

# ICUHS 数学ツアー 2019

鈴木寛 (Hiroshi Suzuki)

国際基督教大学 (International Christian University)

August 29-30, 2019

## Day 2

## いくつかの点を通る多項式関数

# クラスで考えてみたいこと

## 1.3.2 の確認

- ① たくさんの点を考える時、どのような記号がよいだろうか。
- ② 基本的なものをまず作って、それを組み合わせることはできないだろうか。
- ③ すべての点で、0 という値をとるものは、どのようなになっているだろうか。
- ④ 一つの点では、1 で他では、0 という値をとるものは、どのようなものが考えられるだろうか。
- ⑤ ただ一つしかないということは、どのようにしたら示すことができるだろうか。

# いくつかの点を通る（多項式）関数について

まず、 $c_0, c_1, \dots, c_n$  を数とし、 $x$  を変数としたとき、次の式を考える。

$$y = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

右辺の  $x$  にある数を代入すると、 $y$  の値が決まるので、 $x$  の値によって、 $y$  の値が一つ定まることを  $y$  は  $x$  の関数であるといい、 $y = f(x)$  などと書く。 $f$  は function からとっている。右辺は、 $x$  の整式ともよばれるが、ここでは、多項式と呼ぶことにする。高校では、一項しかないとき、単項式、複数項のとき、多項式と区別することもあるが、ここでは、すべて多項式と呼ぶことにする。ここで、 $c_n \neq 0$  であるとき、 $f(x)$  の次数は  $n$  であるといい、 $\deg f(x) = n$  と書く。右辺が 0 のとき、すなわち、ゼロ多項式の次数の次数もいくつか決め方があるが、ここでは、0 でない多項式のときだけ、次数を問がることにする。定数たとえば、 $f(x) = c_0 = 2$  の次数は、0 である。右辺が次数  $n$  の多項式の時、 $y = f(x)$  を次数  $n$ （または  $n$  次）の多項式関数という。

- ①  $y = 2x - 1$  は 1 次の多項式関数。
- ②  $y = x^2 - 2x + 1$  は 2 次の多項式関数である。
- ③ 一般の 2 次の多項式関数は、 $y = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$  で、 $c \neq 0$  と書けている。
- ④  $y = f(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$  で  $b = f(a)$  となっているとき、関数  $y = f(x)$  は  $(x, y)$  平面の点  $(a, b)$  を通るという。

# いくつかの点を通る（多項式）関数について（つづき）

- ⑤ 点  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(2,4)$  を通る二次関数はあるでしょうか。直観的に、 $y = x^2$  と答えられる人が多いと思います。確かに、 $f(x) = x^2$  は、この3点を通ります。他に、この3つの点を通る二次関数はありませんか。

- ⑥  $y = f(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$  と置くと、

$$0 = f(0) = 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_1 + c_0 = c_0$$

$$1 = f(1) = 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_1 + c_0 = c_2 + c_1 + c_0 = c_2 + c_1$$

$$4 = f(2) = 4 \cdot c_2 + 2 \cdot c_1 + c_0 = 4 \cdot c_2 + 2 \cdot c_1 = 2 \cdot c_2 + 2(c_2 + c_1) = 2 \cdot c_2 + 2 \cdot (c_2 + c_1)$$

これより、 $c_2 = 1$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_0 = 0$  が得られます。つまり他にはありません。

- ⑦ 3点を通る二次関数は、いつでも唯一存在するでしょうか。ここからスタートして、一般の場合を考えたいと思います。

「1.4 数学を復習しておきたい人のために」の「直線と二次関数」の問題を眺めながら、考えてみてください。

# 復習：直線と二次関数

まず、「1.4 数学を復習しておきたい人のために」の「直線と二次関数」の問題の答えを書いておきます。

- ①  $(0, -2)$  を通り、傾きが 3 の直線の方程式。

$$y = 3x - 2$$

- ②  $(0, b)$  を通り、傾きが  $a$  の直線の方程式。

$$y = ax + b$$

- ③ 平面上の直線で、 $y = ax + b$  とは表せないもの。

$x = a$  のように、 $y$  軸と平行な直線。

- ④  $ax + by + c = 0$  をみたす平面上の点  $(x, y)$  全体が直線となる条件。

$a \neq 0$  または  $b \neq 0$ 。( $(a, b) \neq (0, 0)$  とも書きます。)

- ⑤  $(a, 0)$  と  $(0, b)$  を通る直線の方程式。

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ( $a \neq 0, b \neq 0$  のとき) それ以外は、 $x$  軸  $y = 0$  または、 $y$  軸  $x = 0$  となります。

なお、一点になるときは、原点を通る直線がすべて条件を満たします。

# 復習：直線と二次関数（つづき）

- ⑥  $(a, b)$  と  $(c, d)$  を通る直線の方程式。

$$a \neq c \text{ のとき、 } y = b \cdot \frac{x - c}{a - c} + d \cdot \frac{x - a}{c - a} = \frac{d - b}{c - a}(x - a) + b$$

