PDGL Ü4

1) $L(\Phi) = \operatorname{div}(A(x,y)\nabla\Phi)$, wobei $A(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) & g(x) \\ f(y) & b(x,y) \end{pmatrix}$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$a(x,y), b(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

Def $L^*(\Phi) := \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (c_\alpha \Phi)$ wenn $L(\Phi) = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha D^\alpha \Phi$ mit $c_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist.

$$L(\Phi) = \operatorname{div}\left(\begin{pmatrix} a(x,y) & g(x) \\ f(y) & b(x,y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{div}\begin{pmatrix} a(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + g(x)\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ f(y)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + a\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + g\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + f\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + b\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + (a)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + (b)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + (g+f)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

$$L^*(\Phi) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Phi\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right)\Phi\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a\Phi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(b\Phi) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}((g+f)\Phi)$$

$$= \left(-\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\Phi - \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \left(-\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\Phi - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\Phi - \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) +$$

$$\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\Phi + 2\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + a\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\Phi + 2\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + b\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + g\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + f\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + a\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + b\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + g\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + f\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

$L(\Phi) = \partial_{tt}\Phi - c^2\Delta\Phi$ für $c \in \mathbb{R}$ konstant $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$

$$L(\Phi) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi - c^2\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n c^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k^2}$$

$$L^*(\Phi) = (-1)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi - \sum_{k=1}^n (-1)^2\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(c^2\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n c^2\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\Phi = L(\Phi)$$

$\square$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a\Phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\Phi + a\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\Phi + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + a\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}((g+f)\Phi) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\Phi + g\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{=0}\Phi + f\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = \underbrace{\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}}_{=0}\Phi + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}}_{=0}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + g\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + f\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + g\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + f\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

PDGL Ü4

2) $U: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (x,t) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} & , x\in\mathbb{R}, t>0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \qquad \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$

$Lu := u_t - \Delta u, \qquad u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

zz: U ist Fundamentallsg von Lu

$\int_{\mathbb{R}} U(x,t)\,dx = 1$ für $t>0$. und $\int_{\mathbb{R}} U(x,t)\,dx = 0$ für $t<0$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} U(x,t)\,dx = H(t)$

$U_t(x,t) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}\,t^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} (x^2 - 2t)$

$U_{xx}(x,t) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{4\sqrt{\pi}\,t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}\,t^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} (x^2 - 2t) = U_t(x,t)$

$\Rightarrow LU = U_t - U_{xx} = 0 \quad \forall t>0$ und $\forall t<0$

$\langle LU, \Phi\rangle = \langle U_t - U_{xx}, \Phi\rangle = \langle U, -\Phi_t - \Phi_{xx}\rangle = \iint U(x,t)(-\Phi_t - \Phi_{xx})\,dt\,dx$

$= -$

$\int_{\mathbb{R}} LU(x,t)\,\Phi(x,t)\,dt = \Phi(0)$

$g \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$

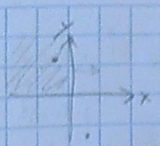
$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}} U(x-y,t)\,g(y)\,dy$ löst $u_t - \Delta u = 0 \ \forall x\in\mathbb{R}, t>0$ und $\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = g(x_0) \ \forall x_0\in\mathbb{R}$ ✓

im klassischen Sinne.

Wie oft ist u diffbar? $u(x,t) = (\underbrace{U(\cdot,t)}_{\in C^\infty(\mathbb{R})} * g(\cdot))(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ bzgl. x

beschränkt: $|u(x,t)| = \left|\int_{\mathbb{R}} U(x-y,t)\,g(y)\,dy\right| \leq \|g\|_{L^\infty} \underbrace{\left|\int_{\mathbb{R}} U(x-y,t)\,dy\right|}_{=1 \text{ nach oben}} = \|g\|_{L^\infty} < \infty$

PDGL Ü4

3) $\Omega = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0\}$  ges. $G(x,y,\xi,\eta)$ für Δ auf Ω

Fundamentallsg in $\mathbb{R}^2$ $U(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ (aus Skript) wobei $(x,y) \neq (0,0)$

