FANA Ü5

41. Zeigen Sie: Konvergiert das Netz $(x_i)_{i\in I}$ im Banachraum X schwach gegen 0, so gibt es eine Folge $(y_n)_n$ mit $y_n \in \mathrm{con}(\{x_i : i\in I\})$ die in der Norm gegen 0 konvergiert.

$(x_i)_{i\in I}$ konvergiert schwach gegen 0_X $\Leftrightarrow \forall x'\in X' : \lim_{i\in I} x'(x_i) = x'(0_X) (= 0_{\mathbb{C}})$

konvexe Hülle $\mathrm{con}(\{x_i : i\in I\}) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j : k\in\mathbb{N}; x_1,\dots,x_k \in \{x_i : i\in I\}; \lambda_1,\dots,\lambda_k \in [0,1], \sum_{j=1}^{k}\lambda_j = 1 \right\}$

5.3.8. Satz $(X,\mathcal{T})$... lokalkonvexer top. Raum, $A\subseteq X$... konvex $\Rightarrow \overline{A}^{\mathcal{T}} = \overline{A}^{\sigma(X,X')}$

Sei $(x_i)_{i\in I} \xrightarrow{\sigma(X,X')} 0_X$ bel. $C := \mathrm{con}(\{x_i : i\in I\})$ ist offenbar konvex.

Aus der Konvergenz folgt $0 \in \overline{C}^{\sigma(X,X')}$ und mit Satz 5.3.8. $\overline{C}^{\sigma(X,X')} = \overline{C}^{\mathcal{T}(\|.\|)}$. Also gilt $0_X \in \overline{C}^{\mathcal{T}(\|.\|)}$ und somit (aus der Definition vom Abschluss bzw. einer Äquivalenz davon) $\exists$ Folge (y_n) in C mit $y_n \xrightarrow{\|.\|} 0_X$.

$\square$

FANA Ü5

42) Zeigen Sie: Jeder Banachraum ist isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von $C(K)$ für eine kompakte Menge K.

5.5.6. Satz (Banach-Alaoglu) Für einen normierten Raum $(X, \|.\|)$ ist die bzgl. der Abbildungsnorm abgeschlossene Einheitskugel um die Null in X' $K_1^{X'}(0) := \{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ kompakt bzgl. der schwach* Topologie $\sigma(X', X)$.

Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum. Wähle $K := K_1^{X'}(0)$ ... nach Banach-Alaoglu w^* kompakt.

Definiere $\varphi : X \to C(K)$, $x \mapsto \iota(x)|_K$.

Für alle $x \in X$ ist $\iota(x)$ w^*-stetig und somit ist auch $\iota(x)|_K$ w^*-stetig. Damit ist φ wohldefiniert (φ bildet nach $C(K)$ ab).

Funktionale in $\iota(X)$ sind durch ihr Verhalten auf K bereits eindeutig festgelegt (lin.).

Daher folgt aus der Injektivität und Isometrie von ι die von φ.

Da X abgeschlossen ist folgt dass $\varphi(X)$ abgeschlossen ist. Insgesamt folgt $X \cong \varphi(X) \leq C(K)$.

$\square$

FANA Ü5

43) Zeigen Sie, dass ein separabler Banachraum X isometrisch isomorph zu einem Quotientenraum $\ell^1(\mathbb{N})/M$, M abgeschlossener Unterraum von $\ell^1(\mathbb{N})$, ist.

Def separabel: enthält abzählbare dichte Teilmenge

Lemma 4.3.3. X..BR $(Y, \|.\|)$ $T: X \to Y$..beschränkt, lin. $\Rightarrow \left(\overline{T(U_1^X(0))} \supseteq U_1^Y(0) \Rightarrow T(U_1^X(0)) \supseteq U_1^Y(0)\right)$

Homomorphiesatz $f: A \to B$..Homomorphismus $\Rightarrow A/\ker(f)$ ist isomorph zu $f(A)$

Korollar zum Satz der offenen Abbildung 4.3.4. X, Y..BR $R: X \to Y$..bij, lin. $\Rightarrow (R$..stetig $\Rightarrow R^{-1}$..stetig$)$

