LINAG Ü8

8.5.6. $f \in L(V,V)$

a) $f \circ f = f \iff \exists$ Basis aus Eigenvektoren von f $\wedge\ \forall \lambda \ldots$ Eigenwert von f: $\lambda \in \{0,1\}$

$\Rightarrow$ f ist Projektion, d.h. $\exists\ U_1, U_2 \ldots$ UR von V mit $U_1 \oplus U_2 = V$

und $\forall u_1 \in U_1: f(u_1) = u_1 \ \wedge\ \forall u_2 \in U_2: f(u_2) = 0$

Sei $B_1 = (b_{1i})_{i \in I}$ eine Basis von U_1 und $B_2 = (b_{2j})_{j \in J}$ eine Basis von U_2.

$\forall i \in I: f(b_{1i}) = b_{1i} \quad \Rightarrow b_{1i}$ ist EV von f zum Eigenwert 1

$\forall j \in J: f(b_{2j}) = 0 \quad \Rightarrow b_{2j}$ ist EV von f zum Eigenwert 0

$B = B_1 \cup B_2$ ist eine Basis von V, die aus EV von f besteht.

Angenommen $\exists\ \lambda \in K \setminus \{0,1\} \ldots$ EW von f, d.h.

$\exists x \in V: \quad f(x) = \lambda \cdot x \qquad \Rightarrow f(f(x)) = f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

aus $f \circ f = f$ folgt $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ $\lightning$

$\Leftarrow$

Sei B die Basis aus EV von f.

Sei $B_1 (\subseteq B) = \{b \in B : f(b) = 1 \cdot b\}$. Sei $B_2 (\subseteq B) = \{b \in B : f(b) = 0 \cdot b\}$

$B = B_1 \cup B_2$ da es keine anderen EW gibt. $\quad B_1 \cap B_2 = \emptyset$

$U_1 = [B_1] \qquad U_2 = [B_2] \qquad \Rightarrow U_1 \oplus U_2 = V$

mit $\forall u_1 \in U_1: f(u_1) = u_1 \ \wedge\ \forall u_2 \in U_2: f(u_2) = 0$

$\Rightarrow f \ldots$ Projektion $\iff f \circ f = f$

...

LINAG

8.5.6. ...

b) char $K \neq 2$

zz: $f \circ f = id \iff \exists$ Basis von V aus EV von f $\wedge$ $\forall \lambda$ .. EW von f: $\lambda \in \{-1, 1\}$

$(\Rightarrow)$ $\forall x \in V: f(f(x)) = x$

Angenommen $\exists \lambda$ ... EW von f $\lambda \in K \setminus \{-1, 1\}$, d.h. $\exists x \in V: f(x) = \lambda x$

$\Rightarrow f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda^2 \cdot x \neq x$ für $\lambda \neq \pm 1$ und char $K \neq 2$

$\lightning$

Angenommen $\exists x \in V \setminus \{0\}$: x ist kein EV von f, d.h.

$\nexists \lambda \in K: f(x) = \lambda \cdot x \quad \Rightarrow \nexists \lambda \in K: f(f(x)) = f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda^2 \cdot x$

aber $f(f(x)) = 1^2 \cdot x$ und $1 \in K$ $\lightning$

Sei B eine Basis von V. $\Rightarrow \forall b \in B$: b ist EV von f.

$(\Leftarrow)$ Sei B die Basis aus EV von f

Sei $B_1 (\subseteq B) = \{b \in B : f(b) = -1 \cdot b\}$ und $B_2 (\subseteq B) = \{b \in B : f(b) = 1 \cdot b\}$.

Da es nur EW -1 und 1 gibt folgt $B = B_1 \cup B_2$

Sei $x \in V$ bel. $\quad x = \sum_{b \in B} y_b \cdot b = \sum_{b_1 \in B_1} y_{b_1} \cdot b_1 + \sum_{b_2 \in B_2} y_{b_2} \cdot b_2$

$$f(f(x)) = f\Big(f\Big(\sum_{b_1 \in B_1} y_{b_1} b_1 + \sum_{b_2 \in B_2} y_{b_2} \cdot b_2\Big)\Big) = \sum_{b_1 \in B_1} y_{b_1} f(f(b_1)) + \sum_{b_2 \in B_2} y_{b_2} f(f(b_2))$$

$$= \sum_{b_1 \in B_1} y_{b_1} (-1)(-1) b_1 + \sum_{b_2 \in B_2} y_{b_2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot b_2 = \sum_{b_1 \in B_1} y_{b_1} b_1 + \sum_{b_2 \in B_2} y_{b_2} b_2 = x$$

