DGA Ü2

1) k sortierte Listen $A[n(i-1)+1, \dots, ni]$ für $i=1,\dots,k$ sollen zu einer Liste $A[1,\dots,kn]$ verschmolzen werden.

a) Betrachte den Algorithmus MERGE(A,1,n,2n), MERGE(A,1,2n,3n), ...

ges: Laufzeit

MERGE(A,p,q,r) hat $O(r-p+1)$ (r-p+1 ... Anzahl Elemente, die verschmolzen werden)

$\Rightarrow$ MERGE(A,1,n,2n) hat Laufzeit 2n

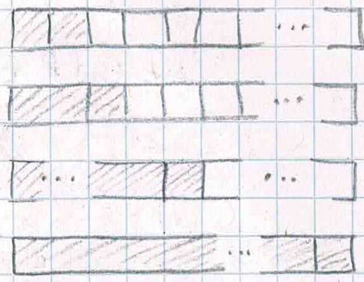
MERGE(A,1,2n,3n) hat Laufzeit 3n

⋮

MERGE(A,1,(j-1)n,jn) hat Laufzeit jn

⋮

MERGE(A,1,(k-1)n,kn) hat Laufzeit kn



$\Rightarrow$ Algorithmus hat Laufzeit $\sum_{j=2}^{k}(jn) = n\cdot\frac{1}{2}(k^2+k-2) \Rightarrow O(nk^2)$

b) ges: Algorithmus mit besserer Laufzeit mittels Divide and Conquer

```
Algorithm(A, l, r, n):      //erster Aufruf mit Algorithm(A, 1, k, n)
    if (r-l) > 0:
        Algorithm(A, l, ⌊(l+r)/2⌋, n);
        Algorithm(A, ⌊(l+r)/2⌋+1, r, n);
        Merge(A, (l-1)n+1, ⌊(l+r)/2⌋·n+1, r·n)
```

$$T(z) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{, falls } z \le 1 \\ 2\cdot T(\frac{z}{2}) + n\cdot\Theta(z) & \text{, falls } z > 1 \end{cases} \quad \Bigg| \; z = r-l = k-1 \approx k$$

$\Rightarrow T(2^i) = n\cdot\Theta(2^i) + 2T(2^{i-1})$

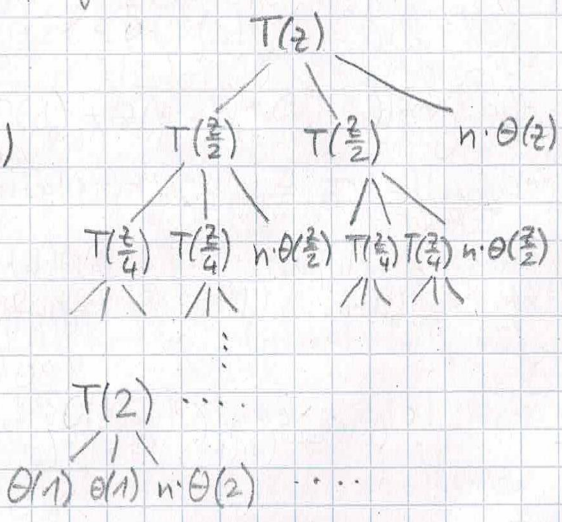
$= n\cdot\Theta(2^i) + 2n\,\Theta(2^{i-1}) + 2^2\,T(2^{i-2})$

$= \sum_{j=0}^{i} 2^j\cdot n\cdot\Theta(2^{i-j}) = n\cdot\sum_{j=0}^{i}\Theta(2^i)$

$= n\cdot i\cdot\Theta(2^i) = n\cdot \ln_2(z)\cdot\Theta(z)$

$= n\cdot \ln(k)\cdot\Theta(k)$

$\Rightarrow O(n\cdot k\cdot \ln(k))$



DGA Ü2

2) asymptotischer Vergleich von Folgen

a) $f(n) = n!$ $\quad g(n) = (n+3)!$

$f(n) \in o(g(n)) \iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+3)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 0$

b) $f(n) = n^3$ $\quad g(n) = 3^{\ln(n)} = \exp(\ln(n)\cdot\ln(3)) = n^{\ln(3)}$

$g(n) \in o(f(n)) \iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\ln(3)}}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\ln(3)-3} = \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} n^{3-\ln(3)}}_{\to\infty}} = 0$

c) f, g ... positive Funktionen $\quad$ zz: $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n)+g(n))$

$a_n = \Theta(b_n) \iff \exists c_1, c_2 > 0 : c_1\cdot|b_n| \leq |a_n| \leq c_2\cdot|b_n|$

$\frac{1}{2}\cdot|f(n)+g(n)| = \frac{f(n)+g(n)}{2} \leq \max(f(n), g(n)) \leq f(n)+g(n) = |f(n)+g(n)|$

d) gilt c) auch für min statt max?

