LINEAR ALGEBRA I

Hiroshi SUZUKI*
Department of Mathematics
International Christian University

平成 14 年 10 月 31 日

*E-mail:hsuzuki@icu.ac.jp

1　連立一次方程式と行列

次の連立方程式を解いてみよう。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 11x & - & y & + & 5z & = & 17 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

- １式と、２式を交換する。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ 11x & - & y & + & 5z & = & 17 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 11 & 1 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

- １式の３倍を２式から、１式の１１倍を３式から引く。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -2y & - & z & = & 1 \\ & & -12y & - & 6z & = & 6 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -12 & -6 & 6 \end{array}\right]$$

- ２式の６倍を３式から引く。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -2y & - & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

これは、解 (the solution set) が一つに決まらない形をしている。例えば、z を決めると、y は決定され、それを用いると、x も決まるが、最初の z は、何でも良いからである。このような場合は、パラメター（媒介変数 (parameter)）を使って解を表示する。そのためもう少し変形してみよう。

- ２式を -2 で割る。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- ２式を１式から引く。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & \frac{1}{2}z & = & \frac{3}{2} \\ & & y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- これは、$z=t$ として、解をパラメターを使って表すと以下のようになる。

$$\begin{cases} x &= -\frac{1}{2}t+\frac{3}{2} \\ y &= -\frac{1}{2}t-\frac{1}{2} \\ z &= t \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\cdot\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

n 変数の 1 次方程式 m 個からなる連立一次方程式 (a system of m linear equations in n unkowns) は、

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

の形に表すことができる。ここで、a_{ij}、b_k は定数。係数 (coefficient) を表すのには、a_{ij} のような 2 重添字 (double index) を用いる。上のように変形して解を求めるときは、x, y, z や、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ などの変数の係数のみが変化するから、他の部分を省略し、長方形（矩形）に書いたものを考える。これを、連立一次方程式の**拡大係数行列** (augmented matrix) という。実際、この係数の変化のみを拡大係数行列を使って書いたものを上の変形の右に並べて書いてみた。上の一般の連立一次方程式の場合は、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

また、$b_1, b_2, \cdots, b_m$ の部分をのぞいたものを「係数行列」(coefficient matrix) という。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

以下の二つの連立一次方程式の拡大係数行列を書き上に行った方法で解いてみよう。よくイメージがわかないときは、方程式の変形をし、それと並べて、行列の変形をしてみよう。

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ 9x - y + 5z = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 11x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

左の解は、$x=-4, y=-2, z=8$、右の方は解はない。

もう一つ、次はどうだろうか。

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 1 \\ 3x - 9y - 6z = -3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これより、$x = 3t + 2u - 1, y = t, z = u$。となる。この場合には、２つのパラメターによって解が表示された。即ち、自由度は２個ある（正確な意味は後述）。

これは、いずれ示すが、**「連立一次方程式の解は、ないか（０個）、１個か、無限個である。」**

線型代数学 I の最初に学ぶことは、連立一次方程式の解き方と、アルゴリズム（算法）、それと、解があるか、ないか、あるとしたら、自由に取れるパラメターはいくつ取れるか等の判定法とそれに関係する基礎理論である。

以下の行列を係数拡大行列とする、連立一次方程式の解は何であろうか。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

変数を x_1, x_2, x_3 とすると、左は、$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$、中は、$x_1 = 2 - 5t, x_2 = 1 - t, x_3 = t$、右は、解なし。

次の行列はどうであろうか。

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

厳密には、ここでは述べないが、上の形のような拡大係数行列を持つ連立一次方程式の解は、機械的に記述することができる。連立一次方程式解法のアウトラインは、拡大係数行列に、「基本的な行に関する変形」だけを行って、上の形のような「簡単な行列」にし、そこから機械的に解を読みとることである。そこで、以下に、「簡単な行列」とは何かと、「基本的な変形」とは何かを定義する。

定義 1.1 次のような行列を**既約ガウス行列** (reduced row echelon form) という。

1. もし、ある行が 0 以外の数を含めば、最初の 0 でない数は 1 である。（これを先頭の 1 という。）(If a row does not consist entirely of zeros, then the first nonzero number in the row is a 1. (We call this a *leading* 1.))
2. もし、すべての数が 0 であるような行が含まれていれば、それらの行は下の方によせて集められている。(If there are any rows that consist entirely of zeros, then they are grouped together at the bottom of the matrix.)
3. すべてが 0 ではない 2 つの行について、上の行の先頭の 1 は、下の行の先頭の 1 よりも前に存在する。(In any two successive rows that do not consist entirely of zeros, the leading 1 in the lower row occurs farther to the right than the leading 1 in the higher row.)

4. 先頭の 1 を含む列の他の数は、すべて 0 である。(Each column that contains a leading 1 has zeros everywhere else.)

連立方程式に対する以下の変形を基本変形という。

1. １次方程式を何倍かする。（０倍はのぞく。）(Multiply an equation through by a nonzero constant.)
2. ２つの方程式を交換する。(Interchange two equations.)
3. ある方程式に別の方程式を何倍かして加える。(Add a multiple of one equation to another.)

これを拡大係数行列の言葉に変えると以下のようになる。

定義 1.2 以下の変形を行列の **行の基本変形** (elementary row operation) という。

1. ある行に０でない定数をかける。(Multiply a row through by a nonzero constant.)
2. 2 つの行を交換する。(Interchange two rows.)
3. ある行に、別の行を何倍かして加える。(Add a multiple of one row to another row.)

定理 1.1 任意 (arbitrary) の行列は、行の基本変形を何回か施して、既約ガウス行列にすることができる。*(Any matrix can be put in reduced row-echelon form by a sequence of elementary row operations.)*

証明 行の基本変形を何回か施して、既約ガウス行列にする算法（アルゴリズム）(Gauss-Jordan elimination) を以下に述べる。

1. すべての成分が 0 ではない最初の列を i_1 とする。そのような列がなければ行列は 0 行列だから既約ガウス行列である。行の順序を入れ換え、第 1 行第 i_1 列に零でない項が来るようにする。それを c_1 とする。
2. 第 1 行を c_1 で割る。第 1 行の最初の零でない項は i_1 列目でそれは、1（先頭の 1）である。他の行の零でない成分は、i_1 列目以降である。i_1 列目に零でない成分 c があれば、それを j 行目とするとき、第 1 行の c 倍を、第 j 行から引くと、第 i_1 列で零でないのは、第 1 行目にある先頭の 1 だけになる。
3. 第 2 行目以降ですべての成分が 0 ではない最初の列を i_2 とする。そのような列がなければ、２行目以降はすべて零だからそれは既約ガウス行列である。行の順序を入れ換え、第 2 行第 i_2 列に零でない項が来るようにする。それを c_2 とする。
4. 第 2 行を c_2 で割る。第 2 行の最初の零でない項は i_2 列目でそれは、1（先頭の 1）である。3 行目以降の零でない成分は、i_2 列目以降である。i_2 列目に零でない成分 c があれば（第 1 行も含めて）、それを j 行目とするとき、第 2 行の c 倍を、第 j 行から引くと、第 i_2 列で零でないのは、第 2 行目にある先頭の 1 だけになる。
5. 第 3 行目以降ですべての成分が 0 ではない最初の列を i_3 とする。そのような列がなければ、3 行目以降はすべて零だからそれは既約ガウス行列である。行の順序を入れ換え、第 3 行第 i_3 列に零でない項が来るようにする。それを c_3 とする．．．
   これを続けていけば良い。 ■

2　行列の階数と、連立一次同次方程式

2.1　行列の階数と解の存在非存在

まず、復習から始める。

次の連立一次方程式に対して、

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 11x & - & y & + & 5z & = & 17 \end{array}\right.$$

まず「拡大係数行列」を考えた。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

この行列に、「行の基本変形」

1. ある行に０でない定数をかける。
2. ２つの行を交換する。
3. ある行に、別の行を何倍かして加える。

を何回か施して、「既約ガウス行列」に変形して解を求めた。

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & *** & 0 & *** & 0 & *** \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & *** & 0 & *** \\ & & & & \cdots\cdots\cdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & *** \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ & & & & \cdots\cdots\cdots & & & & \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & \frac{1}{2}z & = & \frac{3}{2} \\ & & y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

このとき、解は、１個も無いか、１個か、又は、無限個であった。例えば、拡大係数行列に行の基本変形を行い得た既約ガウス行列が次のような形のものは、解が無かった。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 5z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right.$$

定義 2.1 行の基本変形で得た既約ガウス行列の 0 でない行の数をその行列の**階数 (rank)** と言い、行列 A に対して、rank A と書く。

既約ガウス行列の階数は、0でない行の数であるので、簡単に求めることができるが、一般の行列の階数は、行の基本変形により、既約ガウス行列にいったんしてから求められる。既約ガウス行列の求め方はただ一つではないので、求め方によって、階数が変わってしまう可能性はないだろうか。（実は、そういうことはありません。後述。求め方によって異なる既約ガウス行列がえられることはあるでしょうか。考えてみて下さい。）既約ガウス行列の、すべてが 0 ではない行には「先頭の 1」がありますから、既約ガウス行列の階数はその先頭の 1 の数と言っても同じことです。

例 2.1

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3, \qquad \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

例 2.2 A を n 次正方行列とする。A が既約ガウス行列ならば $A = I$ すなわち対角線上に 1 がならび、他はすべて 0 である行列（単位行列 (identity matrix) と呼ばれる）か、又は、一番下の行はすべて 0 かのいずれかである。

この階数と、解には密接な関係がある。次の定理が成り立つ。

定理 2.1 連立一次方程式の解について以下が成立する。

(1) 拡大係数行列（から得られた既約ガウス行列）の階数と、係数行列の部分の階数が異なれば、その連立一次方程式は解を持たない。*(If the rank of the augmented matrix of a system of linear equations is different from the rank of the coefficient matrix, the system does not have a solution.)*

(2) 拡大係数行列（から得られた既約ガウス行列）の階数と、係数行列の部分の階数が等しければ、その連立一次方程式は解を持つ。*(If the rank of the augmented matrix of a system of linear equations is equal to the rank of the coefficient matrix, the system has a solution.)*

証明　拡大係数行列の階数と、係数行列の階数が等しくないという事は、既約ガウス行列に変形したとき、最後の列が 1 で他が零という行があると言うことである。このときは、解は無い。そうでなければ解は常にある。（後半の厳密な証明は後述。） ■

いくつかの疑問がわく。

1. 最初の連立一次方程式の解と、最後に得た既約ガウス行列に対応する解とは等しいだろうか。
2. 解が存在するとき、それがどれくらいあるかはどのように決まるのか。

2.2 連立一次同次方程式の解

まず、最後の問題を考えるため、連立一次同次 (homogeneous) 方程式について考える。これは、定数項がすべて零のものである。（「同次」を「斉次（さいじ・せいじ）」と呼ぶこともある。）

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 11x & - & y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

この様な方程式は必ず解を持つ。それは、$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ が解になっていることから分かる。

