ALG Ü7

169+171)

4) zz: Die inneren Automorphismen bilden einen Normalteiler $\Phi(G) \trianglelefteq Aut(G)$ der Automorphismengruppe von G

Def Innerer Automorphismus $\Phi: G \to Aut(G)$, $g \mapsto (\pi_g: G \to G,\ x \mapsto gxg^{-1})$

Von 2. wissen wir, dass $\forall g \in G: \Phi(g) = \pi_g \in Aut(G)$. $\Rightarrow \Phi(G) \subseteq Aut(G)$

Von 1. wissen wir, dass $\forall g,h \in G: \Phi(g) \circ \Phi(h) = \Phi(g \cdot h)$ also ist $\Phi(G)$ unter $\circ$ und $^{-1}$ abgeschlossen ($\Phi(e) = id$) $\Rightarrow \Phi(G) \leq Aut(G)$

Sei $\varphi \in Aut(G)$ bel. Sei $g \in G$ bel. zz: $\exists g' \in G: \varphi \circ \Phi(g) = \Phi(g') \circ \varphi$

$(\varphi \circ \Phi(g))(x) = \varphi(gxg^{-1}) \overset{*}{=} \varphi(g) \cdot \varphi(x) \cdot \varphi(g^{-1}) \overset{*}{=} \varphi(g) \cdot \varphi(x) \cdot \varphi(g)^{-1} = (\Phi(\varphi(g)) \circ \varphi)(x)$

zz: $\exists g' \in G: \Phi(g) \circ \varphi = \varphi \circ \Phi(g')$ Da φ bijektiv ist gilt $\exists g': g = \varphi(g')$

$(\Phi(g) \circ \varphi)(x) = g\,\varphi(x)\,g^{-1} = \varphi(g') \cdot \varphi(x) \cdot \varphi(g')^{-1} \overset{*}{=} \varphi(g' x g'^{-1}) = (\varphi \circ \Phi(g'))(x)$

*, da φ ein Homomorphismus ist $\Rightarrow \Phi(G) \trianglelefteq Aut(G)$

1) X ... Menge $G := S_X$ ... symmetrische Gruppe auf X $|X| \geq 3$

zz: Zentrum von G ist trivial: $Z(S_X) = \{id_X\}$

Def $Z(S_X) := \{g \in S_X : \forall h \in S_X : gh = hg\}$

$id_X \in Z(S_X)$, da $\forall h \in S_X: id \circ h = h = h \circ id$

Sei $g \in S_X \setminus \{id\}$ bel. $\Rightarrow \exists x,y \in X, x \neq y: g(x) = y$ $\exists z \in X \setminus \{x,y\}$

$h: G \to G$ $x \mapsto z$ $z \mapsto x$ $a \mapsto a$ sonst

$\Rightarrow h \circ g(x) = h(y) = y$ $g \circ h(x) = g(z) \neq y$, da g injektiv ist

$\Rightarrow h \circ g \neq g \circ h \Rightarrow g \notin Z(S_X)$ $\Rightarrow Z(S_X) = \{id_X\}$

zz: $\Phi: G \to Aut(G)$ ... isomorphe Einbettung

Φ... Homomorphismus bereits oben gezeigt

Φ... injektiv, da Sei $g \in G$ mit $\pi_g = id$ bel. $\Rightarrow \forall x \in G: x = gxg^{-1}$

$\Rightarrow \forall x \in G: xg = gx \Rightarrow g \in Z(G) \Rightarrow g = e$

$\Rightarrow \Phi$... isomorphe Einbettung von G nach den inneren Automorphismen $\square$

$\Rightarrow K'$ ... [illegible]

(2) zz: $\forall K''$ ... [illegible]

Sei $p, q \in R$, $q = 0$ [illegible]

$q \neq 0$. $\Rightarrow p \cdot q^{-1} \in K''$, [illegible]

(3) K ... Quotientenkörper von R [illegible]