Sei $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte TM von X. Definiere $\varphi: \ell^1 \to X$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \frac{d_n}{\|d_n\|_X}$

$\|\varphi\| = 1$

Es gilt $\|\varphi(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_X = \|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \frac{d_n}{\|d_n\|_X}\|_X \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \frac{\|d_n\|_X}{\|d_n\|_X} = \sum_n |a_n| = \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1}$ und

$\|\varphi(\delta_{1n})\|_X = \|\sum_n \delta_{1n} \frac{d_n}{\|d_n\|_X}\|_X = \|\frac{d_1}{\|d_1\|_X}\|_X = 1$ also $\|\varphi\| = \sup\left\{\frac{\|\varphi((a_n)_n)\|_X}{\|(a_n)_n\|_{\ell^1}} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \setminus \{0\}\right\} = 1$

φ surj.

Es liegt $D \cap U_1^X(0)$ dicht in $K_1^X(0)$. Für $d_n \in D \cap U_1^X(0)$ gilt $\varphi(\underbrace{\|d_n\|_X (\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}}}_{\|.\|_1 < 1, \text{ da } d_n \in U_1^X(0)})$ $= \sum_{m\in\mathbb{N}} \|d_n\|_X \delta_{nm} \frac{d_m}{\|d_m\|_X} = \|d_n\|_X \frac{d_n}{\|d_n\|_X} = d_n$, womit $\varphi(U_1^{\ell^1}(0))$ dicht in $K_1^X(0)$ liegt.

Nach Lemma 4.3.3. gilt $\varphi(U_1^{\ell^1}(0)) \supseteq U_1^X(0)$ also ist φ surjektiv.

$X \cong \ell_1/M$

Definiere $M := \ker \varphi$. φ ist stetig $\Rightarrow M \leq \ell^1$ ist abg. Mit dem Homomorphiesatz folgt $\ell^1/M \overset{\psi}{\cong} \varphi(\ell^1) = X$ mit dem Isomorphismus $\psi([a]) := \varphi(a)$. Nach Korollar 4.3.4 ist, da ψ stetig auch ψ^{-1} stetig.

Isometrie

Für die Isometrie (Normerhaltung) zeigen wir $\forall n \in \mathbb{N}: \|d_n\|_X = \|\psi^{-1}(d_n)\|_{\ell^1/M}$, da aus der Dichtheit von D und der (glm.) Stetigkeit von ψ^{-1}, dann schon Isometrie auf dem gesamten Raum folgt.

($\geq$) $\varphi(\|d_n\|_X (\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}}) = d_n$

$\|d_n\|_X = \|(\|d_n\|_X \delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} \geq \|[\|d_n\|_X (\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}}]\|_{\ell^1/M} = \|\psi^{-1}(\varphi(\|d_n\|_X (\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}}))\|_{\ell^1/M} = \|\psi^{-1}(d_n)\|_{\ell^1/M}$

($\leq$) Es gilt $\|\psi([a])\|_X = \|\varphi(a)\|_X \leq \|a\|_{\ell^1}$ (oben gezeigt, aber eigentlich klar)

Also auch $\|\psi([a])\|_X \leq \inf_{x\in[a]} \|x\|_{\ell^1} = \|[a]\|_{\ell^1/M}$ also $\|\psi\| \leq 1$. Damit folgt

$\|d_n\|_X = \|\psi(\psi^{-1}(d_n))\|_X \leq \|\psi^{-1}(d_n)\|_{\ell^1/M}$ □

FANA Ü5

44) Zeigen Sie, dass $(L^1[0,1], \|.\|_1)$ nicht isometrisch isomorph zu dem Dualraum eines Banachraumes ist.

$E(K_1^{X'}(0)) \neq \emptyset$

Indirekt angenommen $(L^1, \|.\|_1) \cong (X, \|.\|)'$ mit φ als isometrischer Isomorphismus für einen BR X. $\varphi(K_1^{L^1}(0)) = K_1^{X'}(0)$. Da $K_1^{X'}(0)$ konvex ist, gilt nach Banach-Alaoglu dass $K_1^{X'}(0)$ auch w^*-kompakt ist. Mit Krein-Milman folgt, dass es Extremalpunkte gibt $(E(K_1^{X'}(0)) \neq \emptyset)$.

