ANA Ü10

4.) $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ $\quad q(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$ $\quad a_n \neq 0 \quad b_m \neq 0$

ges: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim\limits_{x \in \mathbb{R}} \frac{p(x)}{q(x)}$ $\quad (\mathbb{R}, \leq)$ ... gerichtete Menge

Behauptung: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{falls } n = m \\ +\infty, & \text{falls } n > m, \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty, & \text{falls } n > m, \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$

Beweis: 1. Fall $n < m$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} = \frac{a_n x^{n-m} + \ldots + a_0 x^{-m}}{b_m + \ldots + b_0 x^{-m}} \xrightarrow{x \to \infty} \frac{0}{b_m} = 0$$

da Hochzahlen im Zähler immer negativ und Hochzahlen im Nenner negativ bis auf b_m das übrig bleibt und $\neq 0$ ist.

2. Fall $n = m$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0} = \frac{a_n + \ldots + a_0 x^{-n}}{b_n + \ldots + b_0 x^{-n}} \xrightarrow{x \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

3. Fall $n > m$, $\frac{a_n}{b_m} > 0$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = x^{n-m} \cdot \left(\frac{a_n + \ldots + a_0 x^{-m}}{b_m + \ldots + b_0 x^{-n}} \right)$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(x^{n-m} \cdot \left(\frac{a_n + \ldots + a_0 x^{-m}}{b_m + \ldots + b_0 x^{-n}} \right) \right) = \lim_{x \to \infty} \left(x^{n-m} \right) \cdot \frac{a_n}{b_m} = +\infty$$

da $n - m > 1$ geht $x^{n-m} \xrightarrow{x \to \infty} +\infty$, die Multiplikation mit einer Konstanten ändert das Konvergenzverhalten nicht.

4. Fall $n > m$, $\frac{a_n}{b_m} < 0$

gleich wie 3. Fall nur durch die Multiplikation dreht sich das Vorzeichen um, daher $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = -\infty$