$\Leftarrow$ K ... kommutativer Ring mit 1: [illegible]

$\iota : R \to K$ ... isomorphe Einbettung [illegible]

$\forall r \in R \setminus \{0\}: \ \iota(r)^{-1} \in K$

Sei Q' ... kommutativer Ring mit 1; $\iota' : R \to Q'$; [illegible]

$\varphi \circ \iota(r) = \varphi\left(\frac{r}{1}\right) := \iota'(r)$ $\qquad \varphi\left(\frac{q}{q}\right) := \iota'(q)$ [illegible]

$\varphi\left(\frac{a}{b}\right) + \varphi\left(\frac{c}{d}\right) = \iota'(a)\iota'(b)^{-1} + \iota'(c)\iota'(d)^{-1}$

$$\varphi\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \varphi\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = \iota'(ad+bc)\iota'(bd)^{-1} = (\iota'(a)\iota'(d) + \iota'(b)\iota'(c))(\iota'(d)^{-1}\iota'(b)^{-1})$$

$$= \iota'(a)\iota'(b)^{-1} + \iota'(c)\iota'(d)^{-1}$$

$\varphi\left(\frac{a}{b}\right)\varphi\left(\frac{c}{d}\right) = \iota'(a)\iota'(b)^{-1}\iota'(c)\iota'(d)^{-1} = \iota'(ac)\iota'(bd)^{-1} = \varphi\left(\frac{ac}{bd}\right)$

$\varphi\left(-\frac{a}{b}\right) = \iota'(-a)\iota'(b)^{-1} = -\iota'(a)\iota'(b)^{-1} = -\varphi\left(\frac{a}{b}\right)$; $\varphi\left(\frac{a}{b}^{-1}\right) = \iota'(b)\iota'(a)^{-1} = \varphi\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$

Sei $\frac{a}{b} \in K'$ mit $\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ bel. $\Rightarrow \varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \iota'(a)\iota'(b)^{-1}$, da $b \neq 0 \Rightarrow \iota'(b) \neq 0$

$\Rightarrow \iota'(a)\iota'(b)^{-1} \Rightarrow \iota'(a) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 0$ $\Rightarrow \varphi$ ... Isomorphismus

ALG Ü7

188) (1) K...Körper R...Unterring mit 1 von K $K' := \{ \frac{p}{q} \mid p,q \in R, q \neq 0 \}$

zz: K'... Unterkörper von K

$K' \subseteq K$, da $p,q \in R, q \neq 0 \Rightarrow p,q \in K \Rightarrow q^{-1} \in K \Rightarrow p \cdot q^{-1} = \frac{p}{q} \in K$.

R ist kommutativ, da K kommutativ ist. Da $R \subseteq K$ existieren für $p \in R \setminus \{0\}$ $p^{-1} \in K$.

$p,q,r,s \in R$, $q \neq 0 \neq s$ bel. $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \underset{\text{in } K}{=} \frac{ps+rq}{qs}$ $ps+rq \in R$, $qs \in R \subseteq K \Rightarrow qs \neq 0$

$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} \underset{\text{in } K}{=} \frac{pr}{qs}$ $pr \in R$, $qs \in R \setminus \{0\}$ $\Rightarrow K'$...abgeschlossen bzgl. + und $\cdot$

$0 = \frac{0}{1} \in K'$ $1 = \frac{1}{1} \in K'$ $\Rightarrow 0,1 \in K'$

$\frac{p}{q} + \left(\frac{-p}{q}\right) = \frac{pq-pq}{q^2} = \frac{p-p}{q} = \frac{0}{q} = 0 \in K \Rightarrow -\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{-p}{q}$

$\frac{p}{q} \neq 0 \in K \Rightarrow p \neq 0$ $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{pq}{pq} = \frac{1}{1} = 1 \in K \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$ $\Rightarrow$ abgeschlossen bzgl $-$ und $^{-1}$