$E(K_1^{L^1}(0)) \neq \emptyset$

Für $z \in K_1^{L^1}(0)$ mit $\varphi(z) \in E(K_1^{X'}(0))$ gilt (aus Def Extremalpunkte) $\forall \varphi(x), \varphi(y) \in K_1^{X'}(0) \forall \lambda \in (0,1) (\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \in \{\varphi(z)\} \Rightarrow \varphi(x), \varphi(y) \in \{\varphi(z)\})$ also auch $\forall x', y' \in K_1^{L^1}(0)\ \forall \lambda \in (0,1) (\lambda x + (1-\lambda) y = z \Rightarrow x = y = z)$ also hat auch $K_1^{L^1}(0)$ Extremalpunkte

$\|f\|_1 = 1$

Sei $f \in K_1^{L^1}(0)$ ein Extremalpunkt. Es muss $\|f\|_1 = 1$ gelten, da sonst

$\|f\|_1 \in (0,1)$ $\quad \|f\|_1 \left(\frac{f}{\|f\|_1}\right) + (1 - \|f\|_1) \cdot 0_{L^1} = f \overset{\text{Def Extremalpunkt}}{\Rightarrow} \frac{f}{\|f\|_1} = 0 = f$ ↯ $\quad *$

$f \notin E(K_1^{L^1}(0))$

$F: [0,1] \to \mathbb{R}, \ \xi \mapsto \int_{[0,\xi]} |f| \, d\mu$ ist (da $\|f\|_1 = 1$) nach dem Hauptsatz vom Lebesgue-Integral (absolut) stetig und es gilt $F(0) = 0$, $F(1) = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz $\exists \xi \in (0,1): \frac{1}{2} = F(\xi) = \int_{[0,1]} |f \mathbb{1}_{[0,\xi]}| \, d\mu$. $F(1) - F(\xi) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2f\mathbb{1}_{[0,\xi]}, 2f\mathbb{1}_{(\xi,1]} \in K_1^{L^1}(0)$ und $\frac{1}{2}(2f\mathbb{1}_{[0,\xi]}) + \frac{1}{2}(2f\mathbb{1}_{(\xi,1]}) = f$

$\overset{\text{Def Extr.}}{\Rightarrow} 2f\mathbb{1}_{[0,\xi]} = 2f\mathbb{1}_{(\xi,1]} = f$ ↯ zu f ist Extremalpunkt. $\square$

$*$ $f \equiv 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(-1) \Rightarrow 0 = 1 = -1$ ↯

Banach-Alaoglu $\quad (X, \|.\|) \Rightarrow K_1^{X'}(0) \ldots w^*$ kompakt

Krein-Milman $\quad (X, \mathcal{T}) \ldots$ lokal konvex $\quad K \subseteq X \ldots \neq \emptyset$, kompakt, konvex $\Rightarrow K = \overline{\mathrm{co}(E(K))}$ Insbesondere $E(K) \neq \emptyset$.

Def Extremalpunkte $\quad K \subseteq X \ldots$ konvex $\quad S \underset{\neq\emptyset}{\subseteq} K \ldots$ heißt Extremal $\Leftrightarrow \forall x, y \in K\ \forall t \in (0,1): tx + (1-t)y \in S \Rightarrow x, y \in S$

Hauptsatz Lebesgue-Integral $\quad f$ auf I Lebesgue-Integrierbar $\forall c \in I: F(x) = \int_c^x f \, d\lambda$ ist abs. stetig

Zwischenwertsatz $\quad f: [a,b] \to \mathbb{R} \ldots$ stetig $\quad \forall v \in (f(a), f(b))\ \exists c \in (a,b): f(c) = v$

FANA Ü5

45) Sei K ein kompakter Raum und $\mathcal{A}$ eine punktetrennende Algebra stetiger reellwertigen Funktionen auf K, die die konstanten Funktionen enthält und $\mathcal{M}(K)$ der Dualraum von $C(K)$, also nach Riesz-Markov der Raum der regulären Borel-Maße auf K.

