ALG Ü6

167)

(1) $C_n \times C_m$ ... zyklisch $\Longleftrightarrow n, m$ besitzen keinen Teiler $d > 1$

($\Rightarrow$) Wir zeigen zuerst n, m besitzen einen gemeinsamen Teiler $l > 1 \Rightarrow C_n \times C_m$ ... nicht zyklisch.

Sei $(x,y) \in C_n \times C_m$ bel. $ord(x,y) \leq \frac{n \cdot m}{l} < n \cdot m$, da $\frac{n \cdot m}{l} x = n \cdot \frac{m}{l} x$ und $\frac{n \cdot m}{l} y = \frac{n}{l} m y$ jeweils wird x bzw. y durch n bzw. m annulliert, da $ord(x) \leq n$ und $ord(y) \leq m$.

Wäre $C_n \times C_m$ zyklisch gäbe es ein $(x,y) \in C_n \times C_m$ mit $ord(x,y) = n \cdot m = |C_n \times C_m|$. (da $C_n \times C_m = \langle (x,y) \rangle$). $\Rightarrow C_n \times C_m$ ist nicht zyklisch.

($\Leftarrow$) Für die andere Richtung betrachten wir $f: C_{n \cdot m} \to C_n \times C_m$, $\overline{x}^{n \cdot m} \mapsto (\overline{x}^n, \overline{x}^m)$. *

Wir wollen nun unter der Annahme, dass n, m keinen gemeinsamen Teiler > 1 besitzt, zeigen, dass f ein Isomorphismus ist und somit $C_n \times C_m$ als Bild einer zyklischen Gruppe ebenfalls zyklisch ist.

$\overline{x}^{n \cdot m}, \overline{y}^{n \cdot m} \in C_{n \cdot m}$ bel. $f(\overline{x}^{n \cdot m} + \overline{y}^{n \cdot m}) = f(\overline{x+y}^{n \cdot m}) = (\overline{x+y}^n, \overline{x+y}^m) = (\overline{x}^n + \overline{y}^n, \overline{x}^m + \overline{y}^m) = f(\overline{x}^{n \cdot m}) + f(\overline{y}^{n \cdot m})$

Offenbar gilt $|C_n \times C_m| = n \cdot m = |C_{n \cdot m}|$ also reicht es Injektivität zu zeigen, damit Bij.

Sei $\overline{x}^{n \cdot m} \in C_{n \cdot m}$ mit $f(\overline{x}^{n \cdot m}) = (\overline{0}^n, \overline{0}^m)$ bel. $\Rightarrow (\overline{x}^n, \overline{x}^m) = (\overline{0}^n, \overline{0}^m)$

$\Rightarrow x + n\mathbb{Z} = 0 \wedge x + m\mathbb{Z} = 0 \Rightarrow x = -n\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} \wedge x = -m\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}: k \cdot n = x = l \cdot m$, da n, m teilerfremd sind muss $k \in m\mathbb{Z}$ und $l \in n\mathbb{Z}$ sein.

$\Rightarrow x \in n \cdot m\mathbb{Z}$ also $\overline{x}^{n \cdot m} = \overline{0}^{n \cdot m}$ $\Rightarrow f$ ... injektiv $\Rightarrow f$ ... Isomorphismus

$\Rightarrow C_n \times C_m$ ... zyklisch

* wohldefiniert: $\overline{x}^{n \cdot m} = \overline{y}^{n \cdot m} \Rightarrow x + nm\mathbb{Z} = y + nm\mathbb{Z} \Rightarrow x = y + nm\mathbb{Z}$

$x = y + n(\underbrace{m\mathbb{Z}}_{\in \mathbb{Z}}) \in y + n\mathbb{Z}$ $\quad x = y + m(\underbrace{n\mathbb{Z}}_{\in \mathbb{Z}}) \in y + m\mathbb{Z}$ $\Rightarrow \overline{x}^n = \overline{y}^n \wedge \overline{x}^m = \overline{y}^m$

