ANA Ü11

1.) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\qquad V_x^y(f) := l(f|_{[x,y]})$ mit $a \leq x \leq y \leq b$

i) f, g ... von beschränkter Variation (also rektifizierbar) $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

zz: $f+g$, $\lambda \cdot f$ sind von beschränkter Variation und

$$V_x^y(f+g) \leq V_x^y(f) + V_x^y(g) \quad \text{und} \quad V_x^y(\lambda \cdot f) = |\lambda| \cdot V_x^y(f)$$

- $l(f+g) = \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} L(Z) = \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} \|(f+g)(\xi_j) - (f+g)(\xi_{j-1})\|_2 \right)$

$= \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} \|f(\xi_j) - f(\xi_{j-1}) + g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})\|_2 \right) \leq \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} \|f(\xi_j) - f(\xi_{j-1})\|_2 + \right.$
$\left. \|g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})\|_2 \right) \leq \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} \|f(\xi_j) - f(\xi_{j-1})\|_2 \right) + \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} \|g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})\|_2 \right)$
$= l(f) + l(g) < \infty$

- gleiche Rechnung mit $f|_{[x,y]}$ und $g|_{[x,y]}$ ergibt: $V_x^y(f+g) \leq V_x^y(f) + V_x^y(g)$
- $l(\lambda \cdot f) = \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} \|(\lambda \cdot f)(\xi_j) - (\lambda \cdot f)(\xi_{j-1})\|_2 \right) = \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} \|\lambda \cdot (f(\xi_j) - f(\xi_{j-1}))\|_2 \right)$

$= \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} |\lambda| \cdot \|f(\xi_j) - f(\xi_{j-1})\|_2 \right) = |\lambda| \cdot \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} \|f(\xi_j) - f(\xi_{j-1})\|_2 \right) = |\lambda| \cdot l(f)$

- gleiche Rechnung mit $f|_{[x,y]}$ ergibt: $V_x^y(\lambda \cdot f) = |\lambda| \cdot V_x^y(f)$

ii) f ... monoton wachsend $\quad$ zz: $V_x^y(f) = f(y) - f(x)$

$V_x^y(f) = l(f|_{[x,y]}) = \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} \|f(\xi_j) - f(\xi_{j-1})\|_2 \right) = \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} |\underbrace{f(\xi_j) - f(\xi_{j-1})}_{\geq 0, \text{ da monoton wachsend}}| \right)$

$= \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(f(\xi_1) - f(x) + f(\xi_1) - f(\xi_2) + \ldots + f(y) - f(\xi_{n-1}) \right) = \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(f(y) - f(x) \right) = f(y) - f(x)$

iii) g, h ... monoton wachsende Funktionen $\quad f := g - h \quad$ zz: f ist von beschränkter Variation

$l(f) = \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} \|(g-h)(\xi_j) - (g-h)(\xi_{j-1})\|_2 \right) = \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} |g(\xi_j) - h(\xi_j) - g(\xi_{j-1}) + h(\xi_{j-1})| \right)$

$\leq \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} |g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})| + |-h(\xi_j) + h(\xi_{j-1})| \right) \leq \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} |g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})| \right) + \sup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n(Z)} |h(\xi_j) - h(\xi_{j-1})| \right)$

$= g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty$, wenn g und h von beschränkter Variation

Für $g(t) = \tan(t)$, $h(t) = 0$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ und $f(t) = g(t) - h(t) = \tan(t)$

ist zwar f Differenz monoton wachsender Funktionen (im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$), jedoch

ist $V_0^{\frac{\pi}{2}}(f) = \lim\limits_{y \to \frac{\pi}{2}} (f(y)) - f(0) = +\infty$ also nicht von beschränkter Variation. (da auch

g nicht von beschränkter Variation ist).

...

ANA Ü11

1) iv) ...

zz: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ... von beschränkter Variation $\Rightarrow \exists g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$, monoton wachsend:

$f=g-h$

Sei f bel.

$g(t):=V_a^t(f)$ offensichtlich ist g monoton wachsend

$f=g-h \Leftrightarrow h=g-f$: $h(t):=g(t)-f(t)=V_a^t(f)-f(t)$

Aus Punkt ii) folgt $h(t)=f(t)-f(a)-f(t)=f(a)$

$\Rightarrow h(t)$ ist konstant und damit monoton wachsend.

