ANA Ü6

2.) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^6+i}\,dx$

$f(x) = \frac{x}{x^6+i}$ $\qquad f(-x) = \frac{-x}{(-x)^6+i} = -\frac{x}{x^6+i} = -f(x)$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = -\int_{0}^{-1} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

$\left[u = -x \quad \frac{du}{dx} = -1 \quad dx = -du \right.$

$$= -\int_{0}^{-(-1)} f(-u)(-1)du + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(-u)du + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$= -\int_{0}^{1} f(u)du + \int_{0}^{1} f(x)dx = 0$$

...

ANA Ü6

2.) ... 6)

Behauptung: $\int_0^1 x^m (\ln(x))^n \, dx = \frac{(-1)^n \, n!}{(m+1)^{n+1}}$

$n=0$: $\int_0^1 x^m (\ln(x))^0 \, dx = \int_0^1 x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{m+1} - \frac{0}{m+1} = \frac{1}{m+1}$

$$\frac{(-1)^0 \, 0!}{(m+1)^{0+1}} = \frac{1}{m+1} \quad \checkmark$$

$n+1$: $\int_0^1 x^m (\ln(x))^{n+1} \, dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)' (\ln(x))^{n+1} \, dx$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln(x))^{n+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot (n+1) \cdot (\ln(x))^n \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln(x))^{n+1}\Big|_0^1 - \frac{n+1}{m+1} \int_0^1 x^m \cdot (\ln(x))^n \, dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln(x))^{n+1}\Big|_0^1 - \frac{n+1}{m+1} \cdot \frac{(-1)^n \, n!}{(m+1)^{n+1}}$$

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln(x))^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{m+1} \cdot 0 - \lim_{\alpha \to 0+} \frac{\alpha^{m+1}}{m+1} (\ln(\alpha))^{n+1}$$

$$= \frac{1}{m+1} \cdot \lim_{\alpha \to 0+} \frac{-(\ln(\alpha))^{n+1}}{\frac{1}{\alpha^{m+1}}} = \frac{1}{m+1} \cdot \lim_{\alpha \to 0+} \frac{-(n+1) \cdot \ln(\alpha)^n \cdot \frac{1}{\alpha}}{-(m+1) \cdot \frac{1}{\alpha^{m+2}}}$$

$$= \frac{1}{m+1} \cdot \frac{n+1}{-(m+1)} \cdot \lim_{\alpha \to 0+} \frac{-(\ln(\alpha))^n}{\frac{1}{\alpha^{m+1}}} = \ldots = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{n+1}{-(m+1)} \cdot \ldots \lim_{\alpha \to 0+} \frac{-(\ln(\alpha))^1}{\frac{1}{\alpha^{m+1}}}$$

$$= \frac{1}{m+1} \cdot \frac{n+1}{-(m+1)} \cdot \ldots \cdot \lim_{\alpha \to 0+} \frac{-\frac{1}{\alpha}}{-(m+1) \cdot \frac{1}{\alpha^{m+2}}} = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{n+1}{-(m+1)} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \lim_{\alpha \to 0+} \alpha^{m+1} = 0$$

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln(x))^{n+1}\Big|_0^1 - \frac{n+1}{m+1} \cdot \frac{(-1)^n \, n!}{(m+1)^{n+1}} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(m+1)^{n+2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^m (\ln(x))^n \, dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$$

ANA Ü6

3.) $Q[a,b]$ ... Menge aller stückweise stetigen Funktionen auf $[a,b]$

N ... Menge aller Funktionen auf $[a,b]$ mit $f(t)=0$ für fast alle $t \in [a,b]$

zz: $Q[a,b]$ ist ein $VR/_{\mathbb{R}}$

Sei $f,g \in Q[a,b]$ und $c,d \in \mathbb{R}$ bel.

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ ist eine stückweise stetige Funktion auf $[a,b]$

$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$ —— " ——

$\Rightarrow (f+g), (c \cdot f) \in Q[a,b]$

$c(f+g)(x) = c \cdot f(x) + c \cdot g(x)$ $((c+d)f)(x) = c \cdot f(x) + d \cdot f(x)$

$((c \cdot d) \cdot f)(x) = c \cdot d \cdot f(x)$ $(1 \cdot f)(x) = f(x)$

zz: N ist UR von $Q[a,b]$

$\forall x \in N: x \in Q[a,b]$, da:

$\exists c_1, c_2, \dots, c_n \in [a,b]: f(c_i) \neq 0 \quad \forall c \notin \{c_1, c_2, \dots, c_n\}: f(c)=0$

Dann ist $a, c_1, c_2, \dots, c_n, b$ eine Zerlegung, sodass sich $f|_{(c_i, c_{i+1})}$ stetig auf $[c_i, c_{i+1}]$ fortsetzen lässt (als konstante Nullfunktion).

