ANA Ü11

1) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ mit $f(x) := |x|$

(i) zz: f ist schwach diffbar   (ii) Berechnen Sie die schwache Ableitung

Auf $(-1,0)$ gilt $f(x) = -x$ also $f|_{(-1,0)} \in C^1(-1,0)$

$\Rightarrow D^1 f|_{(-1,0)} = \frac{\partial}{\partial x} f(x) = -1$

Analog auf $(0,1)$ gilt $D^1 f|_{(0,1)} = 1$, daher Vermutung: $\widetilde{D^1 f} = \begin{cases} -1, & x\in(-1,0)\\ 0, & x=0 \\ 1, & x\in(0,1)\end{cases}$

Def $D^1 f$ ist die schwache Ableitung von $f\in L^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \forall \phi\in C_c^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega D^1 f\,\phi\,d\lambda = (-1)\int_\Omega f \frac{d\phi}{dx}\, d\lambda$$

Nach oben gilt $f\in L^1_{loc}(-1,1)$. Sei $\phi\in C_c^\infty(-1,1)$ bel.

$$(-1)\int_{-1}^1 f \frac{d\phi}{dx}\, d\lambda = -\left(\int_{-1}^0 f\frac{d\phi}{dx}\,d\lambda + \int_0^1 f \frac{d\phi}{dx}\, d\lambda\right) = -\int_{-1}^0 -x \frac{d\phi}{dx}\, d\lambda - \int_0^1 x \frac{d\phi}{dx}\, d\lambda$$

$$= \int_{-1}^0 x\,\phi'(x)\,dx - \int_0^1 x\,\phi'(x)\,dx = x\phi(x) - \int_{-1}^0 1\cdot\phi(x)\,dx - \left(x\phi(x) - \int_0^1 1\cdot\phi(x)\,dx\right)$$

$$= \int_{-1}^0 -\phi\,dx + \int_0^1\phi\,dx = \int_{-1}^1 \widetilde{D^1 f}\,\phi\,dx$$

$\Rightarrow \widetilde{D^1 f}$ ist tatsächlich die schwache Ableitung

(iii) $1\le p<\infty$ Berechnen Sie $\|f\|_{W^{1,p}} := \left(\sum_{k=0}^1 \|\frac{d^k}{dx^k} f\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$ sowie $\|f\|_{W^{1,\infty}}$

Sei $1\le p<\infty$ bel.

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \left(\|\tfrac{d^0}{dx^0}f\|^p_{L^p} + \|\tfrac{d^1}{dx^1} f\|^p_{L^p}\right)^{1/p} = \left(\||x|\|^p_{L^p} + \|\widetilde{D^1 f}\|^p_{L^p}\right)^{1/p}$$

$$\||x|\|^p_{L^p} = \int_{-1}^1 |x|^p\, d\lambda = \int_{-1}^0 (-x)^p\, dx + \int_0^1 x^p\, dx = (-1)^p \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_{-1}^0 + \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = (-1)^p\left(-\frac{(-1)^{p+1}}{p+1}\right) + \frac{1}{p+1} = \frac{1+(-1)^{2p+2}}{p+1} = \frac{2}{p+1}$$

$$\|\widetilde{D^1 f}\|^p_{L^p} = \int_{-1}^1 |\widetilde{D^1 f}|^p\, d\lambda = \int_{-1}^1 1^p\, d\lambda = \int_{-1}^1 1\, dx = 2$$

$$\Rightarrow \|f\|_{W^{1,p}} = \left(\frac{2}{p+1} + 2\right)^{1/p} = \left(2\,\frac{1+p+1}{p+1}\right)^{1/p} = \sqrt[p]{2\,\frac{p+2}{p+1}}$$

$$\|f\|_{W^{1,\infty}} = \max_{|\alpha|\le 1}\|D^\alpha f\|_\infty = \|D^1 f\|_\infty = \inf\{C\in\mathbb{R}^+ : |f(x)|\le C \text{ für fast alle } x\in(-1,1)\} = 1$$

Zusatz: $\lim_{p\to\infty}\|f\|_{W^{1,p}} = \lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{2\,\frac{p+2}{p+1}} = \lim_{p\to\infty} 2^{1/p}\cdot \lim_{p\to\infty}\left(\frac{p+2}{p+1}\right)^{1/p} = 2^{\lim \frac1p}\cdot\lim_{p\to\infty}\exp\left(\frac1p \ln\left(\frac{p+2}{p+1}\right)\right)$

$$= 2^0\cdot\exp\Big(\lim_{p\to\infty}\frac1p\cdot\underbrace{\lim_{p\to\infty}\ln\left(\frac{p+2}{p+1}\right)}_{\ln(\lim\frac{p+2}{p+1}) = \ln(1) = 0}\Big) = 1\cdot\exp(0\cdot 0) = 1 = \|f\|_{W^{1,\infty}}$$

ANA ÜM

2) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ habe schwache Ableitungen bis zur Ordnung n und die schwache Ableitung der Ordnung n ist 0 f.ü.

zz: f ist f.ü. ein Polynom vom Grad höchstens $n-1$.

