3.2.3. $f_1 \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ ... injektiv, $\neg$ surjektiv

$$f_1 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$(a_n) \longmapsto \begin{cases} a_{n-1} & \text{, falls } n \geq 1 \\ 0 & \text{, falls } n = 0 \end{cases}$$

Sei $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bel. Sei $c \in \mathbb{R}$ bel.

$$f((a_n)+(b_n)) = (0, a_0+b_0, a_1+b_1, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots) + (0, b_0, b_1, \dots) = f(a_n) + f(b_n)$$

$$c \cdot f(a_n) = c \cdot (0, a_0, a_1, \dots) = (0, c \cdot a_0, c \cdot a_1, \dots) = f(c \cdot a_n)$$

Angenommen $f(a_n) = f(b_n)$.

$$(0, a_0, a_1, \dots) = (0, b_0, b_1, \dots) \Rightarrow a_0 = b_0 \wedge a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots$$

$$\Rightarrow (a_n) = (b_n)$$

f_1 ist nicht surjektiv, da die Folge $(1, 2, 3, 4, \dots)$ nicht im Bild von f_1 liegt.

$\ker f = \{(0, 0, 0, \dots)\}$

$f(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_0 = 0\}$

...

3.2.3 ... $f_2 \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ ... $\neg$ injektiv, surjektiv

$f_2 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$(a_n) \mapsto (a_{n+1})$

Sei $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bel. Sei $c \in \mathbb{R}$ bel.

$f((a_n)+(b_n)) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots)$

$= f(a_n) + f(b_n)$

$c \cdot f(a_n) = c \cdot (a_1, a_2, a_3, \dots) = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, c \cdot a_3, \dots) = f(c \cdot (a_n))$

Sei $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bel.

$f((0, x_0, x_1, x_2, \dots)) = (x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_n)$

$\Rightarrow f$ ist surjektiv

f ist nicht injektiv, da $(a_n) = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$ und $(b_n) = (1, 1, 2, 3, 4, \dots)$ beide auf $(1, 2, 3, 4, \dots)$ abgebildet werden.

$\ker f_2 = \{(x, 0, 0, 0, \dots) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$f_2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$