KU LEUVEN
Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

Basiskennis Wiskunde

(Versie 2024/10/24HB.16)

Inhoudsopgave

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

Module 1

Inleiding

(Versie 2024/10/24HB.16)

1.1 Intro

Deze cursus behandelt een deel van de leerstof wiskunde waarmee je best vertrouwd bent bij het begin van je studies

- bio-ingenieurswetenschappen
- ingenieurswetenschappen
- ingenieurswetenschappen: architectuur
- fysica
- wiskunde

Het handboek legt de nadruk op het aanbrengen van theoretische begrippen en technieken uit de wiskunde, telkens verduidelijkt met uitgewerkte voorbeelden en figuren. Wie zich via zelfstudie wil verdiepen in dit handboek, kan zeker ook gebaat zijn bij de online versie op https://set.kuleuven.be/voorkennis/zomercursus/handboekB, die een aantal extra functionaliteiten aanbiedt, namelijk:

- een grote collectie extra oefeningen, voorzien van feedback, hints en/of modeloplossingen
- verduidelijkende filmpjes
- directe links naar extra oefeningen in Usolv-it

Dit handboek vormt de theoretische ruggengraat voor het B-programma van de zomercursus wiskunde van de KULeuven. Als deelnemer volg je een aantal lessen en leerpaden die je via een specifieke selectie van extra oefeningen optimaal aan de start van je hogere studies trachten te brengen.

Let wel, tijdens die zomercursus worden twee extra modules behandeld rond vectorrekening en complexe getallen, die je niet terugvindt in dit handboek! Voor deze modules bestaan een afzonderlijke online cursus en een afzonderlijke pdf. Informatie hierover vind je terug op https://set.kuleuven.be/zomercursussen/wiskunde/cursusB.

Voor studenten ingenieurswetenschappen en ingenieurswetenschappen-architectuur maken een aantal onderdelen van dit handboek bovendien deel uit van het cursusmateriaal voor het remediëringsvak "Wiskunde voor Probleemoplossen". Meer informatie hierover kan je raadplegen op https://eng.kuleuven.be/studeren/toekomstige-studenten/ijkingstoets/feedback.

Deze cursustekst is beschikbaar in meerdere vormen:

(a) als afgedrukte PDF, met QR-codes die je telkens bij de online versie brengen. Wie deelneemt aan het B-programma van de zomercursus krijgt een afgedrukte versie bij de start van de lesweek.

(b) als online PDF, op je computer of smartphone, waarbij je in de tekst kan zoeken, allerlei interne hyperlinks werken, en waarbij de QR-codes aanklikbaar zijn.

(c) als enigszins uitgebreidere online applicatie, met wat extra inhoud, extra oefeningen en extra interactieve functionaliteiten. De online versie bevat voor sommige onderdelen een wat meer gedetailleerde uitleg en extra voorbeelden en uitweidingen die niet in de globale PDF zijn opgenomen. Dit materiaal is wel opgenomen in de PDF's die per onderdeel kunnen worden gedownload.

1.2 Notatie

We maken speciaal voor deze cursus volgende afspraken, die *niet algemeen gebruikt* worden in de wiskunde:

Notatie 1.2.1 (*Specifieke* begrippen en notaties voor deze cursus)**.**

(a) Definities, eigenschappen en andere belangrijke zaken staan in een kader (zoals deze Notatie). Er is daarvoor volgende kleurcode: groen voor definities en eigenschappen, blauw voor voorbeelden en oefeningen, en geel-bruin voor opmerkingen en uitweidingen.

Zeer belangrijke formules vallen nog meer op, zoals bijvoorbeeld:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}.$$

We gebruiken meestal *italics* om iets te laten opvallen, en **vet** om een nieuw begrip te definiëren.

(b) Een **pseudo-definitie** is iets dat erg lijkt op een definitie, maar strikt wiskundig geen correcte definitie is. Bijvoorbeeld voor limieten en continuïteit van functies geven we in de hoofdtekst enkel 'pseudo-definities', omdat strikt wiskundige definities ons te ver zouden leiden.

(c) Een **niet-eigenschap** of een **niet-voorbeeld** illustreren (meestal zo typisch mogelijk) iets dat *niet* (algemeen) geldig is. We geven dergelijke niet-eigenschappen meestal doorstreept weer. Bijvoorbeeld $(1+1)^2 \neq 1^2 + 1^2$ (omdat $(1+1)^2 = 4$ en $1^2 + 1^2 = 2$) is een niet-voorbeeld om aan te tonen dat het kwadraat van een som niet gelijk is aan de som van de kwadraten:

$$\xcancel{(a+b)^2 = a^2 + b^2} \text{ want } \underbrace{(1+1)^2}_{=2^2=4} \neq \underbrace{1^2+1^2}_{=1+1=2}$$

Het is in het algemeen belangrijk zowel de eigenschappen te kennen als de niet-eigenschappen.

We gebruiken ook volgende *algemeen geldende afspraken en notaties* in de wiskunde. Deze notaties worden in de betreffende hoofdstukken nog uitgebreider toegelicht.

Notatie 1.2.2 (*Algemeen* geldende wiskundige begrippen en notaties)**.**

(a) We gebruiken de pijl $\mapsto$ in formules van het type $\boxed{x \mapsto f(x)}$ of $f : x \mapsto f(x)$ altijd om een functie aan te duiden die x afbeeldt op $f(x)$. Dus, $x \mapsto x^2$ is de functie 'kwadrateer', en $x \mapsto \sin x$ is de sinusfunctie, en betekent hetzelfde als de voor sommigen meer vertrouwde notatie $y = f(x)$ en $y = \sin(x)$. We gebruiken de pijl $\to$ in formules $x \to c$ altijd om aan te duiden dat x naar c gaat (dus bij limieten), of in formules $f : A \to B$ om aan te duiden dat f een functie is van de verzameling A naar de verzameling B. Als we een volledige definitie van een functie willen geven, schrijven we dus $\boxed{f : A \to B : x \mapsto f(x)}$, en dat lezen we als '$f$ is een *functie* van (de verzameling) A naar (de verzameling) B die x *afbeeldt* op $f(x)$'.

(b) We gebruiken het symbool $\iff$ om aan te geven dat twee uitdrukkingen equivalent zijn: $\boxed{A \iff B}$ betekent dat A waar is *als en slechts als* B waar is.

(c) We gebruiken verzamelingen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (*natuurlijke getallen*), $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (*gehele getallen*), $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ (*rationale getallen*) en $\mathbb{R}$ (*reële getallen*).

(d) We noteren $\boxed{a \in \mathbb{R}}$ voor 'a is een element van $\mathbb{R}$', dus a is een (willekeurig) reëel getal.

(e) We noteren $\boxed{A \subset \mathbb{R}}$ (of soms $A \subseteq \mathbb{R}$) voor 'A is een deelverzameling van $\mathbb{R}$'. Beide notaties betekenen in deze cursus hetzelfde, en $A \subset B$ sluit *niet* uit dan $A = B$.

1.2 Notatie

(f) We noteren $\boxed{[a, b]}$ voor het *interval* tussen a en b met a en b inbegrepen, en $[a, b[$ voor hetzelfde interval, maar zonder de b. Hierbij zijn $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$.

(g) We gebruiken $\boxed{A \stackrel{\text{def}}{=} B}$ om aan te duiden dat uitdrukking A *per definitie* gelijk is aan B. We veronderstellen dus dat uitdrukking A voordien geen betekenis had, uitdrukking B wel, en dat vanaf nu A hetzelfde betekent als B.

Voorbeeld: $\sqrt{a} \stackrel{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{2}}$ definieert het symbool $\sqrt{a}$ als we rationale machten al kennen, maar $a^{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a}$ definieert een rationale macht, als we het symbool $\sqrt{a}$ al zouden kennen.

Soms gebruiken we $\stackrel{\text{notatie}}{=}$ om een nieuwe *notatie* in te voeren.

(h) Als we zeggen dat 'men kan bewijzen dat ...', dan bedoelen we inderdaad dat 'men' dat kan bewijzen, maar dat we niet verwachten dat jij dat ook kan bewijzen. Het bewijs is dus *geen* leerstof, en allicht ook niet volledig triviaal. Het woord *triviaal* betekent vanzelfsprekend. Als het bewijs wel relatief eenvoudig is, zullen we soms zeggen 'je kan als oefening bewijzen dat...'.

(i) Als we zeggen dat iets *natuurlijk* is, of dat iets *onmiddellijk duidelijk of evident* is, dan bedoelen we dat zodra je de leerstof voldoende beheerst die uitspraken inderdaad **makkelijk**, **evident** of **triviaal** zouden moeten zijn. MAAR, als je een dergelijke zin *voor de eerste keer* leest, en als het gaat over voor jou geheel nieuwe begrippen, dan is het evident en vanzelfsprekend dat je over die uitspraken *toch* moet nadenken, en dat het best een tijdje kan duren voor je de 'natuurlijkheid' of 'onmiddellijkheid' ervan inziet. We gebruiken dergelijke woorden dus om aan te geven dat je voldoende vertrouwd raakt met de leerstof van zodra deze uitspraken voor jou inderdaad makkelijk worden. We bedoelen *niet* dat dit al bij de eerste lezing van de tekst zo zal zijn.

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

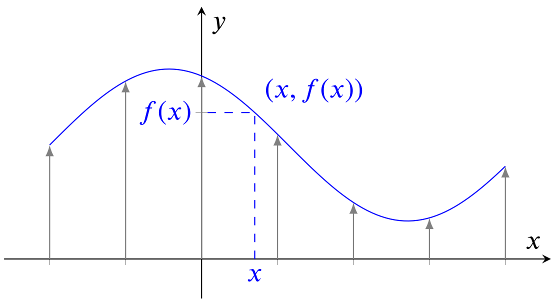
Module 2

Functies en hun grafieken

(Versie 2024/10/24HB.16)

2.1 Intro functies en hun grafieken

Het begrip *functie* is erg belangrijk in de wiskunde. Een functie beschrijft op een wiskundige manier het *verband* tussen verschillende dingen. Bij een vierkant is er een duidelijk verband tussen *de lengte van een zijde* en *de oppervlakte*. Als de zijde lengte ℓ heeft, dan ligt de oppervlakte onherroepelijk vast: die is dan $O(\ell) = \ell^2$. De oppervlakte is dus *een functie van de lengte*. Als één knikker a gram weegt, dan ligt het gewicht van een doos met x knikkers onherroepelijk vast: dat is dan $g(x) = a \cdot x + b$ gram (waarbij b het gewicht is van de doos, en het aantal knikkers x niet groter dan de hoeveelheid knikkers die in de doos past). Het gewicht van de doos is dus *een functie van het aantal knikkers in de doos*.



We bespreken enkele basiseigenschappen van reële functies, leren *rekenen met functies* en tekenen de *grafiek van functies*. We kunnen functies bovendien *samenstellen*. Als er elke minuut een extra knikker in de doos valt, dat is het *aantal knikkers* x dus zelf een functie van de tijd, $x = x(t)$, en bijgevolg is ook het gewicht van de doos een functie van de tijd: $g(t) = ax(t) + b$.

Met functies en hun basiseigenschappen kunnen erg veel wetenschappelijke problemen correct worden geformuleerd, bestudeerd, en in gunstige gevallen ook worden opgelost. De basiseigenschappen worden later uitgebreid met meer geavanceerde technieken zoals afgeleiden en integralen.

In wat volgt hebben we de leerstof over functies als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Een inleiding met een inutïtieve definitie van functies.

(3) Een kort stukje over de begrippen domein en codomein.

(4) Een overzicht van een aantal manieren om functies voor te stellen: tabel, pijlenvoorstelling, grafieken of functievoorschriften (i.e. formules).

(5) Een kort maar belangrijk stukje over grafieken van reële functies.

(6) Twee deeltjes over de som en verschil van functies, en over hun product en quotiënt.

(7) Een belangrijke inleiding tot het samenstellen van functies, en in het bijzonder over het transformeren van functies.

(8) Het effect van sommige functies kan worden 'ongedaan gemaakt' door hun inverse functie.

(9) Tot slot bekijken we enkele special types van functies: even en oneven functies en periodieke functies.

2.2 Intuïtieve definitie van het begrip functie

Functies zijn erg fundamentele objecten in de wiskunde. Ze verschijnen in velerlei contexten, onder verschillende gedaanten, en hebben verschillende definities en voorstellingen:

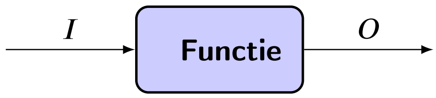
Definitie 2.2.1 (Pseudo-definities van het begrip functie)**.**

Een **functie** is iets dat voldoet aan volgende (allemaal min of meer equivalente) karakteriseringen:

- een *machine* of *black box* die voor een aantal toegelaten *inputs* telkens exact één *output* genereert.
- een bepaald soort *verband* tussen een *onafhankelijke variabele* en een *afhankelijke variabele*.
- een soort *formule*, die *iets* verandert in *iets anders*, of die *iets anders* produceert op basis van *iets*.
- een *wiskundig object* dat een *('functioneel') verband* uitdrukt tussen andere *wiskundige objecten*.

Deze pseudo-definitie is bewust erg vaag, maar met de volgende voorbeelden, definities en eigenschappen zal het concept 'functie' ongetwijfeld een steeds duidelijkere en concretere invulling krijgen. Een typisch eerste voorbeeld om in gedachten te houden is de functie 'kwadrateer', die met elk getal zijn kwadraat associeert.

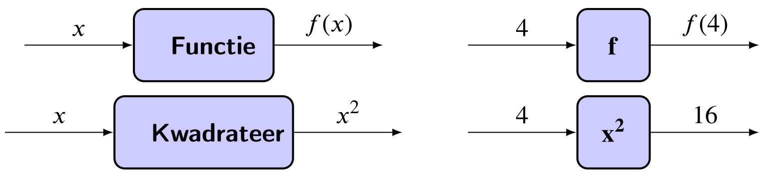
Een nuttige initiële voorstellingswijze van een functie bestaat uit een (in dit geval blauwe!) *black box*, die voor een bepaalde input I een bepaalde output O genereert:



Een **functie** is dus een ding dat een *input* omzet in een *output*. Ongeveer alles kan dienen als input en output van wiskundige functies, maar in wat volgt zullen we ons dikwijls concentreren op zogenaamde *reële functies*: dat zijn die functies waarvan zowel de input als de output reële getallen zijn. Voor dergelijke reële functies zijn er allerlei interessante begrippen en eigenschappen die niet zomaar van toepassing zijn op meer algemene functies, zoals nulpunten, minima en maxima, grafieken, afgeleiden, integralen,. . . .

Een functie heeft meestal een **naam**. Dikwijls gebruiken we gewoon f van $f$unctie, maar ook h, g, f_1, f_2 komen dikwijls voor. Sommige functies hebben vaste standaardnamen of 'eigennamen', zoals de vierkantswortel, sinus, logaritme, ...

De **input**, of de *ietsen* noemen we dikwijls x. Soms gebruiken we ook andere letters zoals t, n, x_1,x_2 of zelfs ook y en y_1 voor de input.



De **output** of het resultaat van de functie noteren we dan naargelang de keuzes voor de input en de functie met $f(x)$ of bijvoorbeeld $h(t)$. Uitzonderlijk laten we de haakjes weg en schrijven ook fx. Bij de sinusfunctie $\sin x$ is dat bijvoorbeeld de gewoonte. Soms geven we ook een generieke naam aan de output. De letter y is daarvoor een erg populaire keuze. We schrijven dan typisch $y = f(x)$. We bedoelen daarmee dat f een functie is waar je x kan instoppen en wat er dan uitkomt noemen we y, of $f(x)$.

In de formule $y = f(x)$ staat x dus voor de input, f voor de functie (de *black-box*) en y de output. Pas op: die generieke naam y voor de output veroorzaakt dikwijls verwarring, want de letter y wordt bijvoorbeeld ook gebruikt voor de tweede coördinaat van een punt in het vlak en dat heeft weinig te maken met functiewaarden. Daarom vermijden we in deze cursus waar mogelijk om de output een naam te geven, en we noteren de functie die x afbeeldt op $f(x)$ liefst als

$$f : x \mapsto f(x) \quad \text{of} \quad x \mapsto f(x),$$

maar niet als $x \to f(x)$: let op het verschillende pijltje '$\mapsto$' versus '$\to$'.

We *lezen* de uitdrukking $f(x)$ als
$$\begin{cases} f \text{ van } x \\ \text{de functiewaarde van } f \text{ in } x \\ \text{het beeld van } f \text{ in } x \\ \text{het beeld van } x \text{ onder } f \text{ (of door } f\text{)} \end{cases}$$

We zeggen ook dat f het element x '*afbeeldt*' op $f(x)$, of dat 'f *toepassen* op x' het element $f(x)$ oplevert.

Voorbeeld 2.2.1. Als we de 'kwadrateer'-functie k noemen schrijven we dus:

$$k : x \mapsto x^2 \quad \text{of} \quad k : x \mapsto k(x) = x^2$$

en dus geldt voor deze functie k dat $k(2) = 2^2 = 4$ en $k(4) = 4^2 = 16$.
We *moeten* de functie geen naam geven, en kunnen ook gewoon schrijven $x \mapsto x^2$.

Opmerking 2.2.1.
Het is belangrijk dat bij elke inputwaarde precies één vaste outputwaarde hoort. Volgende constructies zijn dus *geen* functies:

- $f : x \mapsto$(de som van het aantal ogen van x worpen met een dobbelsteen): de outputwaarden liggen niet vast.
- $f : x \mapsto$(een getal a zodat $a^2 = x$): de outputwaarde ligt niet vast, want 4 heeft zowel 2 als -2 als mogelijke outputwaarde.

Merk op dat een functie dus *niet* zomaar hetzelfde is als 'een formule' of 'een grafiek'. We komen daar verder op terug.

Voorbeeld 2.2.2 (*Reëlle* functies).

De functie 'plus 5':	$f(x) = x + 5$	
De functie 'maal 6':	$f(x) = 6x$	
De functie '7':	$f(x) = 7$	(een *constante* functie)
De functie '0', of de *nulfunctie*:	$f(x) = 0$	(ook een *constante* functie)
De functie 'doe niets':	$f(x) = x$	(de *identieke* functie, is ook 'maal 1' en 'plus 0')
De functie 'kwadrateer':	$f(x) = x^2$	
De functie 'tegengestelde':	$f(x) = -x$	
De functie 'n-de macht':	$f(x) = x^n$	met $n \geq 1$ een bepaald natuurlijk getal
Eerstegraadsfuncties:	$f(x) = ax + b$	met zekere $a, b \in \mathbb{R}$
Goniometrische functies:	$f(x) = \sin(x)$	
	$f(x) = \cos(ax + b)$	met $a, b \in \mathbb{R}$

2.3 Domein, codomein en beeld van een functie

Functies veranderen *inputs* in *outputs*, en om te bepalen welk type inputs en outputs kunnen of mogen voorkomen gebruiken we drie begrippen: het *domein* van een functie is de verzameling van alle toegelaten inputs, en haar *codomein* is de verzameling waartoe alle outputs moeten behoren, en haar *beeld* is de verzameling van de effectief voorkomende outputs:

Definitie 2.3.1 (Domein, codomein en beeld van een functie)**.**

Het **domein** $\boxed{\operatorname{dom} f}$ van een functie f is de verzameling van alle *toegelaten inputs* van de functie.

Het **codomein** $\boxed{\operatorname{codom} f}$ van een functie f is de verzameling waarin alle *mogelijke outputs* liggen.

Het **beeld** $\boxed{\operatorname{bld} f}$ van een functie f is de verzameling van alle *effectieve outputs* van de functie.

Een functie f van een domein A naar een codomein B noteren we als

$$f : A \to B : x \mapsto f(x) \quad \text{of} \quad \begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad \text{of} \quad \begin{aligned} f : \operatorname{dom} f &\to \operatorname{codom} f \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

en we lezen: f is een functie van A naar B die (een willekeurige) x afbeeldt op $f(x)$.

Men gebruikt soms ook **doel** van een functie voor het *codomein* en **bereik** voor het *beeld*.

We gebruiken het woord **beeld** zowel voor het *beeld van een functie*, dus voor de *verzameling* $\operatorname{bld} f$, als voor het *beeld van een getal* x onder de functie f, dus voor het *getal* $f(x)$.

Voorbeeld 2.3.1 (Domein en codomein van functies)**.**

Functie		domein	codomein	beeld
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :$	$x \mapsto x+5$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓
$f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} :$	$x \mapsto x+5$	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}$✓	$[5, +\infty[$✓
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :$	$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^+$✓
$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ :$	$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}^+$✓
$f_5 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} :$	$x \mapsto -\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^-$✓

Bij de notatie $f : A \to B$ kan je domein en codomein aflezen, maar het beeld moet je berekenen.

Opmerking 2.3.1.

- Niet elk element van het *codomein* moet ook effectief worden *bereikt* door de functie f. De elementen die effectief worden bereikt, vormen precies het *beeld* of *bereik* van f. Het bereik van f is dus een *deelverzameling* van het codomein van f, en het beeld of bereik kan eventueel *kleiner* zijn dan het codomein maar nooit groter. De functie
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$$
heeft als *codomein* $\mathbb{R}$, maar het *beeld* is $\mathbb{R}^+$ omdat het kwadraat van een reëel getal altijd positief is, en elke positief getal ook een kwadraat is.
- *Elk* element van het *domein* moet een (uniek) beeld hebben. Volgende uitdrukking is dus *fout*:
$$\cancel{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}},$$

2.3 Domein, codomein en beeld van een functie

omdat de vierkanstwortel niet gedefinieerd is voor *negatieve* getallen.

We kunnen de vierkantswortelfunctie wel schrijven als

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}.$$

Let op: het domein *moet niet* de grootst mogelijke verzameling zijn waarop de functie gedefinieerd kan worden. Ook volgende uitdrukking definieert een functie:

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$$

Per afspraak zijn twee functies aan elkaar gelijk als ze hetzelfde domein hebben, hetzelfde codomein, en allebei een element van hun domein afbeelden op dezelfde waarde van het codomein. Bovenstaande functies f en g zijn dus strikt genomen *verschillende functies*, en we zullen verder zien dat dat belangrijk kan zijn bij het bestuderen van grafieken en vooral inverse functies.

- Als voor reële functies geen expliciet domein is opgeven, nemen we per conventie als domein de grootst mogelijke deelverzameling van $\mathbb{R}$ waarop de functie kan gedefinieerd worden. Als codomein nemen we meestal $\mathbb{R}$ als het niet expliciet is opgegeven.
  Dus, met $f : x \mapsto 1/x$ bedoelen we $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$.
- Let op het verschil in het gebruik van de pijlen: we gebruiken $\to$ tussen het domein en het codomein, maar we gebruiken steeds $\mapsto$ om aan te geven waarop een element wordt afgebeeld. De pijl $\to$ duidt dus aan tussen welke verzamelingen de functie gedefinieerd is, en de pijl $\mapsto$ duidt aan waarop een element wordt afgebeeld.

Een functie wordt dus niet alleen bepaald door wat ze doet, maar ook door haar mogelijke (of 'toegelaten') input en output. Zo is de functie 'kwadrateer-natuurlijke-getallen'

$$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$$

strikt gesproken een *andere* functie dan de functie 'kwadrateer-gehele-getallen'

$$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$$

of de functie 'kwadrateer-reële-getallen'

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2.$$

Dus, twee functies zijn gelijk aan elkaar als en slechts als ze dezelfde inputverzameling en outputverzameling hebben en als ze aan elke inputwaarde dezelfde outputwaarde toekennen.

Zelfs als elke functie $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ en $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telkens elke x afbeeldt op x^2, dan zijn het strikt genomen toch nog steeds *verschillende* functies. In vele gevallen zullen we in de praktijk echter toch gewoon spreken over de functie 'kwadrateer' en het onderscheid in domein en codomein negeren. We noteren dan $f : x \mapsto x^2$.

Bij de bespreking van inverse functies zal dit onderscheid belangrijk worden.

Voorbeeld 2.3.2 (Slecht gedefinieerde functies).

- De uitdrukking $\cancel{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x - 5}$ is *ongeldig* omdat voor $x < 5$ geldt dat $f(x) < 0$ en dus niet behoort tot het aangegeven codomein $\mathbb{R}^+$.

  $f : \mathbb{R}^+ \to [-5, \infty[: x \mapsto x - 5$ is wel een correct gedefinieerde functie, net zoals

  $f : [5, \infty[\to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x - 5$.

  (Merk op: $[-5, \infty[$ is het interval van de reële getallen groter dan of gelijk aan -5.)

2.3 Domein, codomein en beeld van een functie

- De uitdrukking $\cancel{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}}$ is *ongeldig* omdat f niet gedefinieerd is voor $x = 0$, en 0 kan dus niet behoren tot het domein.

  $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ is wel een correct gedefinieerde functie, net zoals

  $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

  Merk op: $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ is de verzameling van de reële getallen *zonder* de getallen 0 en 2.
  Het symbool $\mathbb{R}_0$ betekent $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dus de reële getallen zonder nul.

- De uitdrukking $\cancel{f : \mathbb{R} \to [0, 1] : x \mapsto \sin x}$ is *ongeldig* omdat $\sin x$ ook negatief kan zijn.

  $f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin x$ is wel een correct gedefinieerde functie.

2.4 Voorstellingswijzen van functies met een eindig domein

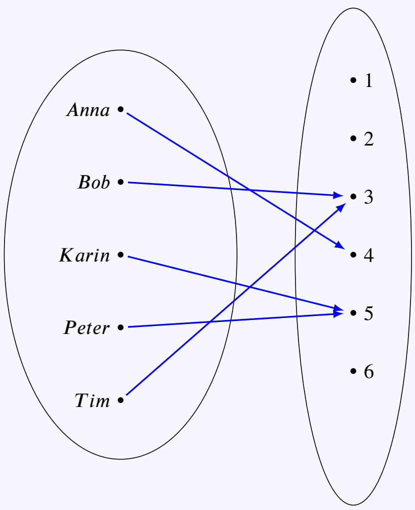
We bespreken enkele manieren om functies te definiëren, voor te stellen of te beschrijven.

Voor (kleine) **eindige** verzamelingen beschikken we over enkele erg concrete manieren om functies te definiëren of voor te stellen. We bespreken ze aan de hand van de functie die aan elke voornaam het aantal letters associeert waaruit die voornaam bestaat. We definiëren de functie op het groepje vrienden $A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\}$. Als codomein nemen we de verzameling $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De functie f beeldt dus elke naam af op het aantal letters van die naam.

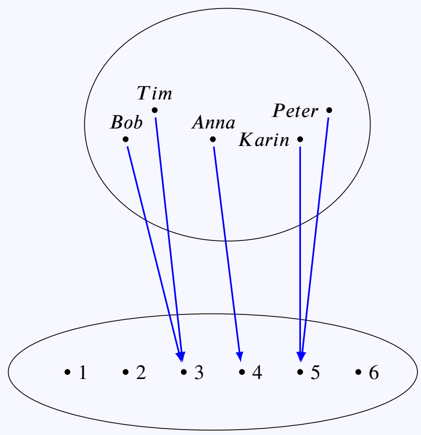
Voorbeeld 2.4.1 (Pijlenvoorstelling of verzamelingvoorstelling)**.** We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \to B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} : x \mapsto \text{het aantal letters in } x$$

voorstellen met volgende zogenaamde **pijlenvoorstelling**:



of



De linkse voorstelling is de meest traditionele 'pijlenvoorstelling'. In de rechtse voorstelling is de functie 'van boven naar beneden' voorgesteld in plaats van 'van links naar rechts'. Een ander verschil is dat in de rechtse voorstelling de functie zelf wordt voorgesteld als een zo eenvoudig mogelijke 'projectie', die de bovenste verzameling 'projecteert' op de onderste. Daarbij komen elementen met dezelfde functiewaarde ongeveer boven elkaar te liggen.

Voorbeeld 2.4.2 (Opsomming)**.** We kunnen de functie

$$f : A = \{Anna, Bob, Karin, Peter, Tim\} \to B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} : x \mapsto \text{het aantal letters in } x$$

ook opschrijven met een **opsomming** van al de functiewaarden:

$$\begin{aligned} f(Anna) &= 4 \\ f(Bob) &= 3 \\ f(Karin) &= 5 \\ f(Peter) &= 5 \\ f(Tim) &= 3 \end{aligned} \quad \text{of} \quad f(x) = \begin{cases} 4 & \text{als } x = Anna \\ 3 & \text{als } x = Bob \\ 5 & \text{als } x = Karin \\ 5 & \text{als } x = Peter \\ 3 & \text{als } x = Tim \end{cases} \quad \text{of} \quad f(x) = \begin{cases} 3 & \text{als } x = Bob \text{ of } x = Tim \\ 4 & \text{als } x = Anna \\ 5 & \text{anders} \end{cases}$$

2.4 Voorstellingswijzen van functies met een eindig domein

Voorbeeld 2.4.3 (Koppels)**.** We kunnen de functie

$$f\,:\,A=\{Anna,Bob,Karin,Peter,Tim\}\;\rightarrow\;B=\{1,2,3,4,5,6\}\,:\,x\mapsto\;\text{het aantal letters in } x$$

ook opschrijven als de verzameling van de **koppels** $(x,f(x))$:

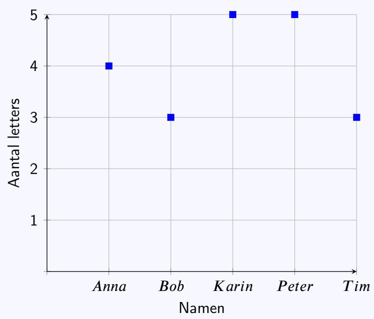
$$\Big\{(Anna,4),(Bob,3),(Karin,5),(Peter,5),(Tim,3)\Big\}$$

Voorbeeld 2.4.4 (Tabel of grafiek)**.** We kunnen de functie

$$f\,:\,A=\{Anna,Bob,Karin,Peter,Tim\}\;\rightarrow\;B=\{1,2,3,4,5,6\}\,:\,x\mapsto\;\text{het aantal letters in } x$$

ook voorstellen met een **tabel** of een **grafiek**:

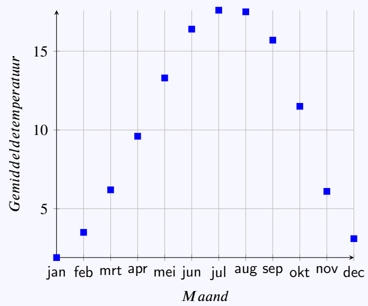
x	$f(x)$
$Anna$	4
Bob	3
$Karin$	5
$Peter$	5
Tim	3



Voorbeeld 2.4.5 (Extra voorbeeld: gemiddelde temperaturen)**.**
De voorstelling als grafiek wordt nuttiger naarmate er meer elementen zijn, met een zekere regelmaat in de functiewaarden.

Beschouw de functie T_{gem} : {jan, feb, mrt, apr, mei, jun, jul, aug,sep, okt, nov, dec} $\rightarrow \mathbb{R}$ die voor elke maand de gemiddelde temperatuur geeft in Ukkel:

x	$T_{gem}(x)$
Jan	1.9
Feb	3.5
Maa	6.2
Apr	9.6
Mei	13.3
Jun	16.4
Jul	17.6
Aug	17.5
Sep	15.7
Okt	11.5
Nov	6.1
Dec	3.1



2.5 Voorstellingswijzen van reële functies

Functies $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvan zowel de input als de output reële getallen zijn, noemen we *reële functies*, en dergelijke functies kunnen bepaald worden met *formules* en/of *grafieken*.

Functies worden dikwijls gedefinieerd met *formules*, en soms wordt zelfs geen onderscheid meer gemaakt tussen 'een formule voor een bepaalde functie' en 'een functie gedefinieerd door een bepaalde formule'.

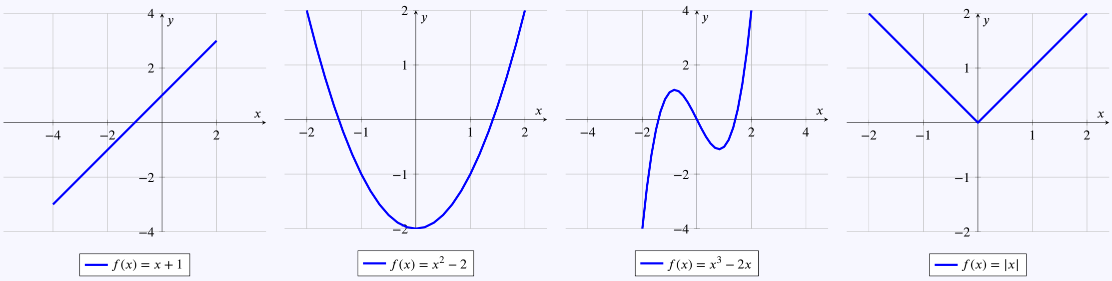
Een *formule* is een reeks symbolen die aan bepaalde regels voldoet: $x^2 + a^2x + 7$ is een goede formule, maar $x - +8(a7)$ is dat niet. Een *functie* is een soort machine die een invoer omzet in een uitvoer. Het is wel zo dat veel formules kunnen worden gebruikt om er een functie mee te maken, en dat nogal wat functies door een formule worden berekend.

Voorbeeld 2.5.1. Veel functies worden voorgesteld door *formules* die de functiewaarde $f(x)$ *berekenen*:

Functie	Formule	Functie	Formule
'plus 5'	$f(x) = x + 5$	'min 5'	$f(x) = x - 5$
'kwadrateer'	$f(x) = x^2$	'sinus van de dubbele hoek'	$f(x) = \sin(2x)$
'vierkantswortel'	$f(x) = \sqrt{x}$	'vierkantswortel plus acht'	$f(x) = \sqrt{x} + 8$

Voorbeeld 2.5.2 (Grafieken)**.**

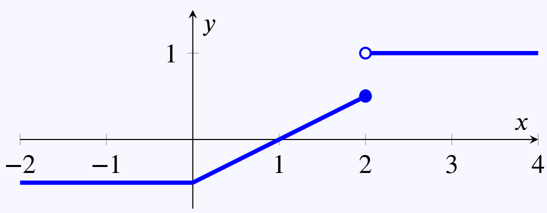
De **grafiek** van een functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bekomen we door in een vlak met x, y-coördinaten alle punten $(x, f(x))$ te tekenen.



Voorbeeld 2.5.3 (Meervoudig functievoorschrift)**.**

Soms bestaat er geen eenvoudige formule die geldt voor alle x, maar kunnen we het domein opsplitsen over deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ waar er wel eenvoudige formules bestaan:

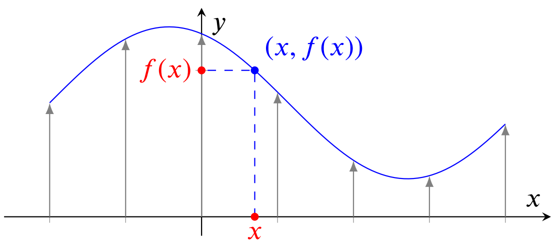
$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & x < 0 \\[2ex] \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} & 0 \le x \le 2 \\[2ex] 1 & 2 < x \end{cases}$$



2.6 Grafieken van functies

Een reële functie kan worden voorgesteld door een *grafiek*, waarop een aantal belangrijke eigenschappen direct kunnen worden afgelezen. In de praktijk worden functies dikwijls geïdentificeerd met hun grafiek.

Definitie 2.6.1. De **grafiek van een reële functie** f is de kromme in het xy-vlak die bestaat uit de punten $(x, f(x))$.

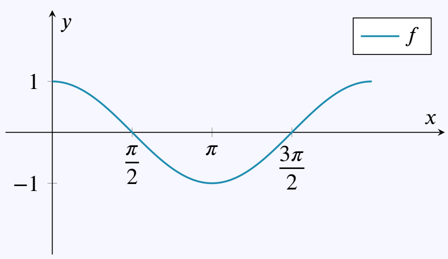


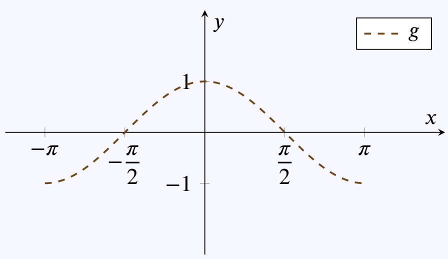
De grafiek van de functie f geeft dus voor elk getal x in het domein op de x-as aan op welk getal $f(x)$ op de y-as het wordt afgebeeld. Als je de grafiek kent, vind je $f(x)$ dus als de *hoogte* van de grafiek in x. Als je de grafiek moet tekenen, wordt de hoogte boven x bepaald door $f(x)$.

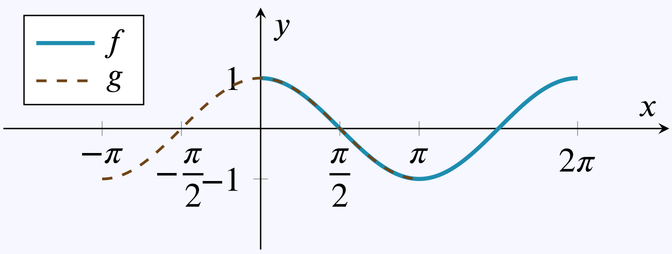
Voorbeeld 2.6.1. De grafiek hangt af van het *domein* van de functie:

- De cosinusfunctie beperkt tot verschillende intervallen heeft verschillende grafieken:

$$\begin{array}{rlcll} f: & [0, 2\pi] & \to & [-1, 1], & x \mapsto \cos(x) \\ g: & [-\pi, \pi] & \to & [-1, 1], & x \mapsto \cos(x) \end{array}$$

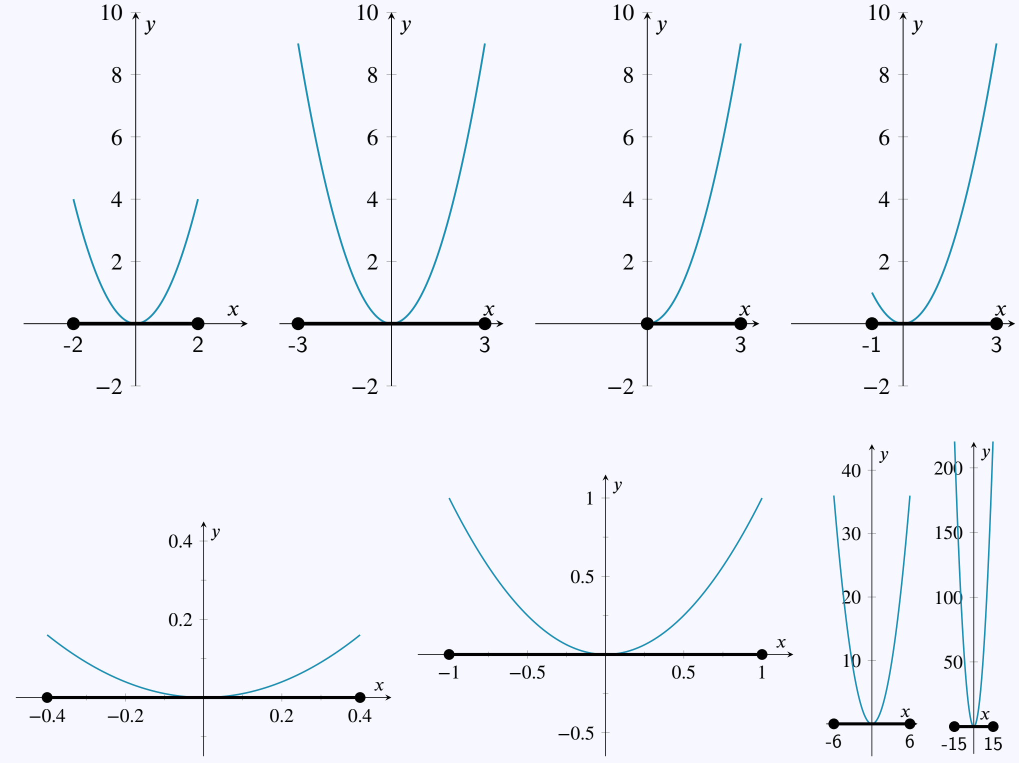






- Soms kiezen we andere schalen op de x-as en de y-as. Samen met verschillende domeinen, leidt dat tot erg uiteenlopende grafieken voor 'dezelfde' functie. Dit zijn allemaal grafieken van functies $x \mapsto x^2$ op verschillende intervallen:

2.6 Grafieken van functies



2.7 Som en verschil van functies

We bestuderen de som en het verschil van *reële* functies $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. We gebruiken meestal de korte schrijfwijze, dus $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ voor de functie met het grootst mogelijke domein $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Definitie 2.7.1 (Som, verschil en tegengestelde van reële functies)**.** Voor reële functies f en g geldt:

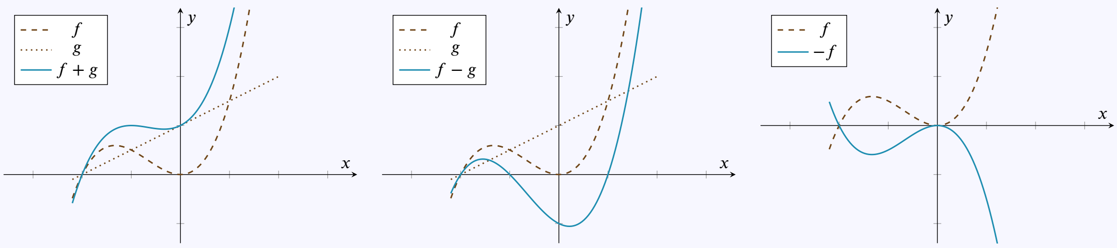
$$\begin{aligned}
\boxed{f+g} &: \quad x \mapsto \quad (f+g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)+g(x)\\
\boxed{f-g} &: \quad x \mapsto \quad (f-g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)-g(x)\\
\boxed{-f} &: \quad x \mapsto \quad (-f)(x) \overset{\text{def}}{=} -f(x)
\end{aligned}$$

Som en verschil van functies zijn gedefinieerd waar *beide functies* gedefinieerd zijn, en er geldt:

De **som** $f+g$ beeldt x af op de som $f(x)+g(x)$.
Het **verschil** $f-g$ beeldt x af op het verschil $f(x)-g(x)$.
De **tegengestelde** $-f$ beeldt x af op het tegengestelde $-f(x)$.

Voorbeeld 2.7.1. Voor de functies $f : x \mapsto x^3+2x^2$ en $g : x \mapsto x+2$ is

$$\begin{aligned}
\text{de som} \quad & f+g: && x \mapsto x^3+2x^2+x+2\\
\text{het verschil} \quad & f-g: && x \mapsto x^3+2x^2-x-2\\
\text{de tegengestelde} \quad & -f: && x \mapsto -x^3-2x^2
\end{aligned}$$



Opmerking 2.7.1. Deze definitie bevat niets spectaculairs: de som van functies is wat iedereen verwacht wat een som van functies moet zijn. Merk wel op:

(a) De functies $f+g$ en $f-g$ zijn enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd is. Je kan dit ook formuleren als: het domein van de som en van het verschil is gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g.

(b) De grafiek van $-f$ is de spiegeling van de grafiek van f over de x-as.

(c) De *nulpunten* van $f-g$ zijn precies de snijpunten van de grafieken van f en g.

2.8 Product en quotiënt van functies

Definitie 2.8.1 (Product, quotiënt en omgekeerde van reële functies)**.**

Voor reële functies f en g geldt:

$$\begin{aligned}
\boxed{f \cdot g} &: x \mapsto (f \cdot g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \cdot g(x) \\
\boxed{\frac{f}{g}} &: x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)} \\
\boxed{\frac{1}{f}} &: x \mapsto \frac{1}{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{f(x)}.
\end{aligned}$$

Merk op dat $\frac{f}{g}$ en $\frac{1}{f}$ niet gedefinieerd zijn in de punten waar de noemer nul wordt, en er geldt:

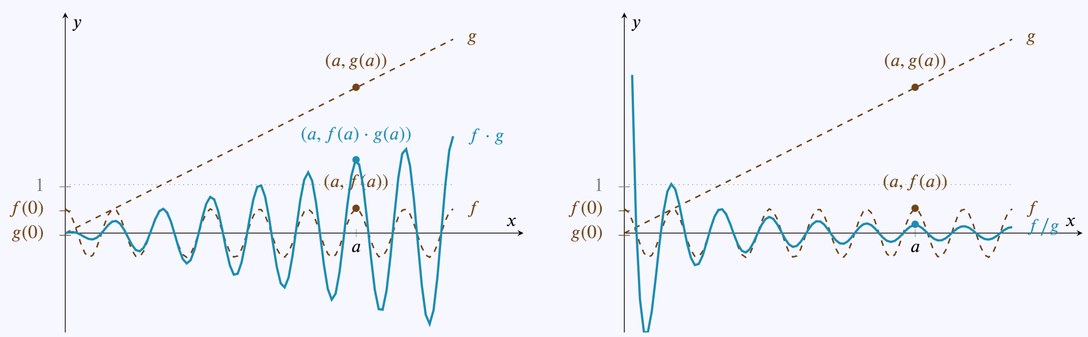
Het **product** $f \cdot g$ beeldt x af op het product $f(x) \cdot g(x)$.

Het **quotiënt** $\frac{f}{g}$ beeldt x af op het quotiënt $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Het **omgekeerde** $\frac{1}{f}$ beeldt x af op het omgekeerde $\frac{1}{f(x)}$.

Voorbeeld 2.8.1.

1. De grafiek van twee functies f en g en hun product $f \cdot g$ en quotiënt $\frac{f}{g}$:



Opmerking 2.8.1.

(a) Net als bij de functies $f+g$ en $f-g$ is de functie $f \cdot g$ enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd is. Het domein is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g.

(b) Het quotiënt $\frac{f}{g}$ is enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd zijn en $g(x) \neq 0$. Het domein van het quotiënt is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g zonder de x-waarden waarbij $g(x) = 0$.

(c) PAS OP: we gebruiken NIET de notatie f^{-1} voor de omgekeerde functie, want die notatie is voorbehouden voor de *inverse* functie die we verder zullen bespreken. De *omgekeerde* functie en de *inverse* functie zijn twee *verschillende* begrippen!

2.9 Samenstellen van functies

Bewerkingen zoals $a + b$, $a - b$ en $a \cdot b$ met twee reële getallen a en b kan je makkelijk uitbreiden tot bewerkingen met reële functies f en g, en dat levert dan de *functies* $f + g$, $f - g$ en $f \cdot g$ op. Je kan deze operaties voor functies dus beschouwen als veralgemeningen van die voor getallen. Er is echter ook een fundamenteel andere manier om een nieuwe functie te maken van twee bestaande functies, die geen analoog heeft voor reële getallen. Je kan sommige functies namelijk eenvoudig *samenstellen*, dat betekent ze *na elkaar* toe te passen: *eerst* neem je $g(x)$, en dan pas je f toe *op het resultaat* $g(x)$ van g. Dat geeft als eindresultaat $f(g(x))$.

Definitie 2.9.1 (Samenstelling van twee functies)**.**

De **samengestelde functie** van twee reële functies f en g, genoteerd met $f \circ g$ en gelezen als 'f *na* g' (of soms ook 'f van g'), is per definitie de functie die *eerst* g toepast, en dan f, dus

$$f \circ g : x \mapsto (f \circ g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(x)).$$

Merk op dat $f \circ g$ enkel gedefinieerd is waar de uitdrukking $f(g(x))$ betekenis heeft. Dat is voor de x waarvoor $g(x)$ bestaat en bovendien ook $f(g(x))$ bestaat.

Voorbeeld 2.9.1.

Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto x + 2$. Dan is

1. $f(g(3)) = 25$
2. $g(f(3)) = 11$
3. $f(f(3)) = 81$
4. $g(g(3)) = 7$
5. $g(g(g(3))) = 9$
6. $f(g(3) - 5) = 0$
7. $f(g(3)) - 5 = 20$
8. $f(g(3) + g(2)) = 81$
9. $f(g(3 + 2)) = 49$

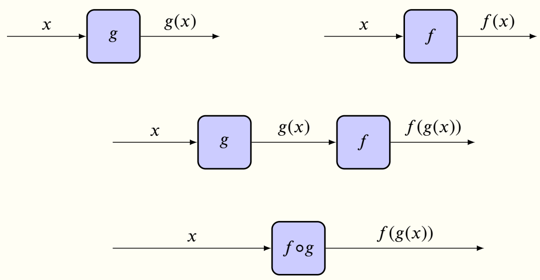
Oefening 2.9.1.

Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto x + 2$. Dan is

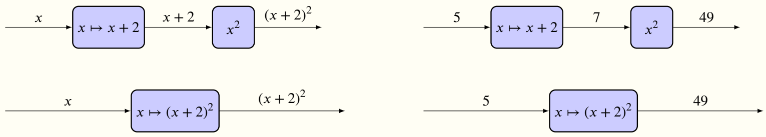
1. $f \circ g : x \mapsto$ $\boxed{x^2+2}\ \boxed{(x+2)^2}\ \boxed{x^2+2^2}\ \boxed{2x^2}$
2. $g \circ f : x \mapsto$ $\boxed{x^2+2}\ \boxed{(x+2)^2}\ \boxed{x^2+2^2}\ \boxed{2x^2}$
3. $g \circ g : x \mapsto$ $\boxed{x^2+2}\ \boxed{2(x+2)}\ \boxed{x+4}\ \boxed{4}$
4. $f \circ f : x \mapsto$ $\boxed{x^2}\ \boxed{x^4}\ \boxed{4x}\ \boxed{2x^2}$

Opmerking 2.9.1.

- In de machine-voorstelling van functies is *samenstellen* de machines *achter elkaar plaatsen*:

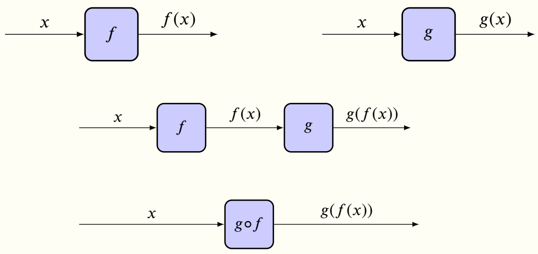


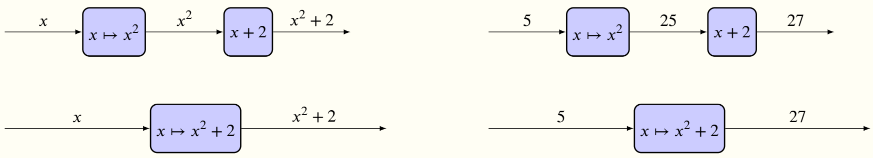
2.9 Samenstellen van functies



Let op de volgorde van de functies in de samenstelling. Om $(f \circ g)(x)$ (f *na* g van x) te vinden, moeten we *eerst* g toepassen op x en *daarna* f toepassen op het resultaat $g(x)$. Maar in de machinevoorstelling betekent dit dat de functie g links staat en f rechts: g is immers de functie die we eerst gebruiken en daarna de functie f.

- We kunnen ook $g \circ f$ bekijken, dus de functie $g \circ f : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

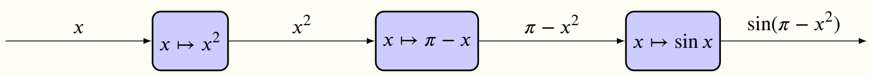




Uit het voorbeeld blijkt al dat $f \circ g$ en $g \circ f$ verschillende functies zijn. De uitdrukking 'de samenstelling van f en g' kan dus dubbelzinnig zijn: wordt $f \circ g$ bedoeld, of $g \circ f$?

- De samengestelde functie $f \circ g$ is enkel gedefinieerd in x als x tot het domein van g behoort en $g(x)$ tot het domein van f. In de andere volgorde is de samengestelde functie $g \circ f$ enkel gedefinieerd in x als x tot het domein van f behoort en $f(x)$ tot het domein van g.

- Samengestelde functies komen erg veel voor, want heel veel functies kunnen worden gelezen als een samenstelling van eenvoudigere functies. Zo is de functie $x \mapsto \sin(\pi - x^2)$ de samengestelde functie van eerst $x \mapsto x^2$ gevolgd door $x \mapsto \pi - x$ en ten slotte $x \mapsto \sin(x)$.



Voorbeeld 2.9.2. Bepaal de samenstellingen van volgende reële functies

f	g	$f \circ g$	$g \circ f$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x - 3$	$x \mapsto (x-3)^2$	$x \mapsto x^2 - 3$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^4$	$x \mapsto x^4$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2$	$x \mapsto 4$	$x \mapsto 2$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto -x$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto -x^2$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto 2x$	$x \mapsto \sin(2x)$	$x \mapsto 2\sin(x)$

2.9 Samenstellen van functies

2.9.1 Domein van samengestelde functies

In de vorige voorbeelden en oefeningen hadden alle functies $\mathbb{R}$ als domein en als codomein, en was samenstellen nooit een probleem. Als het domein of codomein (of beide) een strikte deelverzameling van de reële getallen is, wordt samenstellen wat subtieler, en in sommige gevallen zelfs onmogelijk .

Stel dat twee functies $g : A \to B$ en $f : C \to D$ gegeven zijn, met A, B, C, D deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Onder welke voorwaarden kunnen we dan f en g samenstellen, en wat is het domein en codomein van $f \circ g$?

Om het beeld $f(g(x))$ van een getal x onder $f \circ g$ te bepalen, moeten we eerst $g(x)$ bepalen, en dus moet zeker $x \in A$. Vervolgens moet f worden toegepast op $g(x)$, en dat kan alleen als $g(x) \in C$. Het domein van $f \circ g$ is dus de deelverzameling van A die wordt afgebeeld in C:

$$f \circ g : \{x \in A \mid g(x) \in C\} \to D : x \mapsto f(g(x))$$

Als $B \subseteq C$ (en dus in het bijzonder als $B = C$) is de voorwaarde $g(x) \in C$ automatisch voldaan, en geldt de eenvoudigere formule

$$f \circ g : A \to D : x \mapsto f(g(x))$$

In het algemeen is het domein van $f \circ g$ (als deze samenstelling bestaat) dus een *deelverzameling* van A, het codomein is *gelijk* aan D en het beeld is een *deelverzameling* van D.

Een voorbeeld van twee functies waarvoor de samenstelling niet bestaat omdat ze nergens gedefinieerd is:

Voorbeeld 2.9.3. Beschouw

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$$

en

$$g : \mathbb{R}^+ \to]-\infty, -1] : x \mapsto -x - 1.$$

Je kan zelf nagaan dat in dit voorbeeld de codomeinen van f en g ook de beelden van f en g zijn. De functie $f \circ g$ is nergens gedefinieerd: voor elke $x \in \mathbb{R}^+$ geldt dat $g(x) \in]-\infty, -1]$, zodat $g(x)$ niet tot het domein van de functie f behoort. Dus kunnen we op geen enkele $g(x)$ uit het beeld van g de functie f toepassen. Inderdaad: voor elke x in het domein van g is $g(x)$ een strikt negatief getal, en hiervan kunnen we onmogelijk de vierkantswortel nemen.

Een voorbeeld van twee functies waarvoor de samenstelling wel bestaat maar niet overal gedefinieerd is:

Voorbeeld 2.9.4. Beschouw

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$$

en

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x.$$

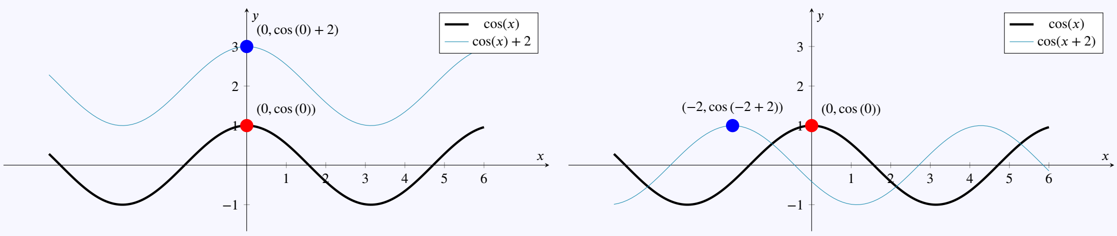
Dan is $f \circ g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{-x}$. De samenstelling is niet voor alle x in het domein van de functie g gedefinieerd: voor strikt positieve x is immers $-x$ strikt kleiner dan nul en van dit getal kunnen we geen vierkantswortel nemen. Voor $x \in \mathbb{R}^-$, een deelverzameling van het domein van g, is de samenstelling wel goed gedefinieerd. Ga zelf na dat de beelden van f en g telkens hun codomein zijn, en dat het beeld van de samenstelling $f \circ g$ hier gelijk is aan het beeld van f, namelijk $\mathbb{R}^+$.

2.10 Transformaties van functies

In het algemeen kan het verband tussen twee functies f en g enerzijds, en de samengestelde functie $f \circ g$ anderzijds erg complex zijn. Maar als één van de functies zelf eenvoudig is, kan het verband wel intuïtief duidelijk zijn, en kunnen we het zelfs aflezen op de grafiek. We spreken in dit speciale geval soms van *transformaties* van functies, of de transformatie van één functie door een andere in plaats van het algemenere *samenstelling* van twee functies. We noteren hier de 'eenvoudige' functie met de letter T (voor Transformatie). Als voorbeelden van zulke 'eenvoudige' functies bekijken we in eerste instantie eerstegraadsfuncties zoals $x \mapsto x+2$, $x \mapsto 2x$, $x \mapsto 2x+2$, ...maar later ook bijvoorbeeld de absolute waarde functie.

Voorbeeld 2.10.1. Verschuivingen: bestudeer voor $f : x \mapsto \cos(x)$ en $T_1 : x \mapsto x+2$ de grafieken van

$$T_1 \circ f : x \mapsto \cos(x)+2 \text{ en } f \circ T_1 : x \mapsto \cos(x+2).$$



- De grafiek van $x \mapsto \cos(x)+2$ is 2 naar *boven* verschoven t.o.v. de grafiek van f.

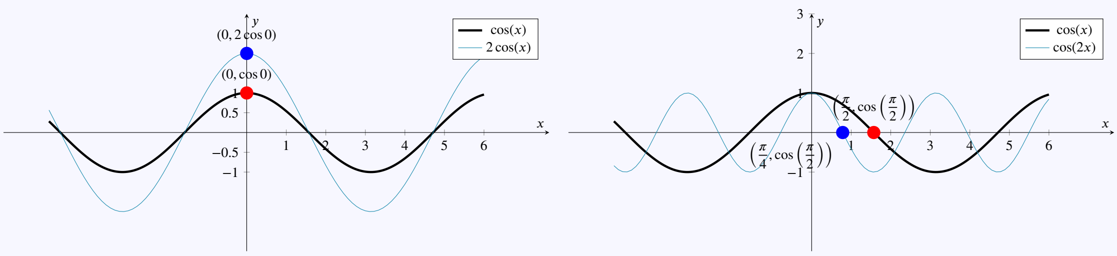
  Dit is eenvoudig te begrijpen want de x die door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, wordt door $T_1 \circ f$ afgebeeld op $\cos(x)+2$, dus 2 eenheden hoger.

- De grafiek van $x \mapsto \cos(x+2)$ is 2 naar *links* verschoven t.o.v. de grafiek van f.

  Dit is wat subtieler: als x door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, dan wordt $x-2$ door $T_1 \circ f$ afgebeeld op dezelfde $\cos((x-2)+2) = \cos(x)$. Dus, je moet 2 eenheden vroeger vertrekken om op dezelfde functiewaarde terecht te komen.

Voorbeeld 2.10.2. Expansies: bestudeer voor $f : x \mapsto \cos(x)$ en $T_2 : x \mapsto 2x$ de grafieken van

$$T_2 \circ f : x \mapsto 2\cos(x) \text{ en } f \circ T_2 : x \mapsto \cos(2x).$$



- De grafiek van $x \mapsto 2\cos(x)$ is een factor 2 'uitgerokken' in de y-richting t.o.v. de grafiek van $\cos x$.

  Dit is eenvoudig te begrijpen want de functiewaarden worden door T_2 met 2 vermenigvuldigd. De x die door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, wordt door $T_2 \circ f$ afgebeeld op $2\cos(x)$, dus 2 keer groter.

2.10 Transformaties van functies

- De grafiek van $x \mapsto \cos(2x)$ is een factor 2 'ingedrukt' in de x-richting t.o.v. de grafiek van $\cos x$.

  Dit is wat subtieler: als x door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, dan wordt $x/2$ door $f \circ T_2$ afgebeeld op dezelfde $\cos(2(x/2)) = \cos(x)$. Dus, je moet met $x/2$ vertrekken om op dezelfde functiewaarde terecht te komen.

Voor sommige eenvoudige functies T is er dus een duidelijk verband tussen de grafieken van f en de samengestelde functies $T \circ f$ en $f \circ T$. We stellen vast dat

Eigenschap 2.10.1 (Transformaties van een functie)**.**
De (transformatie-)functies T hebben volgend effect op (de grafiek van) een willekeurige functie f:

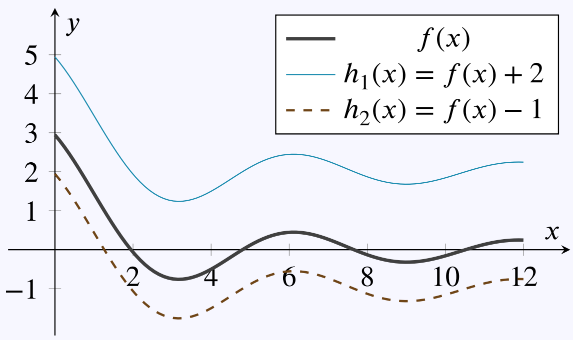
- $f \circ T : x \mapsto f(T(x))$: pas T toe langs de x-as
- $T \circ f : x \mapsto T(f(x))$: pas T toe langs de y-as

In het bijzonder hebben de transformaties $T_+ : x \mapsto x + a$ ('plus a') en $T_\times : x \mapsto ax$ ('maal a') volgende effecten:

$T \circ f : x \mapsto f(x) + a$	grafiek a naar *boven* verschuiven
$f \circ T : x \mapsto f(x + a)$	grafiek a naar *links* verschuiven
$T \circ f : x \mapsto a \cdot f(x)$	grafiek met factor a *uitrekken* in de y-richting
$f \circ T : x \mapsto f(a \cdot x)$	grafiek met factor a *indrukken* in de x-richting

Opmerking 2.10.1. '-2 naar boven schuiven' betekent natuurlijk hetzelfde als '2 naar beneden schuiven' en 'met factor $\frac{1}{2}$ uitrekken' betekent hetzelfde als 'met factor 2 indrukken'.

Voorbeeld 2.10.3 (Verschuiving langs y-as)**.**
Een functie f kan je langs de y-as verschuiven door (langs *links*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto x + 2$ en $T_2 : x \mapsto x - 1$. Dit resulteert in onderstaande functies $h_1 : x \mapsto (T_1 \circ f)(x) = f(x) + 2$ en $h_2 : x \mapsto (T_2 \circ f)(x) = f(x) - 1$:



Oefening 2.10.1. Welke transformatie verschuift de grafiek van f met π eenheden naar beneden ?

$\boxed{f \circ T \text{ met } T : x \mapsto x + \pi, \text{ dus } x \mapsto f(x + \pi)}$

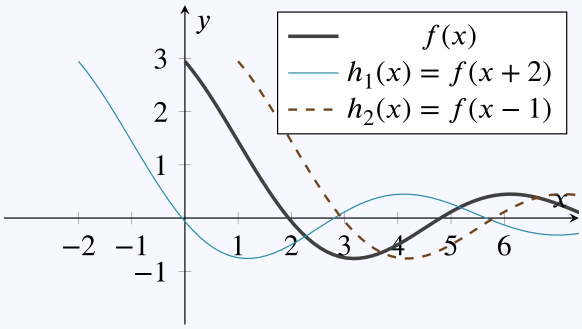
$\boxed{T \circ f \text{ met } T : x \mapsto x + \pi, \text{ dus } x \mapsto f(x) + \pi}$

2.10 Transformaties van functies

$f \circ T$ met $T : x \mapsto x - \pi$, dus $x \mapsto f(x - \pi)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto x - \pi$, dus $x \mapsto f(x) - \pi$

Voorbeeld 2.10.4 (Verschuiving langs x-as).

Een functie f kan je langs de x-as verschuiven door (langs *rechts*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto x + 2$ en $T_2 : x \mapsto x - 1$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (f \circ T_1)(x) = f(x + 2)$ en $h_2 : x \mapsto (f \circ T_2)(x) = f(x - 1)$:



Het domein van $f \circ T_1$ is niet hetzelfde als het domein van f: als $f : [0, 12] \to \mathbb{R}$ dan is $h_1 = f \circ T_1 : [-2, 10] \to \mathbb{R}$, want bijvoorbeeld $h_1(11) = f(13)$ bestaat dan niet.

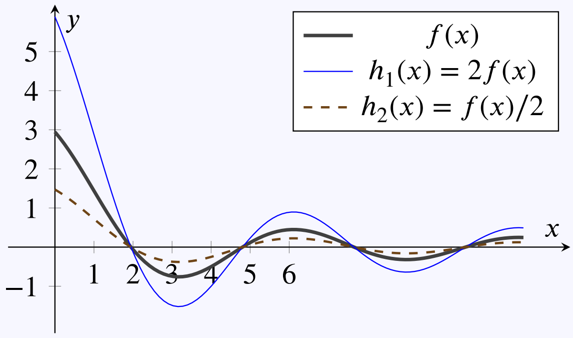
Oefening 2.10.2.

Welke transformatie verschuift de grafiek van een functie f een halve eenheid naar links ?

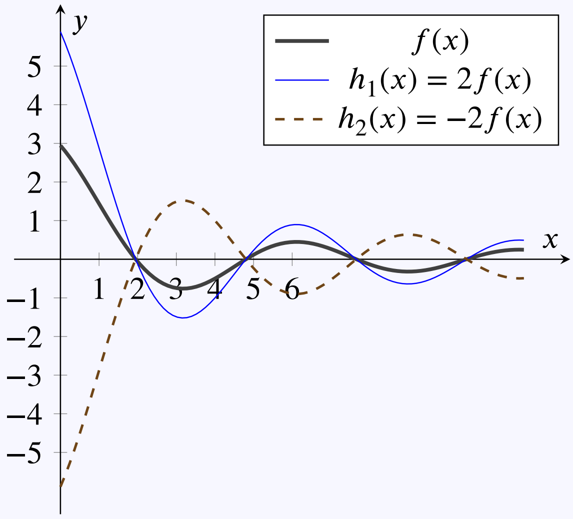
$f \circ T$ met $T : x \mapsto x - \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x - \frac{1}{2})$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto x - \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x) - \frac{1}{2}$
$f \circ T$ met $T : x \mapsto x + \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x + \frac{1}{2})$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto x + \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x) + \frac{1}{2}$

Voorbeeld 2.10.5 (Schalen langs y-as).

Een functie f kan je langs de y-as herschalen door (langs *links*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto 2x$ en $T_2 : x \mapsto x/2$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (T_1 \circ f)(x) = 2f(x)$ en $h_2 : x \mapsto (T_2 \circ f)(x) = f(x)/2$:



Merk op dat schalen met een negatieve factor zorgt voor een spiegeling rond de x-as:



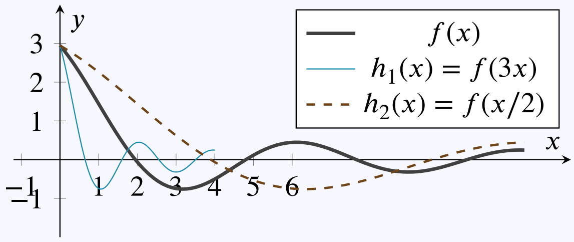
Oefening 2.10.3.

Hoe kan je de grafiek van een functie f met een factor $2/3$ samendrukken langs de y-as?

$f \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{3}{2}x$, dus $x \mapsto f(\frac{3}{2}x)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto \frac{3}{2}x$, dus $x \mapsto \frac{3}{2}f(x)$
$f \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{2}{3}x$, dus $x \mapsto f(\frac{2}{3}x)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto \frac{2}{3}x$, dus $x \mapsto \frac{2}{3}f(x)$

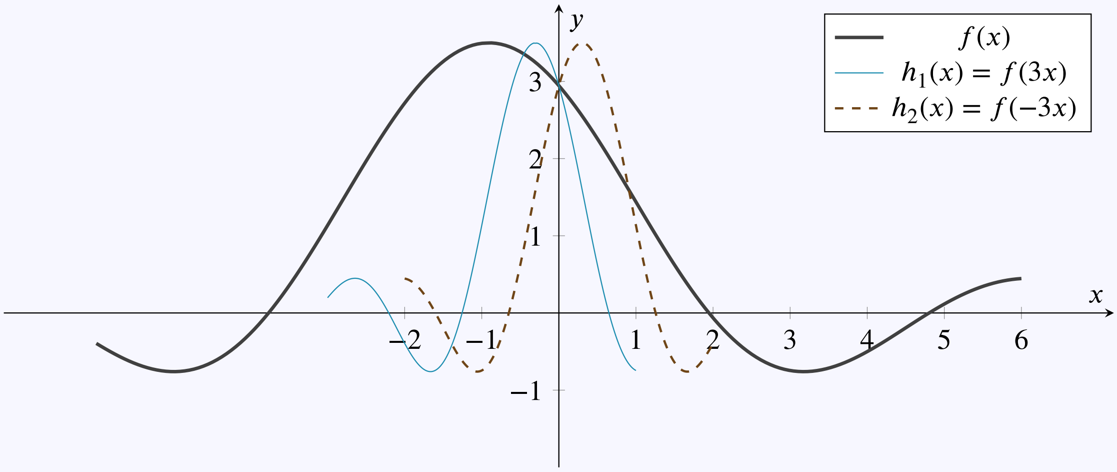
Voorbeeld 2.10.6 (Schalen langs de x-as).

Een functie f kan je langs de x-as herschalen door (langs *rechts*) samen te stellen met de functies zoals $T_1 : x \mapsto 3x$ en $T_2 : x \mapsto x/2$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (f \circ T_1)(x) = f(3x)$ en $h_2 : x \mapsto (f \circ T_2)(x) = f(x/2)$:



Het domein van $f \circ T_1$ is niet hetzelfde als het domein van f: als $f : [0, 12] \to \mathbb{R}$ dan is $h_1 = f \circ T_1 : [0, 4] \to \mathbb{R}$, want bijvoorbeeld $h_1(5) = f(15)$ bestaat dan niet.

Merk op dat schalen met een negatieve factor zorgt voor een spiegeling rond de y-as:



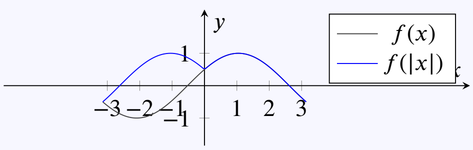
Oefening 2.10.4.

Hoe kan je de grafiek van een functie f uitrekken langs de x-as met een factor 2 ?

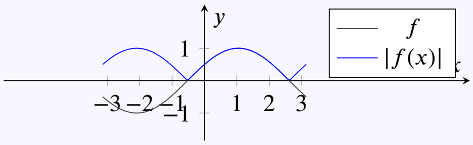
- $f \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$, dus $x \mapsto f(2x)$
- $T \circ f$ met $T : x \mapsto 2x$, dus $x \mapsto 2f(x)$
- $f \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$, dus $x \mapsto f(x/2)$
- $T \circ f$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$, dus $x \mapsto f(x)/2$

Voorbeeld 2.10.7 (Absolute waarde)**.**

Je kan een functie f ook samenstellen met de transformatie $T : x \mapsto |x|$. Dit resulteert in de functies $x \mapsto f(|x|)$ en $|f(x)|$. Onderstaande figuur toont telkens de grafieken:



2.10 Transformaties van functies



- De grafiek van $x \mapsto f(|x|)$ is gelijk aan de grafiek van $f(x)$ voor positieve x, en je spiegelt het deel voor positieve x over de y-as. Het resultaat is dus symmetrisch ten opzichte van de y-as, en dat is eenvoudig te begrijpen omdat negatieve x-waarden worden omgezet naar hun absolute waarde, voordat ze ingevoerd worden in f.

  In symbolen: $f(|-x|) = f(x) = f(|x|)$ voor $x \geq 0$.
  De eventuele waarden van f voor negatieve x spelen dus geen enkele rol meer in de functie $f(|x|)$.

- De grafiek van $x \mapsto |f(x)|$ komt overeen met de grafiek van f waarbij alle negatieve y-waarden, vervangen worden door hun tegengestelde.
  Dus, je spiegelt de negatieve onderste helft naar de positieve bovenste helft .
  De grafiek van $|f|$ heeft hierdoor meestal hoekpunten op de x-as. Dat zal later nog problemen opleveren bij de studie van afgeleiden

2.11 Inverse functies

Een functie f is een machine die een invoer x omzet in een uitvoer $f(x)$. Die uitvoer wordt soms ook met de letter y aangeduid en dan schrijven we $y = f(x)$. De machine berekent dus voor elke x een bijhorende y. Men kan zich afvragen of er ook een 'undo-machine' bestaat die de berekening van f ongedaan maakt, en de uitvoer y terug omzet in de invoer x.

We noemen een functie g **een inverse functie** voor f als g uit elke uitkomst y van f terug de input x kan berekenen: $g(y) = x$. Omdat $y = f(x)$, kunnen we $g(y) = x$ ook schrijven als $g(f(x)) = x$. Als een dergelijke functie g bestaat noemen we f *inverteerbaar* en g *de inverse functie* van f (eigenlijk *links*inverteerbaar en *linker*inverse maar dat is voorlopig niet belangrijk).

We bekijken eerst enkele voorbeelden. De voorbeelden tonen ook aan dat het voorschrift van de inverse van een functie f in een aantal gevallen te bepalen is uit het voorschrift van f. Het vinden van de inverse functie komt eigenlijk neer op het *oplossen van een vergelijking*: vind voor een gegeven functie $y = f(x)$ een nieuwe formule g die voor elk getal y de unieke $x = g(y)$ oplevert waarvoor geldt dat $f(x) = f(g(y)) = y$. Die functie levert dus voor elke y de unieke oplossing van de vergelijking $f(x) = y$.

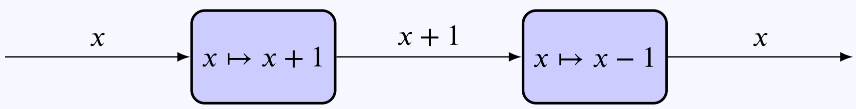
Voorbeeld 2.11.1. Zijn volgende functies inverteerbaar? Welke functie is de inverse?

1. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x + 1$

Uitwerking:

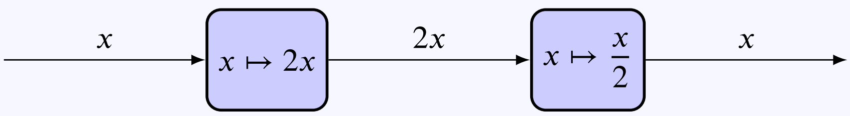
Deze functie f telt bij elk getal één op, dat kan dus ongedaan gemaakt worden door die één er weer af te trekken. De undo-functie van 'plus één' is dan uiteraard 'min één'. In formules: de inverse functie van $x \mapsto x + 1$ is de functie $x \mapsto x - 1$. Of nog, met de notatie $y = f(x)$: voor de functie $f(x) = x + 1$ geldt dan $y = x + 1$. Daaruit kunnen we berekenen dat $x = y - 1$. Als we de inverse functie g noemen, moeten we dus $g(y) = y - 1$ berekenen om de oorspronkelijke x terug te krijgen. Als we die functie g nu toch ook schrijven met als variabele x wordt dat $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = x - 1$. We kunnen dan nagaan dat $g(f(x))$ inderdaad terug x geeft: $g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1) - 1 = x$.

Merk op dat we uit het verband $f(x) = y$ een voorschrift voor g hebben gevonden door 'op te lossen naar x', en dus een formule kregen van de vorm $x = g(y)$. Daarna hebben we, omdat dat gebruikelijk is, in de definitie van g de variabele toch weer terug x genoemd en niet y.



2. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$

Uitwerking: De undo-functie van 'vermenigvuldigen met twee' is 'delen door twee'. Dus $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x/2$ is de inverse functie van f, want $g(f(x)) = g(2x) = (2x)/2 = x$.



3. Fout ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2$

Uitwerking: Alle input wordt naar 2 gestuurd. Dat kan niet ongedaan gemaakt worden, want als je enkel de output 2 kent, kan je natuurlijk niet meer weten wat er precies in de machine werd gestopt: *elke input* geeft output 2.

Iets wiskundiger vinden we dat $f(x) = y = 2$ voor alle x, en dit functievoorschrift kan niet herschreven worden naar een voorschrift van de vorm $x = g(y)$, aangezien deze formule geen x bevat.

4. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$

Uitwerking: De inverse is $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$, en is dus gelijk aan f. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$ is dus haar eigen inverse.

5. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 3$

Uitwerking: De inverse is $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x-3}{2}$.
Deze f stuurt x naar $y = 2x+3$. Uit $y = 2x+3$ kunnen we echter eenvoudig x berekenen door de 3 naar het ander lid te brengen en te delen door twee: $y = 2x+3 \iff y-3 = 2x \iff \dfrac{y-3}{2} = x \iff x = \dfrac{y-3}{2}$.
Dus als we voor g de functie nemen die $y \mapsto g(y) = \dfrac{y-3}{2}$ dan geldt inderdaad dat $g(f(x)) = g(2x+3) = \dfrac{(2x+3)-3}{2} = x$.
De letter die we gebruiken als variabele van de inverse functie is niet belangrijk, we kunnen de inverse functie even goed noteren als $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x-3}{2}$

6. Fout ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

Uitwerking: Er bestaat geen inverse, want de input 2 en de input -2 worden beide afgebeeld op $f(2) = f(-2) = 4$. De output 4 hoort dus zowel bij input 2 als bij -2. Er kan geen inverse functie g bestaan, want die moet dan 4 zowel op 2 afbeelden als op -2, en dat is onmogelijk want een functie kan een getal maar afbeelden op één ander getal.

We noemen twee functies *inversen* van elkaar, als ze elkaars actie ongedaan maken. We eisen dus niet alleen dat g de actie van de functie f ongedaan maakt, maar ook dat f op zijn beurt de actie van g ongedaan maakt. Als f en g inverse functies zijn van elkaar dan noteren we g ook als f^{-1}, *de inverse functie* van f. Omdat het precieze domein en codomein bij inverse functies erg belangrijk kunnen zijn, gebruiken we hier steeds de uitgebreide notatie $f : A \to B$ voor functies.

Definitie 2.11.1 (Inverse functie)**.**
Als $A, B \subset \mathbb{R}$, en $f : A \to B$ en $g : B \to A$ reële functies zijn, dan geldt:

- we noemen f en g **inverse functies van elkaar** (en f de **inverse** van g en g de **inverse** van f) als

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x \quad \text{voor alle } x \in A \text{ en} \\ f(g(x)) &= x \quad \text{voor alle } x \in B \end{aligned}$$

- we noemen f **inverteerbaar** als er een inverse functie bestaat.
- we noteren de (unieke) **inverse functie** van een inverteerbare functie $f : A \to B$ als

$$f^{-1} : B \to A : x \mapsto f^{-1}(x) .$$

Dan geldt voor alle x in A, en alle y in B:

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x}$$
$$\boxed{f\left(f^{-1}(y)\right) = y}$$

2.11 Inverse functies

Merk op dat spreken over *de* inverse functie alleen zinvol is als een inverse functie uniek is. Dat is echter het geval, zoals blijkt uit volgende eigenschap:

Eigenschap 2.11.1.

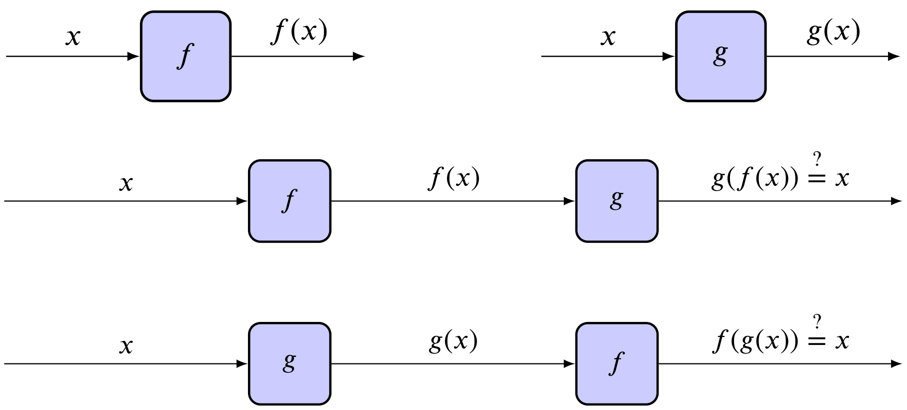
- Als een functie een inverse functie heeft, dan is die inverse uniek.
- Voor een inverteerbare functie $f : A \to B$ geldt voor elke $x \in A$ en $y \in B$ dat

$$\boxed{f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)}$$

Je kan de voorwaarde voor inverse functies ook schrijven als

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= x \quad \text{voor alle } x \in A \text{ en} \\ (f \circ g)(x) &= x \quad \text{voor alle } x \in B \end{aligned}$$

Twee functies zijn dus elkaars inverse als hun samenstelling de identieke functie $x \mapsto x$ is, dus iedere x afbeeldt op zichzelf. De grafiek van de identieke functie is de eerste bissectrice in het vlak met vergelijking $y = x$. Schematisch wordt dat:



Opmerking 2.11.1.

- Niet elke functie is inverteerbaar. Voor een gegeven functie f bestaat f^{-1} dus niet altijd. Bijvoorbeeld de functie $x \mapsto 1$ heeft geen inverse.
- Je mag kiezen welke letter je neemt als variable voor de inverse functie. Neem je bijvoorbeeld de variabele y voor f^{-1} dan noteren we

$$f^{-1} : B \to A : y \mapsto f^{-1}(y)$$

en dat betekent precies hetzelfde als

$$f^{-1} : B \to A : x \mapsto f^{-1}(x)$$

Het gebruik van de letter y is afhankelijk van de context eerder nuttig of eerder verwarrend. Het is daarbij belangrijk op te merken dat $x \mapsto x^2, y \mapsto y^2$ en $z \mapsto z^2$ drie keer *precies* dezelfde functie zijn. De *naam van de variable* veranderen, verandert de *functie* niet.

Voorbeeld 2.11.2. De functies $f : x \mapsto \frac{1}{2}x+1$ en $g : x \mapsto 2x-2$ zijn elkaars inverse. We kunnen dat *algebraïsch* bekijken door $f(g(x))$ en $g(f(x))$ te berekenen en aan te tonen dat beide uitdrukkingen

2.11 Inverse functies

gelijk zijn aan x:

$$f(g(x)) = f(2x-2) = \frac{1}{2}(2x-2)+1 = x \qquad (1)$$

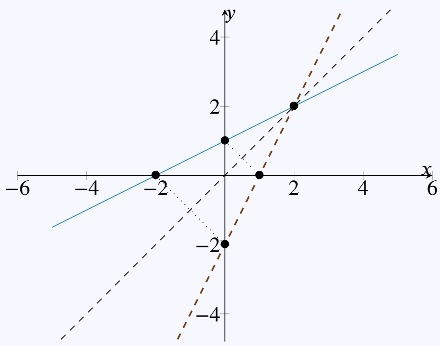
$$g(f(x)) = g(\frac{1}{2}x+1) = 2(\frac{1}{2}x+1)-2 = x \qquad (2)$$

We kunnen dus schrijven dat $g = f^{-1}$ en dat $f = g^{-1}$.

We kunnen ook *meetkundig* onderzoeken wat dat betekent voor de grafiek van f en g.

Onderstaande tabel en grafiek van de functies f en g toont dat voor elk paar (x, y) op de grafiek van f, het punt (y, x) op de grafiek van g ligt, en omgekeerd. De grafiek van g krijgen we dus door in de grafiek van f de x en y van plaats te verwisselen. Grafisch komt dat overeen met spiegelen over de eerste bissectrice. De eerste bissectrice is de grafiek van $x \mapsto x$, dus de rechte met vergelijking $y = x$. Spiegelen ten opzichte van die bissectrice komt overeen met x en y omwisselen: het punt $(2, 3)$ wordt gespiegeld naar het punt $(3, 2)$.

$f : x \mapsto x/2+1$	$f^{-1} : x \mapsto 2x-2$
$(-4,-1)$	$(-1,-4)$
$(-2,0)$	$(0,-2)$
$(0,1)$	$(1,0)$
$(2,2)$	$(2,2)$
$(4,3)$	$(3,4)$



Opmerking 2.11.2. Als f^{-1} bestaat, dan wordt de grafiek van f^{-1} bekomen door de grafiek van f te spiegelen rond de eerste bissectrice.

Om de inverse functie te vinden kunnen we volgend stappenplan volgen:

Algoritme 2.11.1 (Berekenen de inverse functie)**.**

In sommige gevallen kunnen we een inverse functie expliciet berekenen:

(a) Schrijf de functie $f : A \to B : x \mapsto f(x)$ in de vorm $y = f(x)$.

(b) Probeer x op te lossen uit $y = f(x)$.
Dit betekent: probeer x te schrijven als functie van y.
Op die manier vind je een functie g zodat $x = g(y)$.

(c) Deze g is de inverse functie: $f^{-1} : B \to A : y \mapsto g(y)$.

(d) Vervang indien gewenst de variabele van de inverse functie door x.

(e) Die nieuwe formule geeft dan $f^{-1} : B \to A : x \mapsto g(x)$.

Voorbeeld 2.11.3. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x+3$.

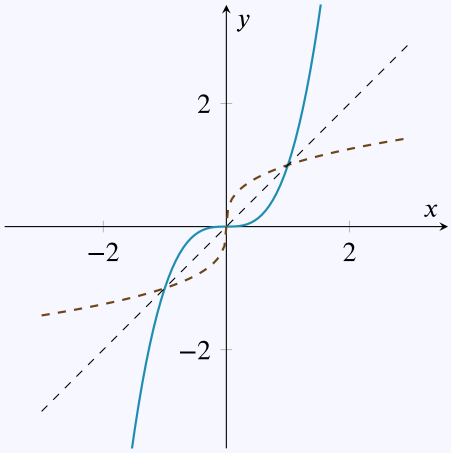
$$y = 5x+3 \iff y-3 = 5x \iff \frac{y-3}{5} = x$$

De inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x + 3$ is dus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \dfrac{y-3}{5}$ of ook $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x-3}{5}$.

Voorbeeld 2.11.4. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.

$$y = x^3 \iff y^{\frac{1}{3}} = x$$

De inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ is dus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{3}}$ of ook $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$.

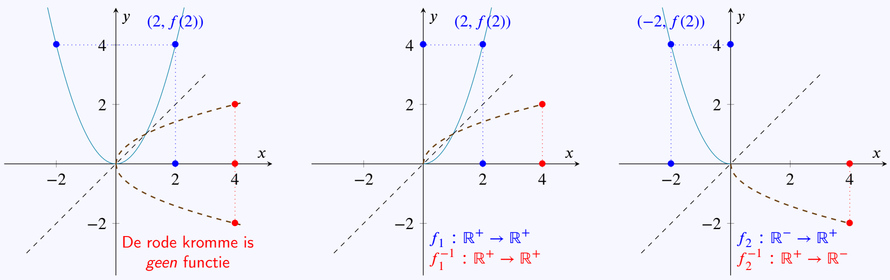


Voorbeeld 2.11.5. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

$$y = x^2 \iff x = \pm\sqrt{y}$$

Deze functie is *niet inverteerbaar*:

- Voor $y < 0$ bestaat de vierkantswortel niet. De oplossing voor dit probleem is het codomein beperken tot het beeld $\mathbb{R}^+$. Wanneer we het codomein wijzigen krijgen we een andere functie, dus geven we die een andere naam: $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$
- Voor $y > 0$ zijn er twee oplossingen, $x = \sqrt{y}$ en $x = -\sqrt{y}$. Er zijn 2 mogelijke manieren om toch een inverse functie te definiëren:
  - Als je het domein van $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^+$, dus $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ dan is $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$.
  - Als je het domein van $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^-$, dus $f_2 : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ dan is $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -\sqrt{x}$.



Het is dus mogelijk dat een functie f geen inverse heeft, maar dat een beperking van die functie tot een kleiner (co)domein – wat een nieuwe functie oplevert – *wel* een inverse heeft. Typische voorbeelden zijn de inversen van de sinus, cosinus en tangens.

Opmerking 2.11.3 (Grafisch criterium voor inverteerbaarheid)**.**

Uit bovenstaande voorbeelden leiden we volgend verband af tussen de inverteerbaarheid van een functie en haar grafiek:

Een functie f is *inverteerbaar*
als en slechts als
elke horizontale rechte $y = c$ met c in het codomein van f snijdt de grafiek van f *in juist één punt*.

Als zo'n horizontale rechte in meer dan één punt snijdt met de grafiek van f dan kan je dikwijls een inverteerbare functie verkrijgen door het *domein* van f te beperken.

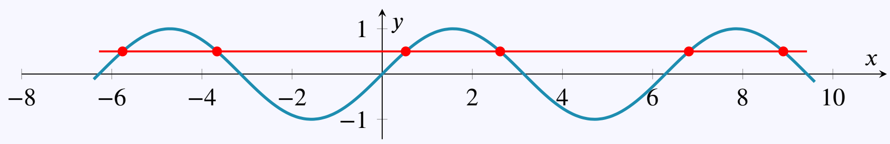
Als zo'n horizontale rechte geen snijpunt heeft met de grafiek van f dan kan je dikwijls een inverteerbare functie verkrijgen door het *codomein* van f te beperken.

Voorbeeld 2.11.6 (Sinusfunctie)**.**

We kunnen ons afvragen of er een inverse functie bestaat voor de sinusfunctie

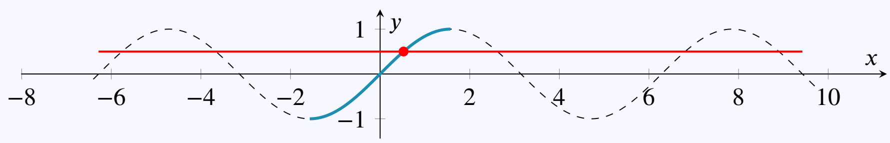
$$\sin : \mathbb{R} \mapsto [-1, 1] : x \mapsto \sin x\,.$$

In tegenstelling tot de meeste voorbeelden die we zijn tegengekomen, is het hier minder makkelijk om uit de formule $y = f(x)$ een verband $x = g(y)$ vinden. We kunnen hier daarentegen aantonen dat er *geen inverse* kan bestaan voor de sinusfunctie. Uit de gekende grafiek van de sinusfunctie



volgt wegens vorige opmerking dat de sinus niet inverteerbaar is: iedere horizontale rechte op een hoogte tussen -1 en 1 snijdt de grafiek van de sinus immers meer dan één keer.

Het probleem kan worden opgelost door het *domein* te beperken tot een goed gekozen interval, bijvoorbeeld $[-\pi/2, \pi/2]$. Op dit interval heeft de sinus wel een inverse.



De verdere studie van dit soort inverse functies leidt tot de zogenaamde cyclometrische functies.

Voorbeeld 2.11.7 (Logaritmische en exponentiële functies zijn elkaars inversen)**.**

Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$.

Deze functie is *niet inverteerbaar* want voor $y \leq 0$ bestaat er geen x zodat $y = 2^x$. We kunnen een inverteerbare functie vinden door het *codomein* te beperken tot het beeld van f, namelijk $\mathbb{R}_0^+$.

Dan bestaat er wel voor elk getal $y \in \mathbb{R}_0^+$ een unieke $x \in \mathbb{R}$ zodat $y = 2^x$. We noemen deze x de

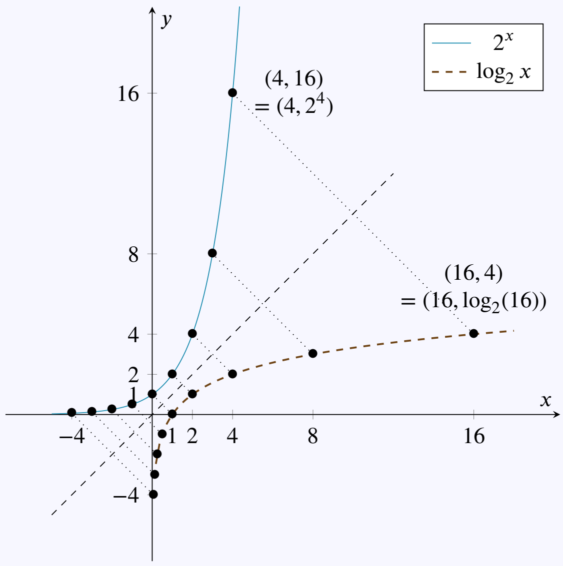
2.11 Inverse functies

2-logaritme van y, en noteren dat als $x = \log_2(y)$. Er geldt dus

$$y = 2^x \iff x = \log_2(y)$$

De functies $\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto 2^x$ en $\log_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_2(x)$ zijn elkaars inverse.

De grafiek van de inverse functie is de spiegeling rond de eerste bissectrice. Inderdaad, spiegelen over de eerste bissectrice komt overeen met (x, y) vervangen door (y, x):

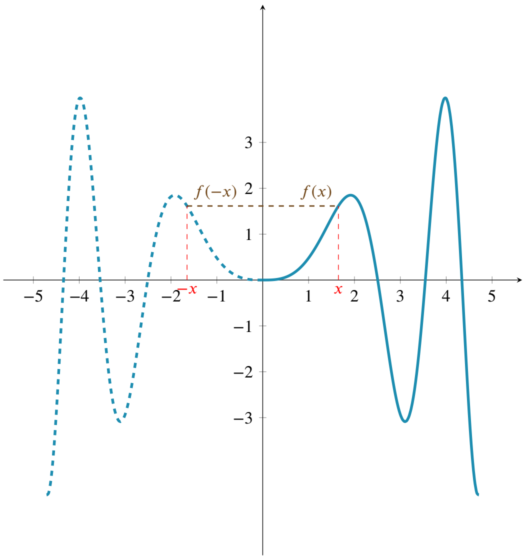


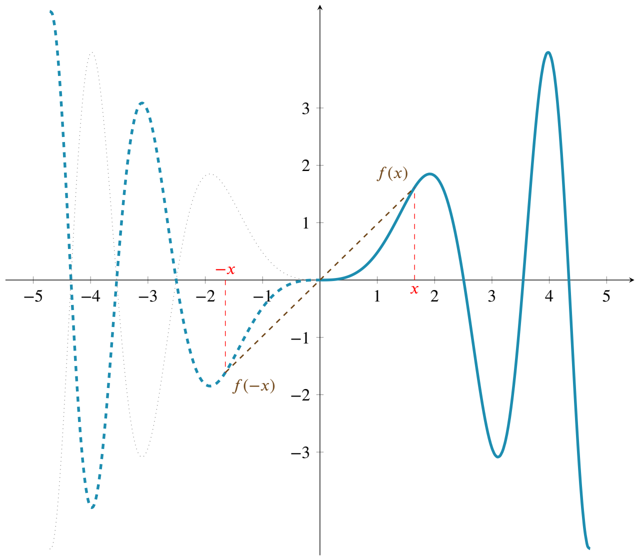
2.12 Even en oneven functies

Definitie 2.12.1 (Even en oneven functies).