Nein für $f(n) = \frac{1}{n}$, $g(n) = 1$ gilt $\min(f(n), g(n)) = \Theta(f(n)+g(n))$ nicht

$c(f(n)+g(n)) = c\cdot(1+\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} c$ $\quad$ und $\min(f(n), g(n)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\nexists c>0\ \forall n\in\mathbb{N}: c(f(n)+g(n)) \leq \min(f(n); g(n))$

e) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$?

gilt nicht, da für $f(n) = n^2+n$ $\quad g(n) = n^2$ zwar gilt, dass

$f(n) = O(g(n))$ $(|n^2+n| \leq |n^2+n^2| = 2\cdot|n^2|)$, aber für kein $c\in\mathbb{R}$

gilt, dass $|2^{n^2+n}| = |2^{n^2}\cdot 2^n| = |2^{n^2}|\cdot 2^n \leq c\cdot|2^{n^2}|$, da $2^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

f) gilt $f(n) = O(f(n)^2)$?

gilt nicht für $f(n) = \frac{1}{n}$

$|f(n)| = \frac{1}{n} \leq c\cdot\frac{1}{n^2} = c\cdot|f(n)^2| \Rightarrow c \geq n$ ↯, da $n\to\infty$, $c\in\mathbb{R}$

g) ges: $f(n)$ mit $\neg f(n) = O(n) \wedge \neg f(n) = \Omega(n)$

für $f(n) = \tan(n)$ gilt $|f(n)| = |\tan(n)| \leq c\cdot|n|$ nicht, da $\tan(n) \xrightarrow{n\to\frac{\pi}{2}} \infty$

und $|n| \leq c\cdot|\tan(n)|$ gilt nicht, da $\tan(n) \xrightarrow{n\to k\cdot\pi} 0$

$\Rightarrow \neg f(n) = O(n) \wedge \neg n = O(f(n)) \Rightarrow \neg f(n) = O(n) \wedge \neg f(n) = \Omega(n)$

DGA Ü2

3.) $F_n = \begin{cases} 0 & , n=0 \\ 1 & , n=1 \\ 2F_{n-1}+3F_{n-2}+n & , n>1 \end{cases}$

a) $F_n = 2F_{n-1}+3F_{n-2}+n \qquad F_n - 2F_{n-1} - 3F_{n-2} = n$

Lösen wir zuerst $F_n - 2F_{n-1} - 3F_{n-2} = 0$

$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3) \quad \Rightarrow F_n^h := (-1)^n c + 3^n d$

Ansatz $F_n^p := an+b$

$F_n^p - 2F_{n-1}^p - 3F_{n-2}^p = an+b-2(a(n-1)+b)-3(a(n-2)+b)$

$= an+b-2an+2a-2b-3an+6a-3b = -4an+8a-4b = n$

$\Rightarrow -4a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow 8a-4b=0 \Rightarrow 4b=-2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

$F_n^p = -\frac{1}{4}n - \frac{1}{2}$

$F_n = F_n^h + F_n^p = (-1)^n c + 3^n d - \frac{1}{4}n - \frac{1}{2}$

$F_0 = c + d - \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} - d$

$F_1 = -c + 3d - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -c + 3d - \frac{3}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + d + 3d = \frac{7}{4}$

$\Leftrightarrow 4d = \frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow d = \frac{9}{16} \quad \Rightarrow c = -\frac{1}{16}$

$\Rightarrow F_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{16} + 3^n \frac{9}{16} - \frac{1}{4}n - \frac{1}{2}$

b) ges: Rekursion $A(n)$ für Anzahl Additionen des Algorithmus

$A(0) = 0 \qquad A(1) = 0 \qquad A(n) = A(n-1) + A(n-2) + 2$

DGA Ü2

4.) n ... Wochen $\quad G_n$ ... gesund, nicht immun $\quad K_n$ ... krank $\quad I_n$ ... immun

$$K_n = \frac{1}{p} \cdot G_{n-1} \qquad I_n = I_{n-1} + K_{n-1} \qquad G_n = G_{n-1} - K_n$$

$$I_1 = 0 \qquad G_1 = p^N$$

ges: explizite Formeln für K_n, I_n, G_n

$$G_n = G_{n-1} - K_n = G_{n-1}\left(1-\frac{1}{p}\right) = G_{n-2}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2 = \ldots = G_1\left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-1}$$

$$K_n = \frac{1}{p} \cdot G_{n-1} = \frac{1}{p} G_1 \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-2}$$

$$I_n = I_{n-1} + K_{n-1} = I_{n-2} + K_{n-2} + K_{n-1} = \ldots = I_1 + \sum_{i=1}^{n-1} K_{n-i} = I_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p} G_1 \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-i-2}$$

$$= I_1 + \frac{1}{p} G_1 \sum_{i=1}^{n-1} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-i-2}$$

Wenn $K_1 = 1$

folgt $\quad G_n = p^N \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-1}$

$$K_n = \frac{1}{p} \cdot p^N \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-2} = p^{N-1} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-2}$$

$$I_n = \frac{1}{p} p^N \sum_{i=1}^{n-1} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-i-2} = p^{N-1} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-i}$$

DGA Ü2

5.) a) A, B ... Mengen $r := |A|$ $s := |B|$

zz: $s > r \Rightarrow \nexists$ surjektive Abbildung von A nach B

Angenommen $\exists f: A \to B$ .. surjektiv

$\Rightarrow |f(A)| \leq |A| < |B|$ $\lightning$ zu surjektiv, da dann $|f(A)| = |B|$

zz: $s = r \Rightarrow \exists s!$ verschiedene surjektive Abbildungen von A nach B

Vollständige Induktion nach s:

$s=1$: $\Rightarrow A = \{x\}$ $B = \{y\}$ $\Rightarrow f: A \to B$ muss $x \mapsto y$ und ist surj.