Sei $f,g \in N$ und $c \in \mathbb{R}$ bel.

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ und ist somit auch fast immer gleich 0

$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$ —— " ——

zz: $h: (c, f+N) \longmapsto c + \int_a^x f(t)\,dt$ ist wohldefiniert, linear und bijektiv als Abbildung von $\mathbb{R} \times (Q[a,b]/N)$ nach $\{F \in C[a,b]: F$ ist stückweise stetig differenzierbar auf $[a,b]\}$

wohldefiniert also zz jeder Repräsentant von N liefert selben Funktionswert

Sei $c \in \mathbb{R}$ $f \in Q[a,b]$ und $g \in N$ bel.

$h(c, f+g) = c + \int_a^x (f+g)(t)\,dt = c + \int_a^x f(t)\,dt + \int_a^x g(t)\,dt = c + \int_a^x f(t)\,dt$

da $g(t)$ fast immer 0 ist. Offensichtlich liegt das Bild in $\{F \in C[a,b]: \dots\}$

linear also zz: $h(c+d, (f+f')+N) = h(c, f+N) + h(d, f'+N)$

$h(c+d, (f+f')+N) = c+d + \int_a^x f(x)\,dx + \int_a^x f'(x)\,dx = h(c, f+N) + h(d+f'+N)$

...

ANA Ü6

3.) ... bijektiv zz: $\exists\, h^{-1}: \{F \in C[a,b] : \ldots\} \longrightarrow \mathbb{R} \times (Q[a,b]/N) : h \circ h^{-1} = id$

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f \in Q[a,b]$ bel.

$(h(c, f+N))' = (c + \int_a^x f(t)\,dt)' = (c + F(x) - F(a))' = F(x)' = f(+N)$

$h(c, f+N) - \int_a^x f(t)\,dt = c + \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = c$

$\Rightarrow h^{-1}: g(x) \longmapsto (g - \int_a^x g'(t)\,dt,\ g'(t))$ $\Rightarrow h \ldots$ bijektiv

ANA Ü6

4.) $\lim\limits_{a\to 0} \int_0^1 \frac{1}{1+a(\sin(x))^2}\,dx$

$f_n(x) := \frac{1}{1+\frac{1}{n}(\sin(x))^2}$ $\qquad f(x) := 1$

Szz: f_n konvergiert gleichmäßig gegen f

$d_\infty(f_n, f) = \sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in [0,1]\}$

$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}(\sin(x))^2} - 1\right| = \left|\frac{1-(1+\frac{1}{n}(\sin(x))^2)}{1+\frac{1}{n}(\sin(x))^2}\right|$

$= \left|\frac{-\frac{1}{n}(\sin(x))^2}{1+\frac{1}{n}(\sin(x))^2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n}(\sin(x))^2}{1+\frac{1}{n}(\sin(x))^2}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$ laut Satz 8.7.2.

$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$

ANA Ü6

6.) $\int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_1^2 z^{x+y} \, dx \right) dy \right) dz$

$z^{x+y} : [1,2] \times [1,2] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, da

$\lim_{z \to 0+} z^{x+y} = 0 = 0^{x+y}$ (Fortsetzung durch $f(x,y,0) = 0$)

Δ

$\int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_1^2 z^{x+y} dx \right) dy \right) dz = \int_1^2 \left(\int_1^2 \left(\int_0^1 z^{x+y} dz \right) dx \right) dy$

$= \int_1^2 \left(\int_1^2 \left(\frac{1^{x+y+1}}{x+y+1} - \frac{0^{x+y+1}}{x+y+1} \right) dx \right) dy = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{1}{x+y+1} dx \right) dy$

$\left[u = x+y+1 \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad du = dx \quad \int \frac{1}{u} du = \ln(u) = \ln(x+y+1) \right)$

$= \int_1^2 \ln(2+y+1) - \ln(1+y+1) \, dy = \int_1^2 \ln(y+3) \, dy - \int_1^2 \ln(y+2) \, dy$

$\left| \begin{array}{llll} v = y+3 & \frac{dv}{dy} = 1 & dv = dy & \int \ln(v) dv = v(\ln(v) - 1) = (y+3)(\ln(y+3) - 1) \\ w = y+2 & \frac{dw}{dy} = 1 & dw = dy & \int \ln(w) dw = w(\ln(w) - 1) = (y+2)(\ln(y+2) - 1) \end{array} \right.$

