ANA Ü6

1) $\left(\frac{4n^2+n}{4n^2+n-4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Gesucht: Grenzwert x

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: d(x_n, x)<\varepsilon$

Sei $\varepsilon>0$ bel. Wähle $N=\lceil \frac{4}{\varepsilon}+4\rceil$ Sei $n\geq N$ bel. Dann gilt:

$$\left|1-\frac{4n^2+n}{4n^2+n-4}\right| = \left|\frac{4n^2+n-4}{4n^2+n-4}-\frac{4n^2+n}{4n^2+n-4}\right| = \left|\frac{-4}{4n^2+n-4}\right| = \frac{4}{4n^2+n-4}$$

$$\leq \frac{4}{4N^2+N-4} < \frac{4}{N-4} = \frac{4}{\lceil\frac{4}{\varepsilon}+4\rceil-4} \leq \frac{4}{\frac{4}{\varepsilon}+4-4} = \frac{4}{\frac{4}{\varepsilon}} = \frac{4\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow (x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

ges: kleinstmögliches N zu festem $\varepsilon>0$

$$N > \left\lceil \frac{-\varepsilon+\sqrt{65\varepsilon^2+64\varepsilon}}{8\varepsilon}\right\rceil$$

2) ges: unbeschränkte Folge in $\mathbb{R}$, die eine konvergente Teilfolge hat

$(n+(-1)^n\cdot n)$ bei n gerade: $n+(-1)^n\cdot n = n+1\cdot n = 2n$ unbeschränkt

bei n ungerade: $n+(-1)^n\cdot n = n+(-1)\cdot n = n-n = 0$ beschränkt

ges: unbeschränkte Folge, die keine konvergente Teilfolge hat und nicht monoton wachsend ist

$-n$

ges: beschränkte Folge, die nicht konvergent ist, aber eine streng monoton wachsende Teilfolge besitzt

$(-1)^n \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}$ $\quad -1 < x_n < 1\ \forall n\in\mathbb{N}$

bei n gerade: streng monoton wachsend

ANA Ü6

3.) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Folge in metrischem Raum

zz: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = x \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = x$

1.) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = x \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = x$

Da x_{2n} und x_{2n-1} Teilfolgen von x_n sind konvergieren sie gegen x.

2.) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = x \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_1 : d(x_{2n}, x) \leq \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_2 : d(x_{2n-1}, x) \leq \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. $N := \max(N_1, N_2)$

$\forall n \geq N : d(x_{2n}, x) \leq \varepsilon \wedge d(x_{2n-1}, x) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq \varepsilon$ $\square$

4.) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Folgen in $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_a \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_a : d(a_n, a) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_b \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_b : d(b_n, b) < \varepsilon$

o.B.d.A $a \leq b$

d.h. $\exists N' \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N' : a_n \leq b_n$

- $\forall n \geq N' : \max(a_n, b_n) = b_n$

$\Rightarrow \max(a_n, b_n) \xrightarrow{n\to\infty} b$, da eine Folge gegen einen Grenzwert konvergiert, wenn sie ab einem Folgenglied gegen den Grenzwert konvergiert.

- $\forall n \geq N' : \min(a_n, b_n) = a_n$

$\Rightarrow \min(a_n, b_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$, wieder da eine Folge, die ab einem bestimmten Folgenglied konvergiert auch insgesamt konvergiert. $\square$

ANA Ü6

5. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ $\quad$ Frage: konvergent?

zz: (x_n) ist beschränkt (nach oben)

$\forall k \in \mathbb{N}$: x_k hat k Summanden hat und der größte Summand $\frac{1}{k+1}$ ist.

$\Rightarrow x_k < k \cdot \frac{1}{k+1} < 1$

zz: (x_n) ist monoton wachsend

$$x_{n+1} - x_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \sum_{i=2}^{n+2} \frac{1}{n+i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{n+i} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{n+i} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \geq 0 \iff \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \geq \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2n+2} \geq \frac{1}{n+1} \iff \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$$

$\Rightarrow (x_n)$ konvergiert, da nach oben beschränkt und monoton wachsend $\square$

~~6.~~ (i) $(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n-2}$ $\quad d = |x-y|$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n-2}} \leq \frac{1}{1 + \frac{2n-2}{n^2}} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n-2} > 1 + \frac{2n-2}{n^2}$$

$$(1+x)^n \geq 1 + x \cdot n$$

$x \geq 0 \quad n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n-2} \geq 1 + \frac{2n-2}{n^2}$$

ANA Ü6

7.) $x_1 = 0 \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}(a + x_n^2)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq a \leq 1$