この拡大係数行列を考えて、行の基本変形で、既約ガウス行列にする事を考える。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

行の基本変形をしても最後の列が 0 であることは変わらない。従って、それから得られる既約ガウス行列の最後の行も 0 である。（このことから、この連立一次方程式は、解を持つことが 定理 2.1 から分かるが、それは、すべて 0 という解を持つと言うことから明らかなことであった。）

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & *** & 0 & *** & 0 & *** & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots\ 0 & 1 & *** & 0 & *** & 0 \\ \multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & 1 & *** & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots} \end{bmatrix}$$

ここで、階数を r とし、$l = 1, \ldots, r$ に対して、l 行目の先頭の 1 が i_l 列目であるとするとし、

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_r, j_1, j_2, \ldots, j_{n-r}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

とする。すると、この方程式は、

$$\begin{cases} x_{i_1} & & & + & \sum_{k=1}^{n-r} c_{1k} x_{j_k} & = & 0 \\ & x_{i_2} & & + & \sum_{k=1}^{n-r} c_{2k} x_{j_k} & = & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & & \\ & & x_{i_r} & + & \sum_{k=1}^{n-r} c_{rk} x_{j_k} & = & 0 \end{cases}$$

と書けるから、$x_{j_1}, \cdots, x_{j_{n-r}}$ は、任意の値を取ることができる。

もう少し具体的な例で見てみよう。既約ガウス行列が、次のようになったとしよう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 & & & + & 5x_2 + 5x_5 + (-1)x_6 & = & 0 \\ & x_2 & & + & 0x_2 + 3x_5 + 1x_6 & = & 0 \\ & & x_3 & + & 0x_2 + 4x_5 + 2x_6 & = & 0 \end{cases}$$

この場合、$i_1 = 1, i_2 = 3, i_3 = 4, j_1 = 2, j_2 = 5, j_3 = 6$ で、j_1, j_2, j_2 に対応する、x_2, x_5, x_6 を自由パラメターとして、解を書くことができる。

この様にして、次の結果を得た。

定理 2.2 n 個の変数を持つ連立一次同次方程式の拡大係数行列（から得られた既約ガウス行列）の階数を r とする。すると、これは係数行列の階数とも等しい。$n = r$ ならば、この連立一次同次方程式の解は、$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ のみであり、$n > r$ ならば、$n - r$ 個のパラメターを用いて解を書くことができる。とくに解は、無限個ある。

証明 $n = r$ のときは、既約ガウス行列は次のような形をしていることに注意する。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \ddots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 & & & = & 0 \\ & x_2 & & = & 0 \\ & \ddots & \cdots & & \\ & & x_n & = & 0 \end{matrix} .$$

従って、主張は明らかである。 ■

ここでの考察から同時に次のことも分かった。

系 2.3 連立一次同次方程式の解は、1 個か、または、無限個である。

さらに行列の階数について次の事も分かった。

命題 2.4 m 行 n 列の行列の階数を r とすると、$r \leq m$、$r \leq n$ が成り立つ。

証明 行列の階数は、既約ガウス行列にしたときの零でない行の数だったから、$r \leq m$ である。さらに、零でない行には、先頭の 1 といわれるものがあり、先頭の 1 の現れる列は、すべて異なるのだから、行列の階数は、列の数以下である。即ち、$r \leq n$。 ■

3　行列演算

3.1　行列の定義と演算

今まですでに、何度も「行列」という言葉を使ってきたが、ここで、改めてその定義を述べる。

定義 3.1　1. $m \times n$ 個の数を長方形（矩形）に並べた

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を $m \times n$ **行列**、又は、(m, n) 行列と言う。上の行列を略して、$A = [a_{ij}]$ などと書くこともある。(A *matrix* is a rectangular array of numbers. The numbers in the array are called the entries in the matrix. The *size* of a matrix is decribed by specifying the number of *rows* (horizontal lines) and *columns* (vertical lines) that occur in the matrix. The matrix above is called $m \times n$ matrix or (m, n) matrix.)

2. 二つの行列は、そのサイズ (m, n) が等しく、かつ、その成分（矩形に並べた $m \times n$ 個の数）が等しいときに等しい。(Two matrices are said to be *equal* if they have the same size and the corresponding entries in the two matrices are equal.)

3. $1 \times n$ 行列 $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ を n **次行ベクトル** (n *dimensional row vector* or row vector of size n)、$m \times 1$ 行列、

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

を m **次列ベクトル** (*an m dimensional column vector* or *a column vector of size m*) という。

4. 上の行列 A において、左から、j 番目の縦に並んだ、

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

を A の **第 j 列**と言い、上から、i 番目の横に並んだ、

$$\boldsymbol{a}'_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$$

を A の第 i 行と言い、A を次のようにも書く。

$$A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}'_1\\ \boldsymbol{a}'_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}'_m\end{bmatrix}$$

5. 第 i 行 第 j 列を (i,j) **成分**と呼ぶ。上の行列 A は、(i,j) 成分が a_{ij} であるような行列である。

次に行列に演算を定義する。

定義 3.2 A、B を共に同じ型（$m\times n$）の行列、c を数（スカラー）とする、**和** $A+B$ (*sum*)、**スカラー倍** cA (*scalar multiple*) を成分での和と、c 倍とで定義する。すなわち、

$$A+B=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}, cA=\begin{bmatrix}ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n}\\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn}\end{bmatrix}$$

ここで、最初の方程式の解に戻ってみよう。解を、以下のように書いたのは、上の定義のもとでである。

$$\begin{cases}x &=& -\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\\ y &=& -\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\\ z &=& t\end{cases}\qquad \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\\ t\end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}$$

定義 3.3 $A=(a_{i,j})$ を $m\times r$ 行列、$B=(b_{k,l})$ を $r\times n$ 行列とする。このとき、$m\times n$ 行列 $C=(c_{s,t})$ の各成分は次のようにして定義されたものとする。

$$c_{s,t}=\sum_{u=1}^{r}a_{s,u}b_{u,t}=a_{s,1}b_{1,t}+a_{s,2}b_{2,t}+\cdots+a_{s,r}b_{r,t}.$$

このとき、$C=AB$ と書き、行列 A と B の**積** (*product*) という。

$$C=AB=\begin{bmatrix}\sum_{u=1}^{r}a_{1,u}b_{u,1} & \sum_{u=1}^{r}a_{1,u}b_{u,2} & \cdots & \sum_{u=1}^{r}a_{1,u}b_{u,n}\\ \sum_{u=1}^{r}a_{2,u}b_{u,1} & \sum_{u=1}^{r}a_{2,u}b_{u,2} & \cdots & \sum_{u=1}^{r}a_{2,u}b_{u,n}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ \sum_{u=1}^{r}a_{m,u}b_{u,1} & \sum_{u=1}^{r}a_{m,u}b_{u,2} & \cdots & \sum_{u=1}^{r}a_{m,u}b_{u,n}\end{bmatrix}$$

例 3.1　1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ とすると、

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 19 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \\ 4 & 7 & 15 \end{bmatrix}$$

このように、AB と、BA は、そのサイズすら違う。たとえサイズが等しくても、殆どの場合、$AB \neq BA$ である。

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ とすると、

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 11x_1 - x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}$$

従って、$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 17 \end{bmatrix}$ とすると最初に扱った方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書くことができる。

これも積を、上のように定義した一つの理由である。

3. 一般には、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書ける。その意味は、

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

が成り立つため事と、各成分が等しいこととが同値だからである。

注

1. ２つの行列に対して、積がいつも定義できるわけではないが、A, B を共に、$n \times n$ 行列とすると、AB も、BA も共に定義することが出来、どちらも $n \times n$ 行列となる。この様に、行の数と、列の数が等しい行列はとくに重要である。これを n 次正方行列 (*square matrix of order n*)、又は、単に 正方行列と言う。
2. すべて成分が零の $m \times n$ 行列を 零行列と言い、$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{m,n}$ と書く。A を $m \times n$ 行列とすると、

$$A + \boldsymbol{O}_{m,n} = \boldsymbol{O}_{m,n} + A = A,\ A\boldsymbol{O}_{n,l} = \boldsymbol{O}_{m,l},\ \boldsymbol{O}_{l,m}A = \boldsymbol{O}_{l,n}$$

が成り立つ。$\boldsymbol{O}_{n,n}$ を簡単に $\boldsymbol{O}_n$ と書くこともある。
3. i 行 i 列の成分（(i,i) 成分）を対角成分と言う。n 次正方行列で、対角成分がすべて 1 他は、すべて 0 であるような行列を、単位行列と言い、$I = I_n$ とかく。（教科書によっては、$E = E_n$ を使っているものも多い。簡単に確かめられるように、A を $m \times n$ 行列、B を $n \times m$ 行列とすると、$AE = A$、$EB = B$。

命題 3.1 行列の演算に関して次の諸性質が成り立つ。

(1) $A + B = B + A$ （加法に関する交換法則）

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ （加法に関する結合法則）

(3) $A(BC) = (AB)C$ （乗法に関する結合法則）

(4) $A(B + C) = AB + AC$、$(A + B)C = AC + BC$ （分配法則）

(5) $cA = (cI)A$

証明　行列のサイズは書かれていないが、演算ができる範囲において (1)-(5) はすべて成立する。ここでは、一番大切だが、なれないと難しい、(3) について証明を書いてみよう。

A を $r \times s$ 行列、B を $s \times t$ 行列、C を $t \times u$ 行列とする。行列 X の (i,j) 成分を $X_{i,j}$ と表すことにする。例えば、$(AB)_{i,j}$ と書いたら A と B の積として得られた行列の (i,j) 成分を表す。さて、二つの行列 $(AB)C$ と $A(BC)$ が等しいことを言うことが目的である。二つの行列が等しいことを示すためには、サイズが等しいことと、対応する成分がすべて等しいことを言わなければならない（行列が等しいことの定義参照）。

行列 A は $r \times s$ 行列、B は $s \times t$ 行列だから、A の列の数と B の行の数はともに s で等しい。したがって、この二つの行列の積は定義することができ、AB は $r \times t$ 行列である。C は $t \times u$ 行列だから、AB と C の積も定義することができ、行列 $(AB)C$ は $r \times u$ 行列である。同様に、行列 A は、$r \times s$ 行列、BC は $s \times u$ 行列だから、$A(BC)$ も定義され、これも $r \times u$ 行列である。したがって、二つの行列 $(AB)C$ と $(AB)C$ のサイズはともに、$r \times u$ で等しい。