Een reële functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is **even** als voor elke getal $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x) = f(-x)$

Een reële functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is **oneven** als voor elke getal $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x) = -f(-x)$

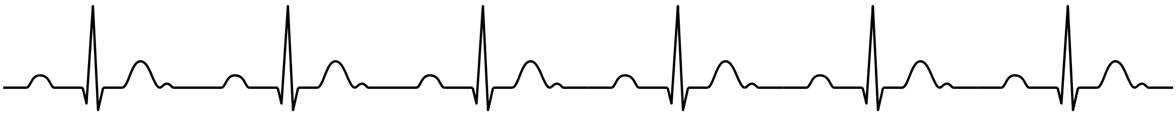




Opmerking 2.12.1.

- De grafiek van een even functie f wordt bij spiegeling over de y-as op zichzelf afgebeeld.
- De grafiek van een oneven functie f wordt bij spiegeling over de y-as en daarna over de x-as op zichzelf afgebeeld. Eerst spiegelen over de y-as en daarna over de x-as komt neer op spiegelen tegenover de oorsprong.
- Een functie hoeft niet even of oneven te zijn.

2.13 Periodieke functies



Definitie 2.13.1 (Periodieke functie).

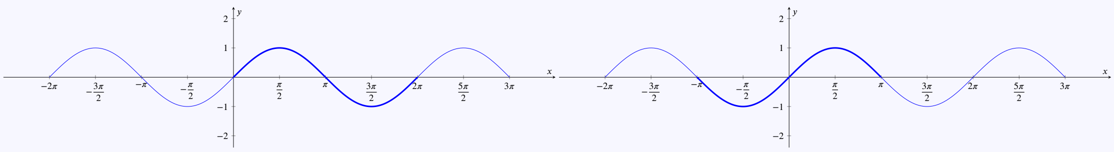
We noemen een reële functie f **periodiek** (soms ook **periodisch**) als er een getal $c > 0$ bestaat zodat

$$\text{voor alle } x \in \mathbb{R} : f(x+c) = f(x)$$

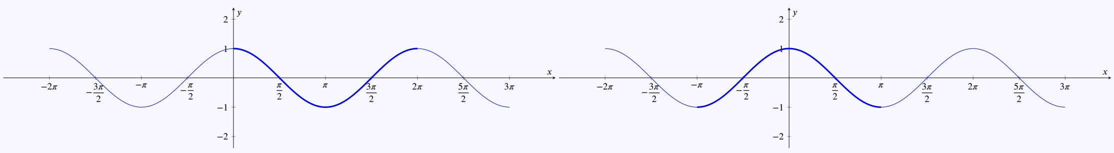
De **periode** p van f is de *kleinste* strikt positieve c waarvoor deze eigenschap geldt.

Voorbeeld 2.13.1. De belangrijkste voorbeelden van periodieke functies zijn de goniometrische functies:

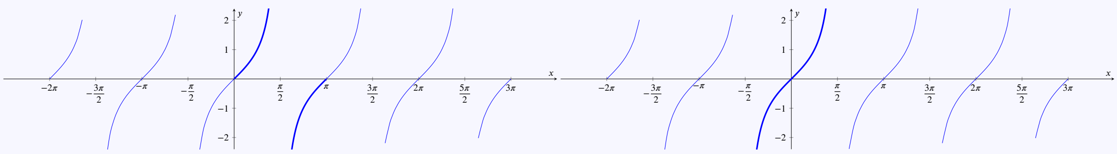
1. De functie $\sin(x)$ met periode 2π



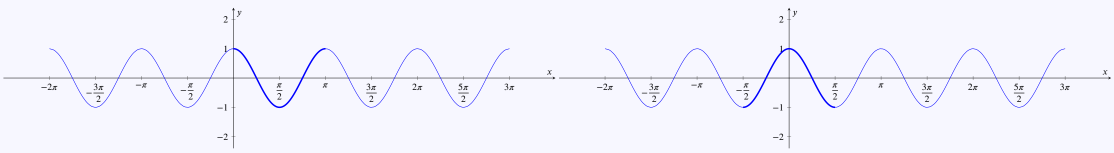
2. De functie $\cos(x)$ met periode 2π



3. De functie $\tan(x)$ met periode π



4. De functie $\cos(2x)$ met periode π



Opmerking 2.13.1.

- De grafiek van een periodieke functie herhaalt zich dus op elk interval van lengte p.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *elke* x, dan is ook $f(x-c) = f(x)$ omdat $f(x-c) = f((x-c)+c) = f(x)$.

2.13 Periodieke functies

- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *elke* x, dan is ook $f(x+2c) = f((x+c)+c) = f(x+c) = f(x)$.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *elke* x, dan is dus ook $f(x+kc) = f(x)$ voor elke geheel getal k.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *sommige* x, dan zegt dat niets over het al dan niet periodiek zijn van f.
- Soms spreekt men ook af om elke c waarvoor altijd geldt dat $f(x+c) = f(x)$ een *periode* te noemen van f. Met die afspraak is *de* periode van een periodieke functie dus niet uniek bepaald.

Omdat voor een periodieke functie f met periode p voor alle x geldt dat $f(x+p) = f(x)$, volstaat het f te kennen op een interval van de vorm $[a, a+p[$, met a eender welk getal. In de praktijk blijkt het handig om te werken met intervallen van de vorm $[0, p[$, of $[-p/2, p/2[$.

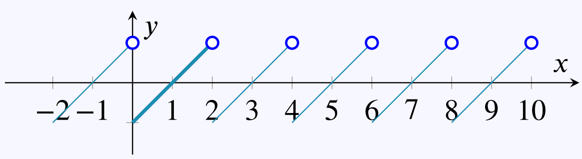
Eigenschap 2.13.1.

- Als je een periodieke functie f met periode p kent op een halfopen interval van lengte p, dan ken je ze overal.
- Elke functie op een halfopen interval van lengte p kan op unieke wijze worden uitgebreid tot een periodieke functie op $\mathbb{R}$.

We kunnen een functie f die enkel gedefinieerd is op een interval $[a, a+p[$ uitbreiden tot $\mathbb{R}$ als volgt. Een willekeurig reëel getal x schrijven we als $x = x_0 + kp$, met $x_0 \in [a, a+p[$ en $k \in \mathbb{Z}$. Dan definiëren we:

$$f(x) = f(x_0 + kp) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0)$$

Voorbeeld 2.13.2 (Basisvoorbeeld uitbreiden van functies)**.** Beschouw de functie $f : [0,2[\to \mathbb{R} : x \mapsto x-1$. We kunnen die functie op unieke wijze uitbreiden tot een periodieke functie op $\mathbb{R}$ door te definiëren dat $f(x+2k) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$ voor alle $x \in [0,2[$ en $k \in \mathbb{Z}_0$.



Merk op dat de periodieke uitbreiding van f sprongen vertoont. De periodieke uitbreiding van f is *niet continu*.

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

Module 3

Goniometrische en cyclometrisch functies

(Versie 2024/10/24HB.16)

3.1 Intro goniometrische en cyclometrische functies

We veronderstellen dat je voldoende vertrouwd bent met de basisbegrippen van de goniometrie, en bestuderen hier de *analytische* eigenschappen van de sinus, cosinus en tangens: we krijgen nieuwe inzichten door deze begrippen ook als *functies* te beschouwen, met grafieken, nulpunten en vergelijkingen. We kunnen die functies bijvoorbeeld (deels) inverteren, en bekomen zo de zogenaamde *cyclometrische* functies boogsinus, boogcosinus en boogtangens.

In wat volgt hebben we de leerstof over goniometrische en cyclometrische functies als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) De sinus, cosinus en tangens als goniometrische functies.

(3) Goniometrische vergelijkingen.

(4) De cyclometrische functies: de inversen van sinus, cosinus en tangens.

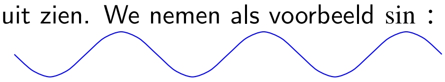
3.2 Goniometrische functies

Met een hoek α hebben we een getal $\sin\alpha$ geassocieerd. Door nu de hoek α te laten *variëren* (dus 'variabel' te maken), bekomen we een *functie* in de 'variabele' α. In de wiskunde gebruiken we dikwijls de letter x voor variabelen. We zullen hier dus ook meestal spreken van $\sin x$ in plaats van $\sin\alpha$. Ook van de cosinus, de tangens en de cotangens kunnen we functies maken.

Definitie 3.2.1 (Goniometrische functies)**.**

De **goniometrische functies** zijn de reële functies sinus, cosinus, tangens en cotangens:

$$\begin{aligned}
\sin: &\quad x \mapsto \sin(x)\\
\cos: &\quad x \mapsto \cos(x)\\
\tan: &\quad x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\\
\cot: &\quad x \mapsto \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

We gaan nu na hoe de grafieken van deze functies er uit zien. We nemen als voorbeeld $\sin : x \mapsto \sin(x)$, waarvan velen de vorm kennen of minstens herkennen: 

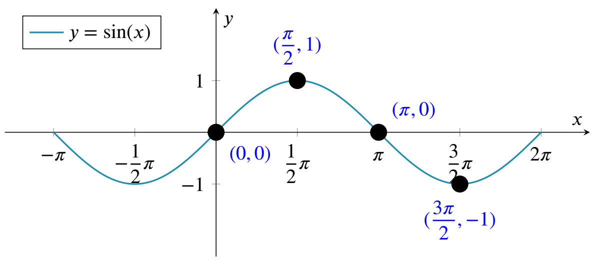
Zonder aanduidingen op de assen ziet de grafiek van $\cos : x \mapsto \cos(x)$ er net hetzelfde uit. Het is dus belangrijk om te weten waar de nulpunten, de maximale en de minimale waarden liggen.

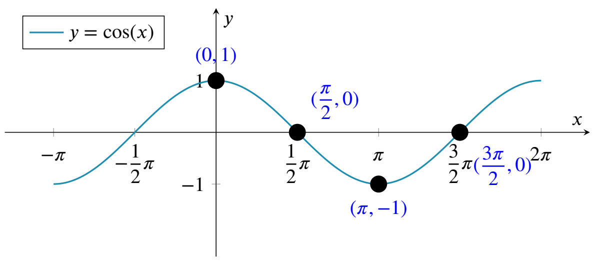
Oefening 3.2.1. Lees volgende functiewaarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 0 = \ldots\ldots$ $\quad \sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\quad \sin\pi = \ldots\ldots$ $\quad \sin\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\quad \sin 2\pi = \ldots\ldots$

2. $\cos 0 = \ldots\ldots$ $\quad \cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\quad \cos\pi = \ldots\ldots$ $\quad \cos\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\quad \cos 2\pi = \ldots\ldots$

Met de waarden uit vorige oefening kunnen we nu enkele waarden op de x-as en y-as noteren:



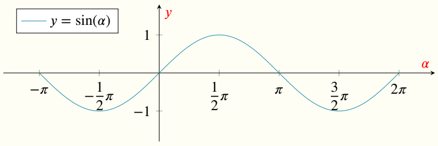


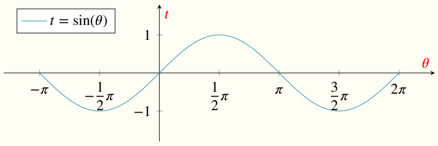
Opmerking 3.2.1.

- Als we sinus, cosinus en tangens als functies beschouwen, geldt dat in principe *altijd* met de variabele uitgedrukt in radialen.

3.2 Goniometrische functies

- Als we de sinus beschouwen als een functie, gebruiken we dikwijls de letter x als variabele eerder dan α. Vooral in toepassingen gebruikt men ook andere letters. Men tekent dan bijvoorbeeld ook grafieken in een αy-vlak of een θt-vlak





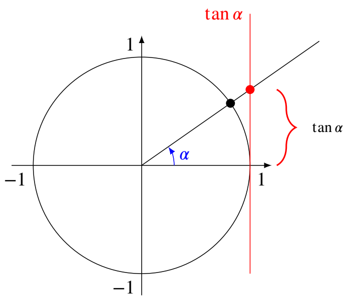
- Het domein van sin en van cos is $\mathbb{R}$ en het beeld is $[-1, 1]$.

  Met de uitgebreidere notatie voor functies kunnen we dus ook schrijven

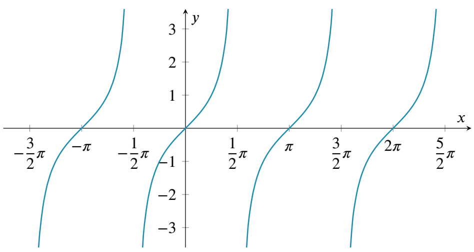
$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(x)$$

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \cos(x)$$

Voor de tangensfunctie $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ merken we op dat ze niet gedefinieerd is in de nulpunten van de noemer, dus als $\cos x = 0$ zoals bijvoorbeeld in $\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ of algemeen als $x \in \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Waar $\sin x = 0$ zal ook de tangensfunctie nul zijn.



We lezen op de goniometrische cirkel af dat $\tan 0 = 0$, en dat naarmate de hoek groter wordt ook de tangens van de hoek groter wordt. Als de hoek de waarde $\dfrac{\pi}{2}$ krijgt, dan bestaat de tangens niet meer, dan wordt deze 'oneindig'. Volledig gelijkaardig wordt de tangens steeds negatiever als de hoek varieert van 0 tot $-\dfrac{\pi}{2}$. De grafiek van $x \mapsto \tan(x)$ ziet er als volgt uit:



3.3 Goniometrische vergelijkingen

Vergelijkingen waarin goniometrische functies voorkomen noemen we, weinig verrassend, *goniometrische vergelijkingen*. Voorbeelden zijn $\sin x = 1$, $\sin x = \sin 1$, $\sin x = x$ of $\sin x^2 = 2\cos^2 2x$. De meest nuttige oplossingen van deze goniometrische vergelijkingen zijn meestal niet de *georiënteerde hoeken* die voldoen aan de vergelijking, maar wel *alle maatgetallen* die voldoen. Er zijn geen algemene formules of procedures om willekeurige goniometrische vergelijkingen exact op te lossen, en het volstaat vertrouwd te zijn met de hier behandelde eerder eenvoudige gevallen.

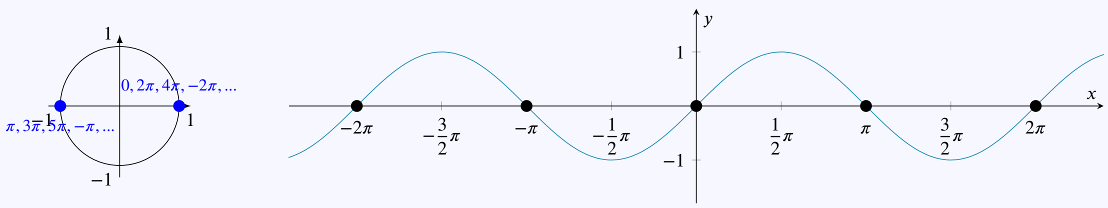
Sommige goniometrische vergelijkingen kan je direct oplossen met behulp van de tabel met gekende waarden, met de grafiek van de goniometrische functies of met de goniometrische cirkel. Omdat we geïnteresseerd zijn in *alle* oplossingen, is het toch belangrijk ook deze vergelijkingen met de nodig aandacht te bestuderen.

Voorbeeld 3.3.1. Voor welke getallen x geldt dat $\sin x = 0$?

Uitwerking:

Je kan redeneren met de *goniometrische cirkel*: de sinus is de y-coördinaat, of dus de hoogte. Een hoek α met $\sin\alpha = 0$ heeft dus hoogte nul. Zo zijn er twee hoeken, namelijk de nulhoek en de gestrekte hoek. We zoeken echter de *maatgetallen* van die hoeken, en de maatgetallen van de nulhoek zijn $2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$ en de maatgetallen van de gestrekte hoek zijn $\pi + 2k\pi$, ook met $k \in \mathbb{Z}$. Samen geeft dat de maatgetallen $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$: $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Je kan ook redeneren op de *grafiek van de sinusfunctie* en de nulpunten zoeken. Dat zijn precies de punten $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$.



Oefening 3.3.1. Geef alle oplossingen van volgende vergelijkingen:

1. $\sin x = 1$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. $\cos x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. $\cos x = 1$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Voorbeeld 3.3.2. Voor welke getallen x geldt dat $\cos x = \cos\alpha$, met $\alpha \in [0, 2\pi]$?

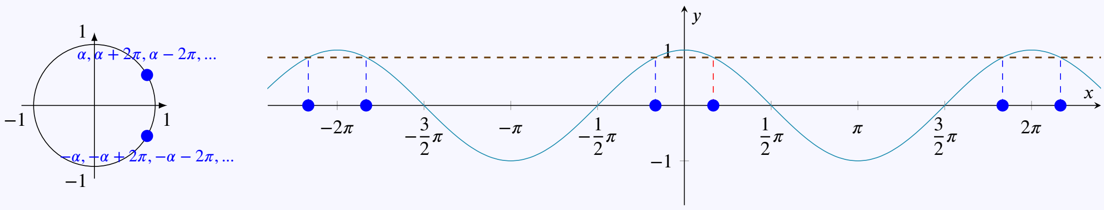
Uitwerking:

Je redeneert hier best met de *goniometrische cirkel*. α is een vast getal, maar er is geen concrete waarde voor gegeven. De oplossingen zullen dus afhangen van α. Teken daarom een willekeurige hoek α. De cosinus is de x-coördinaat, en dus heeft de hoek $-\alpha$ dezelfde cosinus als α. Er voldoen dus twee hoeken, namelijk α en

3.3 Goniometrische vergelijkingen

$-\alpha$ aan de vergelijking. Maar, er worden geen hoeken gevraagd, maar reële getallen, dus maatgetallen van hoeken. Elke hoek heeft oneindig veel maatgetallen, dus de maatgetallen x waarvoor $\cos x = \cos\alpha$ zijn de getallen $\{\pm\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Je kan ook redeneren op de grafiek van de cosinusfunctie en de hoek α aanduiden op de x-as. Door een verticale lijn vind je dan $\cos\alpha$, en door een horizontale lijn vind je alle punten die dezelfde cosinus hebben.

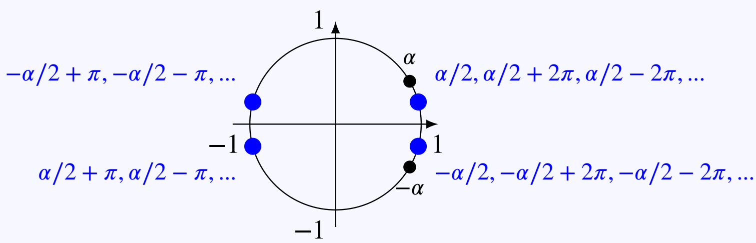


Voorbeeld 3.3.3. Voor welke getallen x geldt dat $\cos 2x = \cos\alpha$, met $\alpha \in [0, 2\pi]$?

Uitwerking:

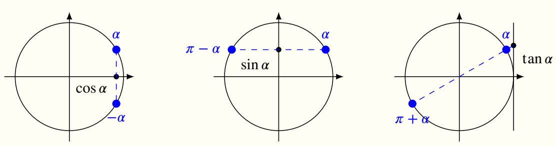
Dit voorbeeld lijkt erg op het vorige.

Uit vorig voorbeeld volgt dat $2x \in \{\pm\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, en dus $x \in \{\pm\alpha/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

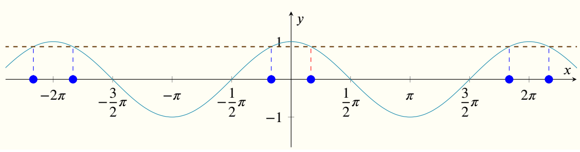


Opmerking 3.3.1.

- Vergelijkingen van de vorm $\sin x = \sin\alpha$, $\cos x = \cos\alpha$ of $\tan x = \tan\alpha$, met een gegeven $\alpha \in \mathbb{R}$, kunnen opgelost worden door te redeneren op de *goniometrische cirkel*:
  - duid een willekeurige hoek α aan op de goniometrische cirkel
  - markeer de andere hoek die dezelfde sinus,cosinus of tangens heeft. Voor de cosinus is dat de hoek $-\alpha$, voor de sinus de hoek $\pi - \alpha$ en voor de tangens de hoek $\pi + \alpha$.
  - als de *maatgetallen* van de hoeken worden gevraagd, wat meestal het geval is, tel je bij elke hoek een willekeurig veelvoud van 2π op



- Dergelijke vergelijkingen kunnen ook worden opgelost door te redeneren op de *grafiek*:
  - teken een horizontale rechte door het gegeven goniometrische getal op de y-as
  - de gezochte maatgetallen komen overeen met de snijpunten van de grafiek



3.3 Goniometrische vergelijkingen

- Je bekomt dus telkens oplossingsverzamelingen van de vorm

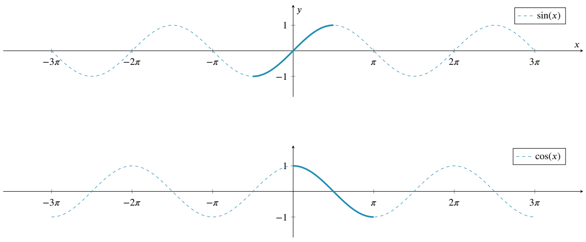
$$\begin{array}{rl} \cos x = \cos\alpha & \{\pm\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \sin x = \sin\alpha & \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \tan x = \tan\alpha & \{\alpha + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

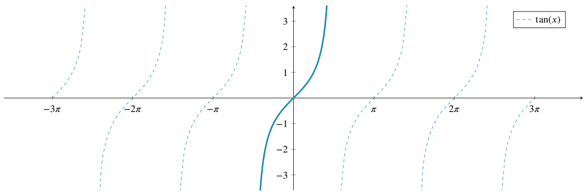
- Vergelijkingen van de vorm $\sin x = a$ of $\cos x = a$ zijn enkel oplosbaar als $a \in [-1, 1]$. In dat geval volstaat het van één hoek α te vinden waarvoor $\sin\alpha = a$ om het probleem te reduceren tot het voorgaande geval. Dergelijke hoek α kan je vinden met een rekenmachine, namelijk door boogcosinus, boogsinus of boogtangens te berekenen.
- In een vergelijking van de vorm $\sin x = \sin\alpha$ mag je *niet* gewoon de sinus schrappen, en concluderen dat $x = \alpha$. Inderdaad, $x = \alpha$ is *een* oplossing, maar er zijn er meer.
- Voor vergelijkingen van de vorm $\cos mx = \cos\alpha$, met $m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$, volstaat het alle oplossingen van $\cos x = \cos\alpha$ te delen door m, en dat geeft dan $x \in \left\{\pm\frac{\alpha}{m} + \frac{2k}{m}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3.4 Cyclometrische functies

We bestuderen de *inverse functies* van de gekende functies sinus, cosinus en tangens. We zoeken dus niet de sinus van een bepaald getal x (dus niet r zodat $r = \sin x$), maar net het omgekeerde: we krijgen $r \in [-1, 1]$ en zoeken x zodat $\sin x = r$. Dat is enigszins subtiel omdat er natuurlijk *meerdere* dergelijke getallen x bestaan. Voor $r = 0$ weten we bijvoorbeeld dat $\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(-\pi) = \sin(2\pi) = \sin(3\pi) = 0$.

Om dit probleem op te lossen kijken we eerst naar de grafieken van sin, cos en tan:



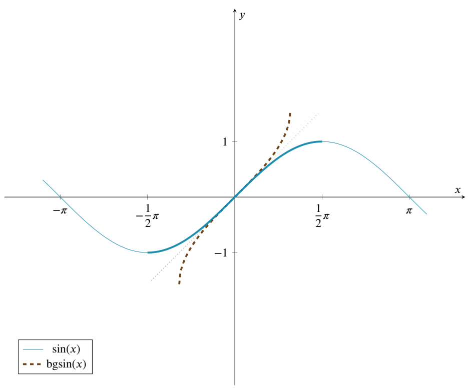


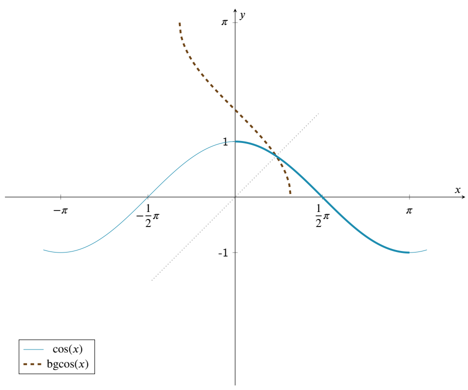
Op de grafiek kan je zien dat, wanneer we het domein van sin beperken tot $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *wel* geldt dat voor elke $r \in [-1, 1]$ er *één unieke* x is zodat $\sin x = r$. Om dezelfde reden spreken we af om het domein van cos te beperken tot $[0, \pi]$ en dat van tan tot $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

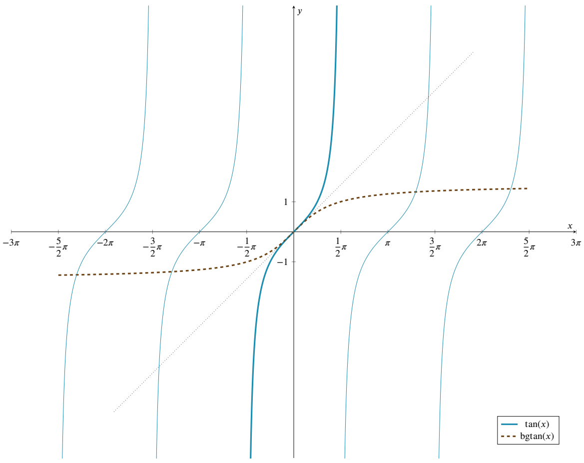
Definitie 3.4.1 (Cyclometrische functies)**.** Volgende **cyclometrische functies** zijn de inversen van de goniometrische functies als we het domein van die goniometrische functies gepast beperken:

$$\begin{aligned}
&\text{bgsin} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : x \mapsto \text{bgsin}(x) \quad \text{is invers van} \quad \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1] : x \mapsto \sin(x) \\
&\text{bgcos} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] : x \mapsto \text{bgcos}(x) \qquad\qquad \cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] : x \mapsto \cos(x) \\
&\text{bgtan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: x \mapsto \text{bgtan}(x) \qquad\qquad \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x)
\end{aligned}$$

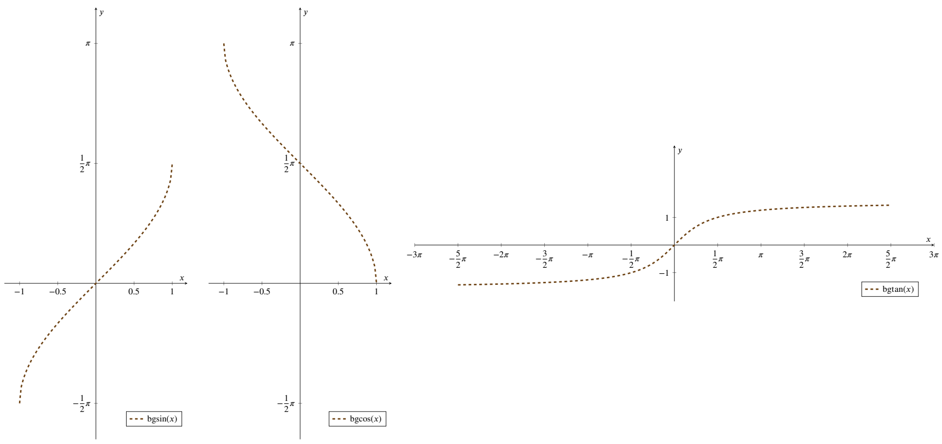
We bekomen de *grafiek* van de cyclometrische functies door het domein van de goniometrische functies te beperken, en de grafiek te spiegelen over de eerste bissectrice:







en dat resulteert in volgende grafieken van bgsin, bgcos en bgtan:



Opmerking 3.4.1.

- Cyclometrische functies geven *altijd* de waarde van een hoek uitgedrukt in radialen.
- De naam *boog*sinus komt van het feit dat de boogsinus de lengte geeft van de *boog* met een gegeven sinus. Men gebruikt zowel de notaties bgsin, Bgsin, arcsin als asin.
- De boogsinus en boogtangens is *altijd* een getal tussen $-\dfrac{\pi}{2}$ en $\dfrac{\pi}{2}$, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of IV.
- De boogcosinus van een getal is *altijd* een getal tussen 0 en π, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of II.
- Zoals steeds voor inverse functies geldt dat de grafiek van de sin en bgsin elkaars *spiegelbeeld* zijn over de eerste bissectrice $y = x$. Idem voor cos en bgcos, en tan en bgtan.
- bgsin en bgcos zijn slechts gedefinieerd op het interval $[-1, 1]$.
- bgtan is gedefinieerd op $\mathbb{R}$.

Voorbeeld 3.4.1.

- $\text{bgsin}\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$ want $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ en $\dfrac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\dfrac{\pi}{2}$ en $\dfrac{\pi}{2}$.

- $\text{bgsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ want $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ en $-\frac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\text{bgcos}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ want $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\text{bgcos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ want $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{3\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\text{bgtan}\,1 = \frac{\pi}{4}$ want $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ want $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$ en $-\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.

3.4.1 Samenstellen van goniometrische en cyclometrische functies

Voorbeeld 3.4.2 (Voorbeelden boogtangens)**.**

We kijken wat er gebeurt als we de functies bgtan en tan samenstellen. We weten bijvoorbeeld dat $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$, $\text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ en $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$. Hiermee kunnen we berekenen dat

- $\tan(\text{bgtan}(1)) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$. Voor $x = 1$ geldt bijgevolg $\tan(\text{bgtan}(x)) = x$.
- $\tan(\text{bgtan}(-1)) = \tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$. Voor $x = -1$ geldt ook $\tan(\text{bgtan}(x)) = x$.
- $\text{bgtan}(\tan(\frac{\pi}{4})) = \text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{\pi}{4}$ geldt bijgevolg $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) = \alpha$.
- $\text{bgtan}(\tan(\frac{3\pi}{4})) = \text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ is $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) \neq \alpha$. Hier geldt dat $\text{bgtan}(\tan(\frac{3\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \pi$.

In het algemeen geldt voor hoeken tussen $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{3\pi}{2}$ (hoeken in het 2de en 3de kwadrant) dat:

$$\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha - \pi \text{ en dus } \alpha = \text{bgtan}(\tan\alpha) + \pi.$$

Voor hoeken in het 1ste en 4de kwadrant geldt wel $\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha$.

Voor alle getallen x geldt *wel* dat $x = \tan(\text{bgtan}(x))$.

Merk op: We hebben hier bij de functie boogtangens gekozen om x als naam van de variable te nemen omdat de *boog*tangens genomen wordt van een gewoon *reëel getal*, terwijl we voor de functie *tangens* hierboven α hebben gebruikt omdat de tangens genomen wordt van de (getalwaarde van) een *hoek* (maar die is *ook* uitgedrukt als een reëel getal). De naam van de variabele kan natuurlijk vrij worden gekozen, en dikwijls wordt ook voor de tangens de letter x gebruikt.

Eigenschap 3.4.1 (Samenstellen van goniometrische en cyclometrische functies)**.**

3.4 Cyclometrische functies

- Als x een getal is dan geldt

$$\begin{aligned} \text{als } x \in [-1,1] &: \sin(\text{bgsin}(x)) = x. && \text{Voor andere } x \text{ is } \text{bgsin}(x) \text{ niet gedefinieerd} \\ \text{als } x \in [-1,1] &: \cos(\text{bgcos}(x)) = x. && \text{Voor andere } x \text{ is } \text{bgsin}(x) \text{ niet gedefinieerd} \\ \text{als } x \in \mathbb{R} &: \tan(\text{bgtan}(x)) = x \end{aligned}$$

- Als α het maatgetal is van een hoek dan geldt

$$\begin{aligned} \text{als } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &: \text{bgsin}(\sin(\alpha)) = \alpha. \\ \text{als } \alpha \in [0, \pi] &: \text{bgcos}(\cos(\alpha)) = \alpha \\ \text{als } \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[&: \text{bgtan}(\tan(\alpha)) = \alpha \end{aligned}$$

  Voor α buiten deze intervallen gelden deze gelijkheden niet.

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

Module 4

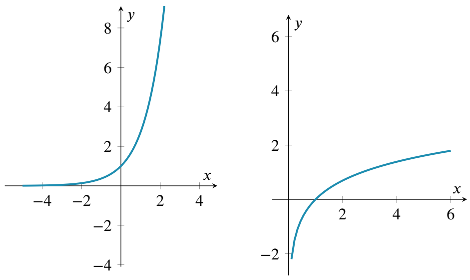
Exponentiele en logaritmische functies

(Versie 2024/10/24HB.16)

4.1 Intro exponentiële en logaritmische functies

In alle wetenschappen worden fenomenen bestudeerd die exponentiële of logaritmische kenmerken hebben. Het meest gekend is de zogenaamde *exponentiële groei*. Deze uitdrukking betekent informeel meestal 'erg sterke groei', en wordt dan dikwijls tegenover de eerder gematigde 'lineaire groei' gesteld.

Het concept **exponentieel** slaat op een zekere veralgemening van het *machtsverheffen*. De machtsfuncties $x^2, x^3, x^4, \ldots$ bekomen we door een getal x telkens een extra keer te vermenigvuldigen met zichzelf. Er is een machtsfunctie voor *elke positieve exponent*, het grondtal varieert. Bij de *exponentiële functie* kiezen we het grondtal vast, en laten de exponent variëren: we bestuderen de functies $2^x, 3^x, 4^x, \ldots$. Er is dus een exponentiële functie voor *elk positief grondtal*.



Het tweede belangrijke concept dat we hier invoeren is de **logaritme**. De logaritme geeft de **grootte-orde** van iets. Voor een macht van 10 betekent dat het aantal cijfers, of nauwkeuriger het aantal nullen. De logaritme van 10 is per definitie gelijk aan 1 (want er is één nul). De logaritme van 100 is 2, die van 1000 is 3, en die van 10^{42} is 42. Dit soort logaritme wordt de *tiendelige logaritme* of 10-logaritme genoemd en is erg populair bij bijvoorbeeld economen, maar ook bij fysici, chemici en biologen. Informatici daarentegen begrijpen de wereld dikwijls binair, en ze tellen liever in machten van 2: de 2-logaritme van 2 is per definitie 1, die van $4 = 2^2$ is 2, die van $16 = 2^4$ is 4, die van $64 = 2^8$ is 8, en die van 2^{1024} is 1024. Wiskundigen – en alle andere wetenschappers als ze wiskunde aan het gebruiken zijn – vinden het bijzonder aangenaam om de grootte-ordes te berekenen in termen van het getal $e = 2.71\ldots$. Dat lijkt een wat *gekke* keuze, maar wie al afgeleiden heeft gestudeerd weet zeker ook waarom het een bijzonder *slimme* keuze is.

Je kan het begrip logaritme invoeren door te vertrekken van een exponentiële functie a^x, en gebruik te maken van het begrip *inverse functie*: de logaritme $log_a x$ is per definitie de inverse functie van de exponentiële functie a^x. Wij hebben hier gekozen voor een tweede mogelijkheid, die meer elementair is en enkel de rekenregels voor het machtsverheffen gebruikt.

In wat volgt hebben we de leerstof over exponentiële en logaritmische functies als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) De definitie van de logaritme van een getal

(3) Enkele rekenregels voor logaritmen

(4) Enkele voorbeelden van groeimodellen

(5) De definitie en basiseigenschappen van exponentiële functies

(6) De definitie en basiseigenschappen van logaritmische functies

(7) Een korte inleiding tot exponentiële vergelijkingen

4.2 De logaritme

We kennen voor een gegeven grondtal a en een gegeven exponent r de *macht* a^r. Zo hoort bij grondtal 3 en exponent 2 de macht $3^2 = 9$ en bij grondtal 2 en exponent 3 de macht $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Bij *logaritmen* keren we de berekening om: we *vertrekken* van een gegeven grondtal a en een gegeven macht a^r en *zoeken* de *exponent* r die hoort bij dat grondtal a om die macht a^r te bekomen. Als de macht geschreven is als a^r kunnen we r natuurlijk gewoon aflezen, maar als de macht is uitgerekend werkt dat niet meer. Zo zoeken we voor het grondtal 3 en het getal 9 de exponent r zodat $3^r = 9$. Die is 2 want $3^{\mathbf{2}} = 9$. We noemen die exponent 2 de 3-logaritme van 9, en we noteren $\log_3 9 = 2$. We hebben dus:

$$\log_3 9 = \mathbf{2} \quad \text{want} \quad 3^{\mathbf{2}} = 9. \quad \text{Er geldt dus dat } 3^{\log_3 9} = 9 \text{ en } \log_3 3^2 = 2.$$

$$\log_2 8 = \mathbf{3} \quad \text{want} \quad 2^{\mathbf{3}} = 8. \quad \text{Er geldt dus dat } 2^{\log_2 8} = 8 \text{ en } \log_2 2^3 = 3.$$

Definitie 4.2.1 (Logaritme)**.** De **logaritme met grondtal a van x** of de **a-logaritme van x** is per definitie **de exponent r waartoe men grondtal a moet verheffen om x als uitkomst te krijgen.**

We noteren die exponent r als $\log_a x$. In symbolen wordt de definitie

$\boxed{\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x}$ Vb: $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

of equivalent: $\log_a x$ is het unieke reële getal zodat $\boxed{a^{\log_a x} = x}$.

Deze definitie is enkel zinvol voor a en x positieve reële getallen met $a \neq 1$ (zie Opmerking 4.2.2).

Voorbeeld 4.2.1. Je kan $\log_a x$ dus *direct aflezen* als je x als een macht van a kan schrijven:

1. $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

2. $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$

3. $\log 1000 = \log 10^3 = 3$

4. $\log_4 \frac{1}{4} = \log_4 4^{-1} = -1$

5. $\log_4 4 = 1$

6. $\log_4 1 = 0$

Opmerking 4.2.1.

- In het secundair onderwijs gebruikt men dikwijls de notatie ${}^a\log x$, in de wetenschappen $\log_a x$.
- De definitie $\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x$ lijkt erg op die van machtswortels $\sqrt[a]{x} = r \Longleftrightarrow r^a = x$, maar de rol van a en r is verwisseld: bij de wortel zoek je het *grondtal*, bij de logaritme de *exponent*.
- Net zoals wortels als $\sqrt{4}, \sqrt{25}$ en $\sqrt[3]{8}$ makkelijk te berekenen zijn terwijl je voor $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ of $\sqrt[3]{9}$ een rekentoestel nodig hebt, geldt voor logaritmen dat $\log_2 4, \log_5 25$ en $\log_2 8$ makkelijk te berekenen zijn, terwijl je voor $\log_3 8$ of $\log_5 30$ een rekentoestel nodig hebt.

Opmerking 4.2.2. Speciale grondtallen en argumenten waarvoor de logaritme niet bestaat:

$\log_1 5$	bestaat niet:	er bestaat immers geen r zodat $1^r = 5$, want 1^r is steeds 1.
$\log_0 5$	bestaat niet:	er bestaat geen r waarvoor $0^r = 5$, want 0^r is nul of ongedefinieerd.
$\log_5 0$	bestaat niet:	er bestaat geen r waarvoor $5^r = 0$, want 5^r is steeds strikt positief.
$\log_{-2} 5$	bestaat niet:	er bestaat geen r waarvoor $(-2)^r = 5$. Er bestaat zeker geen *natuurlijk* getal r waarvoor $(-2)^r = 5$, en *rationale* getallen r zijn problematisch omdat bijvoorbeeld $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$ niet bestaat.
$\log_5(-2)$	bestaat niet:	er bestaat geen r waarvoor $5^r = -2$, want 5^r is altijd positief.

In de definitie van de logaritme $\log_a x$ moeten dus a en x inderdaad beperkt worden:

- het grondtal a moet *strikt positief* zijn,

- het grondtal a mag niet 1 zijn (want machten van 1 zijn altijd gelijk aan 1),
- het argument x moet *strikt positief* zijn (want machten met een strikt positief grondtal a zijn altijd strikt positief).

Het getal $\log_a x$ kan zelf *wel alle reële waarden aannemen*, en dus zowel negatief, nul als positief zijn.

Merk op dat de logaritme $\log_2 10$ wel bestaat, maar niet *exact* kan bepaald worden omdat je het getal 10 niet *exact* kan schrijven als een macht met grondtal 2. Omdat $2^3 < 10 < 2^4$ kunnen we wel besluiten dat $\log_2 10$ een waarde moet zijn tussen 3 en 4. Met een rekentoestel kunnen betere benaderende waarde worden gevonden. Zo is bijvoorbeeld $\log_2 10 \approx 3.3219$, afgerond op 4 decimalen.

In de praktijk komen twee grondtallen erg veel voor, en daarvoor is er telkens een speciale notatie:

Definitie 4.2.2.

De **tiendelige logaritme**, ook wel *Briggse logaritme* genoemd, is de logaritme met grondtal 10, en wordt per afspraak genoteerd zonder grondtal: $\boxed{\log x} \stackrel{\text{def}}{=} \log_{10} x$.

De **natuurlijke logaritme**, ook wel *Neperse logaritme* genoemd, is de logaritme met grondtal het **getal van Euler** $e \approx 2.718281$ en wordt genoteerd als $\boxed{\ln x} \stackrel{\text{def}}{=} \log_e x$.

De logaritme $\log_a x$ geeft de *grootte-orde* aan van x in termen van a, namelijk hoeveel machten van a er gaan in x. Voor de tiendelige logaritme gaat het dus om machten van 10, en (het gehele deel van) $\log x$ bepaalt het *aantal cijfers* van x: $\log 1000 = 3, \log 10^n = n$ en $3 < \log 1234 < 4$ en $5 < \log 123456 < 6$. Op dezelfde manier bepaalt voor informatici $\log_2 x$ het *aantal bits* dat nodig is om x op te slaan.

De natuurlijke logaritme is ondermeer erg handig bij het berekenen van afgeleiden, en het gebruik van ln maakt dan allerlei formules veel eenvoudiger. De afkorting ln komt van het Latijnse 'logaritmus naturalis'.

Uit de definities volgt onmiddellijk volgende eigenschap:

Eigenschap 4.2.1 (Basisformules van de logaritme)**.**

Voor $x > 0$ en $a > 0$ met $a \neq 1$ geldt: $\boxed{\log_a a^x = x}$ en $\boxed{a^{\log_a x} = x}$

Voor $x = 0$ wordt dit: $\boxed{\log_a 1 = 0}$

Voor $x = 1$ wordt dit: $\boxed{\log_a a = 1}$.

Voor $a = 10$ wordt dit: $\log 10^x = x$ en $10^{\log x} = x$.

Voor $a = e = 2.7182\ldots$ wordt dit: $\ln e^x = x$ en $e^{\ln x} = x$.

Oefening 4.2.1. Bereken volgende logaritmen (zonder rekenmachine).

1. $\log_3 81 = \ldots\ldots$

2. $\log 100 = \ldots\ldots$

3. $\log 0.01 = \ldots\ldots$

4. $\log_2 64 = \ldots\ldots$

5. $\log_2 128 = \ldots\ldots$

6. $\log_2(4^7) = \ldots\ldots$

7. $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = \ldots\ldots$

8. $\log_9 3 = \ldots\ldots$

4.3 Rekenregels voor logaritmen

Uit de rekenregels voor machten volgen enkele belangrijke rekenregels voor logaritmen.

Uit de formule $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ volgt door te stellen dat $a^r = x$ en $a^s = y$ de gelijkheid $x \cdot y = a^{r+s}$. Hiervan de a-logaritme nemen en opmerken dat $a^r = x$ hetzelfde betekent als $r = \log_a x$ levert

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a a^{r+s} = r + s = \log_a x + \log_a y$$

en dus:

Eigenschap 4.3.1. Logaritme van een product: $\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$ $(a, x, y \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1)$

In woorden: *de logaritme van een product is de som van de logaritmen.*
of: de logaritme zet een *product* om in een *som*.

Voorbeeld 4.3.1.

1. $\log 25 + \log 4 = \log(25 \cdot 4) = \log 100 = 2$

2. $\log_5 125 = \log_5(5 \cdot 25) = \log_5 5 + \log_5 25 = 1 + 2 = 3$

3. $\log_a x^2 = \log_a(x \cdot x) = \log_a x + \log_a x = 2 \log_a x$

Het laatste voorbeeld kan worden veralgemeend tot willekeurige machten: uit de formule $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ volgt door $a^r = x$ te stellen de gelijkheid $x^s = a^{r \cdot s}$. Van $x^s = a^{r \cdot s}$ de a-logaritmen nemen geeft

$$\log_a x^s = \log_a a^{r \cdot s} = s \cdot r = s \cdot \log_a x.$$

Eigenschap 4.3.2. Logaritme van een macht: $\boxed{\log_a x^s = s \cdot \log_a x}$ $(a, x \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1, s \in \mathbb{R})$

In woorden: *de logaritme zet een macht om in een product.*
of: de logaritme brengt *een exponent naar beneden* (of naar voor).

Speciaal geval $s = -1$: $\boxed{\log_a x^{-1} = -\log_a x}$

Voorbeeld 4.3.2. $\log_2 4^5 = 5 \log_2 4 = 5 \cdot 2 = 10$ en $\log x^{1000} = 1000 \log x$

Het speciaal geval $\log_a x^{-1}$ geeft samen met de formule voor het product een formule voor het quotiënt:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a(x \cdot y^{-1}) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$$

Eigenschap 4.3.3. Logaritme van een quotiënt: $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$ $(a, x, y \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1)$

In woorden: *de logaritme van een quotiënt is het verschil van de logaritmen.*
of: de logaritme zet een *quotiënt* om in een *verschil*.

Voorbeeld 4.3.3. $\log 500 - \log 5 = \log \frac{500}{5} = \log 100 = 2$

Stel dat je een getal x hebt geschreven als een macht van a, dus $x = a^r$ *en* als een macht van b, dus $x = b^s$. Dan kan je onderzoeken of er een verband is tussen de exponenten r en s. Welnu, de a-logaritme nemen van de gelijkheid $x = b^s$ geeft samen met de equivalentie $x = b^s \iff s = \log_b x$ dat

$$\log_a x = \log_a b^s = s \cdot \log_a b = \log_b x \cdot \log_a b$$

4.3 Rekenregels voor logaritmen

Eigenschap 4.3.4 (Verandering van grondtal).

Verandering van grondtal: $\boxed{\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}}$ of $\boxed{\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x}$

Speciaal geval $x = a$: $\boxed{\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}} = \left(\log_a b\right)^{-1}$

Je kan de formule $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ lezen als: de a-logaritme van x is een *herschaling* van de b-logaritme met een factor $\log_a b$. Of nog: de logaritmen met grondtal a resp. b zijn *evenredig*, met evenredigheidsfactor $\log_a b$

Ezelsbruggetje: je kan in $\log_a x$ formeel '$b \cdot \log_b$ inschuiven': $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ (met $b > 0$ willekeurig).

Voorbeeld 4.3.4.

1. $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} = \dfrac{2}{3}$

2. $\dfrac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = 4$

Waarschuwing 4.3.1. Pas op voor volgende (te) veel gemaakte fouten:

$\cancel{\log(x+y) = \log x + \log y}$ want $\log(100+100) \neq \log 100 + \log 100$
omdat $\log 200 \neq 2 + 2 = 4 = \log 10000$

$\cancel{\log(x+y) = \log x \cdot \log y}$ want $\log(100+10) \neq \log 100 \cdot \log 10$
omdat $\log 110 \neq 2 \cdot 1 = 2 = \log 100$

$\cancel{\log(x-y) = \dfrac{\log x}{\log y}}$ want $\log(100-10) \neq \dfrac{\log 100}{\log 10}$
omdat $\log 90 \neq \dfrac{2}{1} = 2 = \log 100$

$\cancel{(\log x)^n \neq n \cdot \log x}$ want $(\log(10)^3 \neq 3 \cdot \log 10$
omdat $(\log 10)^3 = 1^3 = 1$ en $3 \cdot \log 10 = 3 \cdot 1 = 3$

In het algemeen kan je niet veel doen met de logaritme van een som of verschil. Er zijn enkel formules voor *logaritmen van* producten en quotiënten, en voor sommen of verschillen *van logaritmen*.

Opmerking 4.3.1. Eenvoudige rekentoestellen kennen soms enkel de functie 'log()' waarmee je wel $\log_{10}(25)$ kan berekenen, maar niet bijvoorbeeld $\log_2(25)$. Met behulp van de formule om van grondtal te veranderen bereken je $\log_2(25)$ dan toch als $\dfrac{\log 25}{\log 2}$.

Volgende voorbeeldoefeningen gebruiken telkens meerdere rekenregels om tot een oplossing te komen:

4.3 Rekenregels voor logaritmen

Voorbeeld 4.3.5. Schrijf de uitdrukking $2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z &= \log_3(x^2) - \log_3(y^3) + \log_3(z^{0.5}) \\ &= \log_3(x^2 z^{0.5}) - \log_3(y^3) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2 z^{0.5}}{y^3}\right) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2\sqrt{z}}{y^3}\right). \end{aligned}$$

Hierbij hebben we eerst de rekenregel voor machten gebruikt, daarna de rekenregel voor product en tenslotte de rekenregel voor quotiënt.

Voorbeeld 4.3.6. Schrijf de uitdrukking $\log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z &= \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + \log_{\frac{1}{5}}(z^2) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}(xz^2) - \log_{\frac{1}{5}}(yz) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz^2}{yz}\right) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz}{y}\right). \end{aligned}$$

Opnieuw hebben we gebruik gemaakt van de rekenregel voor machten, de rekenregel voor product en de rekenregel voor quotiënt, in deze volgorde, en tenslotte de breuk binnen de logaritme vereenvoudigd.

Voorbeeld 4.3.7. Bereken de waarde van $\log_2 3 - \log_2 12$ zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Dat kan met behulp van de quotiëntregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 &= \log_2\left(\frac{3}{12}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \log_2(2^{-2}) = -2. \end{aligned}$$

Een alternatieve manier gebruikt de productregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 &= \log_2 3 - \log_2(3 \cdot 4) = \log_2 3 - \log_2 3 - \log_2 4 \\ &= -\log_2(2^2) = -2. \end{aligned}$$

Voorbeeld 4.3.8. Als gegeven is dat $\log x = 2.4$ en dat $\log y = -1.1$, bereken dan $\log\left(\sqrt{x} \cdot y^3\right)$.

Dit kan gebeuren op twee manieren.

Eerst gebruiken we de betekenis van de logaritme om x en y te bepalen: $x = 10^{2.4}$ en $y = 10^{-1.1}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} \log\left(\sqrt{x} \cdot y^3\right) &= \log\left(\sqrt{10^{2.4}} \cdot (10^{-1.1})^3\right) \\ &= \log\left((10^{2.4/2}) \cdot (10^{-1.1 \cdot 3})\right) \\ &= \log\left(10^{1.2} \cdot 10^{-3.3}\right) \\ &= \log\left(10^{1.2-3.3}\right) \\ &= \log\left(10^{-2.1}\right) = -2.1. \end{aligned}$$

Anderzijds kunnen we gebruik maken van de rekenregels van logaritmen om de gegeven formule te herschrijven als een uitdrukking in $\log x$ and $\log y$:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(x^{0.5}\cdot y^3\right)\\ &= \log(x^{0.5}) + \log(y^3)\\ &= 0.5\cdot\log x + 3\cdot\log y\\ &= 0.5\cdot 2.4 + 3\cdot(-1.1) = 1.2 - 3.3 = -2.1.\end{aligned}$$

Voorbeeld 4.3.9. Herschrijf de uitdrukking $\log_a\sqrt{\dfrac{yz^2}{ax}}$ in functie van $\log_a x$, $\log_a y$ en $\log_a z$, weer door gebruik te maken van de rekenregels:

$$\begin{aligned}\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}} &= \log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)^{0.5}\\ &= 0.5\log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a(yz^2) - \log_a(ax)\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a y + \log_a(z^2) - \log_a a - \log_a x\right)\\ &= 0.5\cdot\left(-\log_a x + \log_a y + 2\log_a z - 1\right).\end{aligned}$$

We schrijven eerst de vierkantswortel als een macht, passen dan de rekenregel voor machten toe, vervolgens de regel voor quotiënt, de regel voor product en nogmaals de regel voor macht.

4.4 Groeimodellen

Wetenschappers bestuderen grootheden die veranderen in de tijd zoals temperatuur, snelheid, winst, consumptieprijzen en bevolkingsaantallen. We gebruiken hier de term **groeimodel** voor twee types erg *regelmatig* groeiende grootheden. Het woord 'groeien' moet niet te letterlijk worden genomen: het kan ook 'krimpen' of 'afnemen' betekenen: dan spreken we van *negatieve groei* of *verval*. In de praktijk groeien grootheden ook veel onregelmatiger en dat kan met behulp van de wiskundige techniek van afgeleiden van functies worden bestudeerd.

In het **lineaire groeimodel** wordt per tijdseenheid een constante term *opgeteld* bij de grootheid, in het **exponentieel groeimodel** wordt de grootheid per tijdseenheid telkens met een constante factor *vermenigvuldigd* (de zogenaamde *groeifactor*).

Definitie 4.4.1 (Pseudo-definitie van lineaire en exponentiële groei)**.**

Een grootheid groeit **lineair** als er na elke tijdseenheid een vaste waarde wordt *bijgeteld*. Deze waarde noemen we de **groeisnelheid**.

Een grootheid groeit **exponentieel** als ze na elke tijdseenheid met een vaste waarde wordt *vermenigvuldigd*. Deze waarde noemen we de **groeifactor**.

Merk alvast op dat de waarde die telkens wordt opgeteld ook negatief kan zijn, en de waarde waarmee wordt vermenigvuldigd kleiner kan zijn dan 1. In beide gevallen spreken we over **negatieve groei**.

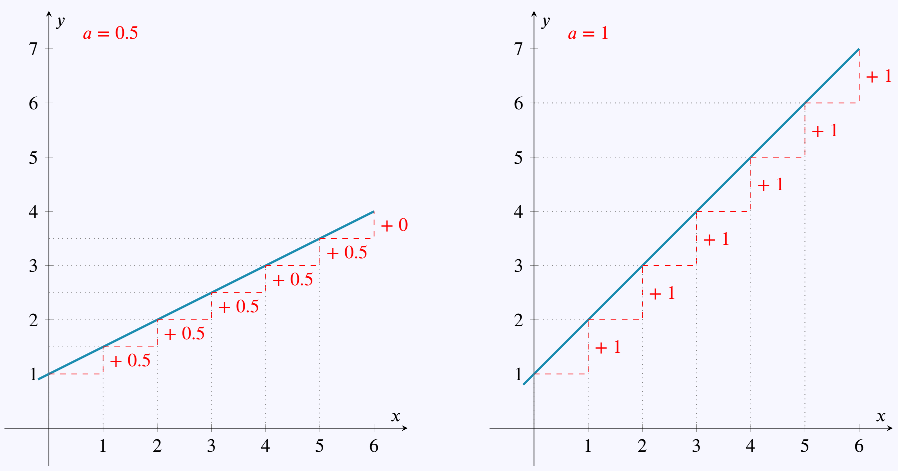
We onderzoeken eerst wat lineaire en exponentiële groei betekenen voor *reële functies*.

Voorbeeld 4.4.1 (Lineaire groei)**.**

Voor een reële functie $f : x \mapsto f(x)$ betekent lineaire groei volgens de definitie dat telkens wanneer x met 1 toeneemt, de functiewaarde $f(x)$ ook met een vaste waarde moet toenemen. Als we die waarde a noemen, betekent dat dus dat $f(x+1) = f(x) + a$. Als we de functiewaarde voor $x = 0$ bijvoorbeeld b noemen, dan weten we dat $f(0) = b$, en dus

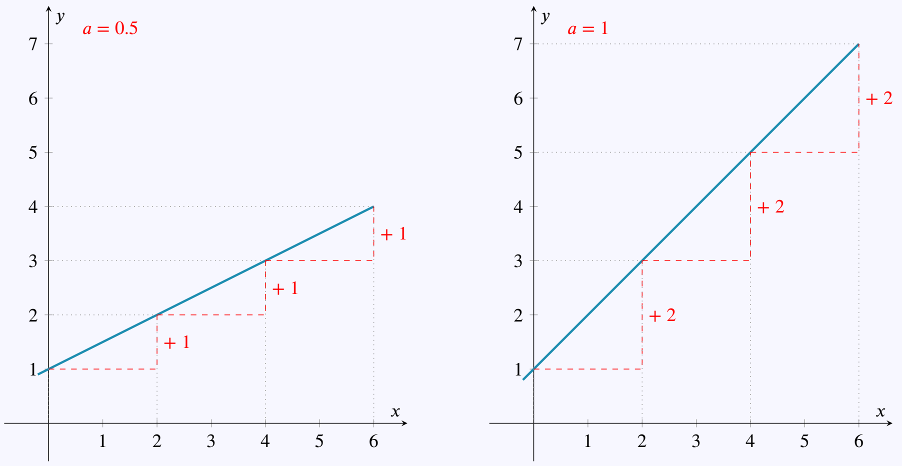
$$\begin{aligned}
f(1) &= f(0+1) = f(0) + a = b + a \\
f(2) &= f(1+1) = f(1) + a = (b+a) + a = b + 2a \\
f(3) &= f(2+1) = f(2) + a = (b+2a) + a = b + 3a \\
f(4) &= f(3+1) = f(3) + a = (b+3a) + a = b + 4a.
\end{aligned}$$

Op de grafiek van f ziet dit er als volgt uit:



Merk op dat ook steeds $f(x+2) = f((x+1)+1) = f(x+1) + a = f(x) + a + a = f(x) + 2a$:

4.4 Groeimodellen

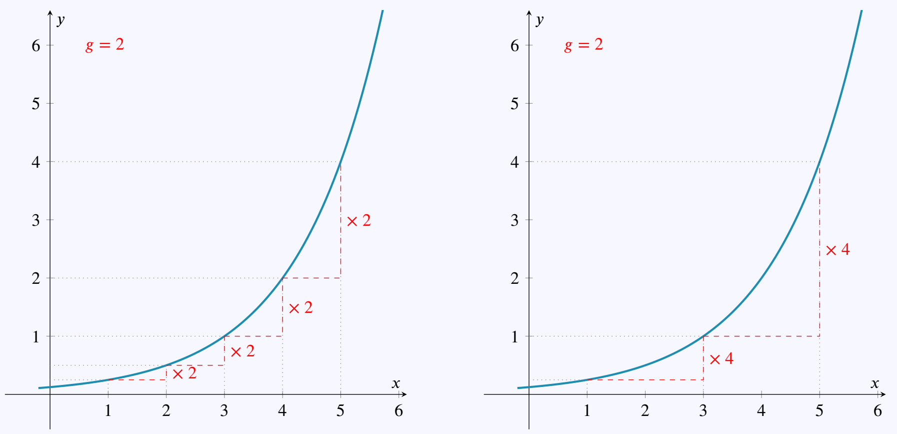


Voorbeeld 4.4.2 (Exponentiële groei)**.**

Voor een reële functie $f : x \mapsto f(x)$ betekent exponentiële groei volgens de definitie dat telkens wanneer x met 1 toeneemt, de functiewaarde $f(x)$ met een vaste waarde moet vermenigvuldigd worden. Als we die waarde g noemen, betekent dat dus dat $f(x+1) = g f(x)$. Als we de functiewaarde voor $x = 0$ bijvoorbeeld b noemen, dan weten we dat $f(0) = b$, en dus

$$\begin{aligned}
f(1) &= f(0+1) = f(0)\cdot g = b\cdot g\\
f(2) &= f(1+1) = f(1)\cdot g = (b\cdot g)\cdot g = b\cdot g^2\\
f(3) &= f(2+1) = f(2)\cdot g = (b\cdot g^2)\cdot g = b\cdot g^3\\
f(4) &= f(3+1) = f(3)\cdot g = (b\cdot g^3)\cdot g = b\cdot g^4.
\end{aligned}$$

Op de grafiek van f ziet dit er als volgt uit:



Merk op dat dus ook geldt dat $f(x+2) = f((x+1)+1) = g f(x+1) = g^2 f(x)$.

We gebruiken de letter a voor de groeisnelheid bij lineaire groei en de letter g voor de groeifactor bij exponentiële groei.

Eigenschap 4.4.1.

Het functievoorschrift van een reële functie met *lineaire groei* met **beginwaarde** b en **groeisnelheid**

a is

$$\boxed{f(t) = at + b}.$$

Het functievoorschrift van een reële functie met *exponentiële groei* met **beginwaarde** b en **groeifactor** g is

$$\boxed{f(t) = b \cdot g^t}.$$

Hierbij veronderstellen we $a \neq 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Opmerking 4.4.1.

- De groeifactor wordt soms ook met de letter a genoteerd, of de variabele van de functie met de letter x. Dan krijg je als functievoorschrift

$$f(t) = b \cdot a^t \text{ of } f(x) = b \cdot a^x.$$

- Zowel voor lineaire als voor exponentiële groei is b de *begin*waarde: voor $t = 0$ is telkens $f(0) = b$.

Oefening 4.4.1.

1. Teken de grafiek van een functie met lineaire groei met beginwaarde 4 waarbij de groeisnelheid 0 zou zijn. Teken ook de grafiek van een functie met exponentiële groei met beginwaarde 4 waarbij de groeifactor 1 zou zijn.

Besluit: De groeisnelheid a bij lineaire groei moet verschillend zijn van 0, en de groeifactor g bij exponentiële groei moet verschillend zijn van 1, want anders krijgen we *constante* functies. Een constante functie noemen we *geen* lineaire of exponentiële groei.

Eigenschap 4.4.2.

- Als bij lineaire groei een functie over één tijdseenheid groeit met a, dan groeit ze met $n \cdot a$ over n tijdseenheden, want

$$f(t+n) = a(t+n) + b = at + an + b = f(t) + an$$

- Als bij exponentiële groei een functie over één tijdseenheid groeit met een groeifactor g, dan groeit ze met een factor g^n over n tijdseenheden, want

$$f(t+n) = b \cdot g^{t+n} = b \cdot g^t \cdot g^n = g^n \cdot f(t).$$

- Een lineaire groeifunctie stijgt als $a > 0$ en daalt als $a < 0$.
- Een exponentiële groeifunctie stijgt als $g > 1$ en daalt als $g < 1$.

Oefening 4.4.2 (Lineaire groei: constante toevoer van zand)**.**

In een zandgroeve voert een lopende band aan een constant debiet van $3/5$ ton per kwartier nieuw zand toe. Stel dat de band om 8 uur 's morgens begint een bestaande zandhoop van 2 ton zand aan te vullen volgens dit proces. Om hoe laat zal de zandhoop dan 10 ton zand bevatten?

We vertalen deze gegevens wiskundig als volgt: we meten de tijd t in eenheden van één kwartier en laten $t = 0$ overeenkomen met 8 uur 's morgens. De hoeveelheid zand op de hoop (in ton) op het ogenblik t geven we aan met $f(t)$.

Zo komen we tot volgend schema:

	$\overbrace{\quad 0 \quad 1 \quad}^{+1}$		$\overbrace{\quad 2 \quad 3 \quad}^{+1}$				
t kwartier	0	1	2	3	4	$\cdots$	n
$f(t)$ ton	2	$2+\frac{3}{5}$	$2+2\cdot\frac{3}{5}$	$2+3\cdot\frac{3}{5}$	$2+4\cdot\frac{3}{5}$	$\cdots$	$2+n\cdot\frac{3}{5}$
	$\underbrace{\qquad\qquad}_{+\frac{3}{5}}$		$\underbrace{\qquad\qquad}_{+\frac{3}{5}}$				

We stellen vast dat voor elk natuurlijk getal n geldt

$$f(n) = \frac{3}{5}\,n + 2.$$

De tijd verloopt niet in sprongen van een kwartier, en we kunnen aannemen dat ook voor elk reëel getal t geldt

$$f(t) = \frac{3}{5}\,t + 2.$$

1. Teken de grafiek van deze functie f en geef de betekenis van de grootheden 2 en $\frac{3}{5}$ in de grafiek aan.

2. Verklaar de uitdrukking "lineaire groei".

3. Bereken hoe laat de zandhoop 10 ton zal bevatten.

Oefening 4.4.3 (Exponentiële groei: bacteriën)**.**

Een populatie bacteriën ontwikkelt zich in een kweekschaal. Stel dat het aantal bacteriën in het schaaltje elke 25 minuten verdubbelt en stel dat er in de beginsituatie vierduizend bacteriën aanwezig zijn. Hoe verloopt de groei van deze populatie bacteriën?

Om deze gegevens wiskundig te vertalen maken we volgende afspraken:

- We meten de tijd t in eenheden van 25 minuten.
- $t = 0$ komt overeen met het begin van onze observaties.
- De hoeveelheid bacteriën op het ogenblik t drukken we uit in duizendtallen en geven we aan met $f(t)$.

Zo komen we tot volgend schema:

	$\overbrace{\quad 0 \quad 1 \quad}^{+1}$		$\overbrace{\quad 2 \quad 3 \quad}^{+1}$				
t (per 25 min.)	0	1	2	3	4	$\cdots$	n
$f(t)$ bacteriën (per 10^3)	4	$4\cdot 2$	$4\cdot 2^2$	$4\cdot 2^3$	$4\cdot 2^4$	$\cdots$	$4\cdot 2^n$
	$\underbrace{\qquad\qquad}_{\times 2}$		$\underbrace{\qquad\qquad}_{\times 2}$				

We stellen vast dat voor elk natuurlijk getal n geldt

$$f(n) = 4\cdot 2^n.$$

Hierin is $4 = f(0)$ de beginwaarde en de groeifactor (over 25 minuten) is in dit geval $g = 2$.

4.4 Groeimodellen

Omdat niet alle bacteriën gelijktijdig splitsen, is het aan te nemen dat de groei niet enkel gebeurt op de tijdstippen $0, 1, 2, 3 \dots$ maar ook op elk moment tussen die tijdstippen. We kunnen bijvoorbeeld op zoek gaan naar het aantal bacteriën na 5 minuten ($\frac{1}{5}$ van de splitsingstijd) of na 50 minuten (het dubbele van de splitsingstijd).

1. Vul volgend schema aan:

$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{+1}$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & \multicolumn{6}{c}{+1/5 \quad +1/5 \quad +1/5 \quad +1/5 \quad +1/5} \\
t & 0 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & 1 \\
\hline
f(t) & 4 & \dots & \dots & \dots & \dots & 4 \cdot 2 \\
 & \multicolumn{6}{c}{\times \dots \quad \times \dots \quad \times \dots \quad \times \dots \quad \times \dots}
\end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\times 2}$$

2. Met welke factor groeit de functie over $\frac{1}{5}$ van een tijdseenheid? $\boxed{\frac{2}{5}}\ \boxed{\sqrt[5]{2}}\ \boxed{\sqrt{2}}\ \boxed{\log_5 2}$.

3. Vul volgend schema aan:

$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{+2}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & \multicolumn{3}{c}{+1 \qquad +1} \\
t & 0 & 1 & 2 \\
\hline
f(t) & 4 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 2^2 \\
 & \multicolumn{3}{c}{\times 2 \qquad \times 2}
\end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\times \dots}$$

4. Met welke factor groeit de functie over 2 tijdseenheden? …….

5. Met welke factor groeit de functie over een uur, dus over $\frac{12}{5}$ tijdseenheden? ……

6. Schets de grafiek van deze functie.

Voorbeeld 4.4.3 (Groei met procentuele toename of afname)**.**

Als in een vijver het aantal vissen elk jaar met 30% toeneemt, is dat dan een voorbeeld van lineaire groei of van exponentiële groei?

Het lijkt alsof er een vaste toename is per tijdsinterval (namelijk telkens +30%), en dus zouden we kunnen denken dat dit proces beschreven kan worden met een lineaire groei. Maar klopt dit wel?

Neen, de vaste toename is een **procentuele toename**, dit betekent dat als we de tijd t in jaren uitdrukken en $f(t)$ de hoeveelheid vissen op het ogenblik t voorstelt, we voor elk tijdstip t hebben dat:

$$f(t+1) = f(t) + (30\,\%\text{ van } f(t)) = f(t) + \frac{30}{100} f(t) = (1 + \frac{30}{100}) f(t).$$

We vinden dat dit proces een exponentieel proces is en dat de groeifactor per jaar $(1 + \frac{30}{100}) = 1.3$ bedraagt.

Eigenschap 4.4.3 (Groei met procentuele toename of afname)**.**

De **procentuele toename** p en de **groeifactor** g zijn verbonden via de formule

$$\boxed{g = \left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

Hieruit volgt dat :

positieve groei:	procentuele toename p positief	$\Leftrightarrow$	groeifactor g groter dan 1
negatieve groei:	procentuele toename p negatief	$\Leftrightarrow$	groeifactor g kleiner dan 1

Een groei met procentuele toename $p = 0\%$ sluiten we uit, want dat zou een groeifactor gelijk aan 1 geven.

4.5 Exponentiële functies

Aan twee positieve getallen a en r kunnen we de **macht** a^r associëren, met **grondtal** a en **exponent** r. Door nu in a^r ofwel a, ofwel r constant te houden en het andere getal in waarde te laten variëren krijgen we twee soorten *functies*, waarbij we de *variërende* grootheid met de letter x aanduiden:

- een *vaste* waarde r voor de exponent en een *variërend grondtal* x (met x in de plaats van a).
  Voor $r = 2$ krijgen we dan de *kwadraatfunctie* $x \mapsto x^2$.
  Voor $r = -1$ krijgen we $x \mapsto x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, en voor $r = 1/2$ wordt dat $x \mapsto x^{1/2} = \sqrt{x}$.
  In het algemeen bekomen we een **machtsfunctie** met *exponent* r: $x \mapsto x^r$.
- een *vaste* waarde a voor het grondtal en een *variërende exponent* x (met x in de plaats van r).
  Voor $a = 2$ krijgen we dan de functie $x \mapsto 2^x$.
  Deze functie noemen we een **exponentiële functie**, en we noteren ze ook als $\exp_2$:
  $$\exp_2 : x \mapsto 2^x$$
  Voor $a = 10$ krijgen we bijvoorbeeld $\exp_{10} : x \mapsto 10^x$.
  In het algemeen bekomen we een **exponentiële functie** $\exp_a$ met *grondtal* a: $\exp_a : x \mapsto a^x$.

Definitie 4.5.1 (Exponentiële functie)**.**
De **exponentiële functie met grondtal** a (met $a > 0$ en $a \neq 1$), genoteerd $\exp_a$, is de reële functie

$$\exp_a : x \mapsto a^x$$

waarbij x alle reële waarden mag aannemen.

Opmerking 4.5.1.

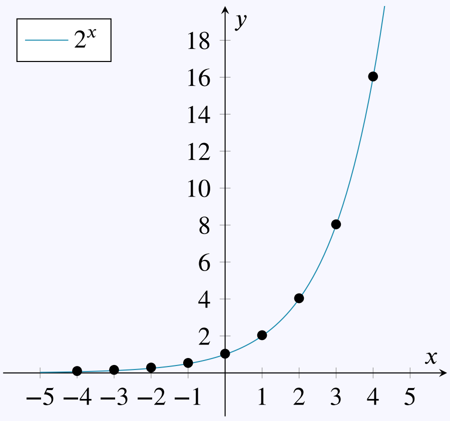
- In de praktijk worden zowel de notaties a^x als $\exp_a(x)$ gebruikt voor exponentiële functies.
- De haakjes rond het argument van $\exp_a$ worden dikwijls weggelaten: $\exp_a x = \exp_a(x) = a^x$.
- Het grondtal a van een exponentiële functie moet worden beperkt:
  - a mag niet negatief zijn, want dat geeft problemen voor *niet-gehele* waarden van de exponent x (bv. $(-3)^{\frac{1}{2}}$)
  - a mag niet gelijk zijn aan 0, want dat geeft problemen voor *negatieve* exponenten x (bv. $0^{-1} = 1/0$)
  - a mag niet gelijk zijn aan 1, want $1^x = 1$ voor alle x, en de functie $f : x \mapsto 1^x = 1$ is een *constante functie* met waarde 1. Om technische redenen is het beter die functie niet te beschouwen als een exponentiële functie.

We bestuderen nu de *grafiek* van een exponentiële functie $\exp_a$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1.

Voorbeeld 4.5.1 (Het geval $a > 1$: grafiek van de exponentiële functie $\exp_2$)**.**
We nemen als voorbeeld $a = 2$, en schetsen de grafiek van de exponentiële functie $\exp_2 : x \mapsto 2^x$ met grondtal 2 door een aantal punten van de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16

Dit levert een aantal punten op op de gezochte grafiek, namelijk de bolletjes op de figuur. Met een rekentoestel kunnen we ook functiewaarden berekenen voor niet-gehele waarden van x, bv. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.4142$. Op die manier krijgen we een vrij precies beeld van de grafiek:

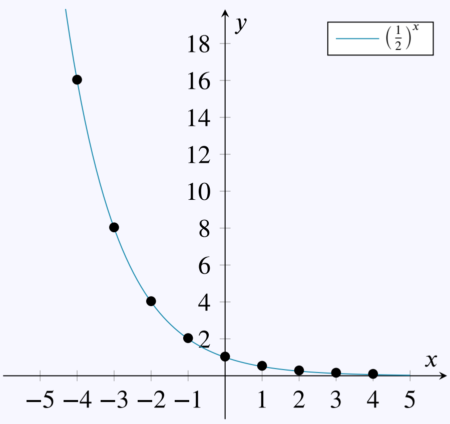


Voorbeeld 4.5.2 (Het geval $0 < a < 1$: grafiek van de exponentiële functie $\exp_{\frac{1}{2}}$).

We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$, en schetsen de grafiek van de exponentiële functie $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten op de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625

Dit levert weer een aantal punten op op de grafiek. Met een rekentoestel kunnen we opnieuw functiewaarden voor niet-gehele waarden van x berekenen, bv. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7071$. Op die manier krijgen we weer een vrij precies beeld van de grafiek:



4.5 Exponentiële functies

Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = \frac{1}{2}$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* exponentiële functies:

Eigenschap 4.5.1 (Eigenschappen van exponentiële functies).

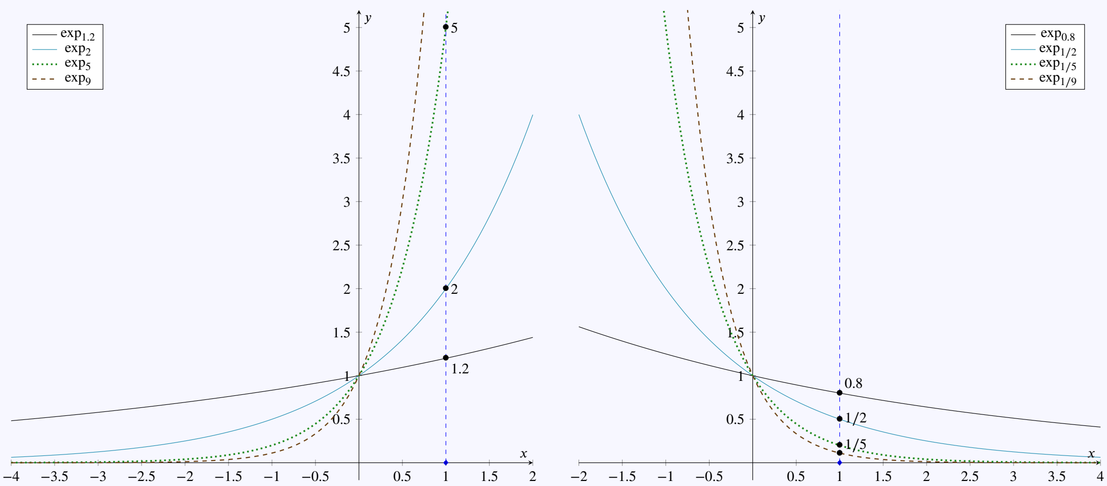
(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff a^x < a^y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\exp_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff a^x > a^y$
(3) Het **domein** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$: a^x is gedefinieerd voor alle reële getallen x
(4) Het **beeld** van $\exp_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: a^x kan alleen strikt positieve waarden aannemen

De grafiek van $\exp_a$
(5) snijdt **de y-as** in het punt $(0, 1)$: $a^0 = 1$
(6) snijdt **de x-as** niet: a^x is nooit gelijk aan 0
(7) snijdt **de rechte $x = 1$** in het punt $(1, a)$: $a^1 = a$

Omdat $\mathbb{R}$ het domein is van $\exp_a$ en $\mathbb{R}_0^+$ het beeld, is het volledige functievoorschrift

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto a^x.$$

Voorbeeld 4.5.3 (Voorbeelden van exponentiële functies met verschillende grondtallen).



Omdat $\exp_a(0) = a^0 = 1$ gaan alle grafieken door het punt $(0, 1)$, en omdat $\exp_a(1) = a^1 = a$ snijdt elke grafiek de verticale rechte $x = 1$ in het punt $(1, a)$.

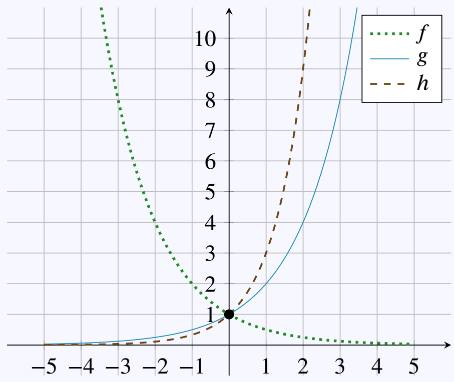
In het geval $a > 1$ worden de functiewaarden willekeurig klein voor erg negatieve x. Als $0 < a < 1$ worden de functiewaarden willekeurig klein zodra x voldoende groot is. Het begrip *asymptoot* dat we later zullen definiëren beschrijft dit fenomeen meer exact.

We weten nu voor een *gegeven grondtal* a hoe de *grafiek* van $\exp_a$ er uit ziet. Dat hangt erg af van de waarde van het grondtal a, namelijk of $0 < a < 1$ dan wel $a > 1$. Het geval $a = 1$ levert de constante functie $x \mapsto 1$ en is het grensgeval tussen dalende functies voor $a < 1$ en stijgende functies voor $a > 1$.

Stel dat we omgekeerd voor een *gegeven grafiek* van een exponentiële functie willen weten wat het *grondtal* is. Het stijgen of dalen van de grafiek bepaalt al onmiddellijk of het grondtal tussen 0 en 1 ligt dan wel groter is dan 1. Maar er is meer: omdat $\exp_a(1) = a^1 = a$, is het grondtal a gelijk aan de y-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de verticale rechte $x = 1$ (i.e. door $(1, 0)$). Zelfs als we de *exacte* waarde niet kunnen aflezen op de grafiek, is minstens een goede schatting meestal wel mogelijk.

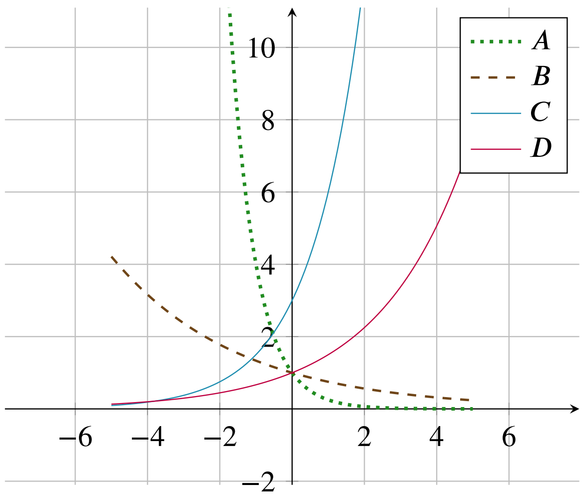
Voorbeeld 4.5.4 (Onderscheiden van exponentiële functies).

Hieronder worden de grafieken geschetst van drie functies $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \mapsto 2^x$ en $x \mapsto 3^x$. We vragen ons af welke grafiek bij welke functie hoort.



We kunnen eerst de grafieken onderscheiden op grond van hun vorm. De grafieken van g en h zijn stijgend, hun grondtal is dus groter dan 1. De grafiek van f is dalend, dus is dat grondtal kleiner dan 1. Daarmee is het functievoorschrift van f gevonden, want er is maar één keuzemogelijkheid met $a < 1$, namelijk $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
Om de grafieken van g en h te onderscheiden, kijken we naar de y-waarde voor $x = 1$: $g(1) = 2$ en $h(1) = 3$. h is dus de functie $x \mapsto 3^x$ en g is de functie $x \mapsto 2^x$.
Je kan ook redeneren dat 3 groter is dan 2 waardoor de functie $x \mapsto 3^x$ sneller stijgt dan de functie $x \mapsto 2^x$ en dat daarom h bij $x \mapsto 3^x$ moet horen.

Oefening 4.5.1. Met welke grafieken komen volgende functies overeen ?



1. $x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$: | A | B | C | D |

2. $x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^x$: | A | B | C | D |

3. $x \mapsto 3 \cdot 2^x$: | A | B | C | D |

4. $x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right)^x$: | A | B | C | D |

Voor grondtal a gelijk aan de specifieke waarde $e = 2.7182818\ldots$ verkrijgen we een veel voorkomende exponentiële functie $x \mapsto e^x$, die we meestal *de* exponentiële functie noemen, en korter noteren als exp:

Definitie 4.5.2. ***De* exponentiële functie** is de functie

$$\exp : x \mapsto e^x$$

met grondtal $e = 2.71\ldots$ (getal van Euler) (en ze wordt dus genoteerd *zonder subscript* e).

Door een positief getal a te schrijven als $e^{\ln a}$ wordt *elke* macht *een macht van* e:

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$$

en zo wordt een *willekeurige* exponentiële functie een *herschaling* van *de* exponentiële functie $x \mapsto e^x$:

Eigenschap 4.5.2. Elke exponentiële functie $x \mapsto a^x$ kan geschreven worden als $x \mapsto e^{kx}$ met $k = \ln a$.

Voorbeeld 4.5.5. De functie $x \mapsto 3^x$ is gelijk aan de functie $x \mapsto e^{\ln 3\, x}$.

4.6 Logaritmische functies

Door in de uitdrukking voor de logaritme $\log_a b$ het grondtal a constant te houden en het getal b te laten variëren, bekomen we een *functie*, namelijk een *logaritmische functie*:

Definitie 4.6.1 (Logaritmische functie)**.**

De **logaritmische functie met grondtal** a ($a > 0$ en $a \neq 1$), genoteerd als $\log_a$, is de reële functie

$$\log_a : x \mapsto \log_a x$$

waarbij x enkel *strikt positieve waarden* mag aannemen.

Opmerking 4.6.1. Bij de invoering van de logaritme $\log_a b$ hebben we de noodzaak besproken om bovenstaande beperkingen op te leggen aan het grondtal a en het argument x.

De haakjes rond het argument van de functie $\log_a$ worden dikwijls weggelaten: $\log_a x = \log_a(x)$.

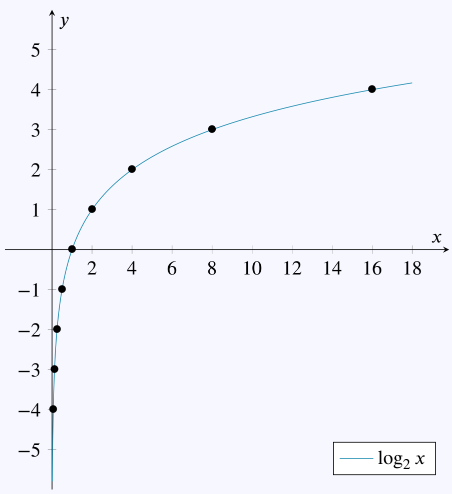
We bestuderen nu de *grafiek* van een logaritmische functie $\log_a$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1.

Voorbeeld 4.6.1 (Het geval $a > 1$: grafiek van de logaritmische functie $\log_2$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = 2$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $\log_2 : x \mapsto \log_2(x)$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. Het ligt voor de hand om voor de x-waarden machten van 2 te kiezen, omdat daarvoor de 2-logaritme gemakkelijk te bepalen is.

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_2(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Dit levert voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:

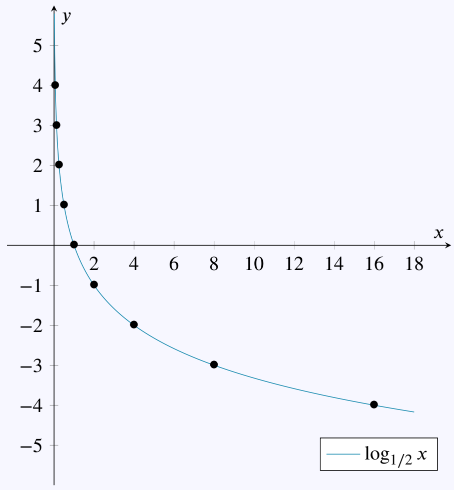


Voorbeeld 4.6.2 (Het geval $0 < a < 1$: grafiek van de logaritmische functie $\log_{1/2}(x)$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $\log_{1/2} : x \mapsto \log_{1/2}(x)$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. We kunnen dezelfde tabel hergebruiken:

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_{1/2}(x)$	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4

Dit levert opnieuw voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:



Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = 1/2$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* logaritmische functies:

Eigenschap 4.6.1 (Eigenschappen van logaritmische functies).

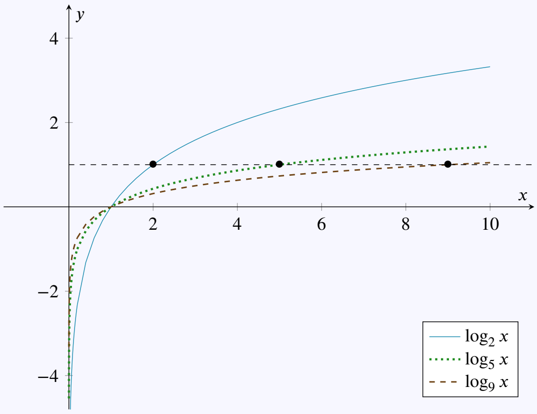
(1) Als $a > 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt stijgend**: $x < y \iff \log_a x < \log_a y$
(2) Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\log_a$ **strikt dalend**: $x < y \iff \log_a x > \log_a y$
(3) Het **domein** van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$: de functiewaarde $\log_a x$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$
(4) Het **beeld** van $\log_a$ is $\mathbb{R}$: de functiewaarde $\log_a x$ kan alle reële waarden aannemen

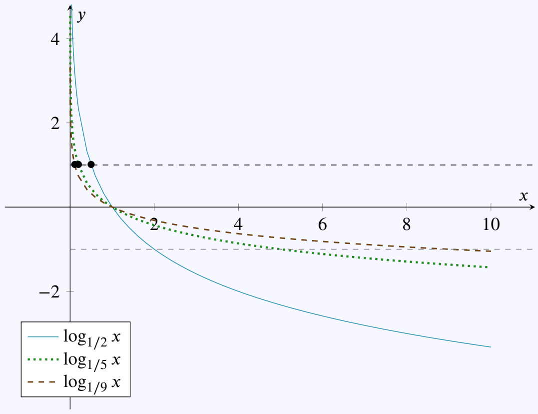
De grafiek van $\log_a$
(5) snijdt **de x-as** in het punt $(1, 0)$: $\log_a 1 = 0$
(6) snijdt **de y-as** niet: voor $x = 0$ is $\log_a x$ niet gedefinieerd
(7) snijdt **de rechte $y = 1$** in het punt $(a, 1)$: $\log_a(a) = 1$

Omdat $\mathbb{R}_0^+$ het domein is van $\log_a$ en $\mathbb{R}$ het beeld, is het volledige functievoorschrift

$$\log_a : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a x.$$

Voorbeeld 4.6.3 (Voorbeelden van logaritmische functies met verschillende grondtallen).





De bovenstaande grafieken tonen aan dat voor grondtal $a > 1$ en x zeer klein de grafiek naar $-\infty$ gaat. Indien het grondtal $0 < a < 1$ is, dan zal voor x zeer klein de grafiek naar $+\infty$ gaan. In een latere module zal de terminologie van asymptoten ingevoerd worden, wat ons toelaat om dit meer exact te bespreken.

Definitie 4.6.2. De **natuurlijke logaritme** is de functie

$$\ln : x \mapsto \ln x$$

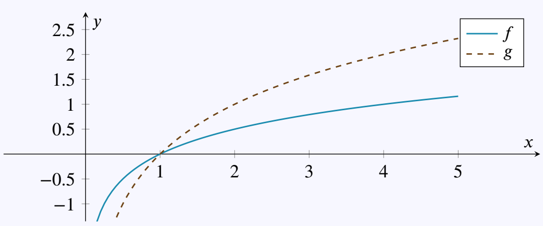
waarbij $\ln x \overset{\text{def}}{=} \log_e x$ met $e = 2.71\ldots$ (getal van Euler).

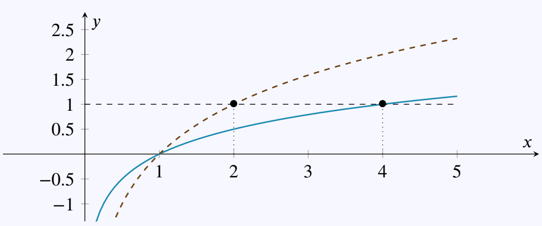
We weten nu voor een *gegeven grondtal* a hoe de *grafiek* van een logaritmische functie $\log_a$ er uit ziet. Dat hangt erg af van de waarde van het grondtal a, namelijk of $0 < a < 1$ dan wel $a > 1$.

Stel dat we omgekeerd voor een *gegeven grafiek* van een logaritmische functie willen weten wat het *grondtal* is. Het stijgen of dalen van de grafiek bepaalt al onmiddellijk of het grondtal tussen 0 en 1 ligt dan wel groter is dan 1. Om de precieze waarde van a te vinden volstaat het te zoeken naar **de waarde van x die een functiewaarde 1 geeft:** immers, als $\log_a x = 1$, dan $x = a^1 = a$. We zoeken dus de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de horizontale rechte $y = 1$. Ook als de grafiek niet gedetailleerd genoeg is om de exacte waarde van a terug te vinden, blijft een goede schatting wel mogelijk op deze manier.

Voorbeeld 4.6.4 (Aflezen grondtal van grafiek)**.**

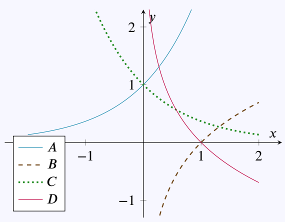
Hieronder worden de grafieken geschetst van de twee functies $x \mapsto \log_4(x)$ en $x \mapsto \log_2(x)$. We vragen ons af welke grafiek bij welke functie hoort.





Omdat beide grondtallen groter zijn dan 1, kunnen we beide grafieken niet onderscheiden op grond van hun vorm. We weten echter dat het grondtal terug te vinden is als de x-waarde waarvoor de functiewaarde gelijk is aan 1. We tekenen daarom de horizontale rechte $y = 1$ en kijken waar deze de twee grafieken snijdt. De x-coördinaat van het snijpunt komt overeen met het grondtal. Het blijkt dat f de grafiek is van $x \mapsto \log_4(x)$ en g de grafiek van $x \mapsto \log_2(x)$.

Voorbeeld 4.6.5. Welke grafiek hoort bij de functie $x \mapsto \ln(x)$?



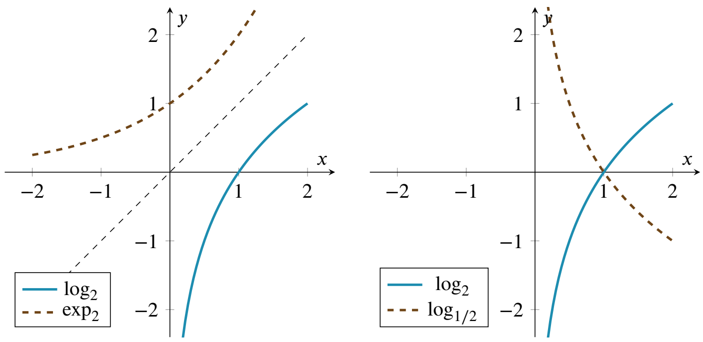
Deze vraag kunnen we beantwoorden louter op basis van de vorm van de grafieken. Omdat $x \mapsto \ln(x)$ een logaritmische functie is, is deze enkel gedefinieerd voor strikt positieve waarden van x. Omdat het grondtal $e > 1$, moet de grafiek stijgend zijn. Enkel grafiek B voldoet hieraan.

Als je in de formules $\log_a a^x = x$ en $a^{\log_a x}$ de machten schrijft met de $\exp_a$ krijg je volgende eigenschap:

Eigenschap 4.6.2. De functies $\log_a$ en $\exp_a$ zijn elkaars *inverse*:

$$\begin{aligned} \log_a(\exp_a x) &= x \quad & x \in \mathbb{R} \\ \exp_a(\log_a x) &= x \quad & x \in \mathbb{R}_0^+ \end{aligned}$$

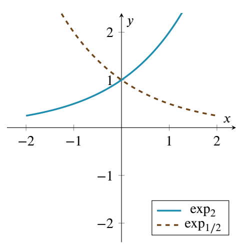
Als inverse functies zijn de grafieken elkaars *spiegelbeeld ten opzichte van de eerste bissectrice*.



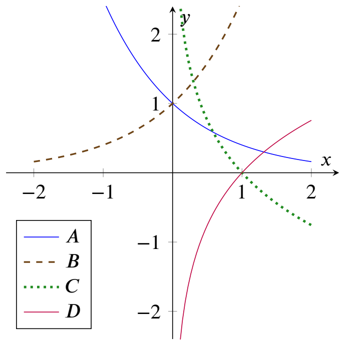
Uit de formule voor verandering van grondtal $\log_{1/a} x = \dfrac{\log_a x}{\log_a 1/a} = \dfrac{\log_a x}{-1} = -\log_a x$ volgt:

Eigenschap 4.6.3. De functies $\log_a$ en $\log_{1/a}$ zijn elkaars *tegengestelde*, en hun grafieken zijn dus elkaars *spiegelbeeld ten opzichte van de x-as*.

