LINAG Üg

3.4.2. $f_1 = \sin \quad f_2 = \cos \quad f_3 = 1 \quad g = 5 + 4\cdot\sin(x) + 2\cdot\cos(x)$

$U = [\{f_1, f_2, f_3\}]$

a) zz: $B = (f_1, f_2, f_3)$ ist eine Basis von U

- B ist trivialerweise ein Erzeugungssystem von U
- Aus einem anderen Beispiel wissen wir sin und cos sind l.u., d.h. wir müssen nur mehr zeigen $\forall k, l \in \mathbb{R}: k\cdot\sin(x) + l\cdot\cos(x) \neq 1$

$k\cdot\sin(0) + l\cdot\cos(0) = l \quad \Rightarrow l = 1$

$k\cdot\sin(\frac{\pi}{2}) + l\cdot\cos(\frac{\pi}{2}) = k \quad \Rightarrow k = 1$

$\sin(\pi) + \cos(\pi) = -1 \neq 1 \quad \Rightarrow f_1, f_2, f_3$ l.u.

(andere Richtung ist trivial)

b) Sei $k, l, m \in \mathbb{R}$ bel.

$\frac{d}{dx}\, k\cdot\sin(x) + l\cdot\cos(x) + m = k\cdot\cos(x) - l\cdot\sin(x) + 1 \quad \in U$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}$ bildet U in U ab

c)
$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -l & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} \cdot(k^{-1}) & \cdot(l^{-1}) & (\cdot m^{-1}) \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Matrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \frac{d}{dx} g = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LINAG Ü9

3.4.4.

α)
$$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&3&4\\3&4&5\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & -\mathrm{I} & -\mathrm{II} \end{array} \\ \begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&1&1\\1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -2\cdot\mathrm{III} & -\mathrm{III} & \end{array} \\ \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\1&-1&0\\2&2&-1\\-2&-1&1\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -\mathrm{II} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\2&-1&0\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & -\mathrm{I} \end{array} \\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\2&-1&-2\\0&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{I} \end{array} \\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-1&-2&2\\2&-1&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\2&-1&0\\-1&2&-1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3&5&3\\2&3&2\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & -2 & 2 \\ & & & 2 & -1 & 0 \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ \hline 3 & 5 & 3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}4&-5&3\\2&-3&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

β)
$$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&3&4\\3&4&5\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & -\mathrm{I} & -\mathrm{II} \end{array} \\ \begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&1&1\\1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -\mathrm{II} & -\mathrm{III} & \end{array} \\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\2&0&1\\2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -\mathrm{III} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\2&-1&0\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & -\mathrm{I} \end{array} \\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\2&-1&-2\\0&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{I} \end{array} \\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-1&-2&2\\2&-1&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\2&-1&0\\-1&2&-1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & -2 & 2 \\ & & & 2 & -1 & 0 \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 3 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -4 & 4 \end{array}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3&-5&3\\-1&-2&2\\-2&-4&4\end{pmatrix}$$