Nach der Konstruktion von g und h ist f die Differenz monoton wachsender Funktionen.

ANA Ü11

2.) $\gamma : [0, 2\pi] \to R^3$ $\qquad$ ges: $\int_\gamma ((x^2+5y+3yz)dx + (5x+3xz-2)dy + (3xy-4z)dz)$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix}$$

$\gamma \in C^1[0,2\pi]$ mit $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ und Φ ist stetig $\qquad$ Satz 11.2.5

$$\int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t)+5\cos(t)+3\cos(t)\cdot t \quad 5\sin(t)+3\sin(t)\cdot t-2 \quad 3\sin(t)\cos(t)-4t\right)\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cdot\cos(t)+5\cos^2(t)+3\cos^2(t)\cdot t-5\sin^2(t)-3\sin^2(t)\cdot t+2\sin(t)+3\sin(t)\cos(t)-4t \; dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\sin^2(t)\cdot\cos(t)dt + 5\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2(t)dt + 3\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\cdot t\,dt - 5\int_0^{2\pi}\sin^2(t)dt - 3\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\cdot t\,dt + 2\int_0^{2\pi}\sin(t)dt$$
$$+3\int_0^{2\pi}\sin(t)\cdot\cos(t)dt - 4\int_0^{2\pi} t\,dt$$

- $\int \sin^2(t)\cdot\cos(t)\,dt = \int u^2\cdot\cos(t)\cdot\frac{1}{\cos(t)}du \qquad [u=\sin(t) \quad \frac{du}{dt}=\cos(t) \quad dt=\frac{1}{\cos(t)}du$

  $= \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} = \frac{\sin^3(t)}{3} \qquad \Rightarrow \int_0^{2\pi}\sin^2(t)\cdot\cos(t)dt = 0$

- $\int\cos^2(t)dt = \int\frac{1}{2}(1+\cos(2t))dt = \frac{1}{2}\cdot(\int 1\,dt + \int\cos(2t)dt) = \frac{1}{2}(t+\int\cos(2t)dt)$

  $= \frac{1}{2}(t+\int\cos(u)\cdot\frac{1}{2}du) = \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\int\cos(u)du \qquad [u=2t \quad \frac{du}{dt}=2 \quad dt=\frac{1}{2}du$

  $= \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(u) = \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2t) \qquad \int_0^{2\pi}\cos^2(t)dt = \pi$

- $\int\cos^2(t)\cdot t\,dt = \int\frac{1}{2}(\cos(2t)+1)\cdot t\,dt = \frac{1}{2}(\int\cos(2t)\cdot t\,dt + \int t\,dt)$

  $= \frac{1}{2}(\int\cos(u)\cdot\frac{u}{2}\cdot\frac{1}{2}du + \frac{t^2}{2}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}\int\cos(u)\cdot u\,du + t^2) \qquad [u=2t \quad \frac{du}{dt}=2 \quad dt=\frac{1}{2}du$

  $= \frac{1}{4}(\frac{1}{2}u\cdot\sin(u) - \int\sin(u)du + t^2) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}\cdot 2t\cdot\sin(2t)+\cos(2t)+t^2) = \frac{1}{4}(\sin(2t)\cdot t+\cos(2t)+t^2)$

  $\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\cdot t\,dt = \frac{1}{8}+\pi^2-\frac{1}{8} = \pi^2$

- $\int\sin^2(t)dt = \int\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2t)dt = \frac{1}{2}\int 1\,dt - \frac{1}{2}\int\cos(2t)dt = \frac{1}{2}(t-\int\cos(u)\frac{1}{2}du) \qquad [u=2t \quad \frac{du}{dt}=2 \quad dt=\frac{1}{2}du$

  $= \frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin(u)) = \frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin(2t)) \qquad \int_0^{2\pi}\sin^2(t)dt = \pi$

- $\int\sin^2(t)\cdot t\,dt = \int\frac{1}{2}(1-\cos(2t))\cdot t\,dt = \frac{1}{2}(\int t\,dt - \int\cos(2t)\cdot t\,dt) = \frac{1}{2}(\frac{t^2}{2}-(\frac{1}{4}\cos(2t)+\frac{1}{2}t\sin(2t)))$

