ANA Ü14

1.) $X \neq \emptyset \qquad d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$

zz: $\mathcal{T}(d) = \mathcal{P}(X)$

$\mathcal{T}(d) \subseteq \mathcal{P}(X)$ klar

$\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{T}(d)$ Sei $M \in \mathcal{P}(X)$ bel. Sei $x \in M$ bel. $U_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\} \subseteq M$

Also ist M offen und somit in $\mathcal{T}(d)$

2.) $X = [-\infty, +\infty) \qquad \mathcal{T}^< := \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$

zz: $(X, \mathcal{T}^<)$ ist ein topologischer Raum

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}^<$: setzten wir $a = -\infty$ bzw $+\infty$ ergibt sich die gewünschte Aussage

(O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{T}^< \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$: wenn $O_1 = [-\infty, a)$ und $O_2 = [-\infty, b)$, dann folgt $O_1 \cap O_2 = [-\infty, \min(a,b)) \in \mathcal{T}^<$

(O3) $(O_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$: wenn $\forall i \in I\ O_i = [-\infty, x_i)$, dann gilt

$\forall y < \sup(\{x_i : i \in I\}) : \exists i \in I : y < x_i \Rightarrow y \in [-\infty, x_i) \Rightarrow y \in \bigcup_{i \in I} O_i$

$\forall y \geq \sup(\{x_i : i \in I\}) : \nexists i \in I : y < x_i$ oder $\forall i \in I : y \geq x_i \Rightarrow y \notin \bigcup_{i \in I} O_i$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i = [-\infty, \sup(\{x_i : i \in I\})) \in \mathcal{T}^<$

3.) $X = [-\infty, +\infty) \qquad \mathcal{T}^< := \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\} \qquad (x_i)_{i \in I}$ ... Netz

tz: $x_i \xrightarrow{i \in I} x \iff x \geq \limsup_{i \in I} x_i$

$(x_i \xrightarrow{i \in I} x) :\iff (\forall U \in \mathfrak{U}(x)\ \exists i_0 \in I\ \forall i \succeq i_0 \Rightarrow x_i \in U)$

$\Rightarrow$ Angenommen $x < \limsup_{i \in I} x_i \Rightarrow x < y < \limsup_{i \in I} x_i \Rightarrow \exists i_0 \in I\ \forall i \succeq i_0 : x_i > y$

$\Rightarrow [-\infty, y) \in \mathfrak{U}(x) \wedge \nexists i_0 \in I\ \forall i \succeq i_0 : x_i \notin [-\infty, y) \Rightarrow$ nicht $x_i \xrightarrow{i \in I} x$

$\Leftarrow$ $x \geq \limsup_{i \in I} x_i \iff \exists i_0 \in I\ \forall i \succeq i_0 : x_i \leq x \Rightarrow \exists i_0 \in I\ \forall i \succeq i_0\ \forall y > x : x_i \in [-\infty, y)$

Da $[-\infty, y) \in \mathfrak{U}(x) \wedge \exists i_0 \in I\ \forall i \succeq i_0 \Rightarrow x_i \in [-\infty, y]$ folgt nach Fakta 12.1.12 die Konvergenz von x_i zu x.

ANA Ü14

4.) $X \neq \emptyset$ $\quad \mathcal{T}, \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\quad \mathcal{T} := \{A \subseteq X : A = \emptyset$ oder $X \setminus A$ endlich$\}$

$\mathcal{O} := \{A \subseteq X : A = X$ oder A endlich$\}$

Für welche X sind $\mathcal{T}, \mathcal{O}$ Topologien?