$\Rightarrow K'$... Unterkörper von K

(2) zz: $\forall K''$... Unterkörper von K mit $R \subseteq K''$: $K' \subseteq K''$

Sei $p,q \in R$, $q \neq 0$ bel. $\frac{p}{q} \in K'$. $p,q \in K''$, da $R \subseteq K''$ $\Rightarrow q^{-1} \in K''$, da K'' Körper und $q \neq 0$. $\Rightarrow p \cdot q^{-1} \in K''$, da K'' abgeschlossen bzgl. $\cdot$ $\Rightarrow \frac{p}{q} \in K''$ $\Rightarrow K' \subseteq K''$

(3) K...Quotientenkörper von R $\Leftrightarrow K = K'$

($\Leftarrow$) K...kommutativer Ring mit 1: klar

$\iota: R \to K$ ... isomorphe Einbettung von R als Ring mit 1 nach K: $\iota(r) = \frac{r}{1} \in K' = K$

$\forall r \in R \setminus \{0\}$: $\iota(r)^{-1} \in K$ $\iota(r)^{-1} = \left(\frac{r}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{r} \in K' = K$

Sei Q'...kommutativer Ring mit 1; $\iota': R \to Q'$; $\forall r \in R \setminus \{0\}: (\iota'(r))^{-1}$ existiert

$\varphi \circ \iota(r) = \varphi\left(\frac{r}{1}\right) := \iota'(r)$ $\varphi\left(\frac{a}{q}\right) := \iota'(q)\, \iota'(q)^{-1}$

$\varphi\left(\frac{a}{b}\right) + \varphi\left(\frac{c}{d}\right) = \iota'(a)\iota'(b)^{-1} + \iota'(c)\,\iota'(d)^{-1}$

$\varphi\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \varphi\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = \iota'(ad+bc)\,\iota'(bd)^{-1} = (\iota'(a)\,\iota'(d) + \iota'(b)\iota'(c))(\iota'(d)^{-1}\iota'(b)^{-1})$

$= \iota'(a)\,\iota'(b)^{-1} + \iota'(c)\,\iota'(d)^{-1}$

$\varphi\left(\frac{a}{b}\right)\varphi\left(\frac{c}{d}\right) = \iota'(a)\,\iota'(b)^{-1}\,\iota'(c)\,\iota'(d)^{-1} = \iota'(ac)\,\iota'(bd)^{-1} = \varphi\left(\frac{ac}{bd}\right)$

$\varphi\left(-\frac{a}{b}\right) = \iota'(-a)\,\iota'(b)^{-1} = -\iota'(a)\,\iota'(b)^{-1} = -\varphi\left(\frac{a}{b}\right)$; $\varphi\left(\frac{a}{b}^{-1}\right) = \iota'(b)\,\iota'(a)^{-1} = \varphi\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$

Sei $\frac{a}{b} \in K'$ mit $\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ bel. $\Rightarrow \varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \iota'(a)\,\iota'(b)^{-1}$, da $b \neq 0 \Rightarrow \iota'(b) \neq 0$

$\Rightarrow \iota'(a)\,\iota'(b)^{-1} \Rightarrow \iota'(a) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 0$ $\Rightarrow \varphi$ ... Isomorphismus

ALG Ü7

188) ... (3) $\Longleftarrow$ K ... Quotientenkörper von R bzgl. K

- $K' \subseteq K$ klar, da $\forall k' \in K' : \exists p, q \in R; q \neq 0 : k' = \frac{p}{q}$

  Da $R \subseteq K \Rightarrow p, q \in K \Rightarrow \frac{p}{q} \in K$

  $K \subseteq K'$: Sei $k \in K$ bel.

