<u>LINAG Ü4</u>

2.3.7' (N) $0_V \in U$

(A) $\forall u, u' \in V: (u \in U \wedge u' \in U \Rightarrow u + u' \in U)$

(H) $\forall c \in K \ \forall u \in V: (u \in U \Rightarrow c \cdot u \in U)$

Was ist mit $\cdot$ gemeint?
Funktion $\varphi_c: V \to V$
$x \mapsto \varphi_c(x) =: c \cdot x$

$(N)_0 \ U \neq \emptyset$

(AH) $\forall k \in K \ \forall v, v' \in V: (v \in U \wedge v' \in U \Rightarrow v + k \cdot v' \in U)$

(AH2) $\forall k_1, k_2 \in K \ \forall u_1, u_2 \in V: ((u_1 \in U \wedge u_2 \in U) \Rightarrow k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2 \in U)$

(AH3) $\forall k_1, k_2, k_3 \in K \ \forall u_1, u_2, u_3 \in V: ((u_1 \in U \wedge u_2 \in U \wedge u_3 \in U) \Rightarrow k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2 + k_3 \cdot u_3 \in U)$

1) zz: (AH3) $\Rightarrow$ (AH2) $\Rightarrow$ (AH)

Sei $k_1, k_2 \in K$ bel. Sei $u_1, u_2, u_3 \in V$ bel. Sei $k_3 = 0_K$

$(u_1 \in U \wedge u_2 \in U \wedge u_3 \in U) \Rightarrow (k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2 + 0_K \cdot u_3 \in U)$

$k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2 \in U$

da $u_3$ nicht auf der RS vorkommt:

$(u_1 \in U \wedge u_2 \in U) \Rightarrow (k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2) \in U \iff$ AH2

Sei $k_2 \in K$ bel. Sei $u_1, u_2 \in V$ bel. Sei $k_1 = 1_K$

$(u_1 \in U \wedge u_2 \in U) \Rightarrow (1_K \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2) \in U$

$u_1 + k_2 \cdot u_2 \in U$

$\forall k_2 \in K \ \forall u_1, u_2 \in V: (u_1 \in U \wedge u_2 \in U \Rightarrow u_1 + k_2 \cdot u_2 \in U) \iff$ AH

2) (A) $\wedge$ (H) $\Rightarrow$ (AH3)

Sei $k_1, k_2, k_3 \in K$ bel. Sei $u_1, u_2, u_3 \in V$ bel.

laut (H) $u_1 \in U \Rightarrow k_1 \cdot u_1 \in U$ $\quad u_2 \in U \Rightarrow k_2 \cdot u_2 \in U$ $\quad u_3 \in U \Rightarrow k_3 \cdot u_3 \in U$

laut (A) $k_1 \cdot u_1 \in U \wedge k_2 \cdot u_2 \in U \Rightarrow k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2 \in U$

$k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2 \in U \wedge k_3 \cdot u_3 \in U \Rightarrow k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2 + k_3 \cdot u_3 \in U$

3) (AH) $\Rightarrow$ (A) und (AH) $\Rightarrow$ (H)

Sei $v, v' \in V$ bel. Sei $k = 1_K \in K$.

laut (AH) $v \in U \wedge v' \in U \Rightarrow v + 1_K \cdot v' \in U$

$v + v' \in U$

$\iff$ (A)

Sei $v \in V$ bel. Sei $k \in K$ bel. $\Rightarrow k + (-1) \in K$

laut (AH) $v \in U \Rightarrow v + (k - 1) \cdot v \in U$

$k \cdot v \in U$

$\iff$ (H)

4) 2.3.7)...

$(N) \Rightarrow (N)_\emptyset$ klar und $(N)_\emptyset \wedge (H) \Rightarrow (N)$

Da $U \neq \emptyset$ muss $\exists v \in U$. $0_K$ muss $\in K$ sein, sonst $K$ kein Körper.

Laut (H) $v \in U \Rightarrow c \cdot v \in U$ mit $c = 0$ dann

$v \in U \Rightarrow 0 \cdot v \in U$, da $0 \cdot v = 0_V$ und $\exists v \in U$

$0_V \in U$

5) $K = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$ $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

offensichtlich $U \neq \emptyset$, aber nicht $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.

6) Gegenbsp für $(A) \Rightarrow (AH)$

$K = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$ $U = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \mid a_1 \geq 0 \wedge a_2 \geq 0 \right\}$

(A) gilt, da bei bel. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in U$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a_1 + b_1 \geq 0 \\ a_2 + b_2 \geq 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \in U$$

aber (AH) gilt nicht, da bei $k = -1$ und $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v \in U \wedge v' \in U \Rightarrow v + k \cdot v' \in U$

wahr $\wedge$ wahr $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in U$

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in U$ $\lightning$

7) $(N) \wedge (A) \wedge (H) \Rightarrow (N)_\emptyset \wedge (AH) \wedge (AH_2) \wedge (AH_3)$

$(N) \Rightarrow (N)_\emptyset$ $(A) \wedge (H) \Rightarrow (AH3)$

$(AH3) \Rightarrow (AH2)$ $(AH2) \Rightarrow (AH)$

$$\Rightarrow (N) \wedge (A) \wedge (H) \Rightarrow (N)_\emptyset \wedge (AH_3) \wedge (AH_2) \wedge (AH)$$