Merk op dat iets gelijkaardigs geldt voor de exponentiële functie: $\exp_{1/a}(x) = (1/a)^x = a^{-x} = \exp_a(-x)$, en dus heeft $\exp_{1/a}$ in x dezelfde waarde als $\exp_a$ in $-x$, en dus zijn de grafieken van $\exp_a$ en $\exp_{1/a}$ onderling *gespiegeld ten opzichte van de y-as*:



Oefening 4.6.1. Met welke grafieken komen volgende functies overeen ?



1. $x \mapsto \left(\frac{2}{5}\right)^x$: $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}$

2. $x \mapsto \log_{2/5}(x)$: $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}$

3. $x \mapsto \log_{5/2}(x)$: $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}$

4. $x \mapsto \left(\frac{5}{2}\right)^x$: $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}$

Voorbeeld 4.6.6 (Domein logaritmische functie)**.**

Bepaal het domein van de functie $x \mapsto \log_3\left(\frac{3}{4-x}\right)$. Bepaal dus alle mogelijke reële waarden van x waarvoor het functievoorschrift geldig is.

- De noemer van de breuk binnen de logaritme mag niet nul mag zijn: $4 - x \neq 0$ en dus $x \neq 4$.
- Een logaritme kan enkel berekend worden voor een strikt positief getal, en dus moet $\frac{3}{4-x} > 0$. Omdat de teller positief is, moet ook de noemer dat dus zijn: $4 - x > 0$ of $x < 4$.

Alleen als aan deze twee voorwaarden voldaan is, kan de functiewaarde bepaald worden.

Het domein van deze functie is dus het (oneindige) interval $]-\infty, 4[$.

Oefening 4.6.2. Bepaal het domein van de functie $x \mapsto \ln(\sqrt{2x} - 4)$: ……

4.7 Exponentiële vergelijkingen

Een **exponentiële vergelijking** is een vergelijking waarbij de onbekende minstens één keer voorkomt in de *exponent* van een uitdrukking.
Voorbeelden van dergelijke vergelijkingen zijn $3^x - 81 = 0$, $3^x = 81x$ en $2^x = 4 \cdot 3^{x-1}$.

Niet alle exponentiële vergelijkingen kunnen exact opgelost worden. Voor de oplossing van $3^x = 81x$ bestaat bijvoorbeeld geen exacte formule. Als een exponentiële vergelijking *wel* exact kan worden opgelost, wordt ergens in de berekening de *logaritme* gebruikt om *de onbekende uit de exponent te verdrijven*. We illustreren enkele oplossingsmethoden aan de hand van onderstaande voorbeelden.

Voorbeeld 4.7.1. Los op: $3^x - 81 = 0$.

In deze vergelijking komt de onbekende x slechts één keer voor, en wel als exponent. Dergelijke vergelijkingen zijn eenvoudig op te lossen door de macht waarbij x in de exponent voorkomt te isoleren en dan een gepaste logaritme te nemen:

$$\begin{array}{rcll} 3^x - 81 &=& 0 & \\ 3^x &=& 81 & \text{(breng naar het andere lid)} \\ \log_3(3^x) &=& \log_3 81 & \text{(neem links en rechts } \log_3 \text{)} \\ x &=& \log_3 3^4 = 4 & \text{(want } \log_3 3^x = x, \text{ en } 81 = 9^2 = 3^4) \end{array}$$

omdat x voorkomt als exponent met grondtal 3 werd hier de logaritme met grondtal 3 toegepast op linker- en rechterlid. Maar omdat *elke* logaritme exponenten voorop brengt, kan je het grondtal van de logaritme eigenlijk kiezen. Hieronder is dezelfde vergelijking opgelost met de logaritme log met grondtal 10 en met de natuurlijk logaritme ln:

$$\begin{array}{rcl} 3^x &=& 81 \\ \log(3^x) &=& \log 81 \\ x \cdot \log 3 &=& \log 81 \\ && \\ x &=& \dfrac{\log 81}{\log 3} \end{array} \qquad \text{of ook} \qquad \begin{array}{rcl} 3^x &=& 81 \\ \ln(3^x) &=& \ln 81 \\ x \cdot \ln 3 &=& \ln 81 \\ && \\ x &=& \dfrac{\ln 81}{\ln 3} \end{array}$$

Het resultaat ziet er telkens anders uit, maar het is wel degelijk steeds dezelfde oplossing $x = 4$, want uit de formule voor verandering van grondtal bij logaritmen volgt dat

$$\frac{\ln 81}{\ln 3} = \frac{\log 81}{\log 3} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4.$$

Voorbeeld 4.7.2. Los op: $3^x = 81x$.

In deze vergelijking komt de onbekende x twee keer voor: eenmaal in de exponent van een macht met grondtal 3 in het linkerlid en eenmaal als lineaire term in het rechterlid. Dergelijke vergelijking is in het algemeen niet exact op te lossen. Uit het vorige voorbeeld blijkt dat de onbekende x uit de exponent kan gehaald worden door een logaritme toe te passen. Laat ons dat doen in dit geval:

$$\begin{array}{rcll} 3^x &=& 81x & \\ \log_3(3^x) &=& \log_3(81x) & \text{(neem links en rechts } \log_3 \text{)} \\ x &=& \log_3 81 + \log_3 x & (\log_3 3^x = x, \log ab = \log a + \log b) \\ x &=& 4 + \log_3 x & (81 = 3^4) \end{array}$$

De onbekende is nu uit de exponent verdwenen, maar er is een nieuwe complicatie: de onbekende komt nu voor binnen de logaritme. Je zou de onbekende x uit de logaritme kunnen krijgen door een exponentiële functie te gebruiken. Maar dan wordt de x in het linkerlid terug een exponent. Een exacte oplossing is op deze manier niet mogelijk. Er bestaan wel technieken om de vergelijking *benaderend* op te lossen, maar deze behoren niet tot de leerstof van deze cursus. Men kan aantonen dat er een unieke oplossing is: $x \approx 0.0125\ldots$

Voorbeeld 4.7.3. Los op: $2^x = 4 \cdot 3^{x-1}$.

In deze vergelijking komt de onbekende twee keer voor, telkens in de exponent van een macht, maar voor twee verschillende grondtallen. Dergelijk vergelijking kan op twee manieren worden opgelost.

De eerste oplossingsmethode herschrijft de vergelijking zodanig dat er maar één macht meer voorkomt. We kunnen dan, zoals in het eerste voorbeeld, eenvoudigweg de logaritme nemen om de vergelijking op te lossen.

$$\begin{aligned}
2^x &= 4 \cdot 3^{x-1} = 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = \frac{4}{3} \cdot 3^x && \text{(rechterlid herschrijven)} \\
\frac{2^x}{3^x} &= \frac{4}{3} && \text{(breng onbekenden naar linkerlid)} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^x &= \frac{4}{3} && \left(\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x\right) \\
x &= \log_{2/3}\left(\frac{4}{3}\right) \approx -0.7095\ldots && \text{(bereken met een rekentoestel)}
\end{aligned}$$

Een tweede oplossingsmethode bestaat erin de logaritme te nemen van linker- en rechterlid met de bedoeling van de onbekende x uit de exponenten te halen. Uit het eerste voorbeeld weten we dat het grondtal van de logaritme geen belang heeft. We gebruiken hier de logaritme met grondtal 10. We krijgen in dit geval een *lineaire* vergelijking in x die we zonder problemen kunnen oplossen.

$$\begin{aligned}
2^x &= 4 \cdot 3^{x-1} \\
\log(2^x) &= \log(4 \cdot 3^{x-1}) = \log 4 + \log(3^{x-1}) \\
x \cdot \log 2 &= \log 4 + (x-1) \cdot \log 3 = x \cdot \log 3 + (\log 4 - \log 3) \\
x \cdot \log 2 - x \cdot \log 3 &= \log 4 - \log 3 \\
x \cdot (\log 2 - \log 3) &= \log 4 - \log 3 \\
x &= \frac{\log 4 - \log 3}{\log 2 - \log 3}.
\end{aligned}$$

Opnieuw ziet de gevonden oplossing er helemaal anders uit dan wat we met de eerste oplossingsmethode hebben gevonden. Met behulp van de rekenregels voor logaritmen kan je echter zien dat beide oplossingen gelijk zijn.

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

Module 5
Veeltermen

(Versie 2024/10/24HB.16)

5.1 Intro veeltermen

Een interessante eerste stap in de verkenning van de Wondere Wereld van de Wiskunde is een kennismaking met zogenaamde *veeltermen*. Veeltermen zijn ideaal om te leren *rekenen met letters*. Om historische redenen spreken we meestal over 'veeltermen in x', dat zijn combinaties van machten van de letter x. Voorbeelden zijn

$$2x + 3$$
$$x^2 + 6x + 9$$
$$1492x^{42} + 1302x^2 + 1830$$

Veeltermen worden gebruikt bij

- *functies*: $x \mapsto 2x + 6$ is een *eerstegraadsfunctie*, $x \mapsto x^2 - 4$ is een *kwadratische functie*
- *oplossen van vergelijkingen*: $2x + 6 = 0$ enkel als $x = -3$, en $x^2 - 4 = 0$ enkel als $x = \pm 2$
- *meetkunde*: $y = 2x + 6$ is de vergelijking van een *rechte* en $y = x^2 - 4$ is de vergelijking van een *parabool*
- *rekenen*: $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$. We zeggen dat de veelterm $x^2 - 4$ een *veelvoud* is van de veelterm $x - 2$, en dat de veelterm $x - 2$ dus een deler is van $x^2 - 4$. De veelterm $x + 2$ is het quotiënt van $x^2 - 4$ en $x - 2$. We schrijven voor veeltermen dat $x + 2 = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, net zoals we voor getallen schrijven dat $6 = \frac{12}{2}$.

Bij elk van bovenstaande topics vormen de veeltermen een eenvoudig en typisch onderdeel van een veel ruimer studiegebied. We zullen verder inderdaad veel algemenere functies, vergelijkingen en meetkundige objecten bestuderen. De veeltermen – in het bijzonder de veeltermen van de eerste en de tweede graad – vormen telkens een interessante eerste kennismaking.

In wat volgt hebben we de leerstof over veeltermen als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding

(2) Eigenschappen van veeltermen van de eerste graad

(3) Eigenschappen van veeltermen van de tweede graad

(4) Een algemene definitie van veeltermen

(5) Eigenschappen van de deling van veeltermen

(6) Het algoritme voor de Euclidische deling van veeltermen

(7) Een belangrijk speciaal geval van deling door lineaire factoren

(8) Het algoritme van Horner voor veeltermen

5.2 Eerstegraadsveeltermen

De meest eenvoudige veeltermen zijn die van de *eerste graad*. We bespreken hier enkele eigenschappen, en leggen het verband tussen de verwante begrippen *veelterm*, *functie* en *vergelijking*.

Definitie 5.2.1. Voor reële getallen a en b met $a \neq 0$ geldt:

- Een **eerstegraads*veelterm* in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

  $ax + b$ Vb: $2x - 3$

- Aan dergelijke veelterm is volgende **eerstegraads*functie*** geassocieerd:

  $x \mapsto ax + b$ Vb: $x \mapsto 2x - 3$

- Een **eerstegraads*vergelijking*** (of ook ***lineaire* vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

  $ax + b = 0$ Vb: $2x - 3 = 0$

Opmerking 5.2.1.

- Het woord *lineair* betekent in eerste instantie 'zoals een *lijn*', dus 'zoals een rechte'. Omdat een rechte een vergelijking heeft van de eerste graad, is het gebruik van het woord *lineair* uitgebreid naar 'van de eerste graad'. Voor vergelijkingen zijn 'lineair' en 'van de eerste graad' dus synoniemen. Maar voor functies heeft het begrip lineair in de wiskunde een beperktere en meer technische betekenis. Daarom vermijden we het gebruik van het woord *lineair* voor functies en spreken we steeds over *eerstegraadsfuncties*. In sommige handboeken worden echter andere afspraken gemaakt.

- In de uitdrukking $ax + b$ heeft de letter x de rol van *variabele* of *onbekende*, terwijl de letters a en b *parameters* of *constanten* zijn en dus *willekeurige getallen* voorstellen. In plaats van x worden soms ook y, z of t gebruikt, en voor a en b komen ook $k, l, p, q, m, \alpha, \beta, \ldots$ dikwijls voor.

  Bij functies moet je dus steeds duidelijk aangeven *welke letter* de rol van variabele of onbekende heeft, en welke letters als parameters worden gebruikt. De notatie $x \mapsto ax + b$ zegt precies dat x de variabele is, terwijl z de variabele is in $z \mapsto pz + q$, en a de variabele is in $a \mapsto 2a + 3$.

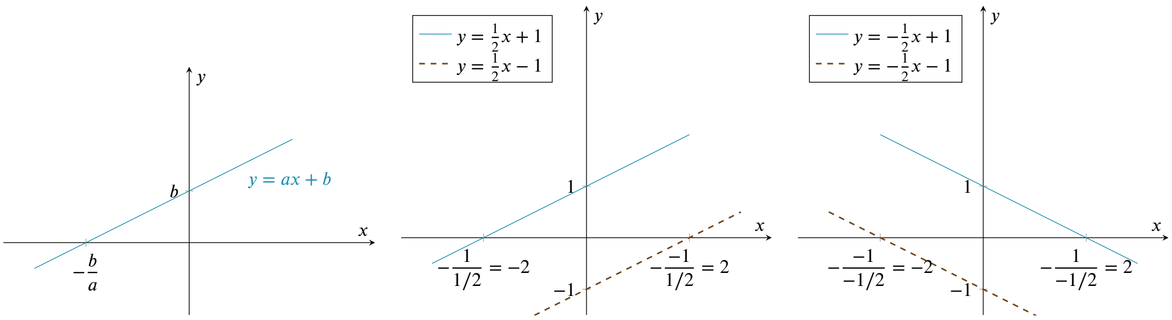
Eigenschap 5.2.1. Voor een eerstegraadsfunctie $x \mapsto ax + b$, met $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, geldt:

- de grafiek van de functie is een *rechte* met vergelijking $y = ax + b$ en **richtingscoëfficiënt** a.
- als a positief is, is de functie strikt *stijgend* en als a negatief is de functie strikt *dalend*.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de y-as is het punt $(0, b)$.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de x-as is het punt $(-\frac{b}{a}, 0)$. Het getal $-\frac{b}{a}$ is ook het (enige) *nulpunt* van de functie, en de (enige) oplossing van de vergelijking $ax + b = 0$.

Dit leidt tot volgend **tekenverloop** (ook *tekentabel*) voor de functie $x \mapsto ax + b$:

x		$-b/a$	
$ax + b$ met $a > 0$	$-$	0	$+$
$ax + b$ met $a < 0$	$+$	0	$-$

5.2 Eerstegraadsveeltermen



Opmerking 5.2.2.

- We spreken meestal van *nulpunten* van een functie, *oplossingen* van een vergelijking en *wortels* van veeltermen, maar deze begrippen betekenen hetzelfde.
- als $a = 0$ reduceert de functie zich tot $x \mapsto 0x + b = b$, en dat is geen eerstegraadsfunctie maar een *constante* functie. De grafiek is dan de *horizontale* rechte met vergelijking $y = b$. Deze functie heeft *geen nulpunten* (en de grafiek dus geen snijpunten met de x-as), tenzij ook $b = 0$. In dat laatste geval zijn er *oneindig veel nulpunten* (en dus snijpunten), want dan is de functie de nulfunctie $x \mapsto 0$.

Voorbeeld 5.2.1.

1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $8 - 4x < 0$.

Uitwerking: Je kan het tekenverloop maken van de functie $x \mapsto ax + b = -4x + 8$. Het nulpunt is $-b/a = 8/4 = 2$, en de coëfficiënt $a = -4$ is negatief, dus is de tekentabel

x		2	
$8 - 4x$	+	0	−

De oplossingsverzameling is dus $V =]2, +\infty[$.

In dit geval kan je natuurlijk veel beter de ongelijkheid oplossen via

$$\begin{aligned} 8 - 4x < 0 &\iff 8 < 4x \\ &\iff 2 < x \end{aligned}$$

De tekentabel wordt pas nuttig in meer ingewikkelde gevallen om eenvoudig een boekhouding bij te houden van de verschillende nulpunten en tekens.

5.3 Tweedegraadsveeltermen

Vergelijkingen van de eerste graad in één onbekende hebben steeds één oplossing. Voor vergelijkingen van de tweede graad is de situatie iets ingewikkelder.

Definitie 5.3.1. Voor reële getallen a, b, c met $a \neq 0$ geldt:

- Een **tweedegraadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

  $\boxed{ax^2 + bx + c}$ Vb: $2x^2 - 3x + 4$

- Aan dergelijke veelterm is volgende **(kwadratische) functie** geassocieerd:

  $\boxed{x \mapsto ax^2 + bx + c}$ Vb: $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$

- Een **tweedegraadsvergelijking** (ook **vierkantsvergelijking** of **kwadratische vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

  $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ Vb: $2x^2 - 3x + 4 = 0$

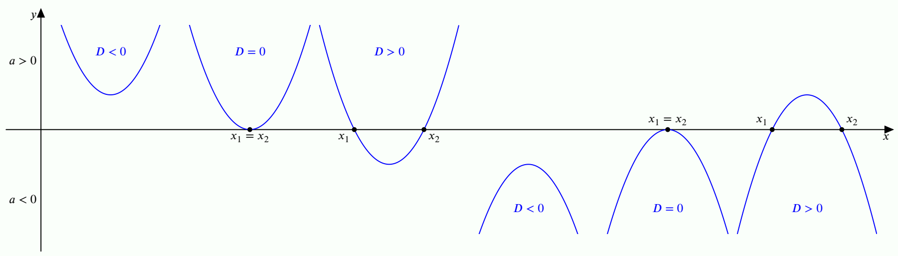
Eigenschap 5.3.1. Voor de functie $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ geldt:

- de grafiek van f is een **parabool** met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$.
- als a negatief is, is dat een **bergparabool**, als a positief is, is dat een **dalparabool**.
- de nulpunten van f zijn de oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, en die vinden we met behulp van de **discriminant** $\boxed{D = b^2 - 4ac}$ waarbij geldt dat
  - Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende reële** nulpunten.
  - Als $D = 0$ zijn er **twee gelijke reële** nulpunten.
  - Als $D < 0$ zijn er **geen reële** nulpunten.
- als $D \geq 0$ worden de nulpunten (of wortels) gegeven door

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad \text{(wortelformule)}$$

  Deze nulpunten zijn de snijpunten van de grafiek van $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ met de x-as. Als $D = 0$ is $x_1 = x_2$ en hebben we slechts 1 snijpunt met de x-as.

- de functie f heeft volgend **tekenverloop** (of **tekentabel**):



  - Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende nulpunten** $x_1 < x_2$, en volgend tekenverloop:

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$+$	0	$-$

– Als $D = 0$ zijn er **twee samenvallende nulpunten** $x_1 = x_2$, en volgend tekenverloop:

x		$x_1 = x_2$	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$	0	$-$

– Als $D < 0$ zijn er **geen nulpunten**, en volgend tekenverloop:

x	
$ax^2 + bx + c$ met $a > 0$	$+$
$ax^2 + bx + c$ met $a < 0$	$-$

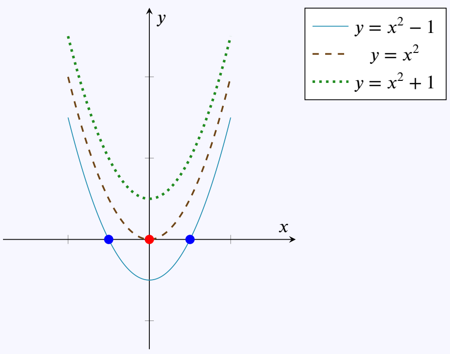
- de **top** van de parabool heeft als coördinaten $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- bij een bergparabool is $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ het **maximum** van f, bij een dalparabool het **minimum**.
- de **symmetrie-as** is de verticale rechte door de top, dus met vergelijking $x = -\frac{b}{2a}$.
- het bereik van een kwadratische functie gaat van min oneindig tot het maximum voor een bergparabool en van het minimum tot plus oneindig voor een dalparabool.
- de parabool snijdt de y-as in het punt $(0, c)$. (Vul $x = 0$ in in de vergelijking $ax^2 + bx + c$.)
- de parabool snijdt de x-as in de nulpunten van f. (Per definitie van het begrip nulpunt.)

Voorbeeld 5.3.1.

1. Bereken de nulpunten van de functies $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 - 1$ en $x \mapsto x^2 + 1$, en maak een tekening.

Uitwerking: De nulpunten van $x \mapsto x^2$ zijn 0 (twee keer, maar aan elkaar gelijk), die van $x \mapsto x^2 - 1$ zijn ± 1, en $x \mapsto x^2 + 1$ heeft geen reële nulpunten.

De grafieken van de overeenkomstige functies – waarop het aantal nulpunten direct afleesbaar is – zijn:



2. Geef de oplossingen van de vergelijking $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Uitwerking: De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -2$ en $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -3$.

3. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

5.3 Tweedegraadsveeltermen

Uitwerking: We vinden dat $D = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$. Dus $x_1 = x_2 = \dfrac{-6}{2 \cdot 9} = \dfrac{-1}{3}$.

4. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x^2 + 5x + 6 \geqslant 0$.

Uitwerking: De nulpunten zijn -2 en -3. De coëfficiënt $a = 1$ is positief, dus is de tekentabel

x		$x_1 = -3$		$x_2 = -2$	
$x^2 + 5x + 6$	$+$	0	$-$	0	$+$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$.

Eigenschap 5.3.2.
Als x_1 en x_2 de wortels zijn van $ax^2 + bx + c$, dan kunnen we deze veelterm **ontbinden in factoren**:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ Vb: $2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 1)(x - 2)$

Voorbeeld 5.3.2. Ontbind $2x^2 + 5x + 3$ in factoren.

Uitwerking:

De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \dfrac{-5+1}{4} = -1$ en $x_2 = \dfrac{-5-1}{4} = -\dfrac{3}{2}$, en dus

$$2x^2 + 5x + 3 = 2\,(x - (-1))\left(x - (-\frac{3}{2})\right) = 2\,(x+1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x+1)\,(2x+3)$$

Opmerking 5.3.1. Een veelgemaakte fout bij het ontbinden van factoren is het vergeten van de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm. Herneem vorig voorbeeld: Zowel $(x+1)(x+\frac{3}{2})$ als $2(x+1)(x+\frac{3}{2})$ hebben nulpunten -1 en $-\frac{3}{2}$, maar enkel $2(x+1)(x+\frac{3}{2}) = 2x^2 + 5x + 3$.

Je kan narekenen dat $(x+1)(x+\frac{3}{2}) = x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \neq 2x^2 + 5x + 3$.

Opmerking 5.3.2. Omdat $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2$ vind je door gelijkstelling van de gelijknamige coëfficiënten van x ook dat

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{(som van de wortels)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{(product van de wortels)}$$

Het is dus niet nodig om de wortels zelf te berekenen als je enkel geïnteresseerd zou zijn in de som of het product van de wortels: die kan je immers beide direct afleiden uit de vergelijking.

Als $a = 1$ (en daar kan je altijd voor zorgen door te delen door a) is de vergelijking van de vorm $x^2 + bx + c = 0$ en worden de formules eenvoudiger:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \qquad \text{(wortels)}$$

$$x_1 + x_2 = -b \qquad \text{(som van de wortels)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = c \qquad \text{(product van de wortels)}$$

5.4 Veeltermen

Een veelterm in x is een som van veelvouden van machten van x zoals $x^{1302}+11x^7+1830$:

Definitie 5.4.1 (Veelterm)**.** Zij $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \dots a_n \in \mathbb{R}$ met $a_n \neq 0$.

- Een n**-de graadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

  $$p(x) = \boxed{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}$$

  De $a_i x^i$ zijn **termen** van de veelterm, de a_i zijn **coëfficiënten**, en n is de **graad**. Men noteert de graad van $p(x)$ soms met $\mathrm{gr}(p(x)) \stackrel{\text{def}}{=} n$.
- Met deze veelterm $p(x)$ kunnen we een **veeltermfunctie** p associëren:

  $$\boxed{p : x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}$$

- Een n**-de graadsvergelijking in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

  $$\boxed{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0}$$

- De **getalwaarde** van $p(x)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ is het getal $p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$.

Voorbeeld 5.4.1.

De veelterm $p(x) = x^{1302} + 11x^7 + 1830$ heeft drie termen, met coëfficiënten $1, 11$ en 1830. Hij heeft graad 1302, en zijn getalwaarde in 1 is $p(1) = 1^{1302} + 11x^7 + 1830 = 1 + 11 + 1830 = 1842$. Zijn functiewaarde $p(2) = 2^{1302} + 11 \cdot 2^7 + 1830$ is een tamelijk groot natuurlijk getal, maar de getalwaarde in 0 daarentegen is eenvoudig $p(0) = 0 + 0 + 1830 = 1830$.

Voorbeeld 5.4.2.

- $2x + 3$ is een eerstegraadsveelterm.
- $5x^2 + 7x + 1$ is een tweedegraadsveelterm.
- $x^{2022} - 1$ is een veelterm van graad 2022.
- 7 is een veelterm van graad 0.
- $ax + b$ is een veelterm met 'parameters' of 'constanten' a en b in plaats van concrete getallen. Als $a \neq 0$ is het een eerstegraadsveelterm.

Je kan ook veeltermen in andere letters tegenkomen: $5t^2 + 3t$ en $t + \cos\alpha$ zijn veeltermen in t, en $e^{2x}u^2 - 1$ is een veelterm in u (maar niet in x).

Opmerking 5.4.1.

- De getalwaarde van een veelterm in 0 is precies de constante term a_0 van de veelterm:

  $$p(0) = a_n 0^n + a_{n-1}0^{n-1} + \ldots + a_2 0^2 + a_1 0 + a_0 = a_0$$

5.4 Veeltermen

- Met het sommatieteken kunnen we een veelterm ook schrijven als

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Zoals voor meer algemene functies definiëren we ook voor veeltermen *nulpunten* en *factoren*:

Definitie 5.4.2 (Nulpunten van veeltermen)**.**

Een **nulpunt** (ook **nulwaarde** of **wortel**) van een veelterm $p(x)$ is een reëel getal a waarvoor $\boxed{p(a) = 0}$.

Het zoeken van nulpunten is precies hetzelfde als het oplossen van vergelijkingen:

Eigenschap 5.4.1 (Verband tussen nulpunten en oplossingen van vergelijkingen)**.**
De *nulpunten* van een veelterm zijn de *oplossingen* van de *vergelijking* $p(x) = 0$.

Voorbeeld 5.4.3 (Nulpunten van eenvoudige veeltermen)**.**

1. Het getal 3 is een nulpunt van $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ omdat $p(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$

2. Veelterm $x - 5$ heeft 5 als nulpunt(en).

3. Veelterm $x^2 - 4$ heeft -2 en 2 als nulpunt(en).

4. Veelterm $x^2 + 4$ heeft geen enkel reël getal als nulpunt(en).

Er zijn relatief eenvoudige procedures om nulpunten te vinden van eerstegraadsveeltermen en tweedegraadsveeltermen. Er bestaan ook (ingewikkeldere) algoritmes voor veeltermen van de derde en vierde graad. Evariste Galois heeft in het begin van de negentiende eeuw aangetoond dat er voor vijfdegraadsveeltermen *geen* algemene procedure *kan* bestaan die alleen gebruik maakt van zogenaamde algebraïsche bewerkingen: optellen/aftrekken, vermenigvuldigen/delen en machtsverheffen/worteltrekken.

Een veelterm $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ is per definitie een *som* van termen (vandaar de naam *veel-term*). Het is dikwijls handig om dergelijke som van termen ook te kunnen schrijven als een *product* van factoren. De uitdrukking 'ontbinden in factoren' betekent precies het schrijven van dergelijke som als een product:

Definitie 5.4.3 (Factoren van veeltermen)**.**

Een veelterm $d(x)$ is een **factor** van een veelterm $p(x)$ als we $p(x)$ kunnen schrijven als een product van $d(x)$ met een andere veelterm.

Dus: $d(x)$ is een *factor* van $p(x)$ als $p(x) = d(x) \cdot q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$.

Een factor van de nulde graad (dus een getal) is een **triviale factor**. We beschouwen die meestal niet als 'echte' factor.

Een veelterm $p(x)$ **ontbinden in factoren** betekent hem schrijven als een product van zo veel mogelijk niet-triviale factoren.

Voorbeeld 5.4.4 (Factoren van veeltermen)**.**

1. $x + 1$ is een factor van $x^2 - 1$ want $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

2. $x + 2$ is geen factor van $x^2 - 1$ want voor elke getal $a \in \mathbb{R}$ is $x^2 - 1 \neq (x + 2)(x + a)$.

3. De veelterm $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ is ontbonden in factoren.

5.5 Deling van veeltermen

Voorbeeld 5.5.1 (Delen-met-rest voor natuurlijke getallen.)**.** Zeggen dat de deling van 13 door 4 gelijk is aan 3 met rest 1, betekent dat

$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

omdat 4 hoogstens 3 keer in 13 kan, en er blijft dan nog 1 over.

Op dezelfde manier betekent 20 delen door 3 dat

$$20 = 6 \cdot 3 + 2$$

of met symbolen: als we *deeltal* D delen door *deler* d, krijgen we *quotiënt* q en *rest* r als volgende formule geldt:

$$D = q \cdot d + r \text{ met } r < d.$$

Daarbij is het erg belangrijk dat $r < d$: als dat niet het geval is, heb je nog niet ver genoeg gedeeld, want je kan dan de rest r nog verder delen door d.

Als de rest gelijk is aan 0, dan zeggen we dat d een *deler* is van D, en we noteren $d|D$. Merk op dat in dat geval ook het quotiënt q een deler is van D (dus ook $q|D$), en dat we D dus kunnen schrijven als een product

$$D = q \cdot d$$

Dus, 5 en 7 zijn allebei delers van 35 want $35 = 5 \cdot 7$.

Men kan voor veeltermen volgende eigenschap bewijzen:

Eigenschap 5.5.1 (Euclidische deling)**.**

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn,

dan bestaan er unieke veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ zodat volgende gelijkheid geldt

$$\boxed{p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)} \qquad \text{met } \mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$$

Voorbeeld 5.5.2 (Voorbeelden deling van veeltermen)**.**

$p(x) = x^2 + 2x$	en	$d(x) = x + 2$,	dan is $q(x) = x$ en $r(x) = 0$
$p(x) = x^2 + x$	en	$d(x) = x^2$,	dan is $q(x) = 1$ en $r(x) = x$
$p(x) = x + 1$	en	$d(x) = x$,	dan is $q(x) = 1$ en $r(x) = 1$
$p(x) = x$	en	$d(x) = x^2$,	dan is $q(x) = 0$ en $r(x) = x$

Definitie 5.5.1 (Euclidische deling van veeltermen)**.**

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn, en $q(x)$ en $r(x)$ zijn de bijhorende unieke veeltermen zodat $p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$, waarbij $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$,

dan noemen we $p(x)$ het **deeltal**, $d(x)$ de **deler**, $q(x)$ het **quotiënt** en $r(x)$ de **rest**.

Als $r(x)$ de nulveelterm is zegt men: $p(x)$ **is deelbaar door** $d(x)$ en $d(x)$ **is een deler van** $p(x)$.

We noteren dat als

$$d(x) \mid p(x) \iff \text{er bestaat een veelterm } q(x) \text{ zodat } p(x) = q(x)d(x)$$

5.5 Deling van veeltermen

Opmerking 5.5.1.

(a) Let op de strikte ongelijkheid $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x))$. Dus $\text{gr}(r(x))$ mag niet gelijk zijn aan $\text{gr}(d(x))$.

(b) Het is natuurlijk mogelijk dat $q(x)$ en/of $r(x)$ nul zijn of van de nulde graad (en dus getallen).

(c) We hebben het woord **deler** hier in 2 betekenissen gebruikt:

   (i) bij de Euclidische deling: we delen het deeltal $p(x)$ door de deler $d(x)$. In deze context is $d(x)$ niet noodzakelijk een deler van $p(x)$

   (ii) wanneer $p(x)$ deelbaar is door $d(x)$ is $d(x)$ een deler van $p(x)$ en noteren we $d(x) \mid p(x)$.

(d) Als $d(x)$ een deler is van $p(x)$ en dus $p(x) = q(x) \cdot d(x)$, dan is automatisch ook het quotiënt $q(x)$ een deler van $p(x)$. We noemen $p(x)$ ook een **veelvoud** van $d(x)$ (en van $q(x)$).

(e) Er bestaat een algoritme, de zogenaamde Euclidische deling, om voor een willekeurige veelterm en deler het quotiënt en de rest te berekenen. De methode is volledig analoog aan de gekende staartdeling voor gewone getallen.

5.6 Algoritme voor Euclidische deling

Het **algoritme van Euclides** berekent voor veeltermen $p(x)$ en $d(x)$ het quotiënt $q(x)$ en de rest $r(x)$ zodat

$\boxed{p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x), \text{ met } \operatorname{gr}(r(x)) < \operatorname{gr}(d(x))}$ Vb: $x^2 - 4x + 3 = (x + 2)(x - 6) + 15, \text{ met } \operatorname{gr}(15) < 1$

Voorbeeld 5.6.1 (Euclidische deling stap per stap uitgelegd)**.**

Bereken quotiënt en rest van de deling van veelterm $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ door veelterm $x - 3$.

Uitwerking: We zoeken dus veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ met $\operatorname{gr}(r(x)) < \operatorname{gr}(d(x)) = 1$ zodat

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = q(x) \cdot (x - 3) + r(x).$$

We gebruiken een aangepaste vorm van de staartdeling van natuurlijke getallen. Bestudeer het schema samen met de uitleg.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 2x^3 & + & x^2 & - & 5x & + & 2 & x-3 \\ \cline{9-9}
 & 2x^3 & - & 6x^2 & & & & & 2x^2+7x+16 \\ \cline{2-4}
(b)\ - & & & 7x^2 & - & 5x & + & 2 & (a)\quad (c)\quad (e) \\
 & & & 7x^2 & - & 21x & & & \\ \cline{4-6}
(d)\ - & & & & & 16x & + & 2 & \\
 & & & & & 16x & - & 48 & \\ \cline{6-8}
(f)\ - & & & & & & & 50 & \\
 & & & & & & & (g) &
\end{array}
$$

(a) Deel de hoogstegraadsterm van $p(x)$ door de hoogstegraadsterm van $d(x)$. Dus deel $2x^3$ door x. Schrijf dit 'voorlopig quotiënt' $2x^3/x = 2x^2$ in de rechterkolom.

(b) Vermenigvuldig de deler $x-3$ met het 'voorlopig quotiënt' $2x^2$ en schrijf dit product $(x-3)\cdot 2x^2 = 2x^3-6x^2$ onder het deeltal. Trek dit product $2x^3-6x^2$ af van het deeltal $2x^3+x^2-5x+2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen tegen elkaar weg. De 'voorlopige rest' is $2x^3+x^2-5x+2-(2x^3-6x^2) = 7x^2-5x+2$. Die 'voorlopige rest' is nog te groot, want de graad 2 van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad 1 van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(c) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de 'voorlopige rest' (dus $7x^2$) door de hoogstegraadsterm van de deler $x - 3$, dus door x. Voeg deze component $7x^2/x = 7x$ toe aan het 'voorlopig quotiënt' in de rechterkolom.

(d) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met deze nieuwe component $7x$ en schrijf het product $7x\cdot(x-3)$ onder de 'voorlopige rest' $7x^2-5x+2$. Trek het product $7x^2-21x$ af van de 'voorlopige rest' $7x^2-5x+2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen weer tegen elkaar weg. De nieuwe 'voorlopige rest' is $7x^2 - 5x + 2 - (7x^2 - 21x) = 16x + 2$. Deze 'voorlopige rest' $16x + 2$ is nog te groot, want de graad van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(e) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de nieuwe 'voorlopige rest' ($16x$) door x. Voeg 16 toe als nieuwe component van het 'voorlopig quotiënt'.

(f) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x - 3$ met die nieuwe component 16 en trek het product $16(x - 3)$ af van de huidige 'voorlopige rest' $16x + 2$. Dit geeft de nieuwe 'voorlopige rest' 50.

(g) Omdat de graad van deze 'voorlopige rest' strikt kleiner is dan de graad van de deler, is het onmogelijk dat we de rest nog kunnen schrijven als een product van de deler met nog iets. Dit beëindigt dus de procedure. 50 is de uiteindelijke rest, en $2x^2 + 7x + 16$ is het uiteindelijke quotiënt.

Eindresultaat: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (2x^2 + 7x + 16)(x - 3) + 50$

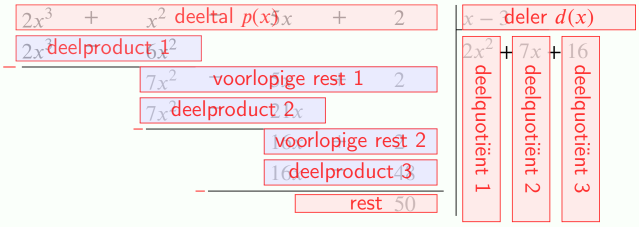
De algemene procedure een een veelterm $p(x)$ te delen door een veelterm $d(x)$ is als volgt:

5.6 Algoritme voor Euclidische deling

Algoritme 5.6.2 (Algoritme Euclidische deling).

Bereken $q(x)$ en $r(x)$ zodat $p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$ (met $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$).

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
2x^3 & + & x^2 & - & 5x & + & 2 & x-3 \\ \cline{8-8}
2x^3 & - & 6x^2 & & & & & 2x^2+7x+16 \\ \cline{1-3}
 & & 7x^2 & - & 5x & + & 2 & \\
 & & 7x^2 & - & 21x & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 16x & + & 2 & \\
 & & & & 16x & - & 48 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 50 &
\end{array}
$$



(a) Plaats deeltal $p(x)$ en deler $d(x)$ in een *deelschema* volgens dalende machten van x.
Gebruik voor eventuele ontbrekende machten in $p(x)$ nullen of open plaatsen.

(b) Deel de hoogstegraadsterm van het deeltal door hoogstegraadsterm van de deler.
In het voorbeeld: $2x^3$ gedeeld door x is $2x^2$.

(c) Schrijf dit eerste *deelquotiënt* op de quotientplaats.
In het voorbeeld: $2x^2$.

(d) Schrijf het product van dit deelquotiënt met de deler $d(x)$ onder het deeltal $p(x)$.
In het voorbeeld: $2x^2 \cdot (x-2) = 2x^3 - 6x^2$.

(e) Schrijf het *verschil* van deeltal en dit product als *voorlopige rest*.
In het voorbeeld: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 - (2x^3 - 6x^2) = 7x^2 - 5x + 2$.

(f) Deel de hoogstegraadsterm van de voorlopige rest door hoogstegraadsterm van de deler, en voeg het resultaat als deelquotiënt toe aan het (voorlopige) quotiënt.
In het voorbeeld: $7x^2$ gedeeld door x is $7x$.

(g) Schrijf het product van dit extra deelquotiënt met de deler onder de recentste voorlopige rest.
In het voorbeeld: $7x \cdot (x-2) = 7x^2 - 21x$.

(h) Schrijf het verschil van vorige voorlopige rest en dit deelproduct als nieuwe voorlopige rest.
In het voorbeeld: $7x^2 - 5x + 2 - (7x^2 - 21x) = 16x + 2$.

(i) Herhaal de vorige drie stappen tot de graad van de voorlopige rest strikt kleiner is dan de graad van de deler.
In het voorbeeld: na één keer herhalen is de rest een constante, dus met graad kleiner dan 1.

Oefening 5.6.1. Deel $4x^4 + x^3 + 2x + 1$ door $2x^2 + 1$.

Uitwerking:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
4x^4 & + & x^3 & + & 0x^2 & + & 2x & + & 1 & 2x^2+1 \\ \cline{10-10}
4x^4 & & & + & 2x^2 & & & & & 2x^2+\frac{1}{2}x-1 \\ \cline{1-5}
 & & x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & + & 1 & \\
 & & x^3 & & & + & \frac{1}{2}x & & & \\ \cline{3-7}
 & & & - & 2x^2 & + & \frac{3}{2}x & + & 1 & \\
 & & & - & 2x^2 & & & - & 1 & \\ \cline{4-9}
 & & & & & & \frac{3}{2}x & + & 2 &
\end{array}
$$

Besluit: $4x^4 + x^3 + 2x + 1 = \left(2x^2 + \dfrac{1}{2}x - 1\right)(2x^2 + 1) + \left(\dfrac{3}{2}x + 2\right)$

5.7 Deling door $x - a$

De meest eenvoudige delers van een veelterm, en dikwijls ook de meest interessante, zijn de delers van de *eerste graad*, dus die van de vorm $x - a$, met $a \in \mathbb{R}$.

Voor dergelijke delers van de eerste graad zijn er enkele specifieke eigenschappen en rekenregels. We onderzoeken eerst voor welke a de veelterm $x - a$ mogelijk een deler kan zijn van een veelterm $p(x)$.

Eigenschap 5.7.1 (Rest bij deling door $x - a$)**.**

Bij deling van een veelterm $p(x)$ door $x - a$ is de rest gelijk aan de getalwaarde $p(a)$ van $p(x)$ in a.

Bewijs Uit de formule van de Euclidische deling volgt dat $p(x) = (x-a)q(x)+r(x)$ met $q(x)$ het quotiënt en $r(x)$ de rest met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(x - a) = 1$. De rest $r(x)$ is dus een veelterm van graad nul, een getal. Noteer de rest dus als $r \in \mathbb{R}$, en bereken de getalwaarde van $p(x)$ in a: $p(a) = (a - a)q(a) + r = 0 + r = r$, en dus $p(a) = r$. De rest is dus inderdaad gelijk aan de getalwaarde van $p(x)$ in a. ■

Eigenschap 5.7.2 (Deelbaarheidscriterium)**.**

Een veelterm is deelbaar door $x - a$ als en slechts als zijn getalwaarde in a gelijk is aan nul.

In formules:

$$x - a \mid p(x) \quad \Leftrightarrow \quad p(a) = 0.$$

Bewijs Uit vorige eigenschap volgt dat de rest van de deling van een veelterm $p(x)$ door $x - a$ gelijk is aan $p(a)$. Dus de rest is nul als en slechts als $p(a) = 0$, en dat is precies het te bewijzen. ■

Opmerking 5.7.1. We kunnen deze eigenschap ook anders formuleren:

$x - a$ is een factor is van de veelterm $p(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van $p(x)$.

In formules: $p(x) = (x - a)q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x) \iff p(a) = 0$

Het komt regelmatig voor dat we één, enkele of alle delers willen vinden van een bepaalde veelterm. In het algemeen is dat een erg moeilijk probleem. Voor het tamelijk speciale maar toch veel voorkomend geval van veeltermen met *gehele* coefficiënten bestaat er wel een procedure voor de delers van de vorm $x - a$ met *gehele* a:

Eigenschap 5.7.3.

Als $x - a$ met a een *geheel getal* een deler is van een veelterm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ *met gehele coëfficiënten* a_i,

dan is a *een gehele deler van de constante term* a_0 van deze veelterm $p(x)$.

Bewijs Uit vorige eigenschap volgt dat voor een deler $x - a$ geldt dat $p(a) = 0$. Welnu, a invullen in $p(x)$ en de constante term naar het rechterlid brengen levert dan

$$a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots a_1 a = -a_0$$

waarbij in het linkerlid een factor a kan worden afgezonderd. Dat betekent precies dat a een deler is van $-a_0$, en dus ook van a_0. ■

Dit betekent dus dat *alle mogelijke delers* $x - a$ *met* a *geheel* te vinden zijn in de (eindige) verzameling van delers van de constante term a_0.

5.7 Deling door $x - a$

Voorbeeld 5.7.1. Bepaal voor $x^4 - 10x^2 + 9$ alle delers van de vorm $x - a$ met gehele a.

Uit vorige eigenschap volgt dat enkel delers van de constante term in aanmerking komen, dus $\pm 1, \pm 3, \pm 9$:

$$\begin{array}{lll} (x-1) \mid p(x) & \text{omdat} & p(\ \ 1) = 0 \\ (x+1) \mid p(x) & \text{omdat} & p(-1) = 0 \\ (x-3) \mid p(x) & \text{omdat} & p(\ \ 3) = 0 \\ (x+3) \mid p(x) & \text{omdat} & p(-3) = 0 \\ (x-9) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(\ \ 9) \neq 0 \\ (x+9) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(-9) \neq 0. \end{array}$$

We vinden hier 4 delers van de vorm $x - a$. Een 4de-graadsveelterm kan maximaal 4 delers van de vorm $x-a$ hebben. $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3) = x^4-10x^2+9$, dus we hebben de veelterm x^4-10x^2+9 volledig ontbonden in factoren.

Voorbeeld 5.7.2. Bepaal voor $x^3 - 2x^2 + x - 2$ alle delers van de vorm $x - a$ met gehele a.

Uit vorige eigenschap volgt dat enkel delers van de constante term in aanmerking komen, dus ± 1 en ± 2:

$$\begin{array}{lll} (x-1) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(\ \ 1) \neq 0 \\ (x+1) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(-1) \neq 0 \\ (x-2) \mid p(x) & \text{omdat} & p(\ \ 2) = 0 \\ (x+2) \nmid p(x) & \text{omdat} & p(-2) \neq 0. \end{array}$$

We vinden hier slechts 1 deler van de vorm $x - a$, namelijk $x - 2$. Het quotiënt van de deling van $x^3 - 2x^2 + x - 2$ door $x - 2$ kunnen we bepalen met het algoritme van de Euclidische deling, maar in dit speciale geval van een deler van de eerste graad is het rekenschema van Horner een alternatieve en meestal snellere manier om het quotiënt te bepalen.

Algoritme 5.7.3 (Delen door $x - a$ met a een geheel getal)**.**

Voor veeltermen met *gehele* coëfficiënten kan je de delers van de vorm $x - a$ (met $a \in \mathbb{Z}$) en hun bijhorende quotiënten als volgt bepalen:

(a) Bepaal *de delers van de constante term* van de veelterm.

(b) Bepaal *de getalwaarde van de veelterm* voor deze delers.

(c) Als voor een deler a deze getalwaarde 0 is, dan is $x - a$ een deler van de veelterm.

(d) Bepaal het quotiënt via de Euclidische deling of via het rekenschema van Horner.

Merk op: deze eigenschap geldt ENKEL voor *gehele* getallen a en veeltermen met *gehele* coëfficiënten.

Zodra je één deler van de vorm $x - a$ kan vinden, kan je een derdegraadsveelterm ontbinden in factoren:

Voorbeeld 5.7.3. Ontbind de veelterm $x^3 - 7x - 6$ in factoren.

Uitwerking: We proberen een lineaire factor $x - a$ te vinden van $p(x) = x^3 - 7x - 6$. Hiervoor moet a een deler zijn van de constante term. De mogelijkheden zijn dus $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

We berekenen $p(1) = 1 - 7 - 6 \neq 0, p(2) = 8 - 14 - 6 \neq 0$, maar $p(3) = 27 - 21 - 6 = 0$.

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)q(x)$.

Deze veelterm $q(x)$ kan je berekenen met de Euclidische Deling:

5.7 Deling door $x - a$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 1x^3 & + & 0x^2 & - & 7x & - & 6 & x-3 \\ \cline{9-9}
 & 1x^3 & - & 3x^2 & & & & & x^2+3x+2 \\ \cline{2-4}
- & & & 3x^2 & - & 7x & - & 6 & \\
 & & & 3x^2 & - & 9x & & & \\ \cline{4-6}
 & & - & & & 2x & - & 6 & \\
 & & & & & 2x & - & 6 & \\ \cline{6-8}
 & & & & - & & & 0 &
\end{array}$$

Hieruit volgt dat $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)(x^2 + 3x + 2)$. Nu moet de factor $x^2 + 3x + 2$ nog verder worden ontbonden. Dat kan via een berekening van de nulpunten met de discriminant: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = -2, -1$.

We vinden de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)(x + 1)(x + 2)$.

Merk op: in dit geval had je ook voor de overige delers van de constante term 6 de getalwaarde van $p(x)$ kunnen berekenen, en vinden dat $p(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$ en ook $p(-2) = -8 + 14 - 6 = 0$. De drie nulpunten van $p(x)$ zijn dus $3, -1$ en -2, en daaruit volgt ook dadelijk de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)(x + 1)(x + 2)$. Dat werkt hier omdat *alle* nulpunten geheel zijn, de methode met de discriminant werkt ook voor niet-gehele nulpunten (maar wel enkel als de overblijvende factor van de tweede graad is).

5.8 Het schema van Horner

In principe is het eenvoudig om de getalwaarde $p(7)$ van de veelterm $p(x) = x^9 + x^5 + 1$ te berekenen door $p(7) = 7^9 + 7^5 + 1$ uit te rekenen. Je moet daarvoor wel hoge machten berekenen.

Er bestaat een algoritme dat de berekening van $p(a)$ voor willekeurige veeltermen $p(x)$ en getallen a reduceert tot eenvoudigere vermenigvuldigingen en optellingen. Het algoritme heeft bovendien het bijzondere neveneffect dat het ook het quotiënt van de deling van $p(x)$ door $(x - a)$ oplevert. Dat algoritme is gekend onder de naam **Rekenschema van Horner**. We leggen het hier uit aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 5.8.1. Deel $2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ door $x - 2$.

Noem de veelterm $p(x)$. We gebruiken het schema van Horner om de waarde van $p(x)$ in het punt $x = 2$ te berekenen, en we krijgen het quotiënt er dan gratis bij. Je kan natuurlijk $p(2)$ ook met je rekenmachine berekenen, maar dan moet je toch Horner of Euclidische Deling toepassen als je het quotiënt nodig hebt.

Het startschema ziet eruit als volgt

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -4 & 5 & -7 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

waarbij de coëfficiënten van $p(x)$ in de bovenste rij staan. We laten nu de eerste coëfficiënt (dus 2) zakken, vermenigvuldigen die met de 2 links, en schrijven het resultaat op de tweede rij, onder de tweede coëfficiënt (dus onder -4):

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -4 & 5 & -7 \\ 2 & & 4 & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

We tellen de -4 en 4 bij elkaar op, schrijven het resultaat $-4 + 4 = 0$ onderaan en vermenigvuldigen 0 met de linkse 2 en schrijven het resultaat 0 weer op de tweede rij, onder de 5, en tellen dan 0 op bij die 5:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -4 & 5 & -7 \\ 2 & & 4 & 0 & \\ \hline & 2 & 0 & 5 & \end{array}$$

We vermenigvuldigen opnieuw de onderste 5 met de linkse 2, schrijven het product 10 onder de -7, tellen op en krijgen rechts onderaan het getal 3:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -4 & 5 & -7 \\ 2 & & 4 & 0 & 10 \\ \hline & 2 & 0 & 5 & 3 \end{array}$$

Het schema is nu volledig, en men kan bewijzen dat het meest rechtse getal onderaan altijd de getalwaarde van de veelterm is in het punt 2, en dat de overige getallen in de onderste rij steeds de coëfficiënten zijn van het quotiënt van $p(x)$ gedeeld door $x - 2$.

Het quotiënt is dus $2x^2 + 0x + 5$ en de rest is 3, of

$$2x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = (x - 2)(2x^2 + 5) + 3$$

Voorbeeld 5.8.2. Als voorbeeld op de Euclidische deling hebben we $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ gedeeld door $x - 3$. We kunnen deze deling ook uitvoeren met het rekenschema van Horner:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -5 & 2 \\ 3 & & 6 & 21 & 48 \\ \hline & 2 & 7 & 16 & 50 \end{array}$$

Dus: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (2x^2 + 7x + 16)(x - 3) + 50$.

Merk op dat de rest 50 dus ook de getalwaarde van het deeltal voorstelt voor $x = 3$, want

$$p(3) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 5 \cdot 3 + 2 = 50$$

Voorbeeld 5.8.3. Vind alle delers van $p(x) = x^4 - 15x^2 - 10x + 24$.

Merk al direct op dat dit dezelfde opgave is als 'ontbind deze veelterm in factoren'.

Voor kandidaat-delers van $p(x)$ van de vorm $x - a$, met a een geheel getal, moet a een deler zijn van 24. Een mogelijke manier om deze oefening op te lossen is om van alle gehele delers van 24 na te gaan of de getalwaarde nul is. Wie bij de kleinste begint, heeft al direct geluk, want $p(1) = 1 - 15 - 10 + 24 = 0$, en dus is $x - 1$ een deler van $p(x)$. We kunnen nu verder de getalwaarde zoeken van delers $-1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12, 24$ en -24, maar eenvoudiger is om met Horner te berekenen dat

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -15 & -10 & 24 \\ 1 & & 1 & 1 & -14 & -24 \\ \hline & 1 & 1 & -14 & -24 & 0 \end{array}$$

en dus $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = (x - 1)(x^3 + x^2 - 14x - 24)$. We herhalen de vraag voor de veelterm $x^3 + x^2 - 14x - 24$. Het eindresultaat wordt $p(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x - 4)$.

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

Module 6

Sommatieteken en faculteit

(Versie 2024/10/24HB.16)

6.1 Intro sommatie en faculteit

We introduceren enkele notaties die toelaten om ingewikkelde formules korter en duidelijker te noteren:

- Het sommatieteken Σa_i voor de som $a_1 + a_2 + \ldots a_n$.
- De faculteit $n!$ voor het product $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$.
- De binomiaalgetallen $\binom{n}{p}$ om aantallen combinaties aan te duiden, en om het merkwaardig product $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ te veralgemenen naar hogere machten $(a+b)^n$.

6.2 Het sommatieteken $\sum$

Voorbeeld 6.2.1 (Inleidende voorbeelden).

- Beschouw de som $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$.

  Dit is een som van machten van 2. Elke term is van de vorm 2^i waarbij i loopt van 1 tot en met 6. We schrijven die som verkort als

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = \underbrace{2^1}_{i=1} + \underbrace{2^2}_{i=2} + \underbrace{2^3}_{i=3} + \ldots + \underbrace{2^6}_{i=6} = \sum_{i=1}^{6} 2^i\,.$$

  We kunnen met deze notatie ook veel langere sommen opschrijven:

$$2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 4096 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{11} + 2^{12} = \sum_{i=1}^{12} 2^i\,.$$

- Beschouw de som $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

  Dit is de som van de termen $\frac{1}{i}$, waarbij i loopt van 1 tot en met 5. We kunnen die som verkort schrijven als

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i}\,.$$

- Beschouw de som $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$.

  We kunnen de som verkort schrijven als

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i^2}\,.$$

De letter die gebruikt wordt bij het sommatieteken hoeft niet i te zijn, dat mag een willekeurige letter zijn. Andere vaak gebruikte letters zijn j en k. De sommatie hoeft ook niet bij 1 te starten.

Voorbeeld 6.2.2 (Extra eenvoudige voorbeelden van het sommatieteken).

- Beschouw de som $2 + 3 + 4 + \cdots + 8$.

  We kunnen die som verkort schrijven als $\sum_{k=2}^{8} k = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$.

  Merk op dat deze schrijfwijze niet uniek is: men kan dezelfde som bijvoorbeeld ook noteren als

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7}(k+1) &= (1+1) + (2+1) + \ldots + (7+1)\\ &= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35\end{aligned}$$

  of

$$\begin{aligned}\sum_{j=3}^{9}(j-1) &= (3-1) + (4-1) + \ldots + (9-1)\\ &= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35.\end{aligned}$$

6.2 Het sommatieteken $\sum$

Oefening 6.2.1.

1. Zoek de algemene term: $2+3+4+\cdots+8 = \sum_{i=0}^{6} \ldots\ldots$

2. Bereken de som $\sum_{j=3}^{5} j^2 = \ldots\ldots$

3. Schrijf met een sommatieteken: $\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49} = \ldots\ldots$

Een algemene definitie van de sommatie, enigszins abstract geformuleerd, gaat als volgt:

Definitie 6.2.1 (Het sommatieteken)**.**

Voor $n \in \mathbb{N}$ en $a_1, a_2, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen definiëren we :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{notatie}}{=} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Vb: $\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2+4+8 = 14$

Meer algemeen is voor $m, n \in \mathbb{Z}$ met $m \leqslant n$ en $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Vb: $\sum_{k=2}^{4} 2^k = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 4+8+16 = 28$

We lezen $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ als de som van (de) a_k voor k gaande van m tot en met n.

Men noemt a_k de **algemene term** en k de **sommatie-index**.
Men noemt m de **ondergrens** en n de **bovengrens** van de sommatie.

Men noteert $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ soms ook als $\sum_{k=m}^{n} a_k$.

Opmerking 6.2.1.

- De sommatie-index bestaat alleen maar *in* de sommatie. In de uitgeschreven of uitgerekende som komt de sommatie-index niet meer voor.
- De sommatie-index mag geen andere betekenis hebben in de context.
  Als $k \in \mathbb{R}$, dan is
  $$\sum_{i=1}^{4} k^i = \sum_{j=1}^{4} k^j = k + k^2 + k^3 + k^4$$
  maar
  $$\sum_{k=1}^{4} k^k = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 \neq \sum_{i=1}^{4} k^i.$$
  Je mag voor $k + k^2 + k^3 + k^4$ dus *niet* de letter k kiezen als sommatie-index.
- We maken de volgende afspraken over haakjes:
  $$\sum_{i=5}^{7} a_i + 4 \overset{\text{afspraak}}{=} \left(\sum_{i=5}^{7} a_i\right) + 4 = a_5 + a_6 + a_7 + 4$$

6.2 Het sommatieteken $\sum$

en

$$\sum_{i=5}^{7}(a_i+4)=(a_5+4)+(a_6+4)+(a_7+4)=a_5+a_6+a_7+12.$$

Algemeen geldt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k + b = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + b$$

Bij de sommatie van een *product* is het niet nodig (maar ook niet fout) om haakjes te zetten:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k b_k).$$

Oefening 6.2.2. Bereken de som:

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{2^i}{3}+5\right) = \dots\dots$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{3}\frac{2^i}{3}+5 = \dots\dots$

Voorbeeld 6.2.3. Schrijf met een sommatieteken:

1. $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4 = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_ib_i$

2. $a_1b_2+a_2b_3+a_3b_4+a_4b_5 = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_ib_{i+1} = \sum_{i=2}^{5} a_{i-1}b_i$

3. $a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_ib_{5-i}$

4. $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5 = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_ib_i + a_5$

Oefening 6.2.3. Schrijf volgende uitdrukkingen met een sommatieteken:

1. $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x^3+x^4+\frac{\sqrt{5}}{2}x^5+\frac{\sqrt{6}}{2}x^6+\frac{\sqrt{7}}{2}x^7+\sqrt{2}x^8+\frac{3}{2}x^9+\frac{\sqrt{10}}{2}x^{10}+\frac{\sqrt{11}}{2}x^{11}+\sqrt{3}x^{12}.$

2. $u_0-2u_1+3u_2-4u_3+5u_4-6u_5+7u_6-8u_7+\cdots+129u_{128}-130u_{129}.$

6.3 Rekenregels voor de sommatie $\sum$

We bundelen hier enkele rekenregels in verband met het sommatieteken zoals het afzonderen van de eerste of de laatste term en verandering van sommatie-index. Eerst een voorbeeld:

Voorbeeld 6.3.1.

Beschouw de som

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = 14. \tag{3}$$

Zonderen we hierin de eerste term af, dan bekomen we

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2 + \sum_{k=2}^{3} 2^k,$$

de laatste term afzonderen geeft

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{k=1}^{2} 2^k + 8.$$

We kunnen ook een substitutie uitvoeren van de sommatie-index. Stellen we bijvoorbeeld $p = k + 6$. Hoe schrijven we deze som als een som over de index p i.p.v. over de index k?

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{p=\dots}^{\dots} 2^{\cdots}$$

- Als $p = k + 6$, dan is $k = p - 6$.
- Als $k = 1$, dan is $p = 7$.
- Als $k = 3$, dan is $p = 9$.

Zo bekomen we

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{p=7}^{9} 2^{p-6} = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14.$$

Wanneer de sommatie over k-waarden van 1 t.e.m. 3 vervangen wordt door een sommatie met ondergrens 0 en bovengrens 2, wordt hetzelfde resultaat bekomen, mits de juiste aanpassing in de algemene term:

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k \overset{l \overset{\text{def}}{=} k-1}{=} \sum_{l=0}^{2} 2^{l+1} = \sum_{k=0}^{2} 2^{k+1} = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14.$$

Eigenschap 6.3.1 (Eigenschappen sommatie)**.** Voor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{Z}$ met $m \leq n$ geldt:

(a) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{n-m+1 \text{ keer}} = (n - m + 1)\alpha$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 7 = 7 + 7 + 7 = 21$

(b) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 7^k = 7^2 + 7^3 + 7^4 = 7^2 + \sum_{k=3}^{4} 7^k$

6.3 Rekenregels voor de sommatie $\sum$

(c) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 7^k = 7^2 + 7^3 + 7^4 = \sum_{k=2}^{3} 7^k + 7^4$

(d) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+r}^{n+r} a_{j-r}$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} 2^k = \sum_{j=5}^{7} 2^{j-4} = 2^1 + 2^2$

(e) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=m}^{n} a_k + \beta \sum_{k=m}^{n} b_k$

Vb: $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (5 \cdot 2^k + 7 \cdot 3^k) = 5 \cdot \sum_{k=1}^{3} 2^k + 7 \cdot \sum_{k=1}^{3} 3^k$

Voorbeeld 6.3.2. Reken onderstaande sommen uit als je weet dat $\displaystyle\sum_{m=4}^{8} x_m = 10$, $\displaystyle\sum_{m=4}^{8} y_m = 15$ en $x_3 = 2$.

1. $\displaystyle\sum_{m=4}^{8} (y_m + 3) = 30$

Uitwerking: $\displaystyle\sum_{m=4}^{8} (y_m + 3) = \sum_{m=4}^{8} y_m + \sum_{m=4}^{8} 3 = \sum_{m=4}^{8} y_m + 5 \cdot 3 = 15 + 15 = 30$

2. $\displaystyle\sum_{m=4}^{8} (8x_m + 2) = 90$

Uitwerking: $\displaystyle\sum_{m=4}^{8} (8x_m + 2) = 8 \sum_{m=4}^{8} x_m + 5 \cdot 2 = 8 \cdot 10 + 10 = 90$

3. $\displaystyle\sum_{m=3}^{8} \frac{x_m}{4} = 3$

Uitwerking: $\displaystyle\sum_{m=3}^{8} \frac{x_m}{4} = \frac{x_3}{4} + \sum_{m=4}^{8} \frac{x_m}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \sum_{m=4}^{8} x_m = \frac{1}{2} + \frac{10}{4} = 3$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} x_{k+2} = 12$

Uitwerking: $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} x_{k+2} \overset{\text{def}}{\underset{m=k+2}{=}} \sum_{m=3}^{8} x_m = x_3 + \sum_{k=4}^{8} x_k = 2 + 10 = 12$

6.4 De faculteit $n!$

Definitie 6.4.1 (Faculteit)**.** De **faculteit** van een natuurlijk getal $n!$ (lees: n-faculteit) is

$\boxed{n! \overset{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \text{ als } n \in \mathbb{N}_0}$ Vb: $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

$\boxed{0! \overset{\text{def}}{=} 1}$

We kunnen natuurlijk de volgorde van de factoren omkeren, en ook schrijven:

$$n! \ = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n$$

Voorbeeld 6.4.1.

1. $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

2. $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot 4! = 120$

3. $\dfrac{100!}{98!} = 100\cdot 99 = 9900$

Uitwerking: $\dfrac{100!}{98!} = \dfrac{100\cdot 99\cdot \cancel{98}\cdot \cancel{97}\cdot \ldots \cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{98}\cdot \cancel{97}\cdot \ldots \cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}$

4. $50\cdot 49\cdot 48\cdot 47 = \dfrac{50!}{46!}$

De voorbeelden illustreren volgende rekenregels voor de faculteitsoperatie:

Eigenschap 6.4.1.

$\boxed{n! = n(n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}_0}$ Vb: $7! = 7\cdot 6!$

$\boxed{(n+1)! = (n+1)n!, \quad n \in \mathbb{N}}$ Vb: $7! = 7\cdot 6!$

$\boxed{\dfrac{n!}{p!} = n(n-1)\ldots(p+1), \ p < n}$ Vb: $\dfrac{7!}{5!} = 7\cdot 6 = 42$

want $\dfrac{n!}{p!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(p+1)\cancel{p}\cdot \cancel{(p-1)}\ldots \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{p}\cdot \cancel{(p-1)}\ldots \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}} = n(n-1)\ldots(p+1)$

Merk op dat de eerste twee regels precies hetzelfde zeggen namelijk dat de faculteit van een natuurlijk getal gelijk is aan het product van dat getal met de faculteit van het vorige natuurlijke getal.

6.5 Binomiaalgetallen

We definiëren een handige notatie voor getallen die in allerlei contexten opduiken:

Definitie 6.5.1 (Binomiaalgetallen).

Het **binomiaalgetal** n **over** p, genoteerd $\binom{n}{p}$, van twee natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ is

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Vb: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$

Opmerking 6.5.1.

(a) Deze getallen komen voor in het Binomium van Newton, en dat verklaart de naam *binomiaal*getallen.

(b) Deze getallen komen ook voor bij de studie van telproblemen: $\binom{n}{p}$ is precies gelijk aan het aantal *deelverzamelingen* van p elementen uit een verzameling van n elementen. Dat aantal wordt ook genoteerd als C_n^p. Er geldt dus dat (let op de omwisseling van de sub- en superscripts!):

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Voorbeeld 6.5.1 (Basisvoorbeeld).

(a) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{(\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1})(2 \cdot 1)} = 10 \quad (= C_5^3)$

(b) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \binom{5}{3} = 10$ (zie hierboven)

(c) $\binom{2}{2} = \frac{\cancel{2!}}{\cancel{2!}0!} = 1 \quad (= C_2^2)$ (want $0! = 1$)

(d) $\binom{4}{0} = \frac{\cancel{4!}}{0!\cancel{4!}} = 1 \quad (= C_4^0)$

(e) $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4 \quad (= C_4^1)$ (want $4! = 4 \cdot 3!$).

Eigenschap 6.5.1 (Rekenregels binomiaalgetallen).

Voor natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ geldt:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} &= \binom{n}{n-p} \\
\binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 \\
\binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n & n \geq 1 \\
\binom{n+1}{p} &= \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} & p \geq 1
\end{aligned}$$

6.5 Binomiaalgetallen

Volgende eigenschap is een veralgemening van merkwaardige producten als:

$$\begin{array}{rcl}(a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2\\ (a+b)^3 & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ (a+b)^4 & = & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{array}$$

Bijvoorbeeld de laaste vergelijking kunnen we ook schrijven als

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$$

Deze eigenschap levert ook de verklaring voor het woord *binomiaal*, want een '*bi*noom' is een '*twee*term' (net zoal een *mo*noom een *één*term is, en een *poly*noom een *veel*term). De binomiaalgetallen $\binom{n}{p}$ zijn dus precies die coëfficiënten die opduiken bij de p-de term als je een binoom verheft tot de n-de macht. We gebruiken het sommatieteken $\sum$:

Eigenschap 6.5.2 (Binomium van Newton)**.**

Voor reële getallen a en b en een natuurlijk getal n geldt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$

Omdat $(a+b)^n = (b+a)^n$ (of omwille van de eerste rekenregel voor binomiaalgetallen) geldt ook dat

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p b^{n-p}.$$

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

Module 7

Ongelijkheden en absolute waarde

(Versie 2024/10/24HB.16)

7.1 Intro ongelijkheden en absolute waarde

Iedereen kent allicht de begrippen 'absolute waarde' ($|-2| = 2$) en ongelijkheden ($2 \leq 3$). Maar beide begrippen zijn subtieler en gevaarlijker dan op het eerste zicht blijkt. Bij het bepalen van oplossingsverzamelingen van ongelijkheden worden regelmatig foutieve rekenregels gebruikt. Dat leidt tot negatieve afstanden, ontploffende chemische reacties, failliete bedrijven, en soms zelfs tot herexamens. Besteed er dus voldoende aandacht aan.

In wat volgt hebben we de leerstof over ongelijkheden als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding

(2) Het tekenverloop van rationale functies

(3) Aandachtspunten over gelijkheden, met o.a. kwadrateringsvoorwaarden

(4) Eigenschappen van ongelijkheden

(5) Eigenschappen van absolute waarde

(6) Een overzicht van zogenaamde driehoeksongelijkheden

7.2 Tekenverloop van rationale functies

Rationale functies zijn functies waarvan je het functievoorschrift kan schrijven als een *breuk van veeltermen*. Van rationale functies kan je het tekenverloop bepalen door eerst teller en noemer te ontbinden in eerste- en tweedegraadsveeltermen, en daarna de tekenverlopen van die factoren te combineren. We illustreren de werkwijze met een voorbeeld.

Voorbeeld 7.2.1 (Tekenverloop van een rationale functie)**.**

Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4} \leqslant 0$.

Uitwerking: We maken voor elk van de factoren van teller en noemer een apart tekenverloop en brengen dit alles samen in één tabel.

- $(4-x^2)$ heeft twee nulpunten: 2 en -2.
- $(3x^2-9x+6)$ heeft twee nulpunten: 1 en 2.
- $(2x+4)$ heeft één nulpunt: -2.

Dit geeft volgende samenvattende tabel (met de nulpunten steeds geordend van klein naar groot):

x		-2		1		2	
$4-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$3x^2-9x+6$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4}$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$-$

De vertikale streep bij het nulpunt van de noemer duidt aan dat de breuk er niet gedefinieerd is.
We bekomen de onderste rij dus door de tekens van de eerste- en tweedegraadsfactoren te vermenigvuldigen. Zo bepalen we het teken van de getallen in de kolom die staat voor $x \in]-\infty, 2[$ als volgt: twee mintekens (dus negatieve factoren) vermenigvuldigen geeft iets positief, en dat dan vermenigvuldigen met de derde positieve factor geeft dan iets positief, wat ons het plusteken in de onderste rij geeft. Als we een nul tegenkomen moeten we opletten:

- Zijn er enkel factoren in de teller die nul worden, dan wordt de rationale functie ook nul.
- Is er een factor in de noemer nul, dan is de rationale functie niet gedefinieerd in dat punt, en zetten we een $|$.

De oplossingsverzameling van de ongelijkheid is dus $V = [1, +\infty[$.

7.3 Gelijkheden

Als voorbereiding op het bestuderen van ongelijkheden verdiepen we ons eerst even in het eenvoudigere geval van vergelijkingen. We onderzoeken meer bepaald een specifiek type probleem dat kan optreden bij het oplossen van sommige vergelijkingen en ongelijkheden: het introduceren van 'valse oplossingen'.

Voorbeeld 7.3.1. Beschouw de vergelijking

$$\sqrt{x+2} = x.$$

Het is niet onmiddellijk duidelijk hoe we deze vergelijking met een vierkantswortel kunnen oplossen. Een mogelijkheid is om *de vergelijking te kwadrateren*: als we beide leden van de vergelijking kwadrateren dan verdwijnt de vierkantswortel:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= x^2 \\ \Leftrightarrow\ x+2 &= x^2, \end{aligned}$$

en dit is een tweedegraadsvergelijking $x^2 - x - 2 = 0$, waarvan je kan berekenen dat de oplossingen -1 en 2 zijn. Mooi, daarmee hebben we de vergelijking opgelost. Of toch niet ?

Als we $x = 2$ invullen in $\sqrt{x+2} = x$ vinden we $\sqrt{4} = 2$, wat uiteraard klopt. Maar als we $x = -1$ invullen vinden we $\sqrt{1} = -1$. Maar $\sqrt{1}$ is helemaal niet gelijk aan -1, en $x = -1$ is dus *geen* oplossing van $\sqrt{x+2} = x$, ook al was het wel een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking.

Hoe kunnen we dit soort problemen voorkomen? Een vergelijking met een vierkantswortel zouden we graag oplossen zoals hierboven, namelijk door de vergelijking te kwadrateren. Dat process introduceert echter mogelijk valse oplossingen, die we met behulp van zogenaamde *bestaansvoorwaarden* en *kwadrateringsvoorwaarden* kunnen uitsluiten. Bij het oplossen van een vergelijking met een vierkantswortel in, moeten we rekening houden met volgende voorwaarden:

- **Bestaansvoorwaarde**: wat onder de vierkantswortel staat moet positief zijn.
- **Kwadrateringsvoorwaarde**: wat gelijk is aan een vierkantswortel moet positief zijn.

Deze voorwaarden zorgen er voor dat je geen valse oplossingen krijgt.

Van waar komt die kwadrateringsvoorwaarde precies? We weten dat als $a = b$, dat dan zeker ook $a^2 = b^2$ (want de kwadraten van twee gelijke getallen zijn natuurlijk ook gelijk aan elkaar). Maar, als $a^2 = b^2$, dan volgt niet noodzakelijk dat $a = b$, want $a^2 = b^2$ geldt ook als $a = -b$. De kwadrateringsvoorwaarde sluit de extra 'valse' oplossing $a = -b$ uit.

Voorbeeld 7.3.2. Herneem vorig voorbeeld:

$$\sqrt{x+2} = x.$$

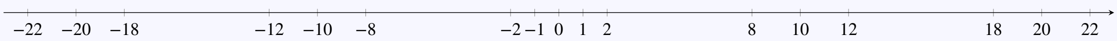
De **bestaansvoorwaarde** zegt dat wat onder de vierkantswortel staat positief moet zijn, oftewel dat $x + 2 \geq 0$. Dit kunnen we herschrijven als $x \geq -2$. Beide oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking (-1 en 2) voldoen aan deze voorwaarde.
De **kwadrateringsvoorwaarde** zegt dat wat gelijk is aan een vierkantswortel positief moet zijn. In dit geval is de vierkanstwortel gelijk aan x, en dus moet $x \geq 0$. Het getal 2 is groter dan nul, en is dan ook een oplossing van de vergelijking $\sqrt{x+2} = x$: het voldoet immers aan beide voorwaarden en is een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking. Het getal -1 is echter niet groter dan 0, de kwadrateringsvoorwaarde is niet voldaan, en -1 is inderdaad geen oplossing van $\sqrt{x+2} = x$.

7.4 Ongelijkheden

Eigenschap 7.4.1 (Basiseigenschappen ongelijkheden)**.** Voor elke $x, y, r \in \mathbb{R}$ geldt

$$\begin{array}{rlcll} & x < y & \Longleftrightarrow & x + r < y + r & \text{(plus getal)} \\ \text{als } 0 < r, & x < y & \Longrightarrow & r \cdot x < r \cdot y & \text{(maal positief getal)} \\ \text{als } \boxed{r < 0}, & x < y & \Longrightarrow & \boxed{r \cdot x > r \cdot y} \quad (\text{ of } r \cdot y < r \cdot x) & \boxed{\text{(maal negatief getal)}} \end{array}$$

Voorbeeld 7.4.1. We hebben $10 < 20$, en dus ook $10+2 < 20+2$, $10-2 < 20-2$ en $2 \cdot 10 < 2 \cdot 20$, maar $(-2) \cdot 10 > (-2) \cdot 20$. Ook is $1 < 2$, maar $-1 > -2$. Deze ongelijkheden zie je ook op de getallenrechte:



Opmerking 7.4.1.

- Ongelijkheden kunnen aan elkaar worden gekoppeld:

$$a < b < c \iff a < b \text{ en } b < c.$$

  Merk op dat uit beide uitdrukkingen telkens ook volgt dat $a < c$.

- Uitdrukkingen van de vorm $a < b > c$ worden *nooit* gebruikt: je schrijft bv. $a < b$ en $c < b$, of korter $a, c < b$.

- Uit $x < y \iff x + r < y + r$ voor alle x, y, r volgt onmiddellijk dat

$$a + c < b \iff a < b - c.$$

  Dit is een term naar het andere lid brengen (kies $x = a + c, y = b$ en $r = -c$). Ook volgt dat

$$a < b \iff a - b < 0.$$

  Inderdaad: kies $x = a, y = b, r = -y$.

- Uit $x < y \implies r \cdot x < r \cdot y$ voor strikt positieve r volgt op gelijkaardige manier:

$$a < b \cdot c \implies \frac{a}{b} < c \quad \text{als } b > 0$$

  en

$$a < b \implies \frac{a}{b} < 1 \quad \text{als } b > 0.$$

  Het is dus belangrijk dat de factor die je van lid verandert *positief* is. Als dat niet het geval is, draait de ongelijkheid om.

Met deze notatie en de basiseigenschappen van de ongelijkheden kunnen we de oplossingsverzameling zoeken van ongelijkheden, namelijk de verzameling alle getallen die voldoen aan de ongelijkheid.

Voorbeeld 7.4.2 (Oplossen van ongelijkheden)**.**

1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $-2x + 3 < 5$.

7.4 Ongelijkheden

$$\begin{array}{rcll}
-2x+3 & < & 5 & \\
 & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen }) \\
-2x & < & 2 & \\
 & \Updownarrow & & (\text{ delen door } -2, \text{ ongelijkheid omkeren }) \\
x & > & -1 & (\ x \text{ is groter dan } -1\ )
\end{array}$$

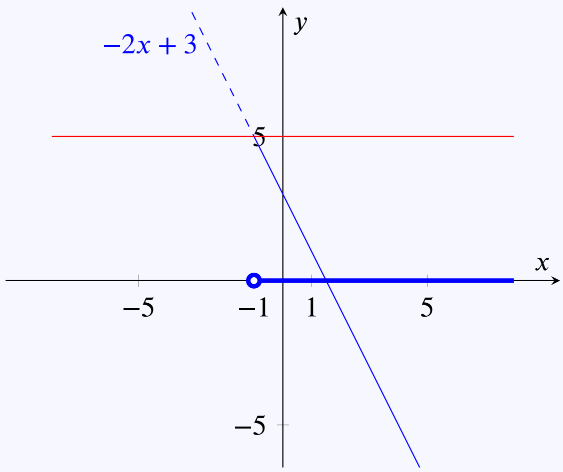
Dus is de oplossingsverzameling $V =]-1, +\infty[$.

Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -5 op te tellen

$$-2x - 2 < 0$$

en dan het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto -2x - 2$ te gebruiken:

$$\begin{array}{r||c|c|c}
x & & -1 & \\
\hline
-2x-2 & + & 0 & -
\end{array}$$



Voorbeeld 7.4.3 (Oplossen van ongelijkheden)**.** Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$.

We mogen *niet* zomaar linker- en rechterlid vermenigvuldigen met $x-3$, want we kennen het teken niet van $x-3$. We maken dus een *gevalsonderscheid*:

- Merk alvast op dat de uitdrukking niet gedefinieerd is voor $x = 3$: we zouden immers delen door nul. 3 behoort dus al zeker *niet* tot de oplossingsverzameling.
- $x-3 > 0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid blijft behouden omdat $x-3$ positief is.

$$\begin{array}{rcll}
x+4 & < & 2x-6 & \\
 & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen }) \\
4 & < & x-6 & \\
 & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen }) \\
10 & < & x & (\ x \text{ is groter dan } 10\ )
\end{array}$$

- $x-3 < 0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid keert om omdat

$x - 3$ negatief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & > & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen }) \\ 4 & > & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen }) \\ 10 & > & x & (\ x \text{ is kleiner dan } 10\ ) \end{array}$$

Dus

- in het geval dat $x - 3 > 0$ (of $x > 3$), dan wordt de ongelijkheid $x > 10$.
- in het geval dat $x - 3 < 0$ (of $x < 3$), dan wordt de ongelijkheid $x < 10$. Dat is natuurlijk automatisch het geval: Als $x < 3$ dan is ook $x < 10$. Dus, als $x < 3$ dan is automatisch $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$

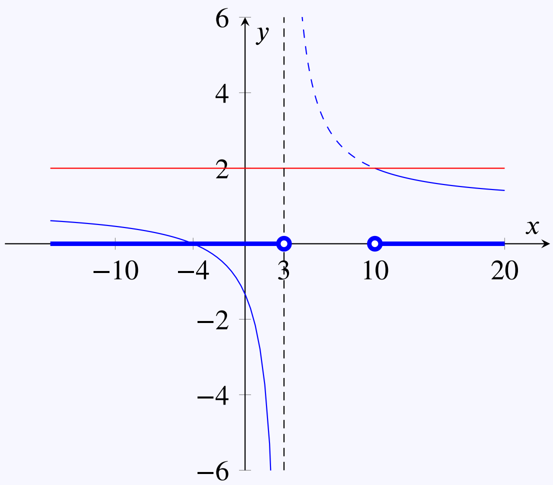
Samengevat: $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$ als $x < 3$ of $x > 10$.

Dus is de oplossingsverzameling is $V =]-\infty, 3[\ \cup\ ]10, +\infty[$.

Herinner je de notatie '$\cup$' om aan te duiden dat V de unie is van de twee halfrechten.

We kunnen dus ook zeggen: $\dfrac{x+4}{x-3} < 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[\ \cup\ ]10, +\infty[$.

Dit kunnen we ook zien op de grafiek van $\dfrac{x+4}{x-3}$:



Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden, mits herschrijven van de opgave, door het tekenverloop van een rationale functie te onderzoeken.

Bron: Schaum's outline series, Beginning Calculus, Second Edition, p.4

Opmerking 7.4.2 (Bestaansvoorwaarden).

Bij het oplossen van ongelijkheden komen regelmatig situaties voor als in vorig voorbeeld: een breuk $\dfrac{x+4}{x-3}$ is niet gedefinieerd voor $x = 3$, omdat we dan zouden delen door nul. De ongelijkheid kan dus zelfs niet worden opgeschreven voor deze waarde van x, want de uitdrukking $\dfrac{x+4}{x-3}$ *heeft geen zin* voor

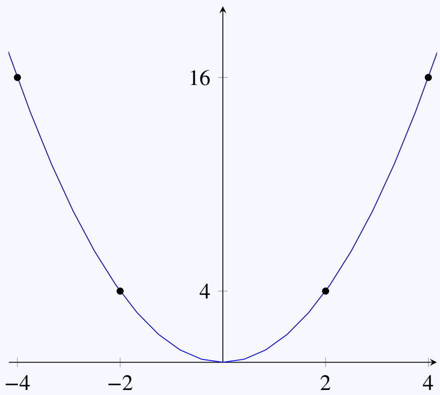
$x = 3$. Voor we de ongelijkheid oplossen moeten we dus als zogenaamde bestaansvoorwaarde stellen dat $x \neq 3$. Dit leidt meestal tot gevalsonderscheid. Niet alleen bij nulpunten van een noemer, ook bij het nemen van wortels kunnen bestaansvoorwaarden nodig zijn: een uitdrukking als $\sqrt{x+3} > 7$ heeft geen betekenis als $x + 3 < 0$.

Zij $x, y \in \mathbb{R}$ en f een reële functie. We kunnen ons het volgende afvragen:

als $x < y$, kunnen we dan iets zinnigs zeggen over $f(x)$ en $f(y)$?

In De Ideale Wereld zouden we kunnen hopen dat $x < y$ impliceert dat ook $f(x) < f(y)$, maar de Wereld is niet Ideaal.

Voorbeeld 7.4.4. We onderzoeken bij wijze van voorbeeld het verband voor de functie $f(x) = x^2$.



Er geldt dan:

$$\begin{array}{rcl} 2 < 4 & \text{en} & 2^2 < 4^2 \\ -4 < -2 & \text{en} & (-4)^2 > (-2)^2 \\ -2 < 4 & \text{en} & (-2)^2 < 4^2 \\ -4 < 2 & \text{en} & (-4)^2 > 2^2 \\ -2 < 2 & \text{en} & (-2)^2 = 2^2 \end{array}$$

Als x en y beide positief zijn, wordt de orde behouden. Als x en y beide negatief zijn, draait de orde om. Als x en y een verschillend teken hebben, kunnen we niets zeggen over de relatie tussen x^2 en y^2: zowel $x^2 < y^2$, $x^2 > y^2$ als $x^2 = y^2$ zijn mogelijk. In dit geval mogen we dus niet kwadrateren.

We kunnen de verschillende gevallen samenvatten als:

Als $x, y \geq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

Als $x, y \leq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 > y^2$.

Als $x < 0 < y$ zijn zowel $x^2 \leq y^2$ als $x^2 \geq y^2$ mogelijk.

Dit voorbeeld toont aan dat je erg moet opletten bij het al dan niet behouden blijven van ongelijkheden.

Definitie 7.4.1. Zij f een reële functie op een interval $I \subset \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$\begin{array}{rcl} f \text{ is strikt stijgend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) < f(y)) \\ f \text{ is strikt dalend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) > f(y)) \end{array}$$

Dus, als je *weet* dat een bepaalde functie stijgt (omdat je de grafiek kent), dan weet je ook dat $f(x) < f(y)$ van zodra $x < y$.

7.4 Ongelijkheden

Voorbeeld 7.4.5.

1. De functie $f : x \mapsto 2x+3$ is stijgend, en dus is $f(2) < f(4)$.

2. De functie $f : x \mapsto -2x+3$ is dalend, en dus is $f(2) > f(4)$.

3. De functie $f : x \mapsto x^2$ is stijgend op het interval $[0,10]$, en dus is $f(2) < f(4)$.

4. De functie $f : x \mapsto x^2$ is dalend op het interval $[-10,0]$, en dus is $f(-4) > f(-2)$.

5. De functie $f : x \mapsto \sqrt{x}$ is stijgend op het interval $[0,+\infty[$ en dus is $f(2) < f(4)$.

Oefening 7.4.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid

1. $2 < \sqrt{x} \iff x \in$ $\boxed{]4,+\infty[}$ $\boxed{]-4,+\infty[}$ $\boxed{[0,+\infty[}$ $\boxed{[0,4[}$ $\boxed{\text{geen oplossingen}}$

2. $-2 < \sqrt{x} \iff x \in$ $\boxed{]4,+\infty[}$ $\boxed{]-4,+\infty[}$ $\boxed{[0,+\infty[}$ $\boxed{[0,4[}$ $\boxed{\text{geen oplossingen}}$

3. $2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ $\boxed{]4,+\infty[}$ $\boxed{]-4,+\infty[}$ $\boxed{[0,+\infty[}$ $\boxed{[0,4[}$ $\boxed{\text{geen oplossingen}}$

4. $-2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ $\boxed{]4,+\infty[}$ $\boxed{]-4,+\infty[}$ $\boxed{[0,+\infty[}$ $\boxed{[0,4[}$ $\boxed{\text{geen oplossingen}}$

Voorbeeld 7.4.6. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x-1} > 3$.

De uitdrukking onder het wortelteken moet positief zijn, anders heeft de opgave geen betekenis. Dit is de bestaansvoorwaarde:

$$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1\,.$$

We mogen kwadrateren omdat beide leden van de ongelijkheid positief zijn en de orde blijft bewaard. We krijgen dan $x-1 > 9$.

Omdat $x-1 > 9$ overeenstemt met $x > 10$, is aan de bestaansvoorwaarde $(x \geq 1)$ zeker voldaan.

De oplossingsverzameling is dus $V =]10,+\infty[$.

In volgende voorbeelden geven we enkel de methode, niet de gehele uitwerking.

Voorbeeld 7.4.7. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \leq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, geen oplossing

Voorbeeld 7.4.8. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \geq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, ongelijkheid steeds voldaan

7.5 Absolute waarde

Definitie 7.5.1 (Absolute waarde).

Voor een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ definiëren we de *absolute waarde* van a, genoteerd $|a|$, als

$$|a| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a & \text{als} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{als} \quad a < 0. \end{cases}$$

Als a positief is, dan is $|a|$ gewoon a, maar als a negatief is, dan is $|a|$ het overeenkomende *positieve* getal $-a$. Dus, $|a|$ is altijd positief.

Voorbeeld 7.5.1 (Eenvoudige voorbeelden van absolute waarden).

(a) $|5| = 5$ en $|-5| = 5$

(b) $|2+1| = |2| + |1| \quad (= 3)$

(c) $|2+(-1)| \neq |2| + |-1|$ (want $1 \neq 3$)

(d) $|(-3)^2| = |3^2| = 9 \quad (= |-3^2| = |-9|)$

(e) $|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$

(f) $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$

(g) $|2-\sqrt{2}| = 2-\sqrt{2}$

(h) $|\sqrt{2}-2| = 2-\sqrt{2}$

Voorbeeld 7.5.2. De vergelijking $|x-5| = 9$ heeft 2 oplossingen want ofwel is $x-5 = 9$ ofwel is $-(x-5) = 9$. De oplossingen zijn dan $x = 14$ of $x = -4$.

Volgende eigenschappen volgen eenvoudig uit de definitie:

Eigenschap 7.5.1. Als $x, y, z \in \mathbb{R}$, dan is

(a) $|x| \geq 0$

(b) $|x| = 0 \iff x = 0$

(c) $|x| = |y| \iff x = \pm y$

(d) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(e) $|-x| = |x|$

(f) $|x-y| = |y-x|$

(g) $|x|^2 = x^2 = |x^2|$ $\quad (= |-x^2| = |(-x)^2|)$

(h) $\sqrt{x^2} = |x|$

(i) $(\sqrt{x})^2 = x$ (als $x \geq 0$ want anders bestaat de wortel niet)

(j) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (absolute waarde van product is product van absolute waarden)

(k) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ met $y \neq 0$ (absolute waarde van quotiënt is quotiënt van absolute waarden)

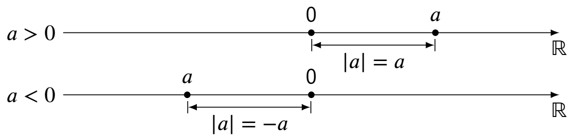
Opmerking 7.5.1 (Eigenschappen van de absolute waarde (met $a \in \mathbb{R}$)).

(a) Pas op: $|-a| = |a|$, maar ZEER ZEKER NIET $\cancel{|-a| = a}$
$|-a| = a$ is FOUT als $a < 0$: als $a = -7$, dan is $|-a| = |-(-7)| \neq -7 = a$

7.5 Absolute waarde

(b) De absolute waarde van een som is niet de som van de absolute waardes $\cancel{|x+y| = |x| + |y|}$, want bijvoorbeeld $|2+(-3)| = |-1| = 1$ terwijl $|2| + |-3| = 2+3 = 5$

Bij de voorstelling van a op de reële rechte $\mathbb{R}$ is $|a|$ gelijk aan de afstand van het punt a tot de oorsprong:

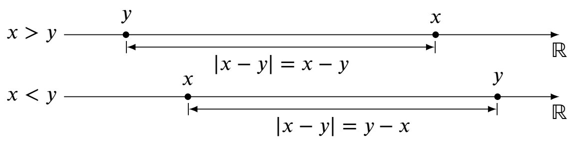


Deze eenvoudige opmerking leidt onmiddellijk tot volgend belangrijk inzicht:

Eigenschap 7.5.2. Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt (op de reële rechte $\mathbb{R}$)

$$\boxed{|x-y| \quad \text{is de afstand tussen } x \text{ en } y.}$$

In het bijzonder is $|x|$ de afstand van x tot de oorsprong.



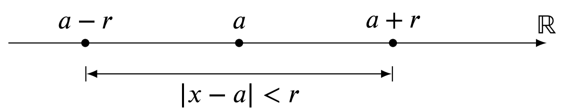
Opmerking 7.5.2.

- Om in $|x-y|$ het absolute waardeteken te kunnen verwijderen, is het dus *niet* van belang het teken te kennen van x en y, maar wel te weten of x al dan niet groter is dan y. Al naargelang het geval, geldt $|x-y| = x-y$ ofwel $|x-y| = y-x$. In de tekening hierboven is het dus *niet* belangrijk waar de oorsprong ligt, enkel de volgorde van x en y telt.
- Merk op dat je elke som gemakkelijk kan schrijven als een verschil, en dat dus ook geldt dat $|x+y| = |x-(-y)|$ gelijk is aan de afstand tussen x en $-y$.

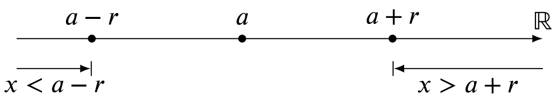
Gecombineerd met ongelijkheden worden volgende eigenschappen afgelezen op de reële rechte:

Eigenschap 7.5.3 (Basiseigenschappen absolute waarde)**.** Als $x, a \in \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{R}_0^+$, dan is

1)	$\|x\| < r$	$\Leftrightarrow$	$-r < x < r$	$\Leftrightarrow$	$x \in]-r, r[$
				$\Leftrightarrow$	x ligt dichter dan r bij 0
2)	$\|x\| > r$	$\Leftrightarrow$	$x < -r$ **of** $r < x$	$\Leftrightarrow$	$x \notin [-r, r]$
				$\Leftrightarrow$	x ligt verder dan r van 0
3)	$\|x-a\| < r$	$\Leftrightarrow$	$-r < x-a < r$	$\Leftrightarrow$	$x \in]a-r, a+r[$
		$\Leftrightarrow$	$a-r < x < a+r$	$\Leftrightarrow$	x ligt dichter dan r bij a
4)	$\|x-a\| > r$	$\Leftrightarrow$	$x-a < -r$ **of** $r < x-a$	$\Leftrightarrow$	$x \notin [a-r, a+r]$
		$\Leftrightarrow$	$x < a-r$ **of** $a+r < x$	$\Leftrightarrow$	x ligt verder dan r van a



7.5 Absolute waarde



Opmerking 7.5.3.

- Met deze eigenschappen kan je dus één ongelijkheid *met* een absolute waarde omzetten in een *dubbele* ongelijkheid *zonder* absolute waarde.
- Deze eigenschappen kunnen ook met $\leq$ geformuleerd worden, bijvoorbeeld

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r \Leftrightarrow x \in [-r, r]$$

Voorbeeld 7.5.3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\left|\frac{2x}{3}\right| < 1$.