$n=0$: $\Rightarrow f=0$ f.ü. also ein Polynom vom Grad -1 ✓

IV f hat schwache Ableitung bis Ordnung n und $D^n f = 0$ f.ü. $\Rightarrow f = p_{n-1}$ f.ü.

$n+1$: f hat also schwache Ableitung bis Ordnung $n+1$ und $D^{n+1} f = 0$ f.ü.

$\Rightarrow Df$ hat schwache Ableitung bis Ordnung n und $D^n(Df) = 0$ f.ü.

$\Rightarrow \exists$ Polynom vom Grad höchstens $n-1$: $Df(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ f.ü.

[Prop 6.1.4 $n=1$ $\Rightarrow$ (f... schwach diffbar $\Leftrightarrow \exists g$.. lokal abs. stetig: $f=g$ f.ü.)
In dem Fall: $Df = \frac{d}{dx} g$ f.ü.

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx} f(x)\, d\lambda = \int \frac{d}{dx} g(x)\, d\lambda = \int Df(x)\, d\lambda = \int \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k \frac{1}{k+1} x^{k+1}\right) + c = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_{k-1}}{k} x^k\right) + c = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \quad \text{wobei } b_0 = c,\ b_k = \frac{a_{k-1}}{k}\ \forall k>0$$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ f.ü. also ein Polynom vom Grad n

$\square$

ANA ÜM

3) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen: $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$

zz: $u v \in W^{1,1}(\Omega)$ und $\forall i = 1, \dots, n: D^i(uv) = (D^i u)v + u(D^i v)$

$u \in W^{1,2}(\Omega) \Leftrightarrow u \in L^2(\Omega) \wedge \forall \alpha$ mit $|\alpha| \leq 1: D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, für v analog

Wir müssen zeigen $u \cdot v \in L^1(\Omega) \wedge \forall \alpha$ mit $|\alpha| \leq 1$: D^α_{uv} existiert in $L^1(\Omega)$

$$\int_\Omega |u \cdot v|^1 d\lambda = \int_{\Omega \cap [|u| \leq |v|]} |u \cdot v| d\lambda + \int_{\Omega \cap [|u| > |v|]} |u \cdot v| d\lambda \leq \int_{\Omega \cap [|u| \leq |v|]} |v|^2 d\lambda + \int_{\Omega \cap [|u| > |v|]} |u|^2 d\lambda \leq \int_\Omega |v|^2 d\lambda + \int_\Omega |u|^2 d\lambda < \infty$$

$$\Rightarrow u \cdot v \in L^1(\Omega)$$

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ bel. $\alpha = (0, 0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$

Nach Satz 6.2.10 liegt $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Betrachten wir nur die Einschränkung auf Ω so gilt $\exists (\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_c^\infty(\Omega): \lim_{n \to \infty} \theta_n = u \in W^{1,2}(\Omega)$

$$D^i(u \cdot v) = D^i(\lim_{n \to \infty} \theta_n \cdot v) \overset{*}{=} \lim_{n \to \infty} D^i(\theta_n v) = \lim_{n \to \infty} D^\alpha(\theta_n \cdot v)$$

Prop 6.2.6.

$$= \lim \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \theta_n D^{\alpha - \beta} v = \lim \binom{\alpha}{\beta_0} D^{\beta_0} \theta_n D^{\alpha - \beta_0} v + \binom{\alpha}{\beta_1} D^{\beta_1} \theta_n D^{\alpha - \beta_1} v \text{ ; wobei } \beta_0 = (0, 0, \dots, 0),\ \beta_1 = \alpha$$

$$= \lim \prod_{j \leq n} \binom{\alpha_j}{\beta_{0j}} D^{\beta_0} \theta_n D^{\alpha - \beta_0} v + \prod_{j \leq n} \binom{\alpha_j}{\beta_{1j}} D^{\beta_1} \theta_n D^{\alpha - \beta_1} v = \lim \theta_n D^i v + D^i \theta_n \cdot v \overset{*}{=} u (D^i v) + (D^i u) \cdot v$$