Zeigen Sie, dass $C := \mathcal{A}^\perp \cap K_1^{\mathcal{M}(K)}(0)$ kompakt, konvex ist aber für $\mathcal{A}^\perp \neq \{0\}$ keine Extremalpunkte enthält. Leiten Sie damit den Satz von Stone-Weierstraß her.

(VE) $C(K)$, $\mathcal{A}$ ... punktetrennend, konstante Funktion (also mit 1)

$\mathcal{M}(K)$ ... reguläre Borelmaße auf K

zz: $\mathcal{A}^\perp \cap K_1^{\mathcal{M}(K)}(0) = \{0\}$ $\qquad$ $0 \in \mathcal{A}^\perp \cap K_1^{\mathcal{M}(K)}(0)$ ist klar

zz: $\mathcal{A}^\perp \cap K_1^{\mathcal{M}(K)}$ ist kompakt, konvex

$\mathcal{A}^\perp$ ist abg. bez. w^* $\qquad$ Nach Banach Alaoglu ist $K_1^{\mathcal{M}(K)}$ w^*-kompakt

Also ist $\mathcal{A}^\perp \cap K_1^{\mathcal{M}(K)}$ ist kompakt als abg. UR bzgl. w^*

Beide konvex $\Rightarrow$ $\mathcal{A}^\perp \cap K_1^{\mathcal{M}(K)}$ konvex

- Krein-Milman $\Rightarrow$ $\mathcal{A}^\perp \cap K_1^{\mathcal{M}(K)} = \overline{\operatorname{co}(\underbrace{E(\mathcal{A}^\perp \cap K_1^{\mathcal{M}(K)}(0))}_{\text{zz: } = \{0\}})}$, da dann $\Rightarrow \mathcal{A}^\perp \cap K_1^{\mathcal{M}(K)} = \{0\}$.

Sei $\mu \in (\mathcal{A}^\perp \cap K_1^{\mathcal{M}(K)}(0)) \setminus \{0\}$

zz: $\exists$ nichttriviale konvex kombination $\qquad$ ges: $f \in \mathcal{A}$: $\int f \, d|\mu| = 0 \ \wedge \|f\|_\infty \leq 1 \wedge |\mu|[f \neq 0] \neq 0$

da dann $\underbrace{\|(1 \pm f) d\mu\|}_{\text{Totalvariation}} = \int \underbrace{|1 \pm f|}_{\geq 0} \, d|\mu| = \int 1 \, d\mu = \|\mu\| \leq 1$

$\Rightarrow (1 \pm f) d\mu \in K_1^{\mathcal{M}(K)}(0)$

$g \in \mathcal{A}$ $\qquad$ $\int g(1 \pm f) \, d\mu = \int g \, d\mu \pm \int \underbrace{fg}_{\in \mathcal{A}} \, d\mu = 0$ $\Rightarrow$ $(1 \pm f) d\mu \in \mathcal{A}^\perp$

$\Rightarrow \mu = \frac{1}{2}(1+f) d\mu + \frac{1}{2}(1-f) d\mu$

- 1. Fall $\exists x \in K \ \forall f \in \mathcal{A}, \int f \, d|\mu| = 0 : f(x) = 0$ $\qquad$ $|\mu|(K \setminus \{x\}) \neq 0$ $\quad$ $\mu(K) = \int 1 \, d\mu = 0$

regulär $\exists L \subseteq K \setminus \{x\} : |\mu|(L) > 0$ $\qquad$ Sei $y \in L$ $\qquad$ $\exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y)$ (punktetrennend)

o.B.d.A. $\int f \, d|\mu| = 0$, da $\tilde{f} = f - \frac{\int f \, d|\mu|}{\|\mu\|}$ $\qquad$ $\Rightarrow \nexists y \in L \ \forall f \in \mathcal{A}, \int f \, d|\mu| = 0 : f(y) = 0$