Uitwerking:

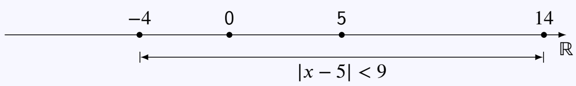
$$\begin{array}{rcll}
\left|\frac{2x}{3}\right| & < & 1 & \\
& \Updownarrow & & \text{(absolute waarde doorschuiven)} \\
\frac{|2||x|}{|3|} & < & 1 & \\
& \Updownarrow & & (|2| = 2, |3| = 3) \\
\frac{2|x|}{3} & < & 1 & \\
& \Updownarrow & & \text{maal } \frac{3}{2} > 0 \\
|x| & < & \frac{3}{2} & \\
& \Updownarrow & & \\
-\frac{3}{2} < & x & < \frac{3}{2} &
\end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

Voorbeeld 7.5.4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x-5| < 9$.

$$\begin{array}{rcll}
|x-5| & < & 9 & \text{(de afstand tussen } x \text{ en } 5 \text{ is kleiner dan } 9) \\
& \Updownarrow & & (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\
-9 < & x-5 & < 9 & (x-5 \text{ ligt tussen } -9 \text{ en } 9) \\
& \Updownarrow & & (+5 \text{ optellen}) \\
-4 < & x & < 14 & (x \text{ ligt tussen } -4 \text{ en } 14)
\end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-4, 14[$.



Oefening 7.5.1.

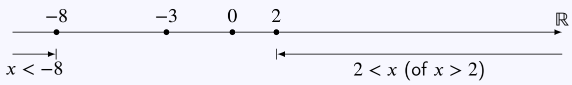
1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|2x-5| < 9$. Oplossingsverzameling: ……

7.5 Absolute waarde

Voorbeeld 7.5.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x+3| > 5$

$$\begin{array}{rcll}
|x+3| & > & 5 & \text{(de afstand tussen } x \text{ en } -3 \text{ is groter dan 5)} \\
 & \Updownarrow & & (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\
x+3 < -5 & \text{of} & 5 < x+3 & \\
 & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen}) \\
x < -8 & \text{of} & 2 < x &
\end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V = \left]-\infty, -8\right[\ \cup \ \left]2, +\infty\right[$.



Voorbeeld 7.5.6. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x^2 - 3| < 9$.

Uitwerking:

$$\begin{array}{rccl}
|x^2-3| & < & 9 & \text{de afstand tussen } x^2 \text{ en 3 is kleiner dan 9} \\
 & \Updownarrow & & (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\
-9 < & x^2-3 & < 9 & \\
 & \Updownarrow & & (\ +3 \text{ optellen}) \\
-6 < & x^2 & < 12 & \\
 & \Updownarrow & & -6 < x^2 \text{ is automatisch voldaan en is dus geen voorwaarde} \\
x^2 & < & 12 & \\
 & \Updownarrow & & \text{beide leden pos., worteltrekken mag} \\
\sqrt{x^2} & < & \sqrt{12} & (\sqrt{12} = 2\sqrt{3}) \\
 & \Updownarrow & & (\sqrt{x^2} = |x|) \\
|x| & < & 2\sqrt{3} & \\
 & \Updownarrow & & (|x| < r \iff -r < x < r) \\
-2\sqrt{3} < & x & < 2\sqrt{3}. &
\end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V = \left]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right[$.

7.6 Driehoeksongelijkheden

De **driehoeksongelijkheid** is een erg belangrijke eigenschap van de absolute waarde, en meer algemeen van het begrip *afstand*.

De driehoeksongelijkheid zegt dat voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\boxed{|x-y| \;\leq\; |x-z| + |z-y|}$$

Vb: $\begin{cases} 3 = |5-2| \leq |5-3| + |3-2| = 2+1 = 3 \\ 3 = |5-2| \leq |5-1| + |1-2| = 4+1 = 5 \end{cases}$

en drukt uit dat de *absolute waarde* $|x-y|$ *van een verschil* de *(kortste) afstand* is tussen x en y. Inderdaad, de ongelijkheid zegt dat $|x-y|$ steeds korter (i.e. kleiner) is dan de langs een willekeurig getal z te passeren, dus via $|x-z| + |y-z|$.

Je kan de driehoeksvergelijking wat manipuleren als volgt:

- door in het rechterlid $x-z = a$ en $z-y = b$ te schrijven, verkrijg je $a+b = x-y$, en dus $\boxed{|a+b| \;\leq\; |a| + |b|}$.

- door nu $a = x-y$ en $b = y$ te nemen, krijg je $|x| = |x-y+y| \;\leq\; |x-y| + |y|$, en dus $|x| - |y| \leq |x-y|$. En met $a = x$ en $b = y-x$ krijg je $|y| = |x-(y-x)| \;\leq\; |x| + |y-x|$, en dus $|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|$. Als zowel $|x| - |y|$ als $|y| - |x|$ kleiner zijn dan $|x-y|$ geldt natuurlijk ook $\boxed{\big|\,|x| - |y|\,\big| \leqslant |x-y|}$.

Eigenschap 7.6.1. Voor $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt de (eerste) driehoeksongelijkheid

$$\boxed{|x-y| \;\leq\; |x-z| + |z-y|}$$

Vb: $\begin{cases} 3 = |5-2| \leq |5-3| + |3-2| = 2+1 = 3 \\ 3 = |5-2| \leq |5-1| + |1-2| = 4+1 = 5 \end{cases}$

of equivalent (kies $x \rightsquigarrow x-z$ en $y \rightsquigarrow z-y$)

$$\boxed{|x+y| \;\leq\; |x| + |y|}$$

Vb: $\begin{cases} 7 = |5+2| \leq |5| + |2| = 5+2 = 7 \\ 3 = |5+(-2)| \leq |5| + |-2| = 5+2 = 7 \end{cases}$

Hieruit volgt de tweede driehoeksongelijkheid

$$\boxed{\big|\,|x| - |y|\,\big| \leqslant |x-y|}$$

Vb: $\begin{cases} 3 = \big|\,|5| - |2|\,\big| \leq |5-2| = 3 \\ 3 = \big|\,|5| - |-2|\,\big| \leq |5-(-2)| = 7 \end{cases}$

Opmerking 7.6.1.

Uit $|x+y| \;\leq\; |x| + |y|$ volgt ook onmiddellijk dat $|x-y| \leq |x| + |y|$ (want $x - y = x + (-y)$ en $|y| = |-y|$). Maar natuurlijk geldt NIET ALTIJD dat $|x-y| \cancel{\leq} |x| - |y|$. De tweede driehoeksongelijkheid geeft een soort omgekeerde: $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq \; |x-y|$.

De driehoeksongelijkheid geeft dus slechts *de helft* van de niet bestaande gelijkheid $|x+y| \cancel{=} |x| + |y|$ die sommigen wel eens op roekeloze wijze durven toepassen.

Oefening 7.6.1. Toon aan dat $|y| - 7 < |x| < |y| + 7$ zodra $|x-y| < 7$.

Oefening 7.6.2. Toon aan dat $|6x-2| < 16$ zodra $|x+2| < 1/3$.

Oefening 7.6.3. Als $|x+5| \leqslant 2$ en $|y+5| \leqslant 6$, dan kan $|x-y|$ maximaal gelijk zijn aan ……? Geef een concreet voorbeeld waarvoor die maximale waarde van $|x-y|$ bereikt wordt.

7.6 Driehoeksongelijkheden

Oefening 7.6.4. Bestaan er $x, y, z, \in \mathbb{R}$ waarvoor $|x+1| \leqslant 2, |y+1| \leqslant 3,\ |y-z| \leqslant 1$ en $|x-z| \geqslant 7$? Argumenteer!

Oefening 7.6.5 (Uitdaging: extra oefening over driehoeksongelijkheden).

Vind voor elke $a \in \mathbb{R}$ een $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ zodat dan voor alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $|a-x| < \varepsilon$ geldt dat $\frac{|a|}{2} < |x|$?

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

Module 8
Limieten

(Versie 2024/10/24HB.16)

8.1 Intro limieten

Soms is er onvoldoende informatie om fenomenen in alle detail te bestuderen, of wordt dergelijke studie erg moeilijk en tijdrovend. Men kan zich dan afvragen of iets nuttigs kan beweerd worden over een 'limietgeval', bijvoorbeeld voor erg kleine of erg grote waarden van één of andere parameter.

Wiskundigen hebben dit geformaliseerd in het technisch begrip 'limiet'. En met dat begrip kan je niet enkel dergelijke 'limietgevallen' beschrijven, maar op een wat merkwaardige manier ook nieuwe begrippen definiëren die op het eerste zicht niet noodzakelijk iets met *limietgevallen* te maken hebben zoals continuïteit, afgeleiden en integralen.

We beperken ons hier tot enkele basiseigenschappen en rekenregels van limieten.

In wat volgt hebben we de leerstof over limieten als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Een (pseudo-)definitie van het begrip limiet van een functie

(3) Enkele rekenregels voor limieten

(4) Enkele eigenschappen van limieten in oneindig

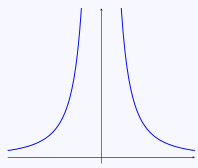
(5) Enkele eigenschappen van limieten in nulpunten van de noemer

8.2 Definitie limieten

Functies zoals $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ of $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ zijn niet gedefinieerd in $x = 0$ maar bestaan wel *in de buurt* van $x = 0$.

Met het begrip *limiet van een functie* $x \mapsto f(x)$ *als* x *naar* 0 *gaat* kan in goede gevallen het gedrag van f rond 0 worden weergegeven. We geven hier enkel een eerder informele definitie, bepalen dan enkele basislimieten en beschrijven daarna hoe met rekenregels vanaf die basislimieten ingewikkeldere limieten kunnen worden bepaald. Limieten worden gebruikt bij integralen en afgeleiden, maar ook bij asymptoten en het bestuderen van het verloop van functies.

Voorbeeld 8.2.1. De functie $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



$y = \frac{1}{x^2}$	0	$\downarrow$	0.01	1	100	$\uparrow$	$+\infty$	$\uparrow$	100	1	0.01	$\downarrow$	0
x	$-\infty$	$\leftarrow$	-10	-1	-0.1	$\rightarrow$	0	$\leftarrow$	0.1	1	10	$\rightarrow$	$+\infty$

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $1/x^2$ niet gedefinieerd, maar zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat *in de buurt van* $x = 0$ *de functiewaarden steeds groter* worden.

Dat *alle* functiewaarden *onbeperkt groter* worden naarmate x dichter bij $x = 0$ komt noteren we als

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \qquad \text{of} \qquad \frac{1}{x^2} \to +\infty \text{ als } x \to 0$$

en we zeggen:

- de **limiet** van de functie $x \mapsto 1/x^2$ als x naar 0 gaat is **plus oneindig** of
- de functie $x \mapsto 1/x^2$ **gaat naar** plus oneindig als x naar nul **gaat**, of
- de functie $x \mapsto 1/x^2$ **wordt** plus oneindig als x nul **wordt**.

We voeren daarbij dus zowel het begrip 'limiet' als het begrip 'plus oneindig' ($+\infty$) in.

Als x steeds *groter* wordt, dan komen de functiewaarden $1/x^2$ willekeurig dicht bij nul te liggen. Dat alle functiewaarden willekeurig dicht bij nul komen naarmate x groter wordt noteren we als

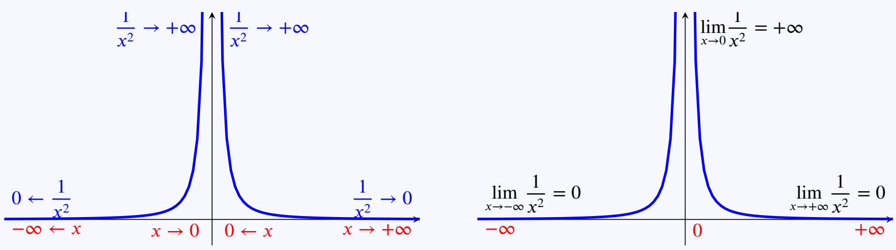
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \text{of} \qquad \frac{1}{x^2} \to 0 \text{ als } x \to +\infty$$

en we zeggen:

- de **limiet** van de functie $x \mapsto 1/x^2$ als x naar $+\infty$ gaat is 0.

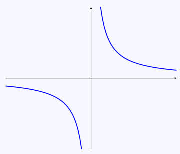
Hetzelfde gebeurt als x erg negatief wordt: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

De situatie wordt verduidelijkt op volgende tekening:



8.2 Definitie limieten

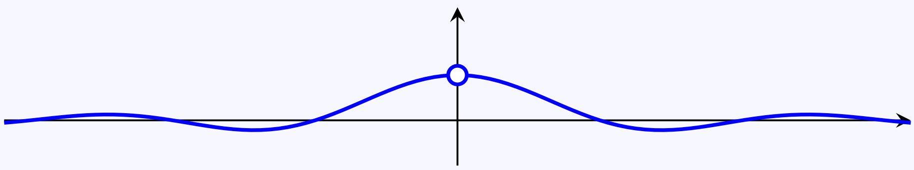
Voorbeeld 8.2.2. De functie $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



$y = \frac{1}{x}$	0	$\downarrow$	-0.1	1	-10	$\downarrow$	$-\infty$	$\neq$	$+\infty$	$\uparrow$	10	1	0.1	$\downarrow$	0
x	$-\infty$	$\leftarrow$	-10	-1	-0.1	$\rightarrow$		0		$\leftarrow$	0.1	1	10	$\rightarrow$	$+\infty$

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $1/x$ niet gedefinieerd, en zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat *in de buurt van* $x = 0$ de functiewaarden steeds *groter* worden voor positieve x, maar dat ze steeds *kleiner* worden voor negatieve x. We zeggen in dat geval dat de limiet van de functie $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ als $x \to 0$ *niet bestaat*. In dit geval kunnen de begrippen *linkerlimiet* en *rechterlimiet* voor 'naderen langs links' of 'naderen langs rechts' de situatie beschrijven.

Voorbeeld 8.2.3. De functie $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ heeft volgende grafiek en functietabel:



x	$\dfrac{\sin x}{x}$
0	niet gedefinieerd
0.01	0.999983
0.1	0.998334
1	0.841470
10	−0.054402
100	−0.005063

Voor $x = 0$ is de functiewaarde $\dfrac{\sin x}{x}$ niet gedefinieerd, maar zowel uit de grafiek als uit de tabel blijkt dat in de buurt van $x = 0$ de functiewaarden *willekeurig dicht* bij 1 komen te liggen.

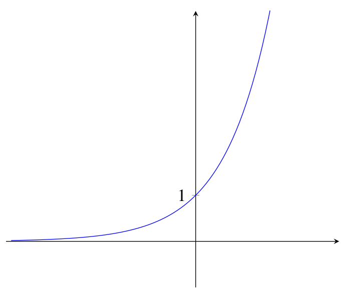
Dat alle functiewaarden willekeurig dicht bij één komen naarmate x dichter bij nul ligt noteren we als

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

en we zeggen: de *limiet* van de functie $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ als x naar 0 gaat is 1.

Op dezelfde manier blijkt dat $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ en ook $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Oefening 8.2.1. Lees de volgende limieten af op de grafiek.



8.2 Definitie limieten

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x =$ | 0 | 1 | $+\infty$ | $-\infty$ | bestaat niet |

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x =$ | 0 | 1 | $+\infty$ | $-\infty$ | bestaat niet |

3. $\lim\limits_{x\to 0} e^x =$ | 0 | 1 | $+\infty$ | $-\infty$ | bestaat niet |

Limieten zijn vooral nuttig om het gedrag van functies te bestuderen op de grens (of de 'limiet') van hun domein. Dat kunnen bijvoorbeeld geïsoleerde punten zijn waar de functie niet gedefinieerd is zoals nulpunten van de noemer, maar dankzij de begrippen $+\infty$ en $-\infty$ werkt het ook voor 'heel erg grote waarden' van x. Het blijkt dat het begrip ook werkt voor punten die tot het domein zelf behoren.

Een formele wiskundige definitie van het begrip limiet is enigszins ingewikkeld, en we beperken ons hier tot volgende pseudo-definitie:

Definitie 8.2.1 (Intuïtieve pseudo-definitie van limiet)**.** Voor een reële functie f en voor L en c telkens ofwel een reëel getal ofwel één van de symbolen $+\infty$ of $-\infty$, zeggen en schrijven we dat

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$	$\iff$	de **limiet** van f in c is gelijk aan L
	$\iff$	de limiet van f als x naar c gaat is gelijk aan L
	$\iff$	als x naar c gaat, dan gaat $f(x)$ naar L
	$\iff$	als $x \to c$, dan $f(x) \to L$
	$\iff$	voor alle x-waarden erg dicht bij c liggen de functiewaarden $f(x)$ zeer dicht bij L.

Niet voor alle functies f en alle getallen c bestaat de limiet $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.

In eenvoudige gevallen zijn limieten dus uitdrukkingen zoals $\lim\limits_{x\to 2}(x+3) = 5$. Door ook de symbolen $+\infty$ en $-\infty$ toe te laten kunnen we echter ineens ook beschrijven wat er gebeurt als de variabele x groot wordt, zoals bij $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ of als de functiewaarden groot worden, zoals bij $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Als de functiewaarden niet naar één vaste waarde gaan, dan bestaat de limiet niet. Voor $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ worden de functiewaarden erg groot voor grote positieve x, maar ze zijn negatief voor negatieve x.
Als een functie niet gedefinieerd is in de buurt van c is het onmogelijk functiewaarden te berekenen als x naar c gaat. Dan bestaat de limiet niet, zoals bijvoorbeeld voor $\lim\limits_{x\to -5} \sqrt{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ of $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln x$.

Opmerking 8.2.1.

- In de definitie van $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ heeft de waarde $f(c)$ van f in c – als die al bestaat – geen enkel belang : enkel de waarden van f *in de buurt van* c bepalen de limiet.
  We zullen verder wel zien dat zodra f *continu* is in c geldt dat $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.
- In de uitdrukking $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ ligt c op de x-as (het domein van f), en de limiet L op de y-as.
- Het symbool ∞ voor 'oneindig' is voorlopig enkel een notatie voor 'wordt willekeurig groot'. Verder zal met rekenregels de betekenis van $+\infty$ en $-\infty$ concreter worden vastgelegd.
- De limiet van f als x gaat naar c is enkel bepaald als f gedefinieerd is in de buurt van c, zoals meestal het geval is bij punten of randpunten van het domein van f. Zo kunnen we spreken van de limiet van $f(x) = \sqrt{x}$ in de punten 1 en π en 81 (punten van het domein), of in 0 of $+\infty$ (punten 'op de rand van het domein'), maar de limiet in de punten -1 en -314 heeft *geen*

betekenis want het is niet mogelijk om $\sqrt{x}$ te bepalen als x gaat naar -1. Ook de limieten $\lim_{x\to-\infty} \ln x$ en $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ bestaan niet.

8.3 Rekenregels limieten

In de praktijk worden limieten berekend met volgende rekenregels:

de limiet van een	som	is de	som	van de limieten tenzij je een onbepaalde vorm krijgt,
de limiet van een	verschil	is het	verschil	van de limieten tenzij je een onbepaalde vorm krijgt,
de limiet van een	product	is het	product	van de limieten tenzij je een onbepaalde vorm krijgt,
de limiet van een	quotiënt	is het	quotiënt	van de limieten tenzij je een onbepaalde vorm krijgt.

De beperking in verband met onbepaalde vormen is erg belangrijk, zoals blijkt uit volgend voorbeeld.

Voorbeeld 8.3.1 (Is de limiet van de som altijd gelijk aan de som van de limieten?).

Beschouw de functies $f : x \mapsto x$ en $g : x \mapsto a - x$, met $a \in \mathbb{R}$. Dan is $f(x) + g(x) = x + (a - x) = a$ en kennen we volgende limieten op basis van de grafieken van deze eenvoudige functies:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\
\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} (a - x) = -\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \big(g(x) + f(x)\big) &= \lim_{x\to+\infty} a = a
\end{aligned}$$

Stel dat volgende regel zou gelden

$$\lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to c}\big(f(x) + g(x)\big).$$

Omdat $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ en $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a = a$ zou dan

$$(+\infty) + (-\infty) \stackrel{?}{=} a$$

Maar a kan hierbij *willekeurig* gekozen worden: voor a kan je even goed 0 kiezen als 2 of $2\pi/3$ ....
We noemen daarom $(+\infty) + (-\infty)$ een onbepaaldheid of een onbepaalde vorm.

De regel dat de limiet van een som de som is van de limieten, $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$, geldt enkel wanneer $\lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$ *geen onbepaaldheid oplevert*.

De rekenregels voor $\pm\infty$ zijn zodanig opgesteld dat volgende rekenregels voor limieten zouden gelden. Ook als een limiet $+\infty$ of $-\infty$ is zeggen we dat deze limiet **bestaat**.

Eigenschap 8.3.1 (Rekenregels limieten).

Voor continue functies f, g waarvoor de limieten $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ en $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ bestaan,

gelden volgende (reken-)regels **tenzij ze een onbepaaldheid geven**:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}\big(f(x) + g(x)\big) &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) && \text{lim(som)} = \text{som(lims)} \\
\lim_{x\to c}\big(f(x) - g(x)\big) &= \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) && \text{lim(verschil)} = \text{verschil(lims))} \\
\lim_{x\to c}\big(f(x) \cdot g(x)\big) &= \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) && \text{lim(product)} = \text{product(lims)} \\
\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} && \text{lim(quotient)} = \text{quotient(lims)}
\end{aligned}$$

Voorbeeld 8.3.2.

1. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 + \lim\limits_{x\to 1} x = 1+1 = 2$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-3\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 0-3 = -3$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left((x^2+x)\cdot\left(\frac{1}{x}-3\right)\right) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+x)\cdot\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}-3\right) = 2\cdot(-2) = -4$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{2}{x}-3}{x^2+x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{x}-3\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x)} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

In volgende voorbeelden leidt de toepassing van dezelfde rekenregels echter tot onbepaaldheden:

Voorbeeld 8.3.3.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x) \stackrel{?}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \lim\limits_{x\to+\infty} x = \infty-\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^3-x)\cdot\dfrac{1}{x^3}\right) \stackrel{?}{=} \lim\limits_{x\to 0}(x^3-x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3} = 0\cdot(+\infty)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1} \stackrel{?}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)} = \dfrac{0}{0}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x+2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$

Als je een onbepaalde vorm uitkomt, betekent dat niet dat de limiet niet bestaat. Het betekent enkel dat je die bepaalde rekenregel niet mag toepassen om de limiet te berekenen. Bovenstaande limieten kunnen als volgt toch worden berekend:

Voorbeeld 8.3.4.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(x-1) \stackrel{?}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = \infty\cdot\infty = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^3-x)\cdot\dfrac{1}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1-\infty = -\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

   Merk op dat het wegdelen van de gemeenschappelijk factor $x-1$ niet toegelaten is als $x-1$ nul is, of dus als $x=1$. Maar voor het bepalen van de limiet als x gaat naar 1 moet enkel rekening gehouden worden met waarden voor x in de buurt van 1 en niet voor $x=1$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{x})}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \dfrac{+\infty}{1} = +\infty$

Voorbeeld 8.3.5. Deze rekenregels mogen niet gebruikt worden als ze een onbepaaldheid geven:

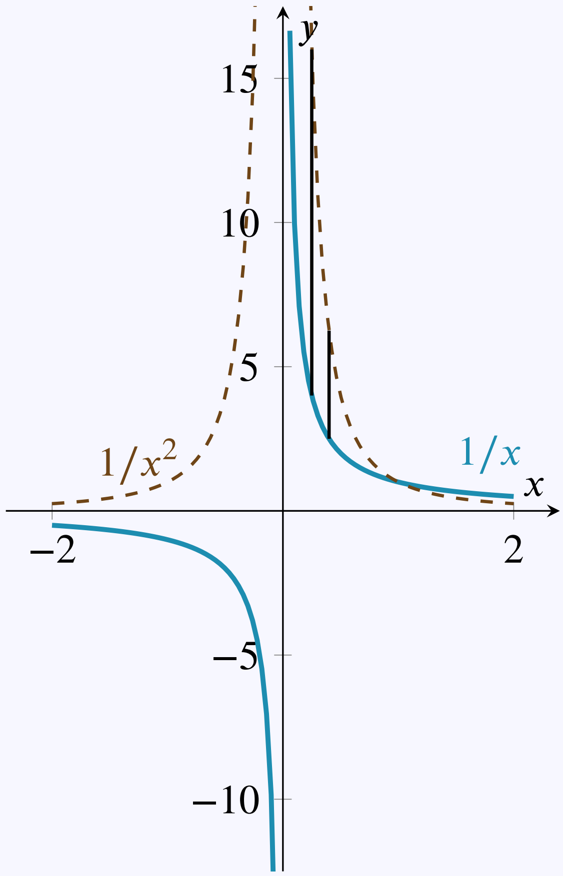
8.3 Rekenregels limieten

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}+\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x^2}=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$$

maar $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\neq\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}-\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x^2}=(+\infty)-(+\infty)$ (onbepaald!)

terwijl $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{x-1}{x^2}=\frac{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(x-1)}{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}x^2}=\frac{-1}{0}=-\infty$

Als x nadert tot 0 langs rechts, wordt het verschil tussens $1/x$ en $1/x^2$ inderdaad willekeurig groot.



8.4 Limieten in $\pm\infty$

Voorbeeld 8.4.1. Bereken $\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)$.

Als we proberen de regel 'limiet van de som is som van de limieten' te gebruiken, krijgen we

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to+\infty}3x^2-\lim_{x\to+\infty}4x+\lim_{x\to+\infty}2\\ &= 3\cdot(+\infty)-4\cdot(+\infty)+2\\ &= \infty-\infty,\ \text{ en dus ONBEPAALD}\end{aligned}$$

Conclusie: we mogen de rekenregel *niet* toepassen. We hebben een fout gemaakt. De eerste gelijkheid geldt niet:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)\neq\lim_{x\to+\infty}3x^2-\lim_{x\to+\infty}4x+\lim_{x\to+\infty}2$$

Er is echter een manier om de onbepaaldheid te omzeilen, en de limiet *toch* te berekenen met behulp van de rekenregels. We kunnen namelijk *de hoogstegraadsterm buiten haakjes te brengen*, en daardoor de limiet van een som omzetten in de limiet van een product. Verder gebruiken we dan de rekenregel voor limieten van een product. We beginnen de berekening met:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})$$

We weten dat

$$\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})=\lim_{x\to+\infty}(3)-\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=3+0+0=3$$

dus als we de limiet van dit product van functies schrijven als het product van de limieten krijgen we geen onbepaalde vorm:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})\\ &= \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\lim_{x\to+\infty}(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})\\ &= (+\infty)\cdot 3=+\infty,\ \text{ en dus GEEN onbepaaldheid}\end{aligned}$$

Als de rekenregels voor limieten een onbepaaldheid opleveren, probeer je de onbepaaldheid te *omzeilen*. Een mogelijke oplossing bij de limiet in $c=\pm\infty$ van een som is om de term die het snelst naar oneindig gaat buiten haakjes te brengen en zo een som om te zetten in een product. Bij de limiet van een veelterm is dit de hoogstegraadsterm. We zetten enkel de macht van x buiten haakjes, de coëfficiënt laten we binnen haakjes staan. Dit idee beperkt zich echter niet tot veeltermen. We geven nog enkele voorbeelden:

Voorbeeld 8.4.2. Bereken $\lim_{x\to+\infty}(2e^{3x}-5e^{2x})$.

$$\lim_{x\to+\infty}(2e^{3x}-5e^{2x})=\lim_{x\to+\infty}e^{3x}(2-\frac{5}{e^x})=(+\infty).2=+\infty$$

Voorbeeld 8.4.3. Bereken $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-6x+1}{2x^2+11x-8}$.

Dit is de limiet van een quotiënt, maar het quotiënt van de limieten geeft $\frac{+\infty}{+\infty}$, en dus kunnen we de gewone rekenregel niet toepassen. We zetten nu zowel in teller als in noemer de hoogstegraadsterm buiten haken:

8.4 Limieten in $\pm\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-6x+1}{2x^2+11x-8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(3-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2+\frac{11}{x}-\frac{8}{x^2})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{11}{x}-\frac{8}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

Opmerking 8.4.1.

- Door het toepassen van de rekenregels zie je dat de limiet voor $x\to\pm\infty$ gelijk is aan de limiet van de hoogstegraadsterm voor een veeltermfunctie, en gelijk is aan het quotiënt van de hoogstegraadstermen in teller en noemer voor een rationale functie. In de oefeningen wordt echter verwacht dat je niet gewoon het eindresultaat opschrijft, maar dat je telkens met de rekenregels uitwerkt hoe je hier aan komt.
- Het heeft geen zin om de termen die het snelst naar oneindig gaan buiten haken te brengen bij een limiet in een nulpunt van de noemer zoals bijvoorbeeld:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{x^2+x-1}{x-1}$$

Ook bij irrationale functies zetten we de term die het snelst naar oneindig gaat buiten haken:

Voorbeeld 8.4.4. Bereken $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+3x\right)$.

Dit is de limiet van een som, maar de som van de limieten geeft $\infty-\infty$, en dus kunnen we deze rekenregel niet toepassen. We zetten stap voor stap de hoogste macht van x buiten haken:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+3x\right)&=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}+3x\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3x\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3x\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3\right)\\&=\left(\lim_{x\to-\infty}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3\right)\right)\\&=(-\infty)\cdot\left(-\sqrt{4}+3\right)\\&=-\infty\end{aligned}$$

Merk op: we hebben $|x|$ vervangen door $-x$ omdat we de limiet in $-\infty$ moeten berekenen, en voor negatieve x is inderdaad $|x|=-x$.

Opmerking 8.4.2.

Let op bij het berekenen van limieten met vierkantswortels:

$\sqrt{x^2}=|x|$ dus

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to-\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} -x = -(-\infty) = +\infty$

Deze techniek werkt echter niet altijd. We nemen een voorbeeld dat erg lijkt op het vorige voorbeeld, maar toch op een heel andere manier uitgerekend moet worden:

Voorbeeld 8.4.5. Bereken $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right) &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}+2x\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2x\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2x\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)\\
&= \left(\lim_{x\to-\infty} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)\right)\\
&= (-\infty)\cdot\left(-\sqrt{4}+2\right)\\
&= (-\infty)\cdot 0
\end{aligned}$$

Met deze berekeningen krijgen we een onbepaaldheid, dus moeten we een andere techniek gebruiken om deze limiet te kunnen uitrekenen. We vermenigvuldigen teller en noemer met de toegevoegde tweeterm. De toegevoegde tweeterm nemen wil zeggen dat we het plusteken tussen de twee termen vervangen door een minteken, of omgekeerd.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+7x}+2x)(\sqrt{4x^2+7x}-2x)}{\sqrt{4x^2+7x}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+7x-4x^2}{\sqrt{4x^2+7x}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{7x}{|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{7x}{-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{7}{-\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2}\\
&= \frac{7}{-\sqrt{4}-2} = -\frac{7}{4}
\end{aligned}$$

8.5 Limieten in nulpunten van de noemer

1. Limieten van de vorm $\boxed{\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}}$ met $\boxed{f(c)=0}$

We hebben in het inleidend voorbeeld gezien dat $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{1}{x}=-\infty$ en dat $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ niet bestaat.

Analoog kunnen we volgende situaties tegenkomen bij het berekenen van $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$, $c\in\mathbb{R}$:

- Als $f(x)>0$ in een omgeving van c dan is $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.
- Als $f(x)<0$ in een omgeving van c dan is $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.
- Als $f(x)>0$ voor $x>c$ en $f(x)<0$ voor $x<c$ dan is $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ >}}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ <}}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$
- Als $f(x)<0$ voor $x>c$ en $f(x)>0$ voor $x<c$ dan is $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ >}}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ <}}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

Om deze limieten te berekenen moet je dus het tekenverloop van de noemer $f(x)$ zoeken in de buurt van c. Je hoeft hiervoor niet het gehele tekenverloop van $f(x)$ op te stellen, in de buurt van c volstaat.

Voorbeeld 8.5.1.

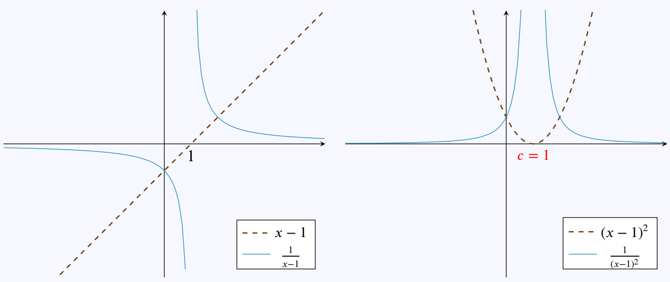
1. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ want de noemer $x-1$ is positief voor $x>1$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ want de noemer $x-1$ is negatief voor $x<1$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$ bestaat niet, want de noemer $x-1$ verandert van teken rond $x=1$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$, want de noemer $x-1$ is positief rond $x=1$.

Ter illustratie geven we bij deze eenvoudige voorbeelden ook de grafieken van $\dfrac{1}{f(x)}$ en van $f(x)$. In het algemeen echter hebben functies met nulpunten in de noemer geen eenvoudige grafieken en gebruik je niet de grafiek om de limiet af te lezen maar bereken je juist de limieten in deze nulpunten van de noemer om meer te weten te komen over de grafiek van de functie.



Opmerking 8.5.1.

8.5 Limieten in nulpunten van de noemer

Merk op dat $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{f(x)}$ met $f(c) = 0$ steeds $+\infty$ of $-\infty$ is als de limiet bestaat.

Als de linker- en rechterlimiet verschillen, dan bestaat $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{f(x)}$ niet.

2. Limieten van de vorm $\boxed{\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)}}$ **met** $\boxed{f(c) = 0}$

(a) **c is geen nulpunt van de teller**

In dit geval is c dus een nulpunt van de noemer maar geen nulpunt van de teller.

Dan kunnen we de limiet als volgt herschrijven:

$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to c} g(x) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = g(c) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)}.$$

Dit is geen onbepaalde vorm vermits $g(c) \neq 0$. Om de limiet verder uit te rekenen moeten we het teken van $g(c)$ kennen en de limiet $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{f(x)}$ berekenen. Het tekenverloop van de *teller* moet je niet zoeken, enkel het *teken* van $g(c)$ heeft belang.

Voorbeeld 8.5.2.

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{x^2+x-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} (x^2+x+1) \cdot \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{1}{x-1} = (1^2+1-1)\cdot(+\infty) = +\infty$$

(b) **c is een nulpunt van teller en noemer**

Dit geval leidt tot de onbepaalde vorm $\dfrac{0}{0}$.

Bij **rationale functies** kunnen we in dit geval teller en noemer ontbinden in factoren en de factor $x - c$ wegdelen in teller en noemer.

Voorbeeld 8.5.3.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Bij sommige **irrationale functies** kunnen we teller en noemer vermenigvuldigen met de toegevoegde uitdrukking van teller of noemer.

Voorbeeld 8.5.4.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Opmerking 8.5.2. Men kan limieten die de onbepaalde vorm $\dfrac{0}{0}$ geven ook berekenen met de regel van de l'Hôpital.

8.5 Limieten in nulpunten van de noemer

Samengevat wordt dit:

Eigenschap 8.5.1. De limiet in een nulpunt van de noemer bereken je als volgt:

1.	$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}$	met $f(c)=0$:	**tekenverloop** van $f(x)$ in de buurt van c
1.a	als	$f(x)>0$ rond c	limiet is $+\infty$
1.b		$f(x)<0$ rond c	limiet is $-\infty$
1.c		$f(x)$ verandert van teken in c	linker- en rechterlimiet zijn verschillend
2.	$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g(x)}{f(x)}$	met $f(c)=0$:	
2.a	als	$g(c)\neq 0$:	**reduceer tot geval 1** want $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to c}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}=g(c)\cdot\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}$.
2.b	als	$g(c)=0$:	onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ wegwerken via
		met f en g veeltermen	**gemeenschappelijke factor** $x-c$ wegdelen
		met f *of* g som van wortels	vermenigvuldigen met **toegevoegde tweeterm**
		met f en g afleidbaar	**l'Hôpital** toepassen

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

MODULE 9
AFGELEIDEN

(Versie 2024/10/24HB.16)

9.1 Intro afgeleiden

Het begrip *afgeleide* komt frequent voor in allerlei wetenschappelijke en andere contexten. De techniek van afgeleiden laat toe om erg precies, erg efficiënt en in erg uiteenlopende situaties *veranderingen* te bestuderen.

Vele fenomenen zoals bewegingen, temperatuursverlopen, productievolumes, epidemies en hoogteprofielen van wielerwedstrijden kunnen beschreven worden als functies. *Afgeleiden* zeggen dan iets over de *veranderingen van de functiewaarden*. Hoe *verandert* de temperatuur, het geproduceerde volume, het aantal besmette personen als de tijd, de prijs of de sociale contacten veranderen? In vele contexten is de *waarde* van de functie zelfs minder belangrijk dan de *verandering van de waarde*. Een renner die een berg oprijdt, hecht op cruciale momenten in de wedstrijd meer belang aan de *verandering van de hoogte*, dat is de steilheid van de berg, dan aan de *absolute hoogte* op dat punt. De winst die iemand behaalt bij een belegging in aandelen hangt niet zozeer af van de *waarde* van de aandelen op een bepaald ogenblik, maar van de *verandering van die waarde* tussen de aankoop en de verkoop.

In deze context begrijpen we functies dikwijls als een verband tussen een 'onafhankelijke' variabele (de tijd, de prijs, de lockdown maatregelen) en de 'afhankelijke' variabele (de temperatuur, de hoeveelheid geproduceerde producten of het aantal besmette personen). In wiskundige taal noemen we de onafhankelijke variabele typisch x (maar soms ook t als het over tijd gaat, of s, of andere letters) en de afhankelijke grootheid is dan een functie die we typisch f noemen (maar soms ook T als het over temperatuur gaat, of v en a als het snelheden en versnellingen zijn). Als we de afhankelijke grootheid ook als 'variabele' willen weergeven, gebruiken we dikwijls de letter y en schrijven we $y = f(x)$, of soms ook $y(x)$, om aan te duiden dat de grootheid y afhangt van x.

Afgeleiden geven informatie over de *verhouding* tussen *de verandering van de afhankelijke variabele* ten opzichte van *de verandering van de onafhankelijke variabele*. Als je de onafhankelijke variabele varieert, wat gebeurt er dan met de afhankelijke variabele? Stijgt die, of daalt die, en hoe snel of hoe traag gebeurt dat? Je kan hetzelfde ook begrijpen in termen van *gevoeligheid*: hoe gevoelig is de afhankelijke variabele aan een wijziging in de onafhankelijke variabele?

Een aangename manier om vertrouwd te raken met de betekenis van afgeleiden (en integralen), is het met aandacht bekijken van de geniale videos van 3Blue1Brown:

YouTube link: `https://www.youtube.com/embed/WUvTyaaNkzM`

In wat volgt hebben we de leerstof over afgeleiden als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Enkele voorbeelden en een wiskundige definitie

(3) Een kleine uitweiding over het begrip differentiaal

(4) Enkele basisregels over het berekenen van afgeleiden

(5) De afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

(6) De afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies

(7) Regels voor producten en quotiënten van functies

(8) Regels voor samenstellingen van functies

(9) Hogere orde afgeleiden

(10) Afgeleide van inverse van een functie

(11) De regel van l' Hôpital om limieten te berekenen

(12) Als toepassing het oplossen van minimum-maximum problemen

9.2 Definitie van afgeleide

De *afgeleide* van een functie f in een punt a geeft de *gevoeligheid* weer van de functiewaarde $f(x)$ voor kleine veranderingen van x in de buurt van a. Als de afgeleide gelijk is aan 1 verandert $f(x)$ ongeveer even snel als x, als de afgeleide 2 is dubbel zo snel, en als de afgeleide $1/2$ is half zo snel. De afgeleide is dus de *verhouding* tussen de verandering van $f(x)$ en die van x. Er is jammer genoeg een technische complicatie: die verhouding hangt in het algemeen af van de *grootte* van de verandering van x. En als de verandering in x nul is, dan verandert $f(x)$ natuurlijk ook niet, en is er geen verhouding te bepalen. De oplossing ligt in het begrip limiet en lijkt bij een eerste kennismaking misschien wat duister en zelfs afschrikwekkend. Gelukkig is het algemeen idee wel relatief eenvoudig, en in de praktijk wordt de definitie altijd vervangen door handige rekenregels.

Voorbeeld 9.2.1 (Gevoeligheid voor verandering bij rechten)**.**

De 'gevoeligheid voor verandering' is het duidelijkst zichtbaar bij rechten, dus bij *eerstegraadsfuncties*. De theorie van afgeleiden breidt dit uit tot veel algemenere functies.

Als x een klein beetje verandert bij een erg steile rechte, bijvoorbeeld $y = 100x + 42$, dan is de verandering in y veel groter dan die van x:

Als $y = 100x + 42$ en $\quad x \rightsquigarrow x + 1$
dan $\quad y \rightsquigarrow y + 100 \quad$ want $100(x + 1) + 42 = \underbrace{100x + 42}_{y} + 100 = y + 100$

Voor de erg vlakke rechte $y = \frac{1}{100}x + 42$ is de verandering in y dan weer veel kleiner dan die in x:

Als $y = \frac{1}{100}x + 42$ en $\quad x \rightsquigarrow x + 100$
dan $\quad y \rightsquigarrow y + 1 \quad$ want $\frac{1}{100}(x + 100) + 42 = \underbrace{\frac{1}{100}x + 42}_{y} + 1 = y + 1$

Conclusie: de richtingscoëfficiënt is een maat voor de gevoeligheid van y voor veranderingen in x. Het extreme geval is richtingscoëfficiënt gelijk aan nul: dan verandert y helemaal niet als x verandert.

Om later deze eenvoudige situatie voor rechten beter te kunnen vergelijken met het meer algemene geval, beschrijven we ze ook in detail in de taal van functies.

De functiewaarde van $f : x \mapsto f(x) = 2x - 1$ verandert in elk getal a dubbel zo snel als a zelf: als bij a één bijkomt dan komt er bij $f(a)$ twee bij, want

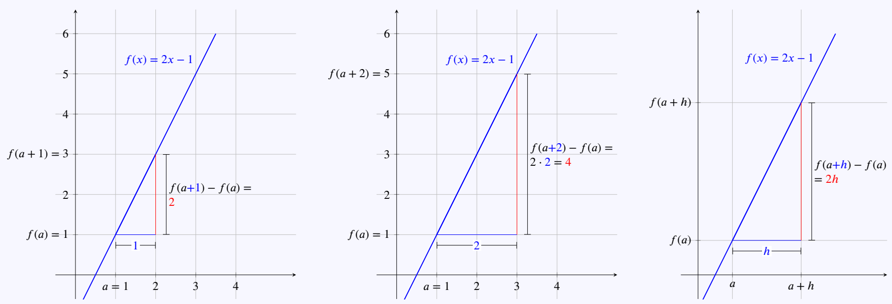
$$f(a+1) = 2(a+1) - 1 = 2a + 1 = (2a - 1) + 2 = f(a)+2$$

Als bij a twee bijkomt, stijgt $f(a)$ met $2 \cdot 2 = 4$:

$$f(a+2) = 2(a+2) - 1 = 2a + 3 = (2a - 1) + 4 = f(a)+4$$

en als bij a drie bijkomt, stijgt $f(a)$ met $2 \cdot 3 = 6$:

$$f(a+3) = 2(a+3) - 1 = 2a + 5 = (2a - 1) + 6 = f(a)+6$$



9.2 Definitie van afgeleide

Als h de verandering is rond a, dan is de *verandering* van $f(a)$ naar $f(a+h)$ wiskundig het *verschil* tussen $f(a+h)$ en $f(a)$, dus $f(a+h)-f(a)$.

We stellen vast dat voor deze functie $f: x \mapsto 2x-1$ de verandering van de functiewaarden afhangt van de verandering h van x maar dat de *verhouding* tussen beide veranderingen constant is:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2(a+h)-1-(2a-1)}{h} = \frac{2a+2h-1-2a+1}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

Uit dezelfde berekening volgt dat dit voor elke functie $f: x \mapsto mx+q$ met $m, q \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{m(a+h)+q-(ma+q)}{h} = \frac{ma+mh+q-ma-q}{h} = \frac{mh}{h} = m.$$

We vinden dus het weinig verwonderlijke feit dat de richtingscoëfficiënt m van de rechte met vergelijking $y = mx+q$ aangeeft hoe snel y verandert als x verandert. Het is ook duidelijk dat deze verhouding niet afhangt van a: een rechte stijgt in elk punt even snel.

De hele theorie van afgeleiden is een succesvolle poging om deze eenvoudige inzichten over de richtingscoëfficiënt om het stijgen of dalen van rechten weer te geven te veralgemenen naar meer algemene functies (of krommen).
Er duiken daarbij twee enigszins vervelende aspecten op: enerzijds hangt de verhouding nu af van h, en anderzijds hangt de verhouding ook af van a. De afhankelijkheid van h wordt opgelost door de *limiet* te nemen voor $h \to 0$, en de afhankelijkheid van a door van de afgeleide een *functie van a* te maken.

Oefening 9.2.1. Onderzoek voor de functie $g: x \mapsto g(x) = \frac{x}{2} - 1$ de verhouding van de veranderingen van $g(a)$ en a, zoals in het vorige voorbeeld.

Voorbeeld 9.2.2 (Gevoeligheid voor verandering bij kwadratische functies)**.**

Veeltermfuncties van de tweede graad, dus parabolen, zijn subtieler dan eerstegraadsveeltermen.
We onderzoeken de veranderingen van de functiewaarden van de functie $f: x \mapsto f(x) = x^2+1$ in de buurt van het punt $a = 1$, en zijn dus geïnteresseerd in het verschil $f(a+h)-f(a)$.

Als bij a één bijkomt, veranderen de functiewaarden als

$$f(a+1)-f(a) = (a+1)^2+1-(a^2+1) = a^2+2a+1+1-a^2-1 = 2a+1$$

en als bij a twee bijkomt

$$f(a+2)-f(a) = (a+2)^2+1-(a^2+1) = a^2+4a+4+1-a^2-1 = 4a+4$$

en als bij a drie bijkomt

$$f(a+3)-f(a) = (a+3)^2+1-(a^2+1) = a^2+6a+9+1-a^2-1 = 6a+9$$

Voor algemene h geldt

$$f(a+h)-f(a) = (a+h)^2+1-(a^2+1) = a^2+2ha+h^2+1-a^2-1 = 2ah+h^2$$

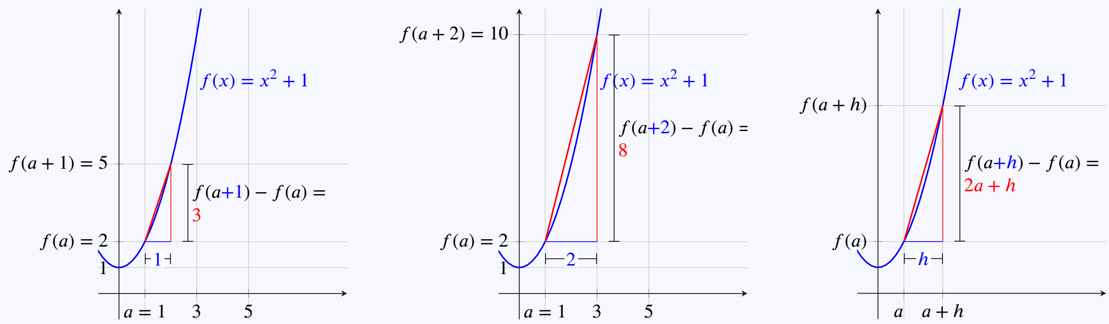
en verschil $f(a+h)-f(a)$ hangt dus zowel af van a als van h, en nog wel op een wat moeilijke manier, namelijk met een kwadraat van h.

De *verhouding* van $f(a+h)-f(a)$ ten opzichte van h wordt

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$$

en ook die verhouding hangt af van zowel a als h.

9.2 Definitie van afgeleide



Als we de verhouding echter berekenen voor $a = 1$ en steeds kleinere waarden van h, dus steeds dichter in de buurt van $a = 1$, geeft dat

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h) - f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
1	1	2	2	5	3	3
1	0.5	1.5	2	3.25	1.25	2.5
1	0.1	1.1	2	2.21	0.21	2.1
1	0.01	1.01	2	2.0201	0.00201	2.01
1	0.001	1.001	2	2.0020	0.00020	2.001

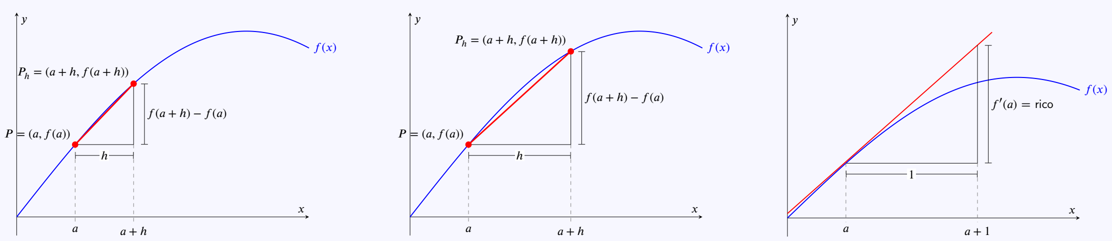
en we stellen vast dat die verhouding steeds dichter in de buurt van 2 ligt.

Een gelijkaardig onderzoek in de buurt van $a = 3$ levert een verhouding 6 op:

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h) - f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
3	1	4	10	17	7	7
3	0.5	3.5	10	13.25	3.25	6.5
3	0.1	3.1	10	10.61	0.61	6.1
3	0.01	3.01	10	10.0601	0.0601	6.01
3	0.001	3.001	10	10.006	0.006001	6.001

Voorbeeld 9.2.3.

De raaklijn aan de grafiek van een functie f in een punt $(a, f(a))$ kan je bekomen vanaf de rechte door $(a, f(a))$ en een naburig punt $(a+h, f(a+h))$, en dan h steeds kleiner te maken:



Opfrissing: formules voor rechten in het vlak.

Herinner u de vergelijking van de rechte L door twee punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) (met $x_1 \neq x_2$):

$$L \leftrightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

9.2 Definitie van afgeleide

De vergelijking van de rechte door de twee punten $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ is

$$y - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}(x - a)$$

Door de term $f(a)$ naar het rechterlid te brengen krijgt de vergelijking de vorm $y = mx + q$ met rico $m = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Die rico hangt af van h (en van a, maar a is vast gekozen). Als h kleiner wordt, dan beweegt het punt $(a+h, f(a+h))$ op de grafiek van f naar het punt $(a, f(a))$. De rechte door $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ draait en heeft als limietstand de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$.
De rico van die raaklijn is dus gelijk aan

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en deze limietwaarde noemen we *de afgeleide van f in a*.
In het algemeen is die limiet niet eenvoudig berekenbaar, want hij leidt tot de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$. Maar verder zal blijken dat er gelukkig relatief eenvoudige technieken zijn om afgeleiden toch te berekenen.

Definitie 9.2.1 (Afgeleide in een punt)**.**

Een reële functie f is **afleidbaar** of **differentieerbaar** in een punt a van haar domein als de limiet $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *bestaat* en *eindig* is.

In dat geval noemen we die limiet **de afgeleide van f in a** en we noteren

$$\boxed{f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Uit voorbeeld 9.2.3 blijkt dat er een verband is tussen deze limiet en de raaklijn aan de grafiek:

Eigenschap 9.2.1 (Vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f)**.**

De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ is

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

en de *afgeleide in een punt* is dus de *richtingscoëfficiënt* van de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

Door de afgeleide van f in *elk punt a* te berekenen verkrijgen we een nieuwe *functie*:

Definitie 9.2.2 (Afgeleide functie)**.**

De **afgeleide functie** van een reële functie f, genoteerd f', is de functie

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

die enkel gedefinieerd is in de punten waar de afgeleide van f bestaat.

Het domein van de afgeleide functie kan strikt *kleiner* zijn dan het domein van de functie zelf als in een aantal punten de afgeleide niet bestaat.

9.2 Definitie van afgeleide

Voorbeeld 9.2.4.

1. De afgeleide van de functie $f : x \mapsto 2x + 1$ is de functie $f' : x \mapsto 2$.

Uitwerking: Voor willekeurige a is de afgeleide gelijk aan 2, de afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2$.

2. De afgeleide van de functie $f : x \mapsto x^2 + 1$ is de functie $f' : x \mapsto 2x$.

Uitwerking: Voor willekeurige a is de afgeleide gelijk aan $2a$, de afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2x$.

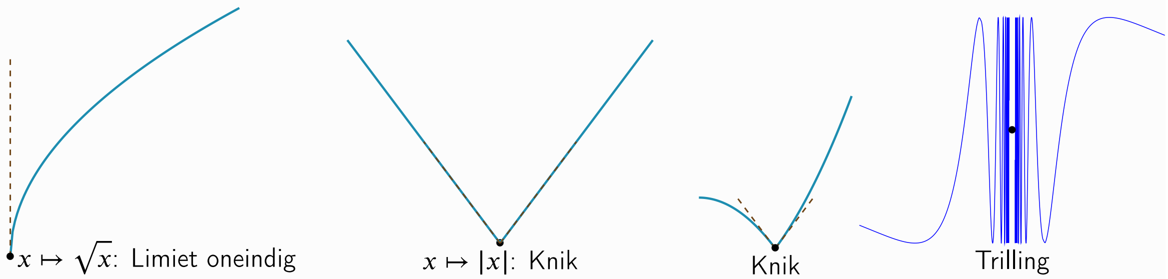
3. De afgeleide van de functie $f : x \mapsto |x|$ is de functie $f' : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ -1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$

Uitwerking: In het punt $x = 0$ bestaat de afgeleide niet, en f' is dus niet gedefinieerd in $x = 0$:

$$f' : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ -1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Extra: voorbeelden van niet-afleidbare functies.

Niet alle functies zijn overal afleidbaar:



(a) Het is mogelijk dat de limiet $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *oneindig* wordt. In dat geval noemen we de functie *niet afleidbaar* in a. We hebben dan een verticale raaklijn aan de grafiek van f in a. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de functie $x \mapsto \sqrt{x}$ in het punt $a = 0$. (figuur linksboven)

(b) De limiet bestaat in sommige gevallen niet omdat de linkerlimiet verschilt van de rechterlimiet in een punt a. Er bestaat dan geen raaklijn aan de grafiek van f in a omdat de grafiek een knik maakt in a. Ook dan noemen we de functie *niet afleidbaar* in a. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de absolute waarde $x \mapsto |x|$ in het punt $a = 0$. (figuur midden boven) Hier is

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ <}} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ <}} \frac{-h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ <}} (-1) = -1 \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{h\to 0 \\ >}} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ >}} \frac{h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ >}} 1 = 1.$$

(c) In andere gevallen bestaat de limiet mogelijk niet omdat de functie f te erg trilt in de buurt van a. Er bestaan zelfs functies die *nergens* afleidbaar zijn. Hier gaan we niet verder op in.

Om historische en praktische redenen zijn in sommige contexten andere notaties gebruikelijk.

Definitie 9.2.3 (Notaties afgeleide).

9.2 Definitie van afgeleide

De afgeleide van een functie f wordt ook genoteerd als $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}} \overset{\text{def}}{=} f'$ (Leibniz notatie)

of ook als $\boxed{Df} \overset{\text{def}}{=} f'$ (Euler notatie)

De afgeleide van f in een punt a wordt dan $f'(a) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = Df(a)$.

De schrijfwijzen f', $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ en $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ worden in de praktijk door elkaar gebruikt.

Voorbeeld 9.2.5. We kunnen dus afgeleiden van functies op meerdere manieren schrijven:

$$(\sin x)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sin}{\mathrm{d}x}(x) \quad \text{en} \quad (5x^4+1)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^4+1) = \frac{\mathrm{d}(5x^4+1)}{\mathrm{d}x}$$

9.3 Definitie differentiaal

Om technische redenen voeren we hier ook al het begrip *differentiaal* in. Een differentiaal is 'een wiskundig object' waarvan we hier *niet* uitleggen *wat* het precies is. Je kan het dus voorlopig beschouwen als een extra notatie. Later zal het erg handig blijken bij het bestuderen en berekenen van integralen. Ook in de fysica en vele andere toepassingen is het handig om vlot met differentialen te kunnen rekenen.

Definitie 9.3.1 (Pseudo-definitie differentiaal)**.**

De **differentiaal van** x is een nieuw symbool $\boxed{dx}$.

De **differentiaal van** f, genoteerd df, is het (formeel) product:

$$\boxed{df \stackrel{\text{def}}{=} f'(x) \cdot dx}$$

Voorbeeld 9.3.1.

$d(x^2+1) = 2x\,dx$ want $(x^2+1)' = 2x$.

Voorbeeld 9.3.2. In de fysica worden functies dikwijls genoteerd als $y = y(x)$. Als de snelheid v een functie is van de tijd t schrijft men dat als $v = v(t)$. De differentiaal dt wordt in de fysica beschouwd als een oneindig kleine verandering van de tijd t, en dv als de (ook oneindig kleine) verandering van de snelheid. De *verhouding* tussen die oneindig kleine veranderingen is precies de afgeleide (en dus versnelling):

$$v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

9.4 Basisregels

De basisregels voor afgeleiden behandelen het afleiden van machten, sommen en scalaire veelvouden. Deze basisregels worden later aangevuld met de regels voor producten en quotiënten en voor samenstellingen.

We geven telkens drie versies van de basisregels: eerst met de notatie f', en vervolgens met de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ en met differentialen. Het is belangrijk om na verloop van tijd met elke notatie vertrouwd te worden. Bij het begin van je studie kan je *zelf kiezen* welke notatie voor jou het meest duidelijk is. We vermelden hier niet de notatie Df die in vele handboeken van het secundair onderwijs voorkomt, maar als je er vertrouwd mee bent kan je die natuurlijk ook nog toevoegen.

Eigenschap 9.4.1 (Basisregels voor machten)**.**

De afgeleiden van de constante functie $x \mapsto c$ en de machtsfunctie $x \mapsto x^r$ (met $c, r \in \mathbb{R}$) zijn

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}} \qquad \boxed{(c)' = 0}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1}$ $\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0$

en met differentialen: $\mathrm{d}x^r = rx^{r-1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \mathrm{d}c = 0$

Merk op dat de machtregel voor *alle* reële exponenten geldt, en niet alleen voor natuurlijke getallen.

Voorbeeld 9.4.1.

1. $(1)' = 0$
2. $(\pi^2)' = 0$
3. $(x)' = 1$
4. $(x^2)' = 2x$
5. $(x^3)' = 3x^2$
6. $(x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$
7. $(x^{-1/2})' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$
8. $(x^{n+42})' = (n+42)x^{n+41}$
9. $(x^\pi)' = \pi x^{\pi-1}$

Oefening 9.4.1. Bereken volgende afgeleiden:

1. $(x^{3/2})' = \ldots\ldots$
2. $(x^{2/3})' = \ldots\ldots$
3. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \ldots\ldots$

Er zijn ook eenvoudige regels voor de som en scalaire veelvouden:

Eigenschap 9.4.2 (Basisregels voor som en scalair veelvoud)**.**

De afgeleiden van som $f+g$ en scalair veelvoud cf van afleidbare functies f en g en $c \in \mathbb{R}$ zijn

$$\boxed{(cf)' = cf'} \qquad \boxed{(f+g)' = f' + g'}$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cf) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ $\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$

en met differentialen: $\mathrm{d}(cf) = c\,\mathrm{d}f$ $\qquad \mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$

Oefening 9.4.2.

9.4 Basisregels

1. $(7x)' = \ldots\ldots$
2. $(7x^2)' = \ldots\ldots$
3. $(7x+1)' = \ldots\ldots$
4. $(7x^2+7x)' = \ldots\ldots$

Met deze beperkte set van regels kunnen de afgeleiden van *alle* veeltermen berekend worden.

9.5 Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide functie kan men volgende formules aantonen (met $a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$).

Eigenschap 9.5.1 (Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies).

$$\boxed{(e^x)' = e^x} \qquad \boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

$$\boxed{(\ln x)' = 1/x} \qquad \boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}e^x = e^x\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}a^x = a^x \ln a\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\mathrm{d}x}{x} = x^{-1}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\log_a x) = \frac{\mathrm{d}x}{x \ln a}$$

Voorbeeld 9.5.1.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) = 7^x \ln 7$. Verwar dit niet met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7) = 7x^6$

Oefening 9.5.1. Bereken de afgeleiden van volgende exponentiële en logaritmische functies.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi^x) = \dots\dots$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(25 \cdot 7^x) = \dots\dots$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((a+7)^x) = \dots\dots$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \dots\dots$

9.6 Afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide functie kan men volgende formules aantonen.

Eigenschap 9.6.1 (Afgeleiden goniometrische en cyclometrische functies).

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x} \qquad \boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x} \qquad \boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x}$$

$$\boxed{(\operatorname{bgsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad \boxed{(\operatorname{bgcos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad \boxed{(\operatorname{bgtan} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

Eigenschap 9.6.2 (Afgeleiden goniometrische en cyclometrische functies).

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x &= \cos x & \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x &= -\sin x \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x &= \frac{1}{\cos^2 x} & \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x &= -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{bgsin} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{bgcos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{bgtan} x = \frac{1}{1+x^2}$$

of met differentialen:

Eigenschap 9.6.3 (Afgeleiden goniometrische en cyclometrische functies).

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\sin x) &= \cos x\,\mathrm{d}x & \qquad \mathrm{d}(\cos x) &= -\sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}(\tan x) &= \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} & \qquad \mathrm{d}(\cot x) &= -\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}(\operatorname{bgsin} x) = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}(\operatorname{bgcos} x) = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}(\operatorname{bgtan} x) = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

9.7 Product- en quotiëntregel

We tonen hoe je *producten en quotiënten* van functies kan afleiden. Later volgt nog een regel over de *samenstelling* van functies. Met deze technieken kunnen dan de afgeleiden van ongeveer alle afleidbare functies die in de praktijk voorkomen worden berekend. We geven de regels in de drie notaties.

Eigenschap 9.7.1 (Productregel en quotiëntregel)**.**

De afgeleide van het product $f \cdot g$ en het quotiënt $\dfrac{f}{g}$ van twee afleidbare functies f en g wordt gegeven door:

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'} \quad \text{(productregel)} \qquad \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}} \quad \text{(quotiëntregel)}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g + f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}} \quad \text{(productregel)} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g - f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2}} \quad \text{(quotiëntregel)}$$

of met differentialen:

$$\boxed{\mathrm{d}(f \cdot g) = (\mathrm{d}f) \cdot g + f \cdot (\mathrm{d}g)} \quad \text{(productregel)} \qquad \boxed{\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\mathrm{d}f) \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2}} \quad \text{(quotiëntregel)}$$

Voorbeeld 9.7.1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x^4 \ln x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x^4 en $\ln x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4 \cdot \ln x\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4\right) \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) \\ &= 4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = x^3\,(4 \ln x + 1)\,. \end{aligned}$$

Voorbeeld 9.7.2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \dfrac{2x+3}{4x+5}$.

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $2x+3$ en $4x+5$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2x+3}{4x+5} &= \frac{2(4x+5) - 4(2x+3)}{(4x+5)^2} \\ &= \frac{8x+10-8x-12}{(4x+5)^2} = \frac{-2}{(4x+5)^2} \end{aligned}$$

Voorbeeld 9.7.3. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sin x}$.

9.7 Product- en quotiëntregel

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln x}{\sin x}\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)\cdot\sin x - \ln x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\frac{\sin x}{x} - \ln x\cdot\cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{x\,\sin x} - \frac{\ln x\,\cos x}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Oefening 9.7.1.

1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$

Eigenschap 9.7.2. De formule voor product kan je veralgemenen naar een product van meerdere factoren:

$$\begin{aligned}(f\cdot g\cdot h)' &= (f\cdot(g\cdot h))' \\ &= f'\cdot(g\cdot h) + f\cdot(g\cdot h)' \\ &= f'\cdot(g\cdot h) + f\cdot(g'\cdot h + g\cdot h') \\ &= f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'\end{aligned}$$

Dus: leid *elke* factor af, vermenigvuldig die afgeleide met de andere factoren en tel al de producten op.

Voorbeeld 9.7.4. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x\cdot\ln x\cdot\sin x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x,$\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\cdot\ln x\cdot\sin x) &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x)(\ln x\cdot\sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x)(x\cdot\sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x)(x\cdot\ln x) \\ &= \ln x\sin x + \sin x + x\ln x\cos x.\end{aligned}$$

9.8 Kettingregel

De zogenaamde *kettingregel* laat toe om de afgeleide te berekenen van *samengestelde* functies.

Eigenschap 9.8.1 (Kettingregel)**.**
De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies f en g is gelijk aan:

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)} \quad \textbf{(kettingregel)}$$

Dezelfde kettingregel kan ook geschreven worden met de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)} \quad \textbf{(kettingregel)}$$

of met differentialen:

$$\boxed{d(f(g(x))) = f'(g(x))\,dg(x) = f'(g(x))\,g'(x)\,dx} \quad \textbf{(kettingregel)}.$$

Opmerking 9.8.1. We hebben in de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie de afgeleide van f toch genoteerd als f' om de notatie eenvoudig te houden. De kettingregel kan ook geformuleerd worden als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}(f(g)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$$

De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 9.8.1.

(a) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (5x+2)^2$:
Merk allereerst op dat je in dit voorbeeld de kettingregel niet *moet* gebruiken. Je kan ook het kwadraat eerst uitrekenen:

$$((5x+2)^2)' = (25x^2 + 20x + 4)' = 50x + 20$$

Je *mag* de kettingregel wel gebruiken en je vindt uiteraard hetzelfde resultaat.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (5x+2)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto 5x+2$$

dan is $f(g(x)) = f(5x+2) = (5x+2)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto 5$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{5x+2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{5}^{g'(x)} = 10(5x+2) = 50x+20$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(5x+2) = 2(5x+2)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((5x+2)^2)' = 2(5x+2)\cdot 5 = 10(5x+2)$$

- Je kan ook de notatie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = 2(5x+2)\cdot 5.$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(5x+2)^2 = 2(5x+2)\ d(5x+2) = 2(5x+2)5\ dx = 10(5x+2)\ dx$$

(b) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin^2 x$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder het kwadraat met haakjes: $x \mapsto (\sin x)^2$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (\sin x)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto \sin x$$

dan is $f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto \cos x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{\sin x}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{\sin x}^{g(x)})}_{f'(g(x))}\cdot \overbrace{\cos x}^{g'(x)} = 2\sin x\cos x$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(\sin x) = 2(\sin x)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((\sin x)^2)' = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Je kan ook de notatie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^2 = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x)^2 = 2(\sin x)\ d(\sin x) = 2(\sin x)\cos x\ dx = 2\sin x\cos x\ dx$$

(c) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin x^2$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder haakjes rond het kwadraat: $x \mapsto \sin(x^2)$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

9.8 Kettingregel

- De functie $x \mapsto \sin(x^2)$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto \sin x$$
$$g : x \mapsto x^2$$

dan is $f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$. Omdat

$$f' : x \mapsto \cos x$$
$$g' : x \mapsto 2x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{\sin(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{\cos(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{2x}^{g'(x)} = 2x\cos x^2$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(x^2) = \cos(x^2)$

Je *moet* de samenstellende functies geen namen geven. Je kan ook sneller rekenen als volgt:

$$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken, dat geeft

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x^2) = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x^2) = \cos x^2 d(x^2) = \cos x^2\, 2x dx$$

Oefening 9.8.1.

1. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 5^{x^2} = \ldots\ldots$

2. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie

$$f(x) = \ln g(x)$$

in termen van de functie g en de afgeleide functie g'.

Eigenschap 9.8.2. De *ketting*regel berekent de afgeleide van een ketting of *keten* van samenstellingen:

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Dus je leidt de samenstellende functies af *van buiten naar binnen* en vermenigvuldigt de afgeleiden.

Voorbeeld 9.8.2. Bereken $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^3(4x^2 - 7)$.

We gebruiken weer de kettingregel, maar nu hebben we een samenstelling van drie functies: $f(x) = x^3$,

9.8 Kettingregel

$g(x) = \cos x$ en $h(x) = 4x^2 - 7$.

$$f(g(h(x))) = f(g(4x^2 - 7)) = f(\cos(4x^2 - 7)) = \cos^3(4x^2 - 7)$$

In de eerste stap van de berekening gebruiken we:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(g(h(x)))\right] = f'(g(h(x))) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(g(h(x)))\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos^3\left(4x^2 - 7\right)\right] &= 3\left(\cos\left(4x^2 - 7\right)\right)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos\left(4x^2 - 7\right)\right] \\
&= 3\cos^2\left(4x^2 - 7\right)\left(-\sin\left(4x^2 - 7\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[4x^2 - 7\right]\right) \\
&= -3\cos^2\left(4x^2 - 7\right)\sin\left(4x^2 - 7\right) \cdot 8x \\
&= -24x\sin\left(4x^2 - 7\right)\cos^2\left(4x^2 - 7\right).
\end{aligned}$$

9.9 Hogere orde afgeleiden

Omdat de afgeleide van een functie $f : x \mapsto f(x)$ opnieuw een functie $f' : x \mapsto f'(x)$ is, houdt niets ons tegen om te proberen ook f' af te leiden.

Definitie 9.9.1 (Hogere orde afgeleiden).

Als voor een afleidbare reële functie f ook de afgeleide functie f' opnieuw afleidbaar is, dan is de **tweede afgeleide** van f, genoteerd $f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right)$ de afgeleide van de afgeleide functie f'.

Opmerking 9.9.1.

Analoog kan je ook de n-de afgeleide ($n \in \mathbb{N}_0$) van een functie f definiëren. Die noteren we als $f^{(n)}$ of $\frac{d^n f}{dx^n}$. Merk op dat de haakjes *niet* mogen worden weggelaten in $f^{(2)}$, want anders zou voor bijvoorbeeld de sinus verwarring mogelijk zijn tussen het kwadraat $\sin^2(x)$ en de tweede afgeleide $\sin^{(2)}(x)$.

Voorbeeld 9.9.1.

Bereken de tweede afgeleide $\frac{d^2}{dx^2}(\text{bgsin}\, x + x)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left[\text{bgsin}\, x + x\right] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\text{bgsin}\, x + x\right]\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^{-1/2}\right] + \frac{d}{dx}[1] \\
&= -\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-3/2} \cdot \frac{d}{dx}\left[1-x^2\right] + 0 \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\,(-2x) \\
&= \frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.
\end{aligned}
$$

Oefening 9.9.1.

1. Bereken de derde afgeleide van $f(x) = 2\,e^{x^2-1} - \sin 3x + \frac{x^3}{2} + 4x^2 - 6x - \frac{12}{5}$.

Oplossing: … …

9.10 Afgeleide van de inverse functie

Voor een inverteerbare functie f geldt voor elke x in het domein dat

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

De functies $x \mapsto f^{-1}(f(x))$ en $x \mapsto x$ zijn dus gelijk, en dus zijn ook hun afgeleiden aan elkaar gelijk:

$$(f^{-1}(f(x)))' = x'$$

Uit de kettingregel volgt dan (omdat $x' = 1$)

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \text{ en dus } (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = (f'(x))^{-1}$$

en dit verklaart volgende eigenschap:

Eigenschap 9.10.1.

De inverse van een inverteerbare afleidbare functie f met $f'(x) \neq 0$ is afleidbaar in het punt $y = f(x)$, met afgeleide gelijk aan de omgekeerde van de afgeleide van f in x:

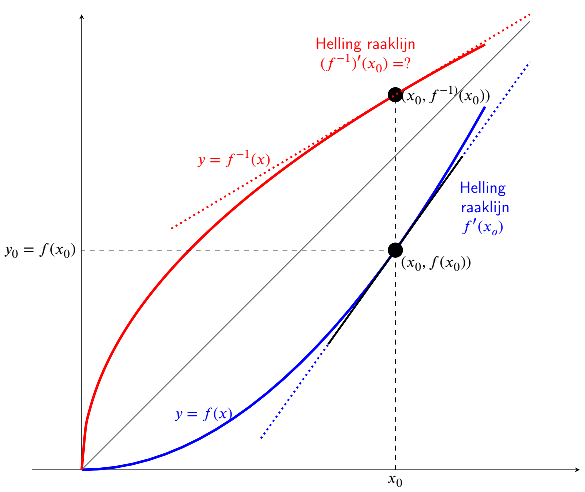
$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{en dus} \quad \boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}} \quad \textbf{(afgeleide inverse)}$$

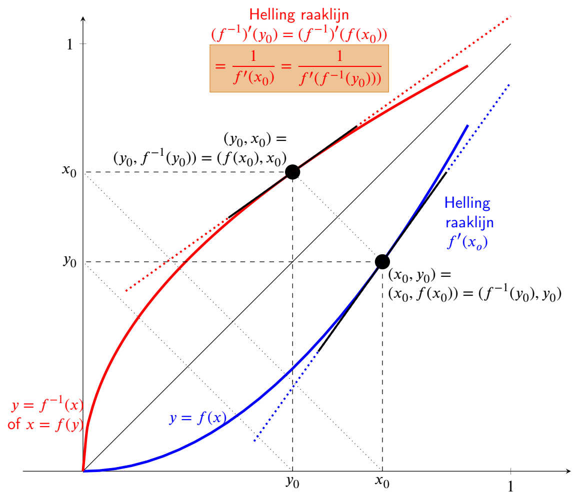
waarbij $y = f(x)$, en dus ook $x = f^{-1}(y)$.

Opmerking 9.10.1. Je zou deze formule kunnen schrijven als $(f^{-1})'(y) = \left(f'(f^{-1}(y))\right)^{-1}$ waarbij de exponent $^{-1}$ echter twee verschillende betekenissen heeft:

$$\begin{array}{llll} f^{-1}(x) & = y & \iff x = f(y) & \text{de inverse van een } \textbf{functie} \\ (f(x))^{-1} & = y & \iff \dfrac{1}{f(x)} = y & \text{het omgekeerde van een } \textbf{getal} \end{array}$$

Er is *geen duidelijk verband* tussen de raaklijnen van f en f^{-1} boven het punt x_0, maar wel tussen
enerzijds de raaklijn aan f in het punt $(x_0, f(x_0))$ en
anderzijds de raaklijn aan de *gespiegelde grafiek* f^{-1} boven het *gespiegelde punt* $(f(x_0), x_0)$.
Die raaklijnen zijn ook elkaars spiegelbeeld, en gespiegelde rechten hebben omgekeerde hellingen.





De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

9.10 Afgeleide van de inverse functie

Voorbeeld 9.10.1. De afgeleide van de inverse van $f : x \mapsto 2x$

De inverse van de functie $f : x \mapsto 2x$ is de functie $f^{-1} : y \mapsto y/2$. De afgeleide van f is de constante functie $f' : x \mapsto 2$, en de afgeleide van f^{-1} is de constante functie $(f^{-1})' : y \mapsto 1/2$ en er geldt inderdaad dat $(f^{-1})'(y) = 1/2 = 2^{-1} = (f'(x))^{-1}$.

Bovenstaand voorbeeld is echter bedrieglijk eenvoudig omdat de afgeleide een *constante* functie is.

Voorbeeld 9.10.2. De afgeleide van de inverse van $f : x \mapsto x^2$

De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ is niet inverteerbaar: er is geen inverse op het hele domein $\mathbb{R}$.

De functie $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ heeft als inverse $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$ en de functie $f_2 : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ heeft als inverse $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -\sqrt{x}$. In een punt x_0 is de afgeleide van zowel f_1 als f_2 gelijk aan $2x_0$, en de raaklijn in $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^2)$ heeft dus helling $2x_0$.

In het punt $y_0 = x_0^2$ is de afgeleide van $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : y \mapsto \sqrt{y}$ gelijk aan

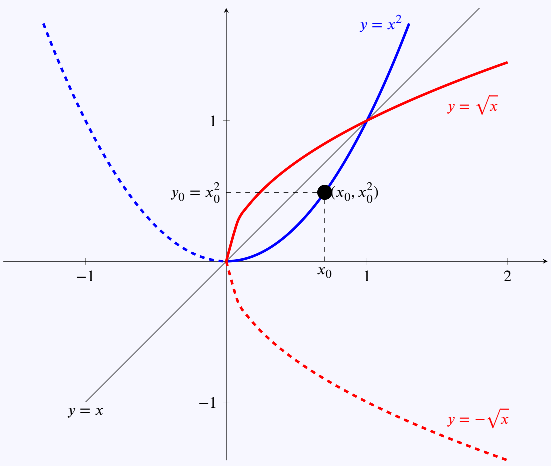
$$(f_1^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f_1'(f_1^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f_1'(\sqrt{y_0})} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}},$$

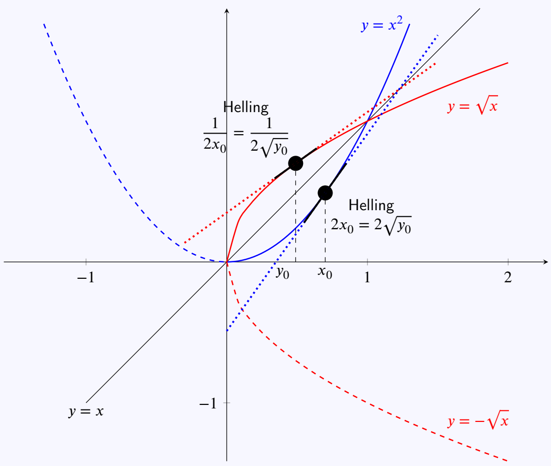
en de raaklijn in $(y_0, \sqrt{y_0}) = (x_0^2, x_0)$ heeft dus een helling $\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}} = \dfrac{1}{2x_0}$.

In het punt $y_0 = x_0^2$ is de afgeleide van $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : y \mapsto -\sqrt{y}$ gelijk aan

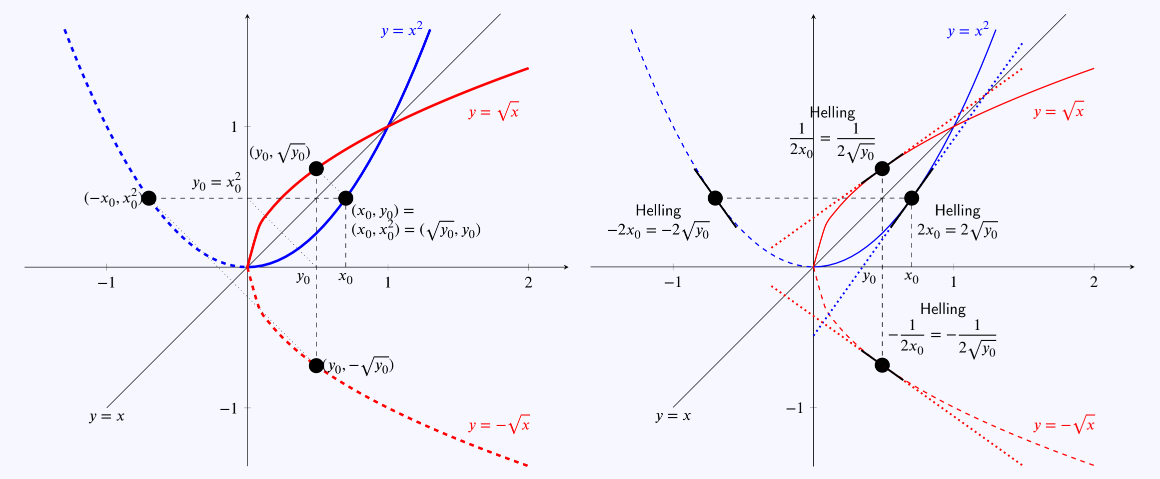
$$(f_2^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f_2'(f_2^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f_2'(-\sqrt{y_0})} = -\frac{1}{2\sqrt{y_0}},$$

en de raaklijn in $(y_0, -\sqrt{y_0}) = (x_0^2, -x_0)$ heeft dus een helling $-\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}} = -\dfrac{1}{2x_0}$.





9.10 Afgeleide van de inverse functie



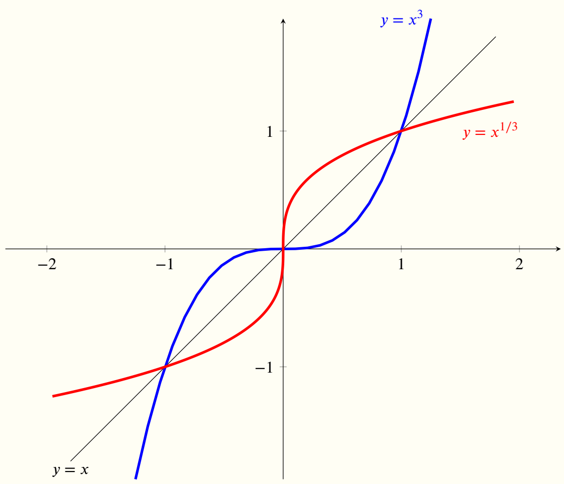
Opmerking 9.10.2.

- De raaklijn in $(x_0, f(x_0))$ aan graf f is de spiegeling ten opzichte van de eerste bissectrice van de raaklijn in $(f(x_0), x_0)$ aan graf f^{-1}. Dit is evident, omdat de grafieken van inverse fucnctie elkaars spiegelbeeld zijn, en dus geldt dat ook voor de *raaklijnen* aan de grafieken.

- Als $f'(x_0) = 0$, dan is de inverse functie in het punt $f(x_0)$ niet afleidbaar (want de afgeleide zou gelijk moeten zijn aan $\dfrac{1}{f'(x_0)}$). Dat komt overeen met het feit dat de spiegeling van een horizontale rechte (helling 'nul') een verticale rechte is (helling 'oneindig').

  Neem als voorbeeld $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ en $x_0 = 0$. In dit geval is $f'(x_0) = 3x_0^2 = 0$. De inverse functie is $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{1/3}$.

  Deze inverse is niet *afleidbaar* in 0: de afgeleide van $x \mapsto x^{1/3}$ is $x \mapsto \frac{1}{3}x^{-2/3}$, en dat wordt 'oneindig groot' in $x = 0$. Dus, $x \mapsto x^{1/3}$ is niet afleidbaar in de oorsprong omdat de raaklijn er verticaal is.



9.11 Regel van de l'Hôpital

Het berekenen van limieten leidt soms tot zogenaamde *onbepaaldheden* zoals $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$. Er bestaat een handige techniek om die onbepaaldheden te omzeilen via het nemen van *afgeleiden*. De held van dit verhaal is de Fransman de l'Hôpital, die zijn naam gaf aan de techniek. Hij heeft aangetoond dat een limiet $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ die leidt tot een onbepaaldheid van de vorm $\dfrac{0}{0}$ of $\dfrac{\infty}{\infty}$ onder bepaalde voorwaarden gelijk is aan de limiet van de verhouding *van de afgeleiden* $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Er zijn enkele technische beperkingen die de exacte formulering van de regel van de l'Hôpital wat ingewikkeld maken, maar in de praktijk is aan de technische voorwaarden meestal voldaan.

Eigenschap 9.11.1 (Regel van de l'Hôpital)**.** Voor twee reële functies f en g waarbij

- f en g afleidbaar zijn in een omgeving van c (met $c \in \mathbb{R}$ of $c = \pm\infty$),
- $f(c) = g(c) = 0$ ofwel $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ en $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty$,
- $g'(x) \neq 0$ voor $x \neq c$ in een omgeving van c en
- $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat, geldt dat:

$$\boxed{\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \qquad \left(\text{als } \frac{f(c)}{g(c)} \text{ van de vorm } \frac{0}{0} \text{ of } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Opmerking 9.11.1.

- Men schrijft soms $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ om het gebruik van de regel van de l'Hôpital aan te duiden.
- Met de notatie $\frac{\infty}{\infty}$ worden volgende 4 situaties bedoeld: $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$ of $\frac{-\infty}{-\infty}$.
- De regel van de l'Hôpital werkt ook voor limieten in oneindig.
- De regel van de l'Hôpital werkt ook voor rechter- en linkerlimieten.
- Let op: bereken de afgeleide van teller en noemer afzonderlijk, *niet* de afgeleide van de breuk.

Voorbeeld 9.11.1. Bereken $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$.

We gaan na of de regel van de l'Hôpital toegepast kan worden met $f(x) = \sin x$ en $g(x) = x$. Omdat $f(0) = 0$ en $g(0) = 0$ komen we de onbepaaldheid $\dfrac{0}{0}$ uit. We moeten nagaan of de limiet van het quotiënt van de afgeleiden bestaat: $(\sin x)' = \cos x$ en $x' = 1$, dus

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0}\cos x = \cos(0) = 1$$

De limiet van de afgeleiden bestaat, en in een omgeving van $c = 0$ is $g'(x) = 1 \neq 0$ en dus geldt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

We beperken ons in deze cursus tot oefeningen waarbij het volstaat om de voorwaarde $\dfrac{0}{0}$ of $\dfrac{\infty}{\infty}$ na

9.11 Regel van de l'Hôpital

te gaan en noteren dit voorbeeld korter:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1.$$

Voorbeeld 9.11.2. Bereken $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{2x}}$.

Omdat $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ en $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ bekomen we de onbepaaldheid $\frac{\infty}{\infty}$ en kunnen we de regel van de l'Hôpital toepassen.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = 0\,.$$

Soms is niet meteen duidelijk of $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat en moet je meerdere keren na elkaar de regel van de l'Hôpital toepassen:

Voorbeeld 9.11.3. Bereken $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x-\sin(x)}$.

Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ dus kunnen we de regel van de l'Hôpital toepassen.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x-\sin(x)} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x)-2\cos(2x)}{1-\cos(x)} && \text{(nog steeds } \tfrac{0}{0}\text{)}\\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(x)+4\sin(2x)}{\sin(x)} && \text{(nog steeds } \tfrac{0}{0}\text{)}\\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(x)+8\cos(2x)}{\cos(x)} && \text{(niet langer } \tfrac{0}{0}\text{)}\\
&= \frac{-2+8}{1} = 6
\end{aligned}$$

De regel van de l'Hôpital kan soms ook worden gebruikt voor onbepaaldheden van de vorm $0\cdot\infty$. Inderdaad, als de limiet van $f(x)\cdot g(x)$ leidt tot de onbepaaldheid $(+\infty)\cdot 0$, dan kan door één van de twee functies om te keren de regel van de l'Hôpital mogelijk worden toegepast via $f(x)\cdot g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ of $f(x)\cdot g(x) = \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$.

Voorbeeld 9.11.4. Bereken $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln(x)$.

Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $0\cdot(-\infty)$. In plaats van $\ln x$ te vermenigvuldigen met x, kunnen we $\ln x$ ook delen door $1/x$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $\frac{-\infty}{+\infty}$ en kan dus worden berekend met de regel van de l'Hôpital:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(-x) = 0$$

Merk op dat de onbepaaldheid $0\cdot(-\infty)$ bij het product $x\cdot\ln x$ dus blijkbaar 0 wordt. Maar het product $x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)$ gaat naar -1 voor $x \underset{>}{\to} 0$, terwijl $-\frac{1}{x}$ ook oneindig negatief wordt, en het product $x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$ wordt oneindig negatief voor $x \underset{>}{\to} 0$. Dit is precies de betekenis van de bewering '$0\cdot\infty$ is onbepaald': naargelang het geval neemt de limiet van $f(x)\cdot g(x)$ met $f(x)\to 0$ en $g(x)\to\infty$ allerlei verschillende waarden aan.

9.11 Regel van de l'Hôpital

Net zoals limieten van functies die leiden tot een onbepaaldheid van de vorm $0 \cdot \infty$ herschreven kunnen worden zodat je de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ verkrijgt en dus de regel van de l'Hôpital kan toepassen, is het soms ook mogelijk bij de onbepaaldheid $\infty - \infty$ om de functie te herschrijven om $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ te verkrijgen.

Voorbeeld 9.11.5. Bereken $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $\infty - \infty$. Door op gelijke noemer te brengen krijgen we de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ en kunnen we de regel van de l'Hôpital toepassen.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{\sin x - x}{x \sin x} \right) \\
&\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \right) \\
&\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{-\sin x}{\cos x + (\cos x - x \sin x)} \right) \\
&= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \right) = \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

Opmerking 9.11.2.
Ook limieten die leiden tot onbepaaldheden van de vorm 0^0, ∞^0 en 1^∞ kunnen soms herschreven worden zodat de regel van de l'Hôpital toegepast kan worden.

9.12 Toepassing van l'Hôpital

De regel van l'Hôpital laat toe om onbepaaldheden van de vorm $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ te berekenen. Er zijn een aantal techniekjes om ook onbepaaldheden van de vorm $\infty - \infty$ of $0 \cdot \infty$ via l'Hôpital aan te pakken.

Ook onbepaalde vormen van het type 0^0, ∞^0 en 1^∞ kunnen dikwijls herleid worden naar $\dfrac{0}{0}$ of $\dfrac{\infty}{\infty}$ door slim gebruik te maken van de logaritme, en van het feit dat de logaritme een continue functie is, en dus de limiet van de logaritme gelijk is aan de logaritme van de limiet:

$$\ln\left[\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}\right] = \lim_{x\to a} \ln\left[f(x)^{g(x)}\right] = \lim_{x\to a}\left[g(x)\ln f(x)\right]$$

waarbij $\lim\limits_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$ meestal met l'Hôpital te berekenen is. Als bovenstaande limiet bestaat en gelijk is aan L, dan is

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \exp(L).$$

Voorbeeld 9.12.1. Bereken $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\right] &= \lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{x+a}\right)\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x+a} = a
\end{aligned}$$

en dus is

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \exp(a).$$

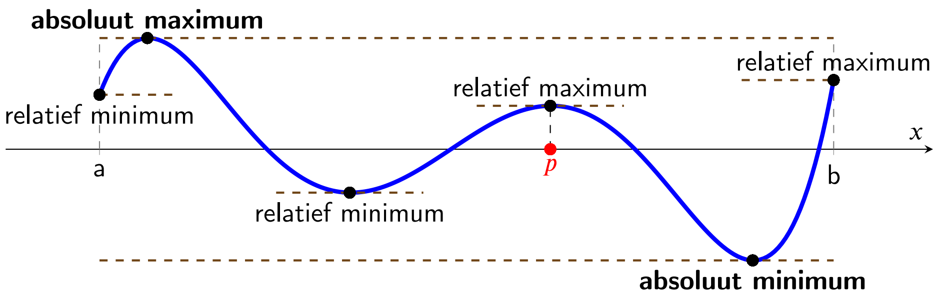
9.13 Minimum-Maximumproblemen

Wetenschappelijke problemen gaan dikwijls over het *maximum* of het *minimum* van een zekere grootheid. Deze grootheid kan van wiskundige, fysische, economische of andere aard zijn, bijvoorbeeld een maximale of minimale inhoud, oppervlakte of afstand, minimale kosten of maximale winst. Dergelijke minimum-maximumproblemen worden ook wel optimalisatieproblemen genoemd, en *afgeleiden* spelen een belangrijke rol bij het vinden van de oplossingen. De onderstaande definitie over relatieve en absolute maxima en minima is vrij evident.

Definitie 9.13.1. Een reële functie bereikt in een punt p van haar domein een

een	**absoluut (of globaal) maximum**	als $f(p)$ maximaal is voor het ganse domein,
een	**absoluut (of globaal) minimum**	als $f(p)$ minimaal is voor het ganse domein,
een	**relatief (of lokaal) maximum**	als $f(p)$ maximaal is in de buurt van p, en
een	**relatief (of lokaal) minimum**	als $f(p)$ minimaal is in de buurt van p.

Een **extremum** is ofwel een maximum ofwel een minimum.



Extra: de begrippen absoluut en relatief minimum en maximum met formules.

Definitie9.13.2. Een reële functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bereikt in een punt $p \in A$

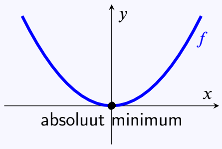
een	**absoluut maximum**	als voor elke $x \in A$ geldt:	$f(x) \leq f(p)$.
een	**absoluut minimum**	als voor elke $x \in A$ geldt:	$f(p) \leq f(x)$.
een	**relatief maximum**	als een interval I rond p bestaat zodat voor elke $x \in I \cap A$ geldt:	$f(x) \leq f(p)$.
een	**relatief minimum**	als een interval I rond p bestaat zodate voor elke $x \in I \cap A$ geldt:	$f(p) \leq f(x)$.

Opmerking 9.13.1.

- Let bij extrema op het onderscheid tussen *de plaats waar het extremum wordt bereikt* (één of meerdere x-waarden) en *het extremum zelf* (een functiewaarde en dus een y-waarde).
- Een (absoluut of relatief) maximum kan worden bereikt in meerdere x-waarden. Zo bereikt de cosinusfunctie haar absoluut maximum oneindig dikwijls, namelijk in de punten $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Of een relatief maximum al dan niet absoluut is hangt of van het *domein* van de functie: door het domein voldoende klein te maken wordt elk relatief maximum absoluut, en door het domein te vergroten blijft een absoluut maximum mogelijk geen absoluut maximum.

9.13 Minimum-Maximumproblemen

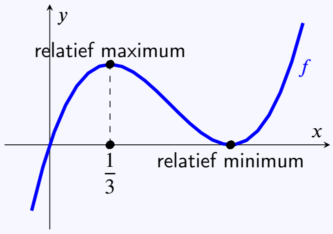
Voorbeeld 9.13.1. De functie $f : x \mapsto x^2$ bereikt in $x = 0$ een globaal (en dus ook lokaal) minimum. Inderdaad, want voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $0 \leq x^2$ (en dus $0 = f(0) \leq f(x)$).



Voorbeeld 9.13.2. De functie $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x$ bereikt een lokaal minimum in 1 en een lokaal maximum in $1/3$.

Inderdaad, voor x in de buurt van 1 geldt dat $f(1) = 0 \leq f(x)$ want $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 \geq 0$ *voor x in de buurt van* 1. De ongelijkheid $x(x-1)^2 \geq 0$ geldt niet voor negatieve x, maar voor een *lokaal* minimum in $x = 1$ volstaat het dat ze geldt voor x *voldoende dicht bij* 1.

In $x = \dfrac{1}{3}$ bereikt f een lokaal maximum. Geen van beide lokale extrema zijn ook globale extrema.



Op de figuur blijkt duidelijk volgend verband tussen de extrema en **het stijgen en dalen van een functie**:

Eigenschap 9.13.1. Een reële functie bereikt

een **relatief maximum**	bij *een overgang van stijgen naar dalen*	of in een randpunt,
een **relatief minimum**	bij *een overgang van dalen naar stijgen*	of in een randpunt.

En het stijgen en dalen van functies is gerelateerd aan **het teken van de afgeleide**:

Eigenschap 9.13.2.

	stijgt	waar de afgeleide positief is,
Een afleidbare functie	daalt	waar de afgeleide negatief is,
	heeft een horizontale raaklijn	waar de afgeleide nul is.

Extra: het teken van de afgeleide en stijgen en dalen met formules.

