ALG Ü *

399) ges: unendlicher Körper K, $\mathrm{char}(K)=p$ mit $a \mapsto a^p$ ist Automorphismus auf K

$\tilde{K} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} GF(p^i)$ $\mathcal{U}$ ... Ultrafilter von $\mathbb{N}$ (sicherheitshalber freier Ultrafilter)

$(\tilde{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\tilde{b}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \tilde{K}$ $(\tilde{a}_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{b}_i)_{i\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \{i\in\mathbb{N} : \tilde{a}_i = \tilde{b}_i\} \in \mathcal{U}$ $K = \tilde{K}/_\sim$

$+, \cdot$ wohldefiniert?   Sei $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}, a', b, b' \in \tilde{K}$ bel. mit

$a \sim a' \wedge b \sim b' \Rightarrow M_a := \{i\in\mathbb{N} : a_i = a_i'\} \in \mathcal{U}$, $M_b := \{i\in\mathbb{N} : b_i = b_i'\} \in \mathcal{U}$

$M_+ := \{i\in\mathbb{N} : a_i + b_i = a_i' + b_i'\} \supseteq M_a \cap M_b \in \mathcal{U}$, da $\mathcal{U}$ ... Filter

$(F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F})$ $\Rightarrow a+b \sim a'+b'$

$M_\cdot := \{i\in\mathbb{N} : a_i b_i = a_i' \cdot b_i'\} \supseteq M_a \cap M_b \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow ab \sim a'b'$

Multiplikativ Inverses Element?   Sei $a = [(a_i)_{i\in\mathbb{N}}]_\sim \in K \setminus \{[(0)_{i\in\mathbb{N}}]_\sim\}$ bel.

$\Rightarrow M := \{i\in\mathbb{N} : a_i = 0\} \notin \mathcal{U}$ $\Rightarrow \neg M \in \mathcal{U}$, da $\mathcal{U}$ Ultrafilter

$\neg M = \{i\in\mathbb{N} : a_i \neq 0\} \in \mathcal{U}$ Sei $b_i = \begin{cases} a_i^{-1} & , i \in \neg M \\ 0 & , i \in M \end{cases}$ ... existiert in $GF(p^i)$

$\Rightarrow a \cdot b = [(a_i \cdot b_i)_{i\in\mathbb{N}}]_\sim = [(\mathbb{1}_{\neg M}(i))_{i\in\mathbb{N}}]_\sim$

$L := \{i\in\mathbb{N} : a_i b_i = 1\} = \{i\in\mathbb{N} : i \in \neg M\} = \neg M \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow a \cdot b = 1 \in K$

$\Rightarrow K$ ... Körper   Restlicher Beweis nie gehabt