  $= \frac{t^2}{4}-\frac{1}{8}\cos(2t)-\frac{1}{4}t\sin(2t) \qquad \int_0^{2\pi}\sin^2(t)\cdot t\,dt = \pi^2$

- $\int\sin(t)\cdot\cos(t)dt = \int\sin(t)\,u\,(-\frac{1}{\sin(t)})du = -\int u\,du = -\frac{u^2}{2} \qquad [u=\cos(t) \quad \frac{du}{dt}=-\sin(t) \quad dt=-\frac{1}{\sin(t)}du$

  $= -\frac{\cos^2(t)}{2} \qquad \int_0^{2\pi}\sin(t)\cdot\cos(t)\,dt = 0$

$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\ldots\,dt = 0+5\pi+3\cdot\pi^2-5\pi-3\pi^2+2\cdot 0+3\cdot 0-4\cdot 2\pi^2 = -8\pi^2$

ANA Ü11

3.) $\gamma:[0,1]\to D \quad \gamma(t)=t\cdot x_1+(1-t)x_0$ (also gerade Strecke) $\quad \Phi: D\to L_b(\mathbb{R}^n,X)$ ... stetig

zz: $$\int_\gamma \Phi(x)\,dx = \underbrace{\left(\int_0^1 \Phi(t\cdot x_1+(1-t)x_0)\,dt\right)}_{\in L_b(\mathbb{R}^n,X)}(x_1-x_0)$$

Offensichtlich ist $\gamma\in C^1[0,1]$. Nach Satz 11.2.5 gilt nun:

$$\int_\gamma \Phi(x)\,dx = \int_0^1 \Phi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \qquad \gamma'(t)=(t\cdot x_1+x_0-t\cdot x_0)'=x_1-x_0$$

$$=\int_0^1 \Phi(t\cdot x_1+(1-t)x_0)\cdot(x_1-x_0)\,dt = \int_0^1 \Phi(t\cdot x_1+(1-t)x_0)\,dt\,(x_1-x_0)$$

oder alternativ:

$$\int_\gamma \Phi(x)\,dx = \lim_{|R|\to 0}\sum_{j=1}^{n(R)} \Phi(\gamma(\alpha_j))(\gamma(\xi_j)-\gamma(\xi_{j-1}))$$

$$=\lim_{|R|\to 0}\sum_{j=1}^{n(R)} \Phi(\alpha_j\cdot x_1+(1-\alpha_j)x_0)\,(\xi_j\cdot x_1+(1-\xi_j)x_0-(\xi_{j-1}\cdot x_1+(1-\xi_{j-1})\cdot x_0)$$

$$=\lim_{|R|\to 0}\sum_{j=1}^{n(R)} \Phi(\alpha_j x_1+(1-\alpha_j)x_0)(\xi_j\cdot x_1+\cancel{x_0}-\xi_j x_0-\xi_{j-1}\cdot x_1-\cancel{x_0}+\xi_{j-1}\cdot x_0)$$

$$=\lim_{|R|\to 0}\sum_{j=1}^{n(R)} \Phi(\alpha_j x_1+(1-\alpha_j)x_0)\cdot\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} x_1-x_0\,dt = \lim_{|R|\to 0}\sum_{j=1}^{n(R)}\left(\Phi(\alpha_j\cdot x_1+(1-\alpha_j)x_0\cdot\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}1\,dt\right)(x_1-x_0)$$

$$=\left(\int_0^1 \Phi(t\cdot x_1+(1-t)x_0)\cdot 1\,dt\right)(x_1-x_0) = \left(\int_0^1 \Phi(t\cdot x_1+(1-t)x_0\,dt\right)(x_1-x_0)$$

Buch Seite 372

ANA Ü11

4.) $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ $\quad$ $\Phi: \mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

$t \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ t \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ x & y \end{pmatrix}$

ges: $\int_\gamma \Phi(x)\, dx$

$\tilde{\gamma}: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist zu γ äquivalent, da für $\alpha(t) = \sqrt{t}$ $\tilde{\gamma} \circ \alpha = \gamma$ und α monoton

$t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ wachsend und bijektiv ist.

