ANA Ü1

1.) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{1}} = \frac{1}{1} = 1$

Behauptung: bei $|z|=1$ divergent

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Nullfolge

$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent

Bei $|z|=1$ ist z^k für jedes z keine Nullfolge, da

$\lim_{k\to\infty} |z^k| = \lim_{k\to\infty} |z|^k = \lim_{k\to\infty} 1 = 1 \neq 0$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \qquad R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\frac{1}{k}|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}} = \frac{1}{1} = 1$

Behauptung: bei $z=1$ divergent sonst bei $|z|=1$ konvergent

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent gegen $+\infty$

Dirichletsches Kriterium mit $C=2 \quad a_n = \frac{1}{k} \quad b_n = z^k$

$|\sum_{k=1}^{n} z^k| = |-1 + \sum_{k=0}^{n} z^k| \le |-1| + |\frac{z^{k+1}-1}{z-1}| \le 1 + \frac{|z^{k+1}|+|-1|}{|z-1|} = 1 + \frac{1+1}{|z-1|}$

$= \frac{|z-1|+2}{|z-1|} \le \frac{|z|+|-1|+2}{|z|+|-1|} = \frac{4}{2} = 2 = C \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ konvergent

---

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \qquad R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|\frac{1}{k^2}|}} = \frac{1}{\limsup \frac{1}{\sqrt[k]{k^2}}} = \frac{1}{1} = 1$

Behauptung: bei $|z|=1$ absolut konvergent

$\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{z^k}{k^2}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2$

---

als Funktionenreihe absolut konvergent?

$\sum_{k=1}^{\infty} \| \frac{z^k}{k^2} \|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{z\in K_R(0)} |\frac{z^k}{k^2}| = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{z\in K_R(0)} \frac{|z|^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2 < +\infty$

Stetigkeit der Grenzfunktion

Laut Korollar 6.8.4 ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ gleichmäßig konvergent. Für alle $z \in K_R(0)$ ist die Reihe beschränkt. Jede Partialsumme ist als Potenzreihe stetig.

Aus Korollar 6.6.14 folgt die Stetigkeit der Grenzfunktion.

ANA Ü1

2.) $z, w \in \mathbb{C}$

$$\cos(z+w) = \frac{\exp(i(z+w)) + \exp(-i(z+w))}{2} = \frac{\exp(iz)\cdot\exp(iw) + \exp(-iz)\exp(-iw)}{2}$$

$$= \frac{2\exp(iz)\cdot\exp(iw) + 2\exp(-iz)\cdot\exp(-iw)}{4}$$

$$= \frac{\exp(iz)\cdot\exp(iw) + \exp(iz)\cdot\exp(-iw) + \exp(-iz)\cdot\exp(iw) + \exp(-iz)\cdot\exp(-iw)}{4} +$$

$$\frac{\exp(iz)\cdot\exp(iw) - \exp(iz)\cdot\exp(-iw) - \exp(-iz)\cdot\exp(iw) + \exp(-iz)\cdot\exp(-iw)}{4}$$

$$= \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}\cdot\frac{\exp(iw)+\exp(-iw)}{2} - \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}\cdot\frac{\exp(iw)-\exp(-iw)}{2i}$$

$$= \cos(z)\cdot\cos(w) - \sin(z)\cdot\sin(w)$$

$$\sin(z)\cdot\cos(w) + \cos(z)\cdot\sin(w)$$

$$= \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}\cdot\frac{\exp(iw)+\exp(-iw)}{2} + \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}\cdot\frac{\exp(iw)-\exp(-iw)}{2i}$$

$$= \frac{\exp(iz)\cdot\exp(iw) + \exp(iz)\cdot\exp(-iw) - \exp(-iz)\cdot\exp(iw) - \exp(-iz)\cdot\exp(-iw)}{4i} +$$

$$\frac{\exp(iz)\cdot\exp(iw) - \exp(iz)\cdot\exp(-iw) + \exp(-iz)\cdot\exp(iw) - \exp(-iz)\cdot\exp(-iw)}{4i}$$

$$= \frac{2\exp(iz)\cdot\exp(iw) - 2\exp(-iz)\cdot\exp(-iw)}{4i} = \frac{\exp(i(z+w)) - \exp(-i(z+w))}{2i}$$

$$= \sin(z+w)$$

ANA Ü1

4.) $z \in \mathbb{C}$

$$\cosh(z) = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Quotientenkriterium:

$$\frac{\left| \frac{z^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \right|}{\left| \frac{z^{2n}}{(2n)!} \right|} = \frac{(2n)! \cdot |z|^{2n+2}}{(2n+2)! \cdot |z|^{2n}} = \frac{(2n)! \cdot |z|^{2n} \cdot |z|^2}{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot |z|^{2n}}$$

$$= \frac{|z|^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{|z|^2}{4n^2+4n+2n+2} = \frac{|z|^2 \cdot \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\Rightarrow R = \infty$, da für alle z konvergent

$$\sinh(z) = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Quotientenkriterium:

$$\frac{\left| \frac{z^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \right|}{\left| \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|} = \frac{(2n+1)! \cdot |z|^{2n+3}}{(2n+3)! \cdot |z|^{2n+1}} = \frac{(2n+1)! \cdot |z|^{2n+1} \cdot |z|^2}{(2n+1)! \cdot (2n+2) \cdot (2n+3) \cdot |z|^{2n+1}}$$

$$= \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{|z|^2}{4n^2+6n+4n+6} = \frac{|z|^2 \cdot \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{10}{n} + \frac{6}{n^2}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\Rightarrow R = \infty$

...

ANA 01

4.) ... $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\exp(x) - \lim_{x\to\infty}\exp(-x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\infty}\exp(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\infty}(\exp(x)) - \lim_{x\to-\infty}\exp(-x)\right)$$

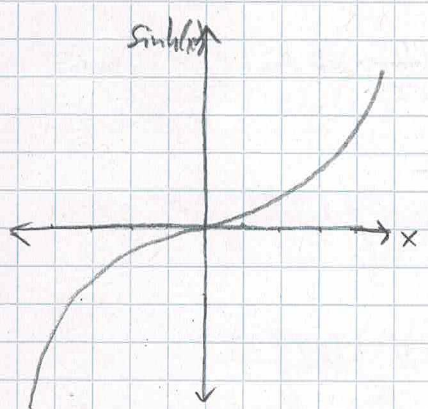
$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\exp(-x) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\exp(x) = -\infty$$

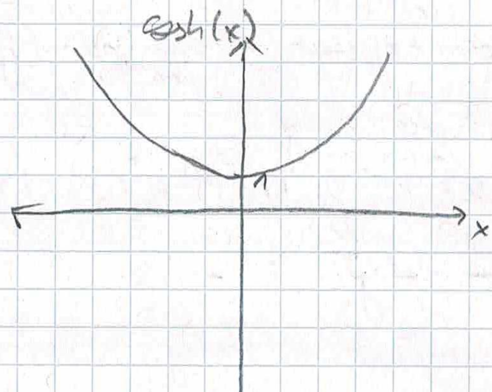
$$\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}\exp(x) + \lim_{x\to\infty}\exp(-x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\infty}\exp(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\exp(x) + \lim_{x\to\infty}\exp(-x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\infty}\exp(x) = +\infty$$





$$\cos(iz) = \frac{\exp(iiz)+\exp(-iiz)}{2} = \frac{\exp(-z)+\exp(z)}{2} = \cosh(z)$$

$$-i\cdot\sin(iz) = -i\cdot\frac{\exp(i\cdot i\cdot z)-\exp(-i\cdot i\cdot z)}{2i} = -\frac{\exp(-z)-\exp(z)}{2}$$

$$= \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2} = \sinh(z)$$

$$\cosh(z)=0 \iff \cos(iz)=0 \iff \exists k\in\mathbb{Z}: i\cdot z = \frac{\pi}{2}+\pi\cdot k \iff \exists k\in\mathbb{Z}: z = \frac{i\pi}{2}+i\pi k$$

$$\sinh(z)=0 \iff -i\cdot\sin(iz)=0 \iff \exists k\in\mathbb{Z}: i\cdot z = \pi k \iff \exists k\in\mathbb{Z}: z = i\pi\cdot k$$

ANA Ü1

5.) zz: $\sinh|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ bel. mit $a < b$.