Een wat meer nauwkeurige formulering gaat als volgt:

Eigenschap9.13.3. Voor een continue functie f op $[a, b]$ die afleidbaar is op $]a, b[$ geldt:

als $f'(x) > 0$ voor elke $x \in \,]a, b[$,	dan is f *strikt stijgend* in $[a, b]$
als $f'(x) < 0$ voor elke $x \in \,]a, b[$,	dan is f *strikt dalend* in $[a, b]$
als $f'(c) = 0$ voor een $c \in \,]a, b[$,	dan heeft de grafiek van f in $(c, f(c))$ een *horizontale raaklijn*.

De enigszins subtiele formulering met open en gesloten intervallen kan nuttig zijn bij een functie zoals de vierkantswortel, die continu is op $[0, +\infty[$, maar enkel afleidbaar op $]0, +\infty[$.

Opmerking 9.13.2.

- Voor afleidbare functies komen extrema dus enkel voor in *nulpunten van de afgeleide* of in randpunten van het domein. Een *tekenonderzoek van de afgeleide* bepaalt dus de lokale extrema.
- Pas op: niet elk nulpunt van de afgeleide leidt tot een extremum: voor $x \mapsto x^3$ heeft de afgeleide $x \mapsto 3x^2$ een nulpunt in $x = 0$, maar x^3 heeft daar *geen extremum*, enkel een buigpunt.
- Voor functies die niet afleidbaar zijn in sommige punten van hun domein, moet je op een andere manier de extrema onderzoeken, bijvoorbeeld via de grafiek.
- Een nulpunt van de afgeleide f' noemt men soms ook een *kritiek punt* van f, maar wij zullen de naam kritiek punt niet gebruiken.

Voorbeeld 9.13.3. Bepaal de extrema van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Uitwerking:

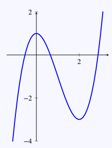
Bereken de *afgeleide* van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$: $f'(x) = 3x^2 - 6x$

en bepaal daarvan de *nulpunten*: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 2$.

Maak vervolgens een *tekentabel* (ook *tekenverloop*) met

- op de eerste lijn: de *nulpunten van de afgeleide* f' van klein naar groot
- op de tweede lijn: het *tekenverloop van* f' met een 0 onder de nulpunten en ertussen plustekens of mintekens naargelang het teken van f'.
- op de derde lijn: *het verloop van de grafiek van* f met een $\nearrow$ waar $f'(x)$ positief is en f dus stijgt, en een $\searrow$ waar $f'(x)$ negatief is en f dus daalt .
- er is dan een relatief maximum waar de functie overgaat van stijgend naar dalend, en een relatief minimum waar ze overgaat van dalend naar stijgend.

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	relatief maximum	$\searrow$	relatief minimum	$\nearrow$



De functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ heeft geen absoluut minimum omdat $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ en geen absoluut maximum omdat $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Voor functies op een begrensd interval neem je ook de randpunten op in de tabel.

Met afgeleiden worden *relatieve* extrema bepaald, maar in toepassingen zoeken we soms *absolute* extrema.

Algoritme 9.13.4 (Algoritme voor absolute extrema)**.**

Een continue functie op een gesloten interval bereikt steeds haar extrema die je vindt door

de *relatieve extrema* te bepalen (via nulpunten en tekenverloop van de afgeleide)
de *functiewaarde* te berekenen in elk relatief extremum *en in de randpunten*
de *grootste* van die functiewaarden is het absolute maximum, de *kleinste* is het absolute minimum.

Functies op een open interval bereiken niet noodzakelijk hun extrema (bv $x \mapsto 1/x$).

9.13 Minimum-Maximumproblemen

Voor begrensde functies is het absolute maximum het grootste van alle relatieve maxima,
het absolute minimum is het kleinste van alle relatieve minima.

Extra: relatief/absoluut hangt af van het beschouwde domein.

9.13 Minimum-Maximumproblemen

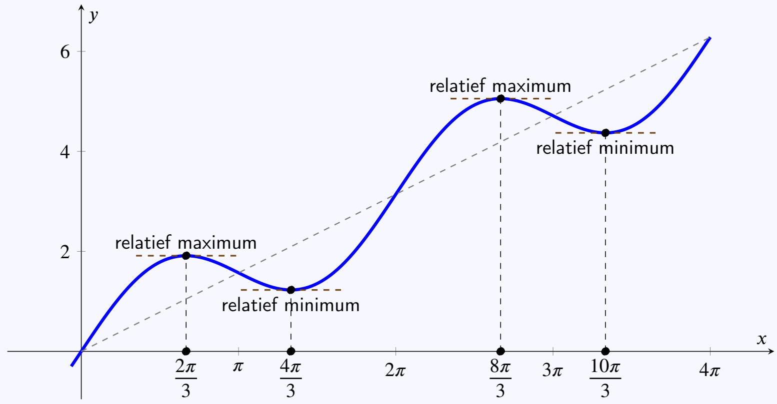
Voorbeeld9.13.4. Bepaal de extrema van de functie $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + \sin x$.

Uitwerking: Bereken eerst de afgeleide: $f'(x) = \dfrac{1}{2} + \cos(x)$,

en de nulpunten $f'(x) = 0 \iff \cos x = -\dfrac{1}{2} \iff x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi = \dfrac{2(3k \pm 1)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$,

en tekentabel (voor x tussen 0 en 4π)

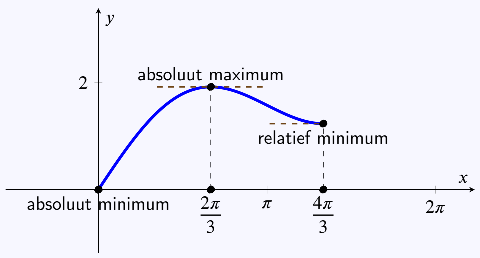
x		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{8\pi}{3}$		$\frac{10\pi}{3}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	rel. max	↘	rel. min	↗	rel. max	↘	rel. min	↗

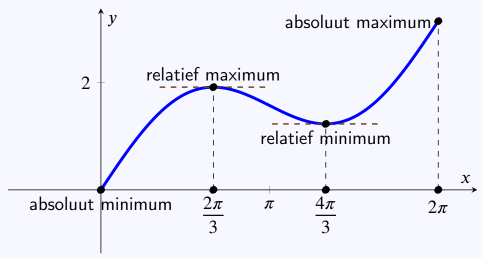


Deze functie heeft dus oneindig veel relatieve minima, oneindig veel relatieve maxima, maar geen absolute minima of maxima.

Merk op dat de situatie verandert als het domein van de functie wordt beperkt:

domein	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$\mathbb{R}$	-	rel. max	rel. min	-
$[0, 4\pi/3]$	abs. min	abs. max	rel. min	-
$[0, 2\pi]$	abs. min	rel. max	rel. min	abs.max





Een *relatief* extremum is een *lokaal* begrip want het hangt enkel af van het gedrag van de functie in een (willekeurig kleine) omgeving van dat punt.

Een *absoluut* extremum is een *globaal* begrip: het hangt af van het gedrag op *het gehele domein*.

9.13 Minimum-Maximumproblemen

Volgende voorbeelden illustreren extrema bij *vraagstukken*. Bepaal daarbij eerst de *veranderlijken*, en daarna de *functie* die minimaal of maximaal moet zijn. Leg ook het *domein* van deze functie vast. Soms zijn meerdere keuzes mogelijk.

Voorbeeld 9.13.5.

Toon aan: van alle rechthoeken met een gegeven oppervlakte heeft het vierkant de kleinste omtrek.

Uitwerking:

- **Kies veranderlijken**: noem de lengtes van de zijden van de rechthoek x en y, en de oppervlakte S.
- **Bepaal het domein**: omdat x en y lengtes voorstellen en $S \neq 0$ moet $x > 0$ en $y > 0$.
- **Bepaal de functie** die minimaal moet zijn:
  - Je zoekt het minimum van de omtrek, dus van $2x + 2y$. Deze uitdrukking bevat echter *twee* veranderlijken. We proberen één van de veranderlijken uit te drukken in termen van de andere.
  - Uit het gegeven halen we dat $S = x \cdot y$ dus $y = \dfrac{S}{x}$, en dus een **verband tussen de twee variabelen**.
  - Schrijf de omtrek als een functie van één variabele $f(x)$ (via het verband tussen beide variabelen):

$$f(x) = 2x + 2\frac{S}{x} = 2\left(x + \frac{S}{x}\right) \text{ met } x > 0$$

- **Zoek het (absolute) minimum van deze functie f**:
  - $f'(x) = 2\left(1 - \dfrac{S}{x^2}\right)$
  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{S}$
  - Omdat $x > 0$ behoud je alleen $\sqrt{S}$.
  - Met behulp van het tekenverloop onderzoek je of dit een (absoluut) minimum is.

x		$\sqrt{S}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	relatief minimum	$\nearrow$

  Nemen we $x > \sqrt{S}$, dan is $x^2 > S$, dus $1 > \dfrac{S}{x^2}$, dus $1 - \dfrac{S}{x^2} > 0$ en dus is f' groter dan 0. Vandaar het plusteken bij het tekenverloop van f'. Met een analoge redenering vind je het minteken voor $x < \sqrt{S}$.

  Omdat de functie $f(x)$ daalt tot $\sqrt{S}$ en dan stijgt, bereikt de omtrek f een *relatief minimum* in $x = \sqrt{S}$. Uit het functieverloop van $f(x)$ blijkt dat $x = \sqrt{S}$ ook het absolute minimum is.

- **Besluit**: Als $x = \sqrt{S}$ dan is ook $y = \sqrt{S}$, en de gezochte rechthoek is dus een vierkant.

Voorbeeld 9.13.6.

Een draad van 4 meter wordt in 2 stukken geknipt. Met één stuk wordt een vierkant gemaakt, met het andere een cirkel. We willen de ingesloten oppervlakte voor beide figuren samen maximaliseren. Hoeveel draad gebruik je best voor de cirkel?

Uitwerking:

- **Kies veranderlijken**: We noteren met x de omtrek van de cirkel, dan is $4-x$ de omtrek van het vierkant.
- **Domein:** Uit de opgave volgt dat $x \in [0, 4]$.
- **Bepaal de functie** die maximaal moet zijn:

9.13 Minimum-Maximumproblemen

- De oppervlakte van een vierkant is het kwadraat van de zijde, en de omtrek is vier keer zijde. De oppervlakte van het vierkant is dus $\frac{(4-x)^2}{4^2} = \frac{(4-x)^2}{16}$
- De oppervlakte van een cirkel is π maal de straal in het kwadraat, de omtrek is 2π maal de straal. De straal is dus $\frac{x}{2\pi}$ en bijgevolg is de oppervlakte van de cirkel $\frac{x^2}{4\pi}$

We zoeken bijgevolg het maximum van $f(x) = \frac{(4-x)^2}{16} + \frac{x^2}{4\pi}$ met $x \in [0,4]$

- **Zoek het (absolute) maximum van deze functie f:**
  - $f'(x) = -\frac{2(4-x)}{16} + \frac{2x}{4\pi} = -\frac{1}{2} + (\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi})x$
  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{\pi+4}$
  - Hieruit mogen we niet meteen besluiten dat $x = \frac{4\pi}{\pi+4}$ het gezochte maximum is:

x	0		$\frac{4\pi}{\pi+4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	relatief minimum	$\nearrow$	

Dus bereikt f een relatief *minimum* in $x = \frac{4\pi}{\pi+4}$, en dit is bijgevolg **niet** het gezochte punt.

  - Uit het tekenverloop hierboven volgt dat de maxima van f te vinden zijn in de *randpunten van het domein* $[0,4]$. We berekenen de functiewaarden in deze randpunten om te weten waar het absolute maximum zich bevindt.

x	0		$\frac{4\pi}{\pi+4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	relatief minimum	$\nearrow$	$\frac{4}{\pi}$

- **Besluit:** We vinden het maximum van f in 4. De omtrek van de cirkel is dus 4 meter, deze van het vierkant 0. De ingesloten oppervlakte is maximaal als de draad *volledig voor de cirkel* gebruikt wordt.

Extra oefening.

Oefening9.13.1. De som van twee positieve getallen a en b is 100, waarbij $a \leq b$. Zoek deze getallen als

1. hun product maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

2. de som van hun kwadraten minimaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

3. de som van hun kwadraten maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

4. het product van het kwadraat van een getal met de derde macht van het andere getal maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

KU LEUVEN
Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

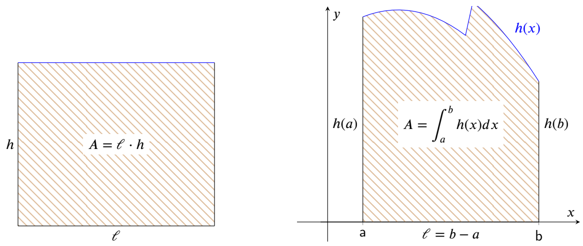
Module 10
Integralen

(Versie 2024/10/24HB.16)

10.1 Intro integralen

Het rekenen met *integralen* is absoluut fundamenteel in vele wetenschappen. De uitvinding van de integraalrekening in de zeventiende eeuw heeft mee de basis gelegd van de wetenschappelijke en industriële revolutie die het leven op aarde de voorbije drie eeuwen enorm heeft veranderd. Het is niet overdreven te stellen dat zonder integralen mechanica, relativiteitstheorie, chemie, economie, Google, Facebook en Twitter allemaal ondenkbaar zouden zijn. U heeft het enorme voorrecht er zo dadelijk mee kennis te maken. Voor sommigen is dat herhaling, maar voor anderen is dit een volledig nieuw concept.

In zijn meest eenvoudige vorm is de integraalrekening een directe veralgemening van de formule voor de *oppervlakte van een rechthoek*. Iedereen weet dat een rechthoek met lengte ℓ en hoogte h een oppervlakte heeft gelijk aan $\ell \cdot h$. De integraalrekenig laat toe om de oppervlakte te berekenen van 'rechthoeken met een variërende hoogte':



Integralen laten dus toe de oppervlakte te berekenen van rechthoeken met een tamelijk willekeurige bovenkant. Wat wiskundiger uitgedrukt: integralen berekenen de oppervlakte onder de grafiek van een functie. Dit soort integralen (die een getal opleveren: namelijk de oppervlakte tussen twee grenzen onder een kromme) noemen we *bepaalde integralen*.

Wij hebben er hier echter voor gekozen om het integraalbegrip op een andere manier in te voeren: we zullen *integreren* in eerste instantie bekijken als de omgekeerde bewerking van *afleiden* (of differentiëren, dat is hetzelfde). Dat is wat abstracter en minder motiverend dan oppervlaktes berekenen, maar het levert onmiddellijk krachtige rekenmethodes op.

Het praktische nut van dat omkeren-van-differentiëren blijkt uit de prachtige Hoofdstelling van de integraalrekening die zegt dat de *bepaalde integraal* (die *interessant* is: het is een oppervlakte of meer algemeen een product-met-een-verandererende-grootheid) kan *berekend* worden door een *onbepaalde integraal* (die saai is – een wat abstract omgekeerde van differentiëren – maar wel *berekenbaar* is!).

De twee begrippen samen laten spectaculaire berekeningen toe: de afgelegde weg bij variërende snelheden, de winst bij variërende verkoopprijzen, het aantal corona-slachtoffers bij variërende omstandigheden.

In wat volgt hebben we de leerstof over integralen als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) De definitie van de onbepaalde integraal

(3) Enkele basisintegralen

(4) De krachtige substitutieregel als omkering van de kettingregel van afgeleiden.

(5) De bijna even krachtige partiële integratie als omkering van de productregel van afgeleiden.

(6) Enkele specifieke rekenregels voor goniometrische integralen.

(7) Definitie en toepassingen van bepaalde integralen.

10.2 Definitie onbepaalde integraal

Definitie 10.2.1 (Primitieve functie).

Een **primitieve functie** van een functie f is een functie F waarvoor geldt dat

$$F' = f.$$

Voorbeeld 10.2.1.

1. $x \mapsto e^x$ is een primitieve functie van $x \mapsto e^x$
2. $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ is een primitieve functie van $x \mapsto x$
3. $x \mapsto x^3$ is een primitieve functie van $x \mapsto 3x^2$
4. $x \mapsto 42x$ is een primitieve functie van $x \mapsto 42$

Opmerking 10.2.1.

Volgens deze definitie kunnen we ook zeggen dat een afleidbare functie f een primitieve functie is van f'. Bijvoorbeeld $f(x) = x^3$ is een primitieve functie van $f'(x) = 3x^2$.

De situatie is hier wat ingewikkeld omdat een functie meerdere primitieve functies kan hebben. Uit de rekenregels van afgeleiden volgt dat twee functies die op een constante na gelijk zijn aan elkaar dezelfde afgeleide hebben: $(F + c)' = F' + c' = F'$. Als F een primitieve functie is van f, dus als $F' = f$, dan geldt ook $(F + c)' = F' = f$. Bijgevolg zijn ook de functies $F + c$ allemaal primitieve functies van f. Zijn dit *alle* primitieve functies van f? Het antwoord is ja, zoals blijkt uit volgende eigenschap:

Eigenschap 10.2.1 (Functies met gelijke afgeleiden zijn gelijk op een constante na).

Twee afleidbare functies F_1 en F_2 op een interval I met *gelijke afgeleiden*

$$F_1'(x) = F_2'(x) \qquad \text{voor alle } x \in I,$$

zijn *gelijk op een constante na*. Dat betekent dat er een constante c bestaat zodat

$$F_1(x) = F_2(x) + c \qquad \text{voor alle } x \in I.$$

Met *één* primitieve functie F van f kennen we dus *alle* primitieve functies van f: ze zijn allemaal van de vorm $F + c$, met $c \in \mathbb{R}$. Omdat er geen *unieke* primitieve functie is van f, spreken we over de *verzameling* van alle primitieve functies van f:

Definitie 10.2.2 (Onbepaalde integraal).

De **onbepaalde integraal** van een functie f, genoteerd $\int f(x)\ dx$, is de *verzameling van alle primitieve functies* van f. Omdat alle primitieve functies van f aan elkaar gelijk zijn op een constante noteren we ook

$$\boxed{\int f(x)\, dx \overset{\text{notatie}}{=} F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

met F een (willekeurige) primitieve functie van f.

We noemen $f(x)$ de **integrand**, x de **integratievariabele** en c de **integratieconstante**.

Het zoeken (of 'berekenen') van $\int f(x)\, dx$ noemt men het **primitiveren** of **integreren** van $f(x)$.

10.2 Definitie onbepaalde integraal

Voorbeeld 10.2.2.

1. $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + c$
2. $\displaystyle\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + c$
3. $\displaystyle\int 3x^2 \, dx = x^3 + c$
4. $\displaystyle\int 42 \, dx = 42x + c$

Afleiden en integreren heffen elkaar op.

Inderdaad, als we een functie f eerst afleiden en deze afgeleide dan integreren krijgen we (op een constante na) terug f:

$$\int f'(x) \, dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

omdat f een primitieve functie is van f'.

Als we f eerst integreren

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c \text{ met } F \text{ een primitieve functie van } f, \quad c \in \mathbb{R}$$

en dan het resultaat weer afleiden, krijgen we terug f :

$$\left(\int f(x) \, dx\right)' = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x).$$

Dit vatten we samen in volgende eigenschap:

Eigenschap 10.2.2 (Afleiden en integreren heffen elkaar op).

$$\int f'(x) \, dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\int f(x) \, dx\right)' = f(x)$$

Met de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right) \, dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int f(x) \, dx = f(x)$$

10.3 Basisintegralen

In onderstaand overzicht is de afgeleide van het rechterlid steeds de integrand in het linkerlid.

Eigenschap 10.3.1 (Basisintegralen)**.** (met $c \in \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{lcll}
\int 0\,dx & = & c & \\
\int x^r\,dx & = & \frac{1}{r+1}x^{r+1}+c & (r \in \mathbb{R}, r \neq -1) \\
\int e^x\,dx & = & e^x + c & \\
\int \sin x\,dx & = & -\cos x + c & \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx & = & \tan x + c & \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx & = & \operatorname{bgsin} x + c &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\int dx & = & x + c \\
\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x| + c \\
\int a^x\,dx & = & \frac{a^x}{\ln a} + c \\
\int \cos x\,dx & = & \sin x + c \\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx & = & -\cot x + c \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx & = & \operatorname{bgtan} x + c
\end{array}$$

Opmerking 10.3.1.

Een *basisintegraal* uitrekenen is eenvoudig want die zoek je op in de tabel. Merk op dat je dus wel snel moet kunnen herkennen *of* een bepaalde integraal al dan niet een basisintegraal is. Je moet bijvoorbeeld geen berekeningsmethode zoeken voor $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$, want deze integraal staat in de tabel.

De rekenregels voor som en scalaire veelvouden zijn analoog aan deze voor afgeleiden:

Eigenschap 10.3.2. Voor integreerbare functies f en g en $a, b \in \mathbb{R}$ gelden volgende formules:

$$\begin{array}{lcll}
\int af(x)\,dx & = & a\int f(x)\,dx & \text{(veelvoud)} \\
\int (f(x)+g(x))\,dx & = & \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx & \text{(som)} \\
\int (af(x)+bg(x))\,dx & = & a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx & \text{(lineaire combinatie)}
\end{array}$$

De rekenregel voor de som noemt men ook *integratie door splitsing*.

Voorbeeld 10.3.1. Basisintegralen:

(a) $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

(b) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

(c) $\int 7^x\,dx = \frac{7^x}{\ln 7} + c$

(d) $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\frac{x^2}{2} = x^2 + c$

Oefening 10.3.1. Bereken volgende onbepaalde integralen door splitsing:

1. $\int 3x^2 + 2x + \cos x + 7^x\,dx = \ldots\ldots$

10.3 Basisintegralen

Opmerking 10.3.2.

- De onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen WEL:

som $\displaystyle\int (\cos x + x^2)\, dx = \int \cos x\, dx + \int x^2\, dx = \sin x + \frac{x^3}{3} + c$

constante factor $\displaystyle\int 3x^2\, dx = 3\int x^2\, dx = 3\,\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$

- Een onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen NIET:

integraal van *product* $\displaystyle\cancel{\int \cos x \cdot x^2\, dx = \int \cos x\, dx \cdot \int x^2\, dx}$

integraal van *samenstelling* $\displaystyle\cancel{\int (\cos x)^2\, dx = \frac{(\cos x)^3}{3} + c}$

Er bestaan *geen algemene regels*, maar wel een aantal *technieken* die we verder zullen bespreken.

Oefening 10.3.2. Zijn volgende gelijkheden juist of fout? Verklaar.

1. | Juist | Fout | $\displaystyle\int (x \cdot x)\, dx \overset{?}{=} (\int x dx) \cdot (\int x\, dx)$

2. | Juist | Fout | $\displaystyle\int (2 \cdot x)\, dx \overset{?}{=} (\int 2 dx) \cdot (\int x\, dx)$

3. | Juist | Fout | $\displaystyle\int (2 \cdot x)\, dx \overset{?}{=} 2 \cdot (\int x\, dx)$

4. | Juist | Fout | $\displaystyle\int x^2\, dx \overset{?}{=} (\int x\, dx)^2$

Soms moet je een beetje creatief zijn om door splitsing een integraal te schrijven als een som van basisintegralen:

Oefening 10.3.3. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int 1\, dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \dots\dots$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int 1\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \dots\dots$

10.4 Integratie door substitutie

De *kettingregel voor afgeleiden* leidt tot de interessante methode van '*integratie door substitutie*'.

Eigenschap 10.4.1 (Substitutieregel).

Als in een integraal $\int h(x)\,dx$ de *integrand* $h(x)$ kan beschouwd worden als

een *product* dus $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$

van een samengestelde functie dus $h_1(x) = f(u(x))$

met de afgeleide van de binnenste functie dus $h_2(x) = u'(x)$

dan kunnen we de integraal reduceren tot

de integraal van de buitenste functie dus $\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int f(u)\, du$

In een formule: voor reële, afleidbare functies f en u waarvoor $f \circ u$ bestaat geldt

$$\boxed{\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \int f(u(x))\, du(x) = \int f(u)\, du.}$$

Volgend voorbeeld legt in detail de methode van substitutie uit:

Voorbeeld 10.4.1. Bereken $\int e^{x^2} 2x\, dx$.

Merk eerst op dat $e^{x^2} = e^{(x^2)}$ en $e^{x^2} \neq (e^x)^2 = e^{2x}$.

We herkennen de functie x^2 en haar afgeleide $2x$ in de integrand. Het ligt dus voor de hand te proberen of we met $u(x) = x^2$ ergens geraken, want van de functie $u(x)$ komen zowel de functie als de afgeleide voor in de formule van de substitutieregel. De enige mogelijkheid is dan dat $f(x) = e^x$, of met andere letters genoteerd $f(u) = e^u$, want dan is $f(u(x)) = e^{x^2}$. We passen de substitutieregel toe:

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\, dx &= \int f(u(x))u'(x)\, dx \\
&= \int f(u(x))\, d(u(x)) \\
&= \int f(u)\, du \\
&= \int e^u\, du \\
&= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Het gebruik van de substitutieregel wordt meestal korter genoteerd. We beschrijven twee mogelijkheden, schrijfwijze 1 met een *expliciete* nieuwe variabele u, en een nog kortere schrijfwijze 2 waar de subsitutie *impliciet* blijft en er geen nieuwe variabele expliciet wordt opgeschreven.

Schrijfwijze 1:

We schrijven niet expliciet $u(x) = x^2$ zoals hierboven, maar noteren korter $u = x^2$. Dan is $du = dx^2 = 2xdx$.

10.4 Integratie door substitutie

Deze beide uitdrukkingen *substitueer* je in $\int e^{x^2} 2x\,dx$ en je vindt

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\,dx &= \int e^u\,du && (\text{ want } x^2 = u \text{ en } 2x\,dx = du)\\
&= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} && (\text{basisintegraal})\\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && (\text{terug als functie van } x).
\end{aligned}$$

Schrijfwijze 2:

Je geeft de binnenste functie *geen expliciete naam*, maar brengt ze achter de differentiaal:

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\,dx &= \int e^{x^2}\,dx^2 && (\text{ want } dx^2 = 2x\,dx)\\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && (\text{ want } \int e^u\,du = e^u)
\end{aligned}$$

Bestudeer ook volgende kleine variaties:

De integraal $\int e^{x^2} x\,dx$ kan je ook berekenen met substitutie:

stel opnieuw $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x\,dx$. Hieruit haal je dat $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$.

Dit *substitueer* je in $\int e^{x^2} x\,dx$ en je vindt

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} x\,dx &= \int e^u \frac{1}{2} du && (\text{ want } x^2 = u \text{ en } x\,dx = \frac{1}{2}\,du)\\
&= \frac{1}{2}\int e^u\,du && (\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx)\\
&= \frac{1}{2}(e^u + c), \quad c \in \mathbb{R} && (\text{basisintegraal})\\
&= \frac{1}{2}(e^{x^2} + c), \quad c \in \mathbb{R} && (\text{terug als functie van } x)\\
&= \frac{1}{2}e^{x^2} + c', \quad c' \in \mathbb{R} && (\text{stel } c' = \frac{1}{2}c)\\
&= \frac{1}{2}e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && (\text{andere naam voor willekeurige constante})
\end{aligned}$$

Op analoge wijze kan je ook $\int 3e^{x^2} x\,dx$ berekenen.

De integralen $\int e^{x^2}\,dx$ en $\int 2e^{x^2}\,dx$ kan je *niet* berekenen met substitutie.

Besluit: Omdat de afgeleide van x^2 gelijk is aan $2x$ is het nodig dat de factor x in de integrand voorkomt, anders kan je substitutie niet toegepassen, maar de constante factor mag willekeurig zijn.

Voorbeeld 10.4.2. Bereken $\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx$

Schrijfwijze 1:

10.4 Integratie door substitutie

Stel $u = x^3 + 5$, dan is $du = d(x^3 + 5) = 3x^2\, dx$. Dit *substitueren* we in $\int 3x^2(x^3+5)^7\, dx$:

$$\int 3x^2(x^3+5)^7\, dx = \int u^7\, du = \frac{u^8}{8} + c = \frac{(x^3+5)^8}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int 3x^2(x^3+5)^7\, dx = \int (x^3+5)^7\, d(x^3+5) = \frac{(x^3+5)^8}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld 10.4.3. Bereken $\int 2x\cos(x^2)\, dx$

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x\, dx$. Dit *substitueren* we in $\int 2x\cos(x^2)\, dx$:

$$\int 2x\cos(x^2)\, dx = \int \cos(u)\, du = \sin(u) + c = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int 2x\cos(x^2)\, dx = \int \cos(x^2)\, dx^2 = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Volgende voorbeelden berekenen enkele integralen die in sommige boeken en cursussen in de lijst van basisintegralen staan. We hebben er hier voor gekozen om te werken met een eenvoudige lijst basisintegralen, omdat onderstaande integralen met de substitutieregel gemakkelijk berekend kunnen worden.

Voorbeeld 10.4.4. Bereken volgende integralen (met $a \in \mathbb{R}_0$)

(a) $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

Deze integraal lijkt op de basisintegraal $\int \cos x\, dx$. Merk ook op dat we de a *niet* uit de cosinus kunnen halen, want $\cos ax \neq a\cos x$. We stellen hier $u = ax$, want veel andere keuze is er niet.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = ax$, dan is $du = a\, dx$, dus $dx = \frac{1}{a}\, du$.

$$\int \cos ax\, dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{a}\, du = \frac{1}{a}\int \cos u\, du = \frac{1}{a}\sin u + c = \frac{1}{a}\sin ax + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\int \cos ax\, d(ax) = \frac{1}{a}\sin ax + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \text{bgsin}\,\frac{x}{a} + c$ met $a > 0$

Deze integraal lijkt op de basisintegraal $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Ditmaal is niet de integratievariabele x vermenigvuldigd met een constante factor, maar is de constante 1 gewijzigd in de constante a^2. Toch willen we overgaan naar deze basisintegraal door de substitutieregel te gebruiken. Hiervoor moeten we de integraal eerst herschrijven zodat onder de wortel terug de constante 1 staat in plaats van a^2. Als $a > 0$ geldt dat $\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}\,dx$$

Zo blijkt dat we de substitutie $u = \frac{x}{a}$ kunnen proberen om de integraal verder uit te rekenen.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = \frac{x}{a}$, dan is $du = \frac{1}{a}\,dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \operatorname{bgsin} u + c = \operatorname{bgsin}\frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,d\frac{x}{a} = \operatorname{bgsin}\frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{bgtan}\frac{x}{a} + c$

Deze integraal lijkt op de basisintegraal $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$. De constante 1 is gewijzigd in de constante a^2. Toch willen we overgaan naar deze basisintegraal door de substitutieregel te gebruiken. Hiervoor moeten we de integraal eerst herschrijven zodat er terug de constante 1 staat in plaats van a^2:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1+(\frac{x}{a})^2)}\,dx$$

Zo blijkt dat we de substitutie $u = \frac{x}{a}$ kunnen proberen om de integraal verder uit te rekenen.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = \frac{x}{a}$, dan is $du = \frac{1}{a}\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1+(\frac{x}{a})^2)}\,dx &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{(1+(\frac{x}{a})^2)}\cdot\frac{1}{a}\,dx \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}\,du \\ &= \frac{1}{a}\operatorname{bgtan} u + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{a}\operatorname{bgtan}\frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1+(\frac{x}{a})^2)}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(1+(\frac{x}{a})^2)}\,d\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\ \mathrm{bgtan}\,\frac{x}{a}+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+c$

Deze integraal kan berekend worden met substitutie, maar het vinden van de substitutie is niet voor de hand liggend. Daarom wordt deze integraal soms tot de basisintegralen gerekend.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x+\sqrt{x^2+a}$, dan is $du = (1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}})\,dx = \dfrac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$.

Bijgevolg is $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \dfrac{1}{u}\,du$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u|+c = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Schrijfwijze 2: wegens de complexe formule voor u werkt de tweede schrijfwijze hier niet.

(e) $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|+c$

Het enige startpunt om $\displaystyle\int \tan x\,dx$ te kunnen berekenen lijkt het toepassen van de definitie:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

Twee kandidaat substituties zijn dan $u(x)=\sin x$ en $u(x)=\cos x$. Nemen we $u(x)=\sin x$, dan is $du=\cos x\,dx$. In de teller staat echter $\sin x\,dx$. Daarom kiezen we voor $u(x)=\cos x$:

Schrijfwijze 1:
Stel $u=\cos x$, dan is $du = d\cos x = -\sin x\,dx$, dus $\sin x\,dx = -du$.
Dit *substitueren* we in $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u|+c = -\ln|\cos x|+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}\,d\cos x = -\ln|\cos x|+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Merk op dat we de substitutieregel $\displaystyle\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ hebben toegepast met $f(u)=\dfrac{1}{u}$. Dan wordt de substitutieregel $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du$. Dit is een voorbeeld waar de substitutieregel gebruikt wordt om de integraal van een quotiënt van 2 functies te berekenen.

Wanneer en welke substitutie moet uitgevoerd worden is niet altijd even duidelijk. Hier geldt de regel “Oefening baart kunst”. Volgende oefeningen behandelen enkele typische situaties.

10.4 Integratie door substitutie

Oefening 10.4.1.

1. $\displaystyle\int \frac{3\tan 2x}{5\cos^2 2x}\,dx = \ldots\ldots$

2. $\displaystyle\int (x^2+2)\sqrt{x-2}\,dx = \ldots\ldots$

We geven nog een wat merkwaardig voorbeeld van substitutie. Dit type integraal is ook belangrijk bij het berekenen van integralen van rationale functies, wat we hier niet verder behandelen.

Voorbeeld 10.4.5. Bereken $\displaystyle\int \frac{1}{p\,x^2+q\,x+r}\,dx$ met $D = q^2-4p\,r < 0$.

De discriminant van de noemer is $D = q^2-4p\,r < 0$. We eisen dat deze discriminant negatief is zodat de noemer nergens nul wordt en de integrand bijgevolg overal gedefinieerd is.

Deze integraal kan door substitutie worden herleid tot de basisintegraal $\displaystyle\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{bgtan} u + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Herschrijf hiervoor $p\,x^2+q\,x+r$ als $a(1+u^2)$.

We illustreren dit met een concreet voorbeeld:

$$\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

De discriminant van de noemer is $16-4\cdot 1\cdot 8 = -16 < 0$.

$$x^2-4x+8 = x^2-4x+4+4 = (x-2)^2+4 = 4\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1\right)$$

Stel $u = \dfrac{x-2}{2}$, dan is $du = \dfrac{1}{2}\,dx$ zodat

$$\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{1}{4(u^2+1)}\cdot 2du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\operatorname{bgtan}\frac{x-2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Opmerking 10.4.1. Integralen van het type $\displaystyle\int \frac{1}{p\,x^2+q\,x+r}\,dx$:

- met $D = q^2-4p\,r < 0$: zie bovenstaand voorbeeld
- met $D = q^2-4p\,r = 0$: noemer ontbinden in 2 identieke factoren en verder uitrekenen met substitutie
- met $D = q^2-4p\,r > 0$: noemer ontbinden in 2 verschillende factoren en splitsing in partieelbreuken. Dit laatste behandelen we hier niet.

10.5 Partiële integratie

De *productregel voor afgeleiden* leidt tot de interessante methode van '*partiële integratie*'.

De regel voor partiële integratie volgt onmiddellijk uit de regel voor de afgeleide van het product van twee functies f en u.

$$(f(x) \cdot u(x))' = f'(x) \cdot u(x) + f(x) \cdot u'(x)$$

Inderdaad, als we beide leden integreren krijgen we

$$\int (f(x) \cdot u(x))' \, dx = \int f'(x) \cdot u(x) \, dx + \int f(x) \cdot u'(x) \, dx.$$

Na termen van lid veranderen krijgen we

$$\int f(x) \cdot u'(x) \, dx = \int (f(x) \cdot u(x))' \, dx - \int f'(x) \cdot u(x) \, dx.$$

Omdat $\int (f(x) \cdot u(x))' \, dx = f(x) \cdot u(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$ wordt dit

$$\int f(x) \cdot u'(x) \, dx = f(x) \cdot u(x) - \int f'(x) \cdot u(x) \, dx.$$

Dit is de formule voor partiële integratie, zo genoemd omdat de integraal $\int f(x) \cdot u'(x) \, dx$ gedeeltelijk, dus partieel, is geïntegreerd: we hebben al een deel van de primitieve functie, namelijk $f(x) \cdot u(x)$, en er blijft nog een ander - hopelijk eenvoudiger te berekenen - deel over, namelijk $\int f'(x) \cdot u(x) \, dx$. We hebben $f(x) \cdot u(x)$ genoteerd en niet $f(x) \cdot u(x) + c$, omdat het resultaat van de berekening van de tweede term van het rechterlid, $\int f'(x) \cdot u(x) \, dx$, ook slechts op een constante na bepaald is.

Eigenschap 10.5.1 (Partiële integratie)**.**

Als in een integraal $\int h(x) \, dx$ de *integrand* $h(x)$ kan beschouwd worden als

een*product* dus $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$

van een functie $f(x)$ dus $h_1(x) = f(x)$

en van de afgeleide van een functie $u(x)$ dus $h_2(x) = u'(x)$

dan kunnen we de integraal schrijven als

$$\int f(x)u'(x) \, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x) \, dx.$$

Dus voor reële, afleidbare functies f en u geldt

$$\boxed{\int f(x) \cdot u'(x) \, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x) \, dx},$$

of korter genoteerd:

$$\int f \cdot u' \, dx = f \cdot u - \int f' \cdot u \, dx,$$

of met differentialen genoteerd:

$$\boxed{\int f \, du = f \cdot u - \int u \, df}.$$

10.5 Partiële integratie

In oefeningen wordt dikwijls $\stackrel{P.I.}{=}$ geschreven om het gebruik van partiële integratie aan te duiden.

Men schrijft de regel voor partiële integratie dikwijls met functies f en g (in plaats van f en u zoals hierboven):

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

of met functies u en v:

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du.$$

We hebben de eigenschap geformuleerd met f en u omwille van de parallel met de substitutieregel

$$\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int f(u(x))du(x) = \int f(u)du \qquad \text{(substitutie)},$$

waar de rol van f en u minder symmetrisch is. Voor partiële integratie is de rol van beide factoren wel symmetrisch, en is de notatie met f en g, ofwel u en v ook gebruikelijk. Het is belangrijk dat je met elke versie van deze formules kan werken, onafhankelijk van de letters die gebruikt worden.

Voorbeeld 10.5.1. Bereken $\int xe^x\,dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x)\cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx$

  Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = e^x$

  $$\int \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{u'(x)}\,dx,$$

  dan is $f'(x) = 1$ en $u(x)$ kunnen we vinden door $u'(x)$ te integreren: $u(x) = \int u'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x + c, \quad c\in\mathbb{R}$.

  Er zijn dus oneindig veel mogelijke functies u, maar we nemen deze met $c = 0$.

  Partiële integratie geeft dan

  $$\int \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{u'(x)}\,dx \stackrel{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{u(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{u(x)}\,dx = xe^x - e^x + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f\,du = f\cdot u - \int u\,df$

  Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\,dx = e^x\,dx$. Dan geldt

  $$\int \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x\,dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{d(e^x)}_{du} \stackrel{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{u(x)} - \int \underbrace{e^x}_{u(x)}\underbrace{dx}_{df}$$
  $$= xe^x - e^x + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

De keuze van f en u ligt niet vast. Stel dat we hier een andere keuze hadden gemaakt voor f en u, namelijk $f(x) = e^x$ en $u'(x) = x$. Dan is $f'(x) = e^x$ en $u(x) = \frac{x^2}{2}$. Partiële integratie geeft dan

$$\int xe^x\,dx \stackrel{P.I.}{=} e^x\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2e^x\,dx.$$

10.5 Partiële integratie

In de tweede integraal is de macht van x *verhoogd* van 1 naar 2. Dus de x in de eerste integraal wordt een x^2 in de tweede integraal. Met deze keuze van f en u wordt de nieuwe integraal *nog ingewikkelder dan de oorspronkelijke*. Hoewel de gelijkheid correct is, helpt ze niet. *Een goede keuze* voor f en u is dus erg belangrijk.

Voorbeeld 10.5.2. Bereken $\int x \sin x \, dx$.

- **Schrijfwijze 1**: $\int f(x) \cdot u'(x)\, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\, dx$

  Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = \sin x$

  $$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u'(x)} \, dx,$$

  dan is $f'(x) = 1$ en $u(x)$ kunnen we vinden door $u'(x)$ te integreren: $u(x) = \int u'(x)\, dx = \int \sin x \, dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  We kiezen de primitieve functie met $c = 0$. Partiële integratie geeft dan

  $$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u'(x)} \, dx &\overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- **Schrijfwijze 2**: $\int f \, du = f \cdot u - \int u \, df$

  Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\, dx = \sin x \, dx$

  $$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x \, dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{d(-\cos x)}_{du} &\overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} \underbrace{dx}_{df} \\ &= -x\cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

In de volgende oefeningen moet je partiële integratie combineren met een eenvoudige substitutie.

Oefening 10.5.1.

1. $\int x e^{2x} \, dx = \ldots\ldots$

2. $\int x e^{-3x} \, dx = \ldots\ldots$

We hebben in de voorbeelden en oefeningen tot nu toe telkens het product van de veelterm x met een exponentiële of goniometrische functie geïntegreerd. Wanneer deze veelterm van een hogere graad is moeten we herhaaldelijk partieel integreren om tot de oplossing te komen. Bij elke stap daalt de graad van de veelterm met één.

Voorbeeld 10.5.3. Bereken $\int (2x^2-4x)e^{2x}\,dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x)\cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx$

  Stel $f(x)=2x^2-4x$ en $u'(x)=e^{2x}$, dan is $f'(x)=4x-4$ en $u(x)=\int u'(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}+c,\quad c\in\mathbb{R}$.
  Partiële integratie geeft dan

$$\int \underbrace{(2x^2-4x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{u'(x)}\,dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{(2x^2-4x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)} - \int \underbrace{(4x-4)}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)}\,dx$$
$$= (x^2-2x)\,e^{2x} - \int (2x-2)e^{2x}\,dx$$

  We passen nogmaals partiële integratie toe. Ditmaal stellen we $f(x)=2x-2$ en $u'(x)=e^{2x}$, dan is $f'(x)=2$ en $u(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$.

$$(x^2-2x)\,e^{2x} - \int \underbrace{(2x-2)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{u'(x)}\,dx$$
$$\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)\,e^{2x} - \left(\underbrace{(2x-2)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)} - \int \underbrace{2}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)}\,dx\right)$$
$$= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \int e^{2x}\,dx$$
$$= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{2x} + c$$
$$= (x^2-2x-x+1+\frac{1}{2})\,e^{2x} + c$$
$$= (x^2-3x+\frac{3}{2})\,e^{2x} + c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f\,du = f\cdot u - \int u\,df$

$$\begin{aligned}
\int (2x^2-4x)e^{2x}\,dx &= \int (x^2-2x)\,de^{2x} \\
&\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)e^{2x} - \int e^{2x}(2x-2)\,dx \\
&= (x^2-2x)\,e^{2x} - \int (x-1)\,de^{2x} \\
&\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)\,e^{2x} - \left[(x-1)\,e^{2x} - \int e^{2x}\,dx\right] \\
&= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{2x} + c \\
&= (x^2-2x-x+1+\frac{1}{2})\,e^{2x} + c \\
&= (x^2-3x+\frac{3}{2})\,e^{2x} + c, \qquad c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

10.5 Partiële integratie

Als de integrand het product is van een veelterm en een andere functie zoals een sinus, cosinus of exponentiële functie, kiezen we voor $f(x)$ de veelterm. Door partiële integratie toe te passen daalt dan immers de graad van de veelterm. In het volgende voorbeeld, het product van een veelterm met $\ln x$, doen we het andersom, omdat we $\ln x$ eenvoudig kunnen afleiden, maar nog niet integreren. Hoe we $\ln x$ kunnen integreren is één van de volgende voorbeelden.

Voorbeeld 10.5.4. Bereken $\displaystyle\int 9x^2 \ln x \, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\displaystyle\int f(x) \cdot u'(x) \, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x) \, dx$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $u'(x) = 9x^2$
  $$\int \underbrace{9x^2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx,$$
  dan is $f'(x) = 1/x$ en $u(x) = \displaystyle\int u'(x) \, dx = \int 9x^2 \, dx = 3x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  Partiële integratie geeft dan
  $$\begin{aligned}\int \underbrace{9x^2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx &\overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} - \int \underbrace{1/x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} \, dx \\ &= 3x^3 \ln x - \int 3x^2 \, dx = 3x^3 \ln x - x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- **Schrijfwijze 2:** $\displaystyle\int f \, du = f \cdot u - \int u \, df$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $du = u'(x) \, dx = 9x^2 \, dx$
  $$\begin{aligned}\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{9x^2 \, dx}_{du} = \int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \underbrace{d(3x^3)}_{du} &\overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} - \int \underbrace{3x^3}_{u(x)} \underbrace{d(\ln x)}_{df} \\ &= 3x^3 \ln x - \int \frac{3x^3}{x} \, dx = 3x^3 \ln x - x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Om partiële integratie te kunnen toepassen moet de integrand het product zijn van 2 functies. Maar ook als de integrand bestaat uit slechts 1 functie kunnen we partiële integratie toepassen door deze functie te vermenigvuldigen met de constante 1.

Voorbeeld 10.5.5. Bereken $\displaystyle\int \ln x \, dx$.

Om partiële integratie te kunnen toepassen beschouwen we $\ln x$ als een product $\ln x \cdot 1$.

- Schrijfwijze 1: $\displaystyle\int f(x) \cdot u'(x) \, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x) \, dx$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $u'(x) = 1$, dan is $f'(x) = 1/x$ en $u(x) = \displaystyle\int u'(x) \, dx = \int 1 \, dx = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

Partiële integratie geeft dan

$$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{u'(x)}\, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{u(x)} - \int \underbrace{1/x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{u(x)}\, dx$$

$$= x\ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- Schrijfwijze 2: $\int f\, du = f \cdot u - \int u\, df$

$$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \underbrace{dx}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{u(x)} - \int \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{d\ln x}_{df} = x\ln x - \int \frac{x}{x}\, dx$$

$$= x\ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Soms bekom je na (herhaald) partieel integreren opnieuw de *oorspronkelijke* integraal. Onderstaand voorbeeld legt uit welke techniek je dan kan toepassen.

Voorbeeld 10.5.6. Bereken $\int \sin x\, e^x\, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x) \cdot u'(x)\, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\, dx$

We stellen $I = \int \sin x\, e^x\, dx$ voor de verdere berekening. Welke keuze we maken voor $f(x)$ en $u'(x)$ is niet zo belangrijk in deze oefening. We maken de keuze $f(x) = \sin x$ en $u'(x) = e^x$, dan is $f'(x) = \cos x$ en $u(x) = e^x$. Maak deze oefening opnieuw met de andere keuze.

$$I = \int \sin x \cdot e^x\, dx = \sin x \cdot e^x - \int \cos x \cdot e^x\, dx$$

We passen nogmaals partiële integratie toe. Ditmaal stellen we $f(x) = \cos x$ en $u'(x) = e^x$, dan is $f'(x) = -\sin x$ en $u(x) = e^x$.

$$I = \sin x \cdot e^x - \left(\cos x \cdot e^x - \int (-\sin x) \cdot e^x\, dx\right) = (\sin x - \cos x)e^x - \int \sin x \cdot e^x\, dx$$

In het rechterlid staat nu terug de oorspronkelijke integraal I.

$$I = (\sin x - \cos x)e^x - I$$

We brengen I naar het linkerlid en bekomen:

$$2\, I = e^x\, (\sin x - \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dus

$$I = \frac{1}{2}\, e^x\, (\sin x - \cos x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \text{ (Stel } c_1 = c/2).$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f\, du = f \cdot u - \int u\, df$

Hier hebben we de andere keuze gemaakt: we stellen $f(x) = e^x$ en $du = u'(x)\, dx = \sin x\, dx$

$$
\begin{aligned}
I = \int \sin x\, e^x\, dx \quad &= \quad -\int e^x\, d\cos x \\
&\overset{P.I.}{=} \quad -e^x \cos x + \int \cos x d e^x \\
&= \quad -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx \\
&= \quad -e^x \cos x + \int e^x\, d\sin x \\
&\overset{P.I.}{=} \quad -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x\, de^x \\
&= \quad -e^x \cos x + e^x \sin x - \underbrace{\int \sin x\, e^x\, dx}_{I}.
\end{aligned}
$$

We brengen I naar het linkerlid en bekomen:

$$2\, I = e^x\, (\sin x - \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dus

$$I = \frac{1}{2}\, e^x\, (\sin x - \cos x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \text{ (Stel } c_1 = c/2).$$

10.6 Andere integratietechnieken

Je moet niet steeds ofwel de substitutieregel ofwel partiële integratie toepassen om een integraal uit te rekenen. Om integralen uit te rekenen van goniometrische functies kan het soms nuttig zijn om eerst een goniometrische formule toe te passen om zo van een product van functies over te gaan op een som. We herhalen hiervoor enkele goniometrische formules:

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1\\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1\\
2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\\
-2\sin\alpha\sin\beta &= \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

Uit bovenstaande formules volgt ook dat

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha &= \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\\
\sin^2\alpha &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)
\end{aligned}$$

Met deze formules kunnen we sommige integralen herschrijven tot basisintegralen of integralen die verder uit te rekenen zijn met andere integratietechnieken.

Oefening 10.6.1.

1. $\displaystyle\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos x)\,dx = \ldots\ldots$

2. $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\,dx = \int \frac{1}{2}(\cos(-2x) - \cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 4x)\,dx = \ldots\ldots$

10.7 Bepaalde integralen

10.7.1 Definitie bepaalde integraal

Definitie 10.7.1 (Bepaalde integraal)**.**

Zij f een continue, *positieve* functie op een interval $[a, b]$.

De **bepaalde integraal** van f over het interval $[a, b]$, genoteerd als

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

is per definitie gelijk aan de *oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$.

We noemen a en b de **integratiegrenzen** en $[a, b]$ het **integratie-interval**, en we **integreren over** dat interval.

10.7.2 Verband met de onbepaalde integraal

Eigenschap 10.7.1 (Verband tussen bepaalde en onbepaalde integralen)**.**

Zij f een continue functie op een interval $[a, b]$ en F een primitieve functie van f (dus $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$). Dan geldt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a)} \qquad \stackrel{\text{notatie}}{=} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Deze formule laat toe om het berekenen van een *bepaalde* integraal te reduceren tot het berekenen van de *onbepaalde* integraal, en dan de integratiegrenzen in te vullen.

Merk op dat het hierbij geen probleem is dat een primitieve functie slechts op een constante na bepaald is:

$$\big(F(b) + c\big) - \big(F(a) + c\big) = F(b) - F(a).$$

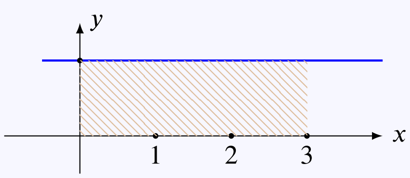
Elke primitieve functie F van f is dus geschikt om de bepaalde integraal uit te rekenen.

Hierbij is $\boxed{\big[F(x)\big]_a^b \stackrel{\text{def}}{=} F(b) - F(a)}$ een handige notatie. Soms gebruikt men ook $F(x)\Big|_a^b \stackrel{\text{def}}{=} F(b) - F(a)$.

Voorbeeld 10.7.1. Eenvoudige bepaalde integralen:

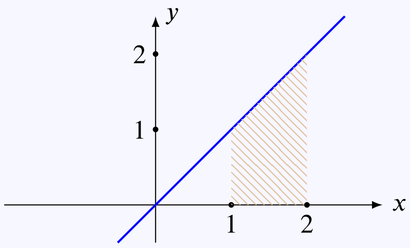
1. $\displaystyle\int_0^3 1\,dx = \Big[x\Big]_0^3 = 3 - 0 = 3$

De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de de rechte $y = 1$ (dit is de grafiek van $f(x) = 1$), de x-as en de verticale rechten $x = 0$ en $x = 3$.

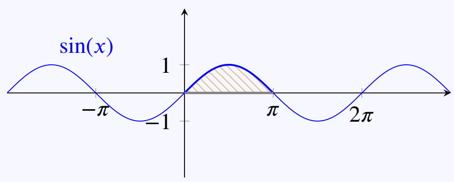


2. $\displaystyle\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) = \frac{1}{2}(4 - 1) = \frac{3}{2}$

De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de de rechte $y = x$ (dit is de grafiek van $f(x) = x$), de x-as en de verticale rechten $x = 1$ en $x = 2$.



3. $\int_0^\pi \sin x \; dx = \Big[-\cos x \Big]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$



Eigenschap 10.7.2 (Eigenschappen van de bepaalde integraal).

Zij f een functie gedefinieerd op $[a, b]$ en $c \in [a, b]$. Dan is

$$\int_a^a f(t)\; dt = 0 \qquad \text{(integreren over een leeg interval)}$$

$$\int_b^a f(t)\; dt = -\int_a^b f(t)\; dt = \int_a^b (-f(t))\; dt \qquad \text{(integreren in omgekeerde richting)}$$

$$\int_a^b f(t)\; dt = \int_a^c f(t)\; dt + \int_c^b f(t)\; dt \qquad \text{(integratie-interval opsplitsen)}$$

Voorbeeld 10.7.2.

1. $\int_4^8 x\; dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^8 = \frac{1}{2}(8^2 - 4^2) = \frac{1}{2}(64 - 16) = 24$

2. $\int_8^4 x\; dx = -\int_4^8 x\; dx = -24,$

of anders berekend $\int_8^4 x\; dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_8^4 = \frac{1}{2}(4^2 - 8^2) = \frac{1}{2}(16 - 64) = -24$

3.

$$\begin{aligned}\int_4^8 x\; dx &= \int_4^6 x\; dx + \int_6^8 x\; dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^6 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_6^8 = \frac{1}{2}(6^2 - 4^2) + \frac{1}{2}(8^2 - 6^2) = \frac{1}{2}(36 - 16 + 64 - 36) = 24\end{aligned}$$

10.7.3 Georiënteerde oppervlakte

In de definitie van de bepaalde integraal hebben we de functie f positief verondersteld.

Als f niet noodzakelijk positief is, moeten we voorzichtiger zijn met wat we precies verstaan onder 'oppervlakte'. We geven een nieuwe definitie:

Definitie 10.7.2 (Georiënteerde oppervlakte en bepaalde integraal)**.**

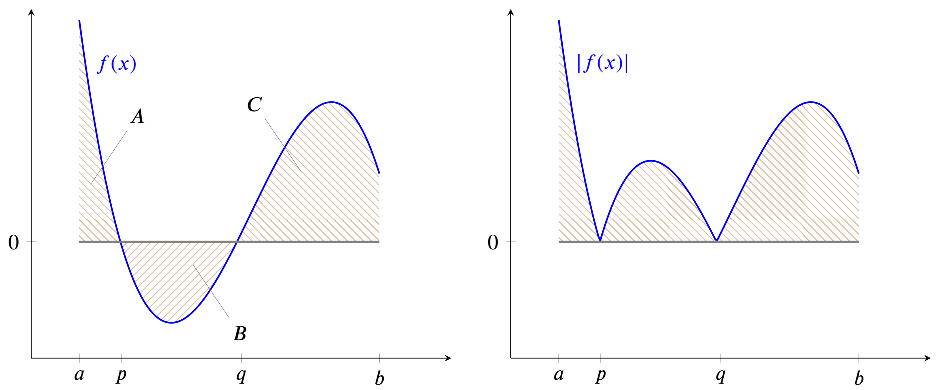
De **georiënteerde oppervlakte** telt per definitie de oppervlakte van een gebied dat boven de x-as ligt *positief* en telt de oppervlakte van een gebied dat onder de x-as ligt *negatief.*

Als f een continue functie is op een interval $[a, b]$, dan is de bepaalde integraal

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

gelijk aan de *georiënteerde oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$.

Dus als de functie f negatief is, telt de bepaalde integraal die oppervlakte ook als negatief.

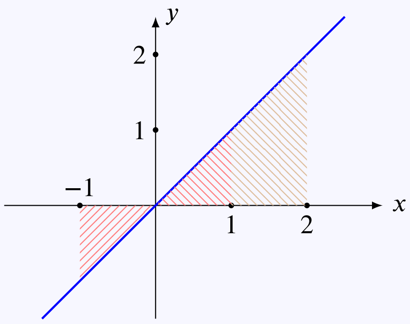


De bepaalde integraal van de functie f over het interval $[a, b]$ in de linkse figuur is dus

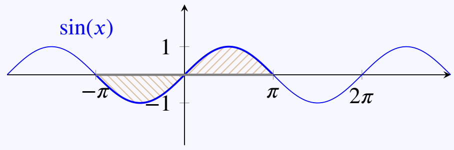
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^p f(x)\, dx + \int_p^q f(x)\, dx + \int_q^b f(x)\, dx = \text{opp}\, A \;-\; \text{opp}\, B \;+\; \text{opp}\, C\,.$$

Voorbeeld 10.7.3.

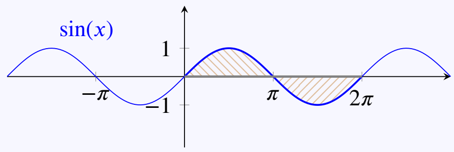
1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(2^2 - (-1)^2) = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$



2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) = -(-1) - (-(-1)) = 1 - 1 = 0$



3. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_{0}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$



Indien het echter de bedoeling is om opp A + opp B + opp C te berekenen, dan moet de bepaalde integraal van $|f(x)|$ berekend worden, zoals in de rechtse figuur geïllustreerd wordt.

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = \text{opp } A + \text{opp } B + \text{opp } C$$

10.7.4 Substitutie bij bepaalde integralen

Bij het berekenen van *bepaalde* integralen met substitutie moeten voor de *nieuwe* substitutie-variabele ook de integratiegrenzen worden aangepast. Er zijn twee oplossingsmethodes: ofwel bereken en gebruik je inderdaad de nieuwe integratiegrenzen, ofwel bereken je eerst de *onbepaalde* integraal, en vul je in de uitkomst de oorspronkelijke grenzen in.

Voorbeeld 10.7.4. Bereken $\displaystyle\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx$

- **Schrijfwijze 1:** We illustreren beide methodes:
  - *Methode 1:* **Integratiegrenzen aanpassen**: Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2xdx$. Als $x = 1$ dan is $u = 1$, als $x = 2$ dan is $u = 4$
  $$\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx = \int_1^4 e^u\, du = \left[e^u\right]_1^4 = e^4 - e$$
  - *Methode 2:* **Eerst de onbepaalde integraal berekenen** met de substitutie $u = x^2$;
  $$\int e^{x^2} 2x\, dx = e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R},$$
  en dan $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ toepassen:
  $$\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e.$$
- **Schrijfwijze 2:**

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx = \int_1^2 e^{x^2}\, dx^2 = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

Opmerking 10.7.1. De tweede methode, dus eerst de onbepaalde integraal uitrekenen en dan $\int_a^b f(x)\ dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ toepassen, heeft als voordeel dat je dan de nieuwe grenzen niet moet zoeken.

Vaak gemaakte fouten zijn:

- De grenzen van x gebruiken als grenzen voor u:

$$\cancel{\int_1^2 e^{x^2} 2x\ dx = \int_1^2 e^u\ du}$$

- Tijdens de berekening van de bepaalde integraal de grenzen niet aanpassen, ook al geeft dit een correct resultaat:

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x\ dx \neq \int_1^2 e^u\ du \neq \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

10.7.5 Partiële integratie bij bepaalde integralen

Voorbeeld 10.7.5. Bereken $\int_0^1 xe^x\ dx$.

- **Schrijfwijze 1:** Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = e^x$, dan is $f'(x) = 1$ en $u(x) = e^x$.
  Partiële integratie geeft dan

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \cdot e^x\ dx &\overset{P.I.}{=} \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x\ dx \\ &= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1;\end{aligned}$$

- **Schrijfwijze 2:** Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\ dx = e^x\ dx$;

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \cdot e^x\ dx = \int_0^1 xd(e^x) &\overset{P.I.}{=} \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\ dx \\ &= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1\end{aligned}$$

Ook hier kan je echter eerst de onbepaalde integraal uitrekenen, en vervolgens Eigenschap 1 gebruiken. Dit is altijd de veiligste optie, omdat je dan geen problemen kan hebben met integratiegrenzen.

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

Module 11
Vectoren en matrices

(Versie 2024/10/24HB.16)

11.1 Intro lineaire algebra

De volgende drie delen behandelen enkele topics uit de zogenaamde *lineaire algebra*, met de theorie van vectoren en matrices die de technische basis vormen bij de studie van enerzijds stelsels en anderzijds rechten en vlakken in de ruimte.

De toepassingen reiken verder dan eenvoudige meetkunde, bijvoorbeeld ook tot systeemgedrag, geavanceerde fysica, big data, en tal van andere domeinen.

(a) Vectoren en matrices
Eerst beschouwen we een vector puur als een stel getallen. We definiëren bewerkingen op vectoren en laten je vertrouwd geraken met definities, eigenschappen en formules. Ook matrices komen op dezelfde manier aan bod.

(b) Stelsels
Daarna leren we stelsels lineaire vergelijkingen oplossen. De vectoren en matrices komen tot leven, maar nog steeds onder de vorm van formules. Onderweg werpen we wel een eerste blik op meetkundige interpretaties.

(c) Rechten en vlakken
Vectoren spelen een hoofdrol in verschillende beschrijvingen van rechten en vlakken. Terwijl we het meetkundige verhaal uitrollen, komen de formules van vectoren en matrices terug in de spotlight. Ook de stelsels spelen een belangrijke rol.
De formules helpen ons om de meetkunde begrijpen. De meetkunde helpt ons om de formules begrijpen. Inzicht in rechten en vlakken vormt de basis voor intu"ıtief inzicht in de rest van de lineaire algebra.

Lineair betekent in deze context 'van de eerste graad', maar de benaming weerspiegelt het intuïtieve idee dat we praten over zaken die op een bepaalde manier 'recht' zijn of vlak, in de realiteit of in grafische voorstellingen.

'Lineair' staat ook vaak gelijk met 'handelbaar' of 'begrijpbaar': Moeilijkere concepten zijn te begrijpen met de lineaire algebra als opstapje. Moeilijkere problemen worden opgelost met lineaire benaderingen.

11.2 Intro vectoren en matrices

Een **matrix** is een rechthoekig rooster van getallen, bijvoorbeeld $\begin{bmatrix} 1.2 & -3 & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & -3.14 \end{bmatrix}$, waarbij de getallen verschillende zaken kunnen voorstellen: een stelsel, een stel vectoren, een assenstelsel, een lineaire afbeelding,... De lijst is heel veel langer.

Een **vector** kan je beschouwen als een stel getallen, die je naast of onder elkaar weergeeft, bijvoorbeeld $(-2, 1, 7)$ of $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Ook een vector kan tal van zaken voorstellen: een krachtvector, een verschuivingsoperatie, een punt in de ruimte, een punt in een grafiek, een stap, en nog veel meer.
Maar let op: de voorgestelde zaken worden zelf ook vaak 'vector' genoemd. 'Vector' is een woord met meerdere betekenissen, die we verder geleidelijk aan bod laten komen.

In wat volgt hebben we de leerstof over vectoren en matrices als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) De definitie en basiseigenschappen van vectoren als elementen van $\mathbb{R}^n$

(3) Een korte inleiding tot de belangrijke begrippen lineaire combinatie en inwendig product die we zullen nodig hebben bij stelsels en rechten en vlakken.

(4) De definitie en basiseigenschappen van matrices als elementen van $\mathbb{R}^{m \times n}$

Deze drie topics vectoren, lineaire combinaties en matrices volstaan als voorbereiding om de belangrijkste aspecten van stelsels en rechten en vlakken te begrijpen.

(5) Matrices kan je ook vermenigvuldigen en transponeren.

(6) Voor *vierkante* matrices is er de erg belangrijke determinant die onder meer bepaald of de matrix inverteerbaar is.

(7) Voor *vectoren* is er niet alleen het inwendig product, maar in $\mathbb{R}^3$ (en enkel daar!) bestaat er ook een belangrijk vectorproduct.

11.3 Vectoren

We gebruiken het begrip *vector* hier als een andere naam voor een *n-tal van reële getallen*. Dergelijke vectoren veralgemenen de koppels (x, y), en dus punten of vectoren in het vlak, en de drietallen (x, y, z) en dus punten of vectoren in de driedimensionale ruimte. De *meetkundige* betekenis in een n-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^n$ wordt elders besproken, hier beperken we ons tot wat nuttig is bij de studie van stelsels van vergelijkingen .

Voorbeeld 11.3.1 (Voorbeelden van vectoren)**.**

Volgende reeksen van getallen kunnen worden voorgesteld als een vector:

(a) maximumtemperaturen per dag in Ukkel tijden de eerste week van maart 2021:

$$(11.8 \ , \ 17.2 \ , \ 16.3 \ , \ 8.7 \ , \ 6.4 \ , \ 7.3 \ , \ 6.2 \ )$$

(b) veilingprijzen (€/kg) van aardbeien, appelen, braambessen, frambozen en peren op 15/3/2021:

$$(8.307 \ , \ 0.570 \ , \ 6.660 \ , \ 0.909 \ , \ 0.480 \ )$$

(c) het verschil van die veilingprijzen ten opzicht van de vorige dag:

$$(-1.805 \ , \ -0.040 \ , \ +0.308 \ , \ +0.272 \ , \ -0.007 \ )$$

Merk op dat het niet abstract of exotisch is vectoren te bestuderen met meer dan 2 of 3 componenten. Klimaatwetenschappers gebruiken vectoren met 10.000, 1.000.000 of nog veel meer componenten, afhankelijk van de nauwkeurigheid waarmee ze de evolutie van gemiddelde jaartemperaturen willen bestuderen.

Definitie 11.3.1 (Vector als n-tal)**.**

Een **vector a** is een geordend n-tal reële getallen en $\mathbb{R}^n$ is de verzameling van al die vectoren:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Men noemt een vector in $\mathbb{R}^n$ soms een **n-vector**, en n de **dimensie** van de vector.

De getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$ zijn de **componenten** (of ook **coördinaten**) van de vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Vectoren zijn *gelijk* als ze *dezelfde componenten* hebben *in dezelfde volgorde*: $(0.5, 1) = (\frac{1}{2}, 1)$ en $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Voorbeeld 11.3.2.

$(1, 2)$	is een vector in $\mathbb{R}^2$	$(\sqrt{2}, 0, -1, \pi)$	is een vector in $\mathbb{R}^4$
$(1, -2, \frac{1}{2})$	is een vector in $\mathbb{R}^3$	$(1, 1, \dots, 1)$	is een vector in $\mathbb{R}^n$

Opmerking 11.3.1.

- In andere contexten worden andere definities gegeven van vectoren: vectoren komen onder verschillende gedaantes voor in de meetkunde, in de fysica en in de lineaire algebra.
- Men noteert een vector $\mathbf{a}$ soms ook met een pijltje als $\vec{a}$ of gewoon als a. Uiteraard kunnen er ook andere letters gebruikt worden zoals $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ of $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$.

De belangrijkste bewerkingen op vectoren zijn de *som* en het *scalair veelvoud*. Met behulp van de som kunnen we onmiddellijk ook *verschil* en *tegengestelde* definiëren.

Definitie 11.3.2 (Rekenen met vectoren)**.**

Voor twee vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ en een getal $r \in \mathbb{R}$ definiëren we:

som	$\mathbf{a}+\mathbf{b}$	$=$	$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n)$	$\stackrel{\text{def}}{=}$	$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$
scalair veelvoud	$r\mathbf{a}$	$=$	$r \cdot \mathbf{a} = r(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	$\stackrel{\text{def}}{=}$	$(ra_1, ra_2, \ldots, ra_n)$
nulvector	$\mathbf{0_n}$			$\stackrel{\text{def}}{=}$	$(0, \ldots, 0)$
tegengestelde	$-\mathbf{a}$	$=$	$-(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	$\stackrel{\text{def}}{=}$	$(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$
verschil	$\mathbf{a}-\mathbf{b}$	$\stackrel{\text{def}}{=}$	$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$	$=$	$(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)$

Voorbeeld 11.3.3.

$$\begin{aligned} (1,2)+(3,4) &= (1+3,2+4) = (4,6) & (4,3)-(2,1) &= (4-2,3-1) = (2,2) = 2\cdot(1,1)\\ -(1,2,3) &= (-1,-2,-3) & (1,-1.5,3)+(2.2,-1,0) &= (3.2,-2.5,3)\\ 3\cdot(1,2) &= (3,6) & 3\cdot(1,-1,0.5) &= (3,-3,1.5) \end{aligned}$$

Opmerking 11.3.2.

- De som en het verschil van vectoren worden 'component per component' berekend. Bijgevolg zijn som en verschil enkel gedefinieerd voor vectoren *van hetzelfde formaat*: de som $\cancel{(1,2)+(3,4,5,6)}$ is *niet gedefinieerd*.
- Indien het formaat duidelijk is uit de context wordt de index n van de nulvector meestal weggelaten: $\mathbf{0} = \mathbf{0_n}$. Als er geen verwarring mogelijk is wordt zelfs niet altijd onderscheid gemaakt tussen het getal 0 en de vector $\mathbf{0}$ en schrijft men ook $\mathbf{a} + 0$ in plaats van $\mathbf{a} + \mathbf{0_n}$.
- Net zoals voor de vermenigvuldiging van getallen schrijft men het punt voor de scalaire vermenigvuldiging soms wel en soms niet: $r \cdot \mathbf{a} = r\mathbf{a}$.
- Het scalair veelvoud is het resultaat van de ('scalaire') vermenigvuldiging van een *scalar* r (dus een reëel getal) met een *vector* $\mathbf{a}$. Het resultaat is zelf dus een *herschaalde vector* $r\mathbf{a}$. Per uitzondering noemen we hier het resultaat van een vermenigvuldiging geen *product*, maar een *veelvoud*. Het is redelijk om $r\mathbf{a}$ '*scalair*' *veelvoud* te noemen, want $r\mathbf{a}$ is inderdaad een r *keer* her*schaal*de vector $\mathbf{a}$.
- Pas op: er bestaat ook een scalair *product* van vectoren, en dat is iets totaal anders dan het scalair *veelvoud*. Bij het scalair *product* worden *twee vectoren* vermenigvuldigd waarbij het resultaat een *scalar* is, dus een reëel getal.

Volgende rekenregels volgen onmiddellijk uit de definitie van de optelling en het scalair veelvoud:

Eigenschap 11.3.1. Voor elke vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en elk getal $r \in \mathbb{R}$ geldt

$$\begin{aligned} \mathbf{a}+\mathbf{0_n} &= \mathbf{a} & 1\mathbf{a} &= \mathbf{a} & (-1)\mathbf{a} &= -\mathbf{a}\\ \mathbf{a}+(-\mathbf{a}) &= \mathbf{0_n} & 0\mathbf{a} &= \mathbf{0_n} & r\mathbf{0_n} &= \mathbf{0_n}. \end{aligned}$$

11.4 Lineaire combinaties en inwendig product

Vectoren komen in de praktijk erg dikwijls voor in zogenaamde *lineaire combinaties*:

Definitie 11.4.1 (Lineaire combinatie)**.**

Een **lineaire combinatie** van vectoren is *een som van (scalaire) veelvouden* van die vectoren.

Als $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m} \in \mathbb{R}^n$ en $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, dan is de vector

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + \ldots + a_m\mathbf{v_m} \in \mathbb{R}^n$$

een *lineaire combinatie* van de vectoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$.
De getallen a_i heten de **coëfficiënten** of **gewichten** van de lineaire combinatie.

Voorbeeld 11.4.1. Als $\mathbf{P}$ staat voor één pannenkoek, en $\mathbf{E}$ voor één ei, $\mathbf{B}$ voor één gram bloem en $\mathbf{M}$ voor één milliliter melk, dan leren terzake gespecialiseerde websites dat

$$8\mathbf{P} = 2\mathbf{E} + 250\mathbf{B} + 500\mathbf{M}$$

of dus dat pannenkoeken een lineaire combinatie zijn van geschikte hoeveelheden eieren, bloem en melk. Merk op dat dit voorbeeld enigszins dubieus is omdat je wel willekeurige lineaire combinaties kan nemen van eieren, bloem en melk, maar niet steeds *pannenkoeken* zal uitkomen.

Het is wiskundige correcter in deze context een drietal (x, y, z) te interpreteren als x eieren, y gram bloem en z milliliter melk. Dat is $\mathbf{E} = (1, 0, 0)$ inderdaad één ei, $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$ één gram bloem en $\mathbf{M} = (0, 0, 1)$ één milliliter melk. In de driedimensionale ruimte met punten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ komt het punt $(2, 250, 500)$ overeen met 8 pannenkoeken, en $(4, 500, 1000)$ met 16 pannenkoeken. Het grootste deel van de ruimte komt echter overeen met 'smurrie'.

Deze eenvoudige modellering houdt ten onrechte ook geen rekening met het nochtans belangrijke bakproces met belangrijke parameters als temperatuur, baktijd en gebruikte vetstoffen. Een volledige uitwerking van dit voorbeeld hoort duidelijk thuis in meer gevorderde cursussen, maar we kunnen al wel besluiten dan pannenkoeken bakken een proces is dat plaatsvindt in een ruimte van minstens dimensie 6, met als onafhankelijke grootheden de hoeveelheden eieren, bloem, melk samen met de baktemperatuur, de baktijd en de hoeveelheid vetstof. Een voor de hand liggend probleem is het bepalen van de deelverzameling van $\mathbb{R}^6$ die effectief *pannenkoeken* oplevert, om vervolgens het punt te zoeken dat de *lekkerste pannenkoeken* oplevert. Als economen ook prijzen toevoegen aan de componenten kunnen ze op zoek gaan naar de goedkoopste pannenkoeken. Ingenieurs kunnen de verhouding baktijd/baktemperatuur optimaliseren, ofwel naar benodigde tijd, ofwel naar benodigde energie per pannenkoek. Als voedingsdeskundigen bacteriële gegevens toevoegen, kunnen ze de maximale bewaartijd bepalen. En als studenten honger krijgen, kunnen ze nu een pannenkoek gaan eten.

Voorbeeld 11.4.2 (Lineaire combinaties)**.**

1. $2(1, 2) + 3(4, 5)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1, 2)$ en $(4, 5)$

2. $(5, 7)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1, 2)$ en $(4, 5)$

3. $(1, 2)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1, 2)$ en $(4, 5)$

4. $(2, 4)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1, 2)$ en $(4, 5)$

5. $(2, 4, 0)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1, 2, 0)$ en $(4, 5, 0)$

6. $(2, 4, 1)$ is geen lineaire combinatie van de vectoren $(1, 2, 0)$ en $(4, 5, 0)$

7. $3(1, 2.5, -1, 1) - 2(2, 0, 1, -1) + 2(1, -1, 0.5, 0) = (1, 5.5, -4, 5)$ is een lineaire combinatie van $(1, 2.5, -1, 1)$, $(2, 0, 1, -1)$ en $(1, -1, 0.5, 0)$

11.4 Lineaire combinaties en inwendig product

Met twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ wordt ook één getal geassocieerd: zogenaamde het *inwendig of scalair product*.

Definitie 11.4.2.

Het **inwendig product** (ook **scalair product**) van vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ is het reëel getal

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) \overset{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n} \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 11.4.3.

$$(1, 2) \cdot (3, 4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11 \quad \text{en} \quad (3, -2, 1) \cdot (2, 2, -2) = 6 - 4 - 2 = 0.$$

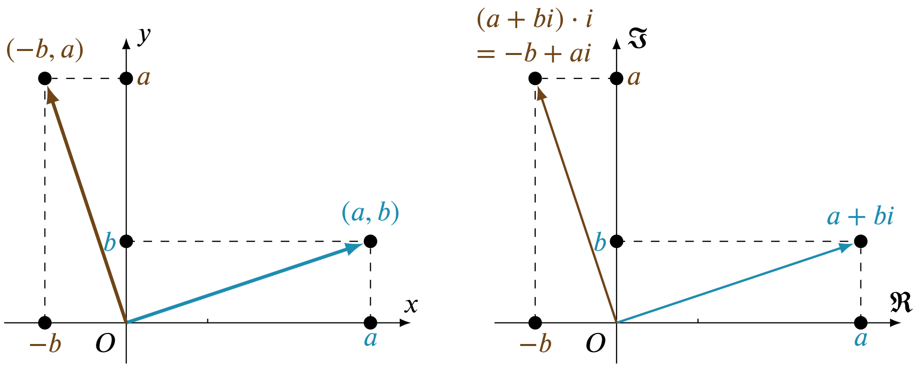
Dit inwendig product levert informatie over de onderlinge ligging van beide vectoren, in het bijzonder:

Eigenschap 11.4.1. Voor twee vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}}$$

In $\mathbb{R}^2$ kan je deze eigenschap als volgt begrijpen: een kwartdraai van het vlak in tegenwijzerzin brengt de positieve x-as naar de positieve y-as en de positieve y-as naar de negatieve x-as. Een punt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ komt bij een kwartdraai dus terecht op het punt $(-b, a)$, en na een kwartdraai staat de vector $(-b, a)$ dus loodrecht op de oorspronkelijke vector (a, b):

$$\boxed{(a, b) \perp (-b, a)} \qquad \text{en} \qquad (a, b) \cdot (-b, a) = a(-b) + ba = 0.$$



Wie vertrouwd is met complexe getallen, kan opmerken dat het koppel (a, b) kan geschreven worden als $a + bi$, dat 'vermenigvuldigen met i' overeenkomt met een kwartdraai, en dat $(a + bi) \cdot i = ai + bi^2 = -b + ai$ dus inderdaad overeenkomt met het punt $(-b, a)$.

Volgend filmpje legt dit uit in 15 seconden (van tijd 2:51 tot 3:05):

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/FvdrGuCfAhk?start=175&end=185&autostart=1&rel=0&

11.5 Matrices

Net zoals een vector een manier is om veel *getallen* bij te houden, is een *matrix* een manier om veel *vectoren* (van dezelfde dimensie) bij te houden. Een matrix is *een rechthoek van getallen*, met m rijen van telkens n getallen. Matrices zijn erg nuttig bij de studie van stelsels van vergelijkingen maar komen ook voor in andere contexten.

11.5.1 Definitie van een matrix

Voorbeeld 11.5.1. Examenresultaten voor verschillende vakken kan je bijhouden in een tabel:

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

Je kan dezelfde gegevens ook in volgende (punten)matrix $\mathbf{A}$ opschrijven

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix}.$$

In deze voorstelling bevat elke rij de punten van een bepaalde leerling, en elke kolom de punten van een bepaald vak. We noemen deze matrix $\mathbf{A}$ een 5×4-matrix met 5 *rijen* en 4 *kolommen*. Het getal op rij 3 en kolom 2 zijn de punten van Chris voor Nederlands, en noteren we met indices als $(\mathbf{A})_{32} = 65$.

Definitie 11.5.1 (Matrix).

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \quad \text{met } m \text{ rijen en } n \text{ kolommen.}$$

- Met $\boxed{\mathbb{R}^{m\times n}}$ noteren we de verzameling van alle $m \times n$ matrices van reële getallen.
- De **matrixelementen** (of soms ook *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{1,1}, \ldots a_{i,j}, \ldots, a_{m,n}$. Soms noteert men de matrixelementen als $(\mathbf{A})_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} a_{i,j} \in \mathbb{R}$, en de matrix A als $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ of $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (dus met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij .

- De **diagonaal** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ bestaat uit de elementen $a_{i,i}$ die we de **diagonaalelementen** van de matrix noemen. Voor een vierkante matrix vormen ze inderdaad de diagonaal van de matrix. In volgende voorbeelden zijn de diagonaalelementen blauw gekleurd:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 11.5.2.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ is een 2×2 matrix met $(\mathbf{A})_{1,1} = 1, (\mathbf{A})_{2,1} = 3, (\mathbf{A})_{1,2} = 2$ en $(\mathbf{A})_{2,2} = 4$

  Als je dezelfde matrix $\mathbf{A}$ schrijft als $[a_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$, dan is $a_{1,1} = 1$, $a_{2,1} = 3$ etc.

- $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 2×3 matrix en $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 3×2 matrix.

- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ is een rijmatrix, en $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ is een kolommatrix.

Opmerking 11.5.1.

- In deze notatie $m \times n$ mag het 'product' $m \times n$ *niet* worden uitgerekend: een 2×3 matrix is niet hetzelfde als een 3×2 matrix of een 6×1 matrix. Een 6-matrix bestaat zelfs niet, maar wel een 6-vector want dat is een andere naam voor een 6-tal.

- De eerste index i geeft het nummer van de *rij* aan, de tweede index j die van de *kolom*.

- De notatie $(\mathbf{A})_{i,j}$ is vooral handig als de elementen van $\mathbf{A}$ nog geen naam hebben. Als $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ (een gelijkheid van twee matrices), dan geldt dus voor alle i en j dat $(\mathbf{A})_{i,j} = a_{i,j}$ (telkens een gelijkheid van twee getallen).

- Voor elke i en j is $(\mathbf{A})_{i,j}$ een reëel getal, namelijk het element van $\mathbf{A}$ op rij i en kolom j. De uitdrukking $[a_{i,j}]$ daarentegen staat voor de ganse matrix, en i en j zijn daarin *geen vooraf gegeven concrete getallen*, maar *indices* die lopen over de rijen respectievelijk de kolommen:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \forall i, j : \quad &(\mathbf{A})_{i,j} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

  en je kan dus ook schrijven $\mathbf{A} = [(\mathbf{A})_{i,j}] = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $(\mathbf{A})_{i,j} = a_{i,j} \in \mathbb{R}$

- In sommige cursussen gebruikt men ronde haakjes in plaats van rechte haakjes: $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, en men laat meestal de komma's tussen de indices weg: $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ of $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

- In het geval $n = m = 1$ wordt in de praktijk bijna nooit onderscheid gemaakt tussen een 1×1 matrix $[a]$, een vector met 1 component (a) en een getal a.

- Het geval $n = 1$ of $m = 1$ is subtieler: er wordt in de praktijk soms geen onderscheid gemaakt tussen een vector $(a_1, \ldots, a_n)$ en een $1 \times n$ matrix $[a_1, \ldots, a_n]$ of tussen een vector $(a_1, \ldots, a_n)$ en de gelijkaardige kolommatrix. Maar het onderscheid tussen kolommatrices enerzijds en rijmatrices anderzijds is dikwijls *toch belangrijk*.

Zowel een n-tal, een kolommatrix als een rijmatrix kan je beschouwen als schrijfwijzen voor een reële *vector*:

$$(1,-2,3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

maar het belang van het onderscheid tussen de schrijfwijzen hangt erg af van de context. En afhankelijk van die context wordt dan ook al dan niet onderscheid gemaakt tussen $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times 1}$ en $\mathbb{R}^{1\times n}$.

Als we rij- of kolommatrices beschouwen als *vectoren* en dan noteren we ze meestal met kleine letters $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \ldots$, terwijl willekeurige matrices een hoofdletter $\mathbf{A}, \mathbf{X}, \ldots$ krijgen.

In ieder geval zijn strikt wiskundig vectoren, rijmatrices en kolommatrices *verschillend*. Dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \neq (1,3,-2),$$

maar als de betekenis voldoende duidelijk is uit de context worden ze toch door elkaar gebruikt.

Volgens bovenstaande definitie is een matrix een rechthoekig rooster van getallen, maar je kan dergelijk rooster ook bekijken als een aantal onder elkaar geplaatste rijen of als een aantal naast elkaar geplaatste kolommen:

Eigenschap 11.5.1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \hline a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{array}\right]$$

De lijnen hebben in deze schrijfwijze geen betekenis, ze dienen enkel om de kolommen of rijen aan te duiden.

Voorbeeld 11.5.3.

We kunnen de matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ beschouwen als

twee naast elkaar geplaatste kolomvectoren $\mathbf{k_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{k_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, en dus schrijven $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{k_1} & \mathbf{k_2} \end{bmatrix}$

of als twee onder elkaar geplaatste rijvectoren $\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$ en dus schrijven $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \end{bmatrix}$.

11.5.2 Som en scalair veelvoud van matrices

We definiëren de optelling en de scalaire vermenigvuldiging van matrices op dezelfde manier als voor vectoren: element-per-element. Voor de optelling is het dus belangrijk dat beide matrices dezelfde afmetingen hebben: allebei evenveel rijen en evenveel kolommen.

Definitie 11.5.2 (Optelling en scalair veelvoud van matrices).

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$r\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{1,1} & ra_{1,2} & \cdots & ra_{1,n} \\ ra_{2,1} & ra_{2,2} & \cdots & ra_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m,1} & ra_{m,2} & \cdots & ra_{m,n} \end{bmatrix}$$

Met de schrijfwijze $\mathbf{A} = [a_{i,j}], \mathbf{B} = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m\times n}, r \in \mathbb{R}$ wordt dit:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{i,j} + b_{i,j}] \quad r\mathbf{A} = [ra_{i,j}]$$

of nog

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})_{i,j} = (\mathbf{A})_{i,j} + (\mathbf{B})_{i,j}$$
$$(r\mathbf{A})_{i,j} = ra_{i,j} \quad (r\mathbf{A})_{i,j} = r(A)_{i,j}$$

Het verschil van matrices en de tegengestelde matrix worden gedefinieerd net zoals voor vectoren, en we definiëren ook de nulmatrix $\mathbf{O}_{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$. Als de context het toelaat schrijven we korter $\mathbf{O} = \mathbf{O}_{m,n}$.

Voorbeeld 11.5.4 (Som, verschil, tegengestelde en scalair veelvoud van matrices).

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 36 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 44 \end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

maar de sommen $\xcancel{\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 40 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}}$ en $\xcancel{\begin{bmatrix} 10 & 200 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}}$ bestaan niet.

11.5.3 Het product van een matrix met een kolomvector

Er bestaat een algemene formule voor het *product* van twee matrices, maar we beperken ons hier tot het eenvoudigere speciale geval van het product van een *matrix* met een *kolomvector*. Voor de studie van stelsels van vergelijkingen volstaat in eerste instantie deze eenvoudigere versie.

Definitie 11.5.3 (Matrix-vector-product als lineaire combinatie).

Het **product** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n \times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$ is de kolomvector $\mathbf{Ab}$ die de lineaire combinatie is van de kolommen van $\mathbf{A}$ met als coëfficiënten de componenten van $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \dots b_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Door de som in het rechterlid uit te rekenen volgt onmiddellijk volgende eigenschap:

Eigenschap 11.5.2 (Matrix-vector-product).

Het product van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n \times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$ is de $m \times 1$ kolomvector $\mathbf{Ab}$ gegeven door

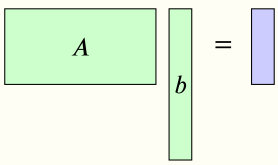
$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 + \dots + a_{1,n}b_n \\ a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 + \dots + a_{2,n}b_n \\ \vdots \\ a_{m,1}b_1 + a_{m,2}b_2 + \dots + a_{m,n}b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}b_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2,k}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{m,k}b_k \end{bmatrix}.$$

Opmerking 11.5.2.

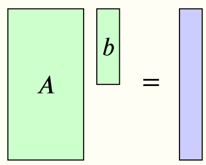
(a) Je kan in gedachten de kolomvector kantelen en boven de matrixkolommen leggen, en dan kolom per kolom vermenigvuldigen en alles optellen:

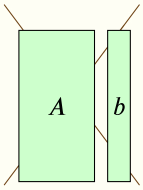
$$\begin{array}{cccccccc} & [\ b_1 & & b_2 & & \cdots\ b_n & &] \\ & & \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} & \\ \mathbf{Ab} = & + & & + & & + \ \dots & + & \\ \hline = & \Bigg[& \begin{matrix} b_1 a_{1,1} \\ b_1 a_{2,1} \\ \vdots \\ b_1 a_{m,1} \end{matrix} & + & \begin{matrix} b_2 a_{1,2} \\ b_2 a_{2,2} \\ \vdots \\ b_2 a_{m,2} \end{matrix} & + \ \dots \ + & \begin{matrix} b_n a_{1,n} \\ b_n a_{2,n} \\ \vdots \\ b_n a_{m,n} \end{matrix} & \Bigg] \end{array}$$

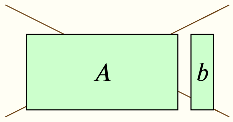
(b) Het product $\mathbf{Ab}$ bestaat enkel als het aantal *kolommen* van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal *rijen* van $\mathbf{b}$, en het resultaat is een *kolomvector* met evenveel rijen als $\mathbf{A}$. Visueel betekent dit:



en

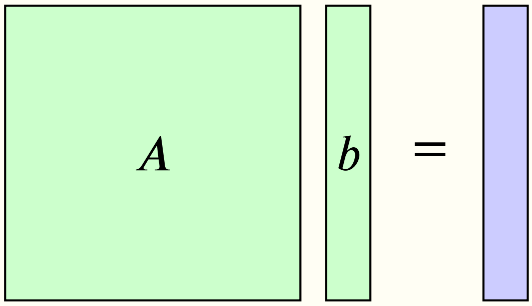


maar volgende producten zijn onmogelijk: 

en 

.

Enkel voor *vierkante* matrices heeft $\mathbf{Ab}$ dezelfde vorm als $\mathbf{b}$:



(c) Deze definitie kan worden uitgebreid tot een product $\mathbf{AB}$ voor algemenere matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

(d) Zoals gebruikelijk bij producten schrijft men soms ook een punt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{Ab}$. Bij matrices wordt de punt echter meestal weggelaten.

(e) Als $\mathbf{A}$ een rijvector is schrijven we dergelijke matrix soms ook met een kleine letter $\mathbf{a}$, dan is het product $\mathbf{ab}$ het reële getal gegeven door

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \quad \in \mathbb{R}.$$

en dit komt neer op het *scalair product* van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ dat elders uitvoeriger wordt behandeld.

Voorbeeld 11.5.5.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 19$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 43.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 22$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 50.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}$ of ook $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 50 \end{bmatrix}$ of ook $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 50 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6+3+8 \\ 6+12+5+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 35 \end{bmatrix}$.

Voorbeeld 11.5.6. In het voorbeeld over examenresultaten bekom je door te vermenigvuldigen met geschikte kolomvectoren interessante gegevens.

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

$$A = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix}$$

We vinden de punten voor Nederlands, het gemiddelde, en een totaal aantal punten waarbij elk vak wordt omgezet naar honderd:

$$\begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 62 \\ 65 \\ 70 \\ 71 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

waarbij we veronderstelden dat de punten voor Wiskunde en Nederlands al op honderd waren, Engels op 50, en Duits op 20. De kolomvector waarmee wordt vermenigvuldigd drukt dus inderdaad de gewichten voor de verschillende kolommen in de matrix. In het bijzonder *selecteert* een kolommatrix met allemaal 0 behalve één keer 1 precies één kolom uit een matrix.

Merk op dat we met de technieken van dit hoofdstuk bijvoorbeeld nog niet het gemiddelde voor Wiskunde kunnen opschrijven, maar ook dat kan met matrices worden berekend.

Merk op dat we $\mathbf{A}$ enkel kunnen vermenigvuldigen met een kolommatrix met evenveel rijen als het aantal kolommen van $\mathbf{A}$. Het resultaat is telkens een *kolom*vector met evenveel rijen als $\mathbf{A}$

Matrices beschikken nog over vele andere bewerkingen en eigenschappen, maar die behandelen we later. Het voorgaande volstaat voor een eerste studie van stelsels.

11.6 Product van matrices

Het product $\mathbf{Ab}$ van een matrix $\mathbf{A}$ met een *kolommatrix* $\mathbf{b}$ is een manier om lineaire combinaties te nemen van de kolommen van $\mathbf{A}$ met gewichten uit $\mathbf{b}$. Het komt in concrete toepassingen regelmatig voor dat de vector $\mathbf{b}$ zelf ook werd bekomen als een lineaire combinatie van kolommen uit een matrix $\mathbf{B}$ met gewichten $\mathbf{c}$, dus $\mathbf{b} = \mathbf{Bc}$. Dan wordt $\mathbf{Ab} = \mathbf{A}(\mathbf{Bc})$, en het zou bijzonder handig zijn als je dat resultaat in één keer kon berekenen. Dat blijkt mogelijk door op een geschikte wijze een product van de matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ te definiëren, zodat geldt

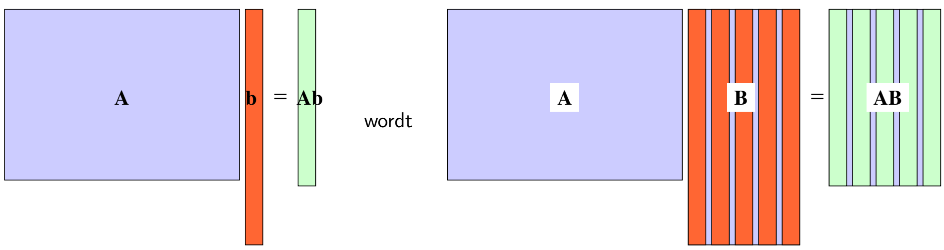
$$\mathbf{A}(\mathbf{Bc}) = (\mathbf{AB})\mathbf{c}$$

De definitie van het product van matrices moet dan wel wat ingewikkelder worden dan gewoon component per component te vermenigvuldigen. De correcte definitie beschouwt $\mathbf{B}$ als een rijtje kolommen, en vermenigvuldigt met elke kolom:

Definitie 11.6.1. Het **product** van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is de $m \times n$ matrix met kolommen de producten van $\mathbf{A}$ met de kolommen van $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix}\mathbf{Ab_1} & \mathbf{Ab_2} & \dots & \mathbf{Ab_n}\end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \dots & \mathbf{b_n}\end{bmatrix}$$

Grafisch wordt dit:



met $\mathbf{A}$ even *breed* als $\mathbf{B}$ *hoog* is (anders is er geen product van een *rij* van $\mathbf{A}$ met een *kolom* van $\mathbf{B}$).

Voorbeeld 11.6.1.

