ANA Ü10

3) i) $(I, \preceq)$... gerichtete Menge $\exists j \in I\ \forall i \in I: i \preceq j$

zz: $\lim_{i \in I} (x_i) = x_j \iff \forall k \in I$, k... maximales Element: $x_j = x_k$

$\Rightarrow$ Indirekt Angenommen $\exists k \in I$, k... maximales Element: $x_j \neq x_k$

$\Rightarrow \delta := d(x_j, x_k) > 0$

$(x_i)_{i \in I}$ ist kein Cauchy-Netz. (Cauchy-Netz $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists i_0 \in I\ \forall i,j \succeq i_0 \Rightarrow d(x_i, x_j) < \varepsilon$)

$\varepsilon := \frac{\delta}{2}\quad \forall i_0 \in I: i_0 \preceq j \wedge i_0 \preceq k$

$d(x_j, x_k) = \delta > \varepsilon$

$\Rightarrow (x_i)_{i \in I}$ ist kein Cauchy-Netz

$\Rightarrow (x_i)_{i \in I}$ konvergiert nicht ↯

$\Leftarrow$ $\left(\lim_{i \in I} (x_i) = x_j \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists i_0 \in I\ \forall i \succeq i_0: d(x_i, x_j) < \varepsilon\right)$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $i_0 = j$ Nun gilt $\forall i \succeq i_0: x_i = x_j$

$\Rightarrow d(x_i, x_j) = 0 < \varepsilon$

Da für alle maximalen Elemente gilt $x_k = x_j$ ist der Grenzwert eindeutig.

ii) zz: $\# I = n < \infty \Rightarrow \exists j \in I\ \forall i \in I: i \preceq j$

vollständige Induktion nach n:

$n = 1$: Die Menge besteht nur aus einem Element x, da $x \preceq x$ (durch die Reflexivität) ist x das maximale Element.

$n+1$: Zu einer Menge mit maximalem Element wird ein neues Element x hinzugefügt.

1. Fall $\forall i \in I: i \preceq x \Rightarrow$ x ist ein maximales Element

2. Fall $\exists i \in I: x \preceq i \Rightarrow$ x ist kleiner als zumindest ein maximales Element, dieses bleibt maximal.

ANA Ü10

3)... iii) M... endliche Menge

zz: $\lim\limits_{A \in \mathcal{E}(M)} \sum\limits_{m \in A} a_m = \sum\limits_{m \in M} a_m$

$\lim\limits_{A \in \mathcal{E}(M)} \sum\limits_{m \in A} a_m = S$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A_0 \subseteq M$ (A_0... endlich) $\forall A \supseteq A_0$ (A... endlich) $\Rightarrow \left| \sum\limits_{j \in A} a_j - S \right| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $A_0 = M$ $\quad \forall A \supseteq A_0$: $A = M$

$\left| \sum\limits_{j \in A} a_j - S \right| = \left| \sum\limits_{j \in M} a_j - S \right|$

Wenn $S = \sum\limits_{m \in M} a_m$ gilt $\left| \sum\limits_{j \in M} a_j - \sum\limits_{m \in M} a_m \right| = 0 < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Die Summen stimmen überein. $\square$