- 2. Fall $\nexists x \in K \ \forall f \in \mathcal{A}, \int f \, d|\mu| = 0 : f(x) = 0$ $\qquad$ $L = K$ $\Rightarrow \bigcup_{\substack{f \in \mathcal{A} \\ \int f \, d|\mu| = 0}} [f \neq 0] \supseteq L$ kompakt

also endliche ausreichend $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} [f_k \neq 0] \supseteq L$

$0 < |\mu|(L) \leq \sum_{k=1}^{n} |\mu|([f_k \neq 0])$ $\qquad$ $\Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} : |\mu|([f_i \neq 0]) > 0$

$\Rightarrow \mathcal{A}^\perp \cap K_1^{\mathcal{M}(K)}(0) = \{0\}$ $\quad \Rightarrow$ $\mathcal{A}^\perp = \{0\}$

Insgesamt $\overline{\mathcal{A}} = {}^\perp(\mathcal{A}^\perp) = {}^\perp(\{0\}) = C(K)$ $\qquad$ $\square$

FANA Ü5

46) Zeigen Sie: Hat $K_1^X(0)$, X reflexiver Banachraum, endlich viele Extremalpunkte, so ist X endlichdimensional. Gilt diese Aussage auch für nicht reflexive Banachräume?

Bsp 35 $X \ldots$ BR $\quad K_1^{\|\cdot\|}(0) \ldots \sigma(X,X')$-kompakt $\Leftrightarrow X \ldots$ reflexiv

5.9.2. Satz (Krein-Milman) $(X,\mathcal{T}) \ldots$ lokalkonvexer Raum $\quad K \subseteq X \ldots \neq \emptyset$, kompakt, konvex

$\Rightarrow K = \overline{\operatorname{co}(E(K))}$ $\quad$ Insbesondere besitzt K Extremalpunkte.

$E(K_1^X(0)) = \{e_1, \ldots, e_n\} \ldots$ endlich viele Extremalpunkte von $K_1^X(0)$.

$K_1^X(0)$ ist $\neq \emptyset$, konvex und wegen Bsp 35 kompakt also gilt nach Krein-Milman

$K_1^X(0) = \overline{\operatorname{co}(E(K_1^X(0)))}^{\sigma(X,X')} = \overline{\operatorname{co}(\{e_1, \ldots, e_n\})}^{\sigma(X,X')} \subseteq \overline{\operatorname{span}(\{e_1, \ldots, e_n\})}^{\sigma(X,X')} = \operatorname{span}(\{e_1, \ldots, e_n\})$

$K_1^X(0)$ ist absorbierend $(\forall x \in X\ \exists t > 0 : tx \in K_1^X(0))$ also gilt sogar $X = \operatorname{span}(\{e_1, \ldots, e_n\})$.

Somit ist $\dim X \leq n < \infty$.

Für nicht reflexive Banachräume stimmt die Aussage i.A. nicht.

Gegenbeispiel $\quad$ Bsp 44 $\quad (L^1[0,1], \|\cdot\|_1)$ ist nicht reflexiv $(X'' \neq \iota(X))$

wir haben $|E(K_1^{L^1[0,1]}(0))| = |\emptyset| = 0 < \infty$ gezeigt, jedoch ist $L^1[0,1]$ nicht endlichdimensional.

$\square$

FANA Ü5

47) Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Krein-Milman: Ist $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer VR und K eine $\sigma(X,X')$-kompakte konvexe TM von X, dann ist K der $\mathcal{T}$-Abschluss der konvexen Hülle der Extremalpunkte von K.

5.9.2. Satz (Krein-Milman) $(X, \mathcal{T})$... lokalkonvexer Raum $K \subseteq X$... $\neq \emptyset$, kompakt, konvex $\Rightarrow K = \overline{\text{co}(E(K))}$

5.3.8. Satz $(X, \mathcal{T})$... lokalkonvexer top. Raum $A \subseteq X$.. konvex $\Rightarrow \overline{A}^{\mathcal{T}} = \overline{A}^{\sigma(X,X')}$

Sei $K \subseteq X$... $\sigma(X,X')$ kompakt, konvex bel. Wir betrachten $(X, \sigma(X,X'))$.

