# ANA Ü10

3.) $z \in \mathbb{C}$ $\quad f(z) = \overline{z}(z-2) - 2 \cdot \operatorname{Re} z$

ges: lokale Extrema von $|f(z)|$

$z = x + iy$ $\quad f(z) = f(x+iy) = (x-iy)(x+iy-2) - 2 \cdot x =$

$= x^2 + ixy - 2x - ixy + y^2 + 2iy - 2x = x^2 - 4x + y^2 + i2y$

$|f(z)| = |x^2 - 4x + y^2 + i2y| = \sqrt{(x^2-4x+y^2)^2 + 4y^2}$

$g(x,y) := |f(x+iy)|^2 = (x^2-4x+y^2)^2 + 4y^2 = x^4 - 8x^3 + 2x^2y^2 + 16x^2 - 8xy^2 + y^4 + 4y^2$

$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = 4x^3 - 24x^2 + 4xy^2 + 32x - 8y^2$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,y) = 12x^2 - 48x + 4y^2 + 32$

$\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = 4x^2y - 16xy + 4y^3 + 8y$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x,y) = 4x^2 - 16x + 12y^2 + 8$

$\frac{\partial}{\partial x \partial y} g(x,y) = 8xy - 16y$

$dg(x,y) = (4x^3 - 24x^2 + 4xy^2 + 32x - 8y^2 \quad 4x^2y - 16xy + 4y^3 + 8y) = (0, 0)$

$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + xy^2 + 8x - 2y^2 = 0 \quad \wedge \quad x^2y - 4xy + y^3 + 2y = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + y^2) = 0 \quad \wedge \quad y(x^2 - 4x + y^2 + 2) = 0$

Damit $= 0$ muss entweder $x = 2$ (dann folgt $y = 0$ oder $4 - 4 + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$)

oder $x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 + 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow y = 0$ also $x = 2 \pm \sqrt{4} = 2 \pm 2$

Also sind $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}^{+}, \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ mögliche Extremstellen $\quad * \begin{pmatrix}2\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\cdot4 - 48\cdot2 + 32 & 0 \\ 0 & 4\cdot4 - 16\cdot2 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ negativ definit $\Rightarrow$ lokales Maximum

- $\begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 12\cdot4 - 48\cdot2 + 4\cdot2 + 32 & 8\cdot2\cdot\sqrt{2} - 16\cdot\sqrt{2} \\ 8\cdot2\sqrt{2} - 16\cdot\sqrt{2} & 4\cdot4 - 16\cdot2 + 12\cdot2 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$ indefinit

- $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 12\cdot16 - 48\cdot4 + 32 & 0 \\ 0 & 4\cdot16 - 16\cdot4 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ positiv definit $\Rightarrow$ lokales Minimum

- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ positiv definit $\Rightarrow$ lokales Minimum

$\Delta$

Da $|f(z)| \geq 0$ ist jedes Extremum von $|f(z)|^2$ auch eines von $|f(z)|$.

$\Delta$ $\begin{pmatrix}2\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 12\cdot4 - 48\cdot2 + 4\cdot2 + 32 & -8\cdot2\cdot\sqrt{2} + 16\sqrt{2} \\ -8\cdot2\cdot\sqrt{2} + 16\cdot\sqrt{2} & 4\cdot4 - 16\cdot2 + 12\cdot2 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$ indefinit

ANA Ü10

4.) $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

zz: $\gamma$ ... stetig und stückweise stetig differenzierbar $\Leftrightarrow \exists (s_i)_{i\in\{0,\dots,m\}}$ Zerlegung von $[a,b]$ mit

$$\gamma|_{[s_{j-1}, s_j]} \in C^1[s_{j-1}, s_j] \ \forall j = \{1, \dots, m\}$$

$\Rightarrow$

Def stückweise stetig diffbar: $\exists (s_i)_{i\in\{0,\dots,m\}}$ Zerlegung von $[a,b]$ mit

$\gamma|_{(s_{j-1}, s_j)}$ besitzt stetig diffbare Fortsetzung auf $[s_{j-1}, s_j]$

Sei $(s_i)_{i\in\{0,\dots,m\}}$ diese Zerlegung von $\gamma$. Sei $i \in \{1, \dots, m\}$ bel.

