ANA Ü12

1) X... Fixpunktraum , Y... Retrakt von X zz: Y... Fixpunktraum

Def X... Fixpunktraum $:\Leftrightarrow \forall f: X \to X$ ...stetig : $\exists x \in X: f(x) = x$ (also besitzt Fixpunkt)

Def Y... Retrakt von $X :\Leftrightarrow \exists R: X \to Y$ ...stetig: $R|_Y = Id$

Sei $g: Y \to Y$... stetig bel. Sei $R: X \to Y$... stetig mit $R|_Y = Id$ wie nach Retrakt existent. $\Rightarrow g \circ R: X \to Y \subseteq X$ ...stetig

Nach Angabe ist X ein Fixpunktraum also $\exists x \in X: g \circ R(x) = x$.

Da $g \circ R$ nach Y abbildet muss $x \in Y$. Da $R|_Y = Id$ folgt

$x = g \circ R(x) = g(x)$ also ist $x \in Y$ ein Fixpunkt von g.

Daher ist Y ein Fixpunktraum.

$\square$

ANA Ü12

2) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $\forall i,j: a_{ij} \geq 0$

zz: $\exists \lambda \geq 0$ ... EW $\exists x = (x_1, \dots, x_n)$ ... EV : $\forall i: x_i \geq 0 \wedge Ax = \lambda x$

$S := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ ... Simplex

$\varsigma : S \to S$, $x \mapsto \frac{1}{\|Ax\|_1} Ax$

ς wohldefiniert?

$(Ax)_{j=1}^n = (\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i)_{j=1}^n$ ist ≥ 0 $\forall j = 1, \dots, n$ $\quad \|Ax\|_1 = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i)$

$\Rightarrow \varsigma(x) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i)} (\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i)_{j=1}^n \quad \|\varsigma(x)\|_1 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sum\sum\dots} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i\right) = \frac{\sum\sum\dots}{\sum\sum\dots} = 1$

ς stetig?

$\forall j = 1, \dots, n : \varsigma_j(x) = \frac{1}{\sum_{k=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i)} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$ ist offenbar stetig $\Rightarrow \varsigma(x) = \begin{pmatrix} \varsigma_1(x) \\ \vdots \\ \varsigma_n(x) \end{pmatrix}$ ... stetig

S kompakt?

Als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mussen wir abgeschlossen und beschränkt überprüfen.

Offenbar muss $\|x\|_\infty = \max_i x_i \leq 1$ damit $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, da $\forall i: x_i \geq 0$.

Womit die Beschränktheit gezeigt ist. Für die Abgeschlossenheit sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in S. $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: x_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}$, $1 = \sum_{i=1}^n x_{ik}$ also $1 - x_{nk} = \sum_{i=1}^{n-1} x_{ik}$. Es folgt $x_{1k} \xrightarrow{k \to \infty} x_1, \dots, x_{nk} \xrightarrow{k \to \infty} x_n$, da $x_k \xrightarrow{k \to \infty} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Auch folgt aber

$1 - x_n \xleftarrow{k \to \infty} 1 - x_{nk} = \sum_{i=1}^{n-1} x_{ik} \xrightarrow{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n-1} x_i \quad \Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^n x_i$ und $x_1, \dots, x_n \geq 0$ klar $\Rightarrow x \in S$

S konvex?

Sei $x, y \in S$ bel. zz: $\forall t \in (0,1): t \cdot x + (1-t) y \in S$

Sei $t \in (0,1)$ bel. Sei $i = 1, \dots, n$ bel. $\Rightarrow (tx + (1-t)y)_i = \underbrace{t}_{\geq 0} \underbrace{x_i}_{\geq 0} + \underbrace{(1-t)}_{\geq 0} \underbrace{y_i}_{\geq 0} \geq 0$

$\sum_{i=1}^n (t x_i + (1-t) y_i) = t \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{=1} + (1-t) \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i}_{=1} = t + (1-t) = 1$

Nach dem Fixpunktsatz von Brouwer gilt: Jede kompakte, konvexe Menge des $\mathbb{R}^n$ ist ein Fixpunktraum, d.h. jede stetige Abbildung der Menge in sich hat einen Fixpunkt. Also $\exists x \in S: \frac{1}{\|Ax\|_1} Ax = \varsigma(x) = x$ womit $Ax = \|Ax\|_1 x$ folgt. Dass $\lambda := \|Ax\|_1 \geq 0$ und $\forall i: x_i \geq 0$ (da $x \in S$) gilt ist klar. $\square$

ANA Ü12

3) $\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{7}y^3 + \frac{1}{8} = x$, $\frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{4}x^2y^4 + \frac{1}{12}\sqrt{x^2+2y^2} = y$

zz: das reelle Gleichungssystem besitzt eine Lösung

$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{7}y^3 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{4}x^2y^4 + \frac{1}{12}\sqrt{x^2+2y^2}\end{pmatrix}$ Offenbar ist f auf $\mathbb{R}^2$ stetig.

Für den Fixpunktsatz von Brouwer suchen wir nun eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$, sodass M kompakt, konvex und $f(M) = M$ erfüllt.