Wir fügen für einen Pol $(\xi,\eta) \in \Omega$ die Pole $(-\xi,\eta)$, $(\xi,-\eta)$ und $(-\xi,-\eta)$ hinzu

$$G(x,y,\xi,\eta) = U\left(\binom{x}{y} - \binom{\xi}{\eta}\right) - U\left(\binom{x}{y} - \binom{-\xi}{\eta}\right) - U\left(\binom{x}{y} - \binom{\xi}{-\eta}\right) + U\left(\binom{x}{y} - \binom{-\xi}{-\eta}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\ln((x-\xi)^2+(y-\eta)^2) - \ln((x+\xi)^2+(y-\eta)^2) - \ln((x-\xi)^2+(y+\eta)^2) + \ln((x+\xi)^2+(y+\eta)^2)\right)$$

Nur der erste Pol liegt in Ω, daher ist die Funktion Fundamentallsg auf Ω.

Als nächstes zeigen wir $(\xi,\eta) \in \partial\Omega \Rightarrow G(x,y,\xi,\eta) = 0$ (hom. Randbedingung)

1. Fall $(\xi,\eta) = (0,\eta)$ mit $\eta > 0$:

$$G(x,y,0,\eta) = \frac{1}{4\pi}\left(\ln(x^2+(y-\eta)^2) - \ln(x^2+(y-\eta)^2) - \ln(x^2+(y+\eta)^2) + \ln(x^2+(y+\eta)^2)\right) = 0$$

2. Fall $(\xi,\eta) = (\xi,\eta)$ mit $\xi < 0$:

$$G(x,y,\xi,0) = \frac{1}{4\pi}\left(\ln((x-\xi)^2+y^2) - \ln((x+\xi)^2+y^2) - \ln((x-\xi)^2+y^2) + \ln((x+\xi)^2+y^2)\right) = 0$$

Repräsentationsformel $\Delta u = f$ in Ω, $u = g$ auf $\partial\Omega$

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)\, ds(y) + \int_{\Omega} G(x,y) f(y)\, dy$$

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u(x,0) = f(x) \text{ für } x<0, \quad u(0,y) = g(y) \text{ für } y > 0$$

$$\nu = \binom{1}{0} \text{ auf } \underbrace{\left\{\binom{0}{y} : y \in \mathbb{R}^+\right\}}_{\partial\Omega_1} \text{ und } \nu = \binom{0}{-1} \text{ auf } \underbrace{\left\{\binom{x}{0} : x \in \mathbb{R}^-\right\}}_{\partial\Omega_2}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int_{\partial\Omega_1} g(\eta) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x,y,0,\eta)\, d\eta + \int_{\partial\Omega_2} -f(\xi) \frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y,\xi,0)\, d\xi + \int_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta) \cdot 0 \, d\binom{\xi}{\eta}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} g(\eta) \frac{x}{\pi}\left(\frac{1}{(y+\eta)^2+x^2} - \frac{1}{(y-\eta)^2+x^2}\right) d\eta + \int_{\mathbb{R}^-} f(\xi) \frac{y}{\pi}\left(\frac{1}{(x+\xi)^2+y^2} - \frac{1}{(x-\xi)^2+y^2}\right) d\xi$$

Eindeutig? Nein, da $v(x,y) := u(x,y) + x \cdot y$ auch

$\Delta v = \Delta u + \Delta(x \cdot y) = 0 + 0 + 0 = 0$ und $v(x,0) = u(x,0) + 0 = f(x)$, $v(0,y) = u(0,y) + 0 = g(y)$

$\Rightarrow$ v erfüllt das Dirichlet-Problem auch.

Analog wie im Beweis von 4.5. ist $(\xi,\eta) \mapsto G(x,y,\xi,\eta)$ harmonisch für $(x,y) \neq (\xi,\eta)$ G..symmetrisch

$\Rightarrow (x,y) \mapsto G(x,y,\xi,\eta)$ harmonisch für $(x,y) \neq (\xi,\eta)$ $\Rightarrow -\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y,\xi,\eta)$ mit $\nu = \xi$ und $\xi = 0$ bzw. $\nu = \eta$ und $\eta = 0$ ist harmonisch in Ω

$$\Rightarrow \Delta u(x,y) = \int_{\partial\Omega_1} g(\eta) \Delta_{(x,y)} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x,y,0,\eta)\, d\eta + \int_{\partial\Omega_1} -f(\xi) \Delta_{(x,y)} \frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y,\xi,0)\, d\xi = 0$$

$\lim\limits_{x,y \to x_0,0} |u(x,y) - f(x_0)| = \ldots = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x,y \to 0,y_0} |u(x,y) - g(y_0)| = \ldots = 0$

PDGL Ü4

4) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ... beschränktes Gebiet, $\partial\Omega \in C^1$

$\Delta u = u^3$ in Ω, $u = \tanh(\|x\|)$ auf $\partial\Omega$ z.z.: besitzt höchstens eine klassische Lsg.