$\gamma|_{(s_{j-1}, s_j)}$ besitzt eine stetig diffbare Fortsetzung auf $[s_{j-1}, s_j]$

Da $\gamma$ stetig ist, ist $\lim_{x\to s_{j-1}^+} \gamma(x) = \gamma(s_{j-1})$ und $\lim_{x\to s_j^-} \gamma(x) = \gamma(s_j)$

$\Rightarrow$ die stetig diffbare Fortsetzung ist $\gamma|_{[s_{j-1}, s_j]}$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}: \gamma|_{[s_{j-1}, s_j]} \in C^1[s_{j-1}, s_j]$

$\Leftarrow$

Sei $(s_i)_{i\in\{0,\dots,m\}}$ die Zerlegung wie auf der rechten Seite

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}: \gamma|_{(s_{j-1}, s_j)}$ besitzt eine stetig diffbare Fortsetzung auf $[s_{j-1}, s_j]$

nämlich $\gamma|_{[s_{j-1}, s_j]}$ $\Rightarrow \gamma$ ist stückweise stetig diffbar

$\gamma$ ist in jedem Intervall $(s_{j-1}, s_j)$ stetig (da aus $C^1[s_{j-1}, s_j]$)

Sei $i \in \{1, \dots, m-1\}$ bel. $\lim_{x\to s_i^-} \gamma(x) = \gamma(s_i)$ da $\gamma|_{[s_{j-1}, s_j]} \in C^1[s_{j-1}, s_j]$

und $\lim_{x\to s_i^+} \gamma(x) = \gamma(s_i)$ da $\gamma|_{[s_j, s_{j+1}]} \in C^1[s_j, s_{j+1}]$

$\Rightarrow \gamma$ ist bei $s_i$ stetig

Für $i \in \{0, m\}$ gleich nur mit jeweils einer der beiden Limiten.

$\Rightarrow \gamma$ ist auf ganz $[a, b]$ stetig

$\square$

ANA Ü10

5.) $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $\quad \theta: [c,d] \to \mathbb{R}^n$ $\quad \gamma, \theta$ ... stetige Wege, injektiv

$\gamma([a,b]) = \theta([c,d])$

zz: $l(\gamma) = l(\theta)$

$[a,b]$ und $[c,d]$ sind kompakt, da abgeschlossen und beschränkt.

Proposition 6.1.15 besagt, dass nun auch $\gamma^{-1}: \gamma[a,b] \to [a,b]$ stetig und injektiv ist

und $\theta^{-1}: \theta[c,d] \to [c,d]$ —— " ——

$\alpha: [a,b] \to [c,d]$
$\quad x \mapsto \theta^{-1}(\gamma(x))$ $\quad$ die Verkettung macht Sinn, da $\gamma([a,b]) = \theta([c,d])$

$\alpha$ ist bijektiv, da $\gamma: [a,b] \to \gamma([a,b])$ und $\theta^{-1}: \gamma([a,b]) \to [c,d]$ bijektiv sind.

$\alpha$ ist stetig, da $\gamma$ und $\theta^{-1}$ stetig sind

Laut Lemma 6.5.5. ist nun $\alpha: [a,b] \to [c,d]$ streng monoton wachsend oder fallend.

Falls streng $\nearrow$ ist $\alpha$ eine streng $\nearrow$ Bijektion mit $\theta \circ \alpha = \gamma$

Falls streng $\searrow$ ist $\alpha$ eine streng $\nearrow$ Bijektion mit $\theta \circ \alpha = \gamma$

$\Rightarrow \gamma \sim \theta \Rightarrow l(\gamma) = l(\theta)$

$\square$

ANA Ü10

6.) $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ges: $l(\gamma)$, $\beta \sim \gamma$ mit Bogenlänge als Parameter

$t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$

$\gamma \in C^1[0,1]$, da $t, t^{\frac{3}{2}} \in C^1[0,1]$

Satz 11.1.8. besagt nun, dass $l(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(x)\|_2 \, dx$

$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}\cdot\sqrt{t} \end{pmatrix}$ $\quad \|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{1^2 + (\frac{3}{2}\sqrt{t})^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}t}$

$\int \|\gamma'(x)\|_2 \, dx = \int \sqrt{1+\frac{9}{4}x} \, dx$ $\quad \left[ u = 1+\frac{9}{4}x \quad \frac{du}{dx} = \frac{9}{4} \quad dx = \frac{4}{9} du \right.$

$= \int \sqrt{u} \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \int \sqrt{u} \, du = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}$

