6.) $\langle K, +, \cdot, P \rangle$ ... angeordneter Körper $\quad \phi : K \to K$

$$x \mapsto \frac{x}{1_K + |x|}$$

zz $\Phi(K) = (-1_K, 1_K) = \{x \in K : -1_K < x < 1_K\}$

zz $\Phi : K \to (-1_K, 1_K)$ bijektiv $\qquad$ ges: Inverse von Φ

zz $x < y \Rightarrow \phi(x) < \phi(y)$ $\quad$ (streng monoton wachsend)

- für $x = 0$: $\frac{0}{1+0} = 0 \qquad 0 \in (-1_K, 1_K)$ ✓

  für $x \neq 0$: $0 < |x| < 1 + |x| \Rightarrow \frac{|x|}{1+|x|} < 1 \qquad$ (S. 17 x)

  für $x > 0$: $|x| = x \Rightarrow 0 < \frac{x}{1+|x|} < 1$ ✓

  für $x < 0$: $|x| = -x \Rightarrow \frac{-x}{1+|x|} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x}{1+|x|} < 0$ ✓

- $\Phi^{-1} : (-1, 1) \to K \qquad \Phi^{-1}(x) : \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ \frac{x}{1-x}, & \text{falls } x > 0 \\ \frac{x}{1+x}, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

Bew $\Phi^{-1}(\phi(x)) = \phi^{-1}\left(\frac{x}{1+|x|}\right)$

Fallunterscheidung 1. Fall $x = 0$

$$\phi^{-1}\left(\frac{0}{1+|0|}\right) = \phi^{-1}(0) = 0 \quad ✓$$

2. Fall $x > 0$

$$\phi^{-1}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 - \frac{x}{1+x}} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{1+x-x}{1+x}} = \frac{x \cdot \cancel{(1+x)}}{1 \cdot \cancel{(1+x)}} = x$$

3. Fall $x < 0$

$$\phi^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 + \frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-x+x}{1-x}} = \frac{x \cdot \cancel{(1-x)}}{1 \cdot \cancel{(1-x)}} = x$$

Da Φ Inverse besitzt muss Φ bijektiv sein.

6.) ... zz: $x < y \Rightarrow \phi(x) < \phi(y)$ $\qquad \phi(x) = \frac{x}{1+|x|}$ $\square$

Sei $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig mit $x < y$.

$x < y \Rightarrow sgn(x) \leq sgn(y) \Rightarrow sgn(x) \cdot |x| \cdot |y| \leq sgn(x) \cdot |x| \cdot |y| \Rightarrow x \cdot |y| \leq |x| \cdot y$

$\Rightarrow x + x \cdot |y| < y + |x| \cdot y \Rightarrow x \cdot (1+|y|) < y \cdot (1+|x|) \Leftrightarrow \frac{x}{1+|x|} < \frac{y}{1+|y|}$

$\frac{x}{1+|x|} < \frac{y}{1+|y|} \Leftrightarrow \frac{x}{\cancel{1+|x|}} \cdot \cancel{(1+|x|)} \cdot (1+|y|) < \frac{y}{\cancel{1+|y|}} \cdot (1+|x|) \cdot \cancel{(1+|y|)}$ $\square$

$\Leftrightarrow x \cdot (1+|y|) < y \cdot (1+|x|)$