ALG Ü*

393) $L = \mathbb{Q}(x)$

(1) ges: $[L:K]$ $\quad K := \mathbb{Q}(x^3) \leq L$

Satz 6.1.3.4. x ... algebraisch über K $\quad m(y)$ ... Minimalpolynom von x über K. $\Rightarrow [K(x):K] = \text{grad}(m)$

$K(x) = \mathbb{Q}(x^3)(x) = \mathbb{Q}(x) = L$ $\qquad m(y) = y^3 - x^3$ ist normiert und erfüllt $m(x) = 0$

$\forall p \in \mathbb{Q}(x^3): \text{grad}(p) \in 3\mathbb{Z}$ $\qquad$ Angenommen $\exists \tilde{m}(y): \text{grad}(\tilde{m}) < 3$ und $\tilde{m}(x) = 0$ und $\tilde{m}$ normiert

1. Fall $\tilde{m}(y) = y + p$ $\quad p \in \mathbb{Q}(x^3)$ $\quad \tilde{m}(x) = x + p = 0 \Rightarrow p = -x \notin \mathbb{Q}(x^3)$ ↯

2. Fall $\tilde{m}(y) = y^2 + py + q$ $\quad p, q \in \mathbb{Q}(x^3)$ $\quad \tilde{m}(x) = x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x^2 = -px - q$

$\text{grad}(x^2) = 2 \stackrel{!}{=} \text{grad}(-px - q) = \max(\underbrace{\text{grad}(px)}_{\in 3\mathbb{Z}+1}, \underbrace{\text{grad}(q)}_{\in 3\mathbb{Z}})$ $\qquad$ Da $2 \notin (3\mathbb{Z}) \cup (3\mathbb{Z}+1)$ ↯

$\Rightarrow y^3 - x^3$ ist Minimalpolynom $\Rightarrow [L:K] = 3$

(2) ges: $[L:K]$ $\quad K = \mathbb{Q}(x + \frac{1}{x})$

$x + \frac{1}{x}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}(x)$, da $p(y) = xy - x^2 - 1 \in \mathbb{Q}(x)[y]$ eine Nullstelle bei $x + \frac{1}{x}$ hat:

$p(x + \frac{1}{x}) = x(x + \frac{1}{x}) - x^2 - 1 = x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0$

Da $\varphi: \mathbb{Q}(x) \to \mathbb{Q}(\frac{1}{x})$ ein Automorphismus auf $\mathbb{Q}(x)$ ist und zwar nicht die Identität, da

$\varphi(x) = \frac{1}{x} \neq x$, jedoch auf $\mathbb{Q}(x + \frac{1}{x})$ die Identität ist, kann x nicht in $\mathbb{Q}(x + \frac{1}{x})$ liegen.

$\Rightarrow$ Minimalpolynom hat mindestens grad 2 $\qquad m(y) = y^2 - (x + \frac{1}{x})y + 1 \in \mathbb{Q}(x + \frac{1}{x})[y]$

$m(x) = x^2 - (x + \frac{1}{x})x + 1 = x^2 - x^2 - 1 + 1 = 0$ $\qquad \Rightarrow [L:K] = 2$

(3) $\alpha \in \mathbb{Q}(x) \setminus \mathbb{Q}$ $\qquad K := \mathbb{Q}(\alpha)$ $\qquad$ zz: $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(\alpha)] < \infty$

$$\alpha = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j} \in \mathbb{Q}(x) \setminus \mathbb{Q} \qquad p(y) := \alpha \left(\sum_{j=0}^{m} b_j y^j\right) - \sum_{i=0}^{n} a_i y^i \in \mathbb{Q}(\alpha)[y]$$

$$p(x) = \alpha\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

$p(y) \neq 0$, da für $\beta \in \mathbb{Q}$ keine Nullstelle von $\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ gilt

$$p(\beta) = \underbrace{\alpha}_{\in \mathbb{Q}(x)\setminus\mathbb{Q}} \Big(\underbrace{\sum_{j=0}^{m} b_j \beta^j}_{\in \mathbb{Q}\setminus\{0\}}\Big) - \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i \beta^i}_{\in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}(x) \setminus \mathbb{Q} \quad \text{und daher } p(\beta) \neq 0$$

p ist wahrscheinlich nicht das Minimalpolynom, aber das Minimalpolynom existiert und hat

grad kleiner gleich grad(p). $\qquad \Rightarrow [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(\alpha)] \leq \text{grad}(p) < \infty$ $\qquad \square$