$f(\overline{x}^{n \cdot m}) = (\overline{x}^n, \overline{x}^m) = (\overline{y}^n, \overline{y}^m) = f(\overline{y}^{n \cdot m})$ ✓

ALG ÜG

167) (2) $C_n \cong \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} C_{p^{e_p}}$ C_n... zyklische Gruppe der Ordnung $n=\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{e_p}$

$\operatorname{ord}(C_n)=\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{e_p}$, $\operatorname{ord}(\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} C_{p^{e_p}})=\prod_{p\in\mathbb{P}} \operatorname{ord}(C_{p^{e_p}})=\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{e_p}$ also gleich

$f: C_n \to \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} C_{p^{e_p}}$ $\quad \overline{x} \mapsto (x \bmod p^{e_p})_{p\in\mathbb{P}}$

wohldefiniert: $\overline{x}=\overline{y} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}: x=y+kn$

$f(\overline{x})=(x \bmod p^{e_p})_{p\in\mathbb{P}}=((y+kn) \bmod p^{e_p})_{p\in\mathbb{P}}=((y \bmod p^{e_p})+(kn \bmod p^{e_p}))_{p\in\mathbb{P}}$

$=(y \bmod p^{e_p})_{p\in\mathbb{P}}+(k\cdot\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{e_p} \bmod p^{e_p})_{p\in\mathbb{P}}=f(y)+(0)_{p\in\mathbb{P}}=f(\overline{y})$

Homomorphismus: $\overline{x},\overline{y}\in C_n$ bel.

$f(\overline{x}+\overline{y})=f(\overline{x+y})=(x+y \bmod p^{e_p})_{p\in\mathbb{P}}=(x \bmod p^{e_p})_{p\in\mathbb{P}}+(y \bmod p^{e_p})_{p\in\mathbb{P}}$

$=f(\overline{x})+f(\overline{y})$

Injektivität: $\overline{x}\in C_n$ mit $f(\overline{x})=(0)_{p\in\mathbb{P}}$ bel.

$f(\overline{x})=(x \bmod p^{e_p})=(0)_{p\in\mathbb{P}} \Leftrightarrow \forall p\in\mathbb{P}: x\in p^{e_p}\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{e_p}\mathbb{Z}=n\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \overline{x}=\overline{0}\in C_n$

Bijektivität: Da $\operatorname{ord}(C_n)=n=\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{e_p}$ und aus $p,q\in\mathbb{P}, p\neq q$ und $k,l\in\mathbb{N}$:

p^k, q^l haben keine gemeinsamen Teiler >1 folgt

$\operatorname{ord}(\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} C_{p^{e_p}})=\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{e_p}$ (alle $p\in\mathbb{P}$ mit $e_p=0$ tragen nichts zur Ordnung bei, dass sind nach Definition fast alle) also gleich

$\Rightarrow$ injektiv $\Rightarrow$ bijektiv

$\Rightarrow f$ ... Isomorphismus

ALG Ü6

212) (1) Begründen Sie: $C_{50} \cong C_{25} \times C_2$

25, 2 haben keinen gemeinsamen Teiler $>1 \overset{167}{\Longrightarrow} C_{25} \times C_2$ ... zyklisch

$|C_{25} \times C_2| = 25 \cdot 2 = 50 = |C_{50}|$ Da C_{50}, $C_{25} \times C_2$ beides zyklische Gruppen mit Mächtigkeit 50 sind gilt $C_{50} \cong C_{25} \times C_2$. (Bsp 167 gibt den Isomorphismus an)

(2) Begründen Sie: $C_2 \times C_{10} \cong C_2 \times C_2 \times C_5$

Wie oben gilt $C_{10} \cong C_2 \times C_5$. Nennen wir den Isomorphismus $g: C_2 \times C_5 \to C_{10}$

$f: C_2 \times C_2 \times C_5 \to C_2 \times C_{10}$ $(a,b,c) \mapsto (a, g(b,c))$. klarerweise Isomorphismus (siehe unten)

(3) Begründen Sie: $C_2^2 \times C_4^2 \times C_7^3 \cong C_2 \times (C_2 \times C_7) \times (C_4 \times C_7) \times (C_4 \times C_7) \cong C_2 \times C_{14} \times C_{28} \times C_{28}$