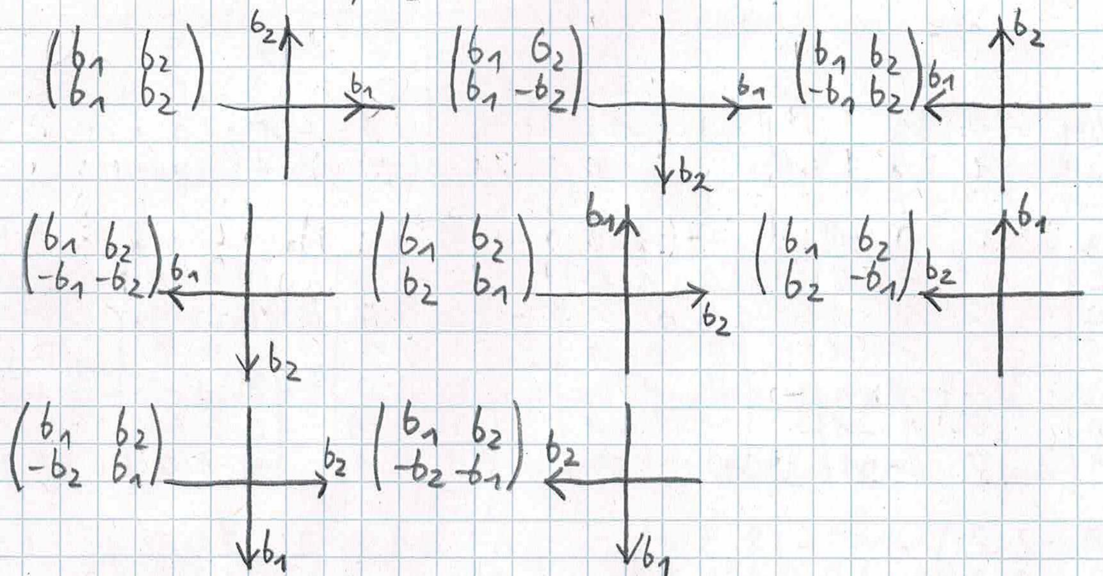
LINAG Ü9

3.5.8. V... Vektorraum über $\mathbb{R}$ (b_1, b_2)... Basis von V

a) Da man festlegt wohin $-x$ abgebildet wird, wenn man festlegt wohin x abgebildet wird $\left(\text{da } f(-x) = f((-1)\cdot x) = (-1)\cdot f(x) = -f(x)\right)$ gibt es nur folgende Möglichkeiten:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & -b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & -b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}$$

b) In $\mathbb{R}^2$ mit b_1, b_2 als kanonische Basis



c) offensichtlich bleibt man in der Untergruppe wenn man Elemente miteinander verknüpft.

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = id \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & -b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & -b_2 \end{pmatrix} = id \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & b_2 \end{pmatrix} = id$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & -b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & -b_2 \end{pmatrix} = id \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} = id \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix} = id$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} = id$$, d.h. $\exists$ Inverse

$\Longrightarrow$ bildet eine Untergruppe

LINAG Üg

3.5.15 $t \in \mathbb{Q}$ ges: alle t sodass Matrix A_t regulär ist

1. Fall $t = 1$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, da der Spaltenrang nur 3 ist gibt es sicher keine lineare Bijektion zu $\mathbb{Q}^4$
$\Rightarrow$ nicht regulär

2. Fall $t \neq \pm 1$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc} -t\cdot II & & & -t\cdot III \\ \left(\begin{matrix} 1-t^2 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & -t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc} \cdot(1-t^2)^{-1} & & & \\ \left(\begin{matrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & -t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{1-t^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-t}{1-t^2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc} & -t\cdot I & & \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & -t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & 0 & 0 \\ \frac{-t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & & -t\, II & +t^2\cdot II \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} & \frac{-t^3}{1-t^2} \\ \frac{-t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \end{array}$$

$$A_t^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} & \frac{-t^3}{1-t^2} \\ \frac{-t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Divison durch $1-t^2$ ok, da $t \neq \pm 1$)

, da eine Inverse Matrix existiert ist bei $t \neq \pm 1$ die Matrix regulär.

3. Fall $t = -1$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat einen Spaltenrang < 4
$\Rightarrow$ nicht regulär

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc} +II & & & \\ \left(\begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \underline{\underline{0}} & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \end{array}$$

LINAG Ü9

3.6.1 $f \in L(V,V)$ $f \circ f = f$ (idempotent)

a) zz $g := id - f$ ist idempotent

$g(x) = (id-f)(x) = id(x) - f(x) = x - f(x)$

$g \circ g(x) = (id-f)(id-f)(x) = (id-f)(id(x) - f(x)) = id(id(x) - f(x))$
$- f(id(x) - f(x)) = id(x - f(x)) - f(x - f(x)) = x - f(x) - f(x - f(x))$
$= x - f(x) - (f(x) - f(f(x))) = x - f(x) - f(x) + f(f(x))$
$= x - f(x) - f(x) + f(x) = x - f(x) = g(x)$

$\Rightarrow g \circ g = g$

b) $g \circ f = g(f(x)) = id(f(x)) - f(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$
$f \circ g = f(id(x) - f(x)) = f(id(x)) - f(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$

c) Sei $x \in V$ mit $g(x) = 0$ bel.

$0 = g(x) = id(x) - f(x) = x - f(x)$ $\Leftrightarrow x = f(x)$

d.h. $x \in f(V)$

Sei $x \in V$ mit $x \in f(V)$ bel.

$\exists z \in V: f(z) = x$ $g(x) = id(x) - f(x) = x - f(x) = f(z) - f(f(z)) =$
$= f(z) - f(z) = 0$

$\Rightarrow ker(g) = f(V)$

Sei $x \in V$ mit $f(x) = 0$ bel.

$0 = f(x) \Leftrightarrow g(x) = f(x) + g(x) = f(x) + id(x) - f(x) = id(x) = x$

d.h. $x \in g(V)$

Sei $x \in V$ mit $x \in g(V)$ bel.