$a < b \iff \exp(a) < \exp(b)$

$a < b \iff -a > -b \iff \exp(-a) > \exp(-b)$

$\iff -\exp(-a) < -\exp(-b)$

$\Rightarrow \exp(a) - \exp(-a) < \exp(b) - \exp(-b)$

$\iff \frac{\exp(a) - \exp(-a)}{2} < \frac{\exp(b) - \exp(-b)}{2} \iff \sinh(a) < \sinh(b)$

---

zz: $\operatorname{areasinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} := \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ ist $\sinh|_{\mathbb{R}}^{-1}$

$$\sinh(\ln(x+\sqrt{x^2+1})) = \frac{\exp(\ln(x+\sqrt{x^2+1})) - \exp(-\ln(x+\sqrt{x^2+1}))}{2}$$

$$= \frac{(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})}}{2} = \frac{\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2 - 1}{(x+\sqrt{x^2+1})}}{2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 - 1}{2x + 2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x\,(x + \sqrt{x^2+1})}{2\,(x+\sqrt{x^2+1})} = x$$

Da inverse Funktion existiert $\Rightarrow \sinh|_{\mathbb{R}}$ ist bijektiv $\Rightarrow \sinh|_{\mathbb{R}}$ ist surjektiv

---

zz: $\operatorname{areasinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig

x^2+1 ist als Polynomfunktion stetig. Wurzelfunktion ist stetig

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1}$ ist stetig

x ist als Polynomfunktion stetig. $\ln$ ist stetig

$\Rightarrow x + \sqrt{x^2+1}$ ist stetig $\Rightarrow \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ist stetig

ANA Ü1

7.) ges: $\sqrt[6]{1}$ in Polarkoordinaten und Real- und Imaginärschreibweise

$1+0i = (1,0) \qquad \sqrt[6]{1} = (1, \frac{2\pi}{6} \cdot k) \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (1,0), (1,\frac{\pi}{3}), (1,\frac{2\pi}{3}), (1,\pi), (1,\frac{4\pi}{3}), (1,\frac{5\pi}{3})$ Lösungen in Polarkoordinaten

$(1,0) = 1 \qquad (1,\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(1,\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (1,\pi) = -1$

$(1,\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (1,\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$w = r\cdot(\cos(t) + i\sin(t))$

$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$

$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \qquad \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6.) zz: $\sin(s) - \sin(t) = 2\cos(\frac{s+t}{2})\sin(\frac{s-t}{2})$

$$2\cos(\frac{s+t}{2})\sin(\frac{s-t}{2}) = 2\,\frac{\exp(i\frac{s+t}{2}) + \exp(-i\frac{s+t}{2})}{2}\cdot\frac{\exp(i\frac{s-t}{2}) - \exp(-i\frac{s-t}{2})}{2i}$$

$$= \frac{\exp(i\frac{s+t}{2})\cdot\exp(i\frac{s-t}{2}) - \exp(i\frac{s+t}{2})\exp(-i\frac{s-t}{2}) + \exp(-i\frac{s+t}{2})\exp(i\frac{s-t}{2}) - \exp(-i\frac{s+t}{2})\exp(-i\frac{s-t}{2})}{2i}$$

$$= \frac{\exp(i\cdot\frac{s+t+s-t}{2}) - \exp(i\cdot\frac{s+t-s+t}{2}) + \exp(i\cdot\frac{-s-t+s-t}{2}) - \exp(-i\cdot\frac{s+t+s-t}{2})}{2i}$$

$$= \frac{\exp(is) - \exp(it) + \exp(-it) - \exp(-is)}{2i}$$

$$= \frac{\exp(is) - \exp(-is)}{2i} - \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i} = \sin(s) - \sin(t)$$

zz: $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ streng monoton wachsend

Sei $a, b \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit $a < b$ bel.

$\sin(b) - \sin(a) = 2\cdot\cos(\frac{b+a}{2})\sin(\frac{b-a}{2})$, da $|\frac{b+a}{2}| < \frac{\pi}{2}$ und das kleinste Nullstelle von cos und $0 < \frac{b-a}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ und sin dort > 0

$\Rightarrow 2\cdot\cos(\frac{b+a}{2})\sin(\frac{b-a}{2}) > 0$

...