次に、各 $h=1,2,\ldots,r$、$k=1,2,\ldots,u$ において $(AB)C$ と $A(BC)$ の (h,k) 成分は等しいことを以下に示す。

$$
\begin{aligned}
[(AB)C]_{h,k} &= \sum_{j=1}^{t}(AB)_{h,j}C_{j,k} \quad (AB \text{ と } C \text{ の積の } (h,k) \text{ 成分の定義}) \\
&= \sum_{j=1}^{t}(\sum_{i=1}^{s}A_{h,i}B_{i,j})C_{j,k} \quad (AB \text{ の } (h,j) \text{ 成分の定義}) \\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}(A_{h,i}B_{i,j})C_{j,k} \quad (\text{和はどの順序で計算しても等しいから}) \\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}A_{h,i}(B_{i,j}C_{j,k}) \quad (\text{数の積では結合法則が成り立つから}) \\
&= \sum_{i=1}^{s}A_{h,i}(\sum_{j=1}^{t}B_{i,j}C_{j,k}) \quad (\text{数の和はどの順序で計算しても等しいから}) \\
&= \sum_{i=1}^{s}A_{h,i}(BC)_{i,k} \quad (BC \text{ の } (i,k) \text{ 成分の定義}) \\
&= [A(BC)]_{h,k} \quad (A \text{ と } BC \text{ の積の } (h,k) \text{ 成分の定義})
\end{aligned}
$$

したがって、$(AB)C=A(BC)$ が成立する。 ■

定義 3.4 $m\times n$ 行列 $A=[a_{i,j}]$ に対して、(i,j) 成分が、$a_{j,i}$（または、同じことだが (j,i) 成分が、$a_{i,j}$）である $n\times m$ 行列を A の転置行列と言い、A^t と書く。すなわち、

$$
A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ のとき、} A^t=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

（A^t の代わりに、${}^tA$, A^T, ${}^TA$ 等を使う場合もある。ここでは、教科書にあわせて、A^t を用いる。）

例 3.2

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.
$$

4　逆行列

連立一次方程式は、行列を用いて、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と言うように書けるのであった。ここで、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

さて、この方程式を一次方程式 $ax = b$ を解くのに、a で割るように、A で割ると言うことを考えられないか。そのため、以下のような定義をする。

定義 4.1 正方行列 A について、$AB = BA = I$ を満たす正方行列 B が存在するとき、A は、**可逆**である（又は、可逆行列 (invertible matrix) [**正則行列** (nonsingular matrix)] である）と言う。B を A の逆行列と言い $B = A^{-1}$ と書く。

実際 A が可逆で、$B = A^{-1}$ とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左から B をかけると、

$$B\boldsymbol{b} = BA\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

逆に、$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{b}$ とすると、$A\boldsymbol{x} = A(B\boldsymbol{b}) = (AB)\boldsymbol{b} = I\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$。従って、$B\boldsymbol{b}$ が解で、解は、$B\boldsymbol{b}$ の形に限る。すなわち、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は、ただ一つである。このことは、次のようにもあらわすことができる。

$$\text{If } A \text{ is invertible, then } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

例 4.1 2×2 行列の逆行列は簡単に求められる。

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

実際、

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = I$$

同様にして、

$$A^{-1}A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = I$$

例えば、

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

従って、$ad-bc\neq 0$ ならば、逆行列を持つことがわかった。逆行列を持てば、いつでも、$ad-bc\neq 0$ だろうか。一つの方法は、行列式 (determinant) と言われるものを使う方法である。一般に、2×2 行列

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

について、$\det A = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ と定義する。成分が a,b,c,d の時は、$ad-bc$ となる。すると、

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$$

とするとき、

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}\\ &= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})-(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})\\ &= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}+a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}+a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}+a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}\\ &\quad -a_{11}b_{12}a_{21}b_{11}-a_{11}b_{12}a_{22}b_{21}-a_{12}b_{22}a_{21}b_{11}-a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}\\ &= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}+a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}-a_{11}b_{12}a_{22}b_{21}-a_{12}b_{22}a_{21}b_{11}\\ &= (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})\\ &= \det A\det B\end{aligned}$$

であることに注意すると、$AB=I$ ならば、$\det I=1$ だから、

$$\det A\det B=\det I=1 \tag{1}$$

となる。従って、$\det A = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ となる。以下に命題の形でまとめておく。

命題 4.1 2×2 行列 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ に対して、$\det A = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ と定義する。

(1) A,B を 2×2 行列とすると、$\det AB=\det A\det B$。

(2) A が可逆であることと、$\det A = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ とは、同値であり、そのとき、

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$$

A の逆行列の定義は、$AB=BA=I$ となる行列 B のことだったが、$AB=I$ がなりたてば、$BA=I$ も成り立つだろうか。2×2 行列のときは、(1) より、

$$AB=I\Rightarrow \det A\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1} \text{ s.t. } A^{-1}A=AA^{-1}=I. \tag{2}$$

(The last part reads : There exists A^{-1} such that $A^{-1}A=AA^{-1}=I$.) これより、$B=IB=A^{-1}AB=A^{-1}I=A^{-1}$ となり、B は A の逆行列であることがわかる。その

意味でも、上の命題は重要。上の式（(2) で命題を使っています。命題の (1), (2) をどこで使っているか分かりますか。）

それでは、行列が、2×2 よりも大きいときは、どうであろうか。大体、上の命題に対応する事が成り立つが、ここでは、まず、逆行列を求める一つの方法を定理の形で紹介する。

定理 4.2 A を n 次正方行列、$I=I_n$ を n 次単位行列とし、$C=[A,I]$ なる、$n\times 2n$ の行列を考える。この行列 C に、行に関する基本変形を施し、既約ガウス行列に変形する。その結果を D とする。もし、$D=[I,B]$ の形になれば、$B=A^{-1}$ である。もし、D の左半分が、I で無ければ、A は、逆行列を持たない。とくに、A が逆行列を持つことと、$\mathrm{rank}\ A=n$ であることとは、同値である。*(Let A be a square matrix of size n, and $I=I_n$ the identity matrix of the sama size. First make a matrix $C=[A,I]$ of size $n\times 2n$. Let D be a reduced echelon form of C obtained by applying a sequence of elementary row operations successively. If D has the shape $[I,B]$, A is invertible and $A^{-1}=B$. Otherwise, A is not invertible. In particular, a square matrix A of size n is invertible if and only if* $\mathrm{rank}\ A=n$.*)*

（不思議ですね。私は最初にこの定理を学んだ時、非常に驚きました。）上の定理の証明は、次回に回し、実際にこの方法で逆行列を求めてみよう。

例 4.2

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\ \text{に対して、}C=\begin{bmatrix}1&2&2&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\3&2&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

とおき、行の基本変形を施す。

$$\begin{bmatrix}1&2&2&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\3&2&1&0&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-4&-2&1&0\\3&2&1&0&0&1\end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-4&-2&1&0\\0&-4&-5&-3&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&1&0&0\\0&1&1&1&1&-1\\0&-4&-5&-3&0&1\end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-2&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&-4&-5&-3&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-2&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&-1&1&4&-3\end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-2&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&1&-1&-4&3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-2&2\\0&1&0&2&5&-4\\0&0&1&-1&-4&3\end{bmatrix}$$

これより、A は、可逆行列で、その逆行列は、

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

となる。

例 4.3

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ に対して、} C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおき、行の基本変形を施す。

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/7 & 2/7 & 0 & -5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

これは、この後、いくら変形しても、この既約ガウス行列は、$[I, B]$ の形にならないことは、明らかである。実は、rank $A = 2$ で（ここまでで分かるのは、rank $A \leq 2$）rank $A \neq 3$ なので、A は、逆行列を持たない。

上の例からも分かるように、可逆かどうかを判定するだけなら、A をそのまま、変形して、rank A を求めれば良いことが分かった。それには、既約ガウス行列まで変形しなくても、ガウス行列まで変形すれば十分である。

定義 4.2 次のような行列を (既約) ガウス行列という。

1. もし、ある行が 0 以外の数を含めば、最初の 0 でない数は 1 である。（これを先頭の 1 という。）
2. もし、すべての数が 0 であるような行が含まれていれば、それらの行は下の方によせて集められている。
3. すべてが 0 ではない 2 つの行について、上の行の先頭の 1 は、下の行の先頭の 1 よりも前に存在する。
4. (先頭の 1 を含む列の他の数は、すべて 0 である。)

A が可逆行列のとき、逆行列が存在しますが、それはただ一つだけです。それを示すには、次を示せば良いのですが、示せますか。

$$AB = BA = I \text{ かつ } AC = CA = I \Rightarrow B = C.$$

5　連立一次方程式と可逆性

既約ガウス行列を求めるのに、行列の行に関する「基本変形」を用いたが、この基本変形について、もう少し考えてみる。(We will study different view of elementary row operations to get a reduced echelon form of a matrix.)

まず、$I = I_m$ を m 次単位行列 (identity matrix) とし、$E_{i,j}$ を (i,j)-成分のみが 1 で他はすべて零である行列とする。これを、「行列単位」と言う。(*Matrix unit* $E_{i,j}$ is a matrix such that (i,j) entry is one and zero everywhere else.)

$1 \leq i \neq j \leq m$ とし、以下の行列を考える。

$$P(i;c) = I + (c-1)E_{i,i},\ P(i,j) = I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i},\ P(i,j;c) = I + cE_{i,j}.$$

ただし、c は、零でない数とする (c is a nonzero number)。これら 3 種類の行列を<u>基本行列</u> (*Elementary matrices*) と呼ぶ。

$A = [a_{i,j}]$ を (i,j)-成分が $a_{i,j}$ である $m \times n$ 行列とする。さて、行に関する基本変形とは以下のものであった。(Elementary row operations are the following.)

1. ある行に 0 でない定数をかける。(Multiply row i by $c \neq 0$.)
2. 2 つの行を交換する。(Interchange rows i and j.)
3. ある行に、別の行を何倍かして加える。(Add c times row i to row j.)

$P(i;c)$ を A に左からかけると、

$$P(i;c)A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

すなわち、$P(i;c)$ を 行列 A に左からかけることは、A の第 i 行を c 倍する事である。(If A is multiplied by $P(i;c)$ from the left, row i of A is multiplied by c.)

$P(i,j)$ を A に左からかけると、$i < j$ とすると、

$$P(i,j)A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

すなわち、$P(i,j)$ を 行列 A に左からかけることは、A の第 i 行と、第 j 行を入れ換える事である。(If A is multiplied by $P(i,j)$ from the left, rows i and j are interchanged.)

$P(i,j;c)$ を A に左からかけると、

$$P(i,j;c)A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1}+ca_{j1} & a_{i2}+ca_{j2} & \cdots & a_{in}+ca_{jn} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

すなわち、$P(i,j;c)$ を 行列 A に左からかけることは、A の第 j 行の i 倍を第 i 行に足す事である。(If A is multiplied by $P(i,j;c)$ from the left, c times row i is added to row j.)

このことを用いると、特に以下の事が分かる。(Using these observations we find the following as well.)