$C_2^2 \times C_4^2 \times C_7^3 = (C_2 \times C_2) \times (C_4 \times C_4) \times (C_7 \times C_7 \times C_7)$

$f: (C_2 \times C_2) \times (C_4 \times C_4) \times (C_7 \times C_7 \times C_7) \to C_2 \times (C_2 \times C_7) \times (C_4 \times C_7) \times (C_4 \times C_7)$

$((a,b),(c,d),(e,f,g)) \mapsto (a,(b,e),(c,f),(d,g))$ ist als Permutation bijektiv und klarerweise ein Homomorphismus. Damit ist die erste Isomorphie klar.

Wieder wie oben gilt $C_2 \times C_7 \cong C_{14}$ und $C_4 \times C_7 \cong C_{28}$.

$g_1: C_2 \times C_7 \to C_{14}$, $g_2: C_4 \times C_7 \to C_{28}$ ... die beiden Isomorphismen

$f: C_2 \times (C_2 \times C_7) \times (C_4 \times C_7) \times (C_4 \times C_7) \to C_2 \times C_{14} \times C_{28} \times C_{28}$

$(a,(b,c),(d,e),(f,g)) \mapsto (a, g_1(b,c), g_2(d,e), g_2(f,g))$ ... klarerweise ein Isomorphismus (zeigt man analog wie in (2))

---

surjektiv: Sei $x \in C_2$, $y \in C_{10}$ bel. Da g ... surjektiv $\Rightarrow \exists\, b \in C_2, c \in C_5 : g(b,c) = y$

$\Rightarrow f(x,b,c) = (x, g(b,c)) = (x,y)$

injektiv: Sei $x,y \in C_2$, $z \in C_5$ mit $f(x,y,z) = (0,0)$ bel. $f(x,y,z) = (x, g(y,z))$

$\Rightarrow x = 0$ und da g ... injektiv $\Rightarrow (y,z) = (0,0)$

Homomorphismus: Sei $a,b,x,y \in C_2$, $c,z \in C_5$ bel. Da g ein Homomorphismus ist gilt:

$f((a,b,c)+(x,y,z)) = f(a+x, b+y, c+z) = (a+x, g(b+y, c+z)) \overset{\downarrow}{=} (a+x, g(b,c)+g(y,z))$
$= (a, g(b,c)) + (x, g(y,z)) = f(a,b,c) + f(x,y,z)$

ALG Ü6

2.14) Geben Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen an, deren Ordnung ein Teiler von 75 ist. $(1, 3, 5, 15, 25, 75 \mid 75)$

$\{C_1, C_3, C_5, C_3 \times C_5, C_5 \times C_5, C_{25}, C_3 \times C_5 \times C_5, C_3 \times C_{25}\}$

Alle Elemente sind bekanntermaßen abelsche Gruppen, deren Ordnung ein Teiler von 75 ist (nämlich, 1,3,5,15,25 bzw. 75). Da die Ordnungen verschiedener Elemente unterschiedlich sind, bzw. wegen Bsp 2.16 sind alle jeweils nicht isomorph.

Wir müssen überprüfen ob jede Gruppe, deren Ordnung ein Teiler von 75 ist, isomorph zu einem der Elemente der Liste ist.

Sei G eine abelsche Gruppe mit Ordnung $o \in \{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$.

$\Rightarrow G$ ... endlich $\Longrightarrow$ (aus Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen) $G \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{n=1}^{\infty} C_{p^n}^{e_{p,n}}$

$\Rightarrow |G| = \left| \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{n=1}^{\infty} C_{p^n}^{e_{p,n}} \right| = \prod_{p \in \mathbb{P}} \prod_{n=1}^{\infty} |C_{p^n}|^{e_{p,n}} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \prod_{n=1}^{\infty} (p^n)^{e_{p,n}}$

Für $|G| \in \{1, 3, 5, 15\}$ gibt es eine eindeutige Darstellung als Produkt.