ANAÜ1

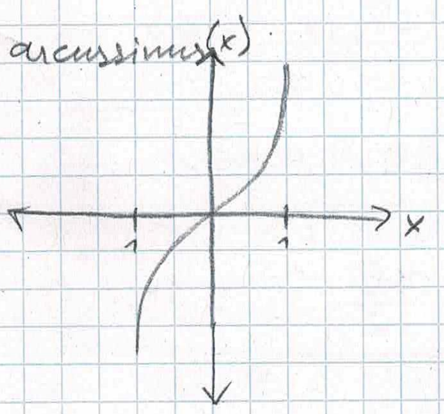
6.) ... zz: $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ... bijektiv

Da streng monoton wachsend folgt injektiv

Da stetig folgt $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ ist ein Intervall, da streng monoton wachsend und $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ folgt

$\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ $\Rightarrow$ surjektiv

$\Rightarrow$ bijektiv



3.) $z, w \in \mathbb{C}$

zz: $k \in \mathbb{Z}$ $\quad \cos(z + k\pi) = (-1)^k \cdot \cos(z)$

$$\cos(z+k\pi) = \frac{\exp(iz+ik\pi) + \exp(-iz-ik\pi)}{2} = \frac{\exp(iz)\cdot\exp(ik\pi) + \exp(-iz)\exp(-ik\pi)}{2}$$

$$= (\exp(iz)\cdot\exp(i\pi)^k + \exp(-iz)\cdot\exp(-i\pi)^k)\cdot\frac{1}{2} = \frac{\exp(iz)\cdot(-1)^k + \exp(-iz)\cdot(-1)^k}{2}$$

$$= (-1)^k \cdot \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = (-1)^k \cdot \cos(z)$$

zz: $k \in \mathbb{Z}$ $\quad \sin(z+k\pi) = (-1)^k \cdot \sin(z)$

$$\sin(z+k\pi) = \frac{\exp(iz+ik\pi) - \exp(-iz-ik\pi)}{2i} = \frac{\exp(iz)\cdot\exp(ik\pi) - \exp(-iz)\cdot\exp(-ik\pi)}{2i}$$

$$= \frac{\exp(iz)\cdot(-1)^k - \exp(-iz)\cdot(-1)^k}{2i} = (-1)^k \cdot \sin(z)$$

zz: $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \frac{\exp(i\frac{\pi}{2} - iz) + \exp(-i\frac{\pi}{2} + iz)}{2} = \frac{\exp(i\frac{\pi}{2})\exp(-iz) + \exp(-i\frac{\pi}{2})\exp(iz)}{2}$$

$$= \frac{i\cdot\exp(-iz) + (-i)\cdot\exp(iz)}{2} = \frac{-\exp(-iz) + \exp(iz)}{2i} = \sin(z)$$

...

ANA 01

3.) ... zz: $\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \cos(z)$

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - z) = \frac{\exp(i\frac{\pi}{2} - iz) - \exp(-i\frac{\pi}{2} + iz)}{2i}$$

$$= \frac{\exp(i\frac{\pi}{2}) \cdot \exp(-iz) - \exp(-i\frac{\pi}{2}) \cdot \exp(iz)}{2i}$$

$$= \frac{i \cdot \exp(-iz) - (-i) \cdot \exp(iz)}{2i} = \frac{i \cdot (\exp(-iz) + \exp(iz))}{i \cdot 2}$$

$$= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \cos(z)$$

zz: $\cos(2z) = (\cos(z))^2 - (\sin(z))^2$

$$(\cos(z))^2 - (\sin(z))^2 = \left(\frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\right)^2$$

$$= \frac{(\exp(iz))^2 + 2\exp(iz)\exp(-iz) + (\exp(-iz))^2}{4} - \frac{(\exp(iz) - \exp(-iz))^2}{-4}$$

$$= \frac{\exp(i2z) + 2\exp(iz - iz) + \exp(-i2z)}{4} + \frac{(\exp(iz))^2 - 2\exp(iz)\exp(-iz) + (\exp(-iz))^2}{4}$$

$$= \frac{\exp(i2z) + 2 + \exp(-i2z) + \exp(i2z) - 2\exp(iz - iz) + \exp(-i2z)}{4}$$

$$= \frac{2\exp(i2z) + 2\exp(-i2z) + 2 - 2}{4} = \frac{\exp(i2z) + \exp(-i2z)}{2}$$

$$= \cos(2z)$$

zz: $\sin(2z) = 2\sin(z) \cdot \cos(z)$

$$2\sin(z) \cdot \cos(z) = 2\,\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \cdot \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \frac{(\exp(iz) - \exp(-iz))(\exp(iz) + \exp(-iz))}{2i}$$

$$= \frac{(\exp(iz))^2 + \exp(iz)\exp(-iz) - \exp(-iz) \cdot \exp(iz) - (\exp(-iz))^2}{2i}$$

$$= \frac{\exp(i2z) + 1 - 1 - \exp(-i2z)}{2i} = \sin(2z)$$

ANA Ü1

9.) zz: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bel.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{x^n \cdot k!}$$

