \subset V$  で、 $(\alpha, \beta) \in R_h$  に対して、

$$\langle \hat{\alpha}, \hat{\beta} \rangle = d - h - \frac{d^2}{n}$$

である。この埋め込みにより、ジョンソンスキームは balanced set を定義する（練習問題 5.3.3）。

練習問題 5.3.1 例 5.3.1 において、 $R_i$  が  $G$  の軌道になることを示し、それによって、 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  は対称アソシエーションスキームになることを示せ。

練習問題 5.3.2 例 5.3.1 において、 $D = D(\mathcal{X}, A_1)$  を考えると、路になることを示せ。すなわち、 $\mathcal{X}$  は  $P$ -多項式型であり、 $\Gamma = (X, R_1)$  は距離正則グラフになる。

練習問題 5.3.3 例 5.3.1 において、 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  は balanced condition をみたすことを示せ。

## 付 録 A 英文講義録からの補遺

ここでは、集中講義では触れられなかった 2、3 のことを英文の講義録に基づいて付け加える。

### A.1 Distance-Regular Graphs

We first give definitions and notational convention of graphs.

**定義 A.1.1** A graph  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  is a pair of sets,  $V\Gamma \neq \emptyset$  and  $E\Gamma$ .  $V\Gamma$  is called the *vertex set*,  $E\Gamma$  the *edge set*, which is a set of unordered pairs of  $V\Gamma$ . In general, a graph may include a *loop*  $(x, x) \in E\Gamma$ . A graph without loops is called a *simple graph*. When we consider a set of *ordered* pairs for  $E\Gamma$ ,  $\Gamma$  is called a *directed graph* or *digraph*,  $(x, y) \in E\Gamma$  with  $x \neq y$  is called an *arc*.

In the following, assume that all graphs  $\Gamma$  are finite, (i.e.,  $|V\Gamma| < \infty$ ), simple graphs otherwise specified.

Let  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  be a graph. When  $(x, y) \in E\Gamma$ ,  $x$  and  $y$  are said to be *adjacent* and denoted by  $x \sim y$ . For  $x \in V\Gamma$ ,

$$\Gamma(x) = \{y \in V\Gamma \mid x \sim y\}.$$

A sequence of vertices  $x_0, x_1, \dots, x_l$  is said to be a *walk* (of length  $l$  connecting  $x_0$  and  $x_l$ ), if

$$x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_l.$$

A walk above is said to be a *path*, if  $x_i \neq x_{i+2}$  for  $i = 0, 1, \dots, l-2$ . When  $x_0 = x_l$ , the walk is said to be *closed*. A closed path is said to be a *circuit*.

$\Gamma$  is *connected* if, for every pair  $x, y \in V\Gamma$  of vertices, there is a walk connecting  $x$  and  $y$ .

Let  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  be a connected graph. For  $x, y \in V\Gamma$ , let  $\partial_\Gamma(x, y) = \partial(x, y)$  denote the distance between  $x$  and  $y$ , which is defined to be the length of a shortest walk connecting  $x$  and  $y$ . It is clear that the function  $\partial$  satisfies the usual requirement of the distance functions.

1.  $\partial(x, y) \geq 0$ , and  $\partial(x, y) = 0$  if and only if  $x = y$ .

2.  $\partial(x, y) = \partial(y, x)$ .
3.  $\partial(x, y) \leq \partial(x, z) + \partial(z, y)$ .

For each  $x \in V\Gamma$  and an integer  $i$ , let

$$\begin{aligned}\Gamma_i(x) &= \{y \in V\Gamma \mid \partial(x, y) = i\} \\ d_\Gamma(x) &= \max\{\partial(x, y) \mid y \in V\Gamma\} \\ d_\Gamma &= \max\{\partial(x, y) \mid x, y \in V\Gamma\}.\end{aligned}$$

By definition,  $\Gamma(x) = \Gamma_1(x)$ .  $d_\Gamma(x)$  is called the *local diameter* with respect to  $x$ , and  $d_\Gamma$  the *diameter* of the graph  $\Gamma$ .

**定義 A.1.2** A connected graph  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  is said to be *distance regular*, if for  $x, y \in V\Gamma$  with  $\partial(x, y) = i$ ,

$$c_i = |\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma_1(y)|, \quad b_i = |\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma_1(y)|$$

depend only on  $i$  and do not depend on the choices of  $x, y$  as far as  $\partial(x, y) = i$ .

Let  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  be a distance-regular graph. Since the number

$$k = |\Gamma(x)| = |\Gamma_1(x)| = |\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(x)| = b_0$$

does not depend on the vertex  $x$ ,  $\Gamma$  is  $k$ -regular. Let

$$a_i = |\Gamma_i(x) \cap \Gamma_1(y)| = k - b_i - c_i.$$

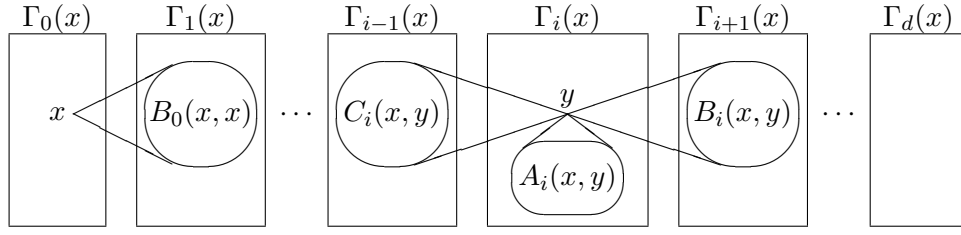
Note that in general if  $\partial(x, y) = i$  and  $\partial(z, y) = 1$ ,

$$i - 1 = \partial(x, y) - \partial(z, y) \leq \partial(x, z) \leq \partial(x, y) + \partial(y, z) = i + 1,$$

or  $\Gamma_1(y) \subset \Gamma_{i-1}(x) \cup \Gamma_i(x) \cup \Gamma_{i+1}(x)$ . Hence a connected graph is distance regular if the number of vertices of  $\Gamma_1(y)$  in each subdivision  $\Gamma_{i-1}(x), \Gamma_i(x), \Gamma_{i+1}(x)$  depends only on  $i$  and do not depend on the choices of  $y$  nor the base vertex  $x$ . In other words, the choice of ways to come closer and the one to go beyond at the vertex  $y$  with respect to the base vertex  $x$  depend only on the distance between  $x$  and  $y$ .

The following notation is also useful. For vertices  $x, y$  of  $\Gamma$  with  $\partial(x, y) = i$ , let

$$\begin{aligned}C(x, y) &= C_i(x, y) = \Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma(y), \\ A(x, y) &= A_i(x, y) = \Gamma_i(x) \cap \Gamma(y), \\ B(x, y) &= B_i(x, y) = \Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma(y).\end{aligned}$$



The numbers  $c_i$ ,  $a_i$  and  $b_i$  play important roles in the study of distance-regular graphs. The following is called the intersection array of  $\Gamma$  and  $d$  denotes the diameter of  $\Gamma$ .

$$\iota(\Gamma) = \begin{Bmatrix} * & c_1 & \cdots & c_i & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_i & \cdots & b_{d-1} & * \end{Bmatrix}.$$

It is clear that  $c_0 = a_0 = b_d = 0$  and  $c_1 = 1$ .

**例 A.1.1** Let  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  and

$$E = \{01, 02, 04, 13, 15, 23, 26, 45, 46, 37, 57, 67\}.$$

This is a cube and is distance regular of diameter 3 and valency 3. The intersection array is given below.



$$\Gamma_0(0) = \{0\}, \Gamma_1(0) = \{1, 2, 4\}, \Gamma_2(0) = \{3, 5, 6\} \text{ and } \Gamma_3(0) = \{7\}.$$

**練習問題 A.1.1** 5 Platonic solids (regular polyhedra), hyper cubes and half cubes are all distance regular. Determine the intersection arrays of these graphs.

Let  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  be a distance-regular graph of diameter  $d = d_\Gamma$ . Let  $A_i$  be a matrix of size  $|V\Gamma|$ , whose rows and columns are indexed by vertices in  $V\Gamma$  such that  $(x, y)$ -entry is defined by

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } \partial(x, y) = i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$A_i$  is called the  $i$ -th adjacency matrix, and  $A = A_1$  the adjacency matrix. Clearly,  $A_j = O$  if  $j < 0$  or  $j > d$ ,  $A_0 = I$ , where  $O$  denotes the zero matrix while  $I$  is the identity matrix of size  $|V\Gamma|$ .

**補題 A.1.1** Let  $A_i$  be the  $i$ -th adjacency matrix of a distance-regular graph  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  of diameter  $d$ . Let  $A = A_1$ . Then the following hold.

(1)  $A_i A = b_{i-1} A_{i-1} + a_i A_i + c_{i+1} A_{i+1}$  for all  $i$ , where  $b_j$  and  $c_j$  with  $j < 0$  or  $j > d$  are indeterminates.

(2) Let  $v_0(t) = 1$ ,  $v_1(t) = t$ , and  $v_{i+1}(t)$  is defined by

$$v_i(t)t = b_{i-1}v_{i-1}(t) + a_i v_i(t) + c_{i+1}v_{i+1}(t)$$

for  $i = 1, \dots, d$  with  $c_{d+1} = 1$ . Then the polynomial  $v_i(t)$  is uniquely determined for  $i = 0, 1, \dots, d+1$  and that  $v_i(A) = A_i$ . In particular,  $v_{d+1}(A) = O$ .

証明.