(O1) •) $\emptyset \in \mathcal{T}$ nach Definition $\quad X \in \mathcal{T}$, da für $A = X$ gilt $X \setminus A = \emptyset$ ist endlich

•) $\emptyset \in \mathcal{O}$ da für $A = \emptyset$ ... endlich $\quad X \in \mathcal{O}$ nach Definition

(O2) •) Sei $A, B \in \mathcal{T}$ bel. Falls $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ $\Rightarrow A \cap B = \emptyset \in \mathcal{T}$

Sonst gilt $A^c = X \setminus A$ ... endlich $\quad B^c = X \setminus B$ ... endlich

$A \cap B = ((A \cap B)^c)^c = (A^c \cup B^c)^c$ da $A^c \cup B^c$ endlich ist folgt $A \cap B \in \mathcal{T}$

•) Sei $A, B \in \mathcal{O}$ bel. Falls $A = X \Rightarrow A \cap B = B \in \mathcal{O}$ umgekehrt genauso

Sonst gilt A ... endlich und B ... endlich $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{O}$, da endlich

(O3) •) Sei $(A_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{T}$ bel. Da $\emptyset$ nichts zur Vereinigung beiträgt, können wir

o.B.d.A. $\forall i \in I: X \setminus A_i$ ... endlich annehmen

$\bigcup_{i \in I} A_i = ((\bigcup_{i \in I} A_i)^c)^c = (\bigcap_{i \in I} A_i^c)^c = X \setminus (\bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)) \in \mathcal{T}$, da $\bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$ endlich ist

•) Gegenbsp für unendliches X: $\quad X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}: A_n = \{n\}$

$\forall n \in \mathbb{N}: A_n$ ist endlich, aber $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N} \notin \mathcal{O}$, da weder

$\mathbb{N} = X$, noch $\mathbb{N}$ endlich

Für endliches X: $\quad \mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$, da $\forall M \subseteq X$ gilt M endlich

Sei $(A_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{O}$ bel. $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq X$ und somit endlich

$\Rightarrow \mathcal{T}, \mathcal{O}$ sind für endliche X Topologien. Für unendliche X ist nur $\mathcal{T}$ eine Topologie.

ANA Ü14

5.) M ... Menge $\mathcal{F}$ ... Filter auf M $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$

zz: $\mathcal{B}$ ... Filterbasis von $\mathcal{F} \iff \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$

$\mathcal{B}$ .. Filterbasis von $\mathcal{F} \iff \forall F \in \mathcal{F}\ \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F} \subseteq \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$ klar, da $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$

Sei $X \in \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$ bel.

$\exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq X \subseteq M \overset{(F3)}{\Longrightarrow} X \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$

$\Leftarrow$ Sei $F \in \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$ bel.

$\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F$ also ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis von $\mathcal{F}$

zz: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ ist Filterbasis höchstens eines Filters

Sei $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ zwei Filter auf M und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_1$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_2$

Wenn $\mathcal{B}$ Filterbasis von $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ ist folgt von oben

$\mathcal{F}_1 = \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\} = \mathcal{F}_2$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ ist Filterbasis höchstens eines Filters

zz: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$

zz: $\mathcal{B}$ ... Filterbasis von Filter $\mathcal{F} \iff$ (i) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{B}$

(ii) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

$\Rightarrow$ (i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ nach (F1) und $\forall F \in \mathcal{F}\ \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F \Rightarrow \mathcal{B} \neq \emptyset$

Da $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ und $\emptyset \notin \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{B}$

(ii) Sei $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F} \overset{(F2)}{\Longrightarrow} B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F} \overset{\text{Def. Filterbasis}}{\Longrightarrow} \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

$\Leftarrow$ nach oben müssen wir nur zeigen, dass $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$

(F1) Da $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ und nach (i) $\mathcal{B} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{F} = \emptyset$

Angenommen $\emptyset \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq \emptyset$ ↯ da nach (i) $\emptyset \in \mathcal{B}$

(F2) Sei $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ bel. $\Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B} : B_1 \subseteq F_1, B_2 \subseteq F_2$

$B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$ und nach (ii) $\exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$

$\Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

(F3) Sei $F_1 \in \mathcal{F}$ und F_2 mit $F_1 \subseteq F_2 \subseteq M$ bel. $\Rightarrow \exists B_1 \in \mathcal{B} : B_1 \subseteq F_1 \subseteq F_2$

$\Rightarrow F_2 \in \mathcal{F}$ $\Rightarrow \mathcal{F}$ ist ein Filter und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis zu $\mathcal{F}$