1. $P(i;c)P(i;1/c) = P(i;1/c)P(i;c) = I$。すなわち、$P(i;c)^{-1} = P(i;1/c)$。
2. $P(i,j)P(i,j) = I$。すなわち、$P(i,j)^{-1} = P(i,j)$。
3. $P(i,j;c)P(i,j;-c) = I$。すなわち、$P(i,j;c)^{-1} = P(i,j;-c)$。

さて、これを用いていくつかのことを考えてみよう。

まずは、次の補題から。

補題 5.1 P, Q を 可逆な n 次正方行列とすると、P^{-1} も可逆で $(P^{-1})^{-1} = P$。また、積 PQ も可逆で $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$ である。さらに、$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ をすべて可逆な n 次正方行列とすると、積 $P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1$ も可逆で、*(Suppose matrices P and Q are invertible. Then so are P^{-1} and PQ, and $(P^{-1})^{-1} = P$ and $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$. Moreover, if $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ are all invertible, then so is the product $P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1$ and)*

$$(P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1)^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}\ldots P_{n-1}^{-1}P_n^{-1}.$$

証明　$Q^{-1}P^{-1}PQ = Q^{-1}Q = I$, $PQQ^{-1}P^{-1} = PP^{-1} = I$ より、$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$。一般の場合も同様。 ■

補題 5.2 A を $m \times n$ 行列とし、A に行に関する基本変形を行って、行列 B が得られたとする。すると、m 次可逆行列 P で、$PA = B$ となるものがある。*(Let A be an $m \times n$ matrix. If the matrix B is obtained from A by a sequence of elementary row operations, then there exists an invertible matrix P of size m such that $PA = B$.)*

証明　上で見たように、ある行列に行に関する基本変形を施すことは、それに対応する基本行列を左からかけることであった。A に施した基本変形に対応する基本行列を、$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ とする。$P = P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1$ とすると、

$$B = P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1 A = PA.$$

さらに $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ は、上で見たように可逆だから、補題 5.1 により、P は、可逆である。(As we have seen above, each elementary row operation corresponds to an elementary matrix, and the resulting matrix is obtained by multiplying the matrix by the corresponding elementary matrix. Suppose elementary matrices $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ correspond to the sequence of elementary row operations. Let $P = P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1$. Then $B = PA$. Since P is a product of invertible matrices, P is invertible by Lemma 5.1.) ■

ここで、定理 4.2 の証明する。まず、定理を再掲する。(Now we prove Theorem 4.2, which states the following.)

> A を n 次正方行列、$I = I_n$ を n 次単位行列とし、$C = [A, I]$ なる、$n \times 2n$ の行列を考える。この行列 C に、行に関する基本変形を施し、既約ガウス行列に変形する。その結果を D とする。もし、$D = [I, B]$ の形になれば、$B = A^{-1}$ である。もし、D の左半分が、I でなければ、A は、逆行列を持たない。とくに、A が逆行列を持つことと、rank $A = n$ であることとは、同値である。

X, Y を n 次正方行列とし、行列 $[X, Y]$ に行に関する基本変形を施し、その基本変形に対応する基本行列を P とする。すると、行に関する基本変形を、X、Y それぞれにすることと同じだから、結果は、$P[X, Y] = [PX, PY]$ である。このことを用いると、行列、$C = [A, I]$ に行に関する基本変形を施し、$D = [I, B]$ を得たとする。C に施した基本変形に対応する基本行列を、$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ とする。$P = P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1$ とすると、

$$[I, B] = D = P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1 C = P[A, I] = [PA, P].$$

従って、$PA = I$、$B = P$。P は、可逆行列の積だったから P も可逆。$PA = I$ より、

$$P^{-1} = P^{-1} I = P^{-1} PA = A$$

より、$B = P = A^{-1}$ である。

さて、既約ガウス行列 D の左半分を $L = PA$ とし、L が I でなければ、既約ガウス行列の定義から、L の第 m 行（一番下の行）はすべて 0 である。即ち、rank $L = r < n$。さて、定理 2.2 は次のようなものであった。

> n 個の変数を持つ連立一次同次方程式の拡大係数行列の階数を r とする。すると、これは係数行列の階数とも等しい。$n = r$ ならば、この連立一次同次方程式の解は、$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ のみであり、$n > r$ ならば、$n - r$ 個のパラメターを用いて解を書くことができる。とくに解は、無限個ある。

これにより、n 次列ベクトル $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ で $L\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ となるものが存在する。ここで、もし A が可逆であるとすると、$L = PA$ も可逆だから、

$$\mathbf{0} = L^{-1}\mathbf{0} = L^{-1}L\boldsymbol{y} = I\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$$

となり、これは矛盾。従って、A は、可逆ではない。 ■

系 5.3 A, B を n 次正方行列とする。このとき、$AB = I$ ならば、A も B も可逆行列で、$BA = I$ である。可逆行列は、基本行列の積で書ける。*(Let A and B be square matrices of size n. If $AB = I$, then both A and B are invertible and $BA = I$.)*

証明 B が可逆でないとすると、n 次列ベクトル $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ で、$B\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ となるものが存在する。すると、

$$\mathbf{0} = A\mathbf{0} = AB\boldsymbol{y} = I\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$$

となり、矛盾。従って、B は、可逆である。これより、

$$B^{-1} = IB^{-1} = ABB^{-1} = A$$

となり、$BA = BB^{-1} = I$。最後の部分は、A の行による基本変形で、階数が、n より小さい既約ガウス行列が得られると、n 次列ベクトル $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ で、$A\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ となるものが存在するから、上と同様にして、矛盾が得られる。これから、結果が得られる。 ■

連立一次方程式に戻る。

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と行列で表示する。拡大係数行列を、$[A, \boldsymbol{b}]$ とし、これに基本変形を次々に施すと、それに対応する基本行列の積を P として、$P[A, \boldsymbol{b}] = [PA, P\boldsymbol{b}]$ となる。これは、$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ に関する拡大係数行列である。P は、可逆であることから、次のことが分かる。

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}.$$

すなわち、$\boldsymbol{x}$ が、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たせば、$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ を満たし、逆に、$\boldsymbol{x}$ が、$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ を満たせば、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす。従って、基本変形を行っても解は、変わらないのであった。

6 行列式

2×2 行列について考えたとき、行列式 $\det A$ を使って可逆性の判定、逆行列の構成などをした。ここでは、$n\times n$ 行列、すなわち、n 次正方行列の行列式をまず定義する。

準備として、順列とその追い越し数をまず定義する。

定義 6.1 1. 自然数の集合 $N=\{1,2,\ldots,n\}$ を重複なく並べたものを N の**順列**という。(A *permutation* of the set of integers $\{1,2,\ldots,n\}$ is an arrangement of these integers in some order without omissions or repetitions.) 順列を $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ などと書く。N の順列全体をここでは、P_n と書く。

2. $\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n$ を順列とする。このとき、

$$\ell(\rho)=|\{(r,s)\mid 1\le r<s\le n,\ j_r>j_s\}|$$

を順列 ρ の**追い越し数** (the *number of inversions*) と言う。(反転数、転位数などとも言う)

3. ρ を順列とするとき、$\mathrm{sgn}(\rho)=(-1)^{\ell(\rho)}$ を ρ の**符号** (sign, signature) と言う。

例 6.1 順列

1. $n=1$ の時、$P_1=\{(1)\}$。
2. $n=2$ の時、$P_2=\{(1,2),(2,1)\}$。$\{1,2\}$ の順列は、2 個。
3. $n=3$ の時、

$$P_3=\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}。$$

$\{1,2,3\}$ の順列は、6 個。

4. $n=4$ の時、

$$\begin{aligned}P_4=\{&(1,2,3,4),(1,2,4,3),(1,3,2,4),(1,3,4,2),\\&(1,4,2,3),(1,4,3,2),(2,1,3,4),\cdots\}\end{aligned}$$

で、全部で、$24=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!$ 個ある。

5. 最初が何になるかで、n 通り、最初を固定したとき、2 番目は、1 番目の数字は使えないから $n-1$ 通り、3 番目は、$n-2$ 通り、・・・となっていく。集合 S の元の数を $|S|$ と書くこともある。これを用いると、$\{1,2,\ldots,n\}$ の順列は、

$$|P_n|=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!$$

個あることが分かる。集合 S の元の数を $|S|$ と書くこともある。これを用いると、

例 6.2 追い越し数、符号

1. 追い越し数は、順列を左から見ていったとき、大きい小さいとなっている組の数のことである。例えば、$(3,4,1,5,2)$ の時は、3 から見ると、$(3,1),(3,2)$ がそのような組、4 から見ると、$(4,1),(4,2)$、1 から見ると、そのような組はなく、後は、$(5,2)$ がそのような組だから、全部で、$\ell(3,4,1,5,2) = 2+2+0+1 = 5$ である。
2. 符号は、定義から追い越し数が偶数なら 1 奇数なら -1 である。特に上の例では、

$$\mathrm{sgn}(3,4,1,5,2) = (-1)^5 = -1.$$

3. 順列 $(1,2,3,\ldots,n)$ の時は、追い越し数は、0 だから 符号は、1。$i<j$ とし、i と、j を入れ換えた順列を、

$$\rho = (1,2,\ldots,i-1,j,i+1,\ldots,j-1,i,j+1,\ldots,n)$$

とすると、$\ell(\rho) = (j-i)+(j-i)-1 = 2(j-i)+1$ だから、$\mathrm{sgn}(\rho) = -1$。
4. $P_1 = \{(1)\}$ については、$\ell(1) = 0$, $\mathrm{sgn}(1) = 1$。P_2、P_3 については、以下のようになる。

P_2	$(1,2)$	$(2,1)$
ℓ	0	1
sgn	1	-1

P_3	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(2,1,3)$	$(2,3,1)$	$(3,1,2)$	$(3,2,1)$
ℓ	0	1	1	2	2	3
sgn	1	-1	-1	1	1	-1

さて、これらの言葉を使って、n 次正方行列の行列式を定義する。

定義 6.2 $A = [a_{ij}]$ を n 次正方行列とする。このとき、

$$\det A = \sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n} \mathrm{sgn}(\rho) a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n} \tag{3}$$

を A の**行列式**と言う。これを、$|A|$ と書くこともある。(Let $A = [a_{ij}]$ be a square matrix of size n. Then $\det A$ defined by (3) is called the *determinant* of A and is often denoted by $|A|$.)