$a = 1 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{5}{8} \quad x_4 = \frac{89}{128} \qquad \nearrow$

$a = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \qquad \rightarrow$

$a = 0.5 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{4} \quad x_3 = \frac{9}{32} \qquad \nearrow$

$a = 0.1 \qquad \nearrow$

Behauptung: monoton wachsend

IA: $x_2 - x_1$: $\frac{1}{2}(a + 0^2) - 0 = \frac{1}{2}a - 0 = \frac{a}{2}$, da $0 \leq a \leq 1$

$\Rightarrow x_2 - x_1 \geqslant 0 \Rightarrow x_2 \geqslant x_1$

IV: $x_k - x_{k-1} > 0$

IS:
$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2}(a + x_k^2) - x_k = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x_k^2 - x_k$$
$$= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x_k^2 - \frac{1}{2}(a + x_{k-1}^2) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x_k^2 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x_{k-1}^2$$
$$= \frac{1}{2}x_k^2 - \frac{1}{2}x_{k-1}^2 = \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k + x_{k-1}) > 0$$

Behauptung: nach oben beschränkt

IA: $x_1 = 0 < 1$

IV: $x_n < 1$

IS: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(a + x_n^2)$; da $0 \leq a \leq 1$ und $x_n^2 < 1$ folgt $\frac{1}{2}(a + x_n^2) < \frac{1}{2}(2) = 1$

$\Rightarrow (x_n)$ konvergiert

ges Grenzwert:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a + x_n^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x_n^2$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}a\right) + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}x_n^2\right) = \frac{1}{2}a + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x^2$$
$$x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x^2 \iff 0 = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}a \iff 0 = x^2 - 2x + a$$
$$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-a}, \text{ da } x_n < 1 \Rightarrow x = 1 - \sqrt{1-a}$$

□

ANA Ü6

8.) (i) $\langle \mathbb{C} \setminus \{0\}, d_2 \rangle$

kein vollständig metrischer Raum, da $(\frac{1}{n} + 0i)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, aber gegen einen Punkt konvergiert, der nicht in $\langle \mathbb{C}\setminus\{0\}, d_2\rangle$ liegt (nämlich $0+0i$).

(ii) $\langle [0,1] \cup [2,3], d_2 \rangle$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N: d_2(x_m, x_n) \leq \varepsilon$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchy-Folge.

Laut der Definition gilt ($\varepsilon = 0,5$) $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N: |x_m - x_n| < 0,5$

$\Rightarrow$ ab einem Index N liegen die Werte der Folge nur mehr in $[0,1]$ oder $[2,3]$.

Da $([0,1], d_2)$ und $([2,3], d_2)$ vollständig metrische Räume sind gibt es ein $x \in [0,1] \cup [2,3]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(iii) $\langle \mathbb{Z}, d_2 \rangle$

Behauptung: In $\mathbb{Z}$ gibt es nur Cauchy-Folgen, die ab einem Index konstant sind.

Bew: Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$. In einer nicht konstanten Folge in $\mathbb{Z}$ $\exists x_m, x_{m+1} \in (x_n)$ mit $x_m \neq x_{m+1}$ und $d_2(x_m, x_{m+1}) \geq 1$ und somit $> \varepsilon$.

Für jede Cauchy-Folge (also ab einem Index konstant) gibt es einen Grenzwert, nämlich den konstanten Wert ab Index.

$\Rightarrow \langle \mathbb{Z}, d_2 \rangle$ ist vollständig metrisch

ANA Ü6

10.) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Folge positiver, reeller Zahlen

$(c_n) \xrightarrow{n\to\infty} c \qquad c \in \mathbb{R}, \; c>0$

Frage $\left((c_n)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} ?$

Wähle b, d, so dass $b<c<d$. Dann gilt ab einem Index $b<c_n<d$

$\Rightarrow b^{\frac{1}{n}} < c_n^{\frac{1}{n}} < d^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{c} < \sqrt[n]{d}$

Fallunterscheidung: 1. Fall $b \geq 1$:

Für $n \geq b$ gilt $\underbrace{1}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \leq \sqrt[n]{b} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \Rightarrow \sqrt[n]{b} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

gleiches gilt für d

2. Fall $0<b<1$: o.B.d.A $\exists b' = \frac{1}{x}$ mit $x \in \mathbb{N}$ und $x<n$; $b' \leq b$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$

$1 \leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n}$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \underbrace{\frac{1}{1}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

gleiches gilt für d

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{b}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} < \sqrt[n]{c} < \underbrace{\sqrt[n]{d}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \Rightarrow \sqrt[n]{c} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$\square$