(1) Let  $x, y \in V\Gamma$ . Then we have

$$\begin{aligned} (A_i A)_{x,y} &= \sum_{z \in V\Gamma} (A_i)_{x,z} (A)_{z,y} \\ &= |\Gamma_i(x) \cap \Gamma_1(y)| \\ &= \begin{cases} c_{i+1} & \text{if } \partial(x, y) = i+1 \\ a_i & \text{if } \partial(x, y) = i \\ b_{i-1} & \text{if } \partial(x, y) = i-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= (b_{i-1} A_{i-1} + a_i A_i + c_{i+1} A_{i+1})_{x,y}. \end{aligned}$$

Since  $x$  and  $y$  are arbitrary, we have

$$A_i A = b_{i-1} A_{i-1} + a_i A_i + c_{i+1} A_{i+1}$$

for all  $i$ . Recall that  $A_j = O$  if  $j < 0$  or  $j > d$ .

(2) By definition,  $c_j \neq 0$  for  $j = 1, \dots, d+1$ . Hence  $v_j(t)$  is uniquely determined by the three term recurrence for  $j = 0, 1, \dots, d+1$ . Clearly,  $v_0(A) = I = A_0$ , and  $v_1(A) = A = A_1$ . Assume  $i \geq 1$ . Then by induction hypothesis, we have

$$\begin{aligned} c_{i+1} v_{i+1}(A) &= v_i(A)A - b_{i-1} v_{i-1}(A) - a_i v_i(A) \\ &= A_i A - b_{i-1} A_{i-1} - a_i A_i \\ &= c_{i+1} A_{i+1} \end{aligned}$$

by (1). ■

**練習問題 A.1.2** Prove the following.

1.  $A_0, A_1, \dots, A_d$  are linearly independent over the complex number field  $\mathbf{C}$ .
2.  $\text{Span}(A_0, A_1, \dots, A_d) = \text{Span}(I, A, A^2, \dots, A^d) = \mathbf{C}[A]$ , where  $\mathbf{C}[A] = \{p(A) \mid p(t) \in \mathbf{C}[t]\}$ .

3.  $v_{d+1}(t)$  is a minimal polynomial of  $A$ , i.e., a polynomial in  $t$ , which is of minimal degree subject to the condition that it vanishes at  $A$ .
4.  $\mathbf{C}[A] = \mathbf{C}[t]/(v_{d+1}(t))$  as an algebra over  $\mathbf{C}$ .

**練習問題 A.1.3** Show that  $A_0, A_1, \dots, A_d$  are  $(0, 1)$  matrices satisfying the following.

1.  $A_0 = I$ .
2.  $A_0 + A_1 + \dots + A_d = J$ , where  $J$  is the all 1's matrix.
3.  ${}^t A_i = A_i$  for  $i = 0, 1, \dots, d$ .
4.  $A_i A_j = \sum_{h=0}^d p_{i,j}^h A_h$ , where  $p_{i,j}^h = |\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)|$  with  $h = \partial(x, y)$ .

By the exercise above, by setting  $R_i = \{(x, y) \mid \partial(x, y) = i\}$ ,  $\mathcal{X} = (V\Gamma, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  becomes a symmetric association scheme. It is easy to see that this is  $P$ -polynomial by Exercise A.1.2.

## A.2 $s$ -distance Sets and Absolute Bound Conditions

Let  $V = \mathbf{C}^n$  be the  $n$ -dimensional vector space of column vectors. For a matrix  $A \in \text{Mat}_n(\mathbf{C})$ , and a nonnegative integer  $h$ , let  $A^{\circ h}$  denote the  $h$ -th power of  $A$  with respect to the  $\circ$ -product. Let  $\mathcal{C}(A)$  denote the column space of  $A$ , i.e., the subspace of  $V$  spanned by the columns of  $A$ . We also use  $\circ$ -product for entry-wise product of column vectors.

**補題 A.2.1** Let  $A$  and  $B$  be matrices in  $\text{Mat}_n(\mathbf{C})$  of rank  $m$  and  $l$  respectively. Let  $\mathcal{C}(B) = \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$  and  $\mathcal{C}(A) = \text{Span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_l)$ . Then the following hold.

- (1)  $\mathcal{C}(A^{\circ h}) \subset \text{Span}(\mathbf{a}_{i_1} \circ \dots \circ \mathbf{a}_{i_h} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_h \leq m)$ . In particular,

$$\dim \mathcal{C}(A^{\circ h}) = \text{rank}(A^{\circ h}) \leq \binom{m+h-1}{h}.$$

- (2)  $\mathcal{C}(A \circ B) \subset \text{Span}(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{b}_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l)$ . In particular,

$$\dim \mathcal{C}(A \circ B) = \text{rank}(A \circ B) \leq m \cdot l.$$

**証明.** All assertions are straightforward. Note that

$$|\{(i_1, i_2, \dots, i_h) \mid 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_h \leq m\}| = \binom{m+h-1}{h}.$$

■

**命題 A.2.2** Let  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  be a commutative association scheme. Then for fixed  $i$  and  $j$ , the following hold.

$$\sum_{h: q_{i,j}^h > 0} m_h \leq \begin{cases} \frac{1}{2}m_i(m_i + 1) & \text{if } i = j, \\ m_i m_j & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

**証明.** Since  $\mathcal{C}(E_i) = V_i$ , and  $V$  is an orthogonal direct sum of  $V_i$ 's. we have

$$\text{rank}(E_i \circ E_j) = \text{rank}\left(\frac{1}{|X|} \sum_{h=0}^d q_{i,j}^h E_h\right) = \sum_{h: q_{i,j}^h > 0} \text{rank} E_h = \sum_{h: q_{i,j}^h > 0} m_h.$$

On the other hand by Lemma A.2.1,

$$\text{rank}(E_i \circ E_j) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}m_i(m_i + 1) & \text{if } i = j \\ m_i m_j & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

Thus we have the bound. ■

**練習問題 A.2.1** Apply Proposition A.2.2 to show that  $Q$ -polynomial association scheme with  $m_1 = k_1^* = 2$  is a polygon.

Let  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset S^{m-1} \subset \mathbf{R}^m$  be a nonempty subset of cardinality  $n$ . Let

$$\Delta = \{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X\} = \{\gamma_0 = 1, \gamma_1, \dots, \gamma_s\}.$$

So  $X$  is an  $s$ -distance set. For each  $i$ , let  $A_i$  be the matrix in  $\text{Mat}_X(\mathbf{C})$ , whose  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ -entry is defined by the following.

$$(A_i)_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \gamma_i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let  $U = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  be the  $m \times n$  matrix, and let  $E = {}^t U U$  be the Gram matrix of  $X$ , i.e.,  $E \in \text{Mat}_X(\mathbf{C})$ , whose  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ -entry is  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ . Then

$$E = \sum_{i=0}^s \gamma_i A_i$$

and  $E$  is a real symmetric matrix.

**補題 A.2.3** Let  $\mathcal{C}(E) = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ , and let  $\mathbf{j}$  be the all 1's vector in  $\mathbf{R}^n$ . Then

$$\mathbf{j} \in \mathcal{C}^{(2)} = \text{Span}(\mathbf{u}_i \circ \mathbf{u}_j \mid 1 \leq i, j \leq m).$$

**証明.** Since  $U$  is a real matrix and  ${}^tUU = E$ ,  $\mathcal{C}({}^tU) = \mathcal{C}(E)$ . In fact, since  $E = {}^tUU$ ,  $\mathcal{C}(E) \subset \mathcal{C}({}^tU)$ . Moreover, since

$$U\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow E\mathbf{v} = {}^tUU\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \|U\mathbf{v}\|^2 = {}^t\mathbf{v}{}^tUU\mathbf{v} = 0 \Rightarrow U\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

we have

$$\text{rank}{}^tU = \text{rank}U = n - \dim\{\mathbf{v} \mid U\mathbf{v} = \mathbf{0}\} = n - \dim\{\mathbf{v} \mid E\mathbf{v} = \mathbf{0}\} = \text{rank}E.$$

Thus  $\mathcal{C}({}^tU) = \mathcal{C}(E) = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ .

Let  ${}^t\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$  for  $i = 1, \dots, n$ . Since  $\mathbf{x}_i \in S^{m-1}$ ,  $x_{i1}^2 + \dots + x_{im}^2 = 1$ . Hence the sum of the columns of  ${}^tU \circ {}^tU$  is  $\mathbf{j}$ . In other words,

$$\mathbf{j} \in \mathcal{C}({}^tU \circ {}^tU) \subset \mathcal{C}^{(2)} = \text{Span}(\mathbf{u}_i \circ \mathbf{u}_j \mid 1 \leq i, j \leq m).$$

Thus we have the lemma. ■

**補題 A.2.4** Let  $\mathcal{C}(E) = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ . Let

$$\mathcal{C}^{(h)} = \text{Span}(\mathbf{u}_{i_1} \circ \dots \circ \mathbf{u}_{i_h} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_h \leq m).$$

Then  $\mathcal{C}(E^{\circ h-2i}) \subset \mathcal{C}^{(h-2i)} \subset \mathcal{C}^{(h)}$  for all nonnegative integer  $i \leq h/2$ .