$M := [-1, 1] \times [-1, 1]$

Da $\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{7}y^3 + \frac{1}{8} \in [-\frac{1}{2} - \frac{2}{7} + \frac{1}{8}, \frac{1}{2} + \frac{2}{7} + \frac{1}{8}] = [-\frac{37}{56}, \frac{51}{56}] \subseteq [-1, 1]$

und $\frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{4}x^2y^4 + \frac{1}{12}\sqrt{x^2+2y^2} \in [-\frac{1}{2} + 0 + 0, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\sqrt{1+2}] = [-\frac{1}{2}, \underbrace{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}}_{0,894}] \subseteq [-1, 1]$

für $(x, y)^T \in M$, folgt $f(M) \subseteq M$.

Offenbar ist M kompakt (abgeschlossen und beschränkt) und konvex sowie Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

Nach dem Fixpunktsatz von Brouwer gilt deswegen: Alle stetigen Abbildungen von M nach M haben einen Fixpunkt. Da f auf M stetig ist $\exists \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in M : f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ also existiert eine Lösung des Gleichungssystems.

$\square$

(konvex: Sei $t \in (0, 1)$ bel. Sei $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in M$ bel.

$t \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}tx + (1-t)a \\ ty + (1-t)b\end{pmatrix} \in [-1, 1] \times [-1, 1]$)

ANA Ü12

4) zz: $\exists!\, u \in C^0([-1,1]) : u(x) = x + \frac{1}{2}\sin(u(x)+x)$

$f: C_b^0([-1,1]) \to C_b^0([-1,1])$, $u(x) \mapsto x + \frac{1}{2}\sin(u(x)+x)$

Sei $u, v \in C_b^0([-1,1])$ bel.

$\|f(u)-f(v)\| = \|\cancel{x} + \frac{1}{2}\sin(u(x)+x) - \cancel{x} - \frac{1}{2}\sin(v(x)+x)\|$

$= \frac{1}{2}\|\sin(u(x)+x) - \sin(v(x)+x)\| \overset{*}{\leq} \frac{1}{2}\|u(x)\cancel{+x} - v(x)\cancel{-x}\| = \frac{1}{2}\|u(x)-v(x)\|$

* sin ist Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1, da nach Mittelwertsatz der Differentialrechnung $\forall a<b: \sin:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig also $\exists c \in (a,b): \sin'(c) = \frac{\sin(b)-\sin(a)}{b-a}$. Daraus folgt $|b-a|\cdot\underbrace{|\cos(c)|}_{\leq 1} = |\sin(b)-\sin(a)|$
$\Rightarrow |b-a| \geq |\sin(b)-\sin(a)|$

Also ist f eine Kontraktion mit $K = \frac{1}{2} < 1$.

$d(u,v) := \|u-v\| = \max_{x\in[-1,1]} |u(x)-v(x)|$

$(C_b^0([-1,1]), d)$ ist ein vollständig metr. Raum, daher gilt nach Fixpunktsatz von Banach: f hat genau einen Fixpunkt, d.h. $\exists!\, u \in C_b^0([-1,1])$:
$u(x) = x + \frac{1}{2}\sin(u(x)+x)$.

Für $u \in C^0([-1,1]$ gilt, damit es Lösung ist

$\forall x \in [-1,1]: u(x) = \underbrace{x}_{\in[-1,1]} + \frac{1}{2}\underbrace{\sin(u(x)+x)}_{\in[-1,1]} \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

also $u \in C_b^0([-1,1])$.

ANA Ü12

5) X ... kompakter metr. Raum $(A_i)_{i\in I}$ ... Netz $\forall i\in I: A_i\subseteq X$ ist Fixpunktraum

$\forall i: r_i: X\to A_i$ ... stetig $(r_i)_{i\in I}$ konvergiert auf X glm. gegen id

zz: X ... Fixpunktraum.

Sei $f: X\to X$ eine stetige Abbildung. zz: f hat einen Fixpunkt

$\forall i\in I$: $r_i\circ f$ ist stetig also $r_i\circ f|_{A_i}: A_i\to A_i$ hat einen Fixpunkt, da A_i jeweils ein Fixpunktraum ist. Nennen wir diesen Fixpunkt x_i.

Also $\forall i\in I: r_i\circ f(x_i)=x_i$. Da X kompakt ist existiert eine Teilfolge $(x_j)_{j\in J}$ von $(x_i)_{i\in I}$ mit $\lim_{j\in J} x_j = x\in X$.

$$x=\lim_{j\in J} x_j = \lim_{j\in J} r_j\circ f(x_j) \overset{?}{=} f(x)$$

$$r_i \xrightarrow{glm} id \iff \forall \varepsilon>0\ \exists j_0\in I\ \forall i\geq j_0: \sup_{x\in X} d(r_i(x), \underbrace{id(x)}_{=x})\leq\varepsilon$$

$$x_j\to x \wedge f \text{...stetig} \Rightarrow f(x_j)\to f(x) \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists j_1\in J\ \forall i\geq j_1: d(f(x_j), f(x))\leq\varepsilon$$

Sei $\varepsilon>0$ bel. Wähle j_2, sodass $j_0\leq j_2 \wedge j_1\leq j_2$.

$$d(r_j(f(x_j)), f(x))\leq d(r_j(f(x_j)), f(x_j)) + d(f(x_j), f(x))\leq 2\varepsilon$$

$\Rightarrow f(x)=x$ also ist X ein Fixpunktraum.

$\square$