$1 = (2^1)^0 \cdot (2^2)^0 \cdot (2^3)^0 \cdot \ldots (3^1)^0 \cdot (3^2)^0 \cdot (3^3)^0 \cdot \ldots$ "= leeres Produkt" $\Rightarrow G \cong C_1$

$3 = (3^1)^1 \Rightarrow G \cong C_3$ $\quad 5 = (5^1)^1 \Rightarrow G \cong C_5$ $\quad 15 = (3^1)^1 \cdot (5^1)^1 \Rightarrow G \cong C_3 \times C_5$

Für $|G| = 25$ gilt entweder G ... zyklisch und somit $G \cong C_{25}$ oder G ist nicht zyklisch, wird also zumindest von 2 Elementen x, y mit $\langle x \rangle \setminus \langle y \rangle \neq \{0\} \neq \langle y \rangle \setminus \langle x \rangle$ erzeugt

$\Rightarrow \langle x \rangle \leq G$ und $\langle y \rangle \leq G$ und $\operatorname{ord}\langle x \rangle, \operatorname{ord}\langle y \rangle \in \{1, 5, 25\}$.

$\operatorname{ord}\langle x \rangle = 25$ können wir ausschließen, da sonst x alleine ganz G erzeugt.

$\operatorname{ord}\langle x \rangle = 1 \Rightarrow \langle x \rangle = \{0\} \Rightarrow \langle x \rangle \setminus \langle y \rangle = \{0\}$ ↯ $\Rightarrow \operatorname{ord}\langle x \rangle = 5 = \operatorname{ord}\langle y \rangle$

Da $25 = \operatorname{ord} G = \operatorname{ord}\langle x \rangle \cdot \operatorname{ord}\langle y \rangle = 5 \cdot 5$ wird G nur von x, y erzeugt.

$\langle x \rangle \cong C_5 \cong \langle y \rangle \Rightarrow G \cong C_5 \times C_5$

Für $|G| = 75$ ist wieder entweder G zyklisch $\Rightarrow G \cong C_3 \times C_{25}$ oder mit der gleichen Argumentation wie bei $|G| = 25$ gilt für $G \cong C_3 \times U$ mit $\operatorname{ord} U = 25$, dass $G \cong C_3 \times C_5 \times C_5$.

ALG ÜG

215) $p \in \mathbb{P}$

(1) Wie viele Untergruppen hat $C_p \times C_p$?

Zyklische Untergruppen: Werden erzeugt von $\langle(\bar{x}, \bar{y})\rangle$ mit $\bar{x}, \bar{y} \in C_p$. Für $(\bar{a}, \bar{b}) \in \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \setminus \{\bar{0}, \bar{0}\}$ gilt $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$. $\operatorname{ord}\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \bar{x} = \bar{0} = \bar{y} \\ p & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Es gibt $\frac{p \cdot p - 1}{p-1} + 1 = p+1+1 = p+2$ zyklische Untergruppen von $C_p \times C_p$

Nicht zyklische Untergruppen: Werden von zumindest 2 Elementen $(\bar{x}, \bar{y}), (\bar{a}, \bar{b})$ erzeugt, für die gilt $(\bar{x}, \bar{y}) \notin \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \wedge (\bar{a}, \bar{b}) \notin \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$. $\operatorname{ord}\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = p$, da sie p^2 teilen muss, aber nicht ganz $C_p \times C_p$ erzeugen darf und aber auch nicht $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{0}, \bar{0}) \in \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ gelten kann.

$\langle (\bar{x}, \bar{y}), (\bar{a}, \bar{b}) \rangle \subseteq U$ $\quad \operatorname{ord}\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \cdot \operatorname{ord}\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = p \cdot p = p^2 = \operatorname{ord}(C_p \times C_p)$

$\Rightarrow U$ muss von genau 2 Elementen mit ord p erzeugt werden. $\Rightarrow \operatorname{ord} U = p^2$

$\Rightarrow U = C_p \times C_p$ $\quad \Rightarrow$ Es gibt nur 1 nicht zyklische Untergruppe von $C_p \times C_p$

Insgesamt gibt es also $p+3$ Untergruppen von $C_p \times C_p$.