**証明.** It suffices to show the inclusion for  $i = 1$  and  $h \geq 2$ . By Lemma A.2.3,

$$\mathbf{j} \in \mathcal{C}^{(2)} = \text{Span}(\mathbf{u}_{i_{h-1}} \circ \mathbf{u}_{i_h} \mid 1 \leq i_{h-1}, i_h \leq m).$$

Hence

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{(h)} &= \text{Span}(\mathbf{u}_{i_1} \circ \dots \circ \mathbf{u}_{i_h} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_h \leq m) \\ &= \text{Span}(\mathbf{u}_{i_1} \circ \dots \circ \mathbf{u}_{i_{h-2}} \circ \mathbf{v} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_{h-2} \leq m, \mathbf{v} \in \mathcal{C}^{(2)}) \\ &\supset \text{Span}(\mathbf{u}_{i_1} \circ \dots \circ \mathbf{u}_{i_{h-2}} \circ \mathbf{j} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_{h-2} \leq m) \\ &\supset \text{Span}(\mathbf{u}_{i_1} \circ \dots \circ \mathbf{u}_{i_{h-2}} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_{h-2} \leq m) \\ &= \mathcal{C}^{(h-2)} \\ &\supset \mathcal{C}(E^{\circ h-2}), \end{aligned}$$

as desired. ■

**系 A.2.5** Let  $f(t)$  be a polynomial of degree  $h$  and let  $f^\circ(E)$  be the matrix obtained by substituting  $E$  in  $t$ , where the product of matrices is  $\circ$ -product.

$$(1) \text{rank}(f^\circ(E)) \leq \binom{m+h-1}{h} + \binom{m+h-2}{h-1}.$$



(2) Suppose the coefficients of  $t^{h-2i-1}$  in  $f(t)$  are zero for  $i = 0, 1, \dots, [(h-1)/2]$ . Then

$$\text{rank}(f^\circ(E)) \leq \binom{m+h-1}{h}.$$

**証明.** By Lemma A.2.4,

$$\mathcal{C}(E^{\circ h}) + \mathcal{C}(E^{\circ h-2}) + \dots + \mathcal{C}(E^{\circ h-2[h/2]}) \subset \mathcal{C}^{(h)}.$$

Hence  $\mathcal{C}(f^\circ(E)) \subset \mathcal{C}^{(h)} + \mathcal{C}^{(h-1)}$  in the first case and  $\mathcal{C}(f^\circ(E)) \subset \mathcal{C}^{(h)}$  in the second case. Since  $\dim \mathcal{C}^{(h)} \leq \binom{m+h-1}{h}$ , the both assertions hold.  $\blacksquare$

The following theorem is proved in [10].

**定理 A.2.6** Let  $X \subset S^{m-1} \subset \mathbf{R}^m$  be a  $s$ -distance set. Then the following hold.

$$(1) |X| \leq \binom{m+s-1}{s} + \binom{m+s-2}{s-1}.$$

(2) Suppose  $X$  is antipodal, i.e.,  $X = -X$ . Then we have

$$|X| \leq 2 \binom{m+s-2}{s-1}.$$

**証明.** We use the notation above.

(1) Let  $f(t) = (t - \gamma_1) \cdots (t - \gamma_s)$ . Since

$$E = \sum_{i=0}^s \gamma_i A_i, \quad A_i \circ A_j = \delta_{i,j},$$

$$\begin{aligned} f^\circ(E) &= (E - \gamma_1 J) \circ \cdots \circ (E - \gamma_s J) \\ &= f^\circ\left(\sum_{i=0}^s \gamma_i A_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^s f(\gamma_i) A_i \\ &= f(\gamma_0) A_0. \end{aligned}$$

Since  $f(\gamma_0) \neq 0$ ,  $\text{rank}(f^\circ(E)) = |X| = n$ . On the other hand, since  $f$  is a polynomial of degree  $s$ , by Corollary A.2.5,

$$\text{rank}(f^\circ(E)) \leq \binom{m+s-1}{s} + \binom{m+s-2}{s-1}.$$

Therefore we have the bound of  $|X|$ .

- (2) Suppose  $X$  is antipodal. We may assume that  $\gamma_s = -1$ . Let  $f(t) = (t - \gamma_1) \cdots (t - \gamma_{s-1})$ . Then in this case we have

$$f^\circ(E) = \sum_{i=0}^s f(\gamma_i) A_i = f(\gamma_0) A_0 + f(\gamma_s) A_s.$$

Since  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\mathbf{x} \cdot (-\mathbf{y})$ ,  $-\gamma_i \in \Delta$  for every  $i$ . Hence the coefficients of  $t^{h-2i-1}$  in  $f(t)$  above are zero for  $i = 0, 1, \dots, [(h-1)/2]$ . Hence by Corollary A.2.5,

$$\text{rank}(f^\circ(E)) \leq \binom{m+s-1}{s}.$$

Moreover,  $\gamma_0 = 1$  and  $\gamma_s = -1$ . Hence either  $f(\gamma_0) = -f(\gamma_s)$  or  $f(\gamma_s)$  depending on whether  $0 \in \Delta$  or not. By the rearrangement of the ordering of the elements of  $X$ , we have

$$A_s = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}, \quad f^\circ(E) = f(\gamma_0) \begin{pmatrix} I & \pm I \\ \pm I & I \end{pmatrix}.$$

Since  $f(\gamma_0) \neq 0$ ,  $\text{rank}(f^\circ(E)) = |X|/2$ . Therefore we have the bound of  $|X|$  for this case. ■

It is known that if one of the absolute bounds is attained, then the set  $X$  becomes a *tight spherical  $(2s-1)$ -design* and  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  becomes a  $Q$ -polynomial association scheme. The octahedron gives rise to a tight spherical 3-design and the icosahedron a tight spherical 5-design.

### A.3 Representation of Graphs

We start with a definition of graphs related to association schemes.

**定義 A.3.1** 1. A  $k$ -regular graph  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  with  $v = |V\Gamma|$  is said to be *edge regular* with parameter  $(v, k, \lambda)$ , if any two adjacent vertices have precisely  $\lambda$  common neighbors, i.e.,

$$|\Gamma(x) \cap \Gamma(y)| = \lambda, \text{ for all } x, y \in V\Gamma \text{ with } x \sim y.$$

2. Let  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  be a commutative association scheme. Suppose  ${}^t R_i = R_i$ . Then the graph  $\Gamma^{(i)} = (X, R_i)$  with vertex set  $X$  and edge set defined by  $R_i$  is called the  *$i$ -th relation graph*.

**注意.**

1. Since

$$\Gamma^{(i)}(x) = R_i(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in R_i\},$$

$\Gamma^{(i)}$  is an edge-regular graph with parameter  $(v, k_i, p_{i,i}^i)$ .

2. Let  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  be an association scheme. Let  $R = R_i \cup^t R_i$ . Then the graph defined by  $V\Gamma = X$ ,  $E\Gamma = R$  is also edge regular. This is the case if  $R = R_i$  with  $\lambda = p_{i,i}^i$ . Suppose  $R \neq R_i$ . Since  $(A_i + A_{i'})^2$  is symmetric, the coefficient of  $A_i$  and  $A_{i'}$  in the expression of a linear combination of  $A_j$ 's coincide. In this case,

$$\lambda = p_{i,i}^i + p_{i,i'}^i + p_{i',i}^i + p_{i',i'}^i.$$

3. It is easy to see from the definition that a regular graph  $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$  is edge regular if and only if for a fixed integer  $\lambda$ , the induced subgraph on  $\Gamma(x)$  is  $\lambda$ -regular for all  $x \in V\Gamma$ .
4. A regular triangle-free graph is always edge regular.

**定義 A.3.2** A *regular polyhedron* of type  $(p; r)$  is a regular plane graph in  $S^2$  such that each face is a regular  $p$ -gon such that each vertex is surrounded by  $r$   $p$ -gons cyclically.

A *quasi-regular polyhedron* of type  $(p, q; r)$ ,  $(p < q)$  is a regular plane graph in  $S^2$  such that each face is either a regular  $p$ -gon or a regular  $q$ -gon such that each vertex is surrounded by  $r$   $p$ -gons and  $r$   $q$ -gons cyclically and alternately.

**補題 A.3.1** (1) *The parameters  $(p; r)$  of a regular polyhedron is either  $(n; 2)$ ,  $(3; 3)$ ,  $(4; 3)$ ,  $(3; 4)$ ,  $(5; 3)$  or  $(3; 5)$ . A regular polyhedron with either one of these parameters exists and unique up to isomorphism. They are actually Platonic solids.*

(2) *The parameters  $(p, q; r)$  of a quasi-regular polyhedron is either  $(3, 4; 2)$  or  $(3, 5; 2)$ . A quasi-regular polyhedron with either one of these parameters exists and unique up to isomorphism. Both of them are edge-regular graphs and the parameters  $(v, k, \lambda)$  are  $(12, 4, 1)$  and  $(30, 4, 1)$ .*

**証明.** Since the inner angle of a regular  $p$ -gon in  $S^1$  is  $(1 - 2/p)\pi$ , we have  $r(1 - 2/p)\pi < 2\pi$  for a regular polyhedron and as for a quasi-regular polyhedron,

$$r(1 - 2/p)\pi + r(1 - 2/q)\pi < 2\pi.$$

Therefore, we have either

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} > \frac{1}{2},$$

or

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

Now it is easy to obtain one of the parameters in the assertions. Now the result in (1) is well-known.

Suppose one of the quasi-regular polyhedron exists. Then by definition, it is  $2r$ -regular edge-regular graph with  $\lambda = 1$ . Let  $v$  be the number of vertices,  $e$  the number of edges,  $f_p$  the number of  $p$ -gonal faces and  $f_q$  the number of  $q$ -gonal faces. Then we have

$$rv = pf_p = qf_q, \quad 2rv = 2e, \quad v - e + f_p + f_q = 2.$$

The last equality comes from Euler's equality (See [5]). Now we have either  $v = 12$  or  $30$  according as  $q = 4$  or  $5$ . We left the rest as an exercise. ■

**練習問題 A.3.1** Show the existence and the uniqueness of two quasi-regular polyhedra in Lemma A.3.1.

The quasi-regular polyhedron with parameter  $(3, 4; 2)$  is called the *cuboctahedron* and the one with parameter  $(3, 5; 2)$  the *icosidodecahedron*.

## A.4 Association Schemes with $m = 3$

In this section, we study a real faithful representation of an association scheme  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ , and an edge-regular graph on the sphere defined by a relation corresponding to the nearest points in it. As an application we prove a result of E. Bannai [1] classifying all symmetric association schemes with 3-dimensional faithful representation.