  Da K ... Quotientenkörper: $K = R \setminus \{0\}$

ALG Ü7

189) $R:=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$ $S:=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$

$\boxed{M:=\mathbb{Q}+\sqrt{2}\,\mathbb{Q}}$ $a,b\in M$ $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

$\Rightarrow a=p_a+\sqrt{2}\,q_a \quad b=p_b+\sqrt{2}\cdot q_b$ mit $p_a,p_b,q_a,q_b\in\mathbb{Q}$

$\Rightarrow a+b=p_a+p_b+\sqrt{2}(q_a+q_b)\in M$ $\Rightarrow a\cdot b=p_ap_b+2q_aq_b+\sqrt{2}(q_ap_b+p_aq_b)\in M$

$\Rightarrow -a=-p_a-\sqrt{2}\,q_a\in M$ $\Rightarrow 0=0+\sqrt{2}\,0\in M$

$\overset{a\neq 0}{\Rightarrow} a^{-1}=(p_a+\sqrt{2}\,q_a)^{-1}$ $\boxed{p_a=:\frac{c}{d}\ ;\ q_a=:\frac{e}{f}\ ;\ d,f\neq 0\wedge(c\neq 0\vee e\neq 0)}$

$=\left(\frac{c}{d}+\frac{\sqrt{2}\,e}{f}\right)^{-1}$ $\Rightarrow cf+\sqrt{2}\,de\neq 0$

$=\left(\frac{cf+\sqrt{2}\,de}{df}\right)^{-1}=\frac{df}{cf+\sqrt{2}\,de}=\frac{df(cf-\sqrt{2}\,de)}{c^2f^2+2d^2e^2}$

$=\frac{cdf^2}{c^2f^2+2d^2e^2}-\sqrt{2}\,\frac{d^2fe}{c^2f^2+2d^2e^2}\in M$ $1=1+0\sqrt{2}\in M$

$\Rightarrow M$ Körper

$R\subseteq M$ $(R\setminus\{0\})^{-1}=\left\{\frac{1}{a+b\sqrt{2}}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z},\ a\neq 0\vee b\neq 0\right\}$

$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}=\frac{a}{a^2-2b^2}-\sqrt{2}\,\frac{b}{a^2-2b^2}\in M$ $\Rightarrow (R\setminus\{0\})^{-1}\subseteq M$

Sei $x=\frac{c}{d}+\sqrt{2}\,\frac{e}{f}\in M$ bel. $d,f\neq 0$ $\Rightarrow df\neq 0$

$x=\frac{cf+\sqrt{2}\,de}{df}$ $cf+\sqrt{2}\,de\in\mathbb{Z}+\sqrt{2}\,\mathbb{Z}$, $df\in\mathbb{Z}+\sqrt{2}\,\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow x$ muss im Quotientenkörper liegen $\Rightarrow M$ ist der kleinste Körper in den R eingebettet werden kann *

$S=M$ ist bereits ein Körper $\Rightarrow S$ ist der gesuchte Quotientenkörper.

---

* Sei Q' ein komm. Ring mit 1 und $\iota':R\to Q'$ mit $\forall r\in R\setminus\{0\}:\exists(\iota'(r))^{-1}$

$\varphi: M\to Q'$

$\frac{c}{d}+\sqrt{2}\,\frac{e}{f}\mapsto \iota'(cf+\sqrt{2}\,de)\cdot(\iota'(df)^{-1})$ ... isomorphe Einbettung durch Nachrechnen

ALG Ü7

172) ges: G...Gruppe $\quad H, J \leq G \quad J \subseteq H \subseteq G \quad J \lhd H \quad H \lhd G$

aber nicht $J \lhd G$

$A_4 = \{ (), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (243), (234), (134), (143),$
$(142), (124), (123), (132) \}$

