2.2.1 a) $\mathbb{R}^{2\times 1}$ $\quad ☆: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ $\quad x ☆ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

- $\forall c,d \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^{2\times 1}: (c+d) ☆ x = c ☆ x + d ☆ x$

$$(c+d) ☆ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c+d)\cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cdot a_1 + d\cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$c ☆ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + d ☆ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d\cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cdot a_1 + d\cdot a_1 \\ a_2 + a_2 \end{pmatrix}$$

Gegenbsp: $c=1 \quad d=1 \quad a_1=1 \quad a_2=1$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} c\cdot a_1 + d\cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c\cdot a_1 + d\cdot a_1 \\ a_2 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \neq$$

$\Rightarrow$ kein VR

b) $\mathbb{R}^{2\times 1}$ $\quad ☆: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ $\quad x ☆ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\forall x \in \mathbb{R}^{2\times 1}: 1 ☆ x = x$

$$1 ☆ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gegenbsp: $a_1 = 1 \quad a_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ kein VR

2.2.1 a) $\mathbb{R}^{2\times 1}$ $\quad \star : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$

$$x \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Frage: Ist $\mathbb{R}^{2\times 1}$ VR?

- $(\mathbb{R}^{2\times 1}, +)$ ist eine Gruppe

Sei $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ bel. Sei $c, d \in \mathbb{R}$ bel.

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 \\ a_2+b_2+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1+c_1 \\ b_2+c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a_1 \\ 0+a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1+a_1 \\ -a_2+a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

- $\forall c \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in \mathbb{R}^{2\times 1} : c \star (x+y) = c \star x + c \star y$

$$c \star \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = c \star \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot (a_1+b_1) \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 + c \cdot b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \cdot b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= c \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + c \star \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \checkmark$$

- $\forall c, d \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^{2\times 1} : (c+d) \star x = c \star x + d \star x$

$$(c+d) \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c+d) a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c a_1 + d \cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} ⚡$$

LINAG Ü4

2.2.1 ... $\cdot\ \forall c,d \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^{2\times 1} : (c\cdot d) \star x = c \star (d \star x)$

$$(c\cdot d) \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cdot d\cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = c \star \begin{pmatrix} d\cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = c \star \left(d \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) \checkmark$$

$\cdot\ \forall x \in \mathbb{R}^{2\times 1} : 1 \star x = x$

$$1 \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \checkmark \qquad \Rightarrow \text{kein VR}$$

b) $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$

$$x \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $(\mathbb{R}^{2\times 1}, +)$ Gruppe $\checkmark$ siehe oben
- $\forall c \in \mathbb{R}\ \forall x,y \in \mathbb{R}^{2\times 1} : c \star (x+y) = c \star x + c \star y$

$$c \star \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = c \star \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + c \star \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= \checkmark$

- $\forall c,d \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^{2\times 1} : (c+d) \star x = c \star x + d \star x$

$$(c+d) \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + d \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= \checkmark$

- $\forall c,d \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^{2\times 1} : (c\cdot d) \star x = c \star (d \star x)$

$$(c\cdot d) \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c \star \left(d \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = c \star \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= \checkmark$

- $\forall x \in \mathbb{R}^{2\times 1} : 1 \star x = x$

$$1 \star \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad ↯ \qquad \Rightarrow \text{kein VR}$$