Omdat $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot 1 + 4\cdot 2\\3\cdot 2 + 4\cdot 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\18\end{bmatrix}$

en gelijkaardig $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19\\31\end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22\\36\end{bmatrix}$

is dus $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5 & 6\\4 & 7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11 & 19 & 22\\18 & 31 & 36\end{bmatrix}.$

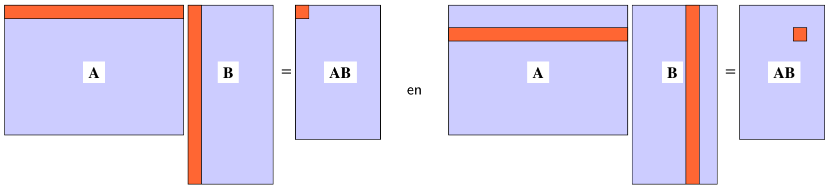
Omdat $(\mathbf{Ab_j})_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$ geldt volgende expliciete formule voor het product van twee matrices:

Eigenschap 11.6.1. Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a_{i,j}\end{bmatrix}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}b_{i,j}\end{bmatrix}$ is $m \times n$ matrix $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}c_{i,j}\end{bmatrix}$ waarbij het element $c_{i,j}$ op de i-de rij en de j-de kolom gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met j-de kolom van $\mathbf{B}$:

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

Grafisch wordt dit:

11.6 Product van matrices



Je kan het product ook als volgt opschrijven:

Eigenschap 11.6.2. Het product van een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is de $m \times n$ matrix

$$\mathbf{AB} = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}\right]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,n} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2,k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2,k} b_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{2,k} b_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{m,k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^{p} a_{m,k} b_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{m,k} b_{k,n} \end{bmatrix} \qquad \text{(een } m \times n \text{ matrix)}$$

Bijgevolg is een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ maal een $p \times 1$ kolommatrix $\mathbf{b}$ een $m \times 1$ kolommatrix:

$$\mathbf{Ab} = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k}\right]_{1 \le i \le m} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2,k} b_{k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{m,k} b_{k} \end{bmatrix} \qquad \text{(een } m \times 1 \text{ kolomvector)}$$

en een $1 \times p$ rijmatrix $\mathbf{a}$ maal een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ een $1 \times n$ rijmatrix:

$$\mathbf{aB} = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{k} b_{k,j}\right]_{1 \le j \le n} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^{p} a_{k} b_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{k} b_{k,n} \end{bmatrix} \qquad \text{(een } 1 \times n \text{ rijvector)}$$

Voorbeeld 11.6.2. Volledig uitgeschreven wordt dit

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \\ b_{4,1} & b_{4,2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} + a_{1,4}b_{4,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} + a_{1,4}b_{4,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1} + a_{2,4}b_{4,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{3,2} + a_{2,4}b_{4,2} \\ a_{3,1}b_{1,1} + a_{3,2}b_{2,1} + a_{3,3}b_{3,1} + a_{3,4}b_{4,1} & a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2} + a_{3,3}b_{3,2} + a_{3,4}b_{4,2} \end{bmatrix}.$$

Opmerking 11.6.1.

- Mnemotechnisch hulpje: het product van een $m \times p$ met een $p \times n$ matrix is een $m \times n$ matrix, waarbij de middelste factoren p wegvallen, en p is precies de dimensie die wordt weggesommeerd in elke component $c_{i,j}$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

- Optellen van twee matrices werkt enkel als ze dezelfde vorm hebben: evenveel rijen en evenveel kolommen. De vermenigvuldiging daarentegen werkt enkel voor $m \times p$ met $p \times n$ matrices, dus als het aantal *kolommen* van de eerste matrix gelijk is aan het aantal *rijen* van de tweede. Het product van een 5×3 matrix $\mathbf{A}$ en een 3×2 matrix $\mathbf{B}$ is de 5×2 matrix $\mathbf{AB}$. Maar een matrix $\mathbf{BA}$ *bestaat dan niet*. Het product $\mathbf{BA}$ is in dit geval *niet gedefinieerd*! Dit toont al meteen aan dat in het algemeen matrixvermenigvuldiging niet commutatief kan zijn: er geldt niet altijd dat $\cancel{\mathbf{AB} = \mathbf{BA}}$.

- Een 1×100 matrix maal een 100×1 matrix is dus een getal (namelijk de som van honderd producten van telkens twee getallen), maar een 100×1 matrix maal een 1×100 matrix is een 100×100 matrix (met 10.000 keer een product van twee getallen).

We zullen verder zien hoe deze definitie onder meer nuttig is bij het compact voorstellen en manipuleren van stelsels lineaire vergelijkingen, en bij het samenstellen van lineaire afbeeldingen.

Samengevat kan je het product van matrices op volgende equivalente manieren begrijpen:

Eigenschap 11.6.3. Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is de $m \times n$ matrix zodat

- het i, j-de element gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met de j-de kolom $\mathbf{B}$.
- de j-de kolom gelijk is aan het product van matrix $\mathbf{A}$ met de j-de kolom van $\mathbf{B}$.
- de i-de rij gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met matrix $\mathbf{B}$.

Elke *kolom* in $\mathbf{AB}$ is dus een lineaire combinaties van de *kolommen* van $\mathbf{A}$, met coëfficiënten telkens uit een kolom van $\mathbf{B}$,
en elke *rij* in $\mathbf{AB}$ is een lineaire combinaties van de *rijen* van $\mathbf{B}$, met coëfficiënten telkens uit een rij van $\mathbf{A}$.

Of nog: als je een matrix bekijkt als een collectie kolommen, is $\mathbf{AB}$ te beschouwen als een combinatie van de kolommen van $\mathbf{B}$, gewogen met gewichten in de kolommen van $\mathbf{A}$.
Als je een matrix bekijkt als een collectie rijen, is $\mathbf{AB}$ te beschouwen als een combinatie van de rijen van $\mathbf{A}$ met gewogen met gewichten in de rijen van $\mathbf{B}$.

Voorbeeld 11.6.3.

1. Als $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ dan kan je het product

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 1 + 0 & 0 + 6 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 1 + 0 & 0 + 6 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 1 & 12 \\ 43 & 3 & 24 \end{bmatrix}.$$

interpreteren als

- lineaire combinaties van de kolommen van $\mathbf{A}$ met gewichten telkens in de kolommen van $\mathbf{B}$:
  de eerste kolom $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{B}$ levert $\begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}$ als eerste kolom van het product $\mathbf{AB}$ want dat is 5 keer de eerste kolom $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{A}$ plus 7 keer de tweede kolom $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.
  Op dezelfde manier selecteert de tweede kolom $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{B}$ de eerste kolom $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{A}$,
  en vermenigvuldigt de derde kolom $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{B}$ de tweede kolom $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ van $\mathbf{A}$ met 6.

- lineaire combinaties van de rijen van $\mathbf{B}$ met gewichten telkens in de rijen van $\mathbf{A}$: de eerste rij $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ van $\mathbf{A}$ levert $\begin{bmatrix}19 & 1 & 10\end{bmatrix}$ als eerste rij van het product $\mathbf{AB}$ want dat is 1 keer de eerste rij $\begin{bmatrix}5 & 1 & 0\end{bmatrix}$ van $\mathbf{B}$ plus 2 keer de tweede rij $\begin{bmatrix}7 & 0 & 6\end{bmatrix}$.
De tweede rij van $\mathbf{AB}$ is op dezelfde manier 3 keer de eerste rij plus 4 keer de tweede rij van $\mathbf{B}$.

2. Het product $\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\cdot 1 & 5\cdot 2\\ 7\cdot 1 & 7\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 10\\ 7 & 14\end{bmatrix}$ kan je

- op basis van rij $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ lezen als: 1 keer kolom $\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$ gevolgd door 2 keer die kolom, of
- op basis van kolom $\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$ lezen als: 5 keer rij $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ gevolgd door 7 keer diezelfde rij.

3. Het product $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\cdot 1 + 7\cdot 2\end{bmatrix} = 19$ is een 1×1 matrix, of dus een getal.

Extra: links vermenigvuldigen met een rijmatrix. Als oefening kan je volgende interpretatie van het product van *rij*matrix $\mathbf{a}$ met matrix $\mathbf{B}$ bestuderen als lineaire combinatie van de *rijen* van $\mathbf{B}$ met *gewichten* $\mathbf{a}$:

Eigenschap11.6.4. Het product van een $1\times n$ rijvector met een $n\times m$ matrix is de $1\times m$ rijvector

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m}\\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,m}\end{bmatrix} = \left\{\begin{array}{lll} & a_1 & \begin{bmatrix}b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m}\end{bmatrix}\\ + & a_2 & \begin{bmatrix}b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m}\end{bmatrix}\\ + & \ldots & \\ + & a_n & \begin{bmatrix}b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,m}\end{bmatrix}\end{array}\right.$$

$$= \begin{bmatrix}a_1 b_{1,1} + a_2 b_{2,1} + \ldots + a_n b_{n,1} & \ldots & a_1 b_{1,m} + a_2 b_{2,m} + \ldots + a_n b_{n,m}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k,1} & \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k,m}\end{bmatrix}.$$

Voorbeeld11.6.4.

(a) $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19 & 22\end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}43 & 50\end{bmatrix}$ of ook

$\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}5 & 6\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}43 & 50\end{bmatrix}$.

11.7 Transponeren van matrices

Een matrix *transponeren* is een veelgebruikte operatie die geen equivalent heeft voor getallen, namelijk zijn *kolommen* schrijven als *rijen*. Dat komt neer op het *spiegelen* van de matrix rond de diagonaal, of het *verwisselen van rijen met kolommen*. In het bijzonder is de getransponeerde van een kolomvector een rijvector en omgekeerd.

Definitie 11.7.1 (Transponeren).

De **getransponeerde matrix** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ is de $n \times m$ matrix $\mathbf{A}^T = [a_{j,i}]$. Dus:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & \cdots & a_{m,3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Met de verkorte notatie betekent dit het omwisselen van de indices: $(\mathbf{A}^T)_{i,j} = (\mathbf{A})_{j,i}$ of $[a_{i,j}]^T = [a_{j,i}]$

Opmerking 11.7.1. De getransponeerde $\mathbf{A}^T$ van een gegeven matrix A bepaal je door de rijen van $\mathbf{A}$ als kolommen te nemen van $\mathbf{A}^T$: de eerste *rij* van de matrix $\mathbf{A}$ is de eerste *kolom* van de matrix $\mathbf{A}^T$, de tweede rij van de matrix $\mathbf{A}$ de tweede kolom van de matrix $\mathbf{A}^T$ en zo verder.

De getransponeerde van de 2×3 matrix is een 3×2 matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Je kan ook de *kolommen* van de matrix $\mathbf{A}$ schrijven als de *rijen* van de matrix $\mathbf{A}^T$: dat geeft hetzelfde resultaat. En dat is ook hetzelfde als de matrix 'spiegelen' ten opzichte van de diagonaal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \implies \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 11.7.1. Getransponeerde matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 99 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 99 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 99 \\ 99 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 99 \\ 99 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Volgende eigenschappen van transponeren kan je zelf eenvoudig nagaan (enkel de laatste vraagt nogal wat rekenwerk):

11.7 Transponeren van matrices

Eigenschap 11.7.1 (Eigenschappen van transponeren).

$\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$ (getransponeerde van de identieke matrix is de identieke matrix)

$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ (getransponeerde van de getransponeerde is terug de matrix zelf)

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ (getransponeerde van de som is som van de getransponeerden)

$(r\mathbf{A})^T = r\mathbf{A}^T$ (getransponeerde van scalair veelvoud is scalair veelvoud van getransponeerde)

$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (getransponeerde van product is product van getransponeerden **in omgekeerde volgorde**)

- Merk op: als het matrixproduct $\mathbf{AB}$ goed gedefinieerd is (t.t.z. compatibele matrixdimensies), dan is ook $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ goed gedefinieerd (omdat transponeren de matrixdimensies omdraait).

Opmerking 11.7.2. Indien $\mathbf{A}$ inverteerbaar is, dan is ook $\mathbf{A}^T$ inverteerbaar. Immers, als er een matrix $\mathbf{A}^{-1}$ bestaat zodat $\mathbf{AA}^{-1} = I = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$, dan is

$$(\mathbf{AA}^{-1})^T = I^t = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T$$

dus

$$(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = \mathbf{I} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T$$

zodat $(\mathbf{A}^{-1})^T$ de inverse van $\mathbf{A}^T$ is.

11.8 Determinanten

De *determinant* van een *vierkante* matrix is *een getal* dat enkele belangrijke eigenschappen van die matrix weergeeft, in de eerste plaats of de matrix al dan niet *inverteerbaar* is.

Definitie 11.8.1.

De **determinant** van matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ is $\boxed{\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\text{notatie}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} ad - bc}$ $\in \mathbb{R}$.

Voorbeeld 11.8.1. $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = -2 - 6 = -8.$

Als $ad - bc = 0$, dan is ook $ad = bc$, en als $ad = bc \neq 0$ geldt dat ook $\dfrac{ad}{bc} = 1 = \dfrac{bc}{ad}$ en $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Als $ad = bc \neq 0$ kunnen we als volgt (a, b) proberen omvormen in (c, d):

$$(a, b) = (a \cdot \underbrace{\frac{bc}{ad}}_{=1}, b \cdot \underbrace{\frac{ad}{bc}}_{=1}) = (c \cdot \frac{b}{d}, d \cdot \frac{a}{c}) \underset{\frac{b}{d} = \frac{a}{c}}{=} \frac{a}{c} \cdot (c, d)$$

Dit betekent precies dat (a, b) en (c, d) lineair afhankelijk zijn. Als $ad = bc = 0$ is de redenering eenvoudiger.

Deze berekening impliceert dat de determinant beslist over de *lineaire afhankelijkheid van de rijen*, maar ook van de kolommen en over de inverteerbaarheid van de matrix:

Eigenschap 11.8.1. Voor een matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ geldt:

$\det \mathbf{A} \neq 0$	als en slechts als	de matrix $\mathbf{A}$	is *inverteerbaar*.
	als en slechts als	de *kolommen* van $\mathbf{A}$	zijn lineair onafhankelijk.
	als en slechts als	de *rijen* van $\mathbf{A}$	zijn lineair onafhankelijk.

Door de beweringen te negeren geldt natuurlijk ook:

$\det \mathbf{A} = 0$	als en slechts als	$\mathbf{A}$ is niet inverteerbaar.
	als en slechts als	de kolommen van $\mathbf{A}$ zijn lineair afhankelijk.
	als en slechts als	de rijen van $\mathbf{A}$ zijn lineair afhankelijk.

Voorbeeld 11.8.2.

- De determinant van matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ is $2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1 \neq 0$.

  Matrix $\mathbf{A}$ is inverteerbaar, en heeft lineair onafhankelijke rijen en lineair onafhankelijke kolommen.

- De matrix $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft determinant $2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0$.

  Deze matrix $\mathbf{B}$ is *niet* inverteerbaar, heeft lineair *af*hankelijke rijen (de eerste rij is 2 maal de tweede) en lineair *af*hankelijke kolommen (de tweede kolom is 3 maal de eerste).

Opmerking 11.8.1.

- Rechte haken betekenen 'matrix' terwijl verticale strepen betekenen 'determinant', en dus 'getal'.

- Je kan de determinant ook begrijpen als een operatie die voor 2 koppels bepaalt of ze al dan niet lineair afhankelijk zijn: (a,b) en (c,d) zijn lineaire afhankelijk als en slechts als $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

- Als b en d verschillend zijn van 0, kan je de uitdrukking $ad - bc = 0$ delen door $b \cdot d$, en krijg je

$$\det \mathbf{A} = 0 \iff ad - bc = 0 \iff ad = bc \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

en dat betekent precies dat de eerste rij (a,b) evenredig is met de tweede rij (c,d).

- Met een andere notatie voor de elementen van de matrix wordt de formule

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (= a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

die je kan lezen als: 'schrijf telkens de letters a, b van de rijen in de oorspronkelijke volgorde a, b, en schrijf de indices $1, 2$ van de kolommen eerste in de juiste volgorde (dus $a_1 b_2$), en daarna in de omgekeerde volgorde met een minteken (dus $-a_2 b_1$). Deze enigszins gekke manier van lezen zal dadelijk nuttig blijken bij de veralgemening naar determinanten van 3×3 matrices.

Met een nog algemenere schrijfwijze voor de elementen wordt dezelfde formule ook:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \quad (= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

Er bestaat ook een definitie voor grotere vierkante matrices, maar de formules worden snel erg ingewikkeld. Voor een 3×3 matrix geldt het volgende:

Definitie 11.8.2. De determinant van de matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ is het getal

$$\det \mathbf{A} \overset{\text{notatie}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{array}{r} a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 \\ -a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 \end{array}.$$

Merk op dat de letters steeds in de volgorde a,b,c staan en de coëfficiënten alle permutaties zijn van de indices: de even permutaties $_{123}$, $_{231}$ en $_{312}$ met plusteken, en de oneven permutaties $_{132}$, $_{213}$ en $_{321}$ met een minteken.

Opmerking 11.8.2.

(a) Dezelfde formule kan ook met ander letters worden geschreven:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

of
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ -a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{array}$$

of
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 \\ -c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 \end{array}$$

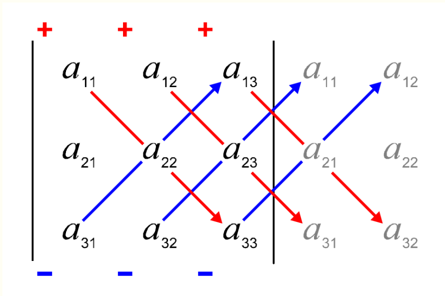
11.8 Determinanten

(b) Dezelfde formule kan ook geschreven worden met 2×2 determinanten:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)\end{aligned}$$

waarbij de coëfficiënten telkens uit de eerste rij komen en de bijhorende 2×2 determinanten steeds bekomen worden door de eerste rij en de kolom van de betreffende coëfficiënt te schrappen.
In deze vormen kan de definitie van determinant ook worden veralgemeend voor grotere matrices.

(c) Enkel voor 3×3 determinanten bestaat er bovendien de *regel van Sarrus*, waarbij je de twee eerste kolommen achter de matrix overschrijft, en dan de producten van de diagonalen optelt en daarvan de producten van de nevendiagonalen aftrekt:



en dat geeft inderdaad $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}.$

(d) Steeds blijft gelden dat $\det \mathbf{A} = 0$ equivalent is met lineair afhankelijkheid van de kolommen van $\mathbf{A}$, en ook met de lineair afhankelijkheid van de rijen van $\mathbf{A}$ en met de niet-inverteerbaarheid van $\mathbf{A}$.

(e) Determinanten kunnen in verband gebracht worden met meetkundige grootheden zoals oppervlaktes en volumes, maar dat behandelen we hier niet.

(f) Er is een jammere inconsistentie in de wiskundige notatie voor de determinant van een 1×1 matrix: de notaties voor absolute waarde en determinant overlappen hoewel ze niet hetzelfde betekenen. Er geldt altijd $|-2| = 2$, hoewel de determinant van de 1×1 matrix $[-2]$ toch -2 is. In de praktijk komen 1×1 matrices erg zelden voor, en er is dus meestal geen reden tot verwarring.

(g) Het met de hand berekenen van determinanten is een tijdsrovende bezigheid, en erg gevoelig voor rekenfouten. Elke nul in de matrix vereenvoudigt wel het rekenwerk want alle termen met de nulcomponent vallen onmiddellijk weg. Meer gevorderde cursussen leren om in goede gevallen voldoende nullen te creëren in een matrix om de determinant toch relatief eenvoudig te berekenen.

De determinant heeft volgende eigenschappen (voor $n = 2$ en $n = 3$; de eigenschap geldt ook algemeen):

11.8 Determinanten

Eigenschap 11.8.2. Voor een matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ geldt:

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A} \neq 0 &\iff \mathbf{A} \text{ inverteerbaar} \\
\det \mathbf{A}^{\mathbf{T}} &= \det \mathbf{A} \\
\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} \\
\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &\neq \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} \quad \text{(in het algemeen)}
\end{aligned}$$

11.9 Inwendig product van vectoren

Het *inwendig product* van twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ is een reëel getal dat makkelijk te berekenen is en belangrijke informatie levert over de *onderlinge ligging* van die twee vectoren:

Definitie 11.9.1. Het **inwendig product** (ook **scalair product**) van vectoren $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ is het reëel getal

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) \overset{\text{def}}{=} u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n} \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 11.9.1. $(1, 2) \cdot (3, 4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11$ en $(3, -2, 1) \cdot (2, 2, -2) = 6 - 4 - 2 = 0.$

Opmerking 11.9.1.

(a) Verwar dit inwendig of scalair *product* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$ tussen twee vectoren niet met het scalair *veelvoud* $r \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ van een reëel getal met een vector.

(b) In principe laten we de punt bij het scalair product nooit weg: we schrijven $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ en niet $\mathbf{uv}$.

(c) Dit inwendig product komt overeen met een matrixproduct op voorwaarde dat we de eerste vector schrijven als rijvector en de tweede als kolomvector:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

De eerste uitdrukking is een inwendig product van vectoren, de tweede een matrixproduct.

Het resultaat is een getal.

(d) Deze definitie van inwendig product gebruikt essentieel dat vectoren n-tallen zijn. In de wiskunde, fysica en andere wetenschappen komen echter ook meer algemene vectoren voor, en voor die meer algemene vectoren is het definiëren van een inwendig product wat subtieler.

Volgende eigenschappen kan je makkelijk verifiëren:

Eigenschap 11.9.1. Voor $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ en $a, b \in \mathbb{R}$ geldt:

(a) $\mathbf{u} \cdot (a\,\mathbf{v} + b\,\mathbf{w}) = a\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + b\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ en $(a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + b\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ (bilineair)

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (symmetrisch)

(c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ (positief)

(d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (positief definiet)

Uit de stelling van Pythagoras volgt dat je met behulp van dit inwendig product ook *lengtes* kan berekenen. Wiskundigen gebruiken meestal het woord *norm* voor de lengte van een vector:

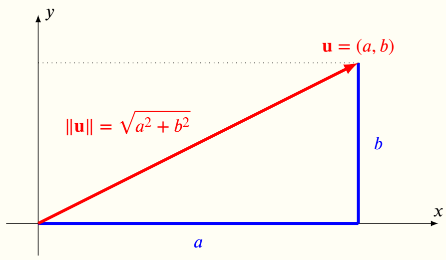
Definitie 11.9.2. De **norm** of **lengte** van een vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ is

$$\|\mathbf{u}\| = \|(u_1, u_2, \ldots, u_n)\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}.$$

Een **eenheidsvector** (soms ook **genormeerde vector**) is een vector met norm 1.

Opmerking 11.9.2.

(a) Voor $n = 2$ volgt het feit dat $c = \|\mathbf{u}\|$ inderdaad de lengte is van $\mathbf{u} = (a, b)$ direct uit de stelling van Pythagoras:



Ook voor grotere n kan men aantonen dat deze formule een zinvol begrip 'lengte' geeft.

(b) Sommige berekeningen worden eenvoudiger als het volstaat het *kwadraat* van de norm te berekenen, want dan valt de vervelende vierkantswortel weg:

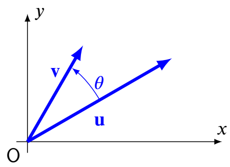
$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2.$$

Er geldt volgend enigszins merkwaardig verband met de *cosinus van de hoek tussen de vectoren*:

Eigenschap 11.9.2.

Voor twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ geldt $\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta)}$ of equivalent $\boxed{\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \cos(\theta)}$

met θ de hoek $\angle(u, v)$ tussen de vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$.

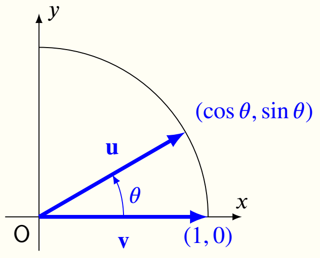


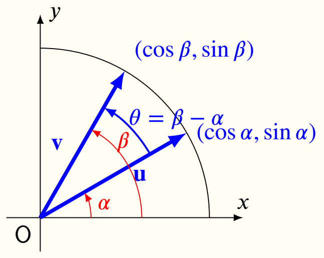
Het scalair product is een *getal* en geen vector, en kan dus niet onmiddellijk op een tekening worden weergegeven.

Opmerking 11.9.3.

- We bewijzen deze eigenschap hier niet, maar geven verder wel enkele verklaringen. In sommige curusssen wordt bovenstaande formule zelfs gebruikt om de cosinus van een hoek te *definiëren*.
- Wie vertrouwd is met goniometrie herkent enkele eigenschappen van de cosinus:

11.9 Inwendig product van vectoren





$\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$
$\mathbf{v} = (1, 0)$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot (1, 0)$
$= \cos\theta + 0 = \cos\theta$

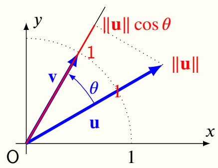
$(\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (\cos\beta, \sin\beta)$
$= (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$
$= (\cos(\beta - \alpha)$
$= \cos\theta$

- Als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ eenheidsvectoren zijn ($\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$) wordt deze formule $\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos(\theta)}$.

  Met het scalair product van *eenheids*vectoren kan je dus de *cosinus van hun hoek* berekenen.

- Als $\mathbf{v}$ een eenheidsvector ($\|\mathbf{v}\| = 1$) is, dan wordt deze formule $\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\cos(\theta)}$.

  Met het scalair product kan je dus de grootte $\|\mathbf{u}\|\cos(\theta)$ van de projectie van de vector $\mathbf{u}$ op de drager van de eenheidsvector $\mathbf{v}$ berekenen.



- Het inwendig product van twee willekeurige vectoren kan geïnterpreteerd worden als
  - de norm van $\mathbf{u}$ maal de grootte van de projectie van $\mathbf{v}$ op $\mathbf{u}$,
  - de norm van $\mathbf{v}$ maal de grootte van de projectie van $\mathbf{u}$ op $\mathbf{v}$,
  - de norm van $\mathbf{u}$ maal de norm van $\mathbf{v}$ maal de cosinus van hun hoek:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta) = \|\mathbf{u}\|\Big(\|\mathbf{v}\|\cos(\theta)\Big) = \|\mathbf{v}\|\Big(\|\mathbf{u}\|\cos(\theta)\Big).$$

Omdat de cosinus enkel nul is voor rechte hoeken volgt uit vorige eigenschap onmiddellijk:

Eigenschap 11.9.3. Voor twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u} \perp \mathbf{v}}$$

Met het inwendig product kan je dus makkelijk de *loodrechte stand van vectoren* nagaan.

Opmerking 11.9.4.

- Wie vertrouwd is met cartesiaanse vergelijkingen ziet dat de homogene vergelijking

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

  nu kan geschreven worden als

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

11.9 Inwendig product van vectoren

wat je kan interpreteren als voorwaarde opdat de onbekende vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *loodrecht staat* op de gegeven vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ of } \mathbf{a} \perp \mathbf{x}.$$

- Meer algemeen geldt volgende interpretatie van homogene stelsels:

  De oplossingenverzameling van een homogene stelsel $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ bestaat uit
  alle vectoren die loodrecht staan op de rijen van $\mathbf{A}$ (geïnterpreteerd als vectoren).

11.10 Vectorieel product

Het *vectorieel product* van twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^3$ is een nieuwe vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^3$ die loodrecht staat op zowel $\mathbf{u}$ als $\mathbf{v}$. Dit vectorieel product speelt een belangrijke rol in meetkundige en fysische problemen in $\mathbb{R}^3$, en kan ofwel gedefinieerd worden met een directe formule, ofwel met 2×2 determinanten:

Definitie 11.10.1 (Vectorieel product in $\mathbb{R}^3$).

Het **vectorieel product** (of **vectorproduct**) van $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ in $\mathbb{R}^3$, genoteerd als

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) \qquad (\text{ of soms ook } (u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3))$$

wordt gedefinieerd door

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) \stackrel{\text{def}}{=} (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \quad \in \mathbb{R}^3.$$

Voorbeeld 11.10.1.

$(1,2,3) \times (4,5,6) = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5, 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6, 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) = (-3, 6, -3)$

$(1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1)$ en $(0,1,0) \times (1,0,0) = (0,0,-1)$

Het vectorieel product kan ook formeel worden geschreven als een 3×3 determinant:

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

met $\mathbf{e_x} = (1,0,0)$, $\mathbf{e_y} = (0,1,0)$ en $\mathbf{e_z} = (0,0,1)$ de drie basisvectoren van $\mathbb{R}^3$, want

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}(1,0,0) - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}(0,1,0) + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}(0,0,1) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Door invullen vind je dat $(x,y,z) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$ voldoet aan de vergelijkingen

$$\begin{cases} u_1x + u_2y + u_3z = 0 \\ v_1x + v_2y + v_3z = 0 \end{cases}$$

Deze vergelijkingen kunnen geïnterpreteerd worden als voorwaarde dat (x,y,z) loodrecht staat op (u_1, u_2, u_3) en op (v_1, v_2, v_3), en dus volgt dat de vector $(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3)$ loodrecht staat op (u_1, u_2, u_3) en (v_1, v_2, v_3).

We bekomen dus volgende eigenschap, die drie keer in een ander vorm precies hetzelfde beweert:

Eigenschap 11.10.1.

(a) Het vectorieel product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ staat *loodrecht* op $\mathbf{u}$ en op $\mathbf{v}$: $\quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ en $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$.

(b) Het vectorieel product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ is een *oplossing* van het stelsel $\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0 \end{cases}$.

(c) Het vectorieel product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ voldoet aan de *identiteiten* $\begin{cases} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \end{cases}$.

Merk op dat (c) zegt dat $\mathbf{x} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ voldoet aan (b). Het vectorieel product heeft ook een interessante meetkundige betekenis in verband met oppervlakten en oriëntaties, maar dat aspect behandelen we hier niet.

Merk ook op dat het vectorproduct niet commutatief is, want $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. Hieruit volgt dat $\mathbf{u} \times k\mathbf{u} = 0, k \in \mathbb{R}$.

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

Module 12
Stelsels

(Versie 2024/10/24HB.16)

12.1 Intro stelsels

Het oplossen van wetenschappelijke problemen wordt veelal herleid tot het oplossen van wiskundige vergelijkingen. We hebben al lineaire, kwadratische, goniometrische en exponentiële vergelijkingen besproken. In de praktijk komen dergelijke vergelijkingen echter zelden geïsoleerd voor: bijna altijd zijn er *meerdere* vergelijkingen met *meerdere onbekenden* waaraan de onbekenden *tegelijk* moeten voldoen. Dergelijke sets van vergelijkingen die tegelijk moeten worden voldaan noemen we stelsels van vergelijkingen. In het algemeen is het veelal onmogelijk om dergelijke stelsels op te lossen, of zelfs om na te gaan *of* er oplossingen zijn. Maar als alle vergelijkingen *lineair* zijn is er wel een erg handige en krachtige wiskundige techniek. Dat is wat we in dit deel behandelen.

In wat volgt hebben we de leerstof over lineaire stelsels als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Een inleidend voorbeeld en definitie van een lineair stelsel

(3) Een korte bespreking van enkele interpretaties of toepassingen van stelsels.

(4) Wat betekent het precies een stelsel op te lossen ?

(5) Een reeks belangrijke voorbeelden van stelsels die direct oplosbaar zijn, zonder verdere theorie of technieken.

(6) Het algoritme van Gauss of de echelonvorm om een willekeurig stelsel te herleiden tot één dat direct oplosbaar is.

(7) In de praktijk hebben stelesel veelal parameters

(8) Als toepassing kunnen we een inverse matrix berekenen.

12.2 Stelsels: inleiding

Een *stelsel van lineaire vergelijkingen* is letterlijk gewoon een 'stel lineaire vergelijkingen':

- een **vergelijking** is een voorwaarde waaraan onbekende grootheden $(x, y, z \ldots)$ moeten voldoen,
- een vergelijking is **lineair** als de onbekende grootheden enkel voorkomen *zonder machten* of meer ingewikkelde uitdrukkingen als wortels of sinussen,
- en **stelsel** betekent dat er een 'stel' of 'collectie' van vergelijkingen (dus voorwaarden) is waaraan de onbekende grootheden *tegelijk* moeten voldoen.

Een stelsel van lineaire vergelijkingen is dus iets van de vorm

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=\sin\pi/7 \end{cases} \qquad \text{maar niet} \quad \cancel{\begin{cases} x+y=5 \\ xy=\pi \end{cases}} \quad \text{of} \quad \cancel{\begin{cases} \sqrt{x+1}+y=5 \\ \sin(x)+e^y=1 \end{cases}}$$

Het concreet vinden van de *onbekende grootheden* (afstanden, prijzen, gewichten, tijden, . . .) die moeten voldoen aan *lineaire* voorwaarden is het **oplossen** van een lineair stelsel van vergelijkingen. Dergelijke lineaire stelsels komen dus erg vaak voor in de wiskunde, fysica, scheikunde, economie,. . . Ze hebben de bijzonder aangename eigenschap dat ze altijd wiskundig op te lossen zijn: er is een relatief eenvoudige procedure om *alle oplossingen* te vinden. Het is belangrijk de basisprincipes van deze methode en de structuur van de oplossingen grondig te beheersen, hoewel het oplossen van stelsels in de praktijk veel weliswaar eenvoudig rekenwerk vraagt dat dan ook wordt uitbesteed aan computers.

Voorbeeld 12.2.1. Geef twee getallen waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=5$ en het verschil $x-y=1$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel
$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$
Merk op:

- Je kan in dit geval de gezochte getallen snel vinden door te *proberen*: de som moet 5 zijn, dus als we ons beperken tot natuurlijke getallen zijn de mogelijkheden $0+5$, $1+4$ of $2+3$. Enkel voor $2+3$ is het verschil 1, dus de oplossing is 2 en 3.
  In dit eenvoudige geval is het niet echt nuttig om onbekenden en stelsels op te schrijven. Maar zodra de voorwaarden wat ingewikkelder zijn, wordt *proberen* snel moeilijk en is *uitrekenen* meestal sneller.
- Als je toch een stelsel opschrijft, kan je in dit eenvoudige geval dat stelsel ook makkelijk oplossen. Als $x+y=5$, dan is dus $y=5-x$. Door nu y te vervangen door $5-x$ (want er geldt toch dat $y=5-x$) in de tweede vergelijking $x-y=1$ wordt die tweede vergelijking $x-(5-x)=1$, en dus $2x=6$ of $x=3$. En dus is $y=5-x=5-3=2$.
  Eén van de methodes om stelsels op te lossen is een veralgemening van dit eenvoudig trucje.
- Je kan dit stelsel ook anders aanpakken. Inderdaad, als $x+y=5$ en $x-y=1$ dan is ook de som van de linkerleden gelijk aan de som van de rechterleden: $(x+y)+(x-y)=5+1$. In deze laatste uitdrukking valt de onbekende y echter weg, want ze wordt $2x=6$ en dus $x=3$. Invullen dat $x=3$ in de eerste vergelijking $x+y=5$ levert $3+y=5$ of $y=2$.
  Een alternatieve methode om stelsels op te lossen is een veralgemening van dit eenvoudig trucje.
- Je kan dit stelsel ook opschrijven met matrices:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\cdot x+1\cdot y=5 \\ 1\cdot x+(-1)\cdot y=1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

12.2 Stelsels: inleiding

Voorbeeld 12.2.2. Geef twee getallen waarvan de som 3,1415 is en het verschil 1,2345.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen opnieuw x en y. Dan kennen we weer de som $x + y = 3,1415$ en het verschil $x - y = 1,2345$, en we zoeken dus de oplossing van het stelsel $\begin{cases} x + y = 3,1415 \\ x - y = 1,2345 \end{cases}$

Merk op:

- Je kan de getallen x en y nu veel minder makkelijk vinden door *proberen*.
- Je kan in dit eenvoudige geval het stelsel toch makkelijk oplossen met dezelfde methodes als hiervoor: Omdat $x+y = 3,1415$ moet dus $y = 3,1415-x$. Maar dan wordt $x-y = 1,2345$ nu $x-(3,1415-x) = 1,2345$, en dus $2x = 1,2345+3,1415 = 4,376$ of $x = 2,188$. En dus $y = 3,1415-x = 3,1415-4,376 = ,19535$.
- Ook de tweede methode werkt hier: als $x + y = 3.1415$ en $x - y = 1.2345$ dan moet natuurlijk ook $(x + y) + (x - y) = 3.1415 + 1.2345 = 4.3760$. Deze vergelijking reduceert zich tot $2x = 4.376$ en dus $x = 2.188$. Invullen van $x = 2.188$ in de eerste vergelijking geeft $2.188 + y = 3.1415$ of $y = 3.1415 - 2.188 = 1.9535$.
- Je kan ook dit stelsel schrijven met matrices:

$$\begin{cases} x + y = 3.1415 \\ x - y = 1.2345 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1415 \\ 1.2345 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 12.2.3. Geef drie getallen waarvan het grootste dubbel zo groot is als het kleinste, het middelste de helft is van de som van de twee anderen, en het gemiddelde 42 is.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen, geordend van groot naar klein, x, y en z. Dan weten we dat $x = 2z$, $y = \dfrac{x+z}{2}$ en $\dfrac{x+y+z}{3} = 42$, en zoeken dus de oplossing van het stelsel $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 126 \end{cases}$ Je kan ongetwijfeld met wat nadenken en proberen die drie getallen vinden, maar verder leggen we een algemene oplossingsmethode uit die je kan 'toepassen', wat dus maakt dat je niet meer moet 'nadenken' zodra je de oplossingsmethode kent. Liefhebbers van matrices merken op dat je het stelsel kan schrijven als

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 126 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 126 \end{bmatrix}$$

12.3 Stelsels: definitie

Definitie 12.3.1 (Lineair stelsel).

Een **lineair stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden** is een stel van m lineaire vergelijkingen met in totaal n onbekenden. Dergelijk lineair stelsel noteren we als

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

met S de naam van het stelsel, a_{ij} de **coëfficiënten**, $x_1, \ldots, x_n$ de **onbekenden** en b_i de **rechterleden** of **constante termen**.

Een lineair stelsel is **homogeen** als alle constante termen nul zijn, dus alle $b_i = 0$.
Het aan S **geassocieerde homogene stelsel** is het stelsel waarbij de b_i vervangen zijn door 0.

Merk op: de term *rechterlid* is gebruikelijk in de wiskunde, en komt in veel cursussen voor, maar is eigenlijk verwarrend of zelfs misleidend: een vergelijking $x + y = 2$ kan natuurlijk ook geschreven worden als $x + y - 2 = 0$, maar $x + y - 2 = 0$ is *geen* homogene vergelijking, en volgens bovenstaande definitie is het 'rechterlid' gelijk aan 2. Het begrip 'rechterlid' slaat dus op vergelijkingen in standaardvorm: alle onbekenden in het linkerlid en de constante term rechts.

Voorbeeld 12.3.1. Het stelsel

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{cases}$$

is een lineair stelsel met twee vergelijkingen in drie onbekenden x_1, x_2, x_3, en heeft als geassocieerd homogeen stelsel

$$S_o : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

De belangrijkste uitdaging bij dergelijke stelsels is om de letters x_i te vervangen door geschikte reële getallen zodat alle gelijkheden opgaan. We noemen dat het *oplossen van het stelsel* en de gevonden reële getallen zijn dan *oplossingen van het stelsel*.

We associëren met elk stelsel twee erg verwante matrices: de *coëfficiëntenmatrix* en de *uitgebreide* matrix:

Eigenschap 12.3.1 (Matrixvorm van een lineair stelsel).

Elk lineair stelsel kan in **matrixvorm** worden geschreven als $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}}$ waarbij

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

met

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$	de $m \times n$ **coëfficiëntenmatrix** van het stelsel bestaande uit reële getallen,
$\mathbf{x}$	de **onbekende** (een *kolomvector* met n *letters* (of onbekenden) $x_1, \ldots, x_n$) en
$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$	het **rechterlid** of de *constante term(en)* (een *kolomvector* met m *getallen*).

12.3 Stelsels: definitie

De **uitgebreide matrix** van het stelsel is de $m \times (n+1)$ matrix met de constante termen toegevoegd:

$$\left[\ \mathbf{A} \mid \mathbf{b}\ \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Een stelsel is **homogeen** als $\mathbf{b} = 0$, dus als het van de vorm $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ is.

Om verwarring te voorkomen is de verticale lijn in de uitgebreide matrix belangrijk.

Voorbeeld 12.3.2.

Het stelsel S $\qquad \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$

heeft als coëfficiëntenmatrix $\mathbf{A} =$ $\qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

en als uitgebreide matrix $\left[\ \mathbf{A} \mid \mathbf{b}\ \right] =$ $\qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$

We kunnen het stelsel dus schrijven als $\qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Het geassocieerde homogene stelsel S_o $\qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

heeft dezelfde coëfficiëntenmatrix $\mathbf{A}$, en uitgebreide matrix $\qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$

We bespreken een wat uitgebreider voorbeeld van een lineair stelsel:

Voorbeeld 12.3.3. Bepaal alle reële getallen s, t, u, v, w waarvoor

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{cases}$$

Dit is een *lineair stelsel van drie vergelijkingen in vijf onbekenden*.

- Dit is de wiskundige weergave van een probleem waarbij we weten dat er tussen de vijf onbekende grootheden s, t, u, v, w drie lineaire verbanden bestaan. De uitdaging is *alle waarden* te vinden voor de onbekende grootheden die aan *alle* (lineaire) verbanden voldoen.
- Een eerste technische herformulering bestaat erin om één *vector* te zoeken in plaats van vijf *getallen*: in plaats van 'zoek alle reële getallen s, t, u, v, w', zeggen we 'zoek alle vectoren $(s, t, u, v, w) \in \mathbb{R}^5$.
- Met matrices en vectoren kunnen we het stelsel eenvoudiger schrijven: de vijf onbekenden (s, t, u, v, w) worden een 5×1 kolomvector $\mathbf{x}$, de coëfficiënten van de vergelijkingen vormen de

12.3 Stelsels: definitie

3×5 *coëfficiëntenmatrix* $\mathbf{A}$ en de rechterleden zetten we in een 3×1 kolomvector $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Het stelsel kan nu geschreven worden als $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ of

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De uitgebreide matrix, die dus alle gegevens van het stelsel bevat, is

$$\left[\ \mathbf{A} \mid \mathbf{b}\ \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

Oefening 12.3.1. Welke van de volgende stelsels zijn lineair in de onbekenden u en v? Geef voor de lineaire stelsels ook een matrixvoorstelling.

1. Lineair | Niet lineair $\quad \begin{cases} 2u + v = 5 \\ 4u + 2v = 1 \end{cases}$

2. Lineair | Niet lineair $\quad \begin{cases} 2u + v = 5 \\ 4u + 2v = u \end{cases}$

3. Lineair | Niet lineair $\quad \begin{cases} 2u = 5 \\ 2v = 1 \end{cases}$

4. Lineair | Niet lineair $\quad \begin{cases} (u+2)u - u^2 = 5 \\ 4u + 2v = 1 \end{cases}$

5. Lineair | Niet lineair $\quad \begin{cases} \sin(u) + \cos(v) = 1 \\ \sin(u) - 2\cos(v) = 1/2 \end{cases}$

6. Lineair | Niet lineair $\quad \begin{cases} u^2 + v = 1 \\ -u^2 - 2v = 2 \end{cases}$

7. Lineair | Niet lineair $\quad \begin{cases} au + 2v = 5 \\ 4u + bv = 1 \end{cases}$ (met $a, b \in \mathbb{R}$)

8. Lineair | Niet lineair $\quad \begin{cases} x^3u + \cos(y)v = 5 \\ 4u + x^3v = 1 \end{cases}$ (met $x, y \in \mathbb{R}$)

12.4 Stelsels: enkele interpretaties

Een *stelsel van lineaire vergelijkingen* is een stel van lineaire vergelijkingen, en kan altijd in matrixvorm worden geschreven. Een stelsel kan op verschillende manieren worden geïnterpreteerd, en erg uiteenlopende problemen kunnen worden herleid tot het oplossen van een stelsel.

Voorbeeld 12.4.1. Vraagstukken: zoek twee getallen waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=5$ en het verschil $x-y=1$, en zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Ook het zoeken van geschikte **lineaire combinaties** leidt tot lineaire stelsels, en omgekeerd kan elk lineair stelsel beschouwd worden als het zoeken van een geschikte lineaire combinatie.

Inderdaad, elke matrix $\mathbf{A}$ kan beschouwd worden als een rij van kolomvectoren $\mathbf{A_i}$, en het matrixproduct $\mathbf{Ax}$ is ook een *kolom*vector, namelijk de lineaire combinatie van de kolommen van $\mathbf{A}$ met (onbekende) coëfficiënten x_i: $\mathbf{A_1}x_1 + \mathbf{A_2}x_2 + \ldots + \mathbf{A_n}x_n$.
Het stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ oplossen betekent dus zoeken naar gepaste coëfficiënten x_i om een gegeven vector $\mathbf{b}$ te schrijven als een lineaire combinatie van een gegeven stel vectoren $\mathbf{A_i}$, namelijk de kolommen van $\mathbf{A}$:

Voorbeeld 12.4.2. Lineaire combinaties: is $(5,1)$ een lineaire combinatie van $(1,1)$ en $(1,-1)$?

We zoeken coëfficiënten x en y zodat $(5,1) = x(1,1) + y(1,-1)$, en dat komt neer op het oplossen van het stelsel

$$x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Merk op dat dit hetzelfde stelsel is als hierboven.

We kunnen het product $\mathbf{Ax}$ beschouwen als een functie die de kolomvector $\mathbf{x}$ afbeeldt op de kolomvector $\mathbf{Ax}$. Dergelijke functies, die in deze context meestal *afbeeldingen* worden genoemd komen vaak voor: het zijn zogenaamde **lineaire afbeeldingen** van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$.
Het stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ oplossen betekent dus zoeken welke vectoren $\mathbf{x}$ door een gegeven matrix $\mathbf{A}$ worden afgebeeld op een gegeven vector $\mathbf{b}$:

Voorbeeld 12.4.3. Lineaire afbeeldingen: welke (x,y) worden door $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ afgebeeld op $(5,1)$?

We zoeken dus de koppels (x,y) waarvoor

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$$

en dat is precies de matrixvoorstelling van weerom hetzelfde stelsel $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

12.5 Stelsels: oplossingen

Een lineair stelsel van m vergelijkingen en n onbekenden $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *oplossen* betekent *alle* n-tallen reële getallen $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ vinden die we voor de letters $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ kunnen invullen zodat $\mathbf{Ap} \overset{!}{=} \mathbf{b}$. Formeel wordt dit:

Definitie 12.5.1 (Oplossingen van stelsels en gelijkwaardige stelsels)**.**

Een **oplossing** van een lineair stelsel $S : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ is een vector $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ die voldoet aan alle vergelijkingen, dus zodat

$$\mathbf{Ap} = \mathbf{b} \quad \text{of} \quad \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n & = b_1 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \cdots + a_{mn}p_n & = b_m \end{cases}$$

De **oplossingsverzameling** $\mathrm{Opl}(S)$ van een lineair stelsel S is de verzameling van *alle oplossingen*:

$$\mathrm{Opl}(S) = \{ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \ \}$$

Twee stelsels S_1 en S_2 zijn **gelijkwaardig** als ze *dezelfde* oplossingsverzameling hebben, dus als

$$\boxed{\mathrm{Opl}(S_1) = \mathrm{Opl}(S_2)}$$

Een stelsel dat *geen* oplossingen heeft, dus met $\mathrm{Opl}(S) = \emptyset$, noemen we **strijdig** of **ontaard**. Ook een *vergelijking* die geen oplossingen heeft noemen we **strijdig** of **ontaard**. Een typische *ontaarde vergelijking* is $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1$ of dus $\boxed{0 = 1}$.

Een algemene strategie om lineaire stelsels op te lossen is:

Bereken een *gelijkwaardig* stelsel waarvoor de oplossingsverzameling direct af te lezen is.

Het is belangrijk om stelsels te leren oplossen, maar het is ook belangrijk te beseffen dat we in een aantal gevallen niet zozeer geïnteresseerd zullen zijn in de concrete oplossingen, maar wel in allerlei *eigenschappen* van die oplossingen (zijn er oplossingen, hoeveel zijn er, . . .)

We geven enkele eenvoudige voorbeelden van stelsels die direct oplosbaar zijn:

Voorbeeld 12.5.1. Los volgende stelsels op:

1. $S_1 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Door enkele getallen te proberen, vinden sommigen al snel dat het koppel $(3, 2)$ een oplossing is. Door de twee vergelijkingen bij elkaar op te tellen, vinden anderen dan weer dat $(x + y) + (x - y) = 5 + 1$ moet zijn, en dus $2x = 6$, of $x = 3$. Door $x = 3$ in te vullen in één van de twee oorspronkelijke vergelijkingen vinden ze dan dat $3 + y = 5$, en dus $y = 2$.

Uit de eerste oplossingsmethode volgt dat $(3, 2)$ *een* oplossing is, en uit de tweede volgt dat $(3, 2)$ *de enige* oplossing is.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_1) = \{(3, 2)\}$, of $x = 3$ en $y = 2$ is de enige oplossing van het stelsel S_1

2. $S_2 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x + y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Het is onmiddellijk duidelijk dat het onmogelijk is dat $x + y$ zowel gelijk is aan 1 als aan 5. Er zijn dus *geen oplossingen*.

12.5 Stelsels: oplossingen

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_2) = \emptyset$

3. $S_3 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 12 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x, y) = (3, 2)$. En $(3, 2)$ voldoet ook aan de derde vergelijking (want $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$), en is dus een oplossing van het hele stelsel.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_3) = \{(3, 2)\}$

4. $S_4 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 13 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x, y) = (3, 2)$. En $(3, 2)$ voldoet niet aan de derde vergelijking (want $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \neq 13$), en er kan dus geen oplossing bestaan voor het hele stelsel.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_4) = \emptyset$

5. $S_5 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ 2x + 2y & = 10 \end{cases}$

Uitwerking: De tweede vergelijking is eigenlijk dezelfde als de eerste, want als $x+y = 5$, dan is automatisch ook $2x + 2y = 2(x + y) = 2 \cdot 5 = 10$. Dus zodra $y = 5 - x$ (of ook: zodra $x = 5 - y$), hebben we een oplossing. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 5 - x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(5 - y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn natuurlijk twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels. Voorbeelden van oplossingen zijn dus de koppels $(0, 5), (1, 4), (2, 3), (5, 0), (\pi, 5 - \pi), (\pi + 5, -\pi), (5 - \pi, \pi), \ldots$

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_5) = \{(t, 5 - t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(5 - s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -x + 5$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel S_5 is dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -x + 5$.

6. $S_6 = \{\ 2x + y \ = 6$ (een 'stelsel' met één vergelijking)

Uitwerking: Er is maar één vergelijking, en die zegt dat $x = 3 - \frac{1}{2}y$, of ook dat $y = 6 - 2x$. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 6-2x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(3-\frac{1}{2}y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_6) = \{(t, 6 - 2t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(3 - \frac{1}{2}s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -2x+6$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel $\{2x+y = 6$ is (als deelverzameling van $\mathbb{R}^2$) dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -2x + 6$.

7. $S_{71} = \begin{cases} 2x + y & = 6 \\ 0x & = 0 \end{cases}$ of $S_{72} = \begin{cases} x + y & = -x + 6 \\ 0 & = 0 \end{cases}$ of $S_{73} = \begin{cases} x + y + 3 & = -x + 9 \\ 1 & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Dit zijn dezelfde stelsels als S_6 hierboven.

8. $S_{81} = \begin{cases} 2x + y & = 6 \\ 0x & = 1 \end{cases}$ of $S_{82} = \begin{cases} x + y & = -x + 6 \\ 0 & = 1 \end{cases}$ of $S_{83} = \begin{cases} x + y + 3 & = -x + 9 \\ 7 & = 8 \end{cases}$

Uitwerking: Deze stelsels hebben een strijdige vergelijking, en hun oplossingsverzameling is dus leeg.

12.6 Stelsels: direct oplosbaar

Er bestaat een erg algemene maar soms verrassend efficiënte strategie om moeilijke problemen op te lossen: bedenk eerst een *eenvoudigere versie* van het probleem, en probeer dan alvast die eenvoudige versie op te lossen. Dat creëert enerzijds vertrouwdheid met het probleem, kan eventueel inspiratie opleveren voor een algemene oplossing en geeft mogelijk ook zelfvertrouwen om het moeilijke probleem steeds verder te doorgronden. In het ideale geval kan je het moeilijke probleem *reduceren* tot het eenvoudige geval.

Voor het oplossen van lineaire stelsels blijkt deze strategie bijzonder geschikt te zijn. We zullen eerst allerlei eenvoudige stelsels oplossen door 'puur nadenken'. Later zullen we dan een beroep doen op de Geniale Gauss die een techniek heeft gevonden om *elk* stelsel te vervangen door één waarvan wij eenvoudige stervelingen dan door eenvoudig 'puur nadenken' de oplossingen kunnen vinden.

Voorbeeld 12.6.1.

Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in vorm van een matrixproduct:

1. $S_1 = \left\{ \begin{array}{ccccc} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_1) = \{\ (2,4,6)\ \}$ via gewoon aflezen.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

2. $S_2 = \left\{ \begin{array}{ccccc} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 1 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_2) = \{\ (2,2,1)\ \}$ via aflezen met een kleine berekening: $4/2 = 2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $S_3 = \left\{ \begin{array}{ccccc} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_3) = \{\ (2,2,0)\ \}$ via gewoon aflezen, waarbij we $z = 0$ krijgen, maar dat is niets speciaal.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $S_4 = \left\{ \begin{array}{ccccc} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 1 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$ via gewoon aflezen, want de laatste vergelijking is duidelijk strijdig: voor geen enkel getal z kan $0z = 1$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

12.6 Stelsels: direct oplosbaar

5. $S_5 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 0 \end{cases}$

Uitwerking: $\mathrm{Opl}(S_5) = \{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$, waarbij de laatste vergelijking $0z = 0$ voor alle getallen z voldaan is . Er zijn dus oneindig veel oplossingen, die we naar keuze kunnen schrijven als $\{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,z) \mid z \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,x) \mid x \in \mathbb{R}\ \}$. De laatste schrijfwijze is wiskundig correct, maar verwarrend omdat de letter x hier niets te maken heeft met de eerste coördinaat die meestal ook x noemt. Dikwijls worden als zogenaamde *parameters* letters gekozen uit het rijtje $t, s, k, l, \alpha, \beta, \ldots$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. $S_6 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 0z & = & 0 \end{cases}$

Uitwerking: $\mathrm{Opl}(S_6) = \{\ (2,s,t) \mid s,t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\ \}$. Enkel de eerste vergelijking is een echte vergelijking. Als $x = 2$, mogen y en z willekeurig zijn. Er zijn dus 'twee keer oneindig' veel oplossingen omdat er twee parameters nodig zijn om *alle* oplossingen te bekomen.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. $S_7 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 2z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: $\mathrm{Opl}(S_7) = \{\ (2,t,3) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$. Weer oneindig veel oplossingen, nu met één parameter.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

Voorbeeld 12.6.2 (Achterwaartse substitutie)**.** Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in matrixvorm:

1. $S_{21} = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 1y+ & 1z & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: $\mathrm{Opl}(S_{21}) = \{\ (2,-2,6)\ \}$

We beginnen met de laatste vergelijking: $z = 6$. We vullen die waarde voor z in in de tweede vergelijking, en bekomen $y+6 = 4$, dus $y = -2$. De eerste vergelijking zegt dat $x = 2$. Dus, de oplossing is $(x,y,z) = (2,-2,6)$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

12.6 Stelsels: direct oplosbaar

2. $S_{22} = \begin{cases} x & +y & +z & = & 2 \\ & +y & +z & = & 4 \\ & & +z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{22}) = \{\ (-2, -2, 6)\ \}$

Opnieuw van beneden naar boven invullen (achterwaarts, vandaar *achterwaartse substitutie*). $z = 6$, dus $y + 6 = 4$ en dus $y = -2$. Tenslotte is $x + (-2) + 6 = 2$, of $x = -2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

3. $S_{23} = \begin{cases} 6x & +2y & +z & = & 2 \\ & +5y & +3z & = & 4 \\ & & +2z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{23}) = \{\ (1/6, -1, 3)\ \}$

Opnieuw aan de hand van achterwaartse substitutie eerst z, vervolgens y en dan x berekenen.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

4. $S_{24} = \begin{cases} 6x & +z & = & 2 \\ & +2z & = & 4 \\ & +3z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: Merk op dat de tweede en derde vergelijking in feite dezelfde zijn. Een gelijkwaardig stelsel is dus

$$S_{24} = \begin{cases} 6x & +z & = & 2 \\ & +2z & = & 4 \end{cases}$$

In matrixvorm schrijf je dit stelsel

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hieruit vinden we aan de hand van achterwaartse substitutie dat $(0, 2)$ de enige oplossing is van het stelsel.

Merk op dat er geen onbekende y in het stelsel voorkomt, en we dus kunnen aannemen dat er twee onbekenden zijn, die toevallig x en z noemen in plaats van x en y. Je hebt dus een vector met twee componenten nodig om het stelsel op te lossen. De oplossingsverzameling is dan $\text{Opl}(S_{24}) = \{(0, 2)\}$.

Stel dat in een vraagstuk toch sprake zou zijn van een onbekende y, maar waarbij die toch niet voorkomt in je stelsel. Dat betekent dan dat je stelsel geen voorwaarden oplegt aan y, en dat dus y willekeurige waarden mag aannemen. Dan beschrijf je best je oplossingen als $\text{Opl}(S_{24}) = \{(0, t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Het bijhorende matrixproduct is dan $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

5. $S_{25} = \begin{cases} 6x & +2y & +z & = & 2 \\ & & +2z & = & 4 \\ & & +0z & = & 0 \end{cases}$

Uitwerking:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

12.6 Stelsels: direct oplosbaar

$\text{Opl}(S_{25}) = \{\ (t, -3t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$

De tweede vergelijking heeft als oplossing $z = 2$. De eerste vergelijking wordt dan $6x+2y = 0$. De oplossingsverzameling heeft één parameter: stel bijvoorbeeld dat $x = t$ voor een $t \in \mathbb{R}$. Dan is aan deze vergelijking voldaan als $2y = -6t$ of dus $y = -3t$.

We kunnen dit samenvatten in volgende eigenschap:

Eigenschap 12.6.1 (Oplossen van 'eenvoudige' stelsels met aflezen of achterwaartse substitutie)**.**

- Stelsels met een *diagonaalmatrix* zijn zeer eenvoudig oplosbaar via *aflezen*.
- Stelsels met een *bovendriehoeksmatrix* zijn eenvoudig oplosbaar via *achterwaartse substitutie*.
- Nulrijen, nulkolommen of nullen op verkeerde plaatsen nopen tot enige voorzichtigheid:
  - een nulrij betekent: er waren 'dubbele' (en dus overbodige) vergelijkingen.
  - een nulkolom betekent: een variabele komt niet echt voor.
  - een nulrij-met-achteraan-een-1 betekent $0x+0y+0z = 1$ en geeft dus een *strijdig* stelsel.
- Stelsels met *minder vergelijkingen dan onbekenden* hebben typisch *oneindig veel* oplossingen, en de oplossingsverzameling bevat dus *parameters*.
- Stelsels met *evenveel vergelijkingen als onbekenden* hebben typisch een *unieke* oplossing. Maar:
  - er kunnen 'dubbele' vergelijkingen zijn waardoor er toch oneindig veel oplossingen zijn.
  - als het stelsel homogeen is, is de unieke oplossing noodzakelijk de (meestal niet interessante) nul-oplossing.
- Stelsels met *meer vergelijkingen dan onbekenden* hebben typisch een *geen* oplossingen. Maar:
  - er kunnen 'dubbele' vergelijkingen zijn waardoor er toch oplossingen zijn, zoals in $\begin{cases} 6x & +2y & = & 2 \\ 3x & +y & = & 1 \\ 9x & +3y & = & 3 \end{cases} \iff$

    $\begin{cases} 3x + y = 1 \end{cases}$ met oplossingsverzameling $\{\ (t, 1-3t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$

Met deze technieken kunnen alleen erg eenvoudige stelsels worden opgelost, maar met de methode van Gauss kan je *een willekeurig stelsel* herleiden naar één van deze eenvoudige gevallen.

Het is dus *erg belangrijk* deze eenvoudige gevallen erg vlot te kunnen oplossen voordat je aan de moeilijkere stelsels begint.

12.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

De *eliminatiemethode van Gauss* is een algemene methode om *elk lineair stelsel* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ op te lossen. Het toepassen van geschikte zogenaamde *elementaire operaties* op de vergelijkingen van het stelsel (in de praktijk op de uitgebreide matrix van het stelsel) leidt tot een gelijkwaardig maar eenvoudiger stelsel in trapvorm (de zogenaamde *echelonvorm*). Van een stelsel in echelonvorm kan de oplossingsverzameling direct worden afgelezen. Een andere naam voor de methode is 'rijherleiden', en een variant is gekend onder de naam 'spilmethode'.

12.7.1 Elementaire rijoperaties

Volgende drie operaties op vergelijkingen van stelsels *veranderen de oplossingsverzameling van het stelsel niet*:

(a) ***Herschaling* van een vergelijking:** een vergelijking vermenigvuldigen met een reëel getal verschillend van nul.
Een voorbeeld maakt meteen duidelijk waarom dit de oplossingsverzameling niet verandert: de vergelijking $x-2y=5$ heeft immers precies dezelfde oplossingen (x, y) als de vergelijkingen $3x-6y=15$ en $-2x+4y=-10$. Pas wel op: vermenigvuldigen *met nul* mag natuurlijk niet, want dat zou de vergelijking doen verdwijnen en de oplossingsverzameling dus erg vergroten.

(b) **Twee vergelijkingen van plaats *verwisselen*:**
Het is duidelijk dat de volgorde van de vergelijkingen geen invloed heeft op de oplossingen.

(c) **Bij een vergelijking een veelvoud van een andere vergelijking *optellen*:**
We tonen eerst aan waarom een veelvoud van een andere vergelijking optellen geen oplossingen kan doen verdwijnen. Daarna tonen we aan dat er dan ook geen oplossingen kunnen bijkomen.

(i) Als (x_0, y_0) een oplossing is van $\begin{cases} x-2y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$
en we tellen bij de eerste vergelijking bijvoorbeeld twee keer de tweede op:

$$(x-2y)+2(x+y)=5+2\cdot 1 \text{ of dus } 3x+0y=7$$

dan is (x_0, y_0) ook een oplossing van $\begin{cases} 3x+0y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$
Dus elke oplossing van het oorspronkelijke stelsel is ook oplossing van het nieuwe stelsel.

(ii) Maar is ook elke oplossing van het nieuwe stelsel een oplossing van het oorspronkelijke stelsel?
Ja, want de weg terug heeft volledig dezelfde structuur: als we van de nieuwe eerste rij de tweede rij (die ongewijzigd gebleven is) twee keer aftrekken bekomen we terug het oorspronkelijke stelsel. De redenering van hierboven toont dus dat alle oplossingen behouden blijven.

Deze *operaties op vergelijkingen* van een stelsel komen overeen met zogenaamde *elementaire rijoperaties op de uitgebreide coëfficiëntenmatrix* van het stelsel:

Definitie 12.7.1. Volgende operaties op de rijen van matrices noemen we **elementaire rijoperaties**:

Herschaling	Vermenigvuldigen een rij met een getal verschillend van nul	$R_i \to aR_i, a \neq 0$
Verwisseling	Verwissel twee rijen van plaats	$R_i \leftrightarrow R_j$
Combinatie	Tel bij een rij een veelvoud van een andere rij op	$R_i \to R_i + aR_j$

Uit bovenstaande uitleg blijkt dus volgende eigenschap:

12.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Eigenschap 12.7.1. Het toepassen van elementaire rijoperaties op de uitgebreide matrix van een stelsel verandert de oplossingsverzameling van het stelsel niet.

Opmerking 12.7.1.

(a) Door een herschaling en een combinatie na elkaar uit te voeren kan je een rij ook vervangen door een niet-nul veelvoud van die rij waarbij een veelvoud van een andere rij wordt opgeteld: $R_i \to aR_i + bR_j, a \neq 0$. Men noemt deze operatie soms ook een (niet-elementaire) rijoperatie.

(b) Soms gebruikt men voor de rijoperaties eerder de omgekeerde pijl $R_i \leftarrow aR_i$. Die notatie geeft duidelijker aan dat de inhoud van rij R_i vervangen wordt door nieuwe getallen aR_i.

Omdat rijoperaties de oplossingsverzameling niet veranderen, kunnen we proberen de matrix – en dus het stelsel – te vereenvoudigen tot een vorm waarop die oplossingsverzameling direct kan worden afgelezen.

Voorbeeld 12.7.1. Beschouw het stelsel $S:\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & =5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & =0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & =1 \end{cases}$

met als uitgebreide matrix

$$\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ \mathbf{b}\ \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

We vereenvoudigen nu de matrix, en dus het stelsel, via een adhoc toepassing van de rijoperaties. Later leggen we een systematische methode uit, maar de strategie is steeds om nullen te creëren in de matrix.

De tweede rij met drie vermenigvuldigen (een herschaling) geeft

$$\xrightarrow{R_2 \to 3R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 3 & -6 & 6 & 9 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

en dan levert bij de tweede rij de eerste rij optellen (een optelling) extra nullen in de tweede rij:

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Deze twee elementaire operaties samen kunnen beschouwd worden als één (niet elementaire) operatie: vervang rij 2 door 3 maal zichzelf plus rij 1.

Op dezelfde manier levert rij 3 vervangen door 3 maal zichzelf plus 2 maal rij 1:

$$\xrightarrow{R_3 \to 3R_3 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{array}\right]$$

Pas op: je mag *nooit* een rij vervangen door 0 maal zichzelf en een veelvoud van een andere rij, want dan zou je de rij eigenlijk gewoon weggooien.

Tenslotte delen we de tweede rij door 5, en de derde rij door 13:

$$\xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_3/13]{R_2 \to R_2/5} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

en tellen bij de derde rij -1 keer rij 2 op:

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

en we bekomen dus het gelijkwaardige maar veel eenvoudigere stelsel

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{cases}$$

Dit stelsel is door 'puur nadenken' op te lossen:
voor willekeurige waarden voor t, v en w vinden we de bijhorende u en s als

$$\begin{cases} u & = & 1 - 2v + 2w \\ -3s & = & 5 - 6t + u - v + 7w = 5 - 6t + 1 - 2v + 2w - v + 7w \end{cases}$$

dus

$$\begin{cases} u & = & 1 - 2v + 2w \\ -3s & = & 6 - 6t - 3v + 9w \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} u & = & 1 - 2v + 2w \\ s & = & -2 + 2t + v - 3w \end{cases}$$

en dus

$$\mathrm{Opl}(S) = \left\{ (-2 + 2t + v - 3w, t, 1 - 2v + 2w, v, w) \in \mathbb{R}^5 \mid t, v, w \in \mathbb{R} \right\}$$

Er zijn dus oneindig veel oplossingen, die afhangen van drie parameters t, v en w.

12.7.2 Eliminatiemethode van Gauss

Het doel van de eliminatiemethode van Gauss is om een stelsel om te vormen tot een eenvoudiger gelijkwaardig stelsel, dus zonder iets te veranderen aan de oplossingsverzameling. De meest eenvoudige vorm waarin *elk stelsel* kan worden gebracht is de zogenaamde *rijcanonieke* of *gereduceerde rijechelonvorm*:

Definitie 12.7.2. Een matrix is in **rijcanonieke vorm** of **gereduceerde rijechelonvorm** als:

(a) het eerste niet-nul element in een rij is steeds 1. Dergelijk element noemt een **spil** (Engels: pivot).

(b) boven en onder elke spil staan enkel nullen.

(c) voor elke spil geldt dat de spil van een *lagere* rij steeds verder naar *rechts* staat.

(d) nulrijen staan onderaan staan (als er zijn).

Opmerking 12.7.2.

- Het begrip echelonvorm bestudeer je best aan de hand van voorbeelden. Het is daarbij in het begin nuttig de spilelementen te *omcirkelen*.
- De derde regel leidt tot de kenmerkende (dalende) *trap*- of echelonvorm met de spilelementen.
- Er bestaat ook een (meer algemene, dus niet noodzakelijk *gereduceerde*) *rijechelonvorm*: dan vervalt de voorwaarde dat *boven* de spil nullen moeten staan en (meestal) dat de spillen 1 moeten zijn. Zowel met de gereduceerde als met de niet-gereduceerde vorm kunnen stelsels worden opgelost: de niet-gereduceerde echelonvorm is sneller te berekenen, maar dan vraagt het vinden van de oplossingen nog wat extra rekenwerk. De gereduceerde echelonvorm is initieel wat meer rekenwerk, maar dan zijn de oplossingen direct wel af te lezen.

Voorbeeld 12.7.2. Voorbeelden (met $\ast$ willekeurige getallen, al dan niet 0) :

Rijcanoniek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 1 & \ast & \ast \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ast \\ 0 & 1 & \ast \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ast \\ 0 & 1 & \ast \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ast & \ast & 0 & \ast \\ 0 & 1 & \ast & \ast & 0 & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Niet rijcanoniek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ast & \ast \\ 0 & 1 & 1 & \ast & \ast \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & \ast \\ 0 & 1 & \ast \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \ast & \ast & 0 & \ast \\ 0 & 1 & \ast & \ast & 0 & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ast \\ 0 & 1 & \ast \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ast & \ast & 0 & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ast \\ 0 & 1 & \ast & \ast & 0 & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oefening 12.7.1. Staan volgende matrices in rijcanonieke vorm (of ook: gereduceerde echelonvorm) ?

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{Ja}}\boxed{\text{Nee}}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{Ja}}\boxed{\text{Nee}}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{Ja}}\boxed{\text{Nee}}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{Ja}}\boxed{\text{Nee}}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{Ja}}\boxed{\text{Nee}}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{Ja}}\boxed{\text{Nee}}$

Elke matrix kan je met behulp van elementaire rijoperaties in rijcanonieke vorm brengen.

Voorbeeld 12.7.3. In Voorbeeld 12.7.1 toonden we een adhoc techniek: op één element na worden alle elementen van een *kolom* gelijk gemaakt aan 0. Dit noemen we het *schoonvegen van een kolom*.

In dat voorbeeld werden in de *eerste kolom* alle elementen nul gemaakt behalve het element links boven (dat zelf verschillend was van nul) door de andere rijen te herschalen en een gepast veelvoud van de eerste rij daarvan af te trekken.

12.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Het **algoritme van Gauss** veegt achtereenvolgens verschillende kolommen van de matrix $[\mathbf{A}\ \mathbf{b}]$ schoon. Hiervoor gebruiken we in elke stap een van nul verschillend zogenaamd *spilelement*, dat telkens dezelfde rol zal spelen als het element links boven in voorbeeld 12.7.1.

Het volstaat dan om nog uit te leggen hoe in de volgende stappen telkens een nieuwe spil gekozen moet worden om van deze methode een volwaardig algoritme te maken. Welnu, een nieuwe spil wordt eerst en vooral steeds gezocht in de deelmatrix *onder en rechts* van de vorige spil. Bij het zoeken van de eerste spil is deze deelmatrix de gehele matrix. Als we verder werken op voorbeeld 12.7.1, bekijken we dus de volgende matrix die we bekomen hadden maar dan zonder de eerste rij en de eerste kolom, als volgt:

uit $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$ halen we de deelmatrix $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$

In deze deelmatrix zoeken we *de eerste kolom die niet volledig uit nullen bestaat*. In het voorbeeld is dat de tweede kolom van de 2×5 deelmatrix. We kiezen het bovenste niet-nul element, 5, als spil en vegen daarmee de hele derde kolom van de totale matrix schoon, zowel boven als onder de spil. Hiertoe combineren we zowel de eerste als de derde rij met de tweede om boven en onder de 5 een nul te bekomen als volgt.

We nemen terug de volledige matrix (en niet de deelmatrix, die enkel diende om de nieuwe spil te bepalen):

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Door bij elke rij een geschikt veelvoud op te tellen van de spilrij, kunnen we de spilkolom 'schoonvegen'. Rij 1 vervangen door vijf maal zichzelf plus rij 2 levert

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Rij 3 vervangen door 5 maal zichzelf min 13 maal rij 2 levert

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Merk op dat bij het schoonvegen van de derde kolom de nullen die we al bekomen hadden in de eerste twee kolommen niet gewijzigd zijn.

De matrix heeft dan de gewenste trapvorm. Via een herschaling van rij 1 en rij 2 zorgen we tenslotte nog dat het eerste element van de niet-nulrijen een 1 is: Dit levert

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze matrix is in rijcanonieke vorm.

Merk op dat in de bovenstaande afleiding geen rijverwisselingen voorkwamen, enkel herschalingen en optellingen. Veronderstel echter dat we volgende deelmatrix hadden gevonden:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Dan is de tweede kolom van de deelmatrix nog steeds de eerste niet-nulkolom. Maar het eerste niet-nulelement, 13, staat dan niet bovenaan. In zo'n geval moet de rij van de nieuwe spil door een verwisseling net onder de rij van de vorige spil gebracht worden om tot een echte trapvorm te komen. Dus zouden we in dit voorbeeld rij 2 met rij 3 moeten verwisselen.

Opmerking 12.7.3. Elementaire rijoperaties kan je best noteren als volgt: teken een pijl naar rechts naar de nieuwe matrix, en schrijf boven die pijl de rijoperatie(s) die je toepast, in de vorm $R_2 \to R_2 + 4R_3$ als je rij 2 vervangt door rij 2 plus 4 keer rij 3. Dus eerst de rij waarop je een operatie toepast, gevolgd door een pijl en de operatie:

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 5R_3} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 65 & 130 & -130 & 65 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 13R_2} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Je kan deze twee operaties ook in één stap doen, om schrijfwerk te besparen: hiervoor zijn er twee mogelijke schrijfwijzes: allereerst kan je de twee operaties apart opschrijven:

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 13R_2]{R_3 \to 5R_3} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Of je kan beide operaties samenvatten in één operatie als volgt. Dit is echter wel geen *elementaire* rijoperatie meer, maar een combinatie van elementaire rijoperaties.

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 5R_3 - 13R_2} \begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In het algemeen kan voor *elke* matrix een equivalente rijcanonieke matrix worden berekend door van linksboven naar rechtsonder steeds kleinere deelmatrices te beschouwen:

Algoritme 12.7.5 (Gausseliminatie/berekening echelonvorm/spilmethode voor een niet-nul-matrix).

(beginstap)	Noem de gehele matrix de (eerste) *deelmatrix*.
(kies spilkolom)	Noem *spilkolom* de meest linkse niet-volledig-nul-kolom van de *deelmatrix*.
(maak spilelement)	Maak bovenste element van de *deelmatrix* in de *spilkolom* een *spilelement*, dit betekent: verwissel eventueel rijen zodat dat element zeker niet-nul is.
(schoonvegen spilkolom)	Veeg met *het spilelement* de hele *spilkolom* schoon, i.e. maak nullen door rijen te herschalen en er een veelvoud van de spilrij bij op te tellen. Doe dit voor *alle rijen*, en niet alleen voor de rijen van de *deelmatrix*.
(bijna klaar?)	Als je helemaal rechts-onder bent in de oorspronkelijke matrix ga je naar (eindstap)
(nieuwe deelmatrix)	Kies als nieuwe *deelmatrix* alles rechts-onder het huidige *spilelement*.
(bijna klaar?)	Als de *deelmatrix* volledig uit nullen bestaat, ga je direct naar (eindstap).
(volgende ronde)	Ga met deze nieuwe *deelmatrix* terug naar de stap (kies spilkolom).
(eindstap)	Maak tenslotte alle spilelementen 1 door elke rij met een spil te delen door die spil.

12.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Opmerking 12.7.4.

- Door de verwisselingen in stap (maak spilelement) komen de nulrijen automatisch onderaan terecht.
- Je mag ook andere procedures volgen om tot een echelonvorm te komen. Men kan bewijzen dat je *steeds dezelfde rijcanonieke vorm* bekomt voor een gegeven matrix.
- Merk op dat het algoritme zegt om per spil een volledige kolom 'in één keer' schoon te vegen. Je past dus meerdere rijoperaties in één keer toe. Je moet wel voorzichtig zijn: dat mag hier omdat je alleen maar *veelvouden van de spilkolom* bijtelt.
  Als je ook veelvouden van andere rijen neemt, bekom je mogelijk onzin:

$$\text{Juist:}\quad \begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{R_3\to R_3-R_1} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&2\end{bmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\text{Fout:}\quad \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{R_1\to R_1-R_2} \begin{bmatrix}0&-1\\0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2+R_1]{R_1\to -R_1} \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} : \textit{fout!}$$

Bij een uitgebreide matrix in *rijcanonieke vorm* kan je de oplossing van een stelsel direct *aflezen*:

Eigenschap 12.7.2 (Oplossingen van een stelsel in rijcanonieke vorm)**.**

Voor een stelsel S met uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b}\end{array}\right]$ *in rijcanonieke vorm* geldt:

- De **spilkolommen** zijn de kolommen die een spil bevatten .
- De **hoofdonbekenden** of **gebonden onbekenden** zijn de onbekenden die horen bij een spilkolom , de andere onbekenden zijn de **nevenonbekenden** of **vrije onbekenden**.
- Het *aantal* oplossingen van het stelsel hangt af van de *plaats* van de spilelementen:
  - *de laatste kolom* bevat een spil: er is **geen oplossing**.
    Inderdaad, het stelsel is *strijdig*, want
    een rij $\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & 1\end{bmatrix}$ komt overeen met de strijdige vergelijking $0x_0 + \dots 0x_n = 1$.
  - *elke kolom behalve de laatste* bevat een spil: er is een **unieke oplossing**.
    Inderdaad, de matrix is dan van de vorm (met $b_i \in \mathbb{R}$)

    $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&b_1\\ 0&1&0&b_2\\ 0&0&1&b_3\\ 0&0&0&0 \end{array}\right]$$

    en de overeenkomstige vergelijkingen geven dus direct de unieke oplossing: $x_i = b_i$.
  - in alle andere gevallen: er zijn **oneindig veel oplossingen**.
    Inderdaad, de matrix is dan van de vorm (met de b_i en * willekeurige getallen)

    $$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1&*&0&*&0&*&b_1\\ 0&0&1&*&0&*&b_2\\ 0&0&0&0&1&*&b_3\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right]$$

    Bij elke willekeurige keuze van de *vrije* onbekenden, hoort dan precies één set waarden voor de gebonden variabelen die een oplossing opleveren voor het stelsel. De *vrije onbekenden* spelen de rol van *parameters* van de oplossingsverzameling, vandaar hun naam. Het aantal vrije onbekenden noemt men ook het **aantal vrijheidsgraden** of de **dimensie** van de oplossingsverzameling.

12.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Merk op: voor een *homogeen* stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ is een unieke oplossing altijd de nulvector $\mathbf{x} = 0$. Dus, voor een *homogeen* stelsel is een unieke oplossing meestal geen interessante oplossing.

Voorbeeld 12.7.4. [Vervolg van Voorbeeld 12.7.3]

In het vorige voorbeeld berekenden we voor een bepaald stelsel de rijcanonieke vorm

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Voor dit stelsel zijn de *eerste* en de *derde* kolom de *spilkolommen*: s en u zijn dus gebonden onbekenden, en t, v en w vrije onbekenden.

Bij elke willekeurige keuze van vrije onbekenden t, v, w vinden we precies één set van waarden voor de gebonden onbekenden s en u. Als we t, v, w *vrij* kiezen als

$$t = a, \quad v = b, \quad w = c,$$

met a, b, en c willekeurige reële getallen, dan ligt de waarde van de gebonden onbekenden vast om een oplossing te hebben voor het stelsel: de *gebonden variabelen* hebben dus een waarde die *gebonden* is aan de vrije keuzes voor de waarden van de vrije variabelen. De gebonden variabelen zullen dus uitdrukkingen worden in de *parameters* a, b en c. Elk van de vergelijkingen in de rijcanonieke vorm

$$\begin{cases} s \quad -2t \qquad\quad -v \quad +3w \quad = -2 \\ \qquad\qquad\quad u \quad +2v \quad -2w \quad = 1 \end{cases}$$

bevat immers precies één van de gebonden onbekenden, die we daar telkens uit kunnen 'berekenen in functie van de vrije onbekenden':

$$\begin{cases} s \;=\; -2 \;+2a \;+b \;-3c \\ u \;=\; 1 \qquad\quad -2b \;+2c \end{cases}$$

Samen levert dat de volledige oplossing

$$(s, t, u, v, w) = (-2 + 2a + b - 3c, a, 1 - 2b + 2c, b, c)$$

of

$$(s, t, u, v, w) = (-2, 0, 1, 0, 0) + a(2, 1, 0, 0, 0) + b(1, 0, -2, 1, 0) + c(-3, 0, 2, 0, 1)$$

met a, b en c willekeurige reële getallen. De oplossingsverzameling is dus

$$\text{Opl}(S) = \left\{(-2 + 2a + b - 3c, a, 1 - 2b + 2c, b, c) \in \mathbb{R}^5 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Opmerking 12.7.5. Het is niet strikt nodig om te schrijven dat $t = a, v = b, w = c$ voor willekeurige $a, b, c \in \mathbb{R}$. Het is voldoende te realiseren dat t, v, w vrije onbekenden zijn, en dus eender welke reële waarde kunnen aannemen: je kan dan even goed zeggen dat $t, v, w \in \mathbb{R}$ willekeurig. Let op: voor de gebonden onbekenden geldt ook $s, u \in \mathbb{R}$, maar *niet* willekeurig, aangezien ze afhangen van de vrije variabelen! Je kan de oplossingsverzameling dus ook schrijven als

$$\text{Opl}(S) = \left\{(-2 + 2t + v - 3w, t, 1 - 2v + 2w, v, w) \in \mathbb{R}^5 \mid t, v, w \in \mathbb{R}\right\}.$$

Dikwijls is het echter wel handiger om elke vrije onbekende gelijk te stellen aan een parameter, en dus nieuwe letters te kiezen die voor willekeurige reële getallen staan, zoals in voorbeeld 12.7.4. Het aantal vrijheidsgraden in de oplossing wordt dan duidelijker.

We sluiten af met twee voorbeelden.

12.7 Stelsels: oplossen via echelonvorm

Voorbeeld 12.7.5. De uitgebreide matrix van het homogene stelsel

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 0 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 0 \end{cases}$$

is $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right]$.

Dit stelsel heeft dus dezelfde matrix $\mathbf{A}$ als voorbeeld 12.7.1, maar het rechterlid is 0. De oplossingsmethode verloopt volledig analoog, alleen bestaat de laatste kolom van de uitgebreide matrix uit nullen. *Dergelijke nulkolom blijft onveranderd doorheen de verschillende rijoperaties!* De rijcanonieke vorm is dan ook dezelfde, op de laatste kolom na. De oplossingen zijn

$$(s,t,u,v,w) = a(2,1,0,0,0) + b(1,0,-2,1,0) + c(-3,0,2,0,1), \text{ met } a,b,c \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld 12.7.6. Het stelsel

$$\begin{cases} u & + & v & = & 5 \\ u & - & v & = & 1 \\ u & - & 2v & = & -1 \end{cases}$$

heeft als uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$ met als rijcanonieke vorm $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Alle kolommen behalve de laatste hebben een spil en er is dus een unieke oplossing die onmiddellijk kan worden afgelezen: $(u,v) = (3,2)$. Het overeenkomstige gereduceerde stelsel is immers

$$\begin{cases} u & & = & 3 \\ & v & = & 2 \end{cases}$$

12.8 Stelsels: met parameters

In veel toepassingen zijn niet alle coëfficiënten van een stelsel concrete getallen, maar komen ook zogenaamde *parameters* voor. De oplossingen van het stelsel hangen dan af van die parameter, en in het bijzonder kan het *aantal* oplossingen afhangen van de parameter.

Een stelsel met parameters bevat behalve onbekenden met typisch letters zoals $x, y, x_1, \ldots$ ook zogenaamde *parameters* met letters zoals $a, b, m, n, \lambda, \ldots$ die een bekende maar variabele grootheid voorstellen. De oplossingen van een stelsel met parameters zijn geen *getallen*, maar *uitdrukkingen waarin de parameters voorkomen*. Pas als je de parameters vervangt door concrete getallen bekom je een concreet stelsel met ook concrete getallen als uitkomst.

Voorbeeld 12.8.1.

1. Zoek getallen x en y waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Dit leidt tot het stelsel $\begin{cases} x+y &= 5 \\ x-y &= 1 \end{cases}$ met oplossing $(3, 2)$. (Oefening).

2. Zoek getallen x en y waarvan de som 6 is en het verschil 2.

Uitwerking: Dit leidt tot het stelsel $\begin{cases} x+y &= 6 \\ x-y &= 2 \end{cases}$ met oplossing $(4, 2)$. (Oefening).

3. Zoek getallen x en y waarvan de som a is en het verschil b.

Uitwerking: Dit leidt tot het stelsel $\begin{cases} x+y &= a \\ x-y &= b \end{cases}$.

Je kan dit stelsel oplossen *alsof* a en b getallen zijn: de tweede vergelijking zegt dat $x = y + b$ en als je de x in de eerste vergelijking vervangt door $y + b$ levert dat $(y + b) + y = a$, of $y = \dfrac{a-b}{2}$. En dus is $x = y + b = \dfrac{a-b}{2} + b = \dfrac{a+b}{2}$.

De oplossing van het stelsel $\begin{cases} x+y &= a \\ x-y &= b \end{cases}$ is dus het koppel $(x, y) = \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right)$.

Merk op dat je de twee vorige opgaven nu kan oplossen door de respectivielijk $(a, b) = (5, 1)$ en $(a, b) = (6, 2)$ in te vullen in de algemene formule $(x, y) = \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right)$.

Het is dikwijls sneller één stelsel met parameters op te lossen dan meerdere individuele stelsels, en soms is het zelfs noodzakelijk om met parameters te kunnen werken. Dikwijls treedt er wel een complicatie op: sommige waarden van de parameters doen vervelend en moeten apart worden beschouwd. Dit leidt tot het zogenaamd *gevalsonderscheid* dat we verder bespreken.

Een stelsel met een parameter a oplossen is alsof je niet één stelsel oplost, maar oneindig veel stelsels tegelijk. Elke concrete keuze voor de parameter a betekent een nieuw stelsel en de parameter a komt dan typisch ook voor in de oplossing.

Voorbeeld 12.8.2. Bepaal de oplossingen van het stelsel $\begin{cases} ax+y &= 5 \\ x-y &= 1 \end{cases}$ met $a \in \mathbb{R}$ een parameter.

Uitwerking: Dit eenvoudig stelsel kan direct worden opgelost door de laatste vergelijking te schrijven als $x = 1 + y$, en die uitdrukking te substitueren in de eerste vergelijking: $a(1 + y) + y = 5$, en dus $(a + 1)y = 5 - a$ of $y = \dfrac{5-a}{1+a}$. Deze waarde invullen in de tweede vergelijking levert $x - \dfrac{5-a}{1+a} = 1$, of $x = \dfrac{6}{1+a}$.

We zijn geneigd te concluderen dat het stelsel als unieke oplossing het koppel $(x, y) = \left(\dfrac{6}{1+a}, \dfrac{5-a}{1+a}\right)$ heeft.

12.8 Stelsels: met parameters

Dit is bijna juist, maar voor de waarde $a = -1$ stelt zich een ernstig probleem, want dan wordt de noemer nul, en de voorgestelde oplossingen onbepaald of oneindig. We onderzoeken de situatie door expliciet het stelsel op te schrijven voor de vervelende waarde $a = -1$:

$$\begin{cases} -x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \end{cases}, \qquad \text{of} \qquad \begin{cases} x - y &= -5 \\ x - y &= 1 \end{cases}$$

en zien onmiddellijk wat de oplossing zou moeten zijn: dit stelsel is strijdig, want $x - y$ kan onmogelijk tegelijk gelijk zijn aan -5 en aan 1.

Oplossing: het stelsel $\begin{cases} ax + y &= 5 \\ x - y &= 1 \end{cases}$ heeft voor elke waarde van a een unieke oplossing, namelijk $(x, y) = \left(\frac{6}{1+a}, \frac{5-a}{1+a}\right)$, *behalve* voor de waarde $a = -1$. Als $a = -1$ geeft het stelsel geen oplossingen.

Concreet krijgen we voor $a = 2$ het stelsel $\begin{cases} 2x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \end{cases}$ en de algemene oplossing $(x, y) = \left(\frac{6}{1+a}, \frac{5-a}{1+a}\right)$ wordt in dat geval $(x, y) = \left(\frac{6}{1+2}, \frac{5-2}{1+2}\right) = (2, 1)$.

Conclusie: het oplossen van stelsels met een parameter verloopt erg gelijkaardig als het oplossen van gewone stelsels zonder parameters, maar voor sommige waarden van de parameter(s) kunnen er speciale gevallen optreden. Dit zal bijna steeds leiden tot gevalsonderscheid. Een slimme keuze van de oplossingsmethode kan dergelijke gevalsonderscheid soms erg vereenvoudigen.

Volgende strategie werkt voor lineaire stelsels met parameters, maar kan worden uitgebreid naar meer algemene problemen met parameters:

Beschouw de parameter als een willekeurig getal,
en pas met de nodige voorzichtigheid de gewone oplossingsmethode toe.

De nodige voorzichtigheid betekent onder meer dat je bij een stelsel met gewone getallen onmiddellijk kan zien of een element een kandidaat spil is, maar als het element een parameter bevat moet je eerst nagaan of het element al dan niet nul is. Je mag een rij ook enkel herschalen met een getal als je zeker bent dat dat getal niet nul is, want anders gooi je een vergelijking gewoon weg. In het algemeen moeten bijvoorbeeld ook delen door nul en vierkantswortels of logaritmen van negatieve getallen met de nodige zorg worden vermeden.

Voorbeeld 12.8.3. Welke van volgende matrices staan in (niet noodzakelijk gereduceerde) echelonvorm ?

$$\begin{bmatrix} 1 & a^4+4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & a^2+1 & * & * \end{bmatrix}, \qquad \text{altijd echelon}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & a+1 & * \end{bmatrix}, \qquad \text{echelon, ander type als } a = -1$$

$$\begin{bmatrix} a+1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix}, \qquad \text{geen echelon als } a = -1$$

12.8 Stelsels: met parameters

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & a^2-1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}, \qquad \text{geen echelon als } a \neq \pm 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a^2-1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}, \qquad \text{geen echelon als } a = \pm 1$$

Bij het oplossen denk je dus 'generiek', dit betekent dat al wat je doet moet werken zonder enige voorwaarde op je parameter. Zodra je iets doet dat toch afhangt van de waarde van de parameter, moet je gevalsonderscheid maken en je oplossing opsplitsen over de verschillende relevante gevallen. Je beschouwt vervolgens elk geval apart. Het is best mogelijk dat je verderop opnieuw een gevalsonderscheid moet maken. In het algemeen krijgt je oplossing een boomstructuur. Als je alle gevallen hebt behandeld, vat je ze overzichtelijk samen in je einduitkomst. Soms kan je daarbij aparte paden in je boomstructuur toch weer samennemen.

Wanneer kan je met een parameter zonder meer rekenen alsof het een getal is?

De methode van Gauss bestaat uit de eenvoudige stappen schalen, verwisselen en combineren. In volgende voorbeelden heeft de waarde van de parameter a geen belang: de operatie is steeds geldig:

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-3a \end{bmatrix} \text{ of}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^2+1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - (a^2+1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a^3-a \end{bmatrix} \text{ of}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - aR_1} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a^2 \end{bmatrix}$$

Merk op dat de waarde van a in geen van de gevallen de *geldigheid* van de operatie $R_i \to R_i + \lambda R_j$ bepaalt. In het bijzonder mag $\lambda = 0$. Het *resultaat* hangt natuurlijk wel af van a, en de matrix $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-3a \end{bmatrix}$ heeft een nulrij als $a = \dfrac{1}{3}$, en echelonvorm $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ voor alle andere waarden van a.

Wanneer moet je gevalsonderscheid maken ?

Soms hangt 'de volgende stap die we willen of mogen zetten' af van de concrete waarde van de parameter:

De operatie $\begin{bmatrix} a-2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{a-2} R_1} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{2}{a-2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ is ongeldig als $a = 2$, want dan deel je door nul. De keuze voor $a-2$ als spil is ook enkel geldig als $a \neq 2$.

Er zijn twee opties om deze moeilijkheid op te lossen:

12.8 Stelsels: met parameters

Optie 1: maak onmiddellijk gevalsonderscheid $a = 2$ of $a \neq 2$

$$\text{Als } a \neq 2: \quad \begin{bmatrix} a-2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{a-2} R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{a-2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{a-2} \\ 0 & \frac{3a-8}{a-2} \end{bmatrix}$$

$$\text{- en als ook: } a \neq \tfrac{8}{3} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a-2} \\ 0 & \frac{3a-8}{a-2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - \lambda R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{- en als ook: } a = \tfrac{8}{3} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\frac{8}{3}-2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Als } a = 2: \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hierbij is het geval $a = 2$ blijkbaar niet echt relevant want de echelonvorm is altijd de eenheidsmatrix behalve voor $a = \frac{8}{3}$. Je hebt *twee keer* gevalsonderscheid gemaakt waarbij achteraf de uitkomsten blijken te *overlappen*. Inderdaad, de uitkomsten voor 'Als $a \neq 2$, en als ook $a \neq \frac{8}{3}$' en 'Als $a = 2$' zijn gelijk, en kunnen veel eenvoudiger en begrijpelijker worden uitgedrukt door 'Als $a \neq \frac{8}{3}$'. Deze complexiteit wordt vermeden bij de volgende optie, die in dit geval veel handiger is.

Optie 2: stel het gevalsonderscheid uit door eerst de rijen te wisselen

In dit geval is dat veel sneller:

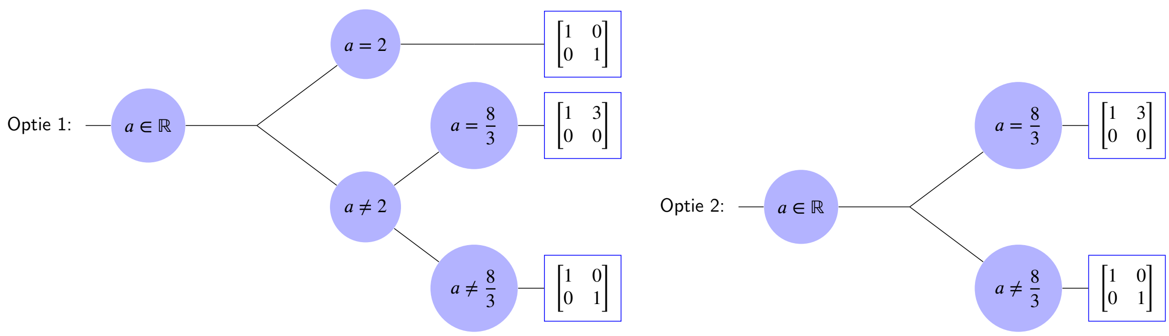
$$\begin{bmatrix} a-2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ a-2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - (a-2) R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3a+8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Geval } a \neq \frac{8}{3}: \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3a+8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - x R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Geval } a = \frac{8}{3}: \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3a+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

waarbij nu niet meerdere gevalsonderscheiden moeten worden gemaakt.