行列式の定義は、わかりにくいが、まず、いくつかのことを見ていこう。

1. $\rho \in P_n$ がすべて動きそれについての和を取ったものである。すなわち、$n!$ 個の和である。$n = 1,2,3,4$ の時は、それぞれ、$1,2,6,24$ 個の和である。
2. 各項は、$\mathrm{sgn}(\rho) a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n}$ の形をし、その項は、$\mathrm{sgn}(\rho)$ によって決まる ± 1 の部分を別にすると、A の成分の n 個の積であり、その n 個は、各行から 1 つずつ、各列から、1 つずつとった積である。

以下に、$n = 1$ から順に、$\det A$ の式を決めていく。$A = [a_{ij}]$ とする。

1. $n=1$ のときは、

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

2. $n=2$ の時は、

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= \mathrm{sgn}(1,2)a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}(2,1)a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

3. $n=3$ の時は、

$$\begin{aligned}&\det A \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \mathrm{sgn}(1,2,3)a_{11}a_{22}a_{33} + \mathrm{sgn}(1,3,2)a_{11}a_{23}a_{32} + \mathrm{sgn}(2,1,3)a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + \mathrm{sgn}(2,3,1)a_{12}a_{23}a_{31} + \mathrm{sgn}(3,1,2)a_{13}a_{21}a_{32} + \mathrm{sgn}(3,2,1)a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

4. $n=4$ の時は、24 個の和であることは分かる。具体的に調べてみること。しかし、この方法では、$n=4$ 程度が限界で、定義から直接求めることは、難しい。しかし、この定義を理解することが行列式を理解し、計算する出発点である。

例 6.3 いくつかの行列式を具体的に計算してみよう。

1. $n=2$ の場合。

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - (-2)\cdot 1 = 17$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad.$$

2. $n=3$ の場合。

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\times 1 \times (-1) + 2\times 3\times 1 + 1\times 2\times 0 \\ &\quad - 3\times 2\times(-1) - (-1)\times 0\times 2 \\ &= 12\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

3. $n = 4$ の場合。

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & -9 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

答えは、110 です。最初の定義に戻って計算してみて下さい。4 個の数の積の 24 個の和（差）の計算です。

上にも少し見たように、$n = 2$ の場合をのぞいて、行列式の計算は大変です。$n = 3$ の時は、公式のように覚えれば大したことはありません。でも、$n \geq 4$ となると、単純ではありません。しかし、上でも見たように特別な形の行列式は簡単に求められます。

定義 6.3 n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ において、$i > j$ なる i, j について、いつでも $a_{ij} = 0$ である行列を、**上半三角行列** (*upper triangular matrix*)、$i < j$ なる i, j について、いつでも $a_{ij} = 0$ である行列を、**下半三角行列** (*lower triangular matrix*)、$i \neq j$ なる i, j について、いつでも $a_{ij} = 0$ すなわち対角成分以外は、すべて零の行列を**対角行列** (*diagonal matrix*) と言う。

命題 6.1 $A = [a_{ij}]$ を n 次正方行列とする。A が上半三角行列又は、下半三角行列ならば、*(Let $A = [a_{ij}]$ be a square matrix of size n. If A is either an upper triangular matrix or a lower triangular matrix, then the determinant is the product of all of its diagonal entries.)*

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

すなわち対角成分の積となる。

証明　行列が上半三角の場合だけ示す。下半三角の時も、是非考えてみて下さい。行列式の定義から、

$$\det A = \sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n} \mathrm{sgn}(\rho)a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{n,j_n}$$

$\mathrm{sgn}(\rho)a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{n,j_n} \neq 0$ となるためには、$a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, \ldots, a_{n,j_n}$ がすべて零でない数でなければならない。n 行目で 0 でないのは、$a_{n,n}$ だけだから、$j_n = n$。$n-1$ 行目で 0 でないのは、$a_{n-1,n-1}$ と、$a_{n-1,n}$ だが、$j_n = n$ だから、$j_{n-1} \neq n$ 従って、$j_{n-1} = n-1$。以下同様にして、$(j_1, j_2, \ldots, j_n) = (1, 2, \ldots, n)$ の場合以外は、0 がどこかに現れることが分かる。$\mathrm{sgn}(1, 2, \ldots, n) = 1$ であることに注意すれば、

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

が得られる。 ■

7　行列式の計算

行列式の定義は、次のようなものであった。

$$\det A = \sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n} \mathrm{sgn}(\rho) a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n}$$

行列式は、定義に戻って計算することは非常に大変である。ここでは、行列式を変形させて簡単に計算する方法を考える。最初のものは、前節ですでに示したものである。以下では、$A = [a_{ij}]$ を n 次正方行列とする。(In this section we show that the determinant of a matrix can be evaluated by reducing the matrix to row-echelon form.)

1. A が上半三角行列又は、下半三角行列ならば (If A is an upper or lower triangular matrix)、

   $$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

   すなわち対角成分の積となる。（命題 6.1）

   定理 1.1 によりすべての行列は行の基本変形を何回か施して、既約ガウス行列に変形することができます。今は、正方行列を扱っていますから、正方行列で既約ガウス行列であるものができますが、それは上半三角行列で、かつ、対角線は 1 か 0 になっています（わかりますか）。その行列式は、命題 6.1 より 1 か 0 になります。実際には、既約ガウス行列まで変形しなくても、上半三角行列まで変形したときに、命題 6.1 を利用した方が簡単ですが。結局、行の基本変形で行列式の値がどのような影響をうけるかが分かっていれば、行列式の値が分かることになります。そこで、下に、それぞれの基本変形で行列式の値がどう変化するか見ていきましょう。実際には、行の変形だけで十分ですが、計算に利用するためには、列の変形についても知っておくと便利なので、列の変形に関する性質も列挙しますが、証明は行の変形の方だけ示します。

2. (a) ある行の各項をすべて c 倍した行列の行列式の値は、もとの行列の行列式の c 倍になる。
   (b) ある列の各項をすべて c 倍した行列の行列式の値は、もとの行列の行列式の c 倍になる。すなわち、

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ ca_{k,1} & ca_{k,2} & \cdots & ca_{k,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & c \cdot a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & c \cdot a_{2,k} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & c \cdot a_{n,k} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

証明　行列式は、$\mathrm{sgn}(\rho)a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{n,j_n}$ の形のものの和である。これは、各行から一つずつとったものの積だから、ある行がすべて c 倍ならば、各項の値は常に c 倍である。したがって行列式の値は、もとの行列の行列式の c 倍である。実際、行列 $A=[a_{i,j}]$ の第 k 行を c 倍した行列を $B=[b_{i,j}]$ とすると、$i\neq k$ のとき、$b_{i,j}=a_{i,j}$ で、$b_{k,j}=c\cdot a_{k,j}$ ですから、

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n}\mathrm{sgn}(\rho)b_{1,j_1}b_{2,j_2}\cdots b_{k,j_k}\cdots b_{n,j_n}\\ &= \sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n}\mathrm{sgn}(\rho)a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots(c\cdot a_{k,j_k})\cdots a_{n,j_n}\\ &= c\cdot\sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n}\mathrm{sgn}(\rho)a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{k,j_k}\cdots a_{n,j_n}\\ &= c\cdot\det A.\end{aligned}$$
■

この特殊な場合として次を得る。

(c) ある行がすべて 0 である行列の行列式の値は 0 である。

(d) ある列がすべて 0 である行列の行列式の値は 0 である。

証明　すべてが 0 である行を 0 倍しても変わらないから、行列式の値は 0 である。■

3. 二つの行又は、二つの列を入れ換えると値は、-1 倍になる。即ち、

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{h,1} & a_{h,2} & \cdots & a_{h,n}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{h,1} & a_{h,2} & \cdots & a_{h,n}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}.$$

証明　行列式の各項は、$\mathrm{sgn}(\rho)a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{n,j_n}$ であった。h 行と、k 行を入れ換えると、

$$\begin{aligned}&\mathrm{sgn}(\rho)a_{1,j_1}\cdots a_{h-1,j_{h-1}}a_{k,j_h}a_{h+1,j_{h+1}}\cdots a_{k-1,j_{k-1}}a_{h,j_k}a_{k+1,j_{k+1}}\cdots a_{n,j_n}\\ =\;&\mathrm{sgn}(\rho)a_{1,j_1}\cdots a_{h-1,j_{h-1}}a_{h,j_k}a_{h+1,j_{h+1}}\cdots a_{k-1,j_{k-1}}a_{k,j_h}a_{k+1,j_{k+1}}\cdots a_{n,j_n}\end{aligned}$$

これと、元のものを比べる。$\mathrm{sgn}(\rho)=\mathrm{sgn}(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ と、

$$\mathrm{sgn}(j_1,\cdots j_{i-1},j_k,j_{i+1},\cdots,j_{k-1},j_i,j_{k+1},\cdots,j_n)$$

を比べると、-1 倍であることが分かる。たとえば

$$\mathrm{sgn}(5,2,1,3,4)=-\mathrm{sgn}(2,5,1,3,4)=\cdots=-\mathrm{sgn}(5,3,1,2,4)=\cdots.$$

実際、追い越し数で変化するのは、i 番目から、k 番目の間だけだから、そのあいだだけ考えればよい。

$$\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_{h-1},j_h,j_{h+1},\ldots,j_{k-1},j_k,j_{k+1},\ldots,j_n)$$

の h 番目と、k 番目を変えた置換を

$$\rho' = (j_1, j_2, \ldots, j_{h-1}, j_k, j_{h+1}, \ldots, j_{k-1}, j_h, j_{k+1}, \ldots, j_n),$$

$S = \{h+1, \ldots, k-1\}$、$j_h > j_k$ のときは $\epsilon = 1$、$j_h < j_k$ のときは $\epsilon = -1$ とすると

$$\begin{aligned}\ell(\rho) - \ell(\rho') &= |\{i \in S \mid j_h > j_i\}| + |\{i \in S \mid j_i > j_k\}| + \epsilon \\ &\quad - |\{i \in S \mid j_k > j_i\}| - |\{i \in S \mid j_i > j_h\}| \\ &= |\{i \in S \mid j_h > j_i\}| + |\{i \in S \mid j_i > j_k\}| + \epsilon \\ &\quad - (|S| - |\{i \in S \mid j_k < j_i\}|) - (|S| - |\{i \in S \mid j_i < j_h\}|) \\ &= 2(|\{i \in S \mid j_h > j_i\}| + |\{i \in S \mid j_i > j_k\}| - |S|) + \epsilon\end{aligned}$$

最後の数は常に奇数なので、$\mathrm{sgn}(\rho') = -\mathrm{sgn}(\rho)$ となる。これより、結果を得る。（他の方法として $k = h+1$ すなわち隣の行を入れ換える場合に制限すると簡単に次のことがわかります。

$$\begin{aligned}&\ell(j_1, \ldots, j_{h-1}, j_{h+1}, j_h, j_{h+2}, \ldots, j_n) \\ &= \begin{cases} \ell(j_1, \ldots, j_{h-1}, j_h, j_{h+1}, j_{h+2}, \ldots, j_n) + 1 & \text{if } j_h < j_{h+1} \\ \ell(j_1, \ldots, j_{h-1}, j_h, j_{h+1}, j_{h+2}, \ldots, j_n) - 1 & \text{if } j_h > j_{h+1} \end{cases}.\end{aligned}$$

したがって、この入れ換えによっては符号が -1 だけ変わることが上の議論と同じようにして分かります。そこで、h 行と k 行を入れ換えるためには、何回となり同士の入れかえをすればよいか考えるとその回数は、$2(k-h)-1$ であることがわかりますから、これからも証明できます。すこし難しいところですね。実際にはこの授業では、この性質を使うだけですが、興味のある人は自分でよく理解できるまで証明を考えて下さい。じつは、なかなか深いことがいろいろと隠されています。） ■