Throughout this section, assume the following.

- $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  is an association scheme with  $|X| > 1$ .

$$R_i(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in R_i\}.$$

- $E = E_1 = \frac{1}{|X|} \sum_{i=0}^d q_1(i) A_i$  : a central idempotent of  $\mathcal{X}$  such that  $E = {}^t E = \overline{E}$  and  $A_i E = \alpha_i E$  for some  $\alpha_i \in \mathbf{R}$  for all  $i = 0, 1, \dots, d$ .
- $m = m_1 = q_1(0) > q_1(1) \geq q_1(2) \geq \dots \geq q_1(d)$ .
- $\Gamma = (X, R)$ , where  $R = R_1 \cup R_{1'}$ . Let  $k = k_1$  be its valency.
- $\pi : V \rightarrow W = V_1$  is the orthogonal projection onto the eigen space corresponding to the primitive idempotent  $E$ .
- $\hat{X} = \{\hat{x} \mid x \in X\}$ , where  $\hat{x} = (\sqrt{|X|/m})\pi(x) \in W$ .
- $S = S^{m-1} \subset W$  : the unit sphere in  $W$ .
- $\gamma_i = q_1(i)/m$ , and  $\gamma = \gamma_1$ .
- $\rho_i = \sqrt{2(1 - \gamma_i)}$  and  $\rho = \rho_1$ .

When  $x, y \in S$ ,  $\angle xy$  denotes the angle between the vectors  $x$  and  $y$ .

**補題 A.4.1** *The following hold.*

(1) Let  $(x, y) \in R_i$ . Then  $\hat{x} \cdot \hat{y} = \gamma_i$ . In particular,  $\hat{X}$  is a subset of the unit sphere  $S$  with  $|\hat{X}| = |X|$ , i.e.,  $X$  is faithfully embedded in the unit sphere  $S$ .

(2) Let  $(x, y) \in R_i$ . Then

$$\rho_i = \|\hat{x} - \hat{y}\| = \sqrt{(\hat{x} - \hat{y}) \cdot (\hat{x} - \hat{y})},$$

and  $0 = \rho_0 < \rho_1 \leq \dots \leq \rho_d$ .

(3)  $\gamma = -1$  if and only if  $|X| = 2$ .

(4)  $\alpha_{i'} = k_i \gamma_i$  and  $\sum_{y \in R_i(x)} \hat{y} = k_i \gamma_i \hat{x}$ , for every  $x \in X$ .

(5) For  $x \in X$  let  $H_i = \text{Span}(\hat{x})^\perp + o_i$  with  $o_i = \gamma_i \hat{x}$ . Then

$$\{\hat{y} \mid y \in R_i(x)\} \subset S_i = H_i \cap S.$$

Moreover,  $\sum_{y \in R_i(x)} (\hat{y} - o_i) = 0$ .

**証明.** (1) and (2) are straightforward.

Suppose  $\gamma = -1$ . Since  $\hat{x} \cdot \hat{y} = -1$  implies  $\hat{y} = -\hat{x}$  and  $\gamma_i \leq \gamma$  for  $i \geq 1$ ,  $\hat{X} = \{\hat{x}, -\hat{x}\}$ . Conversely, if  $|X| = 2$ , then  $d = m = k_1 = 1$  and  $\gamma = -1$ . This is (3).

$$\alpha_{i'} \hat{x} = \pi(\alpha_{i'} E x) = \pi(A_{i'} E x) = \pi(E A_{i'} x) = \pi(E \sum_{y \in X: (y, x) \in R_{i'}} y) = \pi(E \sum_{y \in R_i(x)} y) = \sum_{y \in R_i(x)} \hat{y}.$$

Taking the inner product with  $x$ , we find  $k_i \gamma_i = \alpha_{i'}$ . Thus we have (4).

(5) follows from (4), as  $\hat{x} \cdot \hat{y} = \gamma_i = \hat{x} \cdot o_i$ . ■

The following is an elementary result on the vectors on the sphere  $S^2$ , but it is a key to what follows.

**補題 A.4.2** Let  $a, x, y, z, w$  be vectors on the sphere  $S^2$  satisfying the following.

1.  $a \in \text{Span}(x, y) \cap \text{Span}(z, w)$ .
2.  $0 < \angle xy = \angle zw = \theta < \pi$ .
3.  $\angle xy = \angle xa + \angle ay$ , and  $\angle zw = \angle za + \angle aw$ .

Then one of  $\|x - z\|$ ,  $\|z - y\|$ ,  $\|y - w\|$  or  $\|w - x\|$  is less than or equal to  $\|x - y\|/\sqrt{2}$ . Equality holds if and only if

$$\angle xa = \angle ay = \angle za = \angle aw, \text{Span}(x, y) \perp \text{Span}(z, w),$$

and  $\|x - z\| = \|z - y\| = \|y - w\| = \|w - x\|$ .

**証明.** Let  $\theta = \angle xy = \angle zw$ . Let  $\alpha = \angle xa$  and  $\beta = \angle za$ . Let  $0 \leq \delta \leq \pi/2$  be the angle between the planes  $\text{Span}(x, y)$  and  $\text{Span}(z, w)$ . By symmetry we may assume that  $\alpha \leq \theta/2$  and  $\beta \leq \theta/2$ . We now take the coordinates so that

$$a = (1, 0, 0), \quad x = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0), \quad z = (\cos \beta, \sin \beta \cos \delta, \sin \beta \sin \delta).$$

Then we have

$$y = (\cos(\alpha - \theta), \sin(\alpha - \theta), 0), \quad w = (\cos(\beta - \theta), \sin(\beta - \theta) \cos \delta, \sin(\beta - \theta) \sin \delta).$$

Now we have

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta \cos \delta)^2 + \sin^2 \beta \sin^2 \delta \\ &= 2(1 - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \delta). \end{aligned}$$

On the other hand

$$\|x - y\|^2 = (2 \sin \frac{\theta}{2})^2 = 2(1 - \cos \theta).$$

By our choice, we have  $\cos \alpha \cos \beta \geq \cos^2(\theta/2)$  and equality holds if and only if  $\alpha = \beta = \theta/2$ . Moreover,  $0 \leq \alpha, \beta \leq \theta/2 < \pi/2$ . Hence

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= 2(1 - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \delta) \\ &\leq 2(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin \alpha \sin \beta \cos \delta) \\ &\leq 2(\sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ &\leq \frac{1}{2} \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Clearly the equality holds above if and only if

$$\alpha = \beta = \theta/2, \quad \delta = \pi/2.$$

Thus we have the assertion. ■

**補題 A.4.3** *Under the notation above, the following hold.*

- (1) *If  $k_i = 1$  for  $i > 0$ , then  $\gamma_i = -1$ . Moreover if  $i = 1$ , then  $m = 1$  and  $|X| = 2$ .*
- (2) *If  $k_i = 2$ , then every connected component  $C$  of  $\Gamma^{(i)}$  is an  $n_i$ -gon for a fixed  $n_i$  such that  $\dim \text{Span}(\hat{x} \mid x \in C) = 2$ . Moreover if the subspaces spanned by the connected components of  $\Gamma$  intersect in a nonzero subspace, then there is an index  $0 < j < i$  such that  $\rho_j \leq \rho_i/\sqrt{2}$ .*
- (3) *If  $m = 1$ , then  $\gamma = -1$ ,  $k = 1$  and  $|X| = 2$ .*

(4) If  $m = 2$ , then  $\Gamma$  is an  $n$ -gon with  $n = |X|$  and  $k = 2$ .

**証明.**

- (1) Let  $R_i(x) = \{y\}$ . Since  $\hat{y} = \gamma_i \hat{x}$  by Lemma A.4.1 (4), we have  $\gamma_i = -1$  as  $1 = \gamma_0 > \gamma_i$  for  $i > 0$ . If  $i = 1$ , then  $X = \{x, y\}$  by Lemma A.4.1 (3).
- (2) Let  $R_i(x) = \{y, z\}$ . Since the embedding is faithful and  $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \gamma_i$ ,  $y, z \neq \pm x$ . Since  $\hat{y} + \hat{z} = 2\gamma_i \hat{x}$  by Lemma A.4.1,  $\text{Span}(\hat{x}, \hat{y}) = \text{Span}(\hat{x}, \hat{z})$ . By induction, we see that every vertex in a connected component of  $\Gamma^{(i)}$  containing  $\hat{x}$  is in the 2-dimensional space  $\text{Span}(\hat{x}, \hat{y})$ . Since the inner product  $\gamma_i$  is constant, the size  $n_i$  of the connected component does not depend on each component. Suppose  $i = 1$  and the space spanned by the connected components  $C$  and  $C'$  intersect nontrivially. Then they span 3-dimensional space. Since  $C$  and  $C'$  are in 2-dimensional space, they intersect in one dimensional space. Let  $a$  be a vector on  $S$  in the intersection. Then we can find  $\hat{x}, \hat{y} \in C$  and  $\hat{z}, \hat{w} \in C'$  such that

$$\angle xy = \angle xa + \angle ay, \text{ and } \angle zw = \angle za + \angle aw$$

with  $(x, y), (z, w) \in R$ . This contradicts Lemma A.4.2.

(3) If  $m = 1$ ,  $|X| = |\hat{X}| \leq |S| = 2$ . Hence we have the assertion.

(4) If  $m = 2$ ,  $k \leq 2$  and  $k > 1$  by (1). Hence we have (4). ■

We now state the result of E. Bannai.