Schematisch zien de oplossingsstrategieën er uit als volgt:



en het vraagt wat denkwerk om in te zien dat het eindresultaat van beide schema's identiek is. In oefeningen is het belangrijk je eindresultaat niet onnodig complex weer te geven, en het schema voor optie 1 voldoet dus *niet* als *eind*resultaat.

12.8 Stelsels: met parameters

Opmerking 12.8.1. Aandachtspunten bij stelsels met parameters:

- **Vermijd altijd delen door nul.** Deel enkel door $a-1$ als $a \neq 1$, delen door a^2+1 mag altijd.
- **Vermijd altijd een rij te herschalen met nul.** Nul keer een andere rij optellen mag wel.
- **Probeer gevalsonderscheid uit te stellen.** Je kan bijvoorbeeld slim rijen verwisselen en een spil kiezen waar de parameter niet in voorkomt.
- Let op: soms is het toch nuttig **een speciaal geval onmiddellijk apart te behandelen**. Behandel bijvoorbeeld eerst $a = 2$, en neem dan in het algemene geval steeds aan dat $a \neq 2$.
- Merk op: soms wil je enkel weten voor welke parameterwaarden er meer of minder oplossingen zijn dan 'normaal' en worden de oplossingen zelf niet eens gevraagd.
- Het *oplossen voor het stelsel voor alle waarden van de parameter(s)* noemt men ook het **bespreken van het stelsel**.
- In een zogenaamd *algemeen stelsel* $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ zijn *alle* getallen vervangen door parameters. Je zou een 'algemene oplossing' van zo'n stelsel kunnen opstellen om dan door het invullen van parameters de oplossing te vinden van elk concreet stelsel zonder dat stelsel zelf te moeten oplossen. De prijs die je hiervoor betaalt is echter de complexiteit en de vele gevalsonderscheiden in de 'algemene oplossing', en de methode is hier niet nuttig: je lost toch sneller individuele stelsels op.

  Maar de situatie is anders bij de 'algemene kwadratische vergelijking' $ax^2+bx+c=0$ met één onbekende en drie parameters, waarbij je wel elke 'concrete' kwadratische vergelijking $x^2+2x+3=0$ oplost door de parameters $a=1, b=2, c=3$ in te vullen in de 'algemene oplossing' $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
- Het gebruik van letters $x, y, \ldots$ voor onbekenden en $a, b, k, l, m, n, p, \lambda, \ldots$ is historisch gegroeid, maar niet in steen gebeiteld. In wetenschappelijke problemen kan het voorkomen dat een stelsel zoals $\begin{cases} ax+by=2 \\ x+y=b \end{cases}$ wordt opgesteld als een stelsel in onbekenden x en y, met parameters a en b, maar dat het probleem zelf eigenlijk wordt opgelost door datzelfde stelsel even later te beschouwen als een stelsel $\begin{cases} xa+yb=2 \\ 0a+1b=x+y \end{cases}$ in onbekenden a en b, met parameters x en y.

Oefening 12.8.1. Duid steeds de meest algemene correcte voorwaarde aan.

1. $\begin{cases} x+y=a \\ x+y=1 \end{cases}$ heeft geen oplossingen als

$a=0$	$a=1$	$a=\pm1$	$a\neq0$	$a\neq1$	$a\neq\pm1$	$a\neq0,1$	$a=0$ of $a=1$	nooit

2. $\begin{cases} x+y=a^2 \\ x+y=1 \end{cases}$ heeft geen oplossingen als

$a=0$	$a=1$	$a=\pm1$	$a\neq0$	$a\neq1$	$a\neq\pm1$	$a\neq0,1$	$a=0$ of $a=1$	nooit

3. $\begin{cases} x+y=a \\ x+y=1 \end{cases}$ heeft een unieke oplossing als

12.8 Stelsels: met parameters

$a = 0$	$a = 1$	$a = \pm 1$	$a \neq 0$	$a \neq 1$	$a \neq \pm 1$	$a \neq 0, 1$	$a = 0$ of $a = 1$	nooit

4. $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ heeft een unieke oplossing als

$a = 0$	$a = 1$	$a = \pm 1$	$a \neq 0$	$a \neq 1$	$a \neq \pm 1$	$a \neq 0, 1$	$a = 0$ of $a = 1$	nooit

5. $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ heeft geen oplossingen als

$a = 0$	$a = 1$	$a = \pm 1$	$a \neq 0$	$a \neq 1$	$a \neq \pm 1$	$a \neq 0, 1$	$a = 0$ of $a = 1$	nooit

6. $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ heeft oneindig veel oplossingen als

$a = 0$	$a = 1$	$a = \pm 1$	$a \neq 0$	$a \neq 1$	$a \neq \pm 1$	$a \neq 0, 1$	$a = 0$ of $a = 1$	nooit

7. $\begin{cases} ax + ay = a \\ x + y = 1 \end{cases}$ heeft geen oplossingen als

$a = 0$	$a = 1$	$a = \pm 1$	$a \neq 0$	$a \neq 1$	$a \neq \pm 1$	$a \neq 0, 1$	$a = 0$ of $a = 1$	nooit

Samengevat levert dat volgende strategie op:

Algoritme 12.8.6. Bij het oplossen van stelsels met parameters

- pas je de 'gewone' oplossingsmethode toe, **met de nodige voorzichtigheid**.
- denk je daarbij '**generiek**', dus alsof de parameter(s) *willekeurige* getallen zijn.
- zorg je dat een **kandidaat spil zeer zeker verschillend is van nul**:
  - je kandidaat-element is een niet nul getal
  - je kandidaat-element bevat de parameter, maar kan onmogelijk nul zijn (bv $e^a, a^2 + 1$)
  - indien mogelijk verwissel je rijen zodat bovenstaande geldt
  - indien nodig maak je gevalsonderscheid voor bepaalde waarden van de parameter(s).

12.9 Stelsels: inverse matrix via echelon

Als je meerdere stelsels moet oplossen met telkens *dezelfde matrix* $\mathbf{A}$ maar met telkens *verschillende rechterleden* $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots$, dan is het gemakkelijker te werken met een (uitgebreide...!) uitgebreide matrix $[\mathbf{A}|\mathbf{b_1}\ \mathbf{b_2}\ \cdots]$ waarbij je in één keer *alle* rechterleden toegevoegd. Op die manier pas je de rijoperaties die $\mathbf{A}$ in echelonvorm brengen *tegelijk* toe op alle rechterleden, en dat bespaart rekenwerk.

Voorbeeld 12.9.1. Los volgende stelsels op:

$$S_1 : \begin{cases} u + v = 4 \\ u - v = 2 \\ u - 2v = 2 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} u + v = 5 \\ u - v = 1 \\ u - 2v = -1 \end{cases} \quad \text{en} \quad S_3 : \begin{cases} u + v = 5 \\ u - v = 0 \\ u - 2v = 0 \end{cases}$$

We stellen vast dat enkel de constante termen verschillen, en maken daarom één uitgebreide matrix

$$\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ \mathbf{b_1}\quad \mathbf{b_2}\quad \mathbf{b_3}\ \right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

met echelonvorm

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 6 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Om nu de oplossingenverzamelingen van de drie stelsels af te lezen, volstaat het rechts van de verticale streep enkel rekening houden met de kolom horend bij het juiste stelsel. Om de oplossingen van stelsel S_2 te bepalen kijken we bijvoorbeeld naar de matrix:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

En analoog voor de andere stelsels. We lezen dus af dat $\mathrm{Opl}\, S_1 = \emptyset$, $\mathrm{Opl}(S_2) = \{(3,2)\}$ en $\mathrm{Opl}(S_3) = \emptyset$.

Merk op dat het niet nuttig is kolommen schoon te vegen in het deel met de rechterleden $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}, \ldots$.

Met deze methode kan je ook de *inverse berekenen* van een inverteerbare matrix. De inverse van een gegeven inverteerbare (en dus vierkante!) matrix $\mathbf{A}$ is een matrix $\mathbf{X}$ zodat

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I} \qquad \text{met } \mathbf{I} \text{ de eenheidsmatrix.}$$

Men kan bewijzen dat voor *vierkante* matrices $\mathbf{A}$ een oplossing van $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ automatisch ook voldoet aan $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$.

Omdat de i-de kolom van het matrixproduct $\mathbf{AX}$ gelijk is aan $\mathbf{A}$ maal de i-de kolom van $\mathbf{X}$, kunnen we $\mathbf{X}$ kolom per kolom bepalen door telkens het stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b_i}$ op te lossen met $\mathbf{b_i}$ de i-de kolom van de eenheidsmatrix.

De hierboven beschreven methode levert volgend algoritme voor het bepalen van de inverse matrix:

Eigenschap 12.9.1 (Berekening van de inverse matrix)**.**

Als $\mathbf{A}$ een inverteerbare matrix is, dan is de echelonvorm van de uitgebreide matrix $\left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ \mathbf{I}\ \right]$ gelijk aan

$$\left[\ \mathbf{I}\ \middle|\ \mathbf{A}^{-1}\ \right]$$

12.9 Stelsels: inverse matrix via echelon

en dit levert dus een algoritme om de *inverse matrix* $\mathbf{A}^{-1}$ van $\mathbf{A}$ te berekenen.

Als de matrix $\mathbf{A}$ een inverteerbare $n \times n$ matrix is, zijn de spilkolommen van $[\,\mathbf{A}\ \mathbf{I}\,]$ de eerste n kolommen. Zodra in één van deze kolommen geen spil kan gevonden worden is de matrix niet inverteerbaar.

Voorbeeld 12.9.2. Een matrix $\begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$ zoeken zodat

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

komt neer op het oplossen van volgende stelsels:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

We bepalen de echelonvorm van

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

en dat levert (na enkele stappen)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

De inverse van $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ is dus $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Je kan zelf verifiëren dat inderdaad

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Als $\mathbf{A}$ inverteerbaar is, dan kan de oplossing van een stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ steeds berekend worden via $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Maar in de praktijk is eerst $\mathbf{A}^{-1}$ berekenen en dan $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ meestal meer werk dan de methode van Gauss toepassen. Behalve als je voor dezelfde matrix $\mathbf{A}$ erg veel stelsels met steeds verschillende rechterleden $\mathbf{b}$ moet oplossen. Dan kan het berekenen van de inverse $\mathbf{A}^{-1}$, en dan telkens het matrixproduct $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ toch sneller zijn.

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

Module 13
Rechten en vlakken

(Versie 2024/10/24HB.16)

13.1 Intro rechten en vlakken

In de vorige module werden stelsels van lineaire vergelijkingen besproken, en dat is precies wat er nodig is om *rechten en vlakken* in de driedimensionale ruimte te beschrijven. We bespreken eerst de veel eenvoudigere situtaie in het tweedimensionale vlak, waar we rechten kunnen beschrijven door ofwel een cartesische vergelijking, ofwel een parametervergelijking. De veralgemening naar drie dimensies is enigszins subtiel:

(a) Een cartesische vergelijking $ax + by = c$ van een rechte in een vlak veralgemeent onmiddellijk tot een *cartesische vergelijking* $ax + by + cz = d$ van een *vlak* in de ruimte.

(b) Een parametervergelijking $(x, y) = (at + p, bt + q)$ van een rechte in een vlak veralgemeent onmiddellijk tot een *parametervergelijking* $(x, y, z) = (at + p, bt + q, ct + r)$ van een *rechte* in de ruimte.

(c) Een parametervergelijking van een vlak in de ruimte heeft *twee parameters* die veelvouden bepalen van twee richtingsvectoren van het vlak.

(d) Een cartesische vergelijking van een rechte in de ruimte bestaat uit een stelsel van *twee vergelijkingen*, namelijk de vergelijkingen van twee vlakken waarvan de rechte de doorsnede is.

In wat volgt hebben we de leerstof over rechten en vlakken als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Een inleidende beschouwing over vectoren en punten in het vlak, waarbij de meetkundige betekenis van vectoren wordt benadrukt.

(3) Nog een andere kijk op vectoren, namelijk als verschuivingen.

(4) Twee manieren om rechten te bepalen in het vlak: eerst met parametervergelijking, en vervolgens ook met een cartesische vergelijking.

(5) Als er twee manieren zijn om rechten te bepalen, willen we weten hoe we die in elkaar kunnen omzetten.

Vervolgens breiden we dit uit tot de driedimensionale ruimte:

(6) Eerst de eenvoudige gevallen van de parametervergelijking van een rechte en de cartesische vergelijking van een vlak.

(7) en dan de wat complexere cartesische vergelijking van een rechte

(8) en de parametervergelijking van een vlak.

(9) Ook in de ruimte willen we die vergelijkingen in elkaar kunnen omzetten,

(10) en tenslotte besteden we aandacht aan de doorsneden van rechten en vlakken.

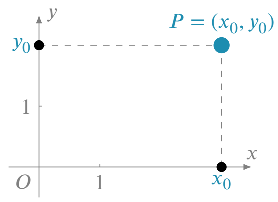
13.2 Vectoren en punten in het vlak

De verzameling koppels van reële getallen $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ kan je meetkundig beschouwen als een *vlak* waarin een x-as en een y-as zijn gekozen: het koppel (x_0, y_0) komt overeen met het punt met coördinaten x_0 en y_0 ten opzichte van deze assen. Omgekeerd kan je aan elk punt in een vlak met behulp van een assenstelsel een koppel getallen associëren. Op deze manier komen 'meetkunde doen' en 'rekenen met koppels van getallen' met elkaar overeen. Dat wordt uitgelegd in het eerste deel van volgend filmpje

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/vFcePhDXMeo

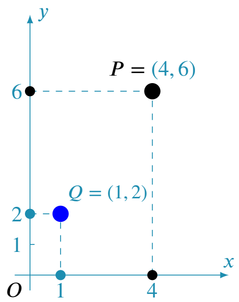
en hieronder verder uitgelegd. (Het filmpje bespreekt verder ook al de verschuivingen met vectoren)

Een punt in een verder leeg vlak

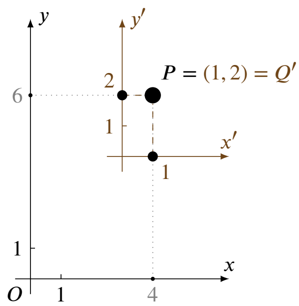


Een punt in een vlak met een assenstelsel

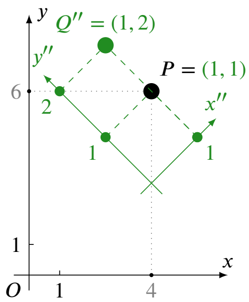
We tekenen het assenstelsel traditioneel met de x-as horizontaal naar rechts en de y-as vertikaal naar boven, maar zullen verder zien dat soms andere keuzen mogelijk en handiger zijn.
Volgende figuren tonen dat de *keuze van het assenstelsel* het verband bepaalt tussen *meetkundige punten en koppels*:
eenzelfde punt P komt overeen met *andere* koppels getallen $(4, 6), (1, 2)$ en $(1, 1)$, en
eenzelfde koppel getallen $(1, 2)$ bepaalt *andere* punten Q, Q' en Q'' in verschillende assenstelsels:



Een punt in een assenstelsel

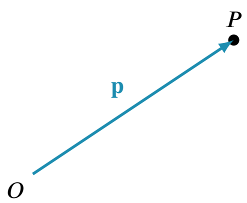


Een ander assenstelsel

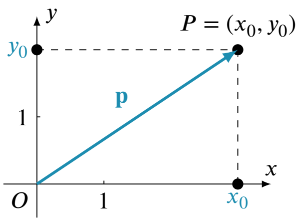


Nog een ander assenstelsel

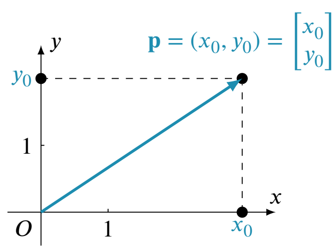
In een vlak met een assenstelsel kan je elk *punt* (x_0, y_0) van $\mathbb{R}^2$ ook beschouwen als een *vector* met beginpunt $(0, 0)$ en eindpunt (x_0, y_0). Je hebt hiervoor zelfs niet het volledige assenstelsel nodig: de oorsprong volstaat. Een vlak waarin een punt als *oorsprong* is aangeduid, noemen we een *gepunt vlak*. Om het vectorkarakter te benadrukken tekenen we een koppel (x_0, y_0) als een pijl vanuit de oorsprong naar dat punt (x_0, y_0). Dat komt bijvoorbeeld vaak voor in de fysica.



Een punt bepaalt een vector
in een gepunt vlak



Een punt bepaalt een vector
in een assenstelsel

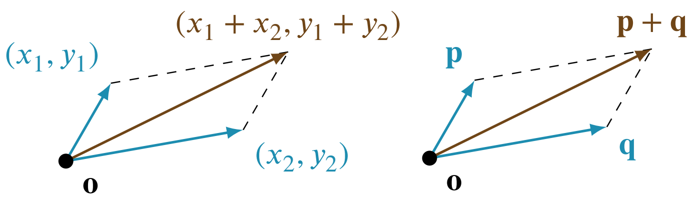


Een vector bepaalt een punt
in een assenstelsel

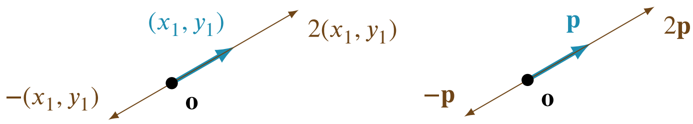
13.2 Vectoren en punten in het vlak

Merk op dat we wel degelijk gebruik maken *van de oorsprong* om met een punt een vector te associëren. We gebruiken in $\mathbb{R}^2$ de termen "koppel", "2-tal", "vector" en "punt" dikwijls als *synoniemen van elkaar*. Als we het punt-karakter willen benadrukken gebruiken we meestal hoofdletters P, Q of A, B en we gebruiken dan kleine, vette letters $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ voor de bijhorende vectoren. We noteren (de coördinaten van) een punt soms als een koppel $P = \mathbf{p} = (x_0, y_0)$, maar soms ook als een kolomvector $P = \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

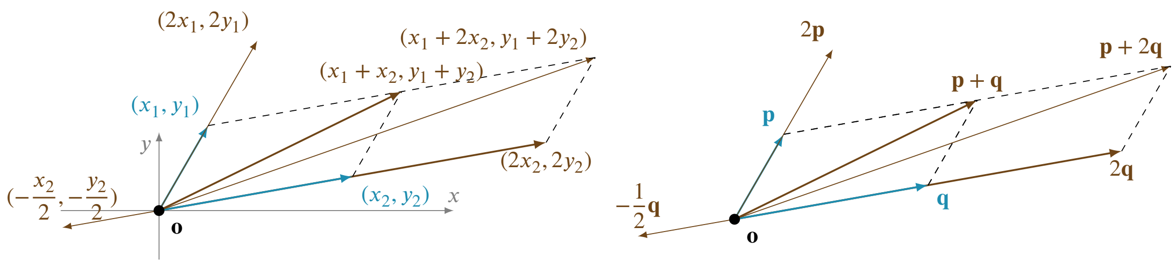
We kunnen zowel koppels als vectoren optellen, en beide operaties geven hetzelfde resultaat. De som van de vectoren $\mathbf{p} = (x_1, y_1)$ en $\mathbf{q} = (x_2, y_2)$ is de vector $\mathbf{p} + \mathbf{q} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ die ook wordt bekomen via de zogenaamde parallellogramregel:



De veelvouden $r\mathbf{p} = r(a, b) = (ra, rb)$ van een vector $\mathbf{p} = (a, b)$ met $(a, b) \neq (0, 0)$) zijn meetkundig *herschalingen* van $\mathbf{p}$, en liggen allemaal op de rechte door $(0, 0)$ en $\mathbf{p}$. Als we *alle* herschalingen $r\mathbf{p}$ beschouwen (met zowel positieve als negatieve r), krijgen we *de rechte* door de punten $\mathbf{O}$ en $\mathbf{p}$.



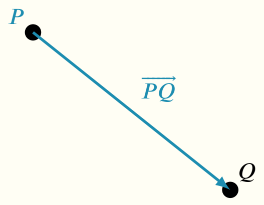
Een *lineaire combinatie* van de twee vectoren $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ is een *som van veelvouden* van $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$, dus een vector van de vorm $r\mathbf{p} + s\mathbf{q}$, mer $r, s \in \mathbb{R}$. We kunnen *alle* vectoren van het vlak schrijven als een lineaire combinatie van twee willekeurige $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$, *tenzij* $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ op dezelfde rechte liggen door de oorsprong.



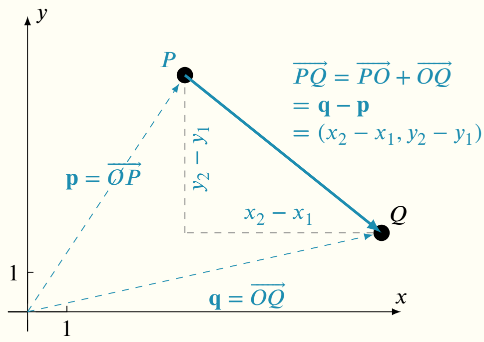
> **Opmerking 13.2.1.** Dit verband tussen punten en vectoren veralgemeent onmiddellijk in de driedimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$, en het geldt ook in willekeurige dimensies $\mathbb{R}^n$.

> **Opmerking 13.2.2.** Met twee punten P en Q kan je ook de vector met beginpunt P en eindpunt Q associëren. Dit aspect wordt bij verschuivingen uitgebreider behandeld.

13.2 Vectoren en punten in het vlak



Twee punten P en Q bepalen een vector $\overrightarrow{PQ}$ in een vlak

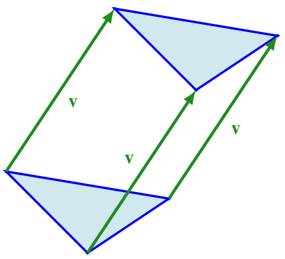


Twee punten P en Q bepalen *drie* vectoren $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{OQ}$ en $\overrightarrow{PQ}$ in een vlak

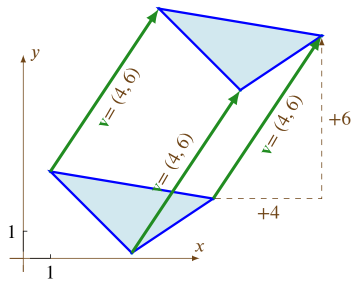
13.3 Vectoren en verschuivingen in het vlak

Vectoren zijn bijzonder nuttig bij het bestuderen van *verschuivingen* in het vlak. Dat wordt uitgelegd in het vervolg van vorig filmpje

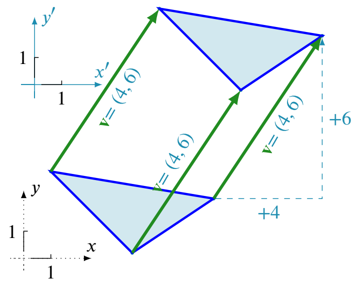
YouTube link: https://www.youtube.com/embed/vFcePhDXMeo?start=50&



Een verschuiving van een driehoek



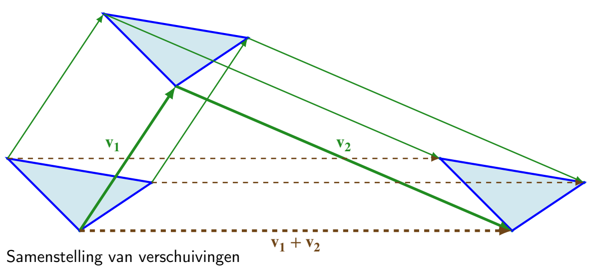
Een verschuiving van een driehoek in een assenstelsel



Een verschuiving van een driehoek in een verschoven assenstelsel

Een *vector* geeft hier aan hoe een figuur wordt *verschoven*. In de linkse figuur wordt de verschuiving van de driehoek aangeduid door de drie groene pijlen $\mathbf{v}$. In de tweede figuur is er een assenstelsel gekozen, en dan kunnen we met de vector $\mathbf{v}$ een koppel getallen associëren, namelijk hoeveel eenheden er wordt verschoven in de x-richting, in dit geval 4 eenheden, en hoeveel eenheden in de y-richting, in dit geval 6 eenheden. Alle groene pijlen hebben dezelfde componenten, en in elk ander assenstelsel met evenwijdige assen en dezelfde schaal behoudt de vector $\mathbf{v}$ dezelfde componenten. Als vectoren gebruikt worden voor verschuivingen noemen we ze soms **vrije vectoren**. We zeggen ook dat een vector dan de **stap** aanduidt waarover iets wordt verschoven of verplaatst. Als vectoren gebruikt worden om punten aan te duiden spreken we over **gebonden vectoren**. Verder zal blijken dat dit onderscheid afhankelijk van de concrete context al dan niet belangrijk is.

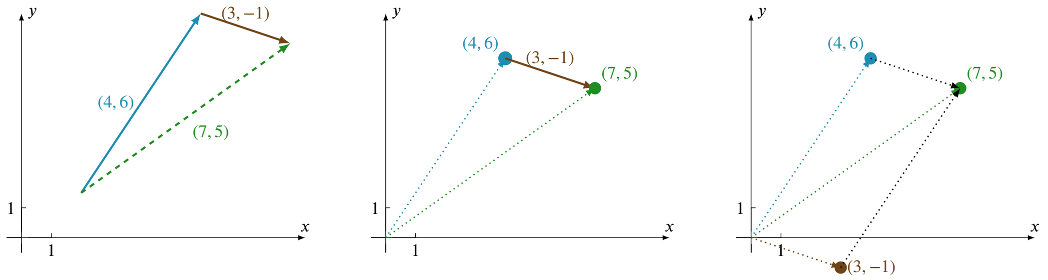
Je kan meerdere verschuivingen na elkaar uitvoeren. Dat heet wiskundig het *samenstellen* van de verschuivingen, en komt overeen met het *optellen* van de vectoren:



Samenstelling van verschuivingen

We kunnen het optellen van vectoren op verschillende manieren interpreteren, naargelang een vector een punt dan wel een stap of verschuiving voorstelt. Het daarbij steeds om *dezelfde* optelling, enkel de interpretatie en de bijhorende tekening verschilt telkens.

13.3 Vectoren en verschuivingen in het vlak



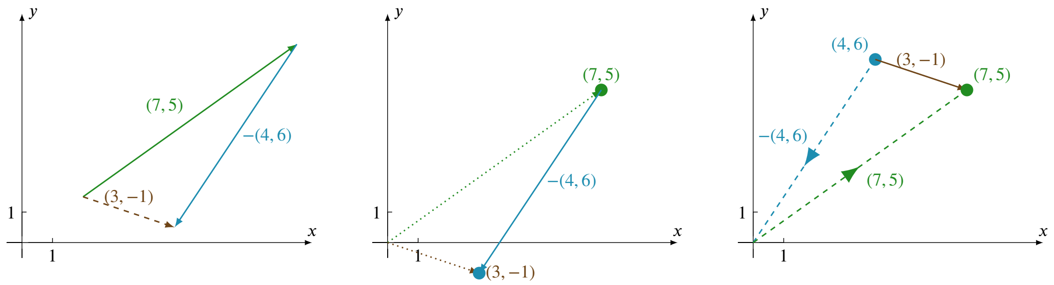
$\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+3\\6+(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+3\\6+(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+3\\6+(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$
stap + *stap* = *stap*	*punt* + *stap* = *punt*	*punt* + *punt* = *punt*

Deze interpretaties kunnen worden samengevat in volgende eigenschap:

Eigenschap 13.3.1. De som $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ van vectoren kan op volgende equivalente manieren begrepen worden als:

- het samenstellen van twee verschuivingen, eerst over een afstand $\mathbf{p}$ en dan over $\mathbf{q}$
- het verschuiven van het punt $\mathbf{p}$ over een afstand $\mathbf{q}$
- het optellen van koppels $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ component per component
- het optellen van punten of vectoren $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ via de parallellogramregel

Het *verschil* van vectoren is per definitie de optelling met de tegengestelde vector, maar is meetkundig ook op verschillende manieren te begrijpen:



$\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$
stap − *stap* = *stap*	*punt* − *stap* = *punt*	*punt* − *punt* = *STAP*

Eigenschap 13.3.2.

Het verschil $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ van vectoren kan op volgende equivalente manieren begrepen worden als:

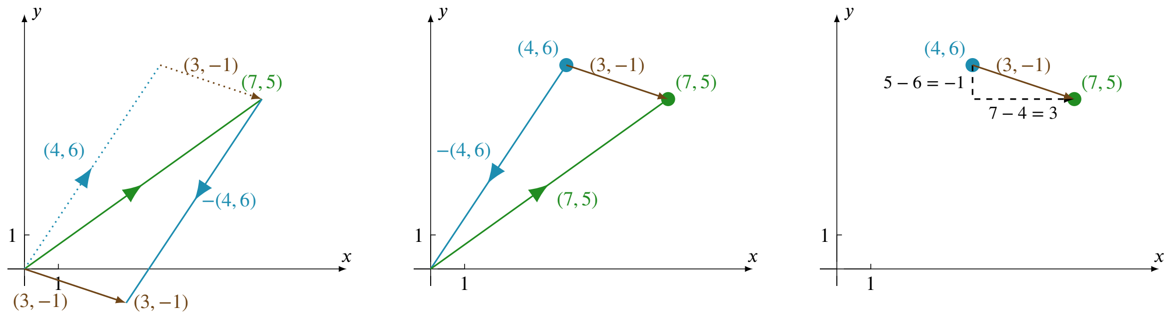
- het samenstellen van twee verschuivingen, eerst over een afstand $\mathbf{p}$ en dan over $-\mathbf{q}$
- het verschuiven van het punt $\mathbf{p}$ over een afstand $-\mathbf{q}$
- het verschil van koppels $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ component per component
- de verschuiving om van het punt $\mathbf{q}$ naar het punt $\mathbf{p}$ te gaan

Vooral de laatste karakterisering is erg belangrijk. Je kan ze begrijpen als 'het verschil tussen twee punten

13.3 Vectoren en verschuivingen in het vlak

P en Q is de vector om van Q naar P te gaan'. Dat is volledig analoog met het verschil v tussen twee getallen a en b: $a - b = v$ betekent dat v het getal is dat je bij het tweede getal b moet bijtellen om het eerste getal a te bekomen: $a - b = v \iff a = b + v$.
Het $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{v}$ betekent precies dat $\mathbf{v}$ de vector is die je nodig hebt om van de tweede term $\mathbf{q}$ naar de eerste term $\mathbf{p}$ te gaan: $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{v} \iff \mathbf{p} = \mathbf{q} + \mathbf{v}$.

Het verschil tussen 6 en 4 is 2, en 2 is precies wat nodig is om van de tweede term 4 de eerste term 6 te maken: $6 - 4 = 2 \iff 4 + 2 = 6$.
Het verschil tussen $\mathbf{p} = (7,5)$ en $\mathbf{q} = (4,6)$ is $\mathbf{p} - \mathbf{q} = (3,-1)$, en $(3,-1)$ is precies wat je nodig hebt om van de tweede term $\mathbf{q} = (4,6)$ naar de eerste term $\mathbf{p} = (7,5)$ te gaan.



$$\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7-4\\5-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

stap − *stap* = *stap*   −*stap* + *stap* = *stap*   *punt* − *punt* = *stap*

De laatste tekening wordt algebraïsch eenvoudiger met de notatie $\overrightarrow{PQ}$ voor de (gebonden) vector met beginpunt P en eindpunt Q, en de afkorting $\overrightarrow{P}$ voor de vector $\overrightarrow{OP}$. Met deze notatie wordt de optelling

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} \text{ en } \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$$

en dan volgt uit

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$$

volgende belangrijke eigenschap:

Eigenschap 13.3.3 (Verband gebonden en ongebonden vectoren). Voor punten P en Q in het vlak geldt:

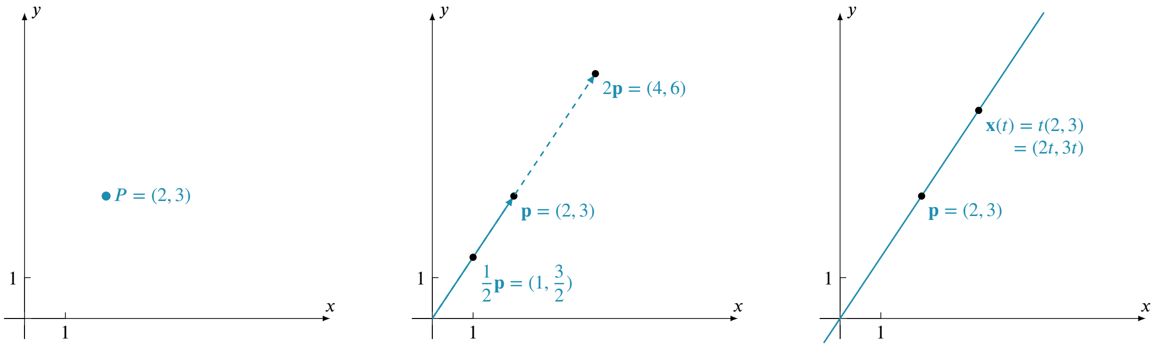
$$\boxed{\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}}$$

of met een alternatieve notatie:

$$\boxed{\overrightarrow{pq} = \vec{q} - \vec{p} = \mathbf{q} - \mathbf{p}}$$

13.4 Parametervergelijking van een rechte

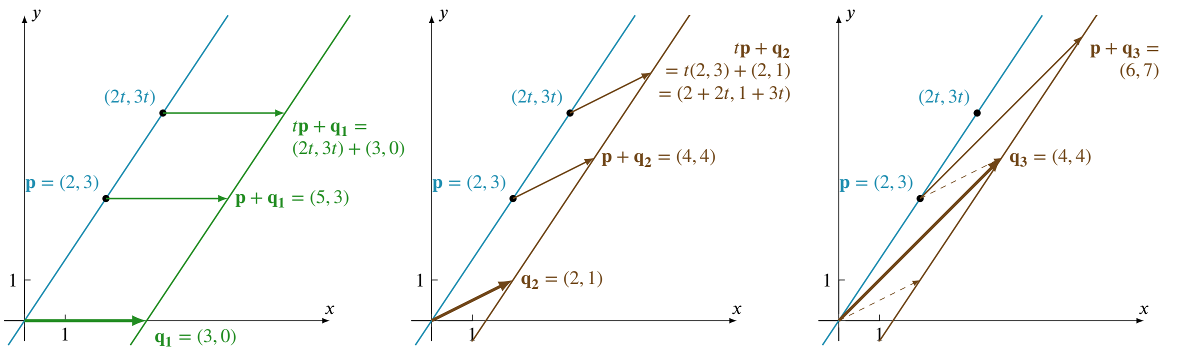
Alle veelvouden van een vector vormen een rechte door de oorsprong:



$P = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, 2\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \dots$ $\quad$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ of $(x,y) = t(2,3)$ of $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Alle punten van de rechte door $(0,0)$ en door het punt $P(x_1, y_1)$ zijn van de vorm $t(x_1, y_1)$, of dus (tx_1, ty_1), met t een willekeurig reëel getal.
Merk op dat deze rechte samenvalt met de rechte door $(2x_1, 2y_1)$ of meer algemeen door (kx_1, ky_1), met $k \in \mathbb{R}_0$.

Door een dergelijke rechte te verschuiven bekomen we *evenwijdige rechten*:

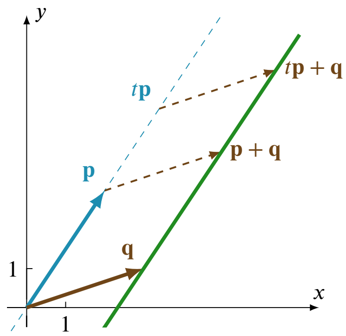


$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

Merk op dat verschuiven over $\mathbf{q_2} = (2,1)$ of verschuiven over $\mathbf{q_3} = (4,4)$ hier *dezelfde* rechte oplevert.

Als de parameter loopt doorheen de reële getallen bekom je *alle punten van een rechte* die door een punt $\mathbf{q}$ gaat en evenwijdig is met een vector $\mathbf{p}$. Op onderstaande tekening is de groene rechte de verschuiving van de blauwe rechte over een afstand $\mathbf{q}$ maar ook de som van alle herschalingen van $\mathbf{p}$ en het punt $\mathbf{q}$:

13.4 Parametervergelijking van een rechte



Definitie 13.4.1 (Parametervergelijkingen van een rechte).

Een **parametervergelijking** van een rechte met **richtingsvector** $\mathbf{p} = (x_1, y_1)$, **positievector** $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ en parameter t is een uitdrukking van de vorm

$$L \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

die we ook kunnen schrijven als

$$L \leftrightarrow \begin{cases} x = tx_1 + q_x \\ y = ty_1 + q_y \end{cases} \quad \text{met } t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow (x, y) = t(x_1, y_1) + (q_x, q_y), \quad \text{met } t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow (x, y) = (tx_1 + q_x, ty_1 + q_y), \quad \text{met } t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow \mathbf{x} = t\mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad \text{met } t \in \mathbb{R}$$

Deze rechte *bevat* de positievector $\mathbf{q}$ en is *evenwijdig* met de richtingsvector $\mathbf{p}$.

Deze rechte is de *verschuiving* van de rechte bepaald door de richtingsvector $\mathbf{p}$ over de positievector $\mathbf{q}$.

Deze rechte is de positievector $\mathbf{q}$ waarbij willekeurige veelvouden van de richtingsvector $\mathbf{p}$ zijn opgeteld.

De **richtingscoëfficiënt** m is de y-coördinaat van de richtingsvector met x-coördinaat 1, en geeft dus aan hoeveel de rechte stijgt of daalt als je één eenheid naar rechts gaat:

$$m = \frac{y_1}{x_1} \text{ want } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ is evenwijdig met } \begin{bmatrix} 1 \\ y_1/x_1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 13.4.1.

De rechte door de oorsprong en het punt $(2, 3)$ heeft als parametervergelijking $L_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

De rechte door $(2, 3)$ evenwijdig met de x-as heeft als parametervergelijking $L_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$, wat ook geschreven kan worden als $L_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

13.4 Parametervergelijking van een rechte

De rechte door $(3,4)$ evenwijdig met L_1 heeft als parametervergelijking $L_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 3t+4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

Opmerking 13.4.1.

- Parametervergelijkingen zijn niet uniek bepaald, een rechte heeft erg veel verschillende parametervergelijkingen:

$$\begin{aligned} L \quad &\leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 3t+4 \end{cases} \quad \leftrightarrow \begin{cases} x = 4t+3 \\ y = 6t+4 \end{cases} \quad \leftrightarrow \begin{cases} x = 20t+3 \\ y = 30t+4 \end{cases} \\ &\leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+5 \\ y = 3t+7 \end{cases} \quad \leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+23 \\ y = 3t+34 \end{cases} \end{aligned}$$

  Inderdaad, de richtingsvector vermenigvuldigen met een getal verschillend van nul, of bij de positievector een willekeurig veelvoud optellen van de richtingsvector verandert de rechte niet.

- Om na te gaan of twee parametervergelijkingen al dan niet dezelfde rechte bepalen, gebruik je de eigenschap dat twee rechten gelijk zijn ofwel zodra ze *twee* punten gemeenschappelijk hebben, ofwel zodra ze één gemeenschappelijk punt en dezelfde richting hebben. Twee rechten zijn evenwijdig als ze *geen* gemeenschappelijke punten hebben.

- Als $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ twee punten zijn van een rechte, dan zijn $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ en $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ beide richtingsvectoren.

- Een parametervergelijking *genereert* punten van een rechte: elke waarde van de parameter levert onmiddellijk een punt op van de rechte, en elk punt van de rechte wordt ook bereikt voor een bepaalde parameterwaarde. Maar, als je van een willekeurig punt van het vlak wil weten of het tot de rechte behoort dan moet je nagaan of er een parameter bestaat waarvoor dat punt bereikt wordt, en dat vraagt meestal rekenwerk, namelijk het oplossen van een stelsel. Merk op dat dit voor de cartesische vergelijkingen precies omgekeerd is: nagaan of een punt tot de rechte behoort is dan eenvoudig, want je moet gewoon de coördinaten invullen. Maar, alle punten van de rechte vinden komt dan neer op het oplossen van een stelsel!

- Parametervergelijkingen van rechten in de ruimte $\mathbb{R}^3$ zijn volledig gelijkaardig: er is enkel een extra coördinaat.

Oefening 13.4.1. Geef een parametervergelijking van volgende rechten:

1. door $(-1,-2)$ en evenwijdig met de vector $(7,8)$

2. door $(-1,-2)$ en evenwijdig met de vector $(7,7)$

3. door $(-1,-2)$ en $(7,8)$

Oefening 13.4.2. Geef telkens drie punten en een richtingsvector van volgende rechten:

1. $L \leftrightarrow \begin{cases} x = 7t-1 \\ y = 8t-2 \end{cases}$

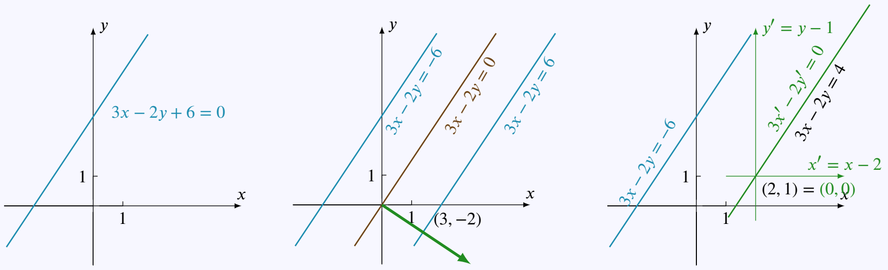
2. $L \leftrightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = 8t-2 \end{cases}$

3. $L \leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 8t-2 \end{cases}$

13.5 2D: Cartesiaanse vergelijkingen

Een lineaire vergelijking in x en y bepaalt een rechte in het vlak.

Voorbeeld 13.5.1. Bestudeer de vergelijking $3x-2y+6=0$. Wie dit voorbeeld onmiddellijk begrijpt, kan het hoofdstukje over cartesiaanse vergelijkingen overslaan.



We kunnen over de vergelijking $3x-2y+6=0$ het volgende opmerken:

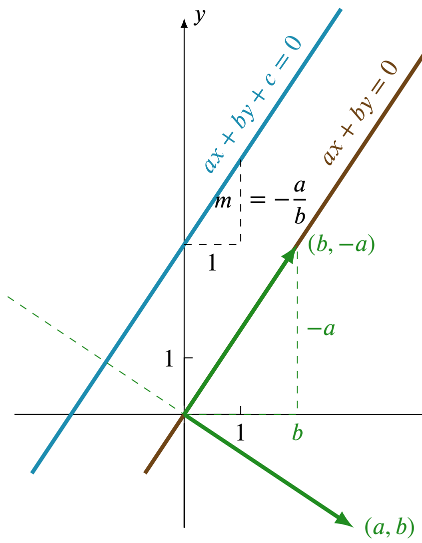
- door $x=0$ resp. $y=0$ te kiezen vinden we onmiddellijk twee punten van de rechte: $(0,-3)$ en $(2,0)$. Daarmee is de rechte al volledig bepaald.
- door de vergelijking te herschrijven als $y=\dfrac{3x+6}{2}$ vinden we *voor elke* x een bijhorende y. Op deze manier is de rechte de grafiek van de (lineaire) functie $x\mapsto\dfrac{3x+6}{2}$.
- door de vergelijking te herschrijven als $x=\dfrac{2y-6}{3}$ vinden we *voor elke* y een bijhorende x.
- liefhebbers van *stelsels* kunnen de vergelijking beschouwen als een stelsel van één vergelijking in twee onbekenden. Er is dan één hoofdonbekende, en één nevenonbekende, en de oplossingen van het stelsel zijn

$$\begin{cases} x=t \\ y=\frac{3}{2}t+3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad \text{of ook} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2}t-2 \\ y=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

  Dit blijken precies de parametervergelijkingen te zijn van de rechte met vergelijking $3x-2y+6=0$.
- de vergelijking $3x-2y+6=0$ is een *voorwaarde* op koppels (x,y). De koppels die voldoen vormen een rechte in het vlak.
- de vergelijking $3x-2y+7=0$ is een *evenwijdige rechte* (want als $3x-2y=-6$, dan kan natuurlijk niet ook $3x-2y=-7$). Dus, de rechten $2x-2y+a=0$ zijn allemaal onderling evenwijdig voor verschillende $a\in\mathbb{R}$. En dergelijke rechte gaat door de oorsprong precies als $a=0$.
- om a te vinden zodat de evenwijdige $3x-2y=a$ door het punt $(2,1)$ gaat volstaat het te eisen dat $(2,1)$ op $3x-2y=a$ ligt, dus dat $3(2)-2(1)=a$. Je vindt dan direct $a=6-2=4$. Een alternatieve manier is om het xy-assenstelsel te verschuiven over de vector $(2,1)$ via $(x',y')=(x-2,y-1)$, en op te merken dat de rechte in $x'y'$-coördinaten door de oorsprong gaat, dus van de vorm $3x'-2y'=0$ moet zijn. Dus moet $3(x-2)-2(y-1)=0$, of $3x-2y-6+2=0$ waaruit ook volgt dat $a=4$.
- liefhebbers van het *scalair product* kunnen opmerken dat $3x+2y=0$ ook kan geschreven worden als $(2,3)\cdot(x,y)=0$, en bijgevolg vaststellen dat de vector $(2,3)$ loodrecht staat op de rechte met vergelijking $3x-2y=0$.

13.5 2D: Cartesiaanse vergelijkingen

- liefhebbers van *analogieën* kunnen opmerken dat de rechte met vergelijking $3x - 2y + 6 = 0$ min of meer *bepaald wordt door de drie getallen* $3, -2, 6$. In de negentiende eeuw hebben wiskundigen haakjes rond die getallen gezet en opgemerkt dat je dergelijk drietal $(3, -2, 6)$ misschien kan beschouwen als *coördinaten van een rechte*, net zoals $(2, 3)$ *coördinaten* zijn van een punt. Dat leidt tot de bijzonder interessante zogenaamde projectieve meetkunde, die we hier echter niet verder zullen behandelen.



Definitie 13.5.1 (Cartesiaanse vergelijkingen van een rechte).

Een **cartesiaanse vergelijking** van een rechte is een uitdrukking van de vorm

$$\boxed{ax + by + c = 0} \quad (\text{ of ook } ax + by = d)$$

met a en b niet beide nul, en waarbij een punt (x_0, y_0) op de rechte ligt als en slechts als $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Als $b \neq 0$ kan dergelijke vergelijking na delen door b ook worden geschreven in de vorm

$$\boxed{y = mx + q}$$

We noemen $m = -\frac{a}{b}$ de **richtingscoëfficiënt** van de rechte.
De richtingscoëfficiënt geeft de stijging of daling van de rechte aan als x met één eenheid toeneemt.

Eigenschap 13.5.1. Voor de rechte met vergelijking $ax + by + c = 0$ geldt:

$a = 0$	$\iff$	de rechte is evenwijdig met de x-as	$\iff$	$y = k$
$b = 0$	$\iff$	de rechte is evenwijdig met de y-as	$\iff$	$x = k$
$c = 0$	$\iff$	de rechte gaat door de oorsprong	$\iff$	$ax + by = 0$ of $y = kx$ of $x = k'y$

Eigenschap 13.5.2 (Evenwijdigheid en loodrechte stand).

- Alle rechten $ax + by = k$, $k \in \mathbb{R}$ zijn onderling *evenwijdig*
  en hoe groter k, hoe verder de rechte verwijderd is van de oorsprong.
- De rechte $ax + by + c = 0$ staat *loodrecht* op de vector (a, b)

want $ax + by = (a, b) \cdot (x, y) = 0 \iff (a, b) \perp (x, y)$).

Bij volgende eigenschap volgt elk aspect telkens uit het voorgaande. Behalve het laatste, maar dat is evident.

Eigenschap 13.5.3 (Vergelijking van een rechte).

- De rechte door de oorsprong en punt (x_1, y_1) heeft vergelijking

$$y_1 x - x_1 y = 0 \quad \text{of dus} \quad y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x \quad \text{of } \boxed{y = mx}$$

met $m = \dfrac{y_1}{x_1}$ de richtingscoëfficient.

- De rechte door punt (x_1, y_1) met richtingscoëfficiënt m heeft (wegens verschuiving van voorgaande) vergelijking

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

- De rechte door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) heeft als richting het verschil tussen beide punten, en dus als richtingscoëfficiënt

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left(= \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} \right),$$

en dus als vergelijking

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)}$$

- De rechte die de x-as snijdt in $(a, 0)$ en de y-as in $(0, b)$ (met a en b beide verschillend van 0) heeft vergelijking

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

want beide punten $(a, 0)$ en $(0, b)$ voldoen duidelijk aan de vergelijking.

Enkel wie over een echt goed geheugen beschikt met bovendien voldoende vrije capaciteit die toch niet voor meer nuttige dingen kan gebruik worden, ofwel wie heel erg fan is van cartesiaanse vergelijkingen moet bovenstaande formules proberen onthouden en van buiten leren. Voor al de anderen volstaat het volgende voorbeelden en oefeningen met de nodige aandacht te maken, en ze zullen de formules sneller kunnen reconstrueren zodra ze ze ergens nodig hebben dan dat de anderen ze zich kunnen herinneren.

Voorbeeld 13.5.2. Geef de vergelijking van volgende rechten:

1. door de oorsprong en $(3, 6)$: $\boxed{y = 2x\checkmark}$

2. door $(0, 1)$ en $(3, 7)$: $\boxed{y = 2x + 1\checkmark}$

3. door de oorsprong en $(-1, -2)$: $\boxed{y = 2x\checkmark}$

4. door $(0, 0)$ en $(-1, -1)$: $\boxed{x = y\checkmark}$

5. door $(0, 0)$ en $(-1, -2)$: $\boxed{y = 2x\checkmark}$

13.5 2D: Cartesiaanse vergelijkingen

6. door $(0,1)$ en $(-1,-1)$: $\boxed{y = 2x + 1✓}$

7. door $(1,2)$ en $(-1,-2)$: $\boxed{y = 2x✓}$

Oefening 13.5.1. Teken de rechten met volgende vergelijkingen:

1. $y = 3x + 2$

2. $y = 2x + 3$

3. $y = -3x$

4. $y = -2x + 3$

Duidt telkens de snijpunten aan met de assen en de richtingscoëfficiënten.

Oefening 13.5.2. Geef de vergelijking van volgende rechten:

1. door de oorsprong en $(3,6)$

2. door de $(0,1)$ en $(3,7)$

3. door de oorsprong en $(-1,-2)$

4. door de $(0,0)$ en $(-1,-1)$

5. door de $(0,0)$ en $(-1,-2)$

6. door de $(0,1)$ en $(-1,-1)$

7. door de $(1,2)$ en $(-1,-2)$

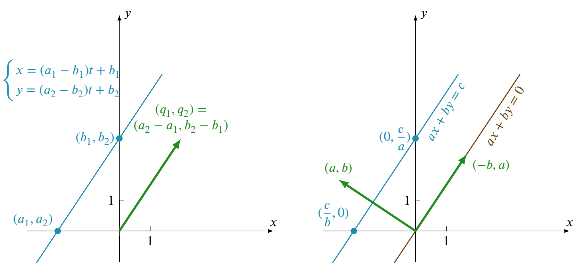
13.6 2D: omzetten van vergelijkingen

Een rechte in het vlak wordt bepaald door twee punten, één punt en een richting, een parametervergelijking of een cartesiaanse vergelijking. Het is nuttig vlot te kunnen overschakelen tussen deze voorstellingen.

Eigenschap 13.6.1. Eigenschappen en alternatieve karakteriseringen van rechten gegeven door:

punten (a_1, a_2) en (b_1, b_2)	richtingsvector	$(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$
	parametervergelijking	$\begin{cases} x = (a_1 - b_1)t + b_1 \\ y = (a_2 - b_2)t + b_2 \end{cases}$
	cartesiaanse vergelijking	$y - a_2 = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1)$
punt (a_1, a_2) en richting (q_1, q_2)	punten	(a_1, a_2) en $(a_1 + q_1, a_2 + q_2)$
	parametervergelijking	$\begin{cases} x = q_1 t + a_1 \\ y = q_2 t + a_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
	cartesiaanse vergelijking	$y - a_2 = \dfrac{q_2}{q_1}(x - a_1)$
vergelijking $\begin{cases} x = q_1 t + a_1 \\ y = q_2 t + a_2 \end{cases}$	punten	(a_1, a_2) en $(a_1 + q_1, a_2 + q_2)$
	richtingsvector	(q_1, q_2)
	cartesiaanse vergelijking	$y - a_2 = \dfrac{q_2}{q_1}(x - a_1)$
vergelijking $ax + by = c$	punten	$(0, \frac{c}{b})$ en $(\frac{c}{a}, 0)$
	loodrichting	(a, b)
	richtingsvector	$(-b, a)$
	parametervergelijking	$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{a}{b}t + \frac{c}{b} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

(Op de volgende bladzijde vind je *hetzelfde* schema met uitleg)



13.6 2D: omzetten van vergelijkingen

punten (a_1, a_2) en (b_1, b_2)

richtingsvector $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

verschil van twee punten; ook $k(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ zijn richtingsvectoren

parametervergelijking $\begin{cases} x = (a_1 - b_1)t + b_1 \\ y = (a_2 - b_2)t + b_2 \end{cases}$

via 'punt + parameter maal richting'; ook $\begin{cases} x = (a_1 - b_1)t + a_1 \\ y = (a_2 - b_2)t + a_2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = (b_1 - a_1)t + a_1 \\ y = (b_2 - a_2)t + a_2 \end{cases}$ en $\begin{cases} x = a_1 t + (1-t)b_1 \\ y = a_2 t + (1-t)b_2 \end{cases}$
zijn parametervergelijkingen van dezelfde rechte

cartesiaanse vergelijking $y - a_2 = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1)$

via formule 'rechte door twee punten', of eenvoudiger via
de rechte met helling $m = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ is $y = mx$, en omdat de rechte door (a_1, a_2) moet gaan passen we de verschuiving $(x, y) \mapsto (x - a_1, y - a_2)$ toe.
Ook $(b_2 - a_2)(x - a_1) - (b_1 - a_1)(y - a_2) = 0$
en $(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y = (b_2 - a_2)a_1 + (b_1 - a_1)a_2$
zijn cartesiaanse vergelijkingen van dezelfde rechte.

punt (a_1, a_2) en richting (q_1, q_2)

punten (a_1, a_2) en $(a_1 + q_1, a_2 + q_2)$

alle $(a + kp, b + kq)$ liggen op de rechte, met $k \in \mathbb{R}$

parametervergelijking $\begin{cases} x = q_1 t + a_1 \\ y = q_2 t + a_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

via 'punt + parameter maal richting'

cartesiaanse vergelijking $y - a_2 = \dfrac{q_2}{q_1}(x - a_1)$

$\dfrac{q_2}{q_1}$ is de helling, dan verschuiven over (a_1, a_2);
kan via uitwerken in de vorm $ax + by = c$ worden geschreven.

vergelijking $\begin{cases} x = q_1 t + a_1 \\ y = q_2 t + a_2 \end{cases}$

punten (a_1, a_2) en $(a_1 + q_1, a_2 + q_2)$

elke waarde van ty levert een punt op

richtingsvector (q_1, q_2)

via aflezen uit de parametervergelijkingen in standaard vorm

cartesiaanse vergelijking $y - a_2 = \dfrac{q_2}{q_1}(x - a_1)$

ofwel via 'eliminatie van t': bereken uit de eerste vergelijking $t = \dfrac{1}{q_1}(x - a_1)$, en substitueer dat in de tweede vergelijking; ofwel via de formule voor 'punt+richting gegeven', of zelfs voor 'twee punten gegeven'.

vergelijking $ax + by = c$

punten $(0, \dfrac{c}{b})$ en $(\dfrac{c}{a}, 0)$

via invullen $x = 0$, en daarna $y = 0$

loodrichting (a, b)

via aflezen: $ax + by = 0 \iff (a, b) \cdot (x, y) = 0 \iff (a, b) \perp (x, y)$

richtingsvector $(-b, a)$

omdat $(-b, a)$ loofdrecht staat op (a, b) (wegens kwartdraai is $(x, y) \mapsto (-y, x)$)

parametervergelijking $\begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{a}{b}t + \dfrac{c}{b} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

via 'kies $x = t$ en bereken y uit $ax + by = c$'

ook $\begin{cases} x = -\dfrac{b}{a}t + \dfrac{c}{a} \\ y = t \end{cases}$ is een parametervergelijking van dezelfde rechte.

Opmerking 13.6.1. Opmerkingen over cartesiaanse- en parametervergelijkingen in het vlak:

- parametervergelijkingen *genereren* punten: elke waarde van de parameter levert een punt van de rechte. Een bepaald punt (x, y) ligt op de rechte ligt als er een parameter bestaat die precies dat punt (x, y) geeft. Het vinden van die parameter komt neer op het oplossen van een stelsel van twee vergelijkingen in één onbekende t, met parameters x en y. De oplossingsvoorwaarde voor dat stelsel is precies de cartesiaanse vergelijking. Merk op dat deze techniek de rol van 'parameters' en 'onbekenden' omkeert!

- cartesiaanse vergelijkingen leggen voorwaarden op aan punten: een bepaald punt (x, y) ligt op de rechte als het voldoet aan de vergelijking. Om alle punten te vinden, moet je de éne vergelijking in twee onbekenden oplossen, en die oplossing is precies de parametervergelijking van die rechte.
- dezelfde dualiteit tussen 'genereren' en 'beperken' vind je ook terug in andere contexten: de verzameling van de even natuurlijke getallen kan je schrijven als

$\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$	genereren, met parameter n
$\{n \mid \exists m \in \mathbb{N} : 2m = n\}$	beperken, met oplosbaarheidvoorwaarde voor vergelijking $2x = n$

- omzetten van cartesiaans naar parameter is 'oplossen van een (stelsel van) vergelijkingen'
- omzetten van parameter naar cartesiaans is 'parameter elimineren', of dus het opstellen van een oplosbaarheidsvoorwaarde voor een stelsel.
- een parametervergelijking $\mathbf{x} = \mathbf{q}t + \mathbf{p}$ bevat een **richtvector** $\mathbf{q}$.
- een cartesiaanse vergelijking $ax + by = c$ bevat een **loodvector** (a, b).
- in het vlak is het erg eenvoudig een loodvector te vinden: $(a, b) \perp (-b, a)$.
- de rechte door de oorsprong en
  - met richting $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ bestaat uit de veelvouden van $\mathbf{q}$, en heeft dus parametervergelijking
    $$(x, y) = t(q_1, q_1)$$
    Dit betekent $x = tq_1$ en $y = tq_2$, en door $x = tq_1 \iff t = \dfrac{x}{q_1}$ in te vullen in $y = tq_2$ bekomen we de cartesiaanse vergelijking
    $$y = \frac{x}{q_1}q_2 \text{ of } y = \frac{q_2}{q_1}x \text{ of } q_1 y = q_2 x \text{ of } q_2 x - q_1 y = 0\text{of } (q_2, -q_1)\cdot(x, y) = 0 \text{ of } (-q_2, q_1) \perp (x, y)$$
  - loodrecht op de vector $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ heeft als cartesiaanse vergelijking
    $$(q_1, q_2)\ cdot(x, y) = 0 \text{ of } q_1 x + q_2 y = 0$$
    Deze vergelijking oplossen betekent voor een willekeurige $x = t$ de bijhorende y te vinden. Als $q_1 x + q_2 y = 0$ en $x = t$, dan moet $y = -\dfrac{q_1}{q2}t$ en dus bekomen we de parametervergelijking
    $$(x, y) = (t, -\frac{q_1}{q2}t)$$
    Als $q_2 \neq 0$ krijg je equivalente maar eenvoudigere formules door de keuze $x = q_2 t$:
    $$(x, y) = (q_2 t, -q_1 t)$$
- met de formule $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ van een 2×2 determinant kunnen we ook schrijven:

$$\text{rechte loodrecht op } (a, b) : \quad (a, b) \cdot (x, y) = 0 \quad \text{of} \quad ax + by = 0 \quad \text{of} \quad \begin{vmatrix} x & y \\ -b & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{rechte met richting } (a, b) : \quad (-b, a) \cdot (x, y) = 0 \quad \text{of} \quad -bx + ay = 0 \quad \text{of} \quad \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

13.6 2D: omzetten van vergelijkingen

- in het vlak gelden dus volgende eigenschappen van evenwijdigheid en loofrechte stand:

$$\begin{aligned} (a,b)\cdot(c,d) = 0 &\iff (a,b)\perp(c,d) \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 &\iff (a,b)\parallel(c,d) \end{aligned}$$

Opmerking 13.6.2. We zullen deze vergelijkingen verder veralgemenen naar de driedimensionale ruimte. In de driedimensionale ruimte zijn niet alleen rechten van belang, maar ook *vlakken*. We bouwen in wat volgt deze theorie stap voor stap op, maar merken hier als inleiding en voorsmaakje al het volgende op:

- de parametervergelijking van een rechte in het vlak veralgemeent onmiddellijk naar een parametervergelijking van een rechte in de ruimte:

  rechte in het vlak: $(x, y) = (q_1, q_2)t + (p_1, p_2)$
  rechte in de ruimte: $(x, y, z) = (q_1, q_2, q_3)t + (p_1, p_2, p_3)$

- een cartesiaanse vergelijking van een rechte in het vlak veralgemeent onmiddellijk naar een cartesiaanse vergelijking van een **vlak** in de ruimte:

  rechte in het vlak: $ax + by = c$
  vlak in de ruimte: $ax + by + cd = d$

- een parametervergelijking van een vlak heeft **twee parameters**:

  vlak in de ruimte: $(x, y, z) = (q_1, q_2, q_3)t + (r_1, r_2, r_3)s + (p_1, p_2, p_3)$

- een cartesiaanse vergelijking van een rechte in de ruimte is een stelsel van **twee vergelijkingen**:

  rechte in de ruimte: $\begin{cases} ax + by + cz = g \\ dx + ey + fz = h \end{cases}$

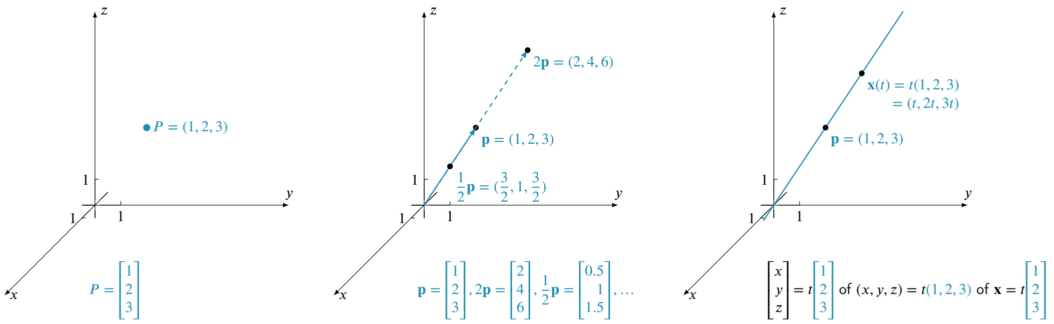
Dus parametervergelijkingen van rechten en cartesiaanse vergelijkingen van vlakken zijn eenvoudig, voor parametervergelijkingen van vlakken is er een complicatie dat er meer dan één parameter is, en vooral voor cartesiaanse vergelijkingen van rechten stelt zicht de uitdaging dat er niet langer één vergelijking is, maar een stelsel van meerdere vergelijkingen.

13.7 3D, rechten: parametervergelijkingen

Parametervergelijkingen voor rechten in de driedimensionale ruimte zijn volledig gelijkaardig aan de parametervergelijkingen van rechten in het vlak. Het enige verschil is dat de punten en vectoren nu drie componenten hebben in plaats van twee. Als gevolg daarvan kunnen we wel geen richtings*coëfficiënt* meer definiëren maar zullen we steeds met richtings*vectoren* moeten werken.

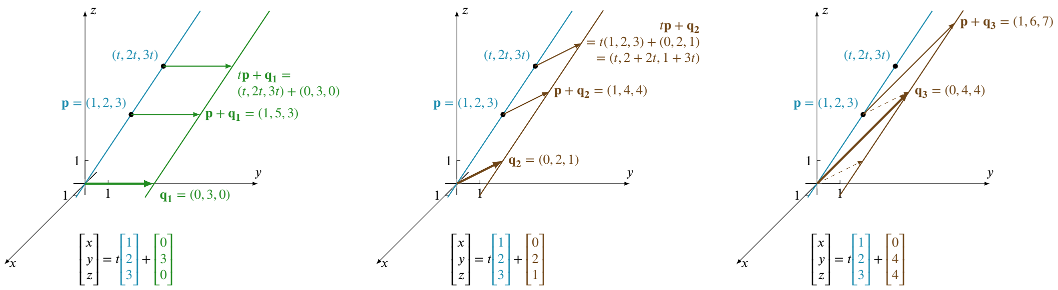
Dit hoofdstuk is volledig analoog opgebouwd als dat over parametervergelijkingen in het *vlak*.

Alle veelvouden van een vector vormen een rechte door de oorsprong:



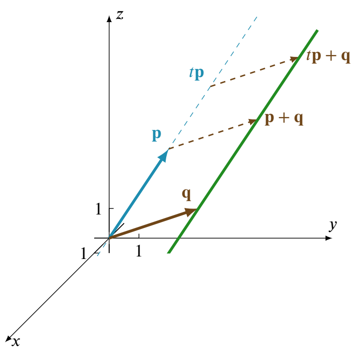
Alle punten van de rechte door $(0,0,0)$ en door het punt $P(x_1, y_1, z_1)$ zijn van de vorm $t(x_1, y_1, z_1)$, of dus (tx_1, ty_1, tz_1), met t een willekeurig reëel getal. Merk op dat deze rechte samenvalt met de rechte door $(2x_1, 2y_1, 2z_1)$ of meer algemeen door (kx_1, ky_1, kz_1), met $k \in \mathbb{R}_0$.

Door dergelijke rechte te verschuiven bekomen we *evenwijdige rechten*:



Merk op dat verschuiven over $\mathbf{q_2} = (0,2,1)$ of verschuiven over $\mathbf{q_3} = (0,4,4)$ hier *dezelfde* rechte oplevert.

Als de parameter loopt doorheen de reële getallen bekom je *alle punten van een rechte* die door een punt $\mathbf{q}$ gaat en evenwijdig is met een vector $\mathbf{p}$. Op onderstaande tekening is de groene rechte de verschuiving van de blauwe rechte over een afstand $\mathbf{q}$ maar ook de som van alle herschalingen van $\mathbf{p}$ en het punt $\mathbf{q}$:



13.7 3D, rechten: parametervergelijkingen

Definitie 13.7.1 (Parametervergelijkingen van een rechte)**.**

Een **parametervergelijking** van een rechte met **richtingsvector** $\mathbf{p} = (x_1, y_1, z_1)$, **steunvector** $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ en parameter t is een uitdrukking van de vorm

$$L \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

die we ook kunnen schrijven als

$$L \leftrightarrow \begin{cases} x = tx_1 + q_x \\ y = ty_1 + q_y \\ z = tz_1 + q_z \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow (x, y, z) = t(x_1, y_1, z_1) + (q_x, q_y, q_z), \quad t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow (x, y, z) = (tx_1 + q_x, ty_1 + q_y, tz_1 + q_z), \quad t \in \mathbb{R}$$

of als

$$L \leftrightarrow \mathbf{x} = t\mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Deze rechte *bevat* de steunvector $\mathbf{q}$ en is *evenwijdig* met de richtingsvector $\mathbf{p}$.

Deze rechte is de *verschuiving* van de rechte bepaald door de richtingsvector $\mathbf{p}$ over de steunvector $\mathbf{q}$.

Deze rechte is de steunvector $\mathbf{q}$ waarbij willekeurige veelvouden van de richtingsvector $\mathbf{p}$ zijn opgeteld.

Voorbeeld 13.7.1.

De rechte door de oorsprong en het punt $(1, 2, 3)$ heeft als parametervergelijking $L_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t, \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

De rechte door $(1, 2, 3)$ evenwijdig met de x-as heeft als parametervergelijking $L_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$, wat ook geschreven kan worden als $L_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

De rechte door $(3, 4, 5)$ evenwijdig met L_1 heeft als parametervergelijking $L_3 \leftrightarrow \begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t + 4 \\ z = 3t + 5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

De opmerkingen voor parametervergelijkingen van rechten in het vlak blijven gelden.

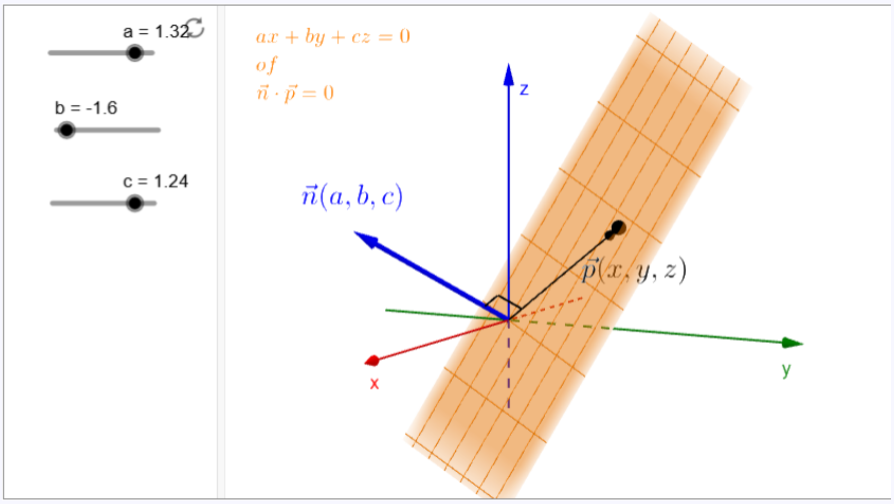
13.8 3D, vlakken: Cartesiaanse vergelijkingen

Cartesiaanse vergelijkingen voor *vlakken* in de driedimensionale ruimte zijn volledig gelijkaardig aan de cartesiaanse vergelijkingen van *rechten* in het vlak. Het enige verschil is dat de punten en vectoren nu drie componenten hebben in plaats van twee. Dit hoofdstuk is dan ook volledig analoog opgebouwd als dat over cartesiaanse vergelijkingen van rechten in het *vlak*.

Een lineaire vergelijking in drie variabelen x, y en z bepaalt een vlak in de ruimte.

Voorbeeld 13.8.1. Bestudeer de vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$.

Geogebra link: https://tube.geogebra.org/m/kdAmrQZF



We kunnen over de vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$ het volgende opmerken:

- door telkens twee van x, y en z nul te kiezen vinden we onmiddellijk drie punten van de vlak: $(-2, 0, 0), (0, 3, 0)$ en $(0, 0, 6)$. Daarmee is het vlak al volledig bepaald.
- door de vergelijking te herschrijven als $z = 3x-2y+6$ vinden we *voor elke* x *en* y een bijhorende z. Op deze manier kan het vlak beschouwd worden als de grafiek van de (lineaire) functie in twee veranderlijken $(x, y) \mapsto 3x - 2y + 6$.
- door de vergelijking te herschrijven als $x = \dfrac{2y + z - 6}{3}$ vinden we *voor elke* y *en* z een bijhorende x. Analoog voor $y = \dfrac{3x - 3 + 6}{2}$.
- liefhebbers van *stelsels* kunnen de vergelijking beschouwen als een stelsel van één vergelijking in drie onbekenden. Er zijn dan twee hoofdonbekenden, en één nevenonbekende, en de oplossingen van het stelsel zijn
$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 3s - 2t + 6 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$
Dit zullen precies parametervergelijkingen zijn van het vlak met vergelijking $3x-2y-z+6 = 0$.
- de vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$ is een *voorwaarde* op drietallen (x, y, z). De drietallen die voldoen vormen een vlak in de ruimte.

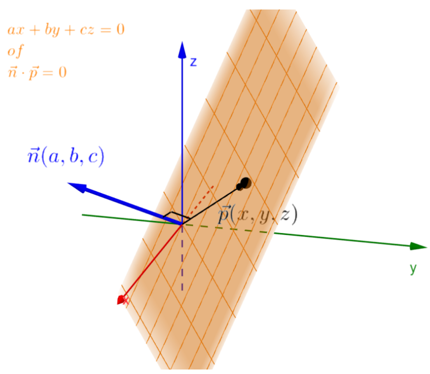
13.8 3D, vlakken: Cartesiaanse vergelijkingen

- de vergelijking $3x - 2y - z + 7 = 0$ is een *evenwijdig vlak* (want als $3x - 2y - z = -6$, dan kan natuurlijk niet ook $3x - 2y - z = -7$). Dus, de vlakken $3x - 2y - z + a = 0$ zijn allemaal onderling evenwijdig voor verschillende $a \in \mathbb{R}$. En dergelijk vlak gaat door de oorsprong precies als $a = 0$.

- om a te vinden zodat het evenwijdige valk $3x - 2y - z = a$ door het punt $(2, 1, 1)$ gaat volstaat het te eisen dat $(2, 1, 1)$ op $3x - 2y - z = a$ ligt, dus dat $3(2) - 2(1) - (1) = a$. Je vindt dan direct $a = 6 - 2 - 1 = 3$. Een alternatieve manier is om het xy-assenstelsel te verschuiven over de vector $(2, 1, 1)$ via $(x', y', z') = (x - 2, y - 1, z - 1)$, en op te merken dat het vlak in $x'y'z'$-coördinaten door de oorsprong gaat, dus van de vorm $3x' - 2y' - z' = 0$ moet zijn. Dus moet $3(x - 2) - 2(y - 1) - (z - 1) = 0$, of $3x - 2y - z - 6 + 2 + 1 = 0$ waaruit ook volgt dat $a = 3$.

- liefhebbers van het *scalair product* kunnen opmerken dat $3x + 2y - z = 0$ ook kan geschreven worden als $(2, 3, -1) \cdot (x, y, z) = 0$, en bijgevolg vaststellen dat de vector $(2, 3, -1)$ loodrecht staat op het vlak met vergelijking $3x - 2y - z = 0$.

- liefhebbers van *analogieën* kunnen opmerken dat het vlak met vergelijking $3x - 2y - z + 6 = 0$ min of meer *bepaald wordt door de vier getallen* $3, -2, -1, 6$. In de negentiende eeuw hebben wiskundigen haakjes rond die getallen gezet en opgemerkt dat je dergelijk viertal $(3, -2, -1, 6)$ misschien kan beschouwen als *coördinaten van een vlak*, net zoals $(2, 3, 1)$ *coördinaten* zijn van een punt. Dat leidt tot de bijzonder interessante zogenaamde projectieve meetkunde, die we hier echter niet verder zullen behandelen.



Definitie 13.8.1 (Cartesiaanse vergelijkingen van een vlak)**.**

Een **Cartesiaanse vergelijking** van een vlak V is een uitdrukking van de vorm

$$V \leftrightarrow \boxed{ax + by + cz + d = 0} \quad (\text{ of ook } ax + by + cz = f)$$

met a, b en c niet alle drie tegelijk nul.
Een punt (x_0, y_0, z_0) ligt op het vlak V als en slechts als $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

Merk op dat het niet mogelijk is een 'richtingscoëfficiënt' te definiëren van een vlak omdat 'richtingen' in het vlak meer dan één vrijheidsgraad hebben. We werken bij vlakken dus steeds met de richtings*vectoren*.

Eigenschap 13.8.1 (Evenwijdigheid en loodrechte stand)**.**

- Alle vlakken $V_k \leftrightarrow ax + by + cz = k$, $k \in \mathbb{R}$ zijn onderling *evenwijdig* want voor verschillende k zijn hun doorsnedes (natuurlijk) leeg.

- Elk vlak $V_k \leftrightarrow ax + by + cz = k$ staat *loodrecht* op de vector (a, b, c) want $ax + by + cz = (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0 \iff (a, b, c) \perp (x, y, z)$.

13.8 3D, vlakken: Cartesiaanse vergelijkingen

Eigenschap 13.8.2 (Vergelijking van een vlak).

- Een vlak door de oorsprong en loodrecht op (a, b, c) heeft vergelijking

$$ax + by + cz = 0$$

- Een vlak door punt (x_1, y_1, z_1) en loodrecht op (a, b, c) heeft vergelijking

$$ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1 \quad \text{of} \quad a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(y - y_1) = 0$$

- Het vlak dat de x-as snijdt in $(a, 0, 0)$, de y-as in $(0, b, 0)$ en de z-as in $(0, 0, c)$ (met a, b en c verschillend van 0) heeft vergelijking

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

want de drie punten $(a, 0, 0), (0, b, 0)$ en $(0, 0, c)$ voldoen duidelijk aan de vergelijking.

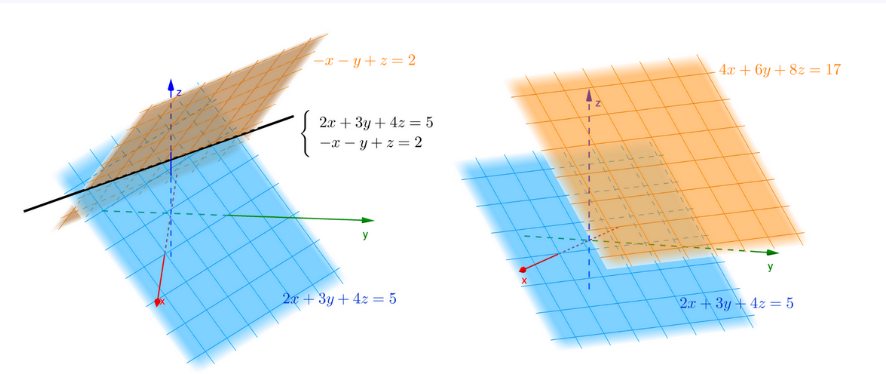
Voorbeeld 13.8.2. Geef de vergelijking van volgende vlakken:

1. door de oorsprong, $(3, 6, 9)$ en $(1, 2, 9)$: $\boxed{y = 2x}$✓
2. door $(0, 1, 0)$, $(3, 7, 42)$ en $(1, 3, 0)$: $\boxed{y = 2x + 1}$✓
3. door de oorsprong,$(-1, -2, -1)$ en $(-3, -6, 9)$: $\boxed{y = 2x}$✓
4. door de $(1, 0, 0), (42, 42, 42)$ en $(42, 0, 0)$: $\boxed{y = z}$✓

13.9 3D, rechten: Cartesiaanse vergelijkingen

Een lineaire vergelijking in x, y en z bepaalt een vlak in de ruimte. De *doorsnede* van twee vlakken bepaalt (meestal) een rechte. De cartesiaanse vergelijking van een rechte bestaat uit *twee* vergelijkingen, of dus een stelsel van vergelijkingen.

Voorbeeld 13.9.1. Bestudeer het stelsel $\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ -x-y+z=2 \end{cases}$.



- Dit stelsel beschrijft de punten die zowel aan de eerste als aan de tweede vergelijking voldoen, en dus de *doorsnede* van twee vlakken.
- Om effectief punten te vinden in die doorsnede moet je het *stelsel oplossen*.
- Als de vlakkken *evenwijdig* zijn is de doorsnede *leeg*. Als ze *samenvallen* is de doorsnede een *vlak*.

Definitie 13.9.1. Een **Cartesiaanse vergelijking** van een rechte L is een uitdrukking van de vorm

$$L \leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}}$$

met $(a_1,b_1,c_1) \neq (0,0,0)$, $(a_2,b_2,c_2) \neq (0,0,0)$ en (a_1,b_1,c_1) geen veelvoud van (a_2,b_2,c_2).
Een punt (x_0,y_0,z_0) ligt op de rechte L ligt als en slechts als het punt voldoet aan beide vergelijkingen.

De cartesiaanse vergelijking van een rechte is niet uniek: elk stel vlakken met die rechte als snijlijn levert er één.

Voorbeeld 13.9.2.

Vergelijking	Beschrijving	Alternatieve vergelijkingen
$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$	de x-as	$\begin{cases} y=0 \\ z=y \end{cases}$
$\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$	de 'hoofddiagonaal' in het xy-vlak	$\begin{cases} 2x-2y=0 \\ 42x-42y+z=0 \end{cases}$
$\begin{cases} x=y \\ z=y \end{cases}$	de 'hoofddiagonaal' in de ruimte	$\begin{cases} x=y \\ x=z \end{cases}$

13.9 3D, rechten: Cartesiaanse vergelijkingen

Voorbeeld 13.9.3. Geef de vergelijking van volgende rechten:

1. door de oorsprong en $(3, 6, 1)$: $\boxed{\begin{cases} y = 2x \\ z = 1 \end{cases} \checkmark}$

2. door de $(0, 1, 1)$ en $(3, 7, 7)$: $\boxed{\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \checkmark}$

3. door de oorsprong en $(-1, -2, 1)$: $\boxed{\begin{cases} y = 2x \\ z = 1 \end{cases} \checkmark}$

4. door de $(0, 0, 0)$ en $(-1, -1, -1)$: $\boxed{\begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases} \checkmark}$

13.10 3D, vlakken: parametervergelijkingen

Omdat vlakken *twee*dimensionaal zijn bevatten de parametervergelijkingen van een vlak *twee* parameters.

Definitie 13.10.1 (Parametervergelijkingen van een vlak)**.**

Een **parametervergelijking** van een vlak V met **richtingsvectoren** $\mathbf{p_1} = (x_1, y_1, z_1)$ en $\mathbf{p_2} = (x_2, y_2, z_2)$, met **steunvector** $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ en met parameters s en t

is een uitdrukking van de vorm

$$V \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

die als de parameters s, t alle reële waarden doorlopen, alle punten levert van het vlak V.

Dezelfde uitdrukking kan ook geschreven worden als

$$V \leftrightarrow \begin{cases} x = sx_1 + tx_2 + q_x \\ y = sy_1 + ty_2 + q_y \\ z = sz_1 + tz_2 + q_z \end{cases}, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

of als $\quad V \leftrightarrow (x, y, z) = s(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2) + (q_x, q_y, q_z), \qquad s, t \in \mathbb{R}$

of als $\quad V \leftrightarrow (x, y, z) = (sx_1 + tx_2 + q_x, sy_1 + ty_2 + q_y, sz_1 + tz_2 + q_z), \quad s, t \in \mathbb{R}$

of als $\quad V \leftrightarrow \mathbf{x} = s\mathbf{p_1} + t\mathbf{p_2} + \mathbf{q}, \qquad s, t \in \mathbb{R}$

Dit vlak V *bevat* de steunvector $\mathbf{q}$ en is *evenwijdig* met de richtingsvectoren $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$.

Dit vlak V is het vlak V_o bepaald door de richtingsvectoren $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$ de *verschoven* over de steunvector $\mathbf{q}$.

Dit vlak V bestaat uit de steunvector $\mathbf{q}$ waarbij willekeurige veelvouden van de richtingsvectoren $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$ zijn opgeteld.

Terwijl de cartesiaanse vergelijking een voorwaarde geeft opdat een punt (x, y, z) op het vlak ligt, geeft de parametervergelijking een meer constructieve beschrijving: elke invulling van s of t als een reëel getal levert een punt van het vlak.

Voorbeeld 13.10.1.

Vlak	Cartesiaanse vergelijking	Parametervergelijking	
xy-vlak	$z = 0$	$(x, y, z) = (s, t, 0)$,	$s, t \in \mathbb{R}$
∥ aan xy-vlak	$z = 42$	$(x, y, z) = (s, t, 42)$,	$s, t \in \mathbb{R}$
xz-vlak	$y = 0$	$(x, y, z) = (s, 0, t)$,	$s, t \in \mathbb{R}$
Diagonaalvlak	$x = y$	$(x, y, z) = (s, s, t)$,	$s, t \in \mathbb{R}$
Will. vlak	$2x + 2y - z = 42$	$(x, y, z) = (s, t, 42 + 2x + 2y)$,	$s, t \in \mathbb{R}$
	of ook	$(x, y, z) = (0, 0, 42) + (s, t, 2s + 2t)$,	$s, t \in \mathbb{R}$
	of ook	$(x, y, z) = (21 - s + \frac{t}{2}, s, t)$,	$s, t \in \mathbb{R}$

13.11 3D: omzetten van vergelijkingen

We leggen met enkele voorbeelden uit hoe je parametervergelijkingen en cartesiaanse vergelijkingen voor rechten en vlakken in de driedimensionale ruimte in elkaar kan omzetten. Dat komt neer op het '*oplossen van een stelsel*' of het '*elimineren van de parameter(s)*'.

Omdat parametervergelijkingen worden bepaald door *richtingsvectoren*, terwijl cartesische vergelijkingen worden bepaald door *loodrichtingen*, kan het omzetten dus ook door het vinden van *loodvectoren*.

Voorbeeld 13.11.1. Cartesiaanse vergelijking rechte naar parametervergelijkingen via '**oplossen stelsel**'

Matrixnotatie:

Cartesiaanse vergelijking rechte: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

Werk term met x weg uit vgl 2: (via $R_2 \to R_2 - 3R_1$) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Werk term met y weg uit vgl 1: (via $R_1 \to 3R_1 - R_2$) $\begin{cases} 3x-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Kies z willekeurig en los op naar de andere variabelen: $z=u, \quad x=\frac{1}{3}u, \quad y=\frac{2}{3}u$

Dit zijn al de parametervergelijkingen, die met een nieuwe parameter $3t=u$ nog eenvoudiger kunnen geschreven worden: $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$ of $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

of nog eenvoudiger: $(x,y,z)=(1,2,3)t, t \in \mathbb{R}$

Opmerking 13.11.1. Een alternatieve methode gebruikt **loodvectoren**: voor de parametervergelijking hebben we een richtingsvector nodig, de cartesische vergelijking levert twee loodvectoren. De gezocht richting moet dus loodrecht staan op beide loodvectoren, en het vectorieel product levert onmiddellijk zo'n vector:

De richtingsvector moet loodrecht staan op de vectoren $(1,1,-1)$ en $(3,6,-5)$, en dat is het geval voor $(1,1,-1)\times(3,6,-5)=(1(-5)-6(-1),-1(-5)-3(-1),1\cdot 6-3\cdot 1)=(1,2,3)$.

De gezochte parametervergelijking is dus $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Voorbeeld 13.11.2. Parametervergelijking rechte naar cartesiaanse vergelijkingen via '**eliminatie**'

Punt $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ligt op de rechte met parametervergelijking $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ zodra een t bestaat zodat

$$\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}.$$

We beschouwen deze laatste uitdrukking dus als een stelsel in één onbekende t, met parameters x, y, z, en onderzoeken de oplossingsvoorwaarden voor dat stelsel in t, in dit geval door uit elke vergelijking

13.11 3D: omzetten van vergelijkingen

t te berekenen:
$$t = x, t = \frac{1}{2}y, \quad t = \frac{1}{3}z.$$
Dergelijke t kan dus enkele bestaan als de drie uitdrukkingen aan elkaar gelijk zijn, dus als:

$$x = \frac{1}{2}y \quad \text{en} \quad x = \frac{1}{3}z \quad \text{of dus} \begin{cases} 2x - y & = 0 \\ 3x & - z = 0 \end{cases}$$

en dit zijn precies cartesiaanse vergelijkingen.

Merk op dat cartesiaanse vergelijkingen niet uniek bepaald zijn: *elke* twee vlakken door een rechte leveren een stel cartesiaanse vergelijkingen op:

$$\begin{cases} 2x - y & = 0 \\ 3x & - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - \quad y & = 0 \\ & 3y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y & = 0 \\ 5x - y - z = 0 \end{cases}$$

Opmerking 13.11.2. Ook hier is er een alternatieve methode met **loodvectoren**: we kennen de richtingsvector $(1, 2, 3)$, en het volstaat twee vectoren te vinden die daar loodrecht op staan.

Uit de formule $(a, b, c) \perp (x, y, z) \iff (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$ volgt onmiddellijk dat

$$(a, b, c) \perp (0, -c, b) \quad \text{en } (a, b, c) \perp (c, 0, -a) \quad \text{en } (a, b, c) \perp (-b, -a, 0)$$

Let op: als bijvoorbeeld $b = c = 0$ levert dit maar twee niet-nulvectoren, maar dat volstaat.

Voor $(1, 2, 3)$ zijn loodvectoren bijvoorbeeld $(2, -1, 0), (3, 0, -1)$ en $(0, 3, -2)$, en cartesiaanse vergelijkingen zijn dus

$$\begin{cases} 2x - y & = 0 \\ 3x & - z = 0 \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} 2x - \quad y & = 0 \\ & 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} 3x & - \quad z = 0 \\ & 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Voorbeeld 13.11.3. Parametervergelijking vlak naar cartesiaanse vergelijkingen via '**eliminatie**'

Punt $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ligt in het vlak met parametervergelijking $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ zodra s en t bestaan zodat

$$\begin{cases} x = s + 2t \\ y = 2s + 3t \\ z = 3s + 4t \end{cases}.$$

We beschouwen deze laatste uitdrukking dus als een stelsel in twee onbekenden s, t, met parameters x, y, z, en onderzoeken de oplossingsvoorwaarden voor dat stelsel, in dit geval door s en t te berekenen uit de eerste twee vergelijkingen, en het resultaat in te vullen in de derde vergelijking:

$$\begin{cases} x = s + 2t \\ y = 2s + 3t \end{cases} \iff \begin{cases} s & + 2t = x \\ 2s & + 3t = y \end{cases} \iff \begin{cases} s & + 2t = x \\ & - \quad t = -2x + y \end{cases} iff \begin{cases} s & = -3x + 2y \\ & t = 2x - y \end{cases}$$

Dit invullen in de derde vergelijking $z = 3s + 4t$ levert de voorwaarde, en dus cartesiaanse vergelijking

$$z = 3(-3x + 2y) + 4(2x - y) \text{of dus } -x + 2y - z = 0 \text{ of ook } x - 2y + z = 0$$

13.11 3D: omzetten van vergelijkingen

Opmerking 13.11.3. Ook hier is er een alternatieve methode met **loodvectoren**: we kennen twee richtingsvectoren $(1,2,3)$ en $(2,3,4)$, en het volstaat één vector te vinden die daar loodrecht op staat.

Het vectorieel product levert onmiddellijk zo'n vector:

$$(1,2,3) \times (2,3,4) = (-1,2,-1)$$

en dus is de cartesiaanse vergelijking $-x+2y-z=0$, of dus ook $x-2y+z=0$ (of $2y=x+z$ en dergelijke ...).

13.12 Doorsneden van rechten en vlakken

Doorsneden van rechten en/of vlakken kunnen altijd worden berekend. De techniek is afhankelijk of cartesiaanse dan wel parametervergelijkingen zijn gegeven, en of cartesiaanse dan wel parametervergelijkingen worden gevraagd van de doorsnede. We bespreken hier niet alle gevallen rechte/rechte, rechte/vlak, vlak/vlak, gegeven door parameter- of cartesiaanse vergelijkingen, en snijdend, kruisend, omvattend, evenwijdig,... maar geven op basis van enkele voorbeelden de belangrijkste principes aan.

13.12.1 Twee cartesiaanse vergelijkingen gegeven

Als we *twee cartesiaanse vergelijkingen* gegeven hebben is de situatie het eenvoudigste. Cartesiaanse vergelijkingen bieden een manier om te testen of een willekeurig punt op een rechte of vlak gelegen is. Als we moeten testen of een punt op de doorsnede van twee rechten gelegen is, d.w.z. op de ene én op de andere, dan moeten we gewoon de vergelijkingen van beide rechten samenvoegen. Voor twee rechten vinden we zo een stelsel van 4 vergelijkingen. Bijvoorbeeld voor de rechten

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 4 \\ -2x & & +z & = -1 \end{cases}$$

en

$$\begin{cases} x & +y & & = 2 \\ x & & -z & = 0 \end{cases}$$

wordt de doorsnede bepaald door het stelsel

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 4 \\ -2x & & +z & = -1 \\ x & +y & & = 2 \\ x & & -z & = 0 \end{cases}$$

De rest van het verhaal is het oplossen van stelsels. Een stelsel van 4 vergelijkingen in 3 onbekenden kan strijdig zijn. We besluiten dan dat de rechten geen punten gemeen hebben. Het kan dan gaan om *evenwijdige* of *kruisende rechten*. (Het onderscheid tussen deze twee gevallen kan gemaakt worden door de richting van beide rechten te vergelijken). Er kan ook een unieke oplossing zijn. De doorsnede bevat één punt en we spreken van *snijdende* rechten. Dit is het geval voor het voorbeeld hierboven. Het snijpunt is $(1, 1, 1)$. Het kan ook zijn dat beide rechten samenvallen. In dat geval vinden we heel de rechte terug als doorsnede.

Voor de doorsnede van een vlak en een rechte bekomen we een stelsel van *drie* vergelijkingen. Voor de doorsnede van twee vlakken bekomen we een stelsel van *twee* vergelijkingen (dat voor twee snijdende vlakken onmiddellijk de cartesiaanse vergelijking van de snijlijn levert). Werk zelf uit.

13.12.2 Een cartesiaanse en een parametervergelijking gegeven

Indien een *cartesiaanse* vergelijking van een rechte of vlak en een *parametervergelijking* van een andere rechte of vlak gegeven is, gaan we als volgt te werk. Parametervergelijkingen bieden een manier om willekeurige punten van een rechte of vlak te vinden door willekeurige waarden voor de parameters te kiezen. Cartesiaanse vergelijkingen bieden een manier om te testen of een gegeven punt op een rechte of vlak gelegen is. Om de doorsnede te bepalen, nemen we daarom een willekeurig punt van de verzameling die beschreven is door een parametervergelijking, en testen of dat punt ook in de andere verzameling ligt, die gegeven wordt door een cartesiaanse vergelijking.

Voor de doorsnede van het vlak met parametervergelijking

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(1, 1, 1) + l(1, 0, 1) \quad \text{met } k, l \in \mathbb{R}$$

en de rechte met cartesiaanse vergelijking

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 10 \\ -2x & & +z & = 0 \end{cases}$$

gaan we dus na of het punt $(1+k+l, 2+k, 3+k+l)$ dat in het vlak ligt ligt, ook op de rechte ligt, of

$$\begin{cases} (1+k+l) & +2(2+k) & +(3+k+l) & =10 \\ -2(1+k+l) & & +(3+k+l) & =0 \end{cases}$$

Na wat herschrijven komt dit neer op

$$\begin{cases} 4k & +2l & =2 \\ -k & -l & =-1 \end{cases}$$

Dit stelsel heeft als unieke oplossing $(k,l)=(0,1)$. Het willekeurig punt $(1+k+l, 2+k, 3+k+l)$ van het vlak ligt dus enkel op de rechte als $k=0$ en $l=1$. Het gaat dan om het punt $(2,2,4)$.