$\exists z \in V: g(z) = x$ $f(x) = f(g(z)) = f(id(z) - f(z)) = f(z) - f(f(z))$
$= f(z) - f(z) = 0$

$\Rightarrow ker(f) = g(V)$

LINAG Ü9

3.6.2. $x=4 \quad y=8 \quad x'=4 \quad y'=3$

$$a_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \quad a_4=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad U_1=[\{a_3,a_4\}]$$

a) ges: ein Komplement U_2 zu U_1

Behauptung: $U_2=\left[\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right]$ ist ein Komplement zu U_1

$$x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\a\\b\\a+b\\a\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a=b=0$$

$$\Rightarrow x=y=z=0$$

$\Rightarrow$ nur der Nullvektor kann als LK aus dem jeweilig anderen Unterraum gebildet werden.

b) ges: p_1... Projektion auf U_1 in Richtung U_2

p_2... Projektion auf U_2 in Richtung U_1

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&1&0\\1&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{array}{c}\begin{matrix}-\mathrm{III}&-\mathrm{III}&&&\end{matrix}\\\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&1&0\\1&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\rightsquigarrow\begin{array}{c}\begin{matrix}-\mathrm{IV}&-\mathrm{IV}&&&\end{matrix}\\\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\rightsquigarrow\begin{array}{c}\begin{matrix}-\mathrm{V}&&&&\end{matrix}\\\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\rightsquigarrow\begin{array}{c}\begin{matrix}\mathrm{III}&\mathrm{I}&\mathrm{II}&\mathrm{IV}&\mathrm{V}\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$\Rightarrow p_1$ beschrieben durch $A_{p_1}=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$

$$A_{p_1}+A_{p_2}=E_5 \Leftrightarrow A_{p_2}=E_5-A_{p_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-1&-1&1&0\\0&-1&0&0&1\end{pmatrix}=A_{p_2}$$

LINAG Ü9

3.6.3 $V \dots$ Vektorraum $\quad f \in L(V,V) \quad \exists k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}: f^k = 0 \cdot id_V$

a) $g := id_V - f \quad$ zz: $g \dots$ bijektiv mit $g^{-1} = id_V + f + f^2 + \dots + f^{k-1}$

$$(id_V - f)\circ(id_V + f + f^2 + \dots + f^{k-1})(x) = id_V((id_V + f + f^2 + \dots + f^{k-1})(x)) -$$
$$f((id_V + f + f^2 + \dots + f^{k-1})(x)) = id_V(x) + f(x) + f^2(x) + \dots + f^{k-1}(x) - f(id_V(x) + f(x) +$$
$$f^2(x) + \dots + f^{k-1}(x)) = x + f(x) + f^2(x) + \dots + f^{k-1}(x) - f(x) + f(f(x)) + f(f^2(x)) +$$
$$+ \dots + f(f^{k-1}(x)) = x + f(x) + f^2(x) + \dots + f^{k-1}(x) - (f(x) + f^2(x) + f^3(x) + \dots +$$
$$f^k(x)) = x - f^k(x) = x - 0 \cdot id_V(x) = x = id_V(x)$$

$\Rightarrow g$ ist bijektiv und g^{-1} ist inverse Funktion zu g

b) Aussage in "Matrixform"

$F \dots$ Matrix der linearen Abbildung $f \quad \exists k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}: \underbrace{F \cdot F \cdot F \cdot \ldots \cdot F}_{k\text{-Mal}} = F^k = 0$-Matrix

$G = E_V - F$

Behauptung: $G \dots$ regulär und $G^{-1} = E_V + F + F^2 + \dots + F^{k-1}$

γ)
$$\left(\begin{array}{ccccc} 1&2&3&4&6\\ 0&1&2&3&5\\ 0&0&1&2&4\\ 0&0&0&1&3\\ 0&0&0&0&1\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{matrix} \begin{array}{ccccc} & -2I & -3I & -4I & -6I \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1&0&0&0&0\\ 0&1&2&3&5\\ 0&0&1&2&4\\ 0&0&0&1&3\\ 0&0&0&0&1\\ \hline 1&-2&-3&-4&-6\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \begin{array}{ccccc} & & -2\cdot II & -3\cdot II & -5\cdot II \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&4\\ 0&0&0&1&3\\ 0&0&0&0&1\\ \hline 1&-2&1&2&4\\ 0&1&-2&-3&-5\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right) \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{matrix} \begin{array}{ccccc} & & & -2\cdot III & -4\cdot III \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&3\\ 0&0&0&0&1\\ \hline 1&-2&1&0&0\\ 0&1&-2&1&3\\ 0&0&1&-2&-4\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \begin{array}{ccccc} & & & & -3\cdot IV \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ \hline 1&-2&1&0&0\\ 0&1&-2&1&0\\ 0&0&1&-2&2\\ 0&0&0&1&-3\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right) \end{matrix}$$

Inverse Matrix $= \begin{pmatrix} 1&-2&1&0&0\\ 0&1&-2&1&0\\ 0&0&1&-2&2\\ 0&0&0&1&-3\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$