Nach Krein-Milman folgt $K = \overline{\text{co}(E(K))}^{\sigma(X,X')}$. Die rechte Menge ist als Abschluss einer konvexen Menge konvex und somit folgt aus 5.3.8, dass $\overline{\text{co}(E(K))}^{\sigma(X,X')} = \overline{\text{co}(E(K))}^{\mathcal{T}}$ also $K = \overline{\text{co}(E(K))}^{\mathcal{T}}$.

Falls $K = \emptyset \Rightarrow E(K) = \emptyset \Rightarrow \text{co}(E(K)) = \emptyset$ und $\overline{\text{co}(E(K))}^{\mathcal{T}} = \emptyset = K$. $\square$

FANA Ü5

48) Für einen Hilbertraum H ist durch die Familie $p_{x,y}(T) = |\langle Tx, y\rangle|$, $x,y \in H$ von Seminormen auf dem Raum der beschränkten linearen Abbildungen $L_b(H)$ eine lokalkonvexe Vektorraumtopologie definiert, die schwache Operatortopologie. Zeigen Sie, dass $K_1^{L_b(H)}(0)$ unter dieser Topologie kompakt ist.

UE $\mathcal{T}$ ... initial Top. bzgl. $|\varphi_y| = |\langle \cdot , y\rangle|$ bildet auf $\prod_{x\in H} H$ Produkttopologie.

$\pi_y : \prod_{x\in H} H \to (H, \mathcal{T})$ $\iota : L_b(H) \to \prod_{x\in H} H$

Produkttop. $f \in \prod_{x\in H} H$ ist $f : H \to H$

$p_{x,y}(T) = |\langle Tx, y\rangle| = |\varphi_y(Tx)| = |\varphi_y \circ \pi_x(T)|$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $y, z \in H$ $h_{\alpha,\beta,y,z} = \alpha \pi_y + \beta \pi_z - \pi_{\alpha y + \beta z}$ ... stetig

$f \in \prod_{x\in H} H$ $\forall : h_{\alpha,\beta,y,z}(f) = 0 \iff f$ ... linear

$\bigcap_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{C}\\ y,z\in H}} h^{-1}_{\alpha,\beta,y,z}(0)$ ... lin. UR von H (lin. Abbildung auf H)

$T \in K_1^{L_b(H)} \iff \|Tx\|_H \leq \|x\|_H \Rightarrow K_1^{L_b(H)} = \bigcap h^{-1}_{\alpha,\beta,y,z}(0) \cap \prod_{x\in H} \{w \in H \mid \|w\| \leq \|x\|_H\}$

Riesz-Fischer $\Rightarrow$ H ist isometrisch isomorph zu H'

$\Rightarrow K_1^H(0)$ ist $\sigma(H, H')$ kompakt

φ_y ist die $\sigma(H,H')$ Top $|\varphi_y|$ ist stetig $\Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \sigma(H, H')$

Jede Menge im obigen Produkt ist $\mathcal{T}$-kompakt.

Tychonoff $\Rightarrow$ $K_1^{L_b(H)}(0)$ als abg. TM einer kompakten Menge kompakt.

$\square$

FANA Ü5

49) Seien X, Y ... Banachräume und $T \in L_b(X,Y)$. Zeigen Sie: (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

(i) $\operatorname{ran} T$ ... abgeschlossen (ii) $\operatorname{ran} T' = (\ker T)^{\perp}$ (iii) $\operatorname{ran} T = {}^{\perp}(\ker T')$

6.2.1. Satz vom abgeschlossenen Bild X, Y .. BR, $T \in L_b(X,Y) \Rightarrow$ ($\operatorname{ran} T$ .. $\|.\|_Y$-abg. in $Y \Longleftrightarrow \operatorname{ran} T'$ ... w^*-abg. in $X' \Longleftrightarrow \operatorname{ran} T'$ ... $\|.\|_{X'}$-abg. in X') Dabei ist T genau dann bijektiv, wenn T' bijektiv ist.

