1.10.7 a) $U := \{x+yi \in \mathbb{C} : \sqrt{x^2+y^2} = 1\}$ $\quad G := (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ $\quad$ zz: $U \leq G$

Bew: $1+0i \in G \quad \sqrt{1^2+0^2} = 1 \Rightarrow 1+0i \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$

Sei $x+yi$ und $x'+y'i \in U$ beliebig. $\sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = \pm 1$

$$(x+yi)\cdot(x'+y'i)^{-1} = (x+yi)\cdot\frac{x'-y'i}{x'^2+y'^2} = (x+yi)(x'-y'i)$$

$$= x\cdot x' - xy'i + x'yi - yy'i^2 = x\cdot x' + yy' + (x'y - xy')i$$

$$\sqrt{(x\cdot x' + y\cdot y')^2 + (x'y - xy')^2} = \sqrt{x^2x'^2 + \cancel{2xx'yy'} + y^2y'^2 + x'^2y^2 \cancel{- 2x'yxy'} + x^2y'^2}$$

$$= \sqrt{x^2x'^2 + y^2y'^2 + x'^2y^2 + x^2y'^2} = \sqrt{x^2\cdot(x'^2+y'^2) + y^2\cdot(x'^2+y'^2)}$$

$$= \sqrt{(x'^2+y'^2)\cdot(x^2+y^2)} = \sqrt{(\pm 1)\cdot(\pm 1)} = \sqrt{\pm 1} = 1$$

b) $(\{i^n : n \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ ... Gruppe

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	1	i	-1	-1i
$\overline{1}$	i	-1	-1i	1
$\overline{2}$	-1	-1i	1	i
$\overline{3}$	-1i	1	i	-1

$A \times B := \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

c) $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ $\quad U = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\} = \{-1, 1\}$

$1 \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$

$\cdot$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

Ja, U ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$