(2) Wie viele Untergruppen hat C_{p^2}?

Die Ordnung der Untergruppe muss p^2 teilen also sind nur $1, p, p^2$ möglich.

$C_1 = \langle \bar{0} \rangle$ und $C_{p^2} = \langle \bar{x} \rangle$ mit $\bar{x} \in \{\bar{1}, \dots, \overline{p^2-1}\} \setminus \{\bar{p}, \overline{2p}, \dots, \overline{(p-1)p}\}$ sind triviale Untergruppen. (da $\langle \bar{x} \rangle$ zyklisch ist und offenbar Untergruppe so muss $\operatorname{ord}(\langle \bar{x} \rangle) \mid p^2$

$\operatorname{ord}\langle \bar{x} \rangle \neq 1$, da $\bar{x}, \bar{0} \in \langle \bar{x} \rangle$; $\operatorname{ord}\langle \bar{x} \rangle \neq p$, da $p \cdot \bar{x} \neq \overline{p \cdot p} = \bar{0}$ $\Rightarrow \operatorname{ord}\langle \bar{x} \rangle = p^2$)

Für $\bar{x} \in \{\bar{p}, \overline{2p}, \dots, \overline{(p-1)p}\}$ gilt $p \cdot \bar{x} = p \cdot \overline{kp} = \overline{p \cdot p \cdot k} = \bar{0}$ $\Rightarrow \operatorname{ord}\langle \bar{x} \rangle \leq p$

$\operatorname{ord}\langle \bar{x} \rangle \neq 1$ weil wieder $\bar{0}, \bar{x} \in \langle \bar{x} \rangle$ $\Rightarrow \operatorname{ord}\langle \bar{x} \rangle = p$ $\quad \langle \bar{x} \rangle \cong C_p$

$\Rightarrow$ Es gibt 3 Untergruppen.

Bsp $C_3 \times C_3$: 00 $\quad$ 01, 02, 00 $\quad$ 10, 20, 00 $\quad$ 11, 22, 00 $\quad$ 12, 21, 00

|| $\quad$ || $\quad$ || $\quad$ ||

02, 01, 00 $\quad$ 20, 10, 00 $\quad$ 22, 11, 00 $\quad$ 21, 12, 00

$\begin{pmatrix} 00 \\ 01 \\ 02 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \end{pmatrix}$

Bsp $C_2 \times C_2$: 00 $\quad$ 01, 00 $\quad$ 10, 00 $\quad$ 11, 00

$\begin{pmatrix} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$

ALG Ü6

2 16) ges: zwei nicht isomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 75

$A = C_3 \times C_5 \times C_5$ $\qquad$ $B = C_3 \times C_{25}$

Lemma B, B' ... nicht isomorph $\Rightarrow A \times B, A \times B'$ ... nicht isomorph

Bew $A \times B, A \times B'$ ... isomorph $\Rightarrow \exists f: A \times B \to A \times B'$ ... Isomorphismus

$B \cong \{0\} \times B \subseteq A \times B \qquad B' \cong \{0\} \times B' \subseteq A \times B' \qquad f|_{\{0\}\times B}: \{0\} \times B \to \{0\} \times B'$

$\Rightarrow B, B'$ ... isomorph

$\Rightarrow$ Es reicht zu zeigen $C_5 \times C_5$, C_{25} ... nicht isomorph

Aus 16 7 wissen wir 5, 5 besitzen einen gemeinsamen Teiler > 1 (nämlich 5)

$\Rightarrow C_5 \times C_5$ ... nicht zyklisch.

Da C_{25} zyklisch ist und isomorphe Gruppen von zyklischen Gruppen selber zyklisch sind gilt $C_5 \times C_5$ ist nicht isomorph zu C_{25}!

Bestimmen Sie für A, B und jedes $d \in \{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$

1. die Anzahl der zyklischen Untergruppen der Ordnung d.