$s+1$: Wählen wir ein $x \in A$. f kann x auf $s+1 = r+1$ verschiedene Elemente aus B abbilden. Für $\forall y \in A \setminus \{x\}: f(y) \neq f(x)$, da sonst $|f(A)| < |B| \Rightarrow$ nicht surjektiv gilt.

Für surjektive Funktionen von $A \setminus \{x\}$ nach $B \setminus \{f(x)\}$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung $|A \setminus \{x\}|! = (s+1-1)!$ Möglichkeiten.

$\Rightarrow$ Insgesamt gibt es $(s+1)!$ verschiedene surjektive Funktionen von A nach B

zz: $s < r \Rightarrow \exists \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} (s-k)^r$ verschiedene surjektive $f: A \to B$

$B = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ $F := \{f: A \to B\}$ $F_i := \{f \in F: y_i \notin f(A)\}$

$$\left| F \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i \right| = |F| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,s\}} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} F_i \right|$$

$$|F| = |B|^{|A|} = s^r \qquad \left| \bigcap_{i \in I} F_i \right| = (|B| - |I|)^{|A|} = (s - |I|)^r$$

$$\left| F \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i \right| = s^r + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,s\}} (-1)^{|I|} (s - |I|)^r = s^r + \sum_{k=1}^{s} (-1)^k (s-k)^r \cdot \binom{s}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} (s-k)^r$$

$$F \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i = \{f \in F: \forall i \in \{1,\dots,s\} \; \exists x \in A: f(x) = y_i\} = \{f \in F: \forall y \in B: y \in f(A)\}$$

... Menge aller surjektiven Funktionen von A nach B

DGA Ü2

5) b) ges: Anzahl Surjektionen von einer 5-elementigen Menge in eine 3-elementige Menge

$r=5 \quad s=3$

$$\sum_{k=0}^{3} (-1)^k \binom{3}{k} (3-k)^5 = \binom{3}{0} 3^5 - \binom{3}{1} 2^5 + \binom{3}{2} 1^5 - \binom{3}{3} 0^5$$

$$= 243 - 3 \cdot 32 + 3 = 150$$

c) ges: Algorithmus für Anzahl Surjektionen von A nach B mit $|A| =: r$ und $|B| =: s$

```
Algorithm (r, s):
    res = 0
    for k=0 to s:
        tmp = s! / (k! (s-k)!) * (s-k) ** r;
        if k % 2 == 1:
            res = res - tmp;
        else:
            res = res + tmp;
    return res;
```

DGA Ü2

6) $m, n \in \mathbb{N}^+$ $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ ... Folge paarweise verschiedener Zahlen

zz: (a_j) enthält eine monoton wachsende Teilfolge der Länge $m+1$ oder eine monoton fallende Teilfolge der Länge $n+1$

Beweis indirekt:

Für alle $x \in (a_i)_{i \in \{1,\dots,mn+1\}}$ definieren wir (k, l) als jeweils die Längen der längsten aufsteigenden bzw. absteigenden Teilfolge, die mit x beginnt bzw. endet.

Da wir annehmen, dass es keine monoton wachsenden Teilfolgen der Länge $\geq m+1$ oder monoton fallende Teilfolge der Länge $\geq n+1$ gibt gilt: $\forall x \in (a_i)_{i \in \{1,\dots,mn+1\}} : 1 \leq k \leq m \wedge 1 \leq l \leq n$

Da es $mn+1$ unterschiedliche $x \in (a_i)_{i \in \{1,\dots,mn+1\}}$, aber nur mn unterschiedliche Möglichkeiten für das Paar (k, l) gibt muss nach dem Schubfachprinzip gelten $\exists\, i, j \in \{1, \dots, mn+1\}, i \neq j$:

$(k_{x_i}, l_{x_i}) = (k_{x_j}, l_{x_j}) =: (s, t)$ o.B.d.A. $i < j$

Falls $x_i < x_j \Rightarrow x_i$ und die längste aufsteigende Teilfolge, die mit x_j beginnt, bilden eine aufsteigende Teilfolge der Länge $s+1$. Das widerspricht, dass die längste aufsteigende TF, die mit x_i beginnt Länge s hat. ↯

Falls $x_i > x_j \Rightarrow$ die längste absteigende Teilfolge, die mit x_i endet, und x_j, bilden eine absteigende TF der Länge $t+1$. Das widerspricht, dass die längste absteigende TF, die mit x_j endet Länge t hat. ↯

$\Rightarrow (a_i)_{i \in \{1,\dots,mn+1\}}$ hat eine monoton wachsende Teilfolge der Länge $m+1$ oder eine monoton fallende Teilfolge der Länge $n+1$.

$\square$