13.12.3 Twee parametervergelijkingen gegeven

Indien de gegeven verzamelingen beschreven worden door *twee parametervergelijkingen* is het vaak het eenvoudigste om minstens één van beide eerst om te zetten in een cartesiaanse vergelijking. We beschouwen toch een eenvoudig voorbeeld van twee snijdende rechten. Om het snijpunt van de rechte met parametervergelijking

$$(x,y,z)=(1,2,3)+k(1,0,1) \quad \text{met } k \in \mathbb{R}$$

en de rechte met parametervergelijking

$$(x,y,z)=(2,2,1)+k(-2,0,1) \quad \text{met } k \in \mathbb{R}$$

te bepalen, gaan we op zoek naar een punt van de vorm $(1+k,2,3+k)$ dat ook te schrijven is in de vorm $(2-2k',2,1+k')$. We lossen daartoe het stelsel

$$\begin{cases} 1+k & =2-2k' \\ 2 & =2 \\ 3+k & =1+k' \end{cases}$$

op. We vinden als unieke oplossing $k=-1$ en $k'=1$. Dit komt overeen met het punt $(0,2,2)$.

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

Module 14

Logica en Verzamelingen

(Versie 2024/10/24HB.16)

14.1 Intro logica en verzamelingen

Zowel logica als verzamelingen zijn basisbouwstenen die overal in de wiskunde worden gebruikt. Het is dus belangrijk er voldoende mee vertrouwd te worden. We bespreken eerst enkele logische basisbegrippen zoals implicatie en equivalentie, en breiden dat vervolgens uit met de belangrijke zogenaamde *kwantoren* die toelaten uitspraken te doen over *alle* objecten van een verzameling, of over het *bestaan* van bepaalde elementen in een verzameling. Daarmee is het belangrijke woord verzameling gevallen, waarvan we enkele basiseigenschappen geven.

Daarna behandelen we een typisch wiskundig fenomeen: met behulp van de logica wordt in de wiskunde steeds aangetoond hoe alles wat wordt beweerd noodzakelijk volgt uit wat reeds voorafgaat. Dat gebeurt in zogenaamde *bewijzen*, en we bespreken enkele technieken waarmee je uit gekende waarheden andere noodzakelijke waarheden kan afleiden.

In wat volgt hebben we de leerstof over logica en verzamelingen als volgt opgebouwd:

(1) Dit voorwoord, met een inleiding en korte handleiding.

(2) Een hoofdstuk over logica, met proposities, connectoren, implicaties en equivalenties.

(3) Een uitbreiding met kwantoren levert een erg krachtige taal waarin wiskunde formeel kan worden beschreven.

(4) We bespreken verzamelingen en hun unie en doorsnede en product en macht.

(5) In een intermezzo besteden we aandacht aan het correct opschrijven van wiskunde.

(6) Tot slot bestuderen we enkele bewijstechnieken, in het bijzonder het bewijs per inductie.

14.2 Propositielogica

Mensen denken en communiceren in een taal, bijvoorbeeld in het Nederlands. Soms is het niet eenvoudig om precieze bewoordingen te vinden om een gedachte of redenering exact weer te geven. Bovendien heeft iedereen een eigen taalgevoel, wat tot gevolg kan hebben dat degene die een zin *uitzendt* hem anders interpreteert dan degene die de zin *ontvangt*.

Stel, je belooft aan een kleuter het volgende:

als je braaf bent, dan krijg je een zuurtje of een reep chocolade.

Wat mag die kleuter dan precies verwachten?

- Kan hij als hij braaf is ook een zuurtje *en* een reep chocolade krijgen?
- Als hij braaf is, mag hij dan *zelf* kiezen tussen een zuurtje of een reep chocolade?
- Kan hij ook iets krijgen als hij *niet* braaf is, of is dat uitgesloten?
- Hoe braaf moet hij eigenlijk zijn om iets te krijgen? Wat als hij *een heel klein beetje* niet braaf is?

Om dergelijke onduidelijkheden en verwarring te vermijden kan men sommige *uitspraken* en sommige *redeneervormen* proberen onttrekken aan de gewone taal. Men kan ze **formaliseren** in de *symbolische* of *formele logica*. We beperken ons hier tot een kleine selectie van notaties uit de logica die worden gebruikt voor het formuleren van wiskundige definities, eigenschappen en redeneringen.

14.2.1 Wiskundige beweringen en proposities

Een **propositie** is een zinvolle mededelende volzin, die al dan niet *waar* kan zijn. De precieze voorwaarden voor 'zinvolheid'en 'waarheid'zullen van de context afhangen, en we zullen daar hier niet verder op ingaan.

Voorbeeld 14.2.1 (Enkele (niet noodzakelijk wiskundige) proposities).

"De aarde is een planeet"	is	een ware propositie
"De aarde is plat"	is	een onware propositie
"De een planeet aarde is"	is	geen propositie (want niet 'zinvol' of 'betekenisvol')
"1+1=2"	is	een ware proposite
"1+1=3"	is	een onware propositie
"1+=!,-5"	is	geen propositie (want niet 'zinvol' of 'betekenisvol')
"De vakantie is voorbij'	is	een propositie (waarvan de waarheid afhangt van de context)
"Is er leven op Pluto?"	is	geen propositie (want een vraag)
"Begreep ik wiskunde maar"	is	geen propositie (want een wens of verzuchting)
"Die is gek"	is	geen propositie (tenzij uit de context blijkt over wie het gaat)
"5 is een priemgetal"	is	een ware propositie
"n is een priemgetal"	is	geen propositie (tenzij uit de context blijkt over welke n het gaat)

Een **predicaat** is een zinvolle mededelende volzin met (één of meerdere) **vrije variabelen** in. Een vrije variabele is een uitdrukking waarvoor concrete dingen moeten worden ingevuld voordat het predicaat al dan niet waar kan worden. Een predicaat heeft dus een *context* nodig waarin de betekenis van de vrije variabele wordt vastgelegd.

Voorbeeld 14.2.2 (Enkele (niet noodzakelijk wiskundige) predicaten).

1. "Hij is erg rijk":

Als het gaat over Trump, krijgen we een al dan niet ware uitspraak, maar als het gaat over Job is de propositie allicht niet waar.

2. "n is een priemgetal":

Als	
$n = 5$	dan wordt dit de *ware* propositie '5 is een priemgetal'
$n = 10$	dan wordt dit de *onware* propositie '10 is een priemgetal'
$n = 1/2$	dan krijgen we geen betekenisvolle propositie
Als we aanvullen met	
'er bestaan natuurlijke getallen n zodat'	dan krijgen we een ware propositie
'voor alle natuurlijke getallen n is'	dan krijgen we een onware propositie
'voor alle reële getallen n geldt dat'	dan krijgen we geen betekenisvolle propositie
'voor alle letters n geldt dat'	dan krijgen we geen betekenisvolle propositie

Een **bewering** is ofwel een propositie ofwel een predicaat. We gebruiken dikwijls letters als p en q om beweringen aan te geven, en we schrijven bijvoorbeeld $p(m,n)$ om een predicaat aan te geven met m en n als vrije variabelen.

Als $p(n)$ staat voor "n is een priemgetal", dan betekent

$p(n)$	:	"n is een priemgetal"	(en dat is een predicaat, met vrije variabele n)
$p(5)$	:	"5 is een priemgetal"	(en dat is een ware propositie)
$p(10)$	:	"10 is een priemgetal"	(en dat is onware propositie)
$p(n+1)$	:	"$n+1$ is een priemgetal"	(en dat is een predicaat, met vrije variabele n)
$p(x)$	:	"x is een priemgetal"	(en dat is een predicaat, met vrije variabele x)

14.2.2 Logische connectieven: '. . . of. . . ', '. . . en. . . ', 'niet. . . '

De logica probeert de betekenis en waarheidswaarde van ingewikkelde proposities te bepalen op basis van de samenstellende, eenvoudigere proposities en predicaten. De betekenis van samengestelde beweringen kan vastgelegd of verduidelijkt worden door een **waarheidstabel**. Alle basisproposities p, q, etc. kunnen ofwel waar zijn ofwel niet waar (we zeggen ook 'onwaar' of 'vals'). De waarheid van een samenstelling hangt dan af van de waarheidswaarden van p, q etc., zoals aangegeven in de waarheidstabel. We gebruiken hier de afspraak dat 'w' aanduidt dat de bewering waar is en 'o' dat de bewering onwaar is.

Beweringen kunnen worden samengesteld via conjunctie ('en'), disjunctie ('of') en negatie ('niet'):

Definitie 14.2.1 (Conjunctie, disjunctie en negatie)**.**

Als p en q beweringen zijn, dan noteren we de bewering 'p of q' met $\boxed{p \vee q}$ en 'p en q' met $\boxed{p \wedge q}$. De bewering dat p niet waar is, dus 'niet p' of 'p is vals', wordt genoteerd met $\boxed{\neg p}$.

De waarheidstabellen zijn als volgt:

p	q	$p \vee q$ p of q	$p \wedge q$ p en q
w	w	w	w
w	o	w	o
o	w	w	o
o	o	o	o

p	$\neg p$ niet p
w	o
o	w

Merk dus op dat in de wiskunde (en in alle wetenschappen) het gebruik van 'of' *niet exclusief* is: 'p of q' betekent per definitie dat *minstens één van de twee* waar is, maar mogelijk ook beide.

Wie wat Latijn kent (of wil leren), kan het symbool ∨ onthouden via het latijnse woordje 'vel' voor 'of'. Anderen merken op dat ∨ lijkt op ∪, en de unie $A \cup B$ bestaat uit de elementen die in A **of** B zitten, terwijl ∧ lijkt op ∩, en $A \cap B$ zijn de elementen die in A **en** B zitten. De negatie ¬ komt overigens op dezelfde manier enigszins overeen met het complement.

14.2 Propositielogica

14.2.3 Implicatie: 'als ..., dan ...'

Hier is de kloof tussen de betekenis in de omgangstaal en die in de wiskunde soms erg groot. We bestuderen de beweringen van het type 'als ..., dan ...' dan ook wat uitgebreider.

Voorbeeld 14.2.3. Welke van volgende beweringen zijn waar (met n een willekeurig natuurlijk getal)?

(1) "Als n een viervoud is, dan is n even." Juist ✓

(2) "Als n een drievoud is, dan is n even." Fout ✓

(3) "Als een mus een reptiel is, dan is $1 + 1 = 3$." Juist ✓

(4) "Als een mus een reptiel is, dan is $1 + 1 = 2$." Juist ✓

Beschrijf wat een vader waarschijnlijk bedoelt als hij tegen zijn zoon zegt:

(1) "Als jij kan slagen zonder te studeren, dan ben ik Napoleon."
(2) "Als je er door bent in juni, dan mag je naar Pukkelpop."

Alle beweringen in vorig voorbeeld hebben de vorm

als p, dan q.

Formeel noteren we dit als

$$p \implies q$$

en lezen 'p impliceert q', 'als p, dan q of soms ook 'q volgt uit p'.

In het dagelijks leven suggereert 'p impliceert q' een *causaal* verband tussen p en q: meestal bedoelen we inderdaad dat q waar is *omdat* ook p waar is, of dus dat de waarheid van q *veroorzaakt* wordt door de waarheid van p. In de strikte logische zin wordt er echter *geen causaal verband* verondersteld. De logica volgt een erg strikte, eenduidige en letterlijke interpretatie: $p \implies q$ betekent 'ALS het het geval is dat p waar is, DAN moet zeker ook q waar zijn'. In het geval dat p *niet* waar is, hebben we dus geen enkele uitspraak gedaan, en dus zeer zeker ook geen uitspraak die onwaar zou kunnen zijn.

Definitie 14.2.2 (De implicatie "⇒").

De **implicatie** $\boxed{p \Rightarrow q}$ tussen twee beweringen p en q betekent dat zodra een bepaalde bewering p waar is, ook de bewering q waar is.

We lezen $p \Rightarrow q$ als 'p impliceert q', of 'als p, dan q' of ook 'q volgt uit p'.

We noemen p het **antecedens** of de **hypothese** en q het **consequens** of de **conclusie**.

De waarheidstabel voor $p \Rightarrow q$ is:

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	o	o
o	w	w
o	o	w

Dus de enige manier waarop $p \Rightarrow q$ *vals* kan zijn, is als p waar is en q vals.
Of: als p *niet waar* is, dan is de implicatie $p \Rightarrow q$ *waar*, *ongeacht* of q al dan niet waar is.

Onthoud: "Als een mus een reptiel is, dan is 1+1=3" is een *ware* uitspraak. Dit is een implicatie van de vorm $p \Rightarrow q$. Een mus is geen reptiel (p is niet waar) en bijgevolg is de implicatie *waar*.

14.2 Propositielogica

Ook de Romeinen en de middeleeuwse logici interpreteerden de implicatie op deze manier, en gebruikten de term "Ex falso [sequitur] quod libet": uit een onware bewering volgt al wat je maar wil. Als onmiddellijk gevolg blijkt dat zodra je in een theorie één onware stelling zou kunnen bewijzen, onmiddellijk *elke* uitspraak kan worden bewezen, want uit die onware stelling volgt alles.

Voorbeeld 14.2.4 (Pukkelpop)**.** Wanneer is volgende uitspraak (of belofte) al dan niet waar:

Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop.

Er zijn drie beweringen p,q en $(p \Longrightarrow q)$:

p	:	je slaagt in juni
q	:	je mag naar Pukkelpop
$p \Longrightarrow q$	:	Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop.

We krijgen de volgende waarheidstabel.

(Als)	p	(dan)	q	als p dan q $(p \Rightarrow q)$
p is waar:	je slaagt in juni	q is waar:	je mag naar Pukkelpop	waar
p is waar:	je slaagt in juni	q is onwaar:	je mag niet naar Pukkelpop	onwaar
p is **onwaar**:	je slaagt niet in juni	q is **waar**:	je mag naar Pukkelpop	**waar**
p is **onwaar**:	je slaagt niet in juni	q is **onwaar**:	je mag niet naar Pukkelpop	**waar**

Dus, enkel in het geval dat je slaagt, maar toch niet naar Pukkelpop mag, breekt je vader zijn belofte (en wordt zijn uitspraak dus onwaar). Als je niet slaagt, en je mag toch naar Pukkelpop, is er geen enkel logisch probleem. De uitspraak 'Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop.' is in dit geval waar (derde lijn in de waarheidstabel).

Merk wel op dat je vader allicht volgende uitspraak *bedoelde*:

Alleen als je slaagt in juni, mag je naar Pukkelpop.

en dus, als je *niet* slaagt, dan mag je ook *niet* naar Pukkelpop. In dat geval is de situatie als volgt

(*Alleen als*)	p	(dan)	q	**alleen als** p dan q
p is waar:	je slaagt in juni	q is waar:	je mag naar Pukkelpop	waar
p is waar:	je slaagt in juni	q is onwaar:	je mag niet naar Pukkelpop	onwaar
p is onwaar:	je slaagt niet in juni	q is waar:	je mag naar Pukkelpop	onwaar
p is onwaar:	je slaagt niet in juni	q is onwaar:	je mag niet naar Pukkelpop	waar

In dit geval mag je *alleen als* je geslaagd bent naar Pukkelpop. Dus, p en q moeten nu ofwel beide waar zijn, ofwel beide vals. Dus p is waar *als en slechts als* q waar is, en we noemen p en q *equivalent*.

Oefening 14.2.1. Vul volgende waarheidstabel aan

p	q	$p \Rightarrow q$	$(\neg p) \vee q$
w	w	......	......
w	o	......	......
o	w	......	......
o	o	......	......

14.2 Propositielogica

14.2.4 Equivalentie: '... als en slechts als ...'

Definitie 14.2.3 (Equivalentie "⇔").

Twee beweringen zijn **equivalent** als ze elkaar impliceren, of ook als ze ofwel beide waar zijn, ofwel beide vals. We noteren dit met $p \Leftrightarrow q$ en we zeggen dat p en q **equivalent** zijn:

$$\boxed{p \Leftrightarrow q} \quad \text{betekent} \quad (p \Rightarrow q) \ \wedge \ (q \Rightarrow p).$$

De waarheidstabel voor $p \Leftrightarrow q$ is:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w
w	o	o
o	w	o
o	o	w

In de wiskunde wordt $p \Leftrightarrow q$ vaak gelezen als 'p **als en slechts als** q', en men schrijft soms ook 'p **asa** q'. In het Engels schrijft men dan 'iff' voor if and only if', en in het Frans 'ssi' voor 'si et seulement si'.

Als $p \Leftrightarrow q$ dan noemen we p ook wel **een nodige en voldoende voorwaarde** voor q, en dan is automatisch ook q een nodige en voldoende voorwaarde voor p.

Uit de waarheidstabel blijkt dus duidelijk dat $p \Leftrightarrow q$ waar is als p en q allebei waar zijn of allebei niet waar zijn. Als een van de twee waar is en de andere niet dan is $p \Leftrightarrow q$ *niet* waar.

Voorbeeld 14.2.5 (Pukkelpop bis).

De vader uit Voorbeeld 14.2.4 *bedoelde* allicht: je mag naar Pukkelpop als *en slechts als* je slaagt in juni.

Oefening 14.2.2. Met welke uitspraken is $\neg(p \Rightarrow q)$ equivalent? Probeer het antwoord eerst te vinden door te redeneren. Controleer je antwoord met een waarheidstabel.

1. $p \wedge \neg q$ ......
2. $p \vee \neg q$ ......
3. $\neg p \wedge q$ ......
4. $\neg p \vee \neg q$ ......
5. $q \Rightarrow \neg p$ ......
6. $\neg(\neg p \vee q)$ ......

14.2.5 Implicatie, equivalentie, nodige en voldoende voorwaarden

In verband met de implicatie gebruikt men ook de uitdrukkingen 'nodige voorwaarde' en 'voldoende voorwaarde'. De vele verschillende mogelijkheden om hetzelfde te zeggen kunnen soms erg verwarrend zijn. Het is niet erg zinvol zez van buiten te leren, maar mits wat oefening en vooral de nodige aandacht word je er na verloop van tijd aan gewoon.

Definitie 14.2.4. Volgende uitspraken zijn allemaal equivalente formuleringen van hetzelfde:

$p \Rightarrow q$

$\neg p \vee q$

als p, dan q

p impliceert q

q is waar, of p is vals

p is een **voldoende voorwaarde** voor q

14.2 Propositielogica

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

als q niet waar is , dan is ook p niet waar

q kan enkel onwaar zijn als p ook onwaar is

q is een **nodige voorwaarde** voor p

opdat p zou gelden, is het **nodig** dat q geldt

opdat q zou gelden, is het **voldoende** dat p geldt

Voorbeeld 14.2.6. Volgende uitspraken zijn allemaal equivalent:

n een viervoud $\Rightarrow$ n even

n is geen viervoud, of n is even

als n een viervoud is, dan is n even

n een viervoud impliceert dat n even is

een viervoud zijn is een **voldoende voorwaarde** om even te zijn

n niet even $\Rightarrow$ p geen viervoud

als n niet even is, dan is n ook geen viervoud

n kan enkel oneven zijn als n ook geen viervoud is

'n even' is een **nodige voorwaarde** opdat n een viervoud zou kunnen zijn

opdat n een viervoud zou zijn, is het **nodig** dat n even is (maar niet voldoende)

opdat n even zou zijn, is het **voldoende** dat n een viervoud is (maar niet nodig)

Opmerking 14.2.1. Te veel gemaakte redeneerfout

Tot vervelens toe benadrukken we nogmaals de betekenis van $p \implies q$. Het komt immers al te vaak voor dat studenten bij $p \implies q$ *verkeerdelijk* denken dat als p niet waar is, dan ook q niet waar zal zijn. Uit “(n een viervoud) $\Rightarrow$ (n even)”) besluiten ze dat als een getal n *geen* viervoud is, het ook *niet* even is. Dit is uiteraard fout, zo is 6 geen viervoud, maar wel even!

Als je weet dat $p \Rightarrow q$ geldt, en je weet dat p *niet* geldt, dan kan je *niets* besluiten over de geldigheid van q. Dit is eigenlijk een evidentie. Toch leert de ervaring dat daar in de praktijk al te vaak tegen gezondigd wordt.

In het dagelijks taalgebruik betekent “als . . . , dan . . . ” soms meer dan wat men strikt genomen zegt. Als je vader zegt 'Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop', dan *bedoelt* hij wellicht dat je *enkel* naar Pukkelpop mag als je slaagt. Hij bedoelt dus behalve wat hij expliciet zegt, impliciet ook: als je *niet* slaagt, dan mag je *niet* naar Pukkelpop. Als we met p de bewering “je slaagt in juni” aanduiden en met q de bewering “je mag naar Pukkelpop”, dan zegt je vader “$p \Rightarrow q$” maar daar bovenop bedoelt hij stilzwijgend eigenlijk ook “$q \Rightarrow p$”. Eigenlijk wil hij dus zeggen “$p \iff q''$.

In de wetenschap en in de wiskunde in het bijzonder veroorloven we ons dergelijk slordig en dubbelzinnig taalgebruik niet, en “als ... dan ..” betekent ook steeds gewoon “als ... dan ...”.

Een wiskundige stelling van de vorm 'Als een getal een viervoud is, dan is het ook even' zegt dus absoluut *niets* over getallen die geen viervoud zijn. Dergelijke getallen kunnen wat de stelling betreft eventueel even zijn, of niet. Als je over niet-viervouden iets wil beweren, heb je een andere stelling of eigenschap nodig!

14.2 Propositielogica

14.2.6 Voorrangsregels

Definitie 14.2.5.

Bij de combinatie van connectieven gelden volgende voorrangsregels (van links naar rechts):

$$(\,)\qquad \neg \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \Rightarrow / \Leftarrow / \Leftrightarrow$$

waarbij de haakjes ( ) dus de hoogste voorrang hebben en de pijlen $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ en $\Leftrightarrow$ de laagste.

Voorbeeld 14.2.7.

$\neg p \vee q$	betekent	$(\neg p) \vee q$
$p \vee q \Rightarrow r$	betekent	$(p \vee q) \Rightarrow r$
$p \wedge q \Leftrightarrow r$	betekent	$(p \wedge q) \Leftrightarrow r$
$\neg p \Rightarrow q \vee r$	betekent	$(\neg p) \Rightarrow (q \vee r)$

Eigenschap 14.2.1 (Samenvatting en overzicht van connectieven met waarheidstabellen).

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	o	o	w	w	w	w	w
w	o	o	w	o	w	o	w	o
o	w	w	o	o	w	w	o	o
o	o	w	w	o	o	w	w	w

14.3 Kwantoren

De betekenis van sommige uitspraken hangt af van de context: de betekenis van de zin "hij is president van Amerika" wordt bepaald door welke 'hij' precies wordt bedoeld. In de wiskunde hangt de waarheidswaarde van een uitspraak als 'n is even' af van welke n precies wordt bedoeld.

Uitspraken met algemene verwijzingen ('hij', 'die', 'het', 'n', 'x', ...) noemen we *predicaten*. In de wiskunde noemen we de letters ('variabelen' of 'parameters') die voorkomen in dergelijk uitspraak of formule 'vrije variabelen'. Voor de uitspraken

(a) $n^2 = 4$ (b) $n^2 = -4$ (c) $n^2 \geq 0$

is (a) $n^2 = 4$ enkel waar als $n = 2$ of $n = -2$, terwijl (b) $n^2 = -4$ voor geen enkel natuurlijk getal n waar is (maar wel voor de complexe getallen $\pm 2i$). Uitspraak (c) $n^2 \geq 0$ is waar voor alle natuurlijke getallen n (maar niet voor bijvoorbeeld het complexe getal i, want $i^2 = -1 < 0$).

Er zijn essentieel drie verschillende manieren om een dergelijke 'vrije variabele n' te 'binden', dus vast te leggen. We kunnen inderdaad bedoelen dat de uitspraak al dan niet moet gelden voor

- één *concrete* waarde: $n = 2$, of $n = 6$
- *alle* mogelijke waarden van n (eventueel enkel van een bepaald type)
- *minstens één* waarde van n (eventueel van een bepaald type)

De beweringen worden pas waar of vals zodra dergelijke afspraak is gemaakt. De twee laatste gevallen kunnen we uitdrukken met "voor alle" en "er bestaat" , en ze geven aan *voor hoeveel* waarden (dus voor welke *kwantiteit* van waarden) de uitspraak zou moeten gelden: voor allemaal of voor minstens één. Men noemt ze in de logica daarom **kwantoren** en men voert volgende notaties in:

Definitie 14.3.1.

Als $p(a)$ een predicaat is dat afhangt van een veranderlijke a, en A een verzameling, dan betekent

$\boxed{\forall a \in A : p(a)}$ *voor elk* element a van A geldt $p(a)$

$\boxed{\exists a \in A : p(a)}$ *er bestaat (minstens) een* element a van A waarvoor $p(a)$ geldt

$\boxed{\exists ! a \in A : p(a)}$ *er bestaat precies één* element a van A waarvoor $p(a)$ geldt

Hierbij noemen we

$\forall$ de **universele kwantor** of **alkwantor**
$\exists$ de **existentiële kwantor** of **bestaanskwantor**
$\exists !$ de **uniciteitskwantor**

Als de verzameling A duidelijk blijkt uit de context wordt ze soms weggelaten, en schrijven we ook

$$\forall a : p(a) \quad \exists a : p(a) \quad \exists ! x : p(x)$$

of

$$(\forall a) p(a) \quad (\exists a) p(a) \quad (\exists ! x) p(x)$$

Opmerking 14.3.1.

- We schrijven de kwantor in echte formules altijd vóór het predicaat, en dus niet $\cancel{p(a), \forall a \in A}$.

Maar, in een meer informele context schrijven we soms toch uitdrukkingen als

$$x > 0 \implies |x| = x \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

- In sommige handboeken schrijft men *altijd* haakjes rond een kwantor $(\forall x) : p(x)$, en dan laat men de dubbele punt soms weg $(\forall x)p(x)$. Sommigen gebruiken een komma: $\forall x, p(x)$
- De *naam* van de variabele heeft geen belang: de uitspraken $\forall a \in A : p(a)$ en $\forall x \in A : p(x)$ betekenen precies hetzelfde, en we noemen dergelijke veranderlijke een **gebonden veranderlijke**, of soms ook een **dummy** veranderlijke.
- Meestal spreekt men af dat een kwantor betrekking heeft op *alles wat er na komt*, tenzij het door haakjes anders wordt bepaald. Dus

$$\forall a \in A : p(a) \Rightarrow q$$

betekent $\forall a \in A : (p(a) \Rightarrow q)$, en dus dat voor elk willekeurig element $a \in A$ geldt: zodra $p(a)$ waar is, is ook q waar. Concreet zal q dus zeker waar zijn zodra er minstens één a is waarvoor $p(a)$ geldt. Maar

$$(\ \forall a \in A : p(a)\ ) \Rightarrow q.$$

betekent dat pas als $p(a)$ geldt voor elke $a \in A$, dan ook q waar is. Dat is dus een veel *sterkere* voorwaarde voor dezelfde conclusie q, en het is dus een *zwakkere* uitspraak dan $\forall a \in A : (p(a) \Rightarrow q)$.

Met deze notaties kunnen we nu compact schrijven

- $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$ voor 'er bestaat een natuurlijk getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 4'. (waar)
- $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$ voor 'alle natuurlijke getallen hebben als kwadraat 4'. (vals)
- $\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 \geq 0$ voor 'alle gehele getallen hebben een positief kwadraat'. (waar)

Het is belangrijk dat je deze uitdrukkingen met kwantoren spontaan leert lezen als volwaardige zinnen.

14.3.1 Negatie van kwantoren

Er is een interessante wisselwerking tussen kwantoren en ontkenningen: beweren dat *niet iedereen* geslaagd is, betekent dat er *iemand is* die niet geslaagd is. En beweren dat *iedereen* iets *niet* heeft komt op hetzelfde neer als beweren dat *niemand* dat ding *wel* heeft.

Voorbeeld 14.3.1.

Als X de verzameling is van alle studenten die in deze cursus hebben gelezen en $p(x)$ is de bewering "student x heeft blond haar", dan lezen we de uitspraak

$$\forall x \in X : p(x)$$

als "alle studenten die in deze cursus hebben gelezen zijn blond".

Deze uitspraak kan in de praktijk zowel waar zijn als vals, maar ze is uiteraard *niet waar* van zodra er minstens één student is die niet blond is. In symbolen uitgedrukt betekent dit

$$\neg(\forall x \in X : p(x)) \iff \exists x \in X : \neg p(x).$$

(Opdracht: lees deze uitdrukking als een gewone Nederlandse volzin.)

Op gelijkaardige manier betekent 'niemand is geslaagd' hetzelfde als 'iedereen is gebuisd'. In formules, met $q(x)$ de bewering "x is geslaagd", wordt dit:

$$\neg(\exists x \in X : q(x)) \iff \forall x \in X : \neg q(x).$$

en 'niemand is gebuisd' betekent hetzelfde als 'iedereen is geslaagd':

$$\neg(\exists x \in X : \neg q(x)) \iff \forall x \in X : q(x).$$

(Opdracht: lees deze uitdrukkingen als gewone Nederlandse volzinnen.)

Samengevat: je mag de negatie voorbij een kwantor schuiven, maar dan verandert de kwantor: $\forall \leftrightarrow \exists$:

Definitie 14.3.2 (Negatie van kwantoren)**.** Voor elk predicaat $p(x)$ geldt:

(1)	$\neg(\forall x \in X : p(x)) \iff \exists x \in X : \neg p(x)$	of	$\neg(\forall x)p(x) \iff (\exists x)(\neg p(x))$
(2)	$\neg(\exists x \in X : p(x)) \iff \forall x \in X : \neg p(x)$	of	$\neg(\exists x)p(x) \iff (\forall x)(\neg p(x))$

In woorden: 'niet er bestaat' is hetzelfde als 'voor alle geldt niet',

en ook: 'niet voor alle' is hetzelfde als 'er bestaat waarvoor niet'.

14.3.2 Volgorde van kwantoren

Als in een wiskundige formule meerdere kwantoren voorkomen, dan is de *volgorde* soms erg belangrijk.

Oefening 14.3.1. Zij P een verzameling potjes van allemaal onderling *verschillende* formaten, D de verzameling van de bijhorende deksels. Zij $p(x, y)$ met $x \in D$ en $y \in P$ het predicaat 'x past op y'.

Kies voor elk van volgende formules de overeenkomstige Nederlandse zin, en zeg of de bewering waar of onwaar is.

A Op elk potje past een dekseltje
B Er is een potje waar elk dekseltje op past
C Er is een potje waarop geen dekseltje past
D Er is een dekseltje dat op geen enkel potje past
E Er is een dekseltje dat op elk potje past
F Er is een dekseltje dat op een potje past
G Elk dekseltje past op elk potje
H Elk dekseltje past op een potje

1. $\forall x \in D : \forall y \in P : p(x, y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
2. $\forall y \in P : \forall x \in D : p(x, y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
3. $\exists x \in D : \exists y \in P : p(x, y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
4. $\exists y \in P : \exists x \in D : p(x, y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
5. $\exists x \in D : \forall y \in P : p(x, y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
6. $\forall y \in P : \exists x \in D : p(x, y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
7. $\forall x \in D : \exists y \in P : p(x, y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout

8. $\exists y \in P : \forall x \in D : p(x,y)$

A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout

9. $\exists a \in P : \forall b \in D : p(a,b)$

A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout

10. $\exists x \in P : \forall y \in D : p(y,x)$

A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout

Deze oefening kan worden veralgemeend in volgende eigenschappen:

Eigenschap 14.3.1 (Verwisselen van kwantoren)**.** Voor elk predicaat $p(x,y)$ geldt:

$$\begin{array}{llcl}
(1) & \forall x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) & \Longleftrightarrow & \forall y \in Y : \forall x \in X : p(x,y) \\
(2) & \exists x \in X : \exists y \in Y : p(x,y) & \Longleftrightarrow & \exists y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) \\
(3) & \exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) & \Longrightarrow & \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) \\
(4) & \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) & \not\Longrightarrow & \exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y)
\end{array}$$

Dit betekent:

- Gelijksoortige kwantoren mogen altijd van plaats worden verwisseld: de bewering verandert niet van betekenis. Daarom mogen we ook schrijven $\forall x, y \in X$ of $\exists x \in X, y \in Y$.
- Een bestaanskwantor mag achter een alkwantor worden geschoven: de bewering blijft waar, maar wordt zwakker.
- Een alkwantor **mag niet** achter een bestaanskwantor worden geschoven: de bewering wordt dan mogelijk vals.

  Bij $\forall y \in Y : \exists x \in X$ kan de x afhangen van y, maar bij $\exists x \in X : \forall y \in Y$ kan dat *niet*.

Opmerking 14.3.2.

- Onthoud: **als op elk potje een dekseltje past, dan betekent dat *niet* dat er een dekseltje is dat op elke potje past** (zie (d)). Maar, als er omgekeerd toch een dekseltje zou zijn dat op elk potje past, dan is er natuurlijk automatisch ook voor elke potje een passend dekseltje: namelijk dat 'universeel passend' dekseltje (zie (c)).
- Bij een bewering van de vorm $\forall x \in X : \exists y \in Y : p(x,y)$ volstaat het dat voor elke x een mogelijk *andere* y gevonden wordt: de y is dus mogelijk afhankelijk van x, je zou met functie-notatie ook $y(x)$ kunnen schrijven, of met een subscript y_x:

  $$\forall x \in X : \exists y_x \in Y : p(x, y_x)$$

  Bij een bewering van de vorm $\exists y \in Y : \forall x \in X : p(x,y)$ moet er één vaste y bestaan die *niet* afhangt van x, maar voor alle x tegelijk werkt. Dat is een –veel– strengere eis.
- In deze eigenschap wordt steeds de kwantor-met-de-variabele van plaats verwisseld. De eigenschap geldt *niet* als je *enkel de kwantor* verplaatst. In dat geval krijg je een nieuwe uitspraak die in het algemeen geen logisch verband heeft met de oorspronkelijke bewering:

  $$\exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) \quad \text{vs} \quad \forall x \in X : \exists y \in Y : p(x,y)$$

Oefening 14.3.2. Vergelijk de betekenis van volgende twee beweringen:

1. $\forall m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : n > m$

14.3 Kwantoren

2. $\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : n > m.$

14.4 Verzamelingen

Een belangrijk aspect van de wiskunde is het *ontdekken* of *introduceren* van *structuur* in allerlei dingen om vervolgens die structuur verder te bestuderen. Dat werkt zo voor hoeveelheden, groottes, vormen, configuraties, uitspraken enzovoort.

De eenvoudigste vorm van structureren is gewoon dingen samennemen, dat heet 'verzamelen'. De wiskundige studie daarvan is de 'verzamelingenleer'. Het is een hoogst merkwaardig feit dat een zodanig eenvoudig idee als het 'verzamelen van verschillende dingen in één nieuw ding dat we dan een verzameling noemen' een uiterst krachtige taal oplevert om op effectieve wijze over allerlei erg complexe dingen te kunnen spreken en denken.

Definitie 14.4.1.

– Een **verzameling** is een grondbegrip in de wiskunde. We zullen hier niet ingaan op exacte definities of axioma's. Volgens een intuïtieve definitie kan je een verzameling beschouwen als een geheel van objecten zodanig dat

  - je van *elk* object ondubbelzinnig kan zeggen of het al dan niet tot dat geheel behoort, en
  - je elk object ondubbelzinnig kan identificeren. Dit betekent dat je moet kunnen nagaan wanneer twee objecten aan elkaar gelijk zijn en dus in feite hetzelfde object zijn. Als je dat niet zou kunnen, zou immers zelfs het tellen van de elementen al een probleem zijn.

  Een verzameling wordt dus *enkel* en *volledig* bepaald door de objecten die ertoe behoren.

  Meestal noteren we een verzameling met een hoofdletter zoals A, B of X. Soms krijgen verzamelingen standaard notaties, zoals de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ of de reële getallen $\mathbb{R}$.

– De **elementen** van een verzameling zijn de objecten waaruit die verzameling bestaat. Elementen worden meestal aangeduid met kleine letters $a, b, x, y \ldots$.
  Notatie: $\boxed{a \in A}$ betekent "object a behoort tot verzameling A" of "a is element van A".
  Notatie: $\boxed{a \notin A}$ betekent "object a behoort *niet* tot verzameling A".
  Notatie: $\boxed{A = \{a, b, c\}}$ betekent "verzameling A bestaat uit objecten a, b en c".

– Verzamelingen A en B zijn **gelijk**, genoteerd $\boxed{A = B}$, als A en B *dezelfde elementen* hebben.

  Hieruit volgt bijvoorbeeld dat de elementen van een verzameling geen 'volgorde' hebben en dat er ook geen 'dubbels' in een verzameling kunnen zitten. De verzamelingen $\{a, b\}$ en $\{b, a\}$ zijn dus aan elkaar gelijk want ze hebben dezelfde elementen. Om dezelfde reden zijn ook $\{a, b\}$ en $\{a, a, b\}$ aan elkaar gelijk.

– Een **lege verzameling** is een verzameling *zonder elementen*. We noteren ze als $\boxed{\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \{\,\}}$.

  Omdat verzamelingen gelijk zijn als ze gelijke elementen hebben, is er maar één lege verzameling.

– Een **deelverzameling** van een verzameling B is een verzameling A waarbij elk element van A ook tot B behoort. Zo zijn $\{a\}$ en $\{a, b\}$ deelverzamelingen van $\{a, b, c\}$, maar a en $\{a, d\}$ niet.
  Notatie: $\boxed{A \subseteq B}$, of ook $\boxed{A \subset B}$, betekent "verzameling A is deelverzameling van B".

  Voor de relatie $A \subseteq B$ gebruikt men soms ook de **inclusie** van A in B.

  Merk op dat om historische redenen de notatie hier *verschilt* van de verwante symbolen $<$ en $\leqslant$. Het symbool $<$ betekent *strikt kleiner dan*, terwijl $\leqslant$ *kleiner dan of gelijk aan* betekent. Bij verzamelingen daarentegen heeft het symbool $\subset$ precies dezelfde betekenis als $\subseteq$, en er geldt dus *wel* dat $A \subset A$.

  Notatie: $\boxed{A \nsubseteq B}$ of $A \not\subset B$ betekent dat A geen deelverzameling van B is.

  Notatie: $\boxed{A \subsetneq B}$ betekent $A \subseteq B$ maar $A \neq B$.

  Dus als $A \subsetneq B$ dan is toch $A \subseteq B$, maar als $A \nsubseteq B$ dan geldt (per definitie) dat *niet* $A \subseteq B$.

14.4 Verzamelingen

Een **echte deelverzameling** van B is een deelverzameling A waarvoor $A \subsetneq B$ en $A \neq \emptyset$. Dus, elke verzameling heeft de lege verzameling en zichzelf als *onechte* deelverzamelingen. (Dat zijn dus *twee* onechte deelverzamelingen, behalve in het geval $B = \emptyset$.)

– Een **eindige verzameling** is een verzameling die slechts een eindig aantal elementen bevat. Notatie: $\#A$ is "het aantal elementen van A". Met $A = \{1, 2\}$ is $\#A = \#\{1, 2\} = 2$, en $\#\{\} = 0$.
Een **singleton** is een verzameling met *één* element en
een **paar** is een verzameling met *twee* elementen.

Voorbeeld 14.4.1 (Basisvoorbeelden)**.**

- Alle leerlingen van een school vormen een verzameling. Leerlingen An en Bart zijn elementen van die verzameling, leerkracht Carla niet. Leerkracht Carla is wel een element van de verzameling van de leerkrachten van die school. De verzameling leerlingen heeft erg veel deelverzamelingen: de leerlingen van Klas 1A vormen samen een deelverzameling, maar ook alle meisjes, alle leerlingen met een bril, alle leerlingen die met de fiets komen, en alle leerlingen die al een Nobelprijs Economie hebben behaald vormen telkens een deelverzameling. De laatste deelverzameling van leerling-Nobelprijswinnaars is op dit ogenblik voor alle Vlaamse scholen *leeg*: er zijn zo (nog) geen leerlingen.

- Alle natuurlijke getallen vormen een verzameling. De getallen 42 en 1302 zijn elementen van die verzameling. De even getallen, de priemgetallen en de delers van 24 vormen telkens een deelverzameling.

Er zijn verschillende manieren om een concrete verzameling te definiëren.

Definitie 14.4.2.
Een verzameling wordt in de praktijk gegeven door één van volgende mogelijkheden:

(a) een **opsomming**, waarbij de elementen worden *opgesomd* tussen accolades:

$A = \{1, 2, 3\}$, de verzameling met de getallen $1, 2$ en 3.

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, de verzameling van de cijfers 0 t.e.m 9.

$C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$, de (oneindige) verzameling van de even natuurlijke getallen, waarbij de puntjes 'enzovoorts' betekenen. Er geldt dat $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$.

(b) een **omschrijving**, waarbij de elementen aan een *voorwaarde* moeten voldoen:

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is deelbaar door } 2\}$ is dezelfde verzameling C van de even natuurlijke getallen als hierboven. Je leest dit als: 'C is de verzameling natuurlijke getallen x *waarvoor geldt dat* x deelbaar is door 2'.
Ja kan ook schrijven $C = \{x \mid x \text{ is een natuurlijk getal dat deelbaar is door } 2\}$ of $C = \{x \mid x \text{ is een even natuurlijk getal } 2\}$

Een rechte streep | tussen accolades lees je als 'waarvoor geldt dat'.

(c) een **constructieve definitie**, waarbij elementen worden gegeven door een *formule*:

$D = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, de verzameling van alle kwadraten van natuurlijke getallen.

Je kan opmerken dat een getal dus behoort tot D als het kan geschreven worden als n^2 voor een zeker natuurlijk getal n. Dus kunnen we ook volgende omschrijvingen geven:

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is een kwadraat}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ er bestaat een getal } x \in \mathbb{N} \text{ zodat } x^2 = n\}.$$

14.4 Verzamelingen

De verzameling C van de even natuurlijke getallen kunnen we met deze methode dus ook schrijven als

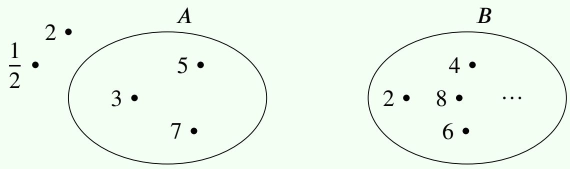
$$C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

De naam van de variabele binnen in de accolades heeft immers geen belang.

(d) een **Venndiagram**:

Een *Venndiagram* is een gesloten kromme (de 'verzameling') waarbinnen de elementen van A door stippen worden voorgesteld. Dingen die geen elementen van A zijn krijgen een stip *buiten* de kromme. We tekenen geen stippen *op* de kromme. Niet alle elementen van A moeten worden weergegeven door een stip, maar in dat geval zetten we drie puntjes in de verzameling. De naam van de verzameling wordt meestal buiten de kromme geplaatst.

Voorbeelden: $A = \{3, 5, 7\}$ en $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$



Opmerking 14.4.1.

(a) We gebruiken dus accolades { en } om verzamelingen te noteren. We herhalen:

- De volgorde van elementen heeft geen belang: $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- Eventuele dubbels hebben geen belang: $\{a, a\} = \{a\} = \{a, a, a\}$.
- Een rechte streep | tussen de accolades lees je als 'waarvoor geldt dat'.

(b) De lege verzameling is een deelverzameling van elke verzameling A. (Inderdaad, de lege verzameling bevat geen elementen, we kunnen dus geen element in de lege verzameling vinden dat niet tot A behoort, dus elk element in de lege verzameling behoort tot A.)

(c) Uit de definities volgt dat

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ en } B \subseteq A.$$

Dit betekent dat we de gelijkheid van twee verzamelingen A en B kunnen aantonen door $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$ te bewijzen. Deze techniek wordt erg dikwijls gebruikt om een gelijkheid van verzamelingen aan te tonen.

(d) Het is belangrijk om goed onderscheid te maken tussen de symbolen $\in$ en $\subseteq$. Ze hebben een verschillende betekenis, maar zijn wel nauw verwant want

$$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A.$$

Sommige veel voorkomende verzamelingen krijgen een speciale notatie:

Definitie 14.4.3.

(a) Volgende getallenverzamelingen hebben een standaardnotatie:

- $\mathbb{N}$ is de verzameling van natuurlijke getallen $0, 1, 2, 3 \ldots$.
- $\mathbb{Z}$ is de verzameling van gehele getallen $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.
- $\mathbb{Q}$ is de verzameling van rationale getallen (breuken).

- $\mathbb{R}$ is de verzameling van reële getallen ("kommagetallen").
- $\mathbb{C}$ is de verzameling van complexe getallen.

Er geldt $\boxed{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}}$.

(b) De verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0 wordt genoteerd als:

- $\boxed{\mathbb{N}_0} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$.

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}_0, \mathbb{Q}_0$ en $\mathbb{R}_0$ gedefinieerd.

Pas op: Engelstalige handboeken en websites hebben dikwijls een *omgekeerde afspraak*: $\mathbb{N}$ zijn dan de natuurlijke getallen *zonder nul*, en $\mathbb{N}_0$ zijn de natuurlijke getallen *inclusief nul*.

Sommige handboeken gebruiken notaties $\mathbb{N}_{>0}, \mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$, met de voor zich sprekende betekenis.

(c) De verzameling van de (strikt) positieve reële getallen wordt genoteerd als:

- $\boxed{\mathbb{R}^+} = \{x \in \mathbb{R} | \; x \geqslant 0\}$ en $\mathbb{R}^+_0 = \{x \in \mathbb{R} | \; x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^+ | \; x \neq 0\}$.

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$ gedefinieerd.

(d) De *intervallen* van reële getallen:

$]2, 3[$: de reële getallen strikt groter dan 2 en strikt kleiner dan 3.

$[1, 7[$: de reële getallen groter of gelijk aan 1 en strikt kleiner dan 7.

Dus $]2, 3[= \{x \in \mathbb{R} | \; 2 < x < 3\}$ en $[1, 7[= \{x \in \mathbb{R} | \; 1 \leq x < 7\}$.

(e) De even en de oneven getallen:

$$2\mathbb{N} = \{2n | \; n \in \mathbb{N}\} \quad \text{en} \quad 2\mathbb{N} + 1 = \{2n + 1 | \; n \in \mathbb{N}\}.$$

Voorbeeld 14.4.2. De verzameling van de natuurlijke getallen kan geschreven worden als :

$\mathbb{N}$	$= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	opsomming	de lijst van natuurlijke getallen
	$= \{ \; x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \; \}$	omschrijving	de gehele getallen waarvoor geldt dat ze positief zijn
	$= \{ \; \lvert x \rvert \mid x \in \mathbb{Z} \; \}$	constructief	de verzameling van de absolute waardes van de gehele getallen
	$= \mathbb{Z}_{\geq 0}$		een alternatieve notatie voor de positieve gehele getallen

Voorbeeld 14.4.3. De verzameling van de even getallen kan als volgt worden opgeschreven:

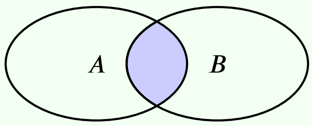
$\{0, 2, 4, 6, \dots\}$	opsomming
$\{n \in \mathbb{N} \mid n$ is even $\}$	omschrijving
$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m\}$	omschrijving (in formule)
$\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$	constructief

14.5 Bewerkingen met verzamelingen: unie en doorsnede

Je kan in zekere zin 'rekenen' met verzamelingen door volgende bewerkingen uit te voeren:

Definitie 14.5.1. Met twee verzamelingen A en B associëren we:

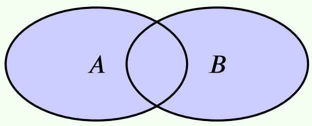
- $\boldsymbol{A \cap B}$ = de **doorsnede** van A en B.
  $A \cap B$ is de verzameling van alle elementen die behoren tot A **en** tot B.

  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$

  We noemen twee verzamelingen A en B **disjunct** als $A \cap B = \emptyset$.

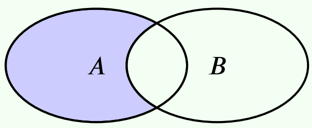
- $\boldsymbol{A \cup B}$ = de **unie** of **vereniging** van A en B.
  $A \cup B$ is de verzameling van alle elementen die behoren tot A **of** tot B.

  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$

  Als $C = A \cup B$ waarbij $A \cap B = \emptyset$, dan noemt men C de **disjuncte unie** van A en B.

- $\boldsymbol{A \setminus B}$ = het **verschil** van A en B.
  $A \setminus B$ is de verzameling van alle elementen die behoren tot A maar niet tot B.

  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$

  Merk op dat in het algemeen $A \setminus B \neq B \setminus A$ en dat
  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Voorbeeld 14.5.1. Bepaal volgende verzamelingen.

(a) $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

(b) $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

(c) $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

(d) $\{2,3,4\} \setminus \{1,2,3\} = \{4\}$

Voorbeeld 14.5.2. Bepaal volgende unies, doorsnedes en verschillen van intervallen:

(a) $[2,4[\cap]3,5[=]3,4[$

(b) $[2,4[\cup]3,5[= [2,5[$

(c) $[2,4[\setminus]3,5[= [2,3]$

(d) $]3,5[\setminus [2,4[= [4,5[$

(e) $[2,4[\cap [5,6] = \emptyset$

(f) $[2,4[\cup [5,6]$ is geen interval. Zo zit bijvoorbeeld 4.5 niet in deze verzameling.

Opmerking 14.5.1.

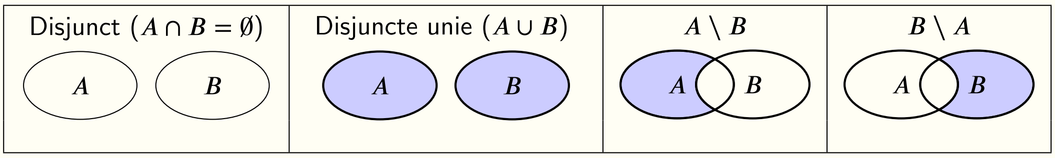
De doorsnede $A \cap B$ van twee verzamelingen is de *grootste* verzameling die zowel een deelverzameling is van A als van B. De unie is de *kleinste* verzameling waarvan zowel A als B deelverzamelingen zijn.

$$\begin{array}{ccccc} & \subsetneq & A & \subsetneq & \\ A \cap B & & & & A \cup B \\ & \subsetneq & B & \subsetneq & \end{array}$$

14.5 Bewerkingen met verzamelingen: unie en doorsnede

Opmerking 14.5.2.

Disjuncte verzamelingen, de disjuncte unie, $A \setminus B$ en $B \setminus A$ stel je als volgt voor met Venndiagrammen:



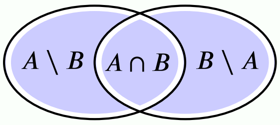
Er zijn enkele voor de hand liggende eigenschappen voor doorsnedes, unies en verschillen met zichzelf of de lege verzameling. Er is ook een handigheid om indien nodig elke unie te schrijven als een *disjuncte* unie:

Eigenschap 14.5.1. Voor elke verzameling A geldt:

$$A \cap A = A \qquad A \cup \emptyset = A \qquad A \setminus A = \emptyset$$

$$A \cup A = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \setminus \emptyset = A$$

Elke unie kan geschreven worden als een disjuncte unie:

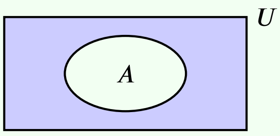


$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Dikwijls zijn alle relevante verzamelingen in een bepaalde context *deelverzamelingen van een vaste verzameling*, bijvoorbeeld de reële getallen in de context van het bestuderen van reële functies. We noemen die vaste verzameling dan een **universele verzameling** (of **universum**) U en tekenen haar Venndiagram met een rechthoek in plaats van een ovaal. Als er een universum is, dan bestaat er niets 'buiten' dat universum. We kunnen dan het *complement* van een verzameling A definiëren als alles wat *niet* in A zit:

Definitie 14.5.2.

Het **complement** A^c van een deelverzameling A in een universum U is de verzameling van de elementen van U die *niet* tot A behoren. A^c is dus gelijk aan het verschil van U en A:



$$\boxed{A^c = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}}$$

Volgende eigenschappen kan je aflezen op Venndiagrammen, zoals in de oefeningen wordt besproken.

Eigenschap 14.5.2. Voor A, B en C deelverzamelingen van een universele verzameling U geldt:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	en	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	(associativiteit)
$A \cup B = B \cup A$	en	$A \cap B = B \cap A$	(commutativiteit)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	en	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(distributiviteit)
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	en	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	(wetten van De Morgan)
$A \cup A^c = U$	en	$A \cap A^c = \emptyset$	(complementering)
$(A^c)^c = A$			(dubbel complement)

14.6 Bewerkingen met verzamelingen: product en macht

Van twee verzamelingen kan je niet alleen hun doorsnede, unie en verschil bepalen, maar ook hun *product*:

Definitie 14.6.1.

$\boldsymbol{A \times B}$, het **cartesiaans product** of de **productverzameling** van A en B, is de verzameling van koppels (= geordende tweetallen) (a, b) met $a \in A$ en $b \in B$:

$$\begin{array}{c|cc} b_2 & (a_1, b_2) & (a_2, b_2) \\ b_1 & (a_1, b_1) & (a_2, b_2) \\ \hline & a_1 & a_2 \end{array} \qquad \boxed{A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ en } b \in B\}.}$$

De productverzameling is moeilijk voorstelbaar met venndiagrammen. Je kan wel $A = \{a_1, a_2\}$ horizontaal tekenen en $B = \{b_1, b_2\}$ verticaal, dan is $A \times B$ een rechthoek met 'zijden' A en B.

Als A en B eindige verzamelingen zijn, is $A \times B$ ook eindig en $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$.

Als $A = B$ dan schrijven we $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$ en $A^n = A \times \cdots \times A$ voor de koppels, drietallen en n-tallen van elementen van A.

Twee koppels (a_1, b_1) en (a_2, b_2) zijn gelijk als en slechts als $a_1 = a_2$ en $b_1 = b_2$. Let op dat bij een *koppel* de volgorde dus *wel* van belang is. Als $a \neq b$ dan is $(a, b) \neq (b, a)$. Dit is *anders* dan bij het *paar* $\{a, b\}$ want bij *verzamelingen* geldt $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Voorbeeld 14.6.1 (Basisvoorbeelden productverzameling)**.**

(a) $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

(b) $\{1, 2\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

(c) $\{1, 2, 3\} \times \{2, 3, 4\} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

(d) $\{2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3\} = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

Als je geïnteresseerd bent in een bepaald soort dingen, is het altijd nuttig die dingen alvast in een *verzameling* te stoppen, want dan kan je er meestal eenvoudiger over spreken en mee redeneren.

Als je één of andere verzameling A hebt, zal je al snel interesse hebben voor de *deel*verzamelingen van A. Je kan dan *al* die deelverzamelingen alvast ook in een nieuwe verzameling stoppen:

Definitie 14.6.2.

De **machtsverzameling** $\boldsymbol{P(A)}$ van een verzameling A is de verzameling van de deelverzamelingen van A:

$$\boxed{P(A) = \{X \mid X \subset A\}}.$$

Voorbeeld 14.6.2. Als $A = \{a, b, c\}$, dan is

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

De lege verzameling $\emptyset$ is een element van de machtsverzameling van elke verzameling A omdat $\emptyset \subset A$ voor elke A. Ook de verzameling A zelf is steeds een element van $P(A)$.

Met volgende eigenschap kan je relatief eenvoudig het aantal elementen van $P(A)$ bepalen:

14.6 Bewerkingen met verzamelingen: product en macht

Eigenschap 14.6.1. Als A een eindige verzameling is met $\#A = n$, dan is

$$\boxed{\#P(A) = 2^n}.$$

Je kan dit ook schrijven als $\#P(A) = 2^{\#A}$.

Dit verklaart de naam *machtsverzameling* voor $P(A)$. Men noteert soms $2^A \stackrel{\text{def}}{=} P(A)$.

Merk op dat het aantal deelverzamelingen zeer snel groot wordt, zelfs voor relatief kleine verzamelingen A. Zo heeft een verzameling met 20 elementen al 2^{20} deelverzamelingen, dat zijn er meer dan een miljoen.

Je kan begrijpen waarom een verzameling met n elementen precies 2^n deelverzamelingen heeft door ze allemaal op te schrijven voor verzamelingen met $0,1,2,\cdots$ elementen:

A	deelverzamelingen van A	aantal
$\emptyset = \{\}$	$\{\}$	$1 = 2^0$
$\{a\}$	$\{\}$, $\{a\}$	$2 = 2^1$
$\{a,b\}$	$\{\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$	$4 = 2^2$
$\{a,b,c\}$	$\{\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$, $\{c\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$	$8 = 2^3$
$\{a,b,c,d\}$	$\{\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$, $\{c\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$ $\{d\}$, $\{a,d\}$, $\{b,d\}$, $\{a,b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,b,c,d\}$	$16 = 2^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Je merkt dat telkens als je een element aan de verzameling A toevoegt, het aantal deelverzamelingen van A *verdubbelt*. Inderdaad, enerzijds behoud je natuurlijk alle vorige deelverzamelingen, maar anderzijds krijg je extra deelverzamelingen door het nieuwe element aan elke van de vorige deelverzamelingen toe te voegen.

14.7 Hoe oplossingen opschrijven?

Wiskunde wordt dikwijls geassocieerd met 'formules' en 'rekenen', maar eigenlijk is 'redeneren op basis van structuren' een veel belangrijker aspect. Dergelijke *redeneringen* worden typisch weergegeven in gewoon Nederlands. Daarbij worden weliswaar regelmatig formules en berekeningen gebruikt, en sommige uitdrukkingen krijgen een specifieke technische betekenis, maar de redenering zelf bestaat bijna altijd uit Nederlandse zinnen. Wie wiskunde leert moet eerst vertrouwd worden met dit taalgebruik, en moet het vervolgens ook zelf leren toepassen bij het oplossen van oefeningen.

Enkele belangrijke principes bij het *opschrijven* van wiskunde zijn:

Axioma 14.7.1. Een wiskundige tekst moet voldoen aan volgende voorwaarden:

(a) **Duidelijk**: wat er staat moet een betekenis hebben, die voor de lezer zo makkelijk mogelijk begrijpbaar is, zonder dubbelzinnigheden of onvolledigheden.

(b) **Exact**: wat er staat moet juist zijn.

(c) **Beknopt**: wat er staat is enkel wat ook echt nodig is, in korte zinnen zonder overtollige uitweidingen.

(d) **Voorleesbaar**: wat er staat kan je luidop voorlezen. Dat *klinkt* dan minstens als een normale betekenisvolle tekst.

Opmerking 14.7.1.

- Gebruik deze richtlijnen bij toetsen en examens, maar ook bij opdrachten, tijdens oefenzittingen en als je zelf oefeningen oplost.
- Een duidelijk, exact en beknopt taalgebruik heeft onmiddellijk volgende voordelen:
  - je kan zelf makkelijker je oplossing *onthouden* en *nakijken*
  - je kan zelf makkelijker de oplossing *vinden* met duidelijke, exacte en beknopte tussenstappen
  - het *verhoogt je punten* bij examens
  - gedachten en redeneringen duidelijk, exact en beknopt kunnen weergeven is ook *buiten het domein van de wiskunde* belangrijk, bijvoorbeeld bij sollicitatie- of evaluatiegesprekken.

Wie het eens van iemand anders wil horen kan terecht bij volgende video:

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/p8LIJVmPj6g

Eigenschap 14.7.1. De **oplossing van een oefening** heeft meestal volgende globale structuur, die je kent van de lessen Nederlands:

(a) **Inleiding**: definitie van de termen, variabelen of eigenschappen die je zal gebruiken. Indien nodig geef je een kort overzicht van de structuur van je oplossingsmethode.

(b) **Hoofdtekst**: volledige uitwerking van de oplossing, met een duidelijke logische structuur, volledige Nederlandse zinnen en zo nodig duidelijke en correcte formules, diagrammen en tekeningen.

(c) **Conclusie**: een bondige samenvatting van je oplossing, met het duidelijke *eindantwoord*.

Voor de meeste oefeningen volstaat zowel voor de inleiding als voor de conclusie één (korte) zin.

14.7 Hoe oplossingen opschrijven?

Voorbeeld 14.7.1. Enkele goede voorbeelden van mogelijke inleidingen.

- Noem n het aantal konijnen op tijd $t = 0$. Dan is ...
- Zij $\vec{v} = (x, y)$ een willekeurige vector in het vlak. Dan is ...
- Noem de beginsnelheid van de bal v_b en de eindsnelheid v_e. Dan is ...

De inleiding hangt af van de precieze formulering van de vraag. Je moet de vraag *niet* herhalen. Als in de vraag zelf al letters zoals f, n of x worden gebruikt moet je die definitie *niet* noodzakelijk herhalen. Maar als in de vraag geen n of x voorkomt is gebruik van x of n zonder verdere uitleg *fout*. Je mag natuurlijk wel zonder meer de *algemeen gekende* symbolen gebruiken zoals $\mathbb{N}$ of $\sqrt{2}$.

Voorbeeld 14.7.2. Enkele slechte voorbeelden van inleidingen.

- $n(t) + n(0) = 7 \implies 5$
- $|\vec{v}| = 2$ dus $x^2 + y^2 = 4$ ....
- Eerst hebben we snelheid x en uiteindelijk nog snelheid s.

Voorbeeld 14.7.3. Voorbeelden van het gebruik van Nederlandse zinnen.

- Een zin begint met een hoofdletter, en eindigt met een punt. Dat geldt ook als de zin eindigt met een formule zoals
$$a^2 + b^2 = c^2.$$
- Splits je redenering in verschillende puntjes. Laat voldoende witruimte. Maak duidelijke ~~corekties~~ correcties indien nodig. Gebruik kleur of $\boxed{\text{kaders}}$, maar best geen rood. Gebruik eventueel potlood.
- Formules zijn meestal een deel van een zin via bindwoorden als *dus*, *daarom*, *maar*, *welnu*, ...
- Voorbeelden:
  - Als $p_1, p_2, \dots, p_n$ de priemgetallen zijn kleiner dan N, dan definiëren we $K = p_1 p_2 \dots p_n + 1$.
  - Hieruit volgt dus dat
  $$\begin{aligned}(a+b)^2 - (a-b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)\\ &= 4ab\end{aligned}$$
  en deze uitdrukking is positief omdat zowel a als b positief zijn.

Voorbeeld 14.7.4. Voorbeelden van conclusies.

- Geef duidelijk aan wat je eindoplossing is:
$$\text{en dus } x = \frac{3}{2} + \frac{7}{5} = \frac{21+10}{14} = \frac{31}{14}.$$
- Zorg dat je antwoord inderdaad ook een oplossing is op de gestelde vraag. Duidelijk, exact en beknopt antwoorden dat er in totaal $n = 1438$ konijnen zijn op tijd $t = 7$ helpt niet als gevraagd werd naar het *aantal mannelijke* konijnen of naar het *gewicht* van de konijnen.
- Wees eerlijk en correct als je de oplossing niet vindt. Vermeld eventueel wel een deeloplossing of een strategie. Bijvoorbeeld: Ik kan deze vergelijking niet exact oplossen naar x, omdat ik de

precieze formule met de discriminant niet meer ken. In ieder geval zal $x \geq 0$, en dus zal het aantal konijnen op tijd $t = 7$ zeker groter zijn dan 1000.

14.8 Bewijstechnieken

14.8.1 Verschillende types eigenschappen met mogelijke bewijsvormen

Wiskundige eigenschappen en stellingen worden op allerlei verschillende manieren geformuleerd. Sommige specifieke vormen komen echter erg dikwijls voor en we sommen hier enkele mogelijkheden op, telkens met een kort voorbeeld. We vermelden al kort enkele bewijstechnieken die we verder uitgebreider behandelen.

(a) **Implicaties**: 'Als p, dan q', of met symbolen: $p \Rightarrow q$.

Dergelijke stellingen beweren dat uit een bepaalde hypothese p steeds de conclusie q volgt.

Voorbeeld: 'Als een natuurlijk getal een viervoud is, dan is het ook even'.

Bewijstechnieken: 'Bewijs door hypothese als extra gegeven toe te voegen' of 'Contrapositie'

(b) **Equivalenties**: 'p en q zijn equivalent', of met symbolen: $p \Leftrightarrow q$.

De bewering dat twee uitspraken equivalent zijn, betekent precies hetzelfde als zeggen dat de eerste de tweede impliceert, en omgekeerd. Wiskundigen gebruiken hiervoor erg graag de formulering 'als en slechts als'.

Voorbeeld: 'Twee rechten in het vlak zijn evenwijdig als en slechts als ze elkaar niet snijden'.

Bewijstechnieken: 'Bewijs de beide implicaties'

(c) **Een *universele* uitspraak** (met kwantor $\forall$): '*voor alle* gevallen, dus *altijd* geldt'.

Voorbeeld: kwadraten van reële getallen zijn altijd positief: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$.

Bewijstechnieken: 'Bewijs voor een generiek (willekeurig) element'

(d) **De *existentiële* uitspraak** (met kwantor $\exists$): '*er bestaan* gevallen, dus (minstens) *soms* geldt'

Voorbeeld: er bestaan natuurlijke getallen zodat de som van hun kwadraten terug een kwadraat is: $\exists x, y, z \in \mathbb{N}_0 : x^2 + y^2 = z^2$

Bewijstechnieken: 'Bewijs per voorbeeld'

(e) **De negatie van een existentiële uitspraak** (met $\neg\exists$): '*er bestaan geen* gevallen, dus *nooit* geldt'

Voorbeeld: er bestaan geen strikt positieve natuurlijke getallen zodat de som van hun derdemachten terug een derdemacht is: $\neg(\exists x, y, z \in \mathbb{N}_0 : x^3 + y^3 = z^3)$

Wegens de equivalentie $\neg(\exists x \in X : p(x)) \Longleftrightarrow \forall x \in X : \neg p(x)$ volstaat het te bewijzen dat voor $x \in X$ willekeurig gekozen $p(x)$ nooit geldt.

Bewijstechnieken: 'Bewijs voor een generiek element' of 'Bewijs uit het ongerijmde'

(f) **De negatie van een universele uitspraak** (met $\neg\forall$): '*niet in alle* gevallen, dus *niet altijd* geldt'

Voorbeeld: niet alle priemgetallen zijn oneven. (Dit is niet hetzelfde als $\forall$ priemgetal $p : p$ is even.)

Wegens de equivalentie $\neg(\forall x \in X : p(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in X : \neg p(x)$, zullen we zo'n negatie van de alkwantor dikwijls bewijzen door een voorbeeld waarvoor $p(x)$ niet opgaat, wat we in dit geval een **tegenvoorbeeld** noemen. Zo bestaat er wel degelijk een even priemgetal, namelijk 2.

Bewijstechnieken: 'Bewijs per tegenvoorbeeld'

Oefening 14.8.1. Zijn volgende uitspraken waar of onwaar? Probeer telkens zo duidelijk mogelijk je antwoord te verklaren.

1. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0$.

2. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0$.

3. $\neg(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0)$.

4. $\exists x \in \mathbb{C} : x^2 + 4 = 0$.

14.8.2 Soorten bewijzen

Naast de verschillende types eigenschappen, zijn er ook verschillende types bewijzen. We bespreken er hier enkele, telkens met een voorbeeld dat vertrekt van de basiseigenschappen van de ordening van de reële getallen. We veronderstellen daarom in dit deel dat volgende basiseigenschappen gekend zijn (en we zullen ze hier *niet* bewijzen):

Eigenschap 14.8.1 (De orde $\leq$ in $\mathbb{R}$).

(o1) Voor elk tweetal reële getallen a en b geldt precies één van de volgende mogelijkheden

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b.$$

(o2) Voor reële getallen a, b en c geldt

$$a < b \Rightarrow (a + c < b + c)$$

(o3) Voor reële getallen a, b en c geldt

$$(a < b \wedge c > 0) \Rightarrow ac < bc$$

$$(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc$$

(o4) Voor reële getallen a, b en c geldt

$$(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c.$$

Deze laatste eigenschap heet de **transitiviteit** van de ordening.

We bewijzen dat uit bovenstaande eigenschappen allerlei andere eigenschappen noodzakelijk volgen.

14.8.2.1 Directe bewijzen

Herinner u dat de enige manier waarop $p \Rightarrow q$ vals kan zijn, is als p waar is en q vals. Om een implicatie $p \Rightarrow q$ te bewijzen kunnen we daarom redeneren als volgt: omdat $p \Rightarrow q$ altijd waar is als p onwaar is valt er in dat geval niets te bewijzen. Het volstaat dus aan te nemen dat p waar is, en te bewijzen dat dan ook q waar is. Dat kan in vele gevallen door middel van een zogenaamd *direct bewijs*: we vertrekken van het gegeven, en redeneren of rekenen tot we bij het te bewijzen uitkomen.

Voorbeeld 14.8.1. Bewijs dat voor strikt positieve reële getallen a en b geldt dat $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.

Uitwerking: Het is bij het zoeken of opschrijven van een bewijs nooit verkeerd om duidelijk op te schrijven wat er gegeven is, en wat er precies moet bewezen worden:

Gegeven: Twee strikt positieve reële getallen a en b.

Te bewijzen: $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.

Een **direct bewijs van een implicatie $p \Rightarrow q$** voegt de hypothese p toe aan het gegeven, en probeert daarmee q te bewijzen:

Gegeven: Strikt positieve reële getallen a en b **met $a < b$**.

Te bewijzen: $a^2 < b^2$.

Nu zoeken we een logische redenering die aantoont hoe het *te bewijzen* volgt uit het *gegeven*. Omdat we iets willen weten over a^2 en b^2, lijkt een mogelijkheid om de gegeven ongelijkheid $a < b$ met a of b te vermenigvuldigen. Omdat a en b strikt positief zijn blijven de ongelijkheden behouden wegens eigenschap (o3) over de orde in $\mathbb{R}$ zodat

$$a < b \Rightarrow a^2 < ab \tag{4}$$

en

$$a < b \Rightarrow ab < b^2. \tag{5}$$

Omdat we aangenomen hebben dat $a < b$ waar is volgt nu dat $a^2 < ab$ en $ab < b^2$. Deze twee ongelijkheden bevatten beide ab en er geldt

$$(a^2 < ab) \text{ en } (ab < b^2) \;\Rightarrow\; a^2 < b^2. \tag{6}$$

Omdat $a < b$ weten we al dat $a^2 < ab$ en $ab < b^2$ en daarom geldt vanwege (6) dat $a^2 < b^2$ waar is.

De beweringen (4) en (5) volgen meteen uit eigenschap (o3) en (6) volgt uit eigenschap (o4).

Op deze manier hebben we een correcte *redenering gevonden*, nu moeten we die redenering ook nog duidelijke en correct *opschrijven*. Een enigszins dubieuze poging gaat als volgt:

Bewijs

$$\begin{array}{c}
a < b \\
\Downarrow a > 0 \;\; b > 0 \qquad \text{eig. (o3)} \\
a^2 < ab \quad \text{en} \quad ab < b^2 \\
\Downarrow \text{transitiviteit eig. (o4)} \\
(a^2 < ab) \wedge (ab < b^2) \;\Rightarrow\; a^2 < b^2
\end{array}$$

■

Dit is geen erg goed bewijs! In het bijzonder faalt het de *voorleestest*. Enkel voor wie het bewijs al kent, is duidelijk wat er wordt bedoeld. Deze versie is hoogstens bruikbaar als schets om het bewijs te visualiseren.

Nog dubieuzer is volgend 'bewijs':

Bewijs $a < b \Rightarrow (a^2 < ab \wedge ab < b^2) \Rightarrow a^2 < b^2$. ■

Een correct en volledig bewijs is een leesbare opeenvolging van Nederlandse zinnen, met woorden zoals 'volgt', 'dus' en 'omdat' die aangeven hoe de verschillende zinnen met elkaar samenhangen. Er mogen natuurlijk wiskundige symbolen worden gebruikt, maar het geheel is een leesbaar verhaal. We vermijden daarbij liefst pijlen om gevolgtrekkingen aan te geven. Een beter bewijs van de eigenschap ziet er bijvoorbeeld zo uit:

Bewijs Kies twee willekeurige positieve reële getallen zodat $a < b$. We moeten bewijzen dat $a^2 < b^2$.

Omdat a positief is, kunnen we in $a < b$ linkerlid en rechterlid vermenigvuldigen met a en geldt wegens eigenschap (o3) dat $a^2 < ab$.

Omdat ook b positief is, kunnen we $a < b$ ook vermenigvuldigen met b, en dus is ook $ab < b^2$

Wegens de transitiviteit van de ordening (eigenschap (o4)) volgt uit $a^2 < ab$ en $ab < b^2$ dat inderdaad $a^2 < b^2$. ■

14.8.2.2 Bewijs per voorbeeld

Een voor de hand liggende manier om te bewijzen dat iets bestaat, is om het te vinden! Dit noemt men soms een *bewijs per voorbeeld*. Als je moet bewijzen dat er zwarte zwanen bestaan, volstaat het een zwarte zwaan te vinden. Inderdaad, als je één zwarte zwaan effectief kan tonen, dan is het zeker dat er bestaan. Merk wel op dat je soms ook kan aantonen dat iets moet bestaan *zonder* het ook effectief te construeren of te vinden. Als je bijvoorbeeld wil aantonen dat er oneindig veel priemgetallen bestaan, kan dat niet door er effectief oneindig veel op te schrijven.

14.8 Bewijstechnieken

Voorbeeld 14.8.2. Bewijs dat $\exists n \in \mathbb{Z} : n^2 = 9$.

Bewijs Merk op dat $3 \in \mathbb{Z}$ en $3^2 = 9$. Dus (minstens) voor $n = 3$ geldt dat $n^2 = 9$. ■

Het voorbeeld is natuurlijk niet noodzakelijk uniek. Hier kan je ook -3 kiezen natuurlijk.

Merk op dat op deze manier bewijzen dat $\exists r \in \mathbb{R} : r^2 = 2$ veel subtieler is. Als je wil gebruik maken van $\sqrt{2}$, moet je wel zeker zijn dat $\sqrt{2}$ een goed gedefinieerd reëel getal *is*. Maar waarschijnlijk is het in deze opgave net de bedoeling om aan te tonen dat er *een dergelijk getal bestaat*. Als je zonet de reële getallen hebt gedefinieerd als 'kommagetallen met mogelijk oneindig veel niet repeterende digits na de komma', dan is het helemaal niet evident dat er een dergelijk getal is dat als je het kwadrateert *precies* 2 oplevert.

14.8.2.3 Bewijs per generiek element

Om te bewijzen dat iets geldt *voor alle elementen* van een verzameling, volstaat het te bewijzen dat het geldt voor *elk willekeurig element* van die verzameling.

De bewering $\forall a \in A : p(a)$ kan je dus bewijzen door $a \in A \Rightarrow p(a)$ aan te tonen.

Dat wil zeggen dat we $p(a)$ bewijzen voor een *willekeurige* $a \in A$. Zo'n bewijzen beginnen dan ook typisch met de uitdrukking "kies een a *willekeurig* in A", en daarna volgt een redenering die $p(a)$ aantoont. Het is belangrijk dat in die redenering de beschouwde a ook willekeurig blijft, dat we over a geen veronderstellingen maken. Als wie iets moeten bewijzen $\forall a \in \mathbb{R}$, mogen we (natuurlijk) niet aannemen dat a positief is, of $a > 1$. Je mag wel gebruikmaken van gevalsonderscheid, waarbij je het bewijs geeft voor verschillende gevallen: bijvoorbeeld eerst voor a positief en daarna voor a strikt negatief. Als de bewering in beide gevallen bewezen kan worden, is de volledige bewering bewezen.

Voorbeeld 14.8.3. Bewijs dat $\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^2 > 0$

Bewijs Kies $a \in \mathbb{R}_0$ willekeurig, dus $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$. Dan geldt door de totale orde in $\mathbb{R}$ ofwel $a < 0$ of $a > 0$.

In het geval dat $a > 0$ volgt door beide zijden van de ongelijkheid $a > 0$ met het strikt positieve getal a te vermenigvuldigen dat $a^2 > 0$.

In het geval dat $a < 0$ krijgen we ook $a^2 > 0$, omdat $a < 0$ vermenigvuldigen met het strikt negatieve getal a de ongelijkheid omdraait.

In beide gevallen volgt dat $a^2 > 0$. Omdat $a \in \mathbb{R}_0$ willekeurig gekozen was, bewijst dit de eigenschap. ■

Oefening 14.8.2.

Formuleer volgende beweringen in een betekenisvolle zin. Onderzoek of de beweringen waar of onwaar zijn en geef een bewijs.

(a) Juist | Fout $\forall m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(b) Juist | Fout $\exists m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(c) Juist | Fout $\forall m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(d) Juist | Fout $\exists m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(e) | Juist | Fout | $\forall n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(f) | Juist | Fout | $\exists n \in \mathbb{Z} : \forall m \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

Oefening 14.8.3.

Geef telkens een wiskundige formule met dezelfde betekenis als de zin. Zijn de beweringen waar of onwaar? Geef een bewijs.

1. Er bestaan twee gehele getallen zodat het eerste groter is dan het tweede.

2. Er bestaan twee gehele getallen zodat beide positief zijn.

3. Voor elk geheel getal bestaat er een groter geheel getal.

4. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een groter natuurlijk getal.

5. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een groter geheel getal.

6. Voor elk geheel getal bestaat er een groter natuurlijk getal.

7. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een kleiner natuurlijk getal.

8. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een kleiner geheel getal.

9. Er bestaat een natuurlijk getal dat groter is dan elk ander natuurlijk getal.

10. Er bestaat een geheel getal dat groter is dan elk geheel getal.

11. Er bestaat een geheel getal dat kleiner is dan elk natuurlijk getal.

12. Er bestaat een positief reëel getal dat kleiner is dan elk strikt positief natuurlijk getal.

13. Voor elke twee natuurlijke getallen geldt dat het eerste groter is dan het tweede of het tweede groter dan het eerste.

14. Voor elke twee verschillende natuurlijke getallen geldt dat het eerste groter is dan het tweede of het tweede groter dan het eerste.

15. Voor elke twee natuurlijke getallen geldt dat het eerste een deler is van het tweede of het tweede een deler van het eerste.

14.8.2.4 Bewijs uit het ongerijmde

Bij een **bewijs uit het ongerijmde** nemen we aan dat het te bewijzen *niet* waar is, en leiden daaruit een contradictie af. Als een bewering ofwel waar ofwel vals is, en de aanname dat ze vals is leidt tot een contradictie, dan moet de bewering dus noodzakelijk *waar* zijn. Een typische contradictie is $p \wedge \neg p$, namelijk de bewering dat zowel p als $\neg p$ waar zijn. Het bewijs uit het ongerijmde is dan gebaseerd op de tautologie $(\neg q \Rightarrow (p \wedge \neg p)) \Leftrightarrow q$: als uit $\neg q$ een contradictie volgt, dan is q waar.

Het is niet altijd evident op een directe manier te bewijzen dat iets *niet bestaat* :

Voorbeeld 14.8.4. Bewijs dat er geen gehele getallen n en m bestaan zodat $8n - 6m = 101$.

Bewijs Veronderstel dat n en m gehele getallen zijn waarvoor toch geldt dat $8n-6m = 101$. Omdat 8 en 6 even getallen zijn is dan $101 = 8n-6m = 2(4n-3m)$ ook een even getal. Maar 101 is duidelijk oneven, zodat we een tegenspraak hebben. Uit deze tegenspraak volgt dat er geen gehele getallen n

en m bestaan met $8n - 6m = 101$. ∎

De tegenspraak is hier van de vorm $p \wedge \neg p$. Hierin is p de propositie "101 is een even getal" zodat $\neg p$ overeenkomt met "101 is een oneven getal" die allebei waar zouden zijn als de veronderstelling dat er n en m met $8n - 6m = 101$ bestaan waar was.

Je kan het bewijs ook anders formuleren, zonder gebruik te maken van een contradictie: omdat $8n - 6m = 2(4m - 3n)$ altijd even is, kan je nooit oneven getallen bekomen. Omdat 101 oneven is, kunnen er dus geen natuurlijke getallen n en m bestaan zodat $8n - 6m = 101$. Het voordeel bij een bewijs uit het ongerijmde is dat je enerzijds een extra gegeven cadeau krijgt, en anderzijds 'enkel maar' een contradictie moet proberen vinden eerder dan een specifiek resultaat.

Voorbeeld 14.8.5. Bewijs dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is (dus $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Bewijs Veronderstel dat $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dan is $\sqrt{2} = a/b$ met $a, b \in \mathbb{N}_0$, en a, b niet beiden even (anders kan je de breuk vereenvoudigen). Dus $2 = a^2/b^2$ of $2b^2 = a^2$. Dit impliceert dat a^2, en dus ook a even is. Schrijf $a = 2a'$. Dan is $2b^2 = (2a')^2 = 4a'^2$, en $b^2 = 2a'^2$. Dit impliceert dat b^2, en dus ook b, even is. Dit is in strijd met het feit dat a, b niet beiden even zijn, en bewijst dat $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ∎

Ook voor implicaties $p \Rightarrow q$ is een direct bewijs soms niet eenvoudig te vinden, en is een bewijs uit het ongerijmde eenvoudiger.

Voorbeeld 14.8.6. Bewijs dat als x, y en a reële getallen zijn met $x > y$, geldt dat $ax \leq ay \Rightarrow a \leq 0$.

Bewijs Gegeven is dat $x > y$. Veronderstel uit het ongerijmde dat $ax \leq ay$ en $a > 0$. Dan volgt uit $x > y$ en het feit dat a strikt positief is dat $ax > ay$, hetgeen in tegenspraak is met de onderstelling dat $ax \leq ay$. Dus $ax \leq ay$ en $a > 0$ zijn niet allebei waar en daarom geldt

$$ax \leq ay \Rightarrow a \leq 0.$$

∎

Merk op dat het moeilijk is om vanuit de fundamentele eigenschappen van ongelijkheden een direct bewijs te construeren, omdat die eigenschappen afhangen van het teken van a en dat is nu net wat we *niet* kennen.

Oefening 14.8.4. Geef een bewijs uit het ongerijmde voor de bewering dat er geen gehele getallen m en n zijn met $14m + 21n = 100$.

14.8.2.5 Bewijs door contrapositie

Gelijkaardig aan, maar toch fundamenteel verschillend van een bewijs uit het ongerijmde is het **bewijs door contrapositie**: de implicatie $p \Rightarrow q$ is logisch equivalent met haar *contrapositie* $\neg q \Rightarrow \neg p$. In plaats van $p \Rightarrow q$ te bewijzen, kunnen we dus evengoed de implicatie $\neg q \Rightarrow \neg p$ bewijzen. Soms is dat eenvoudiger.

Voorbeeld 14.8.7. Bewijs dat als x, y en a reële getallen zijn met $x > y$, geldt dat $ax \leq ay \Rightarrow a \leq 0$.

Bewijs Gegeven is dat $x > y$. Als $a > 0$ dan volgt uit de eigenschappen voor ongelijkheden dat $ax > ay$. Dus $a > 0 \Rightarrow ax > ay$. Vanwege contrapositie is dan ook $ax \leq ay \Rightarrow a \leq 0$. ∎

De bewering $ax \leq ay \Rightarrow a \leq 0$ is logisch equivalent met $a > 0 \Rightarrow ax > ay$.

14.8 Bewijstechnieken

Oefening 14.8.5. Bewijs door contrapositie voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n^2 even is, dan n ook even is.

Oefening 14.8.6. Beschouw volgende eigenschap.
Zij $a, x \in \mathbb{R}$ twee willekeurige reële getallen dan geldt,

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : |x - a| < \varepsilon) \Rightarrow x = a.$$

Formuleer deze eigenschap in een betekenisvolle Nederlandse zin, we geven je als hint dat $|x - a|$ het best vertaald wordt als "de afstand tussen x en a"
Bewijs nu de eigenschap met een bewijs uit het ongerijmde en met een bewijs door contrapositie.

Merk op dat de omgekeerde implicatie ook geldt, zodat we volgende eigenschap hebben:

$$(\forall \varepsilon > 0 : |x - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow x = a.$$

14.9 Bewijstechnieken: volledige inductie

De natuurlijke getallen hebben een opvallende gelijkenis met dominostenen. Iedereen kent recordpogingen om door één rechtopstaande dominosteen om te duwen een zo lang mogelijke keten van aansluitende dominostenen te laten omvallen. De dominostenen vallen zodra de eerste steen valt omdat de vorige dominosteen telkens de val veroorzaakt van minstens één volgende steen. In het eenvoudige geval van één lange keten zonder vertakkingen, kan het 'Principe van de Vallende Dominostenen' als volgt worden samengevat:

Stelling 14.9.1 (Principe van de Vallende Dominostenen)**.**

Een rij dominostenen, opgesteld zonder vertakkingen en genummerd met getallen $k = 1, 2, 3, \ldots$ zal volledig neervallen zodra

> **(Startzet)** de eerste steen met nummer $k = 1$ wordt omgegooid.
>
> **(Automatische vervolgzetten)** de stenen zó staan dat voor elke k geldt dat als de k-de steen valt, ook de $(k + 1)$-ste steen omvalt.

Met natuurlijke getallen kan men een gelijkaardig spel spelen, maar dan niet door een zo lang mogelijke keten van getallen te laten omvallen, maar door een *oneindige keten* van uitspraken over natuurlijke getallen in één klap te bewijzen. De natuurlijke getallen kan je immers beschouwen als een oneindige keten getallen die begint bij 0 en waar elk natuurlijk getal k een unieke opvolger $k + 1$ heeft. Het equivalent van het Principe van de Vallende Dominostenen is het wiskundige Principe van Volledige Inductie:

Stelling 14.9.2 (Het principe van volledige inductie)**.**

Een bewering $P(n)$ die afhangt van n is waar voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$ zodra

> **(Basisstap)** de uitspraak geldt voor het eerste getal: $P(1)$ is waar
>
> **(Inductiestap)** de uitspraak zodanig is dat voor elke $k \in \mathbb{N}_0$ geldt: als $P(k)$ waar is, dan is ook $P(k + 1)$ waar.

Het is eenvoudig in te zien waarom het Principe van Volledige Inductie werkt: we weten uit de basisstap dat $P(1)$ waar is. We passen dan de inductiestap toe voor $k = 1$, en vinden dat uit $P(1)$ volgt dat $P(1 + 1) = P(2)$ ook waar is. Maar dan is, opnieuw wegens de inductiestap ook $P(2 + 1) = P(3)$ waar, en dus ook $P(3 + 1) = P(4)$, en dus ook $P(4 + 1) = P(5)$ en zo verder. De uitspraak $P(n)$ is dus zeker waar voor *elk* natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$.

Een formeel wiskundig *bewijs* van het Principe van Volledige Inductie geven we hier niet, al was het maar omdat we ook geen formeel wiskundige definitie hebben gegeven van de natuurlijke getallen. In meer gevorderde cursussen wiskunde zal blijken dat je de natuurlijke getallen eigenlijk kan *definiëren* als die getallen die het getal 1 bevatten en waarvoor het Principe van Volledige Inductie geldt.

Het belang van het Principe is dat het een erg krachtige manier oplevert om een aantal wiskundige formules en eigenschappen te bewijzen. Dus we zullen het Principe van Volledige Inductie (dat we jammer genoeg hier niet formeel bewezen hebben) gebruiken om zelf interessante verdere eigenschappen te bewijzen.

Een **bewijs met volledige inductie** valt typisch uiteen in drie delen.

- De **basisstap**: je bewijst dat $P(1)$ inderdaad waar is. In vele gevallen is dat eerder eenvoudig, maar het is erg belangrijk dat het gebeurt. Vergelijk het met het omgooien van de eerste dominosteen: het is erg eenvoudig, maar zolang het niet gedaan wordt, gebeurt er niets.

- De **inductiestap**: je bewijst dat de implicatie $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ waar is voor elke $k \in \mathbb{N}_0$. In het bewijs van de inductiestap neem je dus aan dat $P(k)$ waar is (deze aanname heet de **inductiehypothese**), en *met behulp van* die inductiehypothese $P(k)$ bewijs je dan dat ook $P(k + 1)$ waar is.

- De **conclusie**: je roept het Principe van Volledige Inductie aan om te concluderen dat $P(n)$ waar is voor elke $n \in \mathbb{N}_0$. Merk op dat deze stap in elk bewijs precies hetzelfde is, maar het is toch erg belangrijk steeds duidelijk te vermelden dat het inderdaad dankzij dit Principe is dat je bewijs nu volledig is!

Hier is een eenvoudig voorbeeld:

Voorbeeld 14.9.1. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n het getal $n^2 + n$ even is.

Bewijs

- **Basisstap**: Voor $n = 0$ is $n^2 + n = 0^2 + 0 = 0$ en dit is even.
- **Inductiestap**: Neem aan (inductiehypothese) dat voor een natuurlijk getal k geldt $k^2 + k$ even is. We bewijzen dan dat ook voor $k + 1$ geldt dat $(k + 1)^2 + (k + 1)$ even is. We berekenen

$$(k + 1)^2 + (k + 1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2(k + 1).$$

  Duidelijk is dat $2(k + 1)$ even is. Wegens de inductiehypothese is ook $k^2 + k$ even, en dus is ook hun som $(k^2 + k) + 2(k + 1)$ even. Hiermee is de inductiestap bewezen.
- **Conclusie**: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, volgt met het principe van volledige inductie dat $n^2 + n$ een even getal is voor elke $n \in \mathbb{N}$.

■

Opmerking 14.9.1.

- deze eigenschap kan natuurlijk ook op andere manieren bewezen worden. Zo is $n^2+n = n(n+1)$ het product van 2 opeenvolgende getallen en dus moet 1 van deze getallen even zijn. Bijgevolg is n^2+n even. Een alternatief eenvoudig bewijs maakt gebruik van gevalsonderscheid: elk getal n is even of n is oneven. Als n even is, dan is ook n^2 even, en dus ook $n^2 + n$ als som van twee even getallen. Als n oneven is, dan is ook n^2 oneven, en dus is $n^2 + n$ ook *even* als som van twee *oneven* getallen!
- dikwijls wordt ook in de inductiestap de letter n gebruikt. Dan zegt de inductiestap dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat $P(n)$ impliceert dat $P(n + 1)$. Dit dubbel gebruik van het symbool n leidt soms tot verwarring en is pas aan te raden als je voldoende vertrouwd bent met het principe van volledige inductie.
- als de eigenschap $P(n)$ enkel geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$, dan wordt de basisstap: $P(1)$ is waar.
  Als de eigenschap $P(n)$ enkel geldt voor alle natuurlijke getallen strikt groter dan 5, dan wordt de basisstap: $P(6)$ is waar. De inductiestap kan dan ook telkens worden beperkt tot getallen groter dan de basisstap.

14.10 Bewijstechnieken: voorbeeld van volledige inductie

Bewijs volgende formule voor de som van kwadraten ($n \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bewijs Het bewijs gebruikt het principe van volledige inductie op n, het aantal termen in de som:

- **Basisstap**: We bewijzen de formule voor de kleinste n (in dit geval $n = 0$).

  Voor $n = 0$ wordt het linkerlid van de formule 0 en is het rechterlid ook 0, de formule is dus zeker waar is voor $n = 0$.

- **Inductiestap**: We bewijzen dat zodra de formule geldt voor $n = p$, ze ook geldt voor $n = p + 1$.

  Inductiehypothese: Neem aan dat de formule geldt voor een (willekeurig) getal $p \in \mathbb{N}_0$, dus dat

  $$\sum_{k=0}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

  Te bewijzen in de inductiestap: We tonen aan dat de formule dan ook geldt voor $p + 1$, dus dat

  $$\sum_{k=0}^{p+1} k^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6}$$

  Bewijs van de inductiestap: We herschrijven het linkerlid tot we het rechterlid bekomen:

  $$\begin{aligned}
  \sum_{k=0}^{p+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{p} k^2 + (p+1)^2 && \text{(laatste term afzonderen)}\\
  &= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 && \text{(inductiehypothese)}\\
  &= \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{6} && \text{(gemeenschappelijke noemer)}\\
  &= \frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6} && \\
  &= \frac{(p+1)2(p+2)\left(p+\frac{3}{2}\right)}{6} && \text{(ontbinden)}\\
  &= \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6} && \text{(herschrijven)}
  \end{aligned}$$

  Dit bewijst de inductiestap.

- **Conclusie**: Omdat hiermee zowel de basisstap als de inductiestap bewezen zijn, geldt de te bewijzen uitspraak voor elk positief natuurlijk getal wegens het principe van volledige inductie.

■

KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Handboek B-programma

Module 15

Appendix

(Versie 2024/10/24HB.16)

15.1 Het Griekse alfabet

Om wiskundige objecten te noteren gebruiken we meestal letters. Om de leesbaarheid te verhogen zijn dat typisch vaste reeksen letters per type objecten: f, g en h voor functies, x, y en z voor onbekenden of variabelen, k en l voor parameters, n, m, p voor natuurlijke getallen, z voor complexe getallen, enzovoort.

Omdat de voorraad letters beperkt is, worden in sommige situaties ook Griekse letters gebruikt. Voor hoeken is dat bijvoorbeeld een historisch gegroeide gewoonte.

Hieronder vind je het volledige Griekse alfabet (zowel kleine letters als hoofdletters). Dat kan ooit misschien ook nuttig zijn op vakantie. . . .

Definitie 15.1.1 (Grieks alfabet)**.**

α	A	alfa	ν	N	nu
β	B	beta	ξ	Ξ	xi
γ	Γ	gamma	o	O	omikron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε	E	epsilon	ρ	P	rho
ζ	Z	zeta	σ	Σ	sigma
η	H	eta	τ	T	tau
θ	Θ	theta	υ	Υ	upsilon
ι	I	iota	φ	Φ	phi
κ	K	kappa	χ	X	chi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	mu	ω	Ω	omega

Van enkele letters bestaan er verschillende versies:

epsilon: ϵ en ε

phi: ϕ en φ

Volgende symbolen zijn geen Griekse letters, maar ze komen ook regelmatig voor in wiskundige teksten:

∞: oneindig.

$\emptyset$: lege verzameling.

$\aleph$: aleph, voor (een speciale vorm van) oneindig.

∂: delta, voor partiële afgeleiden.

∇: nabla, of 'del' operator, voor vector differentialen.