$a = c$  のとき、 $x = a$  ただし、 $(a, b) = (c, d)$  のときは、 $y = m(x - a) + b$  で  $m$  は任意となります。

- ⑦  $(0, 0), (1, -1), (3, 3)$  を通る二次関数。

$$y = (x - 1)^2 - 1 = x^2 - 2x$$

- ⑧  $(1, a), (2, b), (3, c)$  を通る二次関数（か、1次関数か…）。

$$y = a \cdot \frac{(x - 2)(x - 3)}{(1 - 2)(1 - 3)} + b \cdot \frac{(x - 1)(x - 3)}{(2 - 1)(2 - 3)} + c \cdot \frac{(x - 1)(x - 2)}{(3 - 1)(3 - 2)}$$

$a, b, c$  の値によっては、一次関数の場合も、定数関数の場合もありますね。例を挙げられますか。

# 授業 III: いくつかの点を通る多項式関数 (1)

## ラグランジュの補間公式

- $y = f(x)$  の形の多項式関数だけを考えることにすると、 $a = b$  のとき、 $f(a) = f(b)$  となるので、いくつか、点をとったとき、 $x$  座標は異なる必要があります。
- 一般的に書きたいので、 $m$  個の点などとしたいので、 $(a, b), (c, d)$  ではなく、 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m)$  とします。添字は、index といいます。
- $m$  個の点、 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m)$  が与えられた時、

$$y = f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

で

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_m) = b_m$$

となるものを見つけないのですが、 $n$  は何にすればよいでしょうか。

- 二点、すなわち  $m = 2$  では、1 次、すなわち、 $n = 1$ 、三点、 $m = 3$  では、 $n = 2$  ですから、 $m$  点では、 $n = m - 1$  のようです。  
先に進む前に、 $m = 3$  すなわち、三点与えられた場合、 $n = 2$  二次関数で三点を通るものがあるかを考えておきましょう。



# いくつかの点を通る（多項式）関数について（つづき）

- $(1, a), (2, b), (3, c)$  を考えましたが、今の記号を使い、

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$$

この三点を通る関数を作ってみましょう。

$$y = b_1 \cdot \frac{(x - a_2)(x - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + b_2 \cdot \frac{(x - a_1)(x - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} + b_3 \cdot \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$$

2 次以下ではありますが、2 次とは限りません。

- $p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_m)$
- $q_1(x) = p(x)/(x - a_1), q_2(x) = p(x)/(x - a_2), \dots, q_m(x) = p(x)/(x - a_m)$
- $r_1(x) = q_1(x)/q_1(a_1), r_2(x) = q_2(x)/q_2(a_2), \dots, r_m(x) = q_m(x)/q_m(a_m)$ .
- このとき、

$$h(x) = b_1 \cdot r_1(x) + b_2 \cdot r_2(x) + \cdots + b_m \cdot r_m(x)$$

とすると、

$$h(a_1) = b_1, h(a_2) = b_2, \dots, h(a_m) = b_m$$

となっていることが確かめられます。

# いくつかの点を通る（多項式）関数について（つづき）

- 定理の形に書いてみましょう。
- $r_1(x), r_2(x), \dots, r_m(x)$  は、論理回路のときの、 $E_1, E_2, \dots, E_8$  と似ていませんか。

次の授業では、他の表し方はないのかなど、考えてみようと思います。

# 講義 IV: いくつかの点を通る多項式関数 (2)

因数定理

$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  としたとき、実数  $c$  について、 $f(c) = 0$  ならば、

$$f(x) = (\alpha'x^2 + \beta'x + \gamma')(x - c)$$

と書くことができると書きました。これを一般化したものを考えましょう。

- $f(x)$  を下のような  $n$  次の多項式関数とします。

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \quad c_n \neq 0$$

このとき、

$$f(x) = (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0)(x - c) + r = q(x)(x - c) + r$$

となる、定数  $r$  と  $n-1$  次多項式

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$$

が、ただ一組きまります。

- $q(x)$  の係数と、 $r$  は組立除法 (synthetic division) で決まります。
- 特に、 $f(c) = r$  で、 $f(c) = 0$  ならば

$$f(x) = (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0)(x - c)$$

と書けます。

# 一般解

$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ ,  $c_n \neq 0$  で、次数に制限をつけず、

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_m) = b_m$$

となるものを、すべて見つけてみましょう。

- 前に作った、 $h(x)$  は

$$h(a_1) = b_1, h(a_2) = b_2, \dots, h(a_m) = b_m$$

を満たしていました。

- $g(x) = f(x) - h(x)$  とすると、

$$g(a_1) = 0, g(a_2) = 0, \dots, g(a_m) = 0.$$

であることがわかります。

- 因数定理を順に繰り返し使うと、

$$g(x) = q(x)(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_m)$$

で、あることがわかります。

# 一般解 (つづき)

- したがって、

$$f(x) = h(x) + q(x)p(x), \quad p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_m).$$

- 次数を考えると、 $\deg f(x) \leq m - 1$  のときは、 $f(x) = h(x)$ .  $\deg f(x) \geq m$  のときは、 $\deg q(x) = \deg f(x) - m$  となります。
- これで、どのような定理ができたのでしょうか。理解するとともに考えてみましょう。

