LINAG Ü7

2.8.x V.. Vektorraum $n \geq 0$ $m \geq 2$

$v_1, \dots, v_n$ ... Vektoren aus V $U_1, \dots, U_m$ ... Unterräume von V

a) zz: $(v_1, \dots, v_n)$ l.u. $\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}: (v_i \notin [\{v_j : j < i\}]$

Bew: $\Rightarrow$ trivial, da $\forall v \in \{v_1, \dots, v_n\}: (v \notin [\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v\}])$, daher ist v auch nicht in einer Teilmenge von $[\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v\}]$.

$\Leftarrow$ offensichtlich gilt $\emptyset$ ist l.u. $\leftarrow$ IA

IV: $\{v_1, \dots, v_x\}$ ist l.u.

IS: Da $v_{x+1} \notin [\{v_j : j < x+1\}] = [\{v_1, \dots, v_x\}]$ ist $\{v_1, \dots, v_x\} \cup \{v_{x+1}\}$ l.u. (Satz ??)

$\Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ l.u.

b) $U_1 + \dots + U_m$ ist eine direkte Summe $\iff \forall i \in \{1, \dots, m\}: (U_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} U_j = \{\theta\})$

Bew: $\Rightarrow$ trivial, da $\forall i \in \{1, \dots, m\}: (U_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} U_j = \{\theta\})$

$\Leftarrow$ IA: $\forall i \in \{1, 2\}: (U_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} U_j = \{\theta\})$

Für $i = 2$ gilt $U_2 \cap \sum_{j=1}^{1} U_1 = \{\theta\}$. $\Rightarrow U_2 \cap U_1 = \{\theta\}$

$\Rightarrow \sum_{j=2}^{2} U_2 \cap U_1 = \{\theta\}$

$\Rightarrow U_1 \oplus U_2$ ist eine direkte Summe

IV: $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_x$ ist eine direkte Summe

IS: Da die Summe bei x direkt ist gilt:

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, x\}: U_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{x} U_i = \{\theta\}$$

Die Summe $U_1 + U_2 + \dots + U_x + U_{x+1}$ ist also nur direkt wenn $U_{x+1} \cap \sum_{j=1}^{x} U_j = \{\theta\}$.

$\Rightarrow U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$ ist direkt wenn

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}: (U_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} U_j = \{\theta\})$$

$\square$