LINAG Ü9

3.6.3 $\quad V \ldots$ Vektorraum $\quad f \in L(V,V) \quad \exists k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}: f^k = 0 \cdot id_V$

a) $\quad g := id_V - f \quad$ zz: $g \ldots$ bijektiv mit $g^{-1} = id_V + f + f^2 + \ldots + f^{k-1}$

$$(id_V - f) \circ (id_V + f + f^2 + \ldots + f^{k-1})(x) = id_V((id_V + f + f^2 + \ldots + f^{k-1})(x)) -$$
$$f((id_V + f + f^2 + \ldots + f^{k-1})(x)) = id_V(x) + f(x) + f^2(x) + \ldots + f^{k-1}(x) - f(id_V(x) + f(x) +$$
$$f^2(x) + \ldots + f^{k-1}(x)) = x + f(x) + f^2(x) + \ldots + f^{k-1}(x) - f(x) + f(f(x)) + f(f^2(x)) +$$
$$+ \ldots + f(f^{k-1}(x)) = x + f(x) + f^2(x) + \ldots + f^{k-1}(x) - (f(x) + f^2(x) + f^3(x) + \ldots +$$
$$f^k(x)) = x - f^k(x) = x - 0 \cdot id_V(x) = x = id_V(x)$$

$\Rightarrow g$ ist bijektiv und g^{-1} ist inverse Funktion zu g

b) Aussage in "Matrixform"

$F \ldots$ Matrix der linearen Abbildung $f \quad \exists k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}: F^k = 0$ - Matrix

$$F^k = \underbrace{F \cdot F \cdot F \cdot \ldots \cdot F}_{k\text{-Mal}}$$

$G = E_V - F$

Behauptung: $G \ldots$ regulär und $G^{-1} = E_V + F + F^2 + \ldots + F^{k-1}$

γ)

$$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&6\\0&1&2&3&5\\0&0&1&2&4\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&1\\ \hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overset{-2I\ -3I\ -4I\ -6I}{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\0&1&2&3&5\\0&0&1&2&4\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&1\\ \hline 1&-2&-3&-4&-6\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1 \end{pmatrix}} \rightsquigarrow \overset{-2II\ -3II\ -5II}{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&2&4\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&1\\ \hline 1&-2&1&2&4\\0&1&-2&-3&-5\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1 \end{pmatrix}} \rightsquigarrow \overset{-2III\ -4III}{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&1\\ \hline 1&-2&1&0&0\\0&1&-2&1&3\\0&0&1&-2&-4\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1 \end{pmatrix}} \rightsquigarrow \overset{-3IV}{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\ \hline 1&-2&1&0&0\\0&1&-2&1&0\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&1 \end{pmatrix}}$$

$$\text{Inverse Matrix} = \begin{pmatrix} 1&-2&1&0&0\\0&1&-2&1&0\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$