LINAG Ü7

2.8.7 $V \ldots$ Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$

$U_1, U_2, \ldots, U_r \ldots$ Unterräume von V mit $U_1 + U_2 + \ldots + U_r = V$

zz: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_r \iff \dim U_1 + \dim U_2 + \ldots + \dim U_r = n$

$\Rightarrow$ Da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist $\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$.

($U_1 \cap U_2 = \emptyset$, daher $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$).

$U_a := U_1 \oplus U_2$ Aus 2.26. im Buch folgt U_a ist UR von V.

Da $U_a \cap U_3 = \emptyset$ ist $\dim(U_a \oplus U_3) = \dim(U_a) + \dim(U_3)$.

... (gleich bis U_r)

Also ist $\dim(U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_r) = \dim(U_1) + \dim(U_2) + \ldots + \dim(U_r)$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \\ \dim(V) = n \end{array}$$

$\Leftarrow$ Aus dem Dimensionssatz folgt: Wenn $\dim(U) + \dim(T) = \dim(U+T)$, dann ist $\dim(U \cap T) = 0 \Rightarrow U \cap T = \emptyset$. Weiters folgt, dass $\dim(U+T) \leq \dim(U) + \dim(T)$ sein muss.

Angenommen die Summe zw. U_n und U_m ist nicht direkt. $\Rightarrow \exists v \in V: v \in U_n \cap U_m$

$\Rightarrow \dim(U_n \cap U_m) > 1$

$\Rightarrow \dim(U_n + U_m) < \dim(U_n) + \dim(U_m)$

$\Rightarrow \dim(U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots + U_m + \ldots + U_r) < \dim(U_1) + \dim(U_2) + \ldots + \dim(U_n) + \ldots$

$\ldots + \dim(U_m) + \ldots + \dim(U_r) = n$

$\iff \dim\left(\sum_{i=0}^{n} U_i\right) < n$ $\Rightarrow$ Basis von $\sum_{i=0}^{n} U_i$ spannt nicht ganz V auf $\lightning$

$\square$