4.) (i) Ist $\langle \mathbb{C}^n, d\rangle$ ein metrischer Raum? $\quad d\left((z_j)_{j=1}^n, (w_j)_{j=1}^n\right) = \sum_{j=1}^n |z_j - w_j|$

M1) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n : d(x,y) \geq 0$ $\quad$ mit $(z_j)_{j=1}^n, (w_j)_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$

klar, da jeder Summand ≥ 0 (da absolut Betrag)

$d(x,y) = 0 \iff x = y$

klar, da Summe von Zahlen ≥ 0 nur $0 \iff$ alle Summanden $= 0$

$\Rightarrow |z_j - w_j| = 0 \iff z_j - w_j = 0 \iff z_j = w_j$

4)... (M2) $d(x,y) = d(y,x)$

klar, da $|z_j - w_j| = |w_j - z_j|$ und somit ergibt sich die selbe Summe.

(M3) $x,y,z \in M \quad d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

$\forall i: |x_j - y_j| + |y_j - z_j| \ge |x_j - y_j + y_j - z_j| = |x_j - z_j|$

also ist $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ $\Rightarrow (\mathbb{C}^n, d)$ ist ein metrischer Raum

(ii) Ist $(\mathbb{R}^+, d)$ ein metrischer Raum? $d(x,y) = x \cdot y$

Nein, weil (M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Gegenbsp: $x = y = 1 \quad d(1,1) = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^+, d)$ ist kein metrischer Raum.

(iii) Ist $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, d)$ ein metrischer Raum? $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|,\ x,y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(M1) $d(x,y) \ge 0$ klar, da absolut Betrag

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ klar, weil $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x^{-1} = y^{-1} \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

klar, da $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right|$

(M3) $x,y,z \in M \quad d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| \le \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right|$

$\Rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, d)$ ist ein metrischer Raum.