$J = \{ (), (12)(34) \}$

$H = \{ (), (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$

---

zz: $J \leq A_4$

klar bis auf $(12)(34) \circ (12)(34) = () \in J$

zz: $H \leq A_4$

$\circ$	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(12)(34)	()	(14)(23)	(13)(24)
(13)(24)	(14)(23)	()	(12)(34)
(14)(23)	(13)(24)	(12)(34)	()

also Untergruppe

zz: $J \lhd H$

Man sieht H ist kommutativ $\Rightarrow J$...Zentrum $\Rightarrow J \lhd H$

zz: $\neg (J \lhd A_4)$

$(123) \circ J = \{(123), (134)\} \qquad J \circ (123) = \{(123), (243)\}$

zz: $J \subseteq H \subseteq A_4$ klar

zz: $H \lhd A_4$

$\varphi: A_4 \to \overbrace{\{ (), (243), (234), (134), (143), (142), (124), (123), (132) \}}^{B:=}$ ist ein Homomorphismus,

$x \mapsto x$ falls $x \in B \qquad x \mapsto ()$ sonst $\qquad$ da $B \leq G$ (durch nachrechnen)

$\varphi^{-1}(\{()\}) = H \Rightarrow H \lhd A_4$

ALG 07

173) $G := S_4$ $\quad U = \langle (1234) \rangle$ $\quad N := \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

zz: $N \trianglelefteq S_4$

$N \leq S_4$ durch Nachrechnen

N enthält alle Permutationen mit 2 Zyklen der Länge 2 von S_4 (die elementfremd sind)

und alle Permutationen mit 1 Zyklus der Länge 0

$\Rightarrow$ aus Proposition 3.2.5.11 4), dass $N \trianglelefteq S_4$

ges: NU

$NU = \{ n \circ u \mid n \in N, u \in U \}$ $\qquad U = \{(), (1234), (13)(24), (1432)\}$

	()	(1234)	(13)(24)	(1432)
()	()	(1234)	(13)(24)	(1432)
(12)(34)	(12)(34)	(24)	(14)(23)	(13)
(13)(24)	(13)(24)	(1432)	()	(1234)
(14)(23)	(14)(23)	(13)	(12)(34)	(24)

$\Rightarrow NU = \{(), (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}$

ges: $N \cap U$

$N \cap U = \{(), (13)(24)\}$

ges: NU/N

$NU/N = \{\{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, \{(1234), (24), (1432), (13)\},$
$\{(13)(24), (14)(23), (), (12)(34)\}, \{(1432), (13), (1234), (24)\}\}$ (die Spalten der Matrix)

ges: $U/(N \cap U)$

$U/(N \cap U) = \{\{(), (13)(24)\}, \{(1234), (1432)\}, \{(13)(24), ()\}, \{(1432), (1234)\}\}$

ges: $\varphi : U/(N \cap U) \to NU/N$ ... Isomorphismus

$u(N \cap U) \mapsto Nu$

$\varphi(\{(), (13)(24)\}) = \varphi(() \circ (N \cap U)) = N \circ () = \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$\varphi(\{(1234), (1432)\}) = \varphi((1234) \circ (N \cap U)) = N \circ (1234) = \{(1234), (24), (1432), (13)\}$

$\varphi(\{(13)(24), ()\}) = \varphi((13)(24) \circ (N \cap U)) = N \circ (13)(24) = \{(13)(24), (14)(23), (), (12)(34)\}$

$\varphi(\{(1432), (1234)\}) = \varphi((1432) \circ (N \cap U)) = N \circ (1432) = \{(1432), (13), (1234), (24)\}$

ist ein Isomorphismus laut Folgerung 3.2.2.11 (Isomorphiesätze für Gruppen) 1.

ALG Ü7

175) R... kommutativer Ring U... Unterring von R U... kein Ideal

$R := (\mathbb{Q}, +, 0, -, \cdot)$ ... kommutativer Ring, da sogar Körper

$U := (\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot)$ ... Unterring von R

Kein Ideal, da $1 \in U$, $\frac{1}{3} \in R$ aber $\frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \notin U$

(und sogar auch $1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \notin U$ also weder Rechts- noch Linksideal).