LINAG Ü9

3.4.2. $f_1 = \sin$ $f_2 = \cos$ $f_3 = 1$ $g = 5 + 4\cdot\sin(x) + 2\cdot\cos(x)$

$U = [\{f_1, f_2, f_3\}]$

a) zz: $B = (f_1, f_2, f_3)$ ist eine Basis von U

- B ist trivialerweise ein Erzeugungssystem von U
- Aus einem anderen Beispiel wissen wir sin und cos sind l.u., d.h. wir müssen nur mehr zeigen $\forall k, l \in \mathbb{R}: k\cdot\sin(x) + l\cdot\cos(x) \neq 1$

$k\cdot\sin(0) + l\cdot\cos(0) = l \Rightarrow l = 1$

$k\cdot\sin(\frac{\pi}{2}) + l\cdot\cos(\frac{\pi}{2}) = k \Rightarrow k = 1$

$\sin(\pi) + \cos(\pi) = -1 \neq 1 \Rightarrow f_1, f_2, f_3$ l.u.

(andere Richtung ist trivial)

b) Sei $k, l, m \in \mathbb{R}$ bel.

$\frac{d}{dx}\, k\cdot\sin(x) + l\cdot\cos(x) + m = k\cdot\cos(x) - l\cdot\sin(x) + 1 \in U$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}$ bildet U in U ab

c) $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -l & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} \cdot(k^{-1}) & \cdot(l^{-1}) & (\cdot m^{-1}) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Matrix $= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$g = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\frac{d}{dx} g = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$