$\Rightarrow \int_\gamma \Phi(x)\, dx = \int_{\tilde{\gamma}} \Phi(x)\, dx$

Da $\tilde{\gamma}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar und Φ stetig ist folgt

$\int_{\tilde{\gamma}} \Phi(x)\, dx = \int_0^1 \Phi(\tilde{\gamma}(t))\, \tilde{\gamma}'(t)\, dt$

$\tilde{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

$\int_{\tilde{\gamma}} \Phi(x)dx = \int_0^1 \Phi\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} e^t & e^{(t^2)} \\ t & t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} e^t + 2t \cdot e^{(t^2)} \\ t + 2t^3 \end{pmatrix} dt$

$\int e^t + 2 \cdot t \cdot e^{t^2}\, dt = e^t + 2 \cdot \int t \cdot e^{t^2}\, dt$ $\quad$ $u = t^2 \quad \frac{du}{dt} = 2t \quad dt = \frac{1}{2t} \cdot du$

$= e^t + \cancel{2} \int \cancel{t} \cdot e^u \cdot \frac{1}{\cancel{2t}}\, du = e^t + e^u = e^t + e^{t^2}$

$\int t + 2t^3\, dt = \int t\, dt + 2 \int t^3\, dt = \frac{1}{2} t^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} t^4 = \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} t^4$

$\Rightarrow \int_\gamma \Phi(x) dx = \begin{pmatrix} e^1 + e^{(1^2)} - e^0 - e^{(0^2)} \\ \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e - 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ANA Ü11

5) $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ $\quad l(\gamma)<\infty$ $\quad \rho(t)$ ... Dichte an der Stelle t

Gesamtmasse $M=\int_a^b \rho \, dl$ mit $l(x)=l(\gamma|_{[a,x]})$

Schwerpunkt $S=\frac{1}{M}\int_a^b f \, dl$ mit $f:[a,b]\to L(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ $\quad t\mapsto \rho(t)\gamma(t)$

$\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ $\quad t\mapsto \begin{pmatrix} t\\ t^2\end{pmatrix}$ $\quad \rho(t)=1$

ges: Gesamtmasse und Schwerpunkt

$\gamma'(t)=\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}$ ...stetig $\Rightarrow \gamma\in C^1[0,1]$ nach Satz 11.1.8. gilt

$l(x)=l(\gamma|_{[a,x]}) = \int_a^x \|\gamma'(x)\|_2 \, dx = \int_0^x \left\|\begin{pmatrix}1\\2x\end{pmatrix}\right\|_2 dx = \int_0^x \sqrt{1+4x^2}\, dx$

$=\int_0^x \sqrt{1+u^2}\cdot\frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\int_0^x\sqrt{1+u^2}\, du$ $\quad [u=2x \quad \frac{du}{dx}=2 \quad dx=\frac{1}{2}du$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+1}\cdot u+\sinh^{-1}(u)\right)\Big|_0^x\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{4x^2+1}\cdot 2x+\sinh^{-1}(2x)\right)\Big|_0^x$

$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{4x^2+1}\, 2x+\sinh^{-1}(2x)\right)$

$\rho\in C[0,1]$ $\Rightarrow$ laut Satz 11.2.5 gilt nun

$\int_0^1\rho \, dl = \int_0^1 \rho(t)\cdot l'(t)\, dt = \int_0^1 \left(\int_0^x \|\gamma'(x\|_2 dx\right)' dt = \int_0^1 \|\gamma'(x)\|_2 \, dx$

$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{4+1}\cdot 2+\sinh^{-1}(2)\right)\approx 1,4789$ ... Gesamtmasse

---

$f(t)=\gamma(t)=\begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix}$ ...stetig nach Satz 11.1.8. gilt

$S=\frac{1}{M}\int_0^1 f \, dl = \frac{1}{M}\int_0^1 f(t)\cdot l'(t)\, dt = \frac{1}{M}\int_0^1 f(t)\cdot\left(\int_0^x\|\gamma'(x)\|_2 dx\right)' dt = \frac{1}{M}\int_0^1 f(t)\cdot\|\gamma'(t)\|_2 \, dt$