$\Rightarrow f \circ f = id$

LINAG Ü8

3.2.5. $V, W \dots VR/K \quad f \in L(V,W) \quad U_1, U_2 \subseteq V \dots$ Unterräume mit $U_1 \subseteq U_2$

zz: $f(U_1) = f(U_2) \Rightarrow \exists T \subseteq \ker f \dots$ UR von V mit $T \oplus U_1 = U_2$

$\ker f$ ist ein UR von V. $\ker f|_{U_1}$ ist ein UR von $\ker f|_{U_2}$, da U_1 ein UR von U_2 ist.

Sei T ein Komplementärraum zu $\ker f|_{U_1}$ in $\ker f|_{U_2}$, also

$T \oplus \ker f|_{U_1} = \ker f|_{U_2}$

Offensichtlich ist T ein UR von $\ker f$.

zz: $T \cap U_1 = \{0\}$

Sei $v \in T \cap U_1$ bel. $\Rightarrow f(v) = 0$, da $v \in T \subseteq \ker f$

Da auch $v \in U_1 \Rightarrow v \in \ker f|_{U_1}$

$T \cap \ker f|_{U_1} = \{0\}$ da $T \oplus \ker f|_{U_1}$ $(= \ker f|_{U_2})$

$v \in T \cap \ker f|_{U_1} \Rightarrow v = 0$

zz: $\forall u_2 \in U_2 \; \exists t \in T \; \exists u_1 \in U_1 : u_2 = t + u_1$

Sei $u_2 \in U_2$ bel. Da $f(U_1) = f(U_2)$ $\exists u_1 \in U_1 : f(u_1) = f(u_2)$

$u_2 - u_1 =: t \in U_2 \qquad 0 = f(u_2) - f(u_1) = f(u_2 - u_1) = f(t)$

$\Rightarrow t \in \ker f|_{U_2}$

$\exists t_1 \in \ker f|_{U_1} \; \exists t_2 \in T : t = t_1 + t_2$ da $T \oplus \ker f|_{U_1} = \ker f|_{U_2}$

$u_2 - u_1 = t_1 + t_2 \iff u_2 = \underbrace{u_1 + t_1}_{\in U_1} + \underbrace{t_2}_{\in T}$

$\Rightarrow T \oplus U_1 = U_2$

LINAG Ü8

8.7.10 $K[X]$ … Polynomalgebra über K

a) $f: K[X] \to K[X]$ $\quad$ zz: f ist ein K-Algebra-Automorphismus

$P(X) \mapsto P(X+1)$

Sei $P(X), Q(X) \in K[X]$ bel. $\quad P(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i \quad Q(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i X^i$

$$P(X) \cdot Q(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) X^i$$

$$f(P(X) \cdot Q(X)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) (X+1)^i = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i (X+1)^i \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i (X+1)^i = f(P(X)) \cdot f(Q(X))$$

$\Rightarrow$ Homomorphismus

$g: K[X] \to K[X]$

$P(X) \mapsto P(X-1)$ $\quad g \circ f = id \Rightarrow f$ … bijektiv

b) zz: $\forall n \in \mathbb{N}: \ U_n = [\{1, X, \dots, X^n\}]$ ist ein f-invarianter UR

Sei $n \in \mathbb{N}$ bel. $\quad U_n$ ist UR von $K[X]$ ist klar.

Sei $u \in U_n$ bel. $\quad u = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad f(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i (X+1)^i$

$(X+1)^i = \underbrace{(X+1)(X+1) \cdot \ldots \cdot (X+1)}_{i\text{-Mal}} \Rightarrow grad((X+1)^i) = i$

$\Rightarrow f(u)$ hat Grad $\leq i \Rightarrow f(u) \in U_n$, da alle Polynome mit Grad ≤ 1 in U_n liegen

c) ges: EW und ER von $f|_{U_3}: U_3 \to U_3$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ $\quad$ ges: Koordinatenmatrix von $f|_{U_3}$ in Jordan-Normalform

$e_1 = 1,\ e_2 = X,\ e_3 = X^2,\ e_4 = X^3;\ f(e_1) = 1,\ f(e_2) = X+1,\ f(e_3) = X^2 + 2X + 1$

