2.4.6

Für welche $t \in \mathbb{Q}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$ l.u?

Für $t=0$ sind die Vektoren l.a., da

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ist.}$$

Sonst l.u, da

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 2 \\ 0 & t & 2t \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle -2\cdot\mathrm{II}} \\ \begin{pmatrix} t & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & t-2 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle \cdot t} \\ \begin{pmatrix} t & 0 & 2t \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & (t-2)\cdot t \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle -2\cdot\mathrm{I}} \\ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & t^2-2t-4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle \cdot(t^2-2t-4)^{-1}} \\ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} {\scriptstyle -\mathrm{III}} \\ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} {\scriptstyle \cdot(t)^{-1}} \\ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} {\scriptstyle -2\cdot\mathrm{III}} \\ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{l} {\scriptstyle \cdot(t)^{-1}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Division durch t erlaubt, da $t \neq 0$. Da man mit elementaren Spaltenumformungen die Einheitsmatrix erreichen kann (und keine Nullvektoren auftauchen) sind die Vektoren (für $t \neq 0$) l.u. $\square$