さて、この性質を用いると次のことが分かります。

(c) 2 つの行が同じ行列の行列式は等しい。

(d) 2 つの列が同じ行列の行列式は等しい。

証明　2 つの行を入れ換えれば、-1 倍になるはずであるが、入れ換える行が等しければ、変わらないはずである。従って、行列式の値を d とすると、$d = -d$ を得、これより、$d = 0$ を得る。 ■

4. (a) ある行に別の行の何倍かを足しても行列式の値は変わらない。

(b) ある列に別の列の何倍かを足しても行列式の値は変わらない。

即ち、

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{h-1,1} & a_{h-1,2} & \cdots & a_{h-1,n} \\ a_{h,1} + ca_{k,1} & a_{h,2} + ca_{k,2} & \cdots & a_{h,n} + ca_{k,n} \\ a_{h+1,1} & a_{h+1,2} & \cdots & a_{h+1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{h-1,1} & a_{h-1,2} & \cdots & a_{h-1,n} \\ a_{h,1} & a_{h,2} & \cdots & a_{h,n} \\ a_{h+1,1} & a_{h+1,2} & \cdots & a_{h+1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

証明　まず、次のことを示す。

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{h-1,1} & a_{h-1,2} & \cdots & a_{h-1,n} \\ a_{h,1}+b_{k,1} & a_{h,2}+b_{k,2} & \cdots & a_{h,n}+b_{k,n} \\ a_{h+1,1} & a_{h+1,2} & \cdots & a_{h+1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{h-1,1} & a_{h-1,2} & \cdots & a_{h-1,n} \\ a_{h,1} & a_{h,2} & \cdots & a_{h,n} \\ a_{h+1,1} & a_{h+1,2} & \cdots & a_{h+1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{h-1,1} & a_{h-1,2} & \cdots & a_{h-1,n} \\ b_{h,1} & b_{h,2} & \cdots & b_{h,n} \\ a_{h+1,1} & a_{h+1,2} & \cdots & a_{h+1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

これは、定義に戻って、

$$\begin{aligned} &\sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1,j_1}\cdots(a_{h,j_h}+b_{h,j_h})\cdots a_{n,j_n} \\ &= \sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1,j_1}\cdots a_{h,j_h}\cdots a_{n,j_n} + \\ &\quad \sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1,j_1}\cdots b_{h,j_h}\cdots a_{n,j_n} \end{aligned}$$

さて、最初に戻ると、今示したことと、性質 3 (c) を用いることにより、

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{h,1}+ca_{k,1} & a_{h,2}+ca_{k,2} & \cdots & a_{h,n}+ca_{k,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{h,1} & a_{h,2} & \cdots & a_{h,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + c\cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{h,1} & a_{h,2} & \cdots & a_{h,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

上で、色々な性質を見てきたがまとめると次のようになる。行の基本変形を行列に施すと、行列式の値は、次のようになる。

1. ある行に 0 でない定数 c をかけると行列式の値は、c 倍になる。
2. 2 つの行を交換すると、行列式の値は、-1 倍になる。
3. ある行に、別の行を何倍かして加えても行列式の値は、変わらない。

列に関する基本変形に付いても同様の結果が得られる。即ち、

1. ある列に 0 でない定数 c をかけると行列式の値は、c 倍になる。
2. 2 つの列を交換すると、行列式の値は、-1 倍になる。
3. ある列に、別の列を何倍かして加えても行列式の値は、変わらない。

Let A be a square matrix of size n. Then $\det(A)$ can be evaluated using the following properties.

(a) If A' is the matrix that results when a single row of A is multiplied by a constant c, then $\det(A') = c \cdot \det(A)$.

(b) If A' is the matrix that results when two rows of A are interchanged, then $\det(A') = -\det(A)$.

(c) If A' is the matrix that results when a multiple of one row of A is added to another row, then $\det(A') = \det(A)$.

(d) $\det(I) = 1$.

すこし難しい話しになりますが、ここで証明したこと（上の (a)-(d)）から、次のことが分かります。

定理 7.1 K を複素数全体または実数全体とする。$Mat_n(K)$ で n 次の正方行列で各成分が K に属するもの全体をあらわすものとする。Δ を $Mat_n(K)$ 上で定義された関数で K に値をとるものとする。この関数 Δ が次の性質を満たせば $\Delta(A) = \det(A)$ がすべての $A \in Mat_n(K)$ について成り立つ。

(a) $c \in K$ とする。行列 $A \in Mat_n(K)$ のある行を c 倍した行列を B とすると $\Delta(B) = c\Delta(A)$。

(b) 行列 $A \in Mat_n(K)$ の二つの行を入れ換えた行列を B とすると $\Delta(B) = -\Delta(A)$。

(c) 行列 $A \in Mat_n(K)$ のある行の定数倍を他の行にたした行列を B とすると $\Delta(B) = \Delta(A)$。

(d) $I = I_n$ を単位行列とすると、$\Delta(I) = 1$。

例 7.1 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

2. 大きな行列式についても考えてみる。

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
= & -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
= & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
= & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
= & \ 6
\end{aligned}$$

3. 次のような行列式も考えてみよう。

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

8　行列式の性質

この節では、行列式の非常に重要な性質について学ぶ。先ずは、転置行列の行列式についてである。

定理 8.1 A を n 次正方行列とする。このとき、$\det A = \det A^t$ が成り立つ。*(The determinant of a square matrix A is the same as the determinant of its transpose A^t.)*

証明　行列式の定義は、次のようなものであった。

$$\det A = \sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n} \mathrm{sgn}(\rho) a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n}$$

これを用いると、$A^t = [b_{ij}]$、$b_{ij} = a_{ji}$ とおくことにより、

$$\begin{aligned}
\det A^t &= \sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n} \mathrm{sgn}(\rho) b_{1,j_1} b_{2,j_2} \cdots b_{n,j_n} \\
&= \sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n} \mathrm{sgn}(\rho) a_{j_1,1} a_{j_2,2} \cdots a_{j_n,n} \\
&= \sum_{\rho'=(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in P_n} \mathrm{sgn}(\rho') a_{1,k_1} a_{2,k_2} \cdots a_{n,k_n} \\
&= \det A
\end{aligned}$$

２行目から３行目は、$\rho = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ も順列だから、

$$a_{j_1,1} a_{j_2,2} \cdots a_{j_n,n} \text{ を、} a_{1,k_1} a_{2,k_2} \cdots a_{n,k_n}$$

と書き直し、$\rho' = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ としている。一般にこのような変形により、$\ell(\rho) = \ell(\rho')$ であり、従って、$\mathrm{sgn}(\rho) = \mathrm{sgn}(\rho')$ である。

例えば、$\rho = (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5) = (2, 5, 1, 4, 3)$ とすると、

$$a_{j_1,1} a_{j_2,2} \cdots a_{j_5,5} = a_{21} a_{52} a_{13} a_{44} a_{35} = a_{13} a_{21} a_{35} a_{44} a_{52}$$

だから、$\rho' = (k_1, k_2, k_3, k_4.k_5) = (3, 1, 5, 4, 2)$ となり、$\ell(\rho) = \ell(\rho') = 5$、$\mathrm{sgn}(\rho) = \mathrm{sgn}(\rho') = -1$ となる。実は、順列 ρ を、$(1, 2, 3, 4, 5) \to (2, 5, 1, 4, 3)$ なる写像だと考えると、$\rho' = (1, 2, 3, 4, 5) \to (3, 1, 5, 4, 2)$ は、逆写像になっています。

$\rho = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ とし、$\rho' = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ とすると、ρ は第 i 番目が j_i となっている順列ですが、ρ' はその作り方から、j_i 番目が i になっている順列であることがわかります。ですから、

$$\begin{aligned}
\ell(\rho) &= |\{(h,i) \mid h < i, j_h > j_i\}| = |\{((h,j_h),(i,j_i)) \mid h < i, j_h > j_i\}| \\
&= |\{((j_i,i),(j_h,h)) \mid j_i < j_h, i > h\}| = |\{(j_i,j_h) \mid j_i < j_h, i > h\}| = \ell(\rho')
\end{aligned}$$

■

前節では、行に関する性質だけ証明したが、列に関する性質の証明も、上の定理を使うと簡単に分かる。例えば「行列 A のある列に、別の列を何倍かして加えても行列式の値は、変わらない。」事を証明するときは、「行列 $B = A^t$ のある行に、別の行を何倍かして加えても行列式の値は、変わらない。」事を用いると、以下のように示すことが出来る。

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,i}+ca_{1,j} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2,i}+ca_{2,j} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\
 & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & & \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,i}+ca_{n,j} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\
 & \cdots\cdots\cdots & & \\
a_{1i}+ca_{ij} & a_{2i}+ca_{2j} & \cdots & a_{ni}+ca_{nj} \\
 & \cdots\cdots\cdots & & \\
a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{nj} \\
 & \cdots\cdots\cdots & & \\
a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\
 & \cdots\cdots\cdots & & \\
a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ni} \\
 & \cdots\cdots\cdots & & \\
a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{nj} \\
 & \cdots\cdots\cdots & & \\
a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2,i} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\
 & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & & \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

A、B を 2×2 行列とすると、$\det AB = \det A \cdot \det B$ が成り立った（命題 4.1 (2)）。次の定理は、これが、一般の n 次正方行列について成立することを示すものである。

定理 8.2 行列の積の行列式は、それぞれの行列の行列式の積に等しい。すなわち、A、B をともに n 次正方行列とするとき、次式が成り立つ。*(The determinant of the product of two square matrices A and B is the same as the product of the determinants of the matrices.)*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

証明を考える前に、基本変形と、行列式の関係についてもう一度復習する。

1. ある行に 0でない定数 c をかけると行列式の値は、c 倍になる。
   この変形は、行列に左から $P(i;c)$ をかけることによって得られる。
2. 2 つの行を交換すると、行列式の値は、-1 倍になる。
   この変形は、行列に左から $P(i,j)$ をかけることによって得られる。
3. ある行に、別の行を何倍かして加えても行列式の値は、変わらない。
   この変形は、行列に左から $P(i,j;c)$ をかけることによって得られる。

これらの基本変形を引き起こす行列の行列式を考えると、

$$\det P(i;c) = c,\ \det P(i,j) = -1,\ \det P(i,j;c) = 1.$$

これを上の基本変形による行列式の値の変化と比較すると、次の関係があることが分かる。

$$
\begin{aligned}
|P(i;c)A| &= c|A| = |P(i;c)||A| \\
|P(i,j)A| &= -|A| = |P(i,j)||A| \\
|P(i,j;c)A| &= |A| = |P(i,j;c)||A|
\end{aligned}
$$

すなわち基本変形を引き起こす行列を左からかけることに関しては、定理が成り立つことが分かった。$P_1, P_1, \ldots, P_m$ を次々とかけて、すなわち A に対応する基本変形をして、C が得られたとする。$P = P_m \cdots P_2 \cdot P_1$ とすると、

$$|C| = |PA| = |P_m \cdots P_2 \cdot P_1 A| = |P_m| \cdots |P_2||P_1||A| = |P||A|$$