ANAÜ14

6.) $f: M \to N$ $\quad \mathcal{F}$... Filter auf M

$\mathcal{G} := \{G \subseteq N : f^{-1}(G) \in \mathcal{F}\}$ $\quad f(\mathcal{F}) := \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$

zz: $\mathcal{G}$ ist ein Filter auf N

(F1) Da $\mathcal{F} \neq \emptyset$ $\exists F \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ $\quad f(F) \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \neq \emptyset$

$f^{-1}(G) = \{f^{-1}(g) : g \in G\} \Rightarrow f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{G}$

(F2) Sei $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ bel. $\Rightarrow f^{-1}(G_1) = F_1 \in \mathcal{F} \wedge f^{-1}(G_2) = F_2 \in \mathcal{F}$

$f^{-1}(G_1 \cap G_2) = \{f^{-1}(g) : g \in G_1 \cap G_2\} = f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2) = F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

(F3) Sei $G_1 \in \mathcal{G}$ bel. Sei G_2 mit $G_1 \subseteq G_2 \subseteq N$ bel.

$f^{-1}(G_1) = F_1 \in \mathcal{F}$ $\quad f^{-1}(N) \subseteq M$

$\Rightarrow F_1 = f^{-1}(G_1) \subseteq f^{-1}(G_2) \subseteq f^{-1}(N) \subseteq M$

$\Rightarrow f^{-1}(G_2) \in \mathcal{F}$ $\quad \Rightarrow G_2 \in \mathcal{G}$

zz: $f(\mathcal{F})$ ist eine Filterbasis von $\mathcal{G}$

Sei $G \in \mathcal{G}$ bel. $\Rightarrow f^{-1}(G) = F \in \mathcal{F}$

$f(F) \in f(\mathcal{F})$ und $f(F) \subseteq G$ $\quad \Rightarrow f(\mathcal{F})$ ist eine Filterbasis von $\mathcal{G}$

ges: Beispiel wo $f(\mathcal{F})$ eine Filterbasis, aber kein Filter ist

$M = \{1,2,3\}$ $\quad N = \{1,2,3\}$ $\quad f(1) = 1$ $\quad f(2) = 2$ $\quad f(3) = 1$

$\mathcal{F} = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ $\quad f(\mathcal{F}) = \{\{1,2\}\}$

$f(\mathcal{F})$ verletzt (F3), da $\underbrace{\{1,2\}}_{\in \mathcal{F}} \subseteq \{1,2,3\} \subseteq \underbrace{\{1,2,3\}}_{= N}$

und $\{1,2,3\} \notin f(\mathcal{F})$

ANA Ü14

7.) $X = \{1,2,3\}$ $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, X\}$

zz: $(X, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum

(O1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ $X \in \mathcal{T}$ nach Definition von $\mathcal{T}$

(O2) Sei $T \in \mathcal{T}$ bel. $\emptyset \cap T = \emptyset \in \mathcal{T}$ Sei $T \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset, \{1\}\}$ bel. $\{1,2\} \cap T = \{1,2\}$

Sei $T \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ bel. $\{1\} \cap T = \{1\} \in \mathcal{T}$ Sei $T \in \mathcal{T}$ bel. $X \cap T = T \in \mathcal{T}$

(O3) Sei $(T_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{T}$ bel.

Falls $\exists i \in I : T_i = X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} T_i = X \in \mathcal{T}$

Falls sonst $\exists i \in I : T_i = \{1,2\} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} T_i = \{1,2\} \in \mathcal{T}$

Falls sonst $\exists i \in I : T_i = \{1\} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} T_i = \{1\} \in \mathcal{T}$

Sonst $\forall i \in I : T_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} T_i = \emptyset \in \mathcal{T}$

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum?

Nein da für $x = 3$ $y = 1$ gibt es keine disjunkten Mengen $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ mit $x \in T_1$ und $y \in T_2$. ($T_1 = X$, da keine andere offene Menge 3 enthält)

ges: Umgebungsfilter und möglichst kleine Filterbasis um jeden Punkt $x \in X$.