## 次数 (deg) に関する性質

$f(x), g(x)$  を 0 でない多項式とすると以下が成立する。

- ①  $\deg f(x) + \deg g(x) = \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$
- ②  $\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$

注：max はどちらか大きい (小さくない) 方を表します。

# 練習問題

- ① 次数が 3 以下の多項式  $f(x)$  で  $f(0) = 4, f(1) = 3, f(2) = -6, f(3) = 1$  を満たすものは何か。
- ② 次数が 3 以下の多項式  $r(x), f(x)$  で  $r(-1) = 1, r(0) = r(1) = r(2) = 0$ , および  $f(-1) = 2, f(0) = -1, f(1) = 3, f(2) = -6$  となるものを求めよ。
- ③ 多項式  $f(x)$  は  $f(1) = 2, f(2) = 7, f(3) = 1, f(4) = 8$  を満たすものとする。
  - ① 次数が 3 以下である  $f(x)$  を求めよ。
  - ② 次数が丁度 4 である  $f(x)$  を求めよ。
- ④ 多項式  $r(x)$  は  $r(-5) = r(0) = r(5) = r(10) = 0$  and  $r(15) = 1$  を満たすものとする。次数が 4 のものと 5 のものを一つずつ求めよ。
- ⑤ 多項式  $f(x)$  は  $f(1) = -2, f(2) = 2, f(3) = 14, f(4) = 40$  を満たすものとする。
  - ① 次数が 3 以下の多項式  $g(x)$  で  $g(1) = 1, g(2) = g(3) = g(4) = 0$  となるものを求めよ。
  - ② 次数が 3 以下の  $f(x)$  を求めよ。

## 練習問題（つづき）

- ⑥ 多項式、 $f(x)$  は  $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, f(4) = a_4$  を満たすものとする。多項式  $g(x)$  で  $g(1) = a_1, g(2) = a_2, g(3) = a_3, g(4) = a_4, g(5) = a_5$  を満たすものを  $f(x)$  を利用して求めたい。
- ① 多項式  $h(x)$  で  $g(x) = f(x) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$  となるものが、あることを説明せよ。
  - ② もし  $h(x)$  が  $h(5) = (a_5 - f(5))/(5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = (a_5 - f(5))/24$  を満たせば (a) の  $g(x)$  は条件を満たすことを示せ。

# まとめ

- 背景にある数学の考え方について、確認したいと思います。
- a. ある条件のもとで必ず成り立つ「定理」を目指す。
- b. 単純（で基本的）な場合をよく調べ、それを組み合わせて、複雑な問題の解決を図る。
- c. 複雑な問題を、単純な問題が組み合わさったものとして分解して考える。
- d. 目標地点から逆にたどって、そこに行き着く道を探る。
- e. 実験を繰り返し、予想を立てる。



# おわりに

- 関連問題として、どのようなことが考えられるでしょうか。
  - 一次関数（直線の方程式）： $ax + by + c = 0$
  - 二次関数（円錐曲線の方程式）： $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + g = 0$
- 疑問におもったことや、考えたいことを話し合えればと思います。

数学の問題を理解し、考え、英語を利用し、コンピュータ・ツールも利用し、自律的に、能動的に思考し、かつ他者から学ぶ謙虚さを持ち続けることは、どのような、分野に進んでも、世界を広げる大きな力となると思います。わたしも、みなさんと、一緒に学びを楽しみたいと願っています。

# スケジュール: 8月29日(木)

- 9:00 ICU (大学) N 館ラウンジ集合ののち、教室 N-232 に移動
- 9:10～ 先生の紹介
- 9:15～ 講義Ⅰ 論理回路設計 (1)
- 10:15～ 休憩 (N307 に移動)
- 10:30～ コンピュータの説明と個人での確認 (N307)
- 11:00 ～ 講義Ⅱ 論理回路設計 (2) および 質疑応答 (N307)
- 12:00～ 昼食休憩 (大学の学食に移動)
- 13:00 集合 (N307)
- 13:10～ 研究室見学
- 14:10～ グループワーク (4～5 名の 3 グループに分かれて) (N307)
- 15:30～ 発表について・予告 (N307)
- 16:00 終了

# スケジュール: 8月30日(金)

- 9:00 ICU (大学) N 館教室 N-232 に直接に集合
- 9:05～ 講義 III いくつかの点を通る多項式関数 (1) (N232)
- 10:05～ 質疑応答 (N232)
- 10:15～ 休憩
- 10:30～ 講義 IV いくつかの点を通る多項式関数 (2) (N232)
- 11:30～ 質疑応答・発表について (N232)
- 12:00～ 昼食休憩 (大学の学食に移動)
- 13:00 集合 (N232)
- 13:10～ グループワーク (N232, N307)
- 13:40～ グループワークと並行して、研究室見学
- 15:00～ グループの発表、各グループ 15 分 (N232)
- 15:55～ 講評と補足 (N232)
- 16:15 終了