Sei $M > 0$ bel. Da $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \frac{x^k}{x^n \cdot k!} \geq 0$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{x^n \cdot k!} \geq \frac{x^0}{x^n \cdot 0!} = \frac{1}{x^n \cdot 1} = \frac{1}{x^n}$$

Wähle $x = \exp(-\frac{1}{n} \cdot \ln(M+1))$, dann ist

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n} = \exp(-\tfrac{1}{n} \cdot \ln(M+1))^{-n} = \exp(-\tfrac{1}{n} \cdot (-n) \cdot \ln(M+1))$$

$$= \exp(\ln(M+1)) = M+1 > M$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \exp(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x)^n \cdot \exp(-x)$$

1. Fall $\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : n = 2k$

$$\lim_{x\to\infty} (-x)^n \cdot \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} x^n \cdot \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n}} = 0$$

2. Fall $\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : n = 2k+1$

$$\lim_{x\to\infty} (-x)^n \cdot \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} -1 \cdot x^n \cdot \frac{1}{\exp(x)} = -\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} x^n \cdot \exp(x) = 0$$

$$\lim_{y\to 0+} y\,(\ln(y))^n = \lim_{x\to-\infty} \exp(x)\,(\ln(\exp(x)))^n = \lim_{x\to-\infty} \exp(x) \cdot x^n = 0$$

$\square$

<u>ANA</u> Ü1

8.) $z \in \mathbb{C}$ $\quad E = \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\quad f_n : E \to \mathbb{C}$ $\quad$ für $n \in E$

$$f_n(K) = \frac{1}{K^n}\binom{K}{n} z^n$$

zz: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert als Funktionenreihe absolut

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{K \in E} \left|\frac{1}{K^n}\binom{K}{n} z^n\right| = \sup_{K \in E} \left|\frac{1}{K^n} \frac{K!}{n!(K-n)!} \cdot z^n\right|$$

$$= \frac{|z|^n}{n!} \cdot \sup_{K \in E} \frac{K!}{(K-n)!} \cdot \frac{1}{K^n} = \frac{|z|^n}{n!} \cdot \sup_{K \in E} \frac{K \cdot (K-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(K-n)(K-n-1)\cdots 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{K^n}_{n\text{-Mal}}}$$

$$= \frac{|z|^n}{n!} \cdot \sup_{K \in E} \frac{K \cdot (K-1) \cdot \ldots \cdot (K-n+1)}{\underbrace{K \cdot K \cdot \ldots \cdot K}_{n\text{-Mal}}} \le \frac{|z|^n}{n!} \cdot \sup_{K \in E} \frac{K^n}{K^n} = \frac{|z|^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \exp(|z|) \quad \Rightarrow \text{absolut konvergent}$$

ges: Grenzfunktion von $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{K^n}\binom{K}{n} z^n = \sum_{n=0}^{K} \left(\frac{z}{K}\right)^n \cdot \binom{K}{n} \cdot 1^{K-n} = \left(\frac{z}{K} + 1\right)^K$$

$S_N = \sum_{n=0}^{N} f_n \quad N \in \mathbb{N} \qquad x_K = k \quad k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{K\to\infty} \lim_{N\to\infty} S_N(x_K) = \lim_{N\to\infty} \lim_{K\to\infty} S_N(x_K)$$

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{K^n}\binom{K}{n} z^n \qquad \lim_{N\to\infty} \lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{K^n}\binom{K}{n} z^n$$

$$\lim_{K\to\infty} \left(\frac{z}{K} + 1\right)^K \stackrel{1.\text{ Fall } z=0}{=} \lim_{K\to\infty} \left(\frac{0}{K} + 1\right)^K = 1 = \exp(0) = \exp(z)$$

$\| $ 2. Fall $z \neq 0$

$$\lim_{K\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{K}{z}} + 1\right)^K = \lim_{K\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{K}{z}}\right)^{\frac{K}{z}}\right)^z = e^z = \exp(z)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z) = \lim_{N\to\infty} \lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{K^n}\binom{K}{n} z^n$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K^n}\binom{K}{n} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K^n}\binom{K}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K^n}\binom{K}{n} = \frac{1}{n!}$$