**定理 A.4.4** *Let  $E = E_1$  be a central idempotent of an association scheme*

$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  *such that  $E = {}^t E$ . Suppose  $A_i E = \alpha_i E$  for some  $\alpha_i \in \mathbf{R}$  for all  $i = 0, 1, \dots, d$ . Let*

$$E = \frac{1}{|X|} \sum_{i=0}^d q_1(i) A_i.$$

*Suppose that  $3 = m_1 = q_1(0) > q_1(1) \geq q_1(2) \geq \dots \geq q_1(d)$ . Let  $\Gamma = \Gamma^{(1)} = (X, R)$ , where  $R = R_1 \cup R_{1'}$ . Then  $\Gamma$  is isomorphic to one of the following edge-regular graphs with parameters  $(v, k, \lambda)$ .*

- (i) *Tetrahedron*  $(4, 3, 2)$ ,
- (ii) *Octahedron*  $(6, 4, 2)$ ,
- (iii) *Cube*  $(8, 3, 0)$ ,
- (iv) *Dodecahedron*  $(20, 3, 0)$ ,
- (v) *Icosahedron*  $(12, 5, 2)$ ,

(vi) *Cuboctahedron* (12, 4, 1); or

(vii) *Icosidodecahedron* (30, 4, 1).

For the proof, we identify  $x \in X$  with  $\hat{x}$ , and  $X$  with  $\hat{X}$ .

We define edges on the sphere. First we note that  $1 > \gamma > -1$  by Lemma A.4.1.

Let  $(x, y) \in R$ . Since  $\gamma \neq -1$ , the geodesic, i.e., the shortest arc between  $x$  and  $y$  is uniquely determined. We call this arc *edge* on the sphere  $S$ . We assume  $\Gamma$  is embedded on  $S$  with these edges. In other words,  $\Gamma$  is a graph with vertex set  $V\Gamma = X$  and edge set  $E\Gamma$  on the sphere  $S$ .

The following result is in [14].

**補題 A.4.5** *The edges of  $\Gamma$  on the sphere  $S$  do not cross each other. In particular,  $\Gamma$  is embedded in  $S$  as a plane graph.*

**証明.** Let  $(x, y), (z, w) \in R$ . Suppose that the edges corresponding to  $(x, y)$  and  $(z, w)$  intersect at  $a \in S$ . Then by Lemma A.4.2, one of  $\|x - z\|$ ,  $\|z - y\|$ ,  $\|y - w\|$  or  $\|w - x\|$  is less than  $\rho$ . This contradicts the choice of  $R$ . ■

**補題 A.4.6**  *$\Gamma$  is an edge-regular graph of valency at most 5.*

**証明.** Let  $\Gamma(x) = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Let  $o = \gamma x$ ,  $H_0 = \text{Span}(x)^\perp$  and  $H = H_0 + o$ . Let  $S_1 = H \cap S$ . Since for  $i = 1, \dots, k$ ,

$$(x_i - o) \cdot x = \gamma - \gamma = 0,$$

$x_i \in S_1$ . Since  $S_1$  is a circle of radius  $\rho' = \sqrt{\rho^2 - (1 - \gamma)^2} < \rho$ ,  $k < 6$ . Note that the mutual distances of the points in  $\Gamma(x)$  are at least  $\rho$ , which means that the angle between  $x_i - o$  and  $x_j - o$  ( $1 \leq i \neq j \leq k$ ) is strictly larger than the angle of the equilateral triangle. ■

**補題 A.4.7** *If  $k \leq 3$ , then  $k = 3$  and  $\Gamma$  is a regular polyhedron and is isomorphic to either the tetrahedron, the cube or the dodecahedron.*

**証明.** By Lemma A.4.3, we may assume that  $k = 3$ . Let  $x \in X$  and  $\Gamma(x) = \{y_1, y_2, y_3\}$ . Suppose  $(y_1, y_2) \in R_i$ . Since the graph on  $\Gamma(x)$  with vertex set defined by  $R_i$  is regular of valency at least 1, and  $y_j \cdot y_l = \gamma_i$  for  $1 \leq j \neq l \leq 3$ . By Lemma A.4.5,  $\Gamma$  is planar. By our observation above, every face is a regular polygon of same size. Hence  $\Gamma$  is a regular polyhedra. Therefore by Lemma A.3.1, we have either the tetrahedron, the cube or the dodecahedron. ■

**補題 A.4.8** *If  $k = 4$ , then  $\Gamma$  is either a regular polyhedron or a quasi-regular polyhedron and is isomorphic to either the octahedron, the cuboctahedron or the icosidodecahedron.*



**証明.** Let  $x \in X$  and  $\Gamma(x) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ .  $\Gamma(x)$  is in a circle  $S_1$  in the proof of Lemma A.4.6. If  $\|y_i - y_{i-1}\|$  with  $2 \leq i \leq 4$  are all equal, we have a regular polyhedron. We have the octahedron in this case.

Let  $(y_1, y_2) \in R_i$ . By our observation above, we may assume that  $R_i = {}^t R_i$  as otherwise  $\Gamma$  becomes a regular polyhedron. Since the graph on  $\Gamma(x) \subset S_1$  with edge set defined by  $R_i$  is  $p_{1,i}^1$ -regular, we may assume that  $(y_1, y_2), (y_3, y_4) \in R_i$ ,  $(y_2, y_3), (y_4, y_1) \in R_j$ ,  $(y_1, y_3), (y_2, y_4) \in R_l$  with  $\rho_i < \rho_j \leq \rho_l$  with  $i < j < l$ . Note that  $y_1 + y_4 = y_2 + y_3 = 2\gamma x$ . In particular, by Lemma A.4.2,  $\rho_i < \rho_l/\sqrt{2} < \sqrt{2}\rho$ .

If  $i = 1$ , then we have a quasi-regular polyhedron by Lemma A.4.5. Hence by Lemma A.3.1,  $\Gamma$  is isomorphic to either the cuboctahedron or the icosidodecahedron.

Now assume that  $1 < i$ . Then  $p_{1,i}^1 > 0$ . We note that Since  $\gamma_i > \gamma_j \geq -1$ , we can define the edges of  $\Gamma^{(i)}$  on the sphere. Let  $z \in X$  such that  $(y_1, z) \in R$ ,  $(z, x) \in R_i$ . Suppose  $z$  is in between  $y_1$  and  $y_2$ . Then the edges  $(y_1, y_2)$  and  $(x, z)$  on the sphere intersect. But then by Lemma A.4.2, one of the sides of the square  $xy_1zy_2$  is less than or equal to  $\rho_i/\sqrt{2} < \rho$ . This is absurd. Hence  $z$  and  $y_4$  are on the same side of the plane  $\text{Span}(x, y_1) = \text{Span}(x, y_3)$ . Since the triangles  $y_1xz$  and  $xy_3y_4$  are isometric,  $\|z - y_4\| < \rho$ . This is a contradiction. ■

**補題 A.4.9** *If  $k = 5$ , then  $\Gamma$  is a regular polyhedron and is isomorphic to the icosahedron.*

**証明.** Let  $x \in X$  and  $\Gamma(x) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ .  $\Gamma(x)$  is in a circle  $S_1$  in the proof of Lemma A.4.6. Suppose  $\|y_1 - y_2\|$  is the smallest among  $\|y_j - y_l\|$  with  $j \neq l$ . Say  $(y_1, y_2) \in R_i$ . Then the graph on  $\Gamma(x)$  with vertex set defined by  $R_i$  is regular of valency 2. Hence again  $\Gamma$  becomes a regular polyhedra. We have the icosahedron in this case. ■

By Lemmas A.4.6, A.4.7, A.4.8, A.4.9, we have the assertion of the theorem. ■

**練習問題 A.4.1** 1. Determine symmetric association scheme  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  such that one of the graphs  $\Gamma^{(i)} = (X, R_i)$  is isomorphic to one of the edge-regular graphs in Theorem A.4.4.

2. Determine commutative association scheme  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  whose symmetrization has the property in 1.

# 付 録 B 練習問題の略解とヒント

## B.1 第1章 オーバービュー

1.2.1 ヒント.  $(i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iv)$  および  $(i) \rightarrow (iii) \rightarrow (iv)$  は簡単に確かめられるので、本質的な部分は、 $(iv) \rightarrow (i)$  のみである。

$(iv) \rightarrow (i)$  :  $\Delta(X) = \{1 = \gamma_0 > \gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_d \geq -1\}$  とする。  $\text{Span}(X) = \mathbf{R}^2$  だから  $\gamma_1 > -1$ 。  $(x, y) \in R_1$  とする。

$$y \in P_{1,1'}(x, x) \subset \{y \in S^1 \mid \langle x, y \rangle = \gamma_1\}$$

で、この右辺は、丁度 2 点  $\{y, y_1\}$  からなるが、 $(iv)$  の条件により、 $y_1 \in P_{1,1'}(x, x)$ 。  
 $(y_1, x) \in R_{1'}$  に対して、 $\gamma_1 = \gamma_{1'}$  だから同じように、 $P_{1',1}(y, y) = \{x, x_1\}$  となる  $x_1$  がとれる。これを続けていくと、 $X$  は、このような操作によって得られる点からなる正  $n$  角形であることがわかる。 ■

1.2.2 ヒント.  $\Delta(X) = \{\gamma_0 = 1 > \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \cdots \geq \gamma_s\}$  とし、グラフ  $\Gamma = (X, R_1)$  を考えよ。 $\Gamma$  の次数は最大でも 5 である。いくつかの証明を考えることは重要だと思われる。 ■

1.2.3 正多面体 (Platonic solids) は自然に  $S^2 \subset \mathbf{R}^3$  に埋め込むことができる。

正四面体 (Tetrahedron):

$$\left\{ (1, 0, 0), \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \right\}.$$