$\mathcal{U}(1) = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ $\mathcal{B}_1 = \{\{1\}\}$

$\mathcal{U}(2) = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ $\mathcal{B}_2 = \{\{1,2\}\}$

$\mathcal{U}(3) = \{\{1,2,3\}\}$ $\mathcal{B}_3 = \{\{1,2,3\}\}$

ges: Abschluss von jeder Teilmenge von X

$\mathcal{A} = \{X, \{2,3\}, \{3\}, \emptyset\}$

$\overline{\emptyset} = X \cap \{2,3\} \cap \{3\} \cap \emptyset = \emptyset$ $\overline{\{1\}} = X$

$\overline{\{2\}} = X \cap \{2,3\} = \{2,3\}$ $\overline{\{3\}} = X \cap \{2,3\} \cap \{3\} = \{3\}$

$\overline{\{1,2\}} = X$ $\overline{\{1,3\}} = X$

$\overline{\{2,3\}} = X \cap \{2,3\} = \{2,3\}$ $\overline{\{1,2,3\}} = X$

ANA Ü14

8.) $(X, \mathcal{T})$ ... Hausdorff-Raum

zz: $\forall x \in X: \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} U = \{x\}$

$\{x\} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} U$ ist klar, da nach Definition $\forall U \in \mathcal{U}(x): x \in U$

Angenommen $\exists y \neq x: \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} U = \{x, y\}$

$\Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x): x, y \in U$ $\lightning$ zu (T_2), da $\forall x, y$ mit $x \neq y$

$\exists T_1, T_2 \in \mathcal{U}(x): x \in T_1, y \in T_1, T_1 \cap T_2 = \emptyset$

zz: $\forall x \in X: \{x\} \subseteq X$ ist abgeschlossen

$\overline{\{x\}} = \bigcap \{A \subseteq X, A \text{...abgeschlossen}, A \supseteq \{x\}\}$

$= \bigcap \{O^c, O \in \mathcal{T}, x \in O^c\} = \bigcap \{O^c, O \in \mathcal{T}, x \notin O\}$

$\Rightarrow x \in \overline{\{x\}}$ Sei $y \in X \setminus \{x\}$ bel.

Aus (T_2) folgt $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{T}, x \in O_1, y \in O_2: O_1 \cap O_2 = \emptyset$

$\Rightarrow x \notin O_2 \Rightarrow y \in O_2 \in \{O \in \mathcal{T}, x \notin O\} \Rightarrow y \notin \bigcap \{O^c, O \in \mathcal{T}, x \notin O\}$

$\Rightarrow \overline{\{x\}} = \{x\} \Rightarrow \{x\}$ ist abgeschlossen

ANA Ü14

9.) $(X, \mathcal{T})$ ... topologischer Raum

$B \subseteq C \subseteq X$ heißt dicht in C, falls $\overline{B} \supseteq C$

$B \subseteq X$ heißt dicht, falls B dicht in X ist

zz: $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ... endlich viele dichte Mengen aus $\mathcal{T}$ $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} D_i$ ... dicht, offen

Sei $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$ ... dicht bel. $\Rightarrow X \subseteq \overline{D_1}$, $X \subseteq \overline{D_2}$

$$X \subseteq \overline{D_1} \cap \overline{D_2} = \left(\bigcap \{A \in \mathcal{A}, A \supseteq D_1\}\right) \cap \left(\bigcap \{A \in \mathcal{A}, A \supseteq D_2\}\right)$$

$$= \bigcap \{A \in \mathcal{A}, A \supseteq (D_1 \cup D_2)\} \subseteq \bigcap \{A \in \mathcal{A}, A \supseteq (D_1 \cap D_2)\} = \overline{D_1 \cap D_2}$$

$\Rightarrow D_1 \cap D_2$ ist dicht (offen folgt aus der Definition von $\mathcal{T}$)

Mittels vollständiger Induktion folgt $\bigcap_{i \in I} D_i$ ... dicht, offen ist wenn I endlich ist.