$\int_0^1 \|\gamma'(x)\|_2 \, dx = \frac{8}{27}(1+\frac{9}{4})^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{13\sqrt{13}}{27} - \frac{8}{27} \approx 1,4397$

$l(\beta|_{[0,s]}) = l(\gamma|_{[0,s]})$

$\int_0^t \|\beta'(x)\|_2 \, dx = \int_0^t \|\gamma'(x)\|_2 \, dx = \frac{8}{27}(1+\frac{9}{4}t)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}$

$y = \frac{8}{27}\cdot((1+\frac{9}{4}t)^{\frac{3}{2}} - 1) \Leftrightarrow \frac{27}{8}y = (1+\frac{9}{4}t)^{\frac{3}{2}} - 1 \Leftrightarrow \frac{27}{8}y + 1 = (1+\frac{9}{4}t)^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow (\frac{27}{8}y+1)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{9}{4}t \Leftrightarrow (\frac{27}{8}y+1)^{\frac{2}{3}} - 1 = \frac{9}{4}t \Leftrightarrow \frac{4}{9}(\frac{27}{8}y+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9} = t$

Nun soll $\beta(y) = \gamma\left(\frac{4}{9}(\frac{27}{8}y+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}(\frac{27}{8}y+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9} \\ \left(\frac{4}{9}(\frac{27}{8}y+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$ sein.

$\beta'(y) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}(\frac{27}{8}y+1)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{27}{8} \\ \frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}(\frac{27}{8}y+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot(\frac{27}{8}y+1)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{27}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{27}{8}y+1}} \\ \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\frac{4}{9}(\frac{27}{8}y+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}}}{\sqrt[3]{\frac{27}{8}y+1}} \end{pmatrix}$

$\|\beta'(y)\|_2 = \sqrt{(\frac{27}{8}y+1)^{-\frac{2}{3}} + \frac{9}{4}\frac{\frac{4}{9}(\frac{27}{8}y+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}}{(\frac{27}{8}y+1)^{\frac{2}{3}}}}$

$= \sqrt{\frac{1 + (\frac{27}{8}y+1)^{\frac{2}{3}} - 1}{(\frac{27}{8}y+1)^{\frac{2}{3}}}} = 1$

$\Rightarrow \int_0^s \|\beta'(x)\|_2 \, dx = \int_0^s 1 \, dx = s - 0 = s \quad \Rightarrow l(\beta|_{[0,t]}) = l(\gamma|_{[0,t]})$

$\beta = \gamma \circ \alpha$ mit $\alpha(t) = \frac{4}{9}(\frac{27}{8}t+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}$ ist bijektiv (Umkehrabbildung oben) und in $[0,1]$ streng monoton wachsend

$\Rightarrow \beta \sim \gamma$

...

ANA Ü10

6.) ... $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$ $\quad \gamma \in C^1([0,1])$

$l(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2 \, dt \qquad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$

$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{1^2 + \sinh^2(t)} = \sqrt{1+\sinh^2(t)} = \cosh(t)$

$l(\gamma) = \int_0^1 \cosh(t) \, dt = \sinh(1) - \sinh(0) = \sinh(1) \approx 1{,}1752$

$l(\beta|_{[0,s]}) = l(\gamma|_{[0,s]})$

$\int_0^t \|\beta'(x)\|_2 \, dx = \int_0^t \|\gamma'(x)\|_2 \, dx = \sinh(t)$

$y = \sinh(t) \iff \operatorname{areasinh}(y) = t$

$\beta(y) = \gamma(\operatorname{areasinh}(y)) = \gamma\begin{pmatrix} \operatorname{areasinh}(y) \\ \sqrt{y^2-1} \end{pmatrix} \qquad \beta'(y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \\ \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix}$

$\|\beta'(y)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{y^2+1} + \frac{y^2}{y^2+1}} = \sqrt{\frac{y^2+1}{y^2+1}} = 1$

$\Rightarrow \int_0^t \|\beta'(x)\|_2 \, dx = \int_0^t 1 \, dx = t \qquad \Rightarrow l(\beta|_{[0,s]}) = l(\gamma|_{[0,s]})$

$\beta = \gamma \circ \operatorname{areasinh}$ (wobei areasinh bijektiv und monoton $\nearrow$ ist)

$\Rightarrow \beta \sim \gamma$

ANA Ü10

7.) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ $\quad \gamma(0) = \binom{0}{0}$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right) \end{pmatrix}$ für $t > 0$

zz: $\gamma$ ist stetig, aber nicht rektifizierbar

$\gamma$ ist in jeder Komponente als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig in $(0,1]$.