$\Delta = \{1, -1/3\}$ 。この場合は条件はすべて簡単に調べることができ、正四面体は balanced かつ strongly balanced であることがわかる。さらに一般に、 $S^{m-1}$  の 1-距離集合はいつでも balanced かつ strongly balanced である。

正八面体 (Octahedron):  $X = \{\pm e_i \mid i = 1, 2, 3\}$ 、ただし、 $e_i$   $i = 1, 2, 3$  は単位ベクトルとする。このとき、 $\Delta(X) = \{1, 0, -1\}$  であり、balanced かつ strongly balanced である。

正十二面体 (Dodecahedron):  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{20}\}$  を  $i = 1, 2, \dots, 10$  に対しては

$x_{21-i} = -x_i$  および次の様にして定められた点とする。

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, 0) & x_2 &= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \\ x_3 &= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), & x_4 &= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\ x_5 &= \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), & x_6 &= \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\ x_7 &= \left(\frac{1}{3}, \frac{3-\sqrt{5}}{6}, \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{6}\right), & x_8 &= \left(\frac{1}{3}, \frac{3-\sqrt{5}}{6}, -\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{6}\right), \\ x_9 &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{3+\sqrt{5}}{6}, \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{6}\right), & x_{10} &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{3+\sqrt{5}}{6}, -\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{6}\right). \end{aligned}$$

このとき、 $\Delta(X) = \{1, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}, -1\}$  である。これは、balanced でも strongly balanced でもない。

$$P_{1,2}(x_1, x_{11}), \text{ および } P_{2,1}(x_1, x_{11})$$

を考えよ。

正二十面体 (Icosahedron):  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{12}\}$ 、ここで  $i = 1, 2, \dots, 6$  に対しては、 $x_{13-i} = -x_i$  として次のようにおけば良い。

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, 0) & x_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \\ x_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{5-\sqrt{5}}{10}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right), & x_4 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{5-\sqrt{5}}{10}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right), \\ x_5 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right), & x_6 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{5+\sqrt{5}}{10}, -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right). \end{aligned}$$

このとき、 $\Delta(X) = \{1, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -1\}$  であり、balanced かつ strongly balanced である。 ■

## B.2 第2章 アソシエーションスキーム

2.1.1  $A4 \leftrightarrow A4'$  以外は明かだと思うので、省略する。

$(x, y) \in R_h$ ,  $p_{i,j}^h(x, y) = |\{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}|$  とし、 $A4'$  の両辺を考える。

$$\begin{aligned} (A_i A_j)_{x,y} &= \sum_{z \in X} (A_i)_{xz} (A_j)_{zy} \\ &= |\{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}| \\ &= p_{i,j}^h(x, y) \end{aligned}$$

従って、 $A4$  が満たされているとすると、 $A_i A_j$  の  $(x, y)$  成分は  $(x, y) \in R_h$  である限りにおいて、 $(x, y)$  のとり方によらないから  $(A_i A_j)_{x,y} = p_{i,j}^h(A_h)_{x,y}$  が成り立つ。これは、 $A4'$  の右辺の  $(x, y)$  成分と等しいから  $A4'$  が成り立つ。逆に、 $A4'$  が成り立てば  $p_{i,j}^h(x, y)$  は  $(x, y) \in R_h$  で一定だから  $A4$  が成立する。 ■

2.1.2  $A5'$  を示す。

$$\begin{aligned} A_j A_i &= {}^t A_j {}^t A_i = {}^t (A_i A_j) = {}^t \left( \sum_{h=0}^d p_{i,j}^h A_h \right) \\ &= \sum_{h=0}^d p_{i,j}^h {}^t A_h = \sum_{h=0}^d p_{i,j}^h A_h = A_i A_j \end{aligned}$$

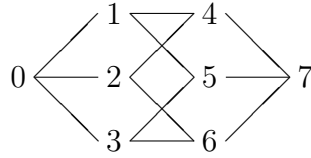
$p_{i,j}^h$  の定義式  $p_{i,j}^h = |\{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}|$  から関係が対称であることを用いて直接計算しても得られる。 ■

2.1.3

$$\alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_d A_d = O$$

とする。  $(x, y) \in R_h$  とし、両辺の  $(x, y)$  成分を考える。左辺で  $(x, y)$  成分が 0 にならない可能性があるのは、 $\alpha_h A_h$  の項だけだから、 $\alpha_h = 0$  を得る。 $h$  は任意だったから、 $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_d = 0$  を得る。従って、 $A_0, A_1, \dots, A_d$  は一次独立である。 ■

2.1.4 ベクトルは便宜上行ベクトルを用い、 $0 = (111), 1 = (-111), 2 = (1-11), 3 = (11-1), 4 = (-1-11), 5 = (-11-1), 6 = (1-1-1), 7 = (-1-1-1)$  と名前をつけ、 $(x, y) \in R_1$  のとき線でむずぶと、次のようになる。



従って、 $A_0 = I$ 、

$$A_1 = \left( \begin{array}{c|ccc|ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad A_2 = \left( \begin{array}{c|ccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$A_3 = \left( \begin{array}{cccc|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$L_0 = I,$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A_1, A_2, A_3$  はブロックに区切ったが、このブロック毎の行和は一定でその値を書いたものが  $L_1, L_2, L_3$  になっている。なぜでしょうか。最初どのように区切っているのでしょうか。 ■

2.1.5  $\mathcal{M}$  をベクトル空間として  $A_h$  を左からかけることにより  $\mathcal{M}$  上の線形変換と見、 $\mathcal{M}$  の基底  $A_0, A_1, \dots, A_d$  に関する行列表示を考える。

$$A_h A_i = \sum_{j=0}^d p_{h,i}^j A_j$$

だから、その行列の  $(j, i)$ -成分は、 $p_{h,i}^j$  である。これは、その行列が  $L_h$  であることを意味する。後は、行列の積が、線形変換の積に対応することより主張を得る。 ■

2.2.1 ヒント． これらはどの線形代数の教科書にも含まれていると信じる。4 については、 $M$  を  $W$  上の線形変換と見て  $W$  の基底を用いた行列  $M_W$  を考え、 $\det(tI - M_W)$  の根をとれば通常の固有値と固有ベクトルの存在に帰着できる。 ■

- 2.3.1 (1)  $E_i E_j = U_i^t \bar{U}_i U_j^t \bar{U}_j = \delta_{i,j} U_i^t \bar{U}_j = \delta_{i,j} E_i$ .  
 (2)  ${}^t E_i = {}^t (U_i^t \bar{U}_i) = \bar{U}_i^t U_i = \overline{U_i^t \bar{U}_i} = \bar{E}_i$ .  
 (3)  $E_i \mathbf{u}_k^{(j)} = U_i^t \bar{U}_i \mathbf{u}_k^{(j)} = \delta_{i,j} U_i \mathbf{e}_k = \delta_{i,j} \mathbf{u}_k^{(i)}$ 、ただし  $\mathbf{e}_k$  は長さ  $m_i$  の  $k$  番めの単位ベクトルを表すものとする。 $\mathbf{u}_1^{(j)}, \dots, \mathbf{u}_{m_j}^{(j)}$  は  $V_j$  の基底だから主張を得る。  
 (4)  $\mathbf{v} \in V$  とし  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_t$  ( $\mathbf{v}_i \in V_i$ ) と書く。(4) により

$$(E_0 + E_1 + \dots + E_t) \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_t = \mathbf{v} = I \mathbf{v}.$$

これより、主張を得る。

- (5)  $M U_i = \mu_i(M) U_i$  だから  $E_i$  の定義により  $M E_i = \mu_i(M) E_i$  を得る。

(6) (2) より  $E_i^* = {}^t\bar{E}_i = E_i$  であることに注意すると、

$$\langle E_i x, E_i y \rangle = {}^t\bar{x} E_i^* E_i y = {}^t x E_i E_i y = {}^t x E_i y = (E_i)_{x,y}.$$

■

2.3.2 最初の等式はすでに練習問題 2.3.1 で証明済み。  $\mathcal{M}$  は複素共役をとること、随伴行列をとることに関して閉じており  $E_0, E_1, \dots, E_d$  は  $\mathcal{M}$  の基底だから

$${}^t E_i = \sum_{h=0}^d \alpha_{i,h} E_h.$$

と書くことができる。  ${}^t E_i {}^t E_j = {}^t (E_j E_i) = \delta_{i,j} {}^t E_i$  だから、各  ${}^t E_i$  に補題 2.3.3 を適応することができる。そこで  $I_i = \{h \mid \alpha_{i,h} \neq 0\}$  と置く。すると、  $I_i \neq \emptyset$  であり  $i \neq j$  に対しては  ${}^t E_i {}^t E_j = 0$  だから  $I_i \cap I_j = \emptyset$  である。

$$I_0 \cup I_1 \cup \dots \cup I_d \subset \{0, 1, \dots, d\}$$

であることを考え合わせると、ある  $\hat{i}$  について  ${}^t E_i = E_{\hat{i}}$  であることがわかる。 ■

## B.3 第3章 Krein パラメタと表現図式

3.1.1  $A_i = \sum_{j=0}^d p_i(j) E_j$ 、  $E_j = \frac{1}{|X|} \sum_{h=0}^d q_j(h) A_h$  だから

$$A_i = \sum_{j=0}^d p_i(j) \frac{1}{|X|} \sum_{h=0}^d q_j(h) A_h = \sum_{h=0}^d \left( \frac{1}{|X|} \sum_{j=0}^d q_j(h) p_i(j) \right) A_h$$

で  $A_0, A_1, \dots, A_d$  は練習問題 2.1.3 より一次独立だったから  $\delta_{i,h} |X| = \sum_{j=0}^d q_j(h) p_i(j)$  を得る。これは、  $QP = |X|I$  を意味する。これより  $P, Q$  は正則行列であることがわかるから、  $PQ = |X|I$  も得る。後半は、上ですでに得た式または、  $PQ = |X|I$  の両辺の成分を比べることによって得られる。 ■