$=\frac{1}{M}\int_0^1 \begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix}\sqrt{1+4t^2}\, dt = \frac{1}{M}\int_0^1\begin{pmatrix}t\cdot\sqrt{1+4t^2}\\t^2\cdot\sqrt{1+4t^2}\end{pmatrix}dt$

- $\int t\cdot\sqrt{1+4t^2}\, dt = \int t\cdot\sqrt{1+u}\cdot\frac{1}{8t}\, du$ $\quad [u=4t^2 \quad \frac{du}{dt}=8t \quad dt=\frac{1}{8t}du$

$=\frac{1}{8}\int\sqrt{1+u}\, du = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(u+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{12}(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}$ $\Rightarrow \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\, dt=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$

- $\int_0^1 t^2\sqrt{1+4t^2}\, dt = \frac{1}{64}(18\sqrt{5}-\sinh^{-1}(2))$ (mit Wolfram Alpha gerechnet, da sehr mühsam)

$\Rightarrow S=\frac{1}{\frac{1}{4}(\sqrt{5}\cdot 2+\sinh^{-1}(2))}\begin{pmatrix}\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)\\ \frac{1}{64}(18\sqrt{5}-\sinh^{-1}(2))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5\sqrt{5}-1}{3(2\sqrt{5}+\sinh^{-1}(2))}\\ \frac{18\sqrt{5}-\sinh^{-1}(2)}{16(2\sqrt{5}+\sinh^{-1}(2))}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0,57363\\0,40998\end{pmatrix}$

ANA Ü11

6.) $p \in \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{R}^p \setminus K_r(0)$ $\quad r > 0$ $\quad (\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_{1,2 \text{ oder } \infty})$

Für welche p ist $\mathbb{R}^p \setminus K_r(0)$ ein Gebiet?

$p = 1$: $\quad \mathbb{R} \setminus K_r(0) = (-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$:

Offensichtlich ist $\mathbb{R} \setminus K_r(0)$ offen, aber nicht zusammenhängend

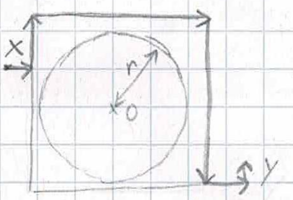
$\Rightarrow \mathbb{R}^1 \setminus K_r(0)$ ist kein Gebiet

$p > 1$: $\quad \mathbb{R}^p \setminus K_r(0)$

offen: Da $K_r(0)$ abgeschlossen ist, ist $\mathbb{R}^p \setminus K_r(0)$ offen.

zusammenhängend: Nach Lemma 11.3.3. ist zusammenhängend äquivalent zu je zwei Punkte aus $\mathbb{R}^p \setminus K_r(0)$ sind durch einen achsenparallelen Polygonzug in D verbindbar.

Sei $x, y \in \mathbb{R}^p \setminus K_r(0)$ bel. $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ $\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$



$$a_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}(x_1)(r+1) \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}(x_1)(r+1) \\ \mathrm{sgn}(x_2)(r+1) \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \dots$$

$$a_p = \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}(x_1)(r+1) \\ \mathrm{sgn}(x_2)(r+1) \\ \vdots \\ \mathrm{sgn}(x_p)(r+1) \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}(y_1)(r+1) \\ \mathrm{sgn}(x_2)(r+1) \\ \vdots \\ \mathrm{sgn}(x_p)(r+1) \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}(y_1)(r+1) \\ \mathrm{sgn}(y_2)(r+1) \\ \mathrm{sgn}(x_3)(r+1) \\ \vdots \\ \mathrm{sgn}(x_p)(r+1) \end{pmatrix} \quad \dots \quad b_p = \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}(y_1)(r+1) \\ \mathrm{sgn}(y_2)(r+1) \\ \vdots \\ \mathrm{sgn}(y_p)(r+1) \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \mathrm{sgn}(y_2)(r+1) \\ \vdots \\ \mathrm{sgn}(y_p)(r+1) \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \mathrm{sgn}(y_3)(r+1) \\ \vdots \\ \mathrm{sgn}(y_p)(r+1) \end{pmatrix} \quad \dots \quad c_p = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = y$$

$\Rightarrow \overrightarrow{x a_1}, \overrightarrow{a_1 a_2}, \dots, \overrightarrow{a_p b_1}, \overrightarrow{b_1 b_2}, \dots, \overrightarrow{b_p c_1}, \overrightarrow{c_1 c_2}, \dots, \overrightarrow{c_{p-1} y}$ ist ein achsenparalleler Polygonzug von x nach y der nicht durch $K_r(0)$ geht.

