

ANA Ü5

8.) $M \neq \emptyset$

$$d: M \times M \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x=y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$... Folge in M

zz: M konvergiert gegen $x \iff M$ ab gewissem Index i konstant

$$M \text{ konvergent} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$M \text{ ab Index konstant} \iff \exists i > 0 \forall n \geq i: x_n = x_i$$

$$\overset{n}{\Rightarrow} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: d(x_n, x) < \frac{1}{2}$$

$$\text{aus Definition von } d \text{ folgt } \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: d(x_n, x) = 0$$

$$\iff \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: x_n = x$$

$$\iff \exists N > 0 \forall n \geq N: x_n = x$$

$$\Rightarrow M \text{ ist ab Index } i \text{ konstant}$$

$\overset{n}{\Leftarrow}$

$$\exists i > 0 \forall n \geq i: x_n = x_i \iff \exists i > 0 \forall n \geq i: d(x_n, x_i) = 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists i > 0 \forall n \geq i: d(x_n, x_i) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow M \text{ ist konvergent.}$$