$f(e_4) = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$

char $K > 3$:

$$A := \langle E^*, f|_{U_3}(E) \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \chi_{f|_{U_3}}(X) = (1-X)^4$$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_4 = 0,\ x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 \in K$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ … Eigenraum

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^2$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_4 = 0,\ x_3 = 0 \quad x_1, x_2 \in K$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^3$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_4 = 0$ $\quad$ Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^4$ $\quad \mathcal{O} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Lösungsraum U_3

…

LINAG Ü8

8.7.10 ...

ges: Koordinatenmatrix in J-NF

$r_0 = 4 \quad r_1 = 3 \quad r_2 = 2 \quad r_3 = 1 \quad r_4 = 0 \quad \dots$

$u_1 = r_0 - r_1 = 4 - 3 = 1 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = 1 \quad u_4 = 1 \quad u_5 = 0 \quad \dots$

$k_1 = u_1 - u_2 = 0 \quad k_2 = 0 \quad k_3 = 0 \quad k_4 = 1 \quad k_5 = 0 \quad \dots$

$\Rightarrow$ J-NF ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J_4(1)$

Falls char $K = 2$:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_4 = 0 \quad x_2 = -x_3 = x_3$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^2$:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_4 = 0 \quad$ Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^3$:

$0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Lösungsraum U_3

$r_0 = 4 \quad r_1 = 2 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = 0 \quad \dots$

$u_1 = 2 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = 1 \quad u_4 = 0 \quad \dots$

$k_1 = 1 \quad k_2 = 0 \quad k_3 = 1 \quad k_4 = 0 \quad \dots$

$\Rightarrow$ J-NF ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Falls char $K = 3$: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)$:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 0 \quad x_2 = -x_4 \quad$ Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^2$:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 0 \quad$ Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^3$:

$0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow LSG = U_3$

$r_0 = 4 \quad r_1 = 2 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = 0 \quad \dots$

$u_1 = 2 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = 1 \quad u_4 = 0 \quad \dots$

$k_1 = 1 \quad k_2 = 0 \quad k_3 = 1 \quad k_4 = 0 \quad \dots \quad \Rightarrow$ J-NF ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

LINAG Ü8

8.7.12. zz $\nexists A \in \mathbb{R}^{2\times 2}: A^2 = J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a^2+bc=-1 \qquad a b+bd=1 \qquad ac+cd=0 \qquad bc+d^2=-1$

Wenn $c \neq 0$: $\quad c(a+d)=0 \Rightarrow a=-d$

$1 = ab+bd = -db+bd = 0$ ↯ $\Rightarrow c=0$

Da A eine obere Dreiecksmatrix ist ist $\chi_A(X) = (a-X)(d-X)$

Also sind a, d EW von A und a^2 und d^2 sind EW von A^2

Damit A^2 und $J_2(-1)$ übereinstimmen müssen die EW übereinstimmen.

$\Rightarrow a^2=-1$ und $d^2=-1$ dazu gibt es aber keine reellen Lösungen für a, d

LINAG Ü8

8.7.1 (B) $V \ldots VR/\mathbb{R}$ $\quad B \ldots$ Basis von V $\quad f \in L(V,V)$

$$A := \langle B^*, f(B) \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) ges: $\chi_f(X)$

$$\chi_f(X) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2-X & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2-X \end{pmatrix} = (1-X) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 0 & 2-X & 0 \\ -1 & 1 & 2-X \end{pmatrix} + 0 \cdot \det(\ldots) + 0 \cdot \det(\ldots) + 0 \cdot \det(\ldots)$$

$$= (1-X)^2 (2-X)^2$$

b)

$$(\langle B^*, f(B) \rangle - 1 \cdot E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ hat Rang } 3$$

$$(\langle B^*, f(B) \rangle - 1 \cdot E_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ hat Rang } 2 = \text{algebraische VF von } 1$$

$$(\langle B^*, f(B) \rangle - 2 \cdot E_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ hat Rang } 2 = \text{algebraische VF von } 2$$

(siehe weiter unten)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist ähnlich zu } \langle B^*, f(B) \rangle, \text{ da } \chi_C(X) = \chi_f(X)$$

c) ges: Basis D von V mit $\langle D^*, f(D) \rangle = C$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_3 = 0,\ x_1 = 0,\ x_4 = x_2$$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_1 = 0,\ x_3 = x_2,\ x_4 \in \mathbb{R}$$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_3 = x_1,\ x_4 = x_2$$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ als Familie über } I = \{1,2,3,4\}$$

...