ANA ÜM

7.) $\Phi: \mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1\times 3}$ Ist Φ ein Gradientenfeld?

Falls ja berechne man die Stammfunktion.

i) $\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (a+c\,,\,a+b+c, a+c)$

$\frac{\partial}{\partial a}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (1,1,1)$ $\quad \frac{\partial}{\partial b}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (0,1,0)$ $\quad \frac{\partial}{\partial c}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (1,1,1)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial a}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e_2 \neq \frac{\partial}{\partial b}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e_1$ $\Rightarrow \Phi$ ist kein Gradientenfeld

ii) $\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (2a\,,\,2b\,,\,0)$

$\frac{\partial}{\partial a}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (2,0,0)$ $\quad \frac{\partial}{\partial b}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (0,2,0)$ $\quad \frac{\partial}{\partial c}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (0,0,0)$

$\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}e_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\Phi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}e_i \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}$

$\Rightarrow$ aus Satz 11.4.14 folgt Φ ist ein Gradientenfeld

$\frac{\partial f}{\partial a}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 2a$ $\quad \frac{\partial f}{\partial b}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 2b$ $\quad \frac{\partial f}{\partial c}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0$

$f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \int 2a \, da + c(b,c) = 2\cdot\frac{1}{2}a^2 + c(b,c) = a^2 + c(b,c)$

$\frac{\partial}{\partial b}a^2 + c(b,c) = c'(b,c) = \frac{\partial f}{\partial b}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 2b$ $\quad \Rightarrow c'(b,c) = 2b \quad \Rightarrow c(b,c) = b^2 + c(c)$

$\Rightarrow f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c(c)$ $\quad \frac{\partial}{\partial c}a^2 + b^2 + c(c) = c'(c) = \frac{\partial f}{\partial c}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow c'(c) = 0 \quad \Rightarrow c(c) = d$ $\quad \rightarrow f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = a^2 + b^2 + d \quad d \in \mathbb{R}$

iii) $\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (b\cdot c, a\cdot c, a^2)$

$\frac{\partial}{\partial a}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (0,c,2a)$ $\quad \frac{\partial}{\partial b}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (c,0,0)$ $\quad \frac{\partial}{\partial c}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (b,a,0)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial a}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e_3 \neq \frac{\partial}{\partial c}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e_1$ $\Rightarrow \Phi$ ist kein Gradientenfeld

ANA Ü 11

8.) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : b > 0 , c > 0 \right\}$ $\quad K: G \longrightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1\times 3}$

$\beta \in \mathbb{R}$ $\quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \left(\ln(b\cdot c), \frac{a}{b}, \beta\cdot\frac{a}{c}\right)$

Für welche β ist K ein Gradientenfeld?

$\frac{\partial}{\partial a} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \left(0, \frac{1}{b}, \beta\cdot\frac{1}{c}\right)$ $\quad \frac{\partial}{\partial b} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{b\cdot c}\cdot c, a\cdot(-1)\cdot\frac{1}{b^2}, 0\right) = \left(\frac{1}{b}, -\frac{a}{b^2}, 0\right)$

$\frac{\partial}{\partial c} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{b\cdot c}\cdot b, 0, \beta\cdot a\cdot(-1)\cdot\frac{1}{c^2}\right) = \left(\frac{1}{c}, 0, -\beta\cdot\frac{a}{c^2}\right)$

$\frac{\partial}{\partial a} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e_2 = \frac{1}{b}$ $\quad \frac{\partial}{\partial b} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e_1 = \frac{1}{b}$ $\quad \frac{\partial}{\partial a} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e_3 = \beta\cdot\frac{1}{c}$ $\quad \frac{\partial}{\partial c} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e_1 = \frac{1}{c}$

$\frac{\partial}{\partial b} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e_3 = 0$ $\quad \frac{\partial}{\partial c} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e_2 = 0$ $\quad \Rightarrow$ für $\beta = 1$ ist K ein Gradientenfeld

