ANA Ü8

2) i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ Quotientenkriterium mit $q = \frac{1}{2}$

$$\frac{\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\right|}{\left|\frac{n!}{n^n}\right|} = \frac{\frac{n!\cdot(n+1)}{(n+1)^n\cdot(n+1)}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n!\cdot n^n}{n!\cdot(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{n}\cdot n = 2$$

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{1}{2} = q \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \text{ konvergiert}$$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ Wurzelkriterium mit $q = \frac{1}{2}$

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}} = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2} = \left(\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}}\right)^{n^2} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^{n^2} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \geq 1 + \frac{1}{n^2}\cdot n^2 = 2$$

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}} \leq \frac{1}{2} = q \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3} \text{ konvergiert}$$

ANA Ü8

3.) $z \in \mathbb{C}$, $|z|=1$ Für welche z ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konvergent?

1. Fall $z = 1+0i$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ bei $z=1$ divergent

2. Fall $z \neq 1$:

Dirichletsches Kriterium mit $C=2$ $(a_n) = \frac{1}{n}$ und $(b_n) = z^n$

Offensichtlich ist $(a_n) = \frac{1}{n}$ eine monotone Nullfolge.

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z^j\right| = \left|-1 + \sum_{j=0}^{n} z^j\right| \leq |-1| + \left|\sum_{j=0}^{n} z^j\right| = 1 + \left|\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\right|$$

$$\leq 1 + \frac{|z^{n+1}|+|-1|}{|z-1|} = 1 + \frac{|z|^{n+1}+1}{|z-1|} = 1 + \frac{1+1}{|z-1|} = \frac{|z-1|+2}{|z-1|}$$

$$\frac{|z-1|+2}{|z-1|} \leq \frac{|z|+|-1|+2}{|z|+|-1|} = \frac{1+1+2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2 = C$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ist für $z \neq 1$ konvergent

ANA Ü8

4.) $x \in \mathbb{R}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x^n}{2+x^{4n}}$ für welche x konvergent?

Quotientenkriterium:

$$\frac{\left|\frac{3x^{n+1}}{2+x^{4(n+1)}}\right|}{\left|\frac{3x^n}{2+x^{4n}}\right|} = \frac{\frac{3\cdot|x|^{n+1}}{2+x^{4(n+1)}}}{\frac{3\cdot|x|^n}{2+x^{4n}}} = \frac{\cancel{3}\cdot|x|^{n+1}\cdot(2+x^{4n})}{\cancel{3}\cdot\cancel{|x|^n}\cdot(2+x^{4(n+1)})} = \frac{|x|\cdot(2+x^{4n})}{2+x^{4n+4}}$$

- Fallunterscheidung: $x>1$

$$\frac{|x|\cdot(2+x^{4n})}{2+x^{4n+4}} = \frac{2x+x^{4n+1}}{2+x^{4n+4}} = \frac{\frac{2}{x^{4n+3}}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^{4n+4}}+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{x^{4n+3}}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^{4n+4}}+1} = \frac{\frac{1}{x^3}}{1} = \frac{1}{x^3}$$

$\Rightarrow$ bei $x>1$ konvergent

- 2. Fall $x<-1$

$$\frac{-x\cdot(2+x^{4n})}{2+x^{4n+4}} = \frac{-2x-x^{4n+1}}{2+x^{4n+4}} = \frac{\frac{-2}{x^{4n+3}}-\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^{4n+4}}+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{2}{x^{4n+3}}-\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^{4n+4}}+1} = \frac{-\frac{1}{x^3}}{1} = -\frac{1}{x^3}$$

$\Rightarrow$ bei $x<-1$ konvergent

- 3. Fall $-1<x<1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x\pm x^{4n+1}}{2+x^{4n+4}} = \frac{2x}{2} = x < 1$$

$\Rightarrow$ bei $-1<x<1$ konvergent

- 4. Fall $|x|=1$

$$\frac{1\cdot(2+1^{4n})}{2+1^{4n+4}} = \frac{2+1}{2+1} = 1$$

$\Rightarrow$ bei $|x|=1$ divergent

$\square$

ANA Ü8

5.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ $\quad\quad$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}-1\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cdot e = e\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = e\cdot\frac{\pi^2}{6}$$ (Basel problem)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ konvergiert

6.) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad\quad$ $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = z$ $(\in\mathbb{R}/\mathbb{C})$

zz: $\prod_{n=1}^{\infty} z_n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 1$

$\Leftarrow\!\!> \lim_{n\to\infty} z_n \neq 1 \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} z_n = 0$

Fallunterscheidung:

1. Fall $\lim_{n\to\infty} z_n = \pm\infty$ $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} z_n = +\infty$ oder divergiert $\lightning$

2. Fall $\lim_{n\to\infty} z_n = x,\ |x|>1$ $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} z_n = +\infty$ oder divergiert $\lightning$

3. Fall $\lim_{n\to\infty} z_n = x,\ |x|<1$ $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} z_n = 0$

4. Fall $\nexists \lim_{n\to\infty} z_n$ $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} z_n = \pm\infty$ oder divergiert $\lightning$

5. Fall $\lim_{n\to\infty} z_n = -1$ $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty}$ divergiert $\lightning$

$\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} z_n = 0$

$\square$

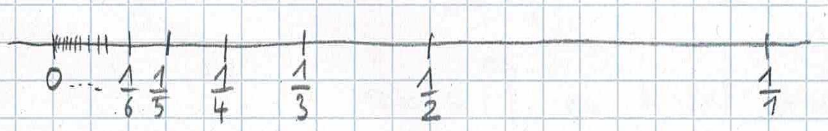
ANA Ü6

8.) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ - ist offen, da rund um jedes $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ unendlich viele unendlich nahe Zahlen aus $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ liegen.
- ist nicht abgeschlossen, da z. B. 0 ein Häufungspunkt ist, aber nicht in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ liegt.

$\mathbb{R}^3\setminus(2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ - ist offen (gleich wie oben)
- ist nicht abgeschlossen, da z. B. $(0,0,0)$ Häufungspunkt ist und nicht in $\mathbb{R}^3\setminus(2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ liegt.

9.) i) $[0,\frac{1}{n})$ ist für alle $n\in\mathbb{N}$ offen, aber $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[0,\frac{1}{n})$ ist die Menge $\{0\}$ und somit nicht offen.

ii) $\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$ besteht in $\mathbb{R}$ nur aus isolierten Punkten, allerdings ist 0 ein Häufungspunkt und liegt nicht in der Teilmenge.

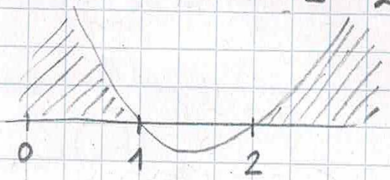


ANA Ü8

10.) i) $M = \{x : x^2 - 3x + 2 > 0\} \subseteq \mathbb{R}$

$$-\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$ ✓



$\Rightarrow M = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

offen ✓ abgeschlossen X beschränkt X

(da 1 Häufungspunkt ist)

ii) $M = \{z : z^2 - z - 2 \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}$

$$-\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-2)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow M = \mathbb{C} \setminus \{-1, 2\}$

offen ✓ abgeschlossen X beschränkt X

(da −1 Häufungspunkt ist)

iii) $M = \{x : x^2 - 3x + 2 \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow M = [1, 2]$

offen ✓ abgeschlossen ✓ beschränkt ✓