3.1.2  $A_i = \sum_{h=0}^d p_i(h) E_h$  に  $E_j$  を右からかけることによって、  $A_i E_j = p_i(j) E_j$  を得る。前半は、補題 2.3.1 (5) から得られる。また、  $E_j = \frac{1}{|X|} \sum_{h=0}^d q_j(h) A_h$  に左から  $\circ$ -積によって  $A_i$  をかけると  $A_i \circ E_j = \frac{1}{|X|} q_j(i) A_i$  を得る。前半は補題 2.3.1 (6) から得られる。 ■

3.2.1 1.  $\text{tr}(MN) = \sum_{i=1}^n (MN)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{i,j} N_{j,i} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n N_{j,i} M_{i,j} = \sum_{j=1}^m (NM)_{j,j} = \text{tr}(NM)$ .  
2.  $E_i(E_i - I) = O$  だから  $E_i$  の固有値は 1 または 0 で 1 の重複度は  $\dim V_i$  と等しい。 ■

3.2.2  $\ll M, N \gg = \text{tr}(M^* N) = \sum_{y \in X} (M^* N)_{y,y} = \sum_{y \in X} \sum_{x \in X} (M^*)_{yx} (N)_{xy} = \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \bar{M}_{x,y} N_{x,y} = \tau(\bar{M} N)$  である。あとは単純な計算と、練習問題 3.2.1 を用いることにより得られる。 ■

3.2.3 ヒント． 補題 3.2.2 の証明をまねよ。 ■

3.2.4 (1) 補題の証明の続きを以下に記す。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|X|} q_{i,j}^h m_h &= \ll E_h, E_i \circ E_j \gg = \tau(\bar{E}_h \circ E_i \circ E_j) \\
&= \frac{1}{|X|^3} \tau\left(\left(\sum_{l=0}^d \overline{q_h(l)} A_l\right) \circ \left(\sum_{l=0}^d q_i(l) A_l\right) \circ \left(\sum_{l=0}^d q_j(l) A_l\right)\right) \\
&= \frac{1}{|X|^3} \tau\left(\sum_{l=0}^d \overline{q_h(l)} q_i(l) q_j(l) A_l\right) \\
&= \frac{1}{|X|^3} \sum_{l=0}^d \frac{m_h p_l(h)}{k_l} \frac{m_i \overline{p_l(i)}}{k_l} \frac{m_j \overline{p_l(j)}}{k_l} \cdot |X| k_l \\
&= \frac{m_h m_i m_j}{|X|^2} \sum_{l=0}^d \frac{1}{k_l^2} \overline{p_l(i) p_l(j) p_l(h)}.
\end{aligned}$$

後述のように、Krein パラメーターは実数であることを用いると、次の式も得られる。

$$\frac{1}{|X|} q_{i,j}^h m_h = \frac{m_h m_i m_j}{|X|^2} \sum_{l=0}^d \frac{1}{k_l^2} p_l(i) p_l(j) \overline{p_l(h)}.$$

(2) 同様にして、以下を計算する。

$$p_{i,j}^h k_h |X| = \ll A_h, A_i A_j \gg = \text{tr}(A_h A_i A_j).$$

■

3.3.1 ヒント．  $x_{A_i} x_{A_j} = \delta_{i,j} x_{A_i}$  であることに注意すると、補題 3.3.1 の証明と同じようにして得られる。

3.3.2  $T(x)$  の生成する  $\mathcal{M}$  も、 $x_{\mathcal{M}}$  も随伴行列をとることにより閉じており、 $T(x)$  の元はそれら生成元の積のいくつかの線形結合だから、 $M \in T(x)$  に対して、 $M^* \in T(x)$  である。従って、 $T(x)$  は半単純である。他の場合も元の形より明らかな。 ■

3.4.1 1. (a)  $\rightarrow$  (b) : ここでは、グラフは有限集合の上に定義されており、木には閉路がないことから次数 1 の端点があることがわかる。帰納法を用いると、(b) が得られる。[5] 参照。

(b)  $\rightarrow$  (a) : 閉路があれば閉路内の一つの辺を取り除いても連結性は変わらない。閉路がある限りにおいて、同じ操作で辺を取り除く。取り除けなくなったものは、閉路がない連結グラフだから、(a)  $\rightarrow$  (b) より、 $|VT| = |ET| - 1$  これは、出発点の辺の数と等しいから、最初に閉路があると仮定したことが間違っている。従って、閉路はなく、木である。

2. (b)  $\rightarrow$  (a) の中ですでに示した。 ■

## B.4 第4章 Balanced Conditions

- 4.3.1 1.  $x_E$  は対称行列だから、 $x_E A_i = A_i x_E$  ならば転置をとって、 $A_i x_E = x_E A_i$  である。従って  $i \in S$  ならば  $i' \in S$ 。また  $C_M(x_E)$  の定義からこれが積に関して閉じていることがわかるから  $A_i A_j$  は  $h \in S$  なる  $A_h$  たちの一次結合で書ける。
2.  $i, j \in S$  としたとき、 $p_{i,l}^j \neq 0 \Leftrightarrow p_{i',j}^l \neq 0$  だったから 1 より  $l \in S$  を得る。これにより、

$$\sum_{l \in S} p_{i,l}^j A_j = \sum_{l=0}^d p_{i,l}^j A_j = \left( A_i \sum_{l=0}^d A_l \right) \circ A_j = (A_i J) \circ A_j = k_i A_i$$

これは、 $i, j \in S$  のとき、 $\sum_{l \in S} p_{i,l}^j = k_i$  を意味する。

$$\begin{aligned} F^2 &= \sum_{i \in S} \sum_{l \in S} A_i A_l = \sum_{i \in S} \sum_{l \in S} \sum_{j \in S} p_{i,l}^j A_j = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \left( \sum_{l \in S} p_{i,l}^j \right) A_j \\ &= \sum_{i \in S} k_i \sum_{j \in S} A_j = \left( \sum_{i \in S} k_i \right) F = f^2 F \end{aligned}$$

3.  $(1/f)F$  は冪等元だから明らか。補題 2.3.3 参照。
4.  $F$  の定義より  $F \circ F = F$  かつ Krein パラメタは非負であることを考えると、 $i, j \in T$  に対して  $E_i \circ E_j$  に現れる  $E_h$  はすべて  $\{E_l \mid l \in T\}$  に入っていることがわかる。
5.  $F \neq I, J$  だったから  $T$  は真の部分集合である。 $FE \neq O$  だから  $1 \in T$  で 4 の性質より主張が得られる。

[2] 参照。 ■

4.4.1 **Balanced** :  $\alpha_{i,j}^0 = 0$ 。  $h \neq 0$  の時、

$$\alpha_{i,j}^h = \frac{p_{i,j}^h(q_1(i) - q_1(j))}{q_1(0) - q_1(h)}.$$

**Strongly Balanced** :  $q_1(h) = \epsilon q_1(0)$ 、 $\epsilon = \pm 1$  の時は、

$$\beta_{i,j}^h = \epsilon \gamma_{i,j}^h = \frac{p_{i,j}^h q_1(i)}{2q_1(0)} = \epsilon \frac{p_{i,j}^h q_1(j)}{2q_1(0)}.$$

$q_1(h) \neq \pm q_1(0)$  の時は、

$$\beta_{i,j}^h = \frac{p_{i,j}^h(q_1(i)q_1(0) - q_1(j)q_1(h))}{q_1(0)^2 - q_1(h)^2}, \quad \gamma_{i,j}^h = \frac{p_{i,j}^h(q_1(j)q_1(0) - q_1(i)q_1(h))}{q_1(0)^2 - q_1(h)^2}.$$

■



## B.5 第5章 いくつかの例

5.1.1 A1、A2 は明らか。

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (y, x) \sim (y', x')$$

だから A3 も明らか。A4 を以下に示す。

$$p_{i,j}^h(x, y) = |\{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}|$$

が  $(x, y) \in R_h$  のとり方によらず  $(i, j, h)$  のみによって決まることを言わなければならない。 $(x', y') \in R_h$  とすると、 $R_h$  は、一つの軌道だったから、 $(x', y') = (x, y)^g = (x^g, y^g)$  となる  $g \in G$  がある。従って、

$$\begin{aligned} p_{i,j}^h(x, y) &= |\{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}| \\ &= |\{z'^{g^{-1}} \in X \mid (x, z'^{g^{-1}}) \in R_i, (z'^{g^{-1}}, y) \in R_j\}| \\ &= |\{z'^{g^{-1}} \in X \mid (x^g, z') \in R_i, (z', y^g) \in R_j\}| \\ &= |\{z' \in X \mid (x', z') \in R_i, (z', y') \in R_j\}| \\ &= p_{i,j}^h(x', y') \end{aligned}$$

軌道がすべて対称の時は、練習問題 2.1.2 より対称アソシエーションスキームとなる。 ■

5.1.2 (1)  $(x, y) \in R_i$ 、 $yx^{-1} = z_i \in C_i$  とする。 $(x^g, y^g) \in R_i$  とすると、 $y^g(x^g)^{-1} = (yx^{-1})^g = z_i^g \in C_i$ 。逆に  $y'x'^{-1} = z_i^g$  とすると、 $(x, y) \sim (1, yx^{-1}) \sim (1, y'x'^{-1}) \sim (x', y')$  だから  $(x', y') \in R_i$  である。

(2)  $yx^{-1} \in C_h$  とする。次の  $S_1$  と  $S_2$  の間に全単射があることを示せば良い。

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(u, v) \in C_i \times C_j \mid uv = yx^{-1}\} \\ S_2 &= \{z \in G \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\} \end{aligned}$$