(offensichtlich ist $G = (-\infty, +\infty)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)$)

$\gamma(t) = t\cdot\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} + (1-t)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ ges: $\int_\gamma K(x)\,dx$ $\quad$ für $\beta = 1$

Offensichtlich ist γ sssd. Da K ein Gradientenfeld ist (mit Stammfunktion f) ist

$\int_\gamma K(x)\,dx = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$

$\frac{\partial f}{\partial a}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \ln(b\cdot c)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial b}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{b}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial c}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{c}$

$\Rightarrow f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \int \ln(b\cdot c)\,da = \ln(b\cdot c)\cdot a + c(b,c)$

$\frac{\partial}{\partial b} \ln(b\cdot c)\cdot a + c(b,c) = a\cdot\frac{1}{b\cdot c}\cdot c + c'(b,c) = \frac{a}{b} + c'(b,c) = \frac{\partial f}{\partial b}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow c'(b,c) = 0$ $\quad \Rightarrow c(b,c) = c(c)$ $\quad \Rightarrow f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\cdot\ln(b\cdot c) + c(c)$

$\frac{\partial}{\partial c} a\cdot\ln(bc) + c(c) = a\cdot\frac{1}{b\cdot c}\cdot b + c'(c) = \frac{a}{c} + c'(c) = \frac{\partial f}{\partial c}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{c}$

$\Rightarrow c'(c) = 0$ $\quad \Rightarrow c(c) = 0$ $\quad \Rightarrow f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\cdot\ln(b\cdot c)$

$\Rightarrow \int_\gamma K(x)\,dx = f\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_0\cdot\ln(b_0\cdot c_0) - 0\cdot\ln(1) = a_0\cdot\ln(b_0\cdot c_0)$

$\beta = 2$: $\quad$ K ist auf G stetig $\quad \gamma \in C^1[0,1]$ mit $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nach Satz 11.2.5 gilt nun

$\int_\gamma K(x)\,dx = \int_0^1 K(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \left(\ln((t\cdot b_0 + 1 - t)\cdot(t\cdot c_0 + 1 - t)), \frac{t\cdot a_0}{t\cdot b_0 + 1 - t}, 2\cdot\frac{t\cdot a_0}{t\cdot c_0 + 1 - t}\right)\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 - 1 \\ c_0 - 1 \end{pmatrix} dt$

$= \int_0^1 a_0\cdot\ln(b_0\cdot c_0\cdot t^2 + b_0\cdot t - b_0\cdot t^2 + c_0\cdot t + 1 - t - c_0\cdot t^2 - t + t^2) + (b_0 - 1)\frac{t\cdot a_0}{t\cdot b_0 + 1 - t} + 2\cdot(c_0 - 1)\frac{t\cdot a_0}{t\cdot c_0 + 1 - t}\,dt$

$= a_0\cdot\left(\int_0^1 \ln(t\cdot b_0 + 1 - t)\,dt + \int_0^1 \ln(t\cdot c_0 + 1 - t)\,dt\right) + a_0\cdot(b_0 - 1)\cdot\int_0^1 \frac{t}{t\cdot b_0 + 1 - t}\,dt + 2(c_0 - 1)\cdot a_0\cdot\int_0^1 \frac{t}{t\cdot c_0 + 1 - t}\,dt$

...

ANA Ü11

8.) ...

$$\int \ln(t\cdot b_0 + 1 - t)\,dt = \int \ln(t\cdot(b_0-1)+1)\,dt \qquad u = t\cdot(b_0-1) \quad \frac{du}{dt} = (b_0-1) \quad dt = \frac{1}{b_0-1}\,du$$

$$= \int \ln(u+1)\,\frac{1}{b_0-1}\,du = \frac{1}{b_0-1}\int \ln(u+1)\,du \qquad s = u+1 \quad \frac{ds}{du} = 1 \quad du = ds$$

$$= \frac{1}{b_0-1}\int \ln(s)\,ds = \frac{1}{b_0-1}\, s(\ln(s)-1) = \frac{1}{b_0-1}(u+1)(\ln(u+1)-1)$$