Seien u_1, u_2 klassische Lsgen. Definiere $v := u_1 - u_2$

$v \in C^2(\Omega)$, da $u_1, u_2 \in C^2(\Omega)$ und $v \in C^0(\overline{\Omega})$, da $u_1, u_2 \in C^0(\overline{\Omega})$. $\Rightarrow v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

$\Delta v = \Delta(u_1 - u_2) = \Delta u_1 - \Delta u_2 = u_1^3 - u_2^3 \in C^2(\Omega)$

$\Omega_+ := \{x \in \Omega : u_1^3 - u_2^3 > 0\}$ $\Omega_0 := \{x \in \Omega : u_1^3 - u_2^3 = 0\}$ $\Omega_- := \{x \in \Omega : u_1^3 - u_2^3 < 0\}$

$\forall x \in \Omega_0 : u_1^3(x) - u_2^3(x) = 0 \Rightarrow u_1(x) = u_2(x)$

Ω_+ und Ω_- müssen kein Gebiet (nicht zusammenhängend) sein, allerdings gilt nach Bem Theorem 4.10. Gilt auch für nur offene beschränkte Mengen (wie es Ω_+ und Ω_- sind).

$$\Rightarrow \sup_{x \in \Omega_+} v(x) = \sup_{x \in \partial\Omega_+} v(x) = \begin{cases} 0, \text{ falls } x_0 \in \Omega_0 \\ \tanh(\|x_0\|) - \tanh(\|x_0\|), \text{ falls } x_0 \in \partial\Omega \end{cases} = 0 \Rightarrow v(x) \le 0 \text{ auf } \Omega_+$$

$$\Rightarrow \inf_{x \in \Omega_-} v(x) = \inf_{x \in \partial\Omega_-} v(x) = \begin{cases} 0, \text{ falls } x_0 \in \Omega_0 \\ \tanh(\|x_0\|) - \tanh(\|x_0\|), \text{ falls } x_0 \in \partial\Omega \end{cases} = 0 \Rightarrow v(x) \ge 0 \text{ auf } \Omega_-$$

Angenommen $0 > v(x) = u_1(x) - u_2(x)$ für ein $x \in \Omega_+$ $\Rightarrow u_1^3(x) - u_2^3(x) < 0$ ↯ zu $x \in \Omega_+$

Analog für $0 < v(x)$ für $x \in \Omega_-$ $\Rightarrow v \equiv 0$ auf $\Omega_+ \cup \Omega_0 \cup \Omega_- = \Omega$ □

Maxprinzip $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ... beschr. Gebiet $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ $\Delta u \ge 0$ bzw. $\Delta u \le 0$ in Ω

$\Rightarrow$ (i) $\exists x_0 \in \Omega : u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ bzw. $\exists x_0 \in \Omega : u(x_0) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$

(ii) $\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)$ bzw. $\inf_{x \in \Omega} u(x) = \inf_{x \in \partial\Omega} u(x)$

Gebiet ... offen, nichtleer, zusammenhängend, Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Alternativ: $v = (u_1 - u_2)^2 \ge 0$ $\Delta v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}((u_1 - u_2)^2) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(2(u_1 - u_2)\frac{\partial}{\partial x_i}(u_1 - u_2)\right) =$

$$= 2\sum_{i=1}^n \Big(\underbrace{\big(\tfrac{\partial}{\partial x_i}(u_1 - u_2)\big)^2}_{\ge 0} + (u_1 - u_2)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u_1 - u_2)\Big) \ge 2(u_1 - u_2)\underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u_1 - u_2)}_{=\Delta(u_1 - u_2)} = 2(u_1 - u_2)(\Delta u_1 - \Delta u_2) =$$

$$= 2\underbrace{(u_1 - u_2)}_{\text{sgn}}\underbrace{(u_1^3 - u_2^3)}_{\text{sgn}} \ge 0 \Rightarrow \sup_{x \in \Omega} v(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} v(x) = 0 \Rightarrow v \le 0 \Rightarrow v = 0$$

$\Rightarrow u_1 = u_2$ auf Ω.