$= 5(\ln(5) - 1) - 4(\ln(4) - 1) - (4(\ln(4) - 1) - 3(\ln(3) - 1))$

$= 5\ln(5) - 5 - 4\ln(4) + 4 - 4\ln(4) + 4 + 3\ln(3) - 3$

$= \underline{5\ln(5) - 8\ln(4) + 3\ln(3)} \approx 0{,}2527$

$\Delta \quad g(y,z) := \int_1^2 z^{x+y} dx \qquad u = x+y \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad du = dx$

$\int z^{x+y} dx = \int z^u du = \frac{z^u}{\ln(z)} = \frac{z^{x+y}}{\ln(z)}$

$\int_1^2 z^{x+y} dx = \frac{z^{2+y}}{\ln(z)} - \frac{z^{1+y}}{\ln(z)} = \frac{1}{\ln(z)} \cdot (z^{y+2} - z^{y+1})$

$\Rightarrow g(y,z)$ ist stetig

Satz 8.7.10 sagt nun: $\int_0^1 \left(\int_1^2 g(y,z) \, dy \right) dz$

$= \int_1^2 \left(\int_0^1 g(y,z) \, dz \right) dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 \left(\int_1^2 z^{x+y} dx \right) dz \right) dy$

$f(x,z) := z^{x+y}$ ist stetig

nochmals Satz 8.7.10 $\quad \int_0^1 \left(\int_1^2 f(x,z) \, dx \right) dz = \int_1^2 \left(\int_0^1 f(x,z) \, dz \right) dx$

$\Rightarrow \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_1^2 z^{x+y} dx \right) dy \right) dz = \int_1^2 \left(\int_0^1 \left(\int_1^2 z^{x+y} dx \right) dz \right) dy = \int_1^2 \left(\int_1^2 \left(\int_0^1 (z^{x+y}) dz \right) dx \right) dy$

ANA Ü6

7.) $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ ... normierte Räume über $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

$\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$ $\quad \|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y$

$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}$

zz: $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ sind Normen auf $X \times Y$

(N1) zz: $\forall (x,y) \in X \times Y: \|(x,y)\|_1 \geq 0$, $\|(x,y)\|_2 \geq 0$ und

$\|(x,y)\|_1 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$ und $\|(x,y)\|_2 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

Sei $x \in X$, $y \in Y$ bel.

$\|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y \geq 0$, da $\|x\|_X$ und $\|y\|_Y$ beide ≥ 0

$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2} \geq 0$ genauso klar

Falls $x = 0$ und $y = 0$ gilt

$\|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y = \|0\|_X + \|0\|_Y = 0$

$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2} = \sqrt{\|0\|_X^2 + \|0\|_Y^2} = \sqrt{0} = 0$

Falls $\|(x,y)\|_1 = 0$ bzw. $\|(x,y)\|_2 = 0$

$0 = \|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y \iff x = 0$ und $y = 0$

$0 = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2} \iff \|x\|_X = 0 \wedge \|y\|_Y = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0$

(N2) zz: $\forall (x,y) \in X \times Y \ \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}): \|\lambda(x,y)\|_{1,2} = |\lambda| \cdot \|(x,y)\|_{1,2}$

Sei $x \in X$, $y \in Y$ und $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ bel.

$\|\lambda(x,y)\|_1 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_1 = \|\lambda x\|_X + \|\lambda y\|_Y = |\lambda| \cdot \|x\|_X + |\lambda| \cdot \|y\|_Y = |\lambda| \cdot \|(x,y)\|_1$

$\|\lambda(x,y)\|_2 = \sqrt{\|\lambda x\|_X^2 + \|\lambda y\|_Y^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \cdot (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)} = |\lambda| \cdot \|(x,y)\|_2$

(N3) zz: $\forall (x,y), (a,b) \in X \times Y: \|(x,y) + (a,b)\|_{1,2} \leq \|(x,y)\|_{1,2} + \|(a,b)\|_{1,2}$

Sei $x, a \in X$, $y, b \in Y$ bel.

$\|(x,y) + (a,b)\|_1 = \|(x+a, y+b)\|_1 = \|x+a\|_X + \|y+b\|_Y \leq \|x\|_X + \|a\|_X + \|y\|_Y + \|b\|_Y$

$= \|(x,y)\|_1 + \|(a,b)\|_1$

$\|(x+a, y+b)\|_2 = \sqrt{\|x+a\|_X^2 + \|y+b\|_Y^2} \leq \sqrt{(\|x\|_X + \|a\|_X)^2 + (\|y\|_Y + \|b\|_Y)^2}$

$\leq \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2} + \sqrt{\|a\|_X^2 + \|b\|_Y^2} = \|(x,y)\|_2 + \|(a,b)\|_2$

Minkowskische Ungleichung (Buch Lemma 3.1.4) ...