LINAG Ü8

8.7.1. ...

d) ges: $\mu_f(X)$

$$(1-A)(2-A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(1-A)^2(2-A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mu_f(X) = (1-X)^2(2-X)$$

$\lambda = 1$

$r_0 = 4 \quad r_1 = 3 \quad r_2 = 2 \quad r_3 = 2 \quad r_4 = 2 \quad \dots$

$u_1 = r_0 - r_1 = 4 - 3 = 1 \quad u_2 = r_1 - r_2 = 3 - 2 = 1 \quad u_3 = r_2 - r_3 = 2 - 2 = 0 \quad \dots$

$k_1 = u_1 - u_2 = 1 - 1 = 0 \quad k_2 = u_2 - u_3 = 1 - 0 = 1$

$\Rightarrow$ für $\lambda = 1$ gibt es 1 J-Kästchen mit Größe 2

$\lambda = 2$

$r_0 = 4 \quad r_1 = 2 \quad r_2 = 2 \quad \dots$

$u_1 = r_0 - r_1 = 4 - 2 = 2 \quad u_2 = r_1 - r_2 = 2 - 2 = 0 \quad \dots$

$k_1 = u_1 - u_2 = 2 - 0 = 2 \quad k_2 = u_2 - u_3 = 0 - 0 = 0$

$\Rightarrow$ für $\lambda = 2$ gibt es 2 J-Kästchen mit jeweils Größe 1

LINAG Ü8

8.7.3. B... Basis von V $\quad f \in L(V,V) \quad \langle B^*, f(B) \rangle = J_n(t)$

zz: $\forall i \in \{0,1,\dots,n\}\ \exists!\ U_i$ ... i-dimensionaler f-invarianter UR

$$\langle B^*, f(B)\rangle = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & t & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & t \end{pmatrix} \qquad B = (b_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$$

Für $i=0$ $\quad U_0 := \{0\}$ ist 0-dimensional und f-invariant $(f(0)=0)$

Eindeutigkeit: U_0 ist der einzige 0-dimensionale UR

Sonst: Sei $i \in \{1,\dots,n\}$ bel.

$U_i := [(b_i)_{i \in \{1,\dots,i\}}]$

U_i ist i-dimensional (da Basis aus i Vektoren besteht)

f-invariant: Sei $v \in U_i$ bel. $\quad v = \sum_{j=1}^{i} x_j b_j$

$$f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{i} x_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{i} x_j f(b_j) = \sum_{j=1}^{i} x_j (b_{j-1} + t \cdot b_j)$$

(wobei $b_0 = 0$) $$= \sum_{j=1}^{i} x_j b_{j-1} + t \cdot \sum_{j=1}^{i} x_j b_j \in U_i$$

$\Rightarrow U_i$ ist i-dimensional und f-invariant

Eindeutigkeit: Sei W_i ein i-dimensionaler UR mit $W_i \neq U_i$

Sei $C = (c_i)_{i \in \{1,\dots,i\}}$ eine Basis von W_i

$\exists j \in \{1,\dots,i\}: c_j \notin U_i \qquad c_j = \sum_{l=1}^{n} x_l b_l$

o.B.d.A $\exists l \in \{i+1,\dots,n\}\ \exists m \in \{1,\dots,i\}: c_j = b_l + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l \\ k \neq m}}^{n} x_k b_k$

$$f(c_j) = f\left(b_l + \sum_{k=1}^{m-1} x_k b_k + \sum_{k=m+1}^{l-1} x_k b_k + \sum_{k=l+1}^{n} x_k b_k\right)$$

$$= f(b_l) + \sum_{k=1}^{m-1} x_k f(b_k) + \sum_{k=m+1}^{l-1} x_k f(b_k) + \sum_{k=l+1}^{n} x_k f(b_k)$$

$$= b_{l-1} + t \cdot b_l + \sum_{k=1}^{m-1} x_k (b_{k-1} + t b_k) + \sum_{k=m+1}^{l-1} x_k (b_{k-1} + t \cdot b_k) + \sum_{k=l+1}^{n} x_k (b_{k-1} + t \cdot b_k)$$

verwendet Vektoren b_{l-1}, b_m, b_l in der LK

$\Rightarrow f(c_j) \notin W_i$

Offensichtlich gilt: $\{0\} = U_0 \subseteq U_1 \subseteq \dots \subseteq U_n = V$