$\lim\limits_{t \to 0+} t = 0 \qquad \lim\limits_{t \to 0+} t^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right) = 0$ (beschränkt mal Nullfunktion)

$\Rightarrow \gamma$ ist auch in $0$ stetig.

$\Rightarrow \gamma$ ist auf ganz $[0,1]$ stetig

$$\hat{Z} = \left\{0, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right\}$$

$$\left\| \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{n-i}}\right) - \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{n-i+1}}\right) \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n-i}} - \frac{1}{\sqrt{n-i+1}} \\ \frac{1}{n-i} \cos(\pi(n-i)) - \frac{1}{n-i+1} \cos(\pi(n-i+1)) \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n-i}} - \frac{1}{\sqrt{n-i+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{n-i} \cos(\pi(n-i)) - \frac{1}{n-i+1} \cos(\pi(n-i+1))\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n-i}} - \frac{1}{\sqrt{n-i+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{n-i} - \frac{1}{n-i+1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n-i} - \frac{2}{\sqrt{n-i}\sqrt{n-i+1}} + \frac{1}{n-i+1} + \frac{1}{(n-i)^2} - \frac{2}{(n-i)(n-i+1)} + \frac{1}{(n-i+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(n-i)+1}{(n-i)^2} + \frac{n-i+1+1}{(n-i+1)^2} - \frac{2\sqrt{n-i}\sqrt{n-i+1} + 2}{(n-i)(n-i+1)}}$$

$$\geq \sqrt{\frac{n-i+1}{(n-i)^2} + \frac{n-i+2}{(n-i+1)^2} - 2 \cdot \frac{(\sqrt{n-i})^2 + 1}{(n-i+1)^2}} = \sqrt{\frac{n-i+1}{(n-i)^2} + \frac{n-i+2-2n+2i-2}{(n-i+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n-i+1}{(n-i)^2} - \frac{n-i}{(n-i+1)^2}} \geq \sqrt{\frac{n-i+1}{(n-i)^2} - \frac{n-i}{(n-i)^2}} = \sqrt{\frac{n-i+1-n+i}{(n-i)^2}} = \frac{1}{n-i}$$

$$l(\gamma) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} L(Z)$$

$$L(\hat{Z}) = \sum_{i=1}^{n(\hat{Z})} \|\gamma(\xi_i) - \gamma(\xi_{i-1})\|_2 \geq \sum_{i=1}^{n(\hat{Z})-1} \frac{1}{n-i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} = +\infty$ also existiert ein $Z \in \mathcal{Z}$ mit $L(Z) = +\infty$

$\Rightarrow l(\gamma) = \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} L(Z) = +\infty$ also ist $\gamma$ nicht rektifizierbar

<u>ANA</u> Ü10

8.) $f \in C^1$ $\quad \gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} f(t) \cdot \cos(t) \\ f(t) \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

ges: $l(\gamma)$

Da $f \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$ und sin und cos $\in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$ ist auch $\gamma \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$.

Aus Satz 11.1.8. folgt nun

$$l(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\| \begin{pmatrix} f'(t) \cdot \cos(t) - f(t) \cdot \sin(t) \\ f'(t) \cdot \sin(t) + f(t) \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \right\|_2 dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(f'(t) \cdot \cos(t) - f(t) \cdot \sin(t))^2 + (f'(t) \cdot \sin(t) + f(t) \cdot \cos(t))^2} \, dt$$

$$(f'(t) \cdot \cos(t) - f(t) \cdot \sin(t))^2 + (f'(t) \cdot \sin(t) + f(t) \cdot \cos(t))^2$$

$$= (f'(t))^2 \cdot \cos^2(t) - 2 f'(t) \cos(t) \cdot f(t) \cdot \sin(t) + (f(t))^2 \cdot \sin^2(t) + (f'(t))^2 \sin^2(t) + 2 f'(t) \sin(t) \cdot f(t) \cdot \cos(t) + (f(t))^2 \cdot \cos^2(t)$$

$$= (f'(t))^2 \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t)) + (f(t))^2 \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t))$$

$$= (f'(t))^2 + (f(t))^2$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(f'(t))^2 + (f(t))^2} \, dt$$

ges: Bogenlänge für Archimedische Spirale ($f(t) = t$)