いま考えているのは正方行列ですから既約ガウス行列は I となるか一番下の行がすべて 0 であるかのいずれかであることに注意します。したがって

> $C = PA$、かつ $|C| = |P||A|$、$|P| \neq 0$ かつ P は可逆。$C = I$ または C の一番下の行はすべて 0。

特にこのことから次のことが分かる。

系 8.3 n 次正方行列 A が可逆であることと、$\det A \neq 0$ であることは同値である。

証明 $|A| \neq 0$ とすると 上のことから $|C| \neq 0$。C の一番下の行が 0 とすると $|C| = 0$ だから $C = I$ でなければならない。これは、$PA = I$ すなわち $A = P^{-1}$ となり、A は可逆である。

逆に、$|A| = 0$ とすると $|C| = 0$ すなわち C の一番下の行はすべて 0 である。もし、A が可逆とすると $C(A^{-1}P^{-1}) = I$ となるが、C の一番下の行が 0 であるから右辺の一番下の行もすべて 0 となる。しかしこれは矛盾。したがって、A は可逆ではない。$|A| = 0$ ならば A は可逆ではない。が示されたから、その対偶を考えると、A が可逆なら $|A| \neq 0$。
■

定理 8.2 の証明 A を可逆とする。系 8.3 より $|A| \neq 0$、$|C| = |P||A|$ の式から $|C| \neq 0$ すなわち $C = I$ をえる。$P^{-1} = A$ も基本行列の積だから

$$|AB| = |P^{-1}B| = |P^{-1}||B| = |A||B|.$$

A を可逆ではないとする。系 8.3 より $|A| = 0$。また $|C| = |P||A|$ より $|C| = 0$。C の一番下の行は 0 のみである。よって $|CB| = 0$。これを用いると、

$$|AB| = |P|^{-1}|P||AB| = |P|^{-1}|PAB| = |P|^{-1}|CB| = 0 = |A||B|.$$

この場合も定理は成り立つ。 ■

系 8.4 A を可逆行列とする。このとき、次が成立する。

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

証明 $AA^{-1} = I$ だから、

$$1 = \det I = \det AA^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1}.$$

これより、求める結果を得る。 ■

実は、定理 8.2 を認めると、可逆行列の行列式の値が 0 でないことは明らかである。実際、A が可逆であるとする。即ち、n 次正方行列 B で $AB = BA = I$ を満たすものがあったとする。すると、

$$\det A \cdot \det B = \det AB = \det I = 1$$

だから、$\det A \neq 0$ が得られる。

他にも例えば、系 5.3 の前半部分、

> A, B を n 次正方行列とする。このとき、$AB = I$ ならば、A も B も可逆行列で、$BA = I$ である。

も簡単に証明できる。なぜなら、$AB = I$ ならば、

$$1 = \det I = \det AB = \det A \det B$$

だから、$\det A$ も $\det B$ も 0 ではない。従って、A も B も可逆行列である。従って、

$$BA = BABB^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I.$$

もう一つ応用として、A, B がともに正方行列ならば $|AB| = |A||B| = |B||A| = |B||A|$ が分かりますが次はどうでしょうか。

問題 8.1 A を $m \times n$ 行列、B を $n \times m$ 行列とする。このとき、$\det(AB) = \det(BA)$ か。正しければ証明し、間違っていれば反例（成り立たない例）をあげよ。

例 8.1 次の行列式を Vandermonde の行列式という。

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) = \prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=j+1}^{n}(x_i - x_j).$$

これを n に関する帰納法で証明する。次を仮定する。

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_4 & x_4^2 & \cdots & x_4^{n-2} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) = \prod_{j=2}^{n-1}\prod_{i=j+1}^{n}(x_i - x_j).$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & \cdots & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & \cdots & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \cdots & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \cdots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_4 & x_4^2 & \cdots & x_4^{n-2} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=j+1}^{n}(x_i - x_j)
\end{aligned}$$

2番目の式から3番目の式に関しては、行列式の定義を考えてみて下さい。3番目の式から4番目の式は、この行列式のサイズが $n-1$ であることに注意して、$n-1$ 列目から $n-2$ 列目の x_1 倍をひいています。その次の式では、後ろからはじめて、順々に一つ前の列の x_1 倍をひいていくと得られます。5番目の式から6番目の式では、それぞれの行から同じ項を前に出しているわけです。最後のステップでは、帰納法の仮定を用いています。

9 Cramer の公式

以前に行列式の計算で、

$$|A| = \begin{vmatrix} a & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = a \cdot |B|$$

であった。ここではこの式のの一般化から、行列式を用いた重要な定理をいくつか紹介する。

定義 9.1 n 次正方行列 A の第 i 行と第 j 列を取り除いてできた $n-1$ 次正方行列を $M_{i,j}$ としたとき、$C_{i,j} = (-1)^{i+j}|M_{i,j}|$ を行列 A の (i,j) 余因子と言う。(k,l) 成分が $C_{l,k}$ である行列（C^t）を $\widetilde{A}$ と書き、A の余因子行列という。すなわち、$\widetilde{A} = [\tilde{a}_{i,j}]$ とすると、$\tilde{a}_{i,j} = (-1)^{i+j}|M_{j,i}|$、ここで、$M_{j,i}$ は A の第 j 行と第 i 列を取り除いてできた $n-1$ 次正方行列。

例 9.1 次の 3 次正方行列を考える。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}.$$

すると、A の余因子行列 $\widetilde{A}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}|M_{11}| & (-1)^{1+2}|M_{21}| & (-1)^{1+3}|M_{31}| \\ (-1)^{2+1}|M_{12}| & (-1)^{2+2}|M_{22}| & (-1)^{2+3}|M_{32}| \\ (-1)^{3+1}|M_{13}| & (-1)^{3+2}|M_{23}| & (-1)^{3+3}|M_{33}| \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

注意すべきことは、符号 $(-1)^{i+j}$ は、行も列も $+$、$-$ が互い違いに並んでおり、対角線の部分は、$(-1)^{i+i} = 1$ だからいつでも $+$ であること。転置を取っているところを忘れないようにすることである。4 次の場合は次のようになる。

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} +|M_{11}| & -|M_{21}| & +|M_{31}| & -|M_{4,1}| \\ -|M_{12}| & +|M_{22}| & -|M_{32}| & +|M_{4,2}| \\ +|M_{13}| & -|M_{23}| & +|M_{33}| & -|M_{4,3}| \\ -|M_{14}| & +|M_{24}| & -|M_{34}| & +|M_{4,4}| \end{bmatrix}$$

2 次の場合を考えると、次のようになっている。

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \widetilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$|A| = ad - bc$ が 0 でないときは、$\widetilde{A}$ を $\det A$ で割ったものが、A の逆行列だった。すなわち、次が成り立つ。

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det A \cdot I.$$

実はこの式が一般の n 次正方行列に対しても成り立つ。さらにつけ加えると、上の式は、2次の場合には簡単に確かめられるように、$\det A = 0$ の時も、両辺が 0 となり、成立する。

新しい記号を紹介する。$\delta_{i,j}$ は、クロネッカー (Kronecker) のデルタと言われるもので、$i = j$ の時 1、$i \neq j$ の時 0 を表すもの（正確には i, j を変数とする関数（又は写像））とする。例えば、単位行列のことを $I = [\delta_{i,j}]$、すなわち単位行列は (i, j) 成分が $\delta_{i,j}$ であるような行列と言ったりする。

定理 9.1 $A = [a_{i,j}]$ を n 次正方行列、$\widetilde{A} = [\tilde{a}_{i,j}]$ を A の余因子行列とすると、以下が成り立つ。

(1) 任意の i, k について、$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\tilde{a}_{j,k} = \delta_{i,k} \cdot \det A$

(2) 任意の i, k について、$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{i,j}a_{j,k} = \delta_{i,k} \cdot \det A$

(3) $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det A \cdot I$

(4) $\det A \neq 0$ ならば、$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\widetilde{A}$ である。

証明は後に回して、定理の意味するところを説明する。

まず、(3) から、(4) が得られることは明らかである。

上で用いた行列を用いる。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

の行列式は、Vandermonde の行列式だから、$(4-2)(4-3)(3-2) = 2 \neq 0$。従って、$A$ は可逆で、

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A}\widetilde{A} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} +12 & -16 & +6 \\ -7 & +12 & -5 \\ +1 & -2 & +1 \end{bmatrix}$$

(3) における $A\tilde{A}$ の i,k 成分は、(1) の左辺、$\tilde{A}A$ の i,k 成分は、(2) の左辺だから、(1)、(2) より、(3) が得られる。

(1) において、$i=k$ とおき、

$$\tilde{a}_{j,k} = \tilde{a}_{j,i} = (-1)^{i+j}|M_{i,j}|$$

すなわち (i,j) 余因子であることに注意すると、この式は、

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\tilde{a}_{j,i} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}|M_{i,j}|$$

となる。これは、第 i 行の成分 $a_{i,j}$ を一つずつとり、それに (i,j) 余因子をかけたものの和になっている。これを、行列式の第 i 行に関する展開という。一方、(2) で $i=k$ とおいたものは、

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{i,j}a_{j,i} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{j,i}|M_{j,i}|$$

となるから、第 i 列に関する展開という。

$$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2i} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{ji} & a_{j1} & \cdots & \vdots & \cdots & a_{jn} \\ 0 & a_{11} & \cdots & \vdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \cdots\cdots\cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \vdots & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ & & \text{omit row } i \text{ and column } j & & \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & \vdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{j,i} |M_{j,i}|.$$

他はそのままにして、第 i 列を 第 k 列と同じにしたものを考え、それを 第 i 列について展開したものを考えると、上のことから、この行列式の (i,i) 成分は $a_{j,k} = a_{j,i}$ だから、

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{i,j} a_{j,k}$$

となっているが、第 i 列を 第 k 列と同じだから行列式の値は 0 である。従って、

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{i,j} a_{j,k} = \delta_{i,k} \cdot \det A$$

を得る。

(1) についても同様であるので、ここでは省略する。

例 9.2 次の行列式の値を列の展開などを用いて求めてみよう。

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & -9 & 3 \end{vmatrix} = 110.$$

行や、列に関する展開は、0 が多い行列の行列式の値の計算に有効である。ここでは、定理 9.1 のもう一つの重要な応用として、Cramer の定理と呼ばれるものを紹介する。

定理 9.2 (Cramer の定理) $A = [a_{i,j}]$ を可逆な n 次正方行列、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を行列方程式とする。A の第 i 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列を A_i と書くことにする。すると、次が成り立つ。

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

証明　$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ だから、定理 9.1 を用いると、

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}\boldsymbol{b}.$$

従って、

$$\begin{aligned}
x_i &= \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}b_j \\
&= \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}b_j \\
&= \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & \cdots & b_i & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{i1} & \cdots & b_i & \cdots & a_{in} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \frac{|A_i|}{|A|}.
\end{aligned}$$