$(u, v) \in S_1$  とすると、 $\phi(u, v) = ux = yx^{-1}v^{-1}x \in S_2$  である。一方、 $z \in S_2$  とすると、 $yz^{-1} \in C_j$  より  $xz^{-1}yx^{-1} = (zx^{-1})^{-1}(yz^{-1})(zx^{-1}) \in C_j$  を得るから  $\psi(z) = (zx^{-1}, xz^{-1}yx^{-1}) \in S_1$  となる。これらの写像  $\phi$  と  $\psi$  は互いに逆写像だから、これで  $|S_1| = |S_2|$  が示せた。

(3)  $(u, v) \in C_i \times C_j$  が  $uv = yx^{-1}$  を満たせば、 $(v, v^{-1}uv) \in C_j \times C_i$  で  $vv^{-1}uv = uv = yx^{-1}$  だから、 $p_{i,j}^h = p_{j,i}^h$  を得る。従って、練習問題 5.1.1 より可換アソシエーションスキームとなる。 ■

5.2.1  $G$  が  $H_m$  上可移であることは簡単にわかるから、 $(x, y)$  を通る  $X \times X$  上の軌道を考える時、 $x = {}^t(1, 1, \dots, 1)$  としてよい。 $G \leq O(m, R)$  だから  $G$  は内積の値を変えない。すなわち、 $(x, y)^g = (x', y')$  ならば、 $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$  である。従って、 $R_i$  は軌道のいくつかの和集合であることがわかるが、 $H = \langle \sigma_i \mid i = 1, \dots, m-1 \rangle \simeq S_m$

は、 $x$  を固定するから、 $H$  を用いれば、 $R_i$  が一つの軌道であることがわかる。定義より明らかに、 $R_i$  はすべて対称だから、練習問題 5.1.1 により、これは対称アソシエーションスキームになる。 ■

5.2.2 ヒント.  $\partial(x, y)$  でグラフ  $\Gamma = (H_m, R_1)$  上の距離を表す時、次を示せば良い。

$$R_i = \{(x, y) \mid \partial(x, y) = i\}.$$

■

5.2.3  $(x, y) \in R_h$  をとる。 $x = (1, \dots, 1)$ 、 $y = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$  で  $-1$  の数は  $h$  個として良い。すると、

$$P_{i,j}(\widehat{x}, y) = (\alpha, \dots, \alpha, \beta, \dots, \beta)$$

で  $\beta$  の個数は  $h$  個で、 $\alpha, \beta$  はそれぞれ次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \alpha &= \left( \binom{n-h-1}{l-1} - \binom{n-h-1}{l} \right) \binom{h}{i-l}, \\ \beta &= \left( \binom{h-1}{i-l} - \binom{h-1}{i-l-1} \right) \binom{n-h}{l}. \end{aligned}$$

ここで、 $2l = i + j - h$ 。 $i + j - h$  が奇数の時は、 $P_{i,j}(\widehat{x}, y) = 0$  である。 ■

5.2.4 ヒント.  $H_m$  の場合を一般化せよ。 ■

5.3.1  $n$  次対称群  $G = S_n$  が  $X$  上可移であることは明らかだから、 $X \times X$  上の軌道を調べるため、 $\alpha = \{1, 2, \dots, d\}$  とする。すると

$$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\} \simeq S_d \times S_{n-d}$$

だから  $G_\alpha$  の元で任意の元は、 $\beta_i = \{1, 2, \dots, d-i, d+1, d+2, \dots, d+i\}$  に移すことができるから、軌道は、 $R_0, R_1, \dots, R_d$  であることがわかる。軌道はすべて対称だから、対称アソシエーションスキームとなる。 ■

5.3.2  $\Gamma = (X, R_1)$  としたとき、次を示せば良い。

$$\begin{aligned} R_i &= \{(\alpha, \beta) \in X \times X \mid \partial(\alpha, \beta) = i\} \\ &= \{(\alpha, \beta) \in X \times X \mid (A^j)_{\alpha, \beta} = 0, j < i, (A^i)_{\alpha, \beta} \neq 0\} \end{aligned}$$

■

5.3.3 練習問題 5.3.1 における  $\alpha, \beta_h$  を用いて、 $P_{i,j}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_h)$  を考えよ。 ■

## B.6 付録 A 英文講義録からの補遺

A.1.1 The intersection arrays become as follows.

$$\text{Tetrahedron : } \begin{Bmatrix} * & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & * \end{Bmatrix}.$$

$$\text{Cube : } \begin{Bmatrix} * & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & * \end{Bmatrix}.$$

$$\text{Octahedron : } \begin{Bmatrix} * & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & * \end{Bmatrix}.$$

$$\text{Dodecahedron : } \begin{Bmatrix} * & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & * \end{Bmatrix}.$$

$$\text{Icosahedron : } \begin{Bmatrix} * & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & * \end{Bmatrix}.$$

Hyper-Cube :  $b_i = n - i$ ,  $a_i = 0$ ,  $c_i = i$  for  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Half Cube :  $b_i = \binom{n-2i}{2}$ ,  $a_i = 2i(n-2)$ ,  $c_i = \binom{2i}{2}$  for  $i = 0, 1, \dots, [n/2]$ . ■

A.1.2 1. 練習問題 2.1.3 参照。

2. 補題 A.1.1 より明らか。

3.  $I, A, A^2, \dots, A^d$  が一次独立で、かつ  $v_{d+1}(A) = 0$  だから良い。

4.  $\pi : C[t] \rightarrow C[A]$  ( $f(t) \mapsto f(A)$ ) は全射準同型で核は、 $A$  の最小多項式で生成されたイデアルだから良い。 ■

A.1.3 1, 2, 3 は定義より明らか。  $(x, y) \in R_h$  とすると、

$$\begin{aligned} (A_i A_j)_{x,y} &= \sum_{z \in X} (A_i)_{x,z} (A_j)_{z,y} \\ &= |\{z \in X \mid \partial(x, z) = i, \partial(z, y) = j\}| \\ &= p_{i,j}^h \\ &= \left( \sum_{l=0}^d p_{i,j}^l A_l \right)_{x,y} \end{aligned}$$

これより求める等式を得る。 ■

A.2.1  $\text{rank} E_1 = m_1 = 2$  だから  $\text{rank} E_i \leq 2$  かつ

$$q_{1,i}^{i-1} \neq 0, q_{1,i}^i \neq 0 \Leftrightarrow i = d, q_{1,i}^{i+1} \neq 0, \text{ if } i < d$$

を示せ。これより、パラメタがすべて決まる。

■

A.3.1 [9] 参照。

■

A.4.1 省略

■

## 関連図書

- [1] E. Bannai, On primitive symmetric association schemes with  $m_1 = 3$ , preprint.
- [2] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I*, Benjamin-Cummings, California, 1984.
- [3] E. Bannai and A. Munemasa, The Terwilliger algebras of group association schemes, Kyushu J. Math. 49 (1995), 93–102.
- [4] 坂内英一・坂内悦子 共著, 「球面上の代数的組合せ論」(現代数学シリーズ), シュプリンガー・フェアラーク東京(近刊).
- [5] Bollobás, *Graph Theory, an introductory course*, Graduate Text in Math. 63, Springer, New York, 1986.
- [6] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [7] P. J. Cameron, J. M. Goethals and J. J. Seidel, The Krein condition, spherical designs, Norton algebras and permutation groups, Indag. Math. 40 (1978), 196–206.
- [8] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, 1988.
- [9] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes* (third edition), Dover, New York, 1973.
- [10] P. Delsarte, J. M. Goethals and J. J. Seidel, Spherical codes and designs, Geometriae Dedicata 6 (1977), 363–388.
- [11] G. A. Dickie, A note on  $Q$ -polynomial association schemes, preprint.
- [12] S. M. Gogola, Jr., Characters vanishing on all but two conjugacy classes, Pacific J. Math 109 (1983), 363–385.
- [13] Chr. D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman and Hall, New York 1993.
- [14] Chr. D. Godsil, Bounding the diameter of distance-regular graphs, Combinatorica 8 (1988), 333–343.

- [15] D. Happel, U. Preiser, C. M. Ringel, Binary polyhedral groups and Euclidean diagrams, *Manuscripta Math.* 31 (1980), 317–329.
- [16] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1990.
- [17] I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press, New York, 1976.
- [18] I. M. Isaacs and I. Zisser, Squares of characters with few irreducible constituents in finite groups, *Arch. Math.* 63 (1994), 197–207.
- [19] N. Iwahori, T. Yokonuma, On self-dual, completely reducible finite subgroups of  $GL(2, k)$ , *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA* 28 (1982), 829–842.
- [20] M. Kiyota and H. Suzuki, Character products and  $Q$ -polynomial group association schemes, preprint 1998.
- [21] J. McKay, Graphs, singularities, and finite groups, *Proc. Symposia in Pure Math.* 37 (1980), 183–186.
- [22] H. Suzuki, Imprimitive  $Q$ -polynomial association schemes, *J. Alg. Combin.* 7 (1998), 165–180.
- [23] H. Suzuki, Association schemes with multiple  $Q$ -polynomial structures, *J. Alg. Combin.* 7 (1998), 181–196.
- [24] H. Suzuki, Character products, and balanced sets associated with group schemes, preprint 1997.
- [25] H. Suzuki, Introduction to  $Q$ -polynomial association schemes, Lecture Note, in preparation.
- [26] P. Terwilliger, A characterization of the  $P$ - and  $Q$ -polynomial association schemes, *J. Combin. Th. (A)* 45 (1987), 8–26.
- [27] P. Terwilliger, Balanced sets and  $Q$ -polynomial association schemes, *Graphs and Combin.* 4 (1988), 87–94.