LINAG Ü5

2.4.3 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ... VR $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(2^{-n} \cdot x)$

zz: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist l.u.

Bew:

vollständige Induktion nach n:

IA: $n=0$ $\{f_0\}$ ist offensichtlich l.u.

IV: $\{f_0, f_1, \dots, f_k\}$ l.u.

IS:

Zwischenbew: (zz: $f_0, f_1, \dots, f_k$ haben alle eine gemeinsame Nullstelle bei $\pi \cdot 2^k$)

Sei $f_l \in \{f_0, f_1, \dots, f_k\}$ bel.

$f_l(x) = \sin(2^{-l} \cdot x) = 0 \iff \exists m \in \mathbb{Z}: \frac{1}{2^l} \cdot x = m \cdot \pi$

$\iff \exists m \in \mathbb{Z}: x = m \cdot 2^l \cdot \pi$ $\quad 2^{k-l}$ ist ein gültiges m

$x = 2^{k-l} \cdot 2^l \cdot \pi = 2^k \cdot \pi \implies f_l(2^k \pi) = 0$

$\pi \cdot 2^k$ ist keine Nullstelle von f_{k+1}:

$\sin(2^{-(k+1)} \cdot 2^k \cdot \pi) = \sin(2^{k-k-1} \cdot \pi) = \sin(2^{-1} \cdot \pi) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\implies f_{k+1}$ kann nicht aus LK von Vektoren aus $\{f_0, f_1, \dots, f_k\}$ dargestellt werden:

$\forall \sum_{i=0}^{j} x_i f_i$ wobei $x_i \in \mathbb{R}^\times$ und $f_i \in \{f_0, f_1, \dots, f_k\}$ gilt, dass

$(\sum_{i=0}^{j} x_i f_i)(\pi \cdot 2^k) = 0$, aber $f_{k+1}(2^k \cdot \pi) = 1$

$\implies (\{f_0, f_1, \dots, f_k\} \text{ l.u} \implies \{f_0, f_1, \dots, f_k, f_{k+1}\} \text{ l.u.})$

$\implies (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist l.u. $\square$