$f'(t) = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1^2 + t^2} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t^2 + 1} \, dt$$

$$\int \sqrt{t^2+1} \, dt = \int \sqrt{(\tan(u))^2 + 1} \cdot (t^2+1) \, du \quad \left[ t = \tan(u),\ u = \arctan(t),\ \frac{du}{dt} = \frac{1}{t^2+1},\ dt = (t^2+1) \, du \right.$$

$$\left[ \tan^2(t) + 1 = \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} + \sin^2(t) + \cos^2(t) = \frac{\sin^2(t) + \sin^2(t) \cdot \cos^2(t) + \cos^4(t)}{\cos^2(t)} = \frac{1}{\cos^2(t)} \right.$$

$$= \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2(u)}} \cdot (\tan^2(u) + 1) \, du = \int \frac{1}{\cos(u)} \cdot \frac{1}{\cos^2(u)} \, du = \int \frac{1}{\cos^3(u)} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \left( \tan(u) \cdot \sec(u) - \ln\left(\cos\left(\frac{u}{2}\right) - \sin\left(\frac{u}{2}\right)\right) + \ln\left(\sin\left(\frac{u}{2}\right) + \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \right)$$

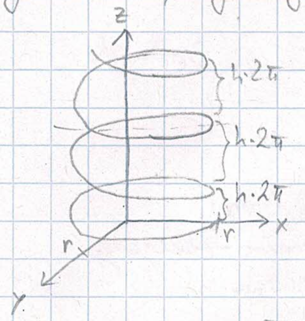
$$= \frac{1}{2} \left( \sqrt{t^2+1} \, t + \operatorname{areasinh}(t) \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t^2+1} \, dt = \frac{1}{8} \left( \pi \sqrt{4 + \pi^2} + 4 \operatorname{areasinh}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \approx 2{,}0792$$

ANA Ü10

9.) $\gamma: [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(t) \\ r\cdot\sin(t) \\ h\cdot t \end{pmatrix}$ $\quad r, h > 0$ fest

ges: Skizze, Bogenlänge und $t(s)$, sodass die Bogenlänge von $\gamma(0)$ bis $\gamma(t(s))$ gleich $s$ ist.




$r\cdot\cos(t)$, $r\cdot\sin(t)$ und $h\cdot t \in C^1[0, 4\pi]$

$$\Rightarrow l(\gamma) = \int_0^{4\pi} \|\gamma'(x)\|_2 \, dx$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r\cdot\sin(t) \\ r\cdot\cos(t) \\ h \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{(-r\cdot\sin(t))^2 + (r\cdot\cos(t))^2 + h^2} = \sqrt{r^2\cdot\sin^2(t) + r^2\cdot\cos^2(t) + h^2}$$

$$= \sqrt{r^2\cdot(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + h^2} = \sqrt{r^2+h^2}$$

$$\int_0^{4\pi} \|\gamma'(t)\|_2 dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{r^2+h^2}\, dt = \sqrt{r^2+h^2}\cdot 4\pi - \sqrt{r^2+h^2}\cdot 0 = 4\pi\cdot\sqrt{r^2+h^2} = l(\gamma)$$

$$l(\gamma|_{[0,s]}) = \int_0^s \sqrt{r^2+h^2}\, dt = s\cdot\sqrt{r^2+h^2}$$

$y = s\cdot\sqrt{r^2+h^2}$ $\qquad s = \frac{y}{\sqrt{r^2+h^2}}$

$t(s) := \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}$ $\qquad \gamma(t(s)) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right) \\ r\cdot\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right) \\ h\cdot\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} \end{pmatrix}$

$$(\gamma\circ t)'(s) = \begin{pmatrix} -r\cdot\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ r\cdot\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ h\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(s)\|_2 = \sqrt{\left(-r\cdot\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)^2 + \left(r\cdot\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)^2 + \left(h\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{r^2\cdot\sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)\cdot\frac{1}{r^2+h^2} + r^2\cdot\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)\cdot\frac{1}{r^2+h^2} + h^2\cdot\frac{1}{r^2+h^2}}$$

$$= \sqrt{r^2\cdot\frac{1}{r^2+h^2}\left(\sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)\right) + h^2\cdot\frac{1}{r^2+h^2}} = \sqrt{\frac{1}{r^2+h^2}(r^2+h^2)} = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^s \|(\gamma\circ t)'(x)\|_2 \, dx = \int_0^s 1\, dx = s$$