Final Exam

(10:40 a.m. — 0:40 p.m. Thurs. Nov. 21, 2002)

ID 番号、氏名を、各解答用紙に、また、問題番号も忘れずに書いて下さい。(Write both of your ID number and name on each of the answer sheets. Do not forget to write the problem number as well.)

1. A, B, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}$ を下のようにする。方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ について、次のうち正しいものには ◯、誤っているものには × を解答用紙に記入せよ。(Consider equations $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ and $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, where A, B, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$, and $\boldsymbol{y}$ are as given below. True or false? Write ◯ for true and × for false in your answer sheet.) (4pts × 5 = 20pts)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}.$$

   (a) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解がただ一つならば、$m = n$ である。(If $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has exactly one solution, then $m = n$.)

   (b) $m > n + 1$ ならば $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ は自明な解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ しか持たない。(If $m > n + 1$, then the only solution to $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ is $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.)

   (c) $m < n+1$ ならば $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解（すべての成分が零でない解）を持つ。(If $m < n+1$, then $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ has a non trivial solution, i.e., a solution such that at least one entry of $\boldsymbol{y}$ is not zero.)

   (d) $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ が自明でない解をもてば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ も解を持つ。(If $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ has a non trivial solution, then $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has at least one solution.)

   (e) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもてば $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解を持つ。(If $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has at least one solution, then $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ has a non trivial solution.)

2. C を 拡大係数行列 とする連立一次方程式について、以下の問いに答えよ。(Consider a system of linear equations whose augmented matrix is C.) (10pts×4=40pts)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

   また、サイズ 4 の基本行列を以下のようにする。(Let $P(i;c)$, $P(i,j)$, and $P(i,j;c)$ be elementary matrices of size 4 defined below.)

$$P(i;c) = I + (c-1)E_{i,i}, \; P(i,j) = I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}, \; P(i,j;c) = I + cE_{i,j}.$$

   (a) C に行の基本変形を施し、既約ガウス行列 G を得た。G を得るための基本変形のステップを順番に記せ。(We obtained the reduced echelon form G after we applied a sequence of elementary row operations to the matrix C. Describe each step of a sequence of elementary row operations.)

   (b) 解をすべて求めよ。(Find all solutions of the system of linear equations.)

   (c) 4 次の可逆行列 P で $G = PC$ となるものを基本行列の積で表せ。(Find an invertible matrix P of size 4 such that $G = PC$ and express P as a product of elementary matrices.)

   (d) 前問をみたす P はただひとつしかないことを証明せよ。(Show that there is only one P satisfying the previous problem.)

3. 次の行列に関して以下の問いに答えよ。ただし $x, y, z, 1$ は相異なる実数である。(Let $x, y, z, 1$ be distinct real numbers, and let U be a matrix defined below.) (40pts)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \end{bmatrix}.$$

   (a) $\det(U) = d(x, y, z) = (x-1)(y-1)(z-1)(y-x)(z-x)(z-y)$ であることを示せ。(Show that $\det(U) = d(x, y, z) = (x-1)(y-1)(z-1)(y-x)(z-x)(z-y)$.) (10pts)

   (b) $\det(U)$ を第 4 行について展開せよ。展開をして現れる行列式の値は求めなくて良い。(Find the cofactor expansion of $\det(U)$ along the fourth row. Don't evaluate the determinants appeared in the expansion.) (5pts)

   (c) $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$ とするとき $\det((-U)U^t)$ の値を求めよ。(Find the value of $\det((-U)U^t)$ when $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$.) (5pts)

   (d) $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$ とするとき U^{-1} の $(4, 1)$ 成分を求めよ。答えに行列式が現れても良い。(Let $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$. Find $(4, 1)$ entry of U^{-1}. Your solution may involve determinants.) (10pts)

   (e) $g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ を多項式で、$g(1) = 1,\ g(2) = 6,\ g(3) = 4,\ g(4) = 3$ を満たすものとする。Cramer's Rule を用いて、a_3 を行列式を用いて表せ。(Suppose $g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ be a polynomial of degree at most 3 such that $g(1) = 1,\ g(2) = 6,\ g(3) = 4,\ g(4) = 3$. Apply Cramer's Rule to express a_3 using determinants.) (10pts)

4. 次の行列式の値を求めよ。(Find the determinants of the following matrices.) (10pts $\times$ 2 = 20pts)

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

5. 次の連立一次方程式を考えるため、その係数行列を H とする。(Let H be the coefficient matrix of the system of linear equations given below.) (10pts$\times$ 3 = 30pts)

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = a \\ \lambda x + y + z = b \\ x + \lambda y + z = c \end{cases}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) λ のそれぞれの値に関して、H の階数を求めよ。(Determine the rank of H for each value of λ.)

   (b) λ のそれぞれの値に関して、上の連立一次方程式が解を持つための a, b, c の満たすべき条件を求めよ。(Find the condition for a, b, c to satisfy when the system of linear equations above has at least one set of solution.)

   (c) H が可逆であるときの λ の満たすべき条件とその時の H^{-1} を求めよ。(Find the condition of λ to satisfy when H is invertible. Find H^{-1} for such λ.)

メッセージ： なんでもどうぞ。解答用紙のあいたところに書いて下さい。