5.4.7. Bipolarsatz Sei (X,Y) ein duales Paar und seien $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$. Dann gilt

$${}^{\circ}(M^{\circ}) = \overline{\operatorname{co}(M \cup \{0\})}^{\sigma(X,Y)}, \quad ({}^{\circ}N)^{\circ} = \overline{\operatorname{co}(N \cup \{0\})}^{\sigma(Y,X)}, \quad {}^{\perp}(M^{\perp}) = \overline{\operatorname{span} M}^{\sigma(X,Y)}, \quad ({}^{\perp}N)^{\perp} = \overline{\operatorname{span} N}^{\sigma(Y,X)}$$

6.1.7. Proposition X, Y .. normierte Räume, $T \in L_b(X,Y) \Rightarrow \ker T' = (\operatorname{ran} T)^{\perp}$, $\ker T = {}^{\perp}(\operatorname{ran} T')$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Aus $\operatorname{ran} T$ ... abg. folgt mit dem Satz vom abgeschlossenen Bild $\operatorname{ran} T'$ ... abg.

$$\operatorname{ran} T' = \overline{\operatorname{ran} T'}^{\sigma(X',X)} \underset{\text{Bipolarsatz}}{=} ({}^{\perp}(\operatorname{ran} T'))^{\perp} \underset{\text{Prop 6.1.7.}}{=} (\ker T)^{\perp}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\overset{(\ker T)^{\perp}}{\operatorname{ran} T'}$ ist als Annihilator abg. Mit dem Satz vom abg. Bild folgt $\operatorname{ran} T$ ist abg.

(i) $\Rightarrow$ (iii) $$\operatorname{ran} T \underset{\operatorname{ran} T \text{ ist abg.}}{=} \overline{\operatorname{ran} T}^{\sigma(Y,Y')} \underset{\text{Bipolarsatz}}{=} {}^{\perp}((\operatorname{ran} T)^{\perp}) \underset{\text{Prop 6.1.7.}}{=} {}^{\perp}(\ker T')$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) $\operatorname{ran} T = {}^{\perp}(\ker T')$ ist als Annihilator abg.

$\square$

FANA Ü5

50) X, Y .. BR $\quad T: X \to Y$ .. lin. $\quad$ (i) $T \in L_b(X,Y)$ $\quad$ (ii) T ist norm-schwach stetig, d.h. $(X, \|.\|) \to (Y, \sigma(Y,Y'))$ stetig

(iii) T ist schwach-schwach stetig, d.h. $(X, \sigma(X,X')) \to (Y, \sigma(Y,Y'))$ stetig $\quad$ zz: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

Prop 5.3.9. X, Y .. BR $\quad R: X \to Y$ .. linear $\quad R$ .. beschränkt $\Leftrightarrow R: (X, \mathcal{T}(\|.\|_X)) \to (Y, \sigma(Y,Y'))$ stetig

Satz 1.2.1. X .. Menge, $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ .. top. R. $\quad f_i: X \to Y_i$ $\quad \mathcal{T}$ .. initiale Topologie $(Y, \mathcal{O})$ .. top R. $\quad f: Y \to X$

$\Rightarrow f: (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{T})$ .. stetig $\Leftrightarrow \forall i \in I: f_i \circ f: (Y, \mathcal{O}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ ... stetig

---

(i) $\Rightarrow$ (ii) klar, da $\sigma(Y,Y') \subseteq \mathcal{T}_{\|.\|_Y}$)

$$\begin{tikzcd} & \text{(i)} \arrow[d, leftrightarrow] \\ \text{(iii)} \arrow[r, leftrightarrow, bend right] & \text{(ii)} \end{tikzcd}$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) klar, da $\sigma(X,X') \subseteq \mathcal{T}_{\|.\|_X}$

(ii) $\Leftrightarrow$ (i) nach Prop 5.3.9.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Nach Vorraussetzung gilt $T: (X, \|.\|_X) \to (Y, \sigma(Y,Y'))$ ist stetig. Mit Satz 1.2.1. folgt, das dann auch $\forall f \in Y': f \circ T: (X, \|.\|) \to \mathbb{C}$ ...stetig. also gilt $f \circ T \in X'$

zz: $\forall f \in Y': f \circ T: (X, \sigma(X,X')) \to \mathbb{C}$ ...stetig.

Da $(X, \|.\|)' = X' = (X, \sigma(X,X'))'$ folgt die Aussage. $\square$