ANA Ü6

7.) ... zz: $\|.\|_\infty, \|.\|_1, \|.\|_2$ sind paarweise äquivalent

Sei $(x,y) \in X \times Y$ bel.

$$\max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \leq \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2} \leq \|x\|_X + \|y\|_Y \leq p \cdot \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$$

$\Leftrightarrow \|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1 \leq p \cdot \|(x,y)\|_\infty \; (\leq p \cdot \|(x,y)\|_2 \leq p \cdot \|(x,y)\|_1)$

Also $1 \cdot \|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_1 \leq p \cdot \|(x,y)\|_\infty \Rightarrow \|.\|_\infty \sim \|.\|_1$

$1 \cdot \|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_2 \leq p \cdot \|(x,y)\|_\infty \Rightarrow \|.\|_\infty \sim \|.\|_2$

$1 \cdot \|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1 \leq p \cdot \|(x,y)\|_2 \Rightarrow \|.\|_2 \sim \|.\|_1$

ANA ÜG

8.) $(X, \|.\|_X)$ ... normierter Raum $(Y, \|.\|_Y)$ ... Banachraum

$T: X \to Y$ ... linear, beschränkt, bijektiv $T^{-1}: Y \to X$ ... beschränkt

zz: $(X, \|.\|_X)$ ... Banachraum

Da Y ein Banachraum ist gilt $\forall (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Cauchy-Folge aus Y mit der Metrik $d_{\|.\|_Y}$, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} y \in Y$.

Aus der Beschränktheit von T und T^{-1} folgt deren (gleichmäßige) Stetigkeit. (Satz 9.2.6.), d.h. $\forall \varepsilon>0 \, \exists \delta>0 \, \forall a,b\in X: d(a,b)_{\|.\|_X} < \delta \Rightarrow d(T(a),T(b))_{\|.\|_Y} < \varepsilon$

und $\forall \varepsilon>0 \, \exists \delta>0 \, \forall a,b\in Y: d(a,b)_{\|.\|_Y} < \delta \Rightarrow d(T^{-1}(a),T^{-1}(b))_{\|.\|_X} < \varepsilon$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X, d.h.

$$\forall \varepsilon>0 \, \exists N\in\mathbb{N} \, \forall n,m \geq N: d(x_n,x_m)_{\|.\|_X} < \varepsilon$$

$(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in Y

Sei $\varepsilon>0$ bel. Wähle $\delta>0$, so dass $\forall a,b\in X: d(a,b)_{\|.\|_X} < \delta \Rightarrow d(T(a),T(b))_{\|.\|_Y} < \varepsilon$

Wähle N, so dass $\forall n,m \geq N: d(x_n,x_m)_{\|.\|_X} < \delta$

Dann ist $\forall n,m\geq N: d(T(x_n),T(x_m))_{\|.\|_Y} < \varepsilon$

$\Rightarrow (T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge

Das heißt $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $y\in Y$.

$x := T^{-1}(y) \in X$

Da T^{-1} (gleichmäßig) stetig ist konvergiert $T^{-1}(T(x_n))$ gegen $T^{-1}(T(x)) = x$

$\Rightarrow (X, \|.\|_X)$ ist ein Banachraum

ANA Ü6

10.) $A_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\|A_1\| = \sup \{ \|A_1 x\|_1 : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_\infty \leq 1 \}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) \leq 1$

$\|A_1 x\|_1 = \| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \|_1 = \| \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \|_1 = |2x_1 - x_2| + |x_2|$

$x_1 \in [-1, 1], \quad 2x_1 \in [-2, 2], \quad 2x_1 - x_2 \in [-3, 3] \quad x_2 \in [-1, 1]$

$|2x_1 - x_2| + |x_2| \in [0, 4]$

$\Rightarrow \|A_1\| = 4$

$A_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (-2 \;\; 0 \;\; 2)$

$\|A_2\| = \sup \{ \|A_2 x\|_1 : x \in \mathbb{R}^3, \|x\|_\infty \leq 1 \}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) \leq 1$

$\|A_2 x\|_1 = \| (-2 \;\; 0 \;\; 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \|_1 = \| \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 0 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \|_1 = |-2x_1| + |2x_3|$

$= 2|x_1| + 2|x_3| \in [0, 4]$

$\Rightarrow \|A_2\| = 4$

$A_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|A_3\| = \sup \{ \|A_3 x\|_1 : x \in \mathbb{R}, \|x\|_\infty \leq 1 \}$

$x = (x_1) \qquad \|x\|_\infty = \max(|x_1|) = |x_1| \leq 1$

$\|A_3 x\|_1 = \| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (x_1) \|_1 = \| \begin{pmatrix} 5x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \|_1 = |5x_1| + |x_1| = 6|x_1| \in [0, 6]$

$\Rightarrow \|A_3\| = 6$