ANA Ü10

1) $K, A \in \mathbb{R}^p$ $\quad K \neq \emptyset$ $\quad A \neq \emptyset$ $\quad K \ldots$ kompakt $\quad A \ldots$ abgeschlossen

zz: $\exists x \in K \; \exists y \in A : d(x,y) = d(A,K)$

$d(A,K) = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in K\}$

$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A $\quad \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $K : d(A,K) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$

$\forall C_0 > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |d(x_n, y_n) - d(A,K)| < C_0$

Da K beschränkt: $\forall x \in K \; \exists C_1 > 0 \; \forall y \in K : d(x,y) < C_1$

Da K kompakt ist konvergiert $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y' \in K$.

$\exists C_1 > 0 \; \forall y_n : d(y_n, y') < C_1$

$\exists C > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N_0 : d(x_n, y') < C$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Folge in $K_C(y') \cap A$

$K_C(y') \cap A$ ist kompakt, da abgeschlossen und beschränkt

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einer kompakten Menge ist $\exists x' \in K_C(y') \cap A : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x'$

$\Rightarrow d(x', y') = d(A,K)$

zz: $A \cap K \neq \emptyset \Leftrightarrow d(A,K) = 0$

$A \cap K \neq \emptyset \overset{?}{\Rightarrow} d(A,K) = 0$

$\exists x' \in A \cap K \qquad d(A,K) = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in K\} \ni d(x', x') = 0$

Da eine Metrik immer ≥ 0 sein muss ist $d(A,K) = 0$

$d(A,K) = 0 \Rightarrow A \cap K \neq \emptyset$

oben gezeigt $\exists x \in A \; \exists y \in K : d(x,y) = d(A,K) = 0$

da $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow x \in A \cap K \Rightarrow A \cap K \neq \emptyset$