$$\int_\Omega |u (D^i v) + (D^i u) \cdot v| d\lambda^n \leq \int_\Omega |u| |D^i v| d\lambda^n + \int_\Omega |D^i u| |v| d\lambda^n$$

$$= \int_{\Omega \cap [|u| \leq |D^i v|]} |u| |D^i v| d\lambda^n + \int_{\Omega \cap [|u| > |D^i v|]} |u| |D^i v| d\lambda^n + \int_{\Omega \cap [|D^i u| \leq |v|]} |D^i u| |v| d\lambda^n + \int_{\Omega \cap [|D^i u| > |v|]} |D^i u| |v| d\lambda^n$$

$$\leq \underbrace{\int_\Omega |D^i v|^2 d\lambda^n}_{< \infty} + \underbrace{\int_\Omega |u|^2 d\lambda^n}_{< \infty} + \underbrace{\int_\Omega |v|^2 d\lambda^n}_{< \infty} + \underbrace{\int_\Omega |D^i u|^2 d\lambda^n}_{< \infty} < \infty$$

$$\Rightarrow D^i(uv) = (D^i u) v + u (D^i v) \in L^1(\Omega) \qquad \Rightarrow u \cdot v \in W^{1,1}(\Omega)$$

* zz: $D^i(\lim_{n \to \infty} \theta_n) = \lim_{n \to \infty} D^i(\theta_n)$ für $\theta_n \in C_c^\infty(\Omega)$ und $\lim_{n \to \infty} \theta_n \in W^{1,2}(\Omega)$

Sei $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ bel.

$$\int_\Omega \lim D^i(\theta_n) \phi \, d\lambda^n = \lim \underbrace{\int_\Omega D^i(\theta_n) \phi \, d\lambda^n}_{= \int_\Omega \frac{d}{dx_i} \theta_n \phi \, d\lambda^n < \infty} = \lim - \int_\Omega \theta_n \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \, d\lambda^n = - \int_\Omega \lim \theta_n \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \, d\lambda^n$$

$\square$

ANA ÜM11

4) $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ $\quad W_0^{1,2}(a,b) := \{f\in W^{1,2}(a,b) : f(a)=f(b)=0\}$

(i) Wieso ist die Definition sinnvoll? (Punktauswertung)

Nach Prop 6.1.4. gilt falls $n=1$ (was gegeben ist), dass f schwach diffbar ist $\Leftrightarrow$ f f.ü. mit einer lokal absolut stetigen Funktion übereinstimmt. Wir können die Punktauswertung einfach auf dieser Funktion verwenden, die ja nach Definition von lokal absolut stetig auf kompakten Teilmengen absolut stetig ist. Für a und b nehmen wir $\lim_{x\to a^+} f(x)$ bzw $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

(ii) zz: $C_c^\infty(a,b)$ liegt dicht in $W_0^{1,2}(a,b)$

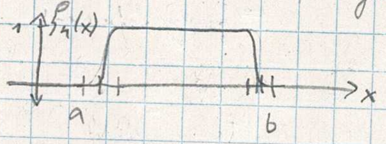
Sei $f\in W_0^{1,2}(a,b)\subseteq W^{1,2}(\mathbb{R})$ bel.:

Nach Satz 6.2.10. liegt $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $W^{1,2}(\mathbb{R})$, also $\exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Wir müssen nur mehr zeigen, dass $\forall x\in(-\infty,a]\cup[b,\infty): f(x)=0 \Rightarrow \tilde{f}_n \in C_c^\infty(a,b)\ \forall n$

Es gibt Funktionen $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in C_c^∞ mit kompaktem Träger $[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$ und

$\forall n\in\mathbb{N}_{>1}: \forall x\in(-\infty,a+\frac{1}{n})\cup(b-\frac{1}{n},\infty): \xi_n(x)=0,\ \forall x\in[a+\frac{1}{n-1}, b-\frac{1}{n-1}]: \xi_n(x)=1$ (Mollifier)

$\Rightarrow f_n\cdot\xi_n \in C_c^\infty(a,b)$



Sei $x\in(a,b)$ bel.

$$\lim_{n\to\infty}(f_n\cdot\xi_n)(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\cdot\underbrace{\xi_n(x)}_{=1 \text{ für groß genuge } n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n\cdot\xi_n = f$

□

ANA ÜM

5) zz: $\forall f \in W_0^{1,2}(a,b): \|f\|_{L^2} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|Df\|_{L^2}$

Prop 6.1.4. $n=1 \Rightarrow f$ ... schwach diffbar $\Leftrightarrow f$ stimmt f.ü. mit lokal abs. stetiger Fkt überein

In dem Fall $\Rightarrow Df = \frac{d}{dx} f(x)$ f.ü.