$$= \frac{1}{b_0-1}(t\cdot(b_0-1)+1)(\ln(t\cdot(b_0-1)+1)-1)$$

$$\int_0^1 \ln(t\cdot b_0+1-t)\,dt = \frac{1}{b_0-1}(b_0-1+1)(\ln(b_0-1+1)-1) - \left(\frac{1}{b_0-1}(0+1)(\ln(1)-1)\right)$$

$$= \frac{1}{b_0-1}\, b_0(\ln(b_0)-1) + \frac{1}{b_0-1} = \frac{b_0\ln(b_0) - b_0 + 1}{b_0-1}$$

$$\int \frac{t}{t\cdot b_0+1-t}\,dt = \int \frac{1}{(1-b_0)(b_0t-t+1)} + \frac{1}{b_0-1}\,dt = \frac{1}{1-b_0}\int \frac{1}{b_0t-t+1}\,dt + \frac{1}{b_0-1}\int 1\,dt$$

$$= \frac{1}{1-b_0}\int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{b_0-1}\,du + \frac{1}{b_0-1}\,t \qquad [\, u = b_0t-t+1 \quad \frac{du}{dt} = b_0-1 \quad dt = \frac{1}{b_0-1}\,du$$

$$= \frac{1}{(1-b_0)(b_0-1)}\int \frac{1}{u}\,du + \frac{1}{b_0-1}\,t = \frac{1}{(1-b_0)(b_0-1)}\ln(b_0t-t+1) + \frac{1}{b_0-1}\,t$$

$$= -\frac{\ln(b_0t-t+1)+t(b_0-1)}{(b_0-1)^2} = \frac{t(b_0-1)-\ln(b_0t-t+1)}{(b_0-1)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{t}{t\cdot b_0+1-t}\,dt = \frac{(b_0-1)-\ln(b_0)}{(b_0-1)^2} - \frac{-\ln(1)}{(b_0-1)^2} = \frac{(b_0-1)-\ln(b_0)}{(b_0-1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ldots\ldots\,dt = a_0\left(\frac{b_0\ln(b_0)-b_0+1}{b_0-1} + \frac{c_0\ln(c_0)-c_0+1}{c_0-1}\right) + a_0(b_0-1)\,\frac{(b_0-1)-\ln(b_0)}{(b_0-1)^2} +$$
$$2(c_0-1)\,a_0\,\frac{(c_0-1)-\ln(c_0)}{(c_0-1)^2}$$

$$= a_0\left(\frac{b_0\ln(b_0)-b_0+1}{b_0-1} + \frac{c_0\ln(c_0)-c_0+1}{c_0-1}\right) + a_0\,\frac{(b_0-1)-\ln(b_0)}{(b_0-1)} + 2a_0\,\frac{(c_0-1)-\ln(c_0)}{(c_0-1)}$$

Falls $b_0 = 1 \wedge c_0 = 1$: $\int_0^1 \ln(t+1-t) = \int_0^1 \ln(1)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$

$$\int_0^1 \frac{t}{t+1-t}\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ldots\ldots\,dt = a_0(0+0) + a_0\underbrace{(b_0-1)}_{=0}\cdot\frac{1}{2} + 2\underbrace{(c_0-1)}_{=0}\cdot a_0\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Falls $b_0 = 1 \wedge c_0 \neq 1$ oder $b_0 \neq 1 \wedge c_0 = 1$:

$$\Rightarrow \int_0^1 \ldots\ldots\,dt = a_0\left(0 + \frac{c_0\ln(c_0)-c_0+1}{c_0-1}\right) + a_0\underbrace{(b_0-1)}_{=0}\cdot\ldots + 2(c_0-1)a_0\,\frac{(c_0-1)\ln(c_0)}{(c_0-1)^2}$$

$$= a_0\,\frac{c\ln(c_0)-c_0+1}{(c_0-1)} + 2a_0\,\frac{(c_0-1)\ln(c_0)}{(c_0-1)}$$

oder

$$\int_0^1 \ldots\,dt = a_0\,\frac{b_0\ln(b_0)-b_0+1}{b_0-1} + a_0(b_0-1)\cdot\frac{(b_0-1)-\ln(b_0)}{(b_0-1)^2} = a_0\,\frac{b_0\ln(b_0)-b_0+1}{b_0-1} + a_0\,\frac{(b_0-1)-\ln(b_0)}{b_0-1}$$