- zyklische UG von A haben die Form $\langle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\rangle$ mit $\bar{x} \in C_3$, $\bar{y}, \bar{z} \in C_5$

  Falls $\bar{x} = \bar{0} \wedge \bar{y} = \bar{z} = \bar{0}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\rangle = 1$ also 1 UG mit ord $= 1$

  Falls $\bar{x} = \bar{0} \wedge (\bar{y} \neq \bar{0} \vee \bar{z} \neq \bar{0})$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\rangle = 5$ also 6 UG mit ord $= 5$

  Falls $\bar{x} \neq \bar{0} \wedge \bar{y} = \bar{z} = \bar{0}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\rangle = 3$ also 1 UG mit ord $= 3$

  Falls $\bar{x} \neq \bar{0} \wedge (\bar{y} \neq \bar{0} \vee \bar{z} \neq \bar{0})$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\rangle = 15$ also 6 UG mit ord $= 15$

- zyklische UG von B haben die Form $\langle(\bar{x}, \bar{y})\rangle$ mit $\bar{x} \in C_3$, $\bar{y} \in C_{25}$

  Falls $\bar{x} = \bar{0} \wedge \bar{y} = \bar{0}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y})\rangle = 1$ $\qquad$ 1 UG mit ord $= 1$

  Falls $\bar{x} \neq \bar{0} \wedge \bar{y} = \bar{0}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y})\rangle = 3$ $\qquad$ 1 UG mit ord $= 3$

  Falls $\bar{x} = \bar{0} \wedge \bar{y} \in \{\bar{5}, \bar{10}, \bar{15}, \bar{20}\}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y})\rangle = 5$ $\qquad$ 1 UG mit ord $= 5$

  Falls $\bar{x} = \bar{0} \wedge \bar{y} \in C_{25} \setminus \{\bar{5}, \bar{10}, \bar{15}, \bar{20}\}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y})\rangle = 25$ $\qquad$ 1 UG mit ord 25

  Falls $\bar{x} \neq \bar{0} \wedge \bar{y} \in \{\bar{5}, \bar{10}, \bar{15}, \bar{20}\}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y})\rangle = 15$ $\qquad$ 1 UG mit ord 15

  Falls $\bar{x} \neq \bar{0} \wedge \bar{y} \in C_{25} \setminus \{\bar{5}, \bar{10}, \bar{15}, \bar{20}\}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y})\rangle = 75$ $\qquad$ 1 UG mit ord 75 ...

ALG Ü6

216) ... 2. die Anzahl der nicht-zyklischen Untergruppen der Ordnung d

- B ist zyklisch (siehe Bsp 167) also sind auch alle UG von B zyklisch.

  $\Rightarrow$ Es gibt 0 nicht zyklische Untergruppen von B

- Die einzige nicht zyklische Untergruppe von $C_5 \times C_5$ ist nach Bsp 215 die ganze Gruppe selber. $\Rightarrow \{0\} \times C_5 \times C_5 \leq A$ und nicht zyklisch

  $C_3 \times C_5 \times C_5 \leq A$ und ebenfalls nicht zyklisch.

  Sei $U \leq C_3 \times C_5 \times C_5$ ... nicht zyklisch bel. $U|_{\{0\} \times C_5 \times C_5} \leq \{\bar{0}\} \times C_5 \times C_5 \cong C_5 \times C_5$

  $U|_{\{0\} \times C_5 \times C_5}$ ... nicht zyklisch, da $\{(0,0,0)\}$ die einzige zyklische Untergruppe von $U|_{\{0\} \times C_5 \times C_5}$ ist und dann $U = \langle \bar{x}, \bar{0}, \bar{0} \rangle$ für $\bar{x} \in C_3$ wäre (also zyklisch).

  $\Rightarrow U|_{\{0\} \times C_5 \times C_5} = \{0\} \times C_5 \times C_5$

  $U|_{C_3 \times \{0\} \times \{0\}} \leq C_3 \times \{0\} \times \{0\} \cong C_3$ also entweder gleich $\{\bar{0}\}$ oder $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

  $\Rightarrow$ die beiden oben genannten Gruppen sind bereits alle möglichen nicht zyklischen.