$$\int_a^x Df(t)\,dt = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t)\,dt = f(x) - \underbrace{f(a)}_{=0} = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{(a,b)} |f(x)|^2 d\lambda = \int_a^b \left| \int_a^x Df(t)\,dt \right|^2 dx \leq \int_a^b \left(\int_a^x |Df(t)|\,dt \right)^2 dx$$

$$|\langle |Df|, 1 \rangle| = \left| \int_a^x |Df(t)| \cdot 1\,dt \right| \leq \| |Df| \|_{L^2} \cdot \|1\|_{L^2} = \sqrt{\int_a^x |Df(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_a^x 1^2\,dt}$$

Satz 2.6.1. Cauchy-Schwartz

$$\leq \int_a^b \left(\int_a^x |Df(t)|^2 dt \cdot \int_a^x 1\,dt \right) dx$$

$$= \int_a^b \underbrace{\int_a^x |Df(t)|^2 dt}_{\geq 0} (x-a)\,dx \leq \int_a^b \underbrace{\int_a^b |Df(t)|^2 dt}_{\text{unabhängig von } x} (x-a)\,dx$$

$$= \int_a^b |Df(t)|^2 dt \cdot \int_a^b x - a\,dx = \|Df\|_{L^2}^2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} - ax \right)\Big|_a^b = \|Df\|_{L^2}^2 \left(\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2 \right)$$

$$= \|Df\|_{L^2}^2 \left(\frac{a^2}{2} - 2\frac{ab}{2} + \frac{b^2}{2} \right) = \|Df\|_{L^2}^2 \frac{1}{2} \underbrace{(a-b)^2}_{=(b-a)^2}$$

$$\Rightarrow \|f\|_{L^2} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|Df\|_{L^2}$$

$\square$

ANA Ü11

7) $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$F_{f,\alpha} : \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \, D^\alpha \phi \, dx$ für Multiindices mit $|\alpha| \leq m$

ZZ: $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \forall \alpha, |\alpha| \leq m : F_{f,\alpha} : (C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|.\|_{L^q}) \to \mathbb{R}$ ... stetig

[Fundament Analysis Satz 9.2.6.: $A : X \to Y$ ... linear $\Rightarrow A$ ... stetig $\Leftrightarrow A$ ... beschränkt ($\Leftrightarrow A$ ... glm. stetig)

$F_{f,\alpha}$ ist linear, da $F_{f,\alpha}(\alpha \phi_1 + \beta \phi_2) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, D^\alpha (\alpha \phi_1 + \beta \phi_2) \, dx = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f D^\alpha \phi_1 dx + \beta \int_{\mathbb{R}^n} f D^\alpha \phi_2 dx$

$= \alpha F_{f,\alpha}(\phi_1) + \beta F_{f,\alpha}(\phi_2)$

$\Rightarrow F_{f,\alpha}$ ... stetig $\Leftrightarrow F_{f,\alpha}$ ... beschränkt $\Leftrightarrow \|F_{f,\alpha}\| < \infty$

$\|F_{f,\alpha}\| := \sup\{ |F_{f,\alpha}(\phi)| : \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|\phi\|_{L^q} = 1 \}$

($\Rightarrow$) $|F_{f,\alpha}(\phi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \, D^\alpha \phi \, dx \right| = \left| (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f \cdot \phi \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f \cdot \phi| \, dx = \|D^\alpha f \cdot \phi\|_{L^1}$

$\leq \|D^\alpha f\|_{L^p} \underbrace{\|\phi\|_{L^q}}_{=1} = \|D^\alpha f\|_{L^p} < \infty$, da $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow \|F_{f,\alpha}\| \leq \|D^\alpha f\|_{L^q} < \infty \Rightarrow F_{f,\alpha}$ ... stetig

($\Leftarrow$) $F_{f,\alpha}$ ... stetig, linear. Aus dem Darstellungssatz von Riesz folgt $\exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$F_{f,\alpha}(\phi) = \langle \phi, g \rangle \; \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ wobei $\langle \phi, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi \cdot g \, dx$

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^q(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 2.5.1. $\Rightarrow g \in L^q(\mathbb{R}^n)$

Sei $\widetilde{D^\alpha f} := (-1)^\alpha \cdot g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ bel.

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{D^\alpha f} \, \phi \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^\alpha \cdot g \cdot \phi \, d\lambda = (-1)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} g \cdot \phi \, d\lambda = (-1)^\alpha F_{f,\alpha}(\phi)$

$= (-1)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot D^\alpha \phi \, dx \Rightarrow \widetilde{D^\alpha f} = D^\alpha f \in L^q(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

$\square$