■

例 9.3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

の解は、Cramer の公式を用いると、係数行列の行列式が 2 だったから、

$$x = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 8 & 3 & 9 \\ 10 & 4 & 16 \end{vmatrix} = -4,\ y = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 9 \\ 1 & 10 & 16 \end{vmatrix} = \frac{11}{2},\ z = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

10　復習

まず、応用として次の命題をあげる。

命題 10.1 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を相異なる実数、$y_1, y_2, \ldots, y_n$ を n 個の実数とする。このとき、

$$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2,\ \ldots,\ f(x_n) = y_n$$

を満たす多項式で次数が高々 $n-1$ のものがただ一つ存在する。

証明　$n-1$ 次の多項式を $f(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$ とし、この条件を書いてみる。

$$\begin{cases} c_0 & + & c_1 x_1 & + & \cdots & + & c_{n-1} x_1^{n-1} & = & y_1 \\ c_0 & + & c_1 x_2 & + & \cdots & + & c_{n-1} x_2^{n-1} & = & y_2 \\ & & & & \cdots\cdots\cdots & & & & \\ c_0 & + & c_1 x_n & + & \cdots & + & c_{n-1} x_n^{n-1} & = & y_n \end{cases}$$

これは、$c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ を未知数とする連立一次方程式とも考えることが出来る。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる。ここで、$|A|$ は、Vandermonde の行列式だから、
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が相異なることより、

$$|A| = \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=j+1}^{n} (x_i - x_j) \neq 0$$

を得る。従って、A は可逆行列であり、任意の $\boldsymbol{b}$ に対して、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ がただ一つ存在し、それは、次数が $n-1$ 以下の多項式 $f(t)$ をただ一つ決定する。 ■

例 10.1 $f(2) = 5,\ f(3) = 8,\ f(4) = 10$ を満たす、2 次多項式を求めてみよう。

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

とすると、得られる方程式は、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

これは、前節の例で扱った方程式と一緒だから、$c_0 = -4, c_1 = 11/2, c_2 = -1/2$ すなわち、

$$f(t) = -4 + \frac{11}{2} t - \frac{1}{2} t^2$$

を得る。

次は部分的には今までにも登場してきたが応用範囲の広い命題なので、次に命題として証明抜きで書く。

命題 10.2 $A_{i,j}$ を $l_i \times m_j$ 行列、$B_{j,k}$ を $m_j \times n_l$ 行列とし、

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qr} \end{bmatrix}$$

とすると、

$$AB = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pr} \end{bmatrix}$$

と書くことができる。ここで、C_{il} は、$l_i \times n_l$ 行列で、

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{p} A_{ij} B_{jk}$$

によって定まるものである。すなわち行列の積はブロックを成分だと思って計算することができる。

以下に連立一次方程式についてまとめる。

1. 連立一次方程式は行列方程式で表すことができる。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

に対しては、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書ける。

2. $\boldsymbol{x}_0$ は、$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ を満たす n 次列ベクトルとする。$\boldsymbol{x}$ が、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすとすると、

$$A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

だから、$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ とおくと、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ で、$\boldsymbol{y}$ は、$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ を満たす n 次列ベクトル、すなわち、A を係数行列とする連立一次同次方程式の解である。逆に、$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{y}$ を取ると、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす。

$$A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}.$$

この様に、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす解一つと、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす解すべてが分かれば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解はすべて分かる。$\boldsymbol{x}_0$ を**特殊解** と言い、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ の形のすべての解を表すものを**一般解**と言う。

例えば一番最初に考えた連立一次方程式、

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

の場合、一般解は、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

と書くことができるが、特殊解は、いろいろとあり、例えば、$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ である。一方、$t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす解の一般形であった。

3. 一般解を求めたり、解の存在非存在を決定するのには、拡大係数行列を考えて、これに行に関する基本変形を施し、ガウス行列、又は、既約ガウス行列にすることによって求めることができる。
   (a) 行に関する基本変形は 3 種類 $P(i;c)$、$P(i,j)$、$P(i,j;c)$ の基本行列という可逆な行列を左からかけることによって実現した。これより、基本変形によって、解は変わらないことが示せた。すなわち、基本変形前の拡大係数行列に対応する解と、基本変形後の拡大係数行列に対応する解は、同じものである。
   (b) 係数行列の階数と、拡大係数行列の階数が等しいときは、解が存在し、それらが等しくないときは解は存在しない。
   (c) 解が存在する場合は、変数の数と、拡大係数行列の階数の差が、解を表すときの自由変数（パラメター）の数である。
4. A を n 次正方行列とする。
   次は同値である。
   (a) A は、可逆行列。
   (b) A に行の基本変形を施すと、単位行列 I になる。
   (c) A の階数は n である。

(d) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はただ一つの解を持つ。
(e) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は、$\boldsymbol{b}$ を一つ決めるといつもただ一つの解を持つ。
(f) A は、基本行列のいくつかの積で書くことが出来る。
(g) $\det A \neq 0$。

行列式の性質は断片的に出てきたので以下にまとめる。$A = [a_{i,j}]$、$B = [b_{i,j}]$ をともに n 次正方行列とする。

1. 行列式の定義は以下のようである。2 番目の式ははっきりとは示さなかったが、転置行列の行列式のところで用いた。

$$
\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n} \mathrm{sgn}(\rho) a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n} \\
&= \sum_{\rho=(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in P_n} \mathrm{sgn}(\rho) a_{j_1,1} a_{j_2,2} \cdots a_{j_n,n}
\end{aligned}
$$

ここで、P_n は、$\{1, 2, \ldots, n\}$ の順列全体のなす集合。$\mathrm{sgn}(\rho) = (-1)^{\ell(\rho)}$ で、$\ell(\rho)$ は、ρ の追い越し数と言われるものであった。A の行列式は、$|A|$ とも表す。

2. A が上半三角行列又は、下半三角行列ならば、

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

すなわち対角成分の積となる。

3. 行に関する基本変形によって行列式の値は次のように変化する。
(a) ある行に 0 でない定数 c をかけると行列式の値は、c 倍になる。
(b) 2 つの行を交換すると、行列式の値は、-1 倍になる。
(c) ある行に、別の行を何倍かして加えても行列式の値は、変わらない。
列に関する基本変形に付いても同様の結果がある。
(a) ある列に 0 でない定数 c をかけると行列式の値は、c 倍になる。
(b) 2 つの列を交換すると、行列式の値は、-1 倍になる。
(c) ある列に、別の列を何倍かして加えても行列式の値は、変わらない。

4. ある行、又は列がすべて 0 である行列の行列式の値は 0 である。ある 2 行又は、ある 2 列が等しい行列の行列式の値は、0 である。

5. $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ と、列ベクトルで表すとする。$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}'_i + \boldsymbol{a}''_i$ ならば、

$$
\begin{aligned}
|A| &= |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_i + \boldsymbol{a}''_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\
&= |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| + |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}''_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n|.
\end{aligned}
$$

同様のことが行についても成り立つ。即ち、$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ と、行ベクトルで表すとき、

$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}'_i + \boldsymbol{a}''_i$ ならば、

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_i + \boldsymbol{a}''_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}''_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}.$$

6. $\det A^t = \det A$。
7. $\det AB = \det A \det B$。
8. $A = [a_{i,j}]$ を n 次正方行列、$\widetilde{A} = [\tilde{a}_{i,j}]$ を A の余因子行列とすると、以下が成り立つ。
   (a) 任意の i, k について、$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\tilde{a}_{j,k} = \delta_{i,k} \cdot \det A$
   (b) 任意の i, k について、$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{i,j}a_{j,k} = \delta_{i,k} \cdot \det A$
   (c) $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det A \cdot I$
   (d) $\det A \neq 0$ ならば、$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\widetilde{A}$ である。
   ここで、$\tilde{a}_{i,j} = (-1)^{i+j}|M_{j,i}|$ であり、$M_{j,i}$ は A の第 j 行と第 i 列を取り除いてできた $n-1$ 次正方行列である。

例 10.2

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

この行列の成分は、どの列の和も $a+(n-1)b$ になってる。従って、第 2 列、第 3 列・・・第 n 列を第 1 列に足すと、第一列はすべて、$a+(n-1)b$ となる。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\ &= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1} \end{aligned}$$

11　お茶の時間

いま、m 種類の本が k 冊ずつある。n 人の学生がこれらの本を借りだした。すべて借り出されたが一人の人が同じ本を 2 冊借りることはなかったとする。調べてみると、学生のどの二人も共通に選んだ本は丁度 b 冊であったという。このとき次のことが分かる。ただし、$1 < k < n$ であるとする。

1. どの学生もみな、同じ数 a 冊の本を借り出している。
2. $n \leq m$ である。
3. $n = m$ ならば、どの本も同じ数の学生が選んだことになり、また、どの 2 冊を共通に選んだ学生の数も同じである。
4. $n = m = 43$、$k = 7$、$b = 1$ と言うことはない。（超難問）

略解：　1 番目の学生が借りている本を a_1 冊とする。すると、このうちどの本を借りている学生も、この学生以外に $k-1$ 人いる。また、この学生以外のどの人をとってもこの a_1 冊の内 b 冊を借りているわけだから、

$$a_1 \cdot (k-1) = (n-1) \cdot b$$

が成り立つ。a_1 は、k, n, b によって決まってしまうから、1 番目の学生でなくてもこの数は等しい。これを a とする。明らかに、$a \neq b$ である。$H = [h_{ij}]$ を $n \times m$ 行列とし、行は各学生を表し、列は本を表すものとする。h_{ij} を学生 i が本 j を選んだときは 1 そうでないときは 0 と定める。すると、HH^t は n 次正方行列で、対角線が a それ以外が b であるようなものになる。J を成分がすべて 1 であるような n 次正方行列とすると、

$$HH^t = (a-b)I + bJ$$

と表すことができる。この行列の行列式の値は、$(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$ であった。$a \neq b$ だから、HH^t は可逆である。これより、H の階数は、n であることが分かる。これより、$n \leq m$ である。（$n > m$ とすると、H に行の基本変形をすると、PH の一番下の行は 0 だから、PHH^t は、可逆にはなり得ない。）$n = m$ ならば、HH^t が可逆行列であることより、H が可逆行列であることが分かる。$JH = kJ$ だから、$kJ = H^tJ$、また、$HJ = aJ$ より、$aJ = JH^t$ だから、$aJ(H^t)^{-1} = J$ を得る。これより、

$$\begin{aligned} H^tH &= H^tHH^t(H^t)^{-1} = H^t((a-b)I + bJ)(H^t)^{-1} = (a-b)H^t(H^t)^{-1} + bH^tJ \\ &= (a-b)I + bH^tJ(H^t)^{-1} = (a-b)I + bkJ(H^t)^{-1} \\ &= (a-b)I + \frac{bk}{a}J \end{aligned}$$

実は、H の 1 の数を数えると、$nk = na$ だから、$a = k$ も得る。従って、どの 2 冊を選んだ学生も丁度、b 人いる。