MAS Ü6

1) P_1, P_2 ... W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Dichten $f = \frac{dP_1}{d\nu}$ und $g = \frac{dP_2}{d\nu}$ bzgl. Maß ν.

zz: $\int |f-g| \, d\nu = 2 \sup\{|P_1(A) - P_2(A)| : A \in \mathcal{A}\}$

"$\leq$" $\int |f-g| \, d\nu = \int_{[f \geq g]} f-g \, d\nu - \int_{[f<g]} f-g \, d\nu = \left(\int_{[f\geq g]} f \, d\nu - \int_{[f \geq g]} g \, d\nu\right) - \left(\int_{[f<g]} f \, d\nu - \int_{[f<g]} g \, d\nu\right)$

$= \left(\int_{[f\geq g]} dP_1 - \int_{[f\geq g]} dP_2\right) - \left(\int_{[f<g]} dP_1 - \int_{[f<g]} dP_2\right) = P_1[f\geq g] - P_2[f \geq g] - P_1[f<g] + P_2[f<g]$

$= P_1[f \geq g] - P_2[f\geq g] - (1 - P_1[f\geq g]) + (1 - P_2[f \geq g]) = 2(P_1[f\geq g] - P_2[f \geq g])$

$\Rightarrow \int_\Omega |f-g| \, d\nu \leq 2 \sup\{|P_1(A) - P_2(A)| : A \in \mathcal{A}\}$

"$\geq$" Sei $A \in \mathcal{A}$ bel.

$P_1(A) - P_2(A) = \int_A dP_1 - \int_A dP_2 = \int_A f \, d\nu - \int_A g \, d\nu = \int_A f-g \, d\nu = \int_\Omega f-g \, d\nu - \int_{A^c} f-g \, d\nu$

$\int_\Omega f-g \, d\nu = \int_\Omega f \, d\nu - \int_\Omega g \, d\nu = \int_\Omega dP_1 - \int_\Omega dP_2 = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow P_1(A) - P_2(A) = -\int_{A^c} f-g \, d\nu$

$\Rightarrow 2|P_1(A) - P_2(A)| = |2(P_1(A) - P_2(A))| = \left|\int_A f-g \, d\nu - \int_{A^c} f-g \, d\nu\right|$

1. Fall $\int_A f-g \, d\nu \geq \int_{A^c} f-g \, d\nu$:

$2|P_1(A) - P_2(A)| = \int_A f-g \, d\nu - \int_{A^c} f-g \, d\nu = \underbrace{\int_{A\cap[f\geq g]} f-g \, d\nu}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{A\cap[f<g]} f-g \, d\nu}_{<0} - \underbrace{\int_{A^c\cap[f\geq g]} f-g \, d\nu}_{\geq 0} - \underbrace{\int_{A^c \cap [f<g]} f-g \, d\nu}_{<0}$

$\leq \int_{A\cap[f\geq g]} f-g \, d\nu - \int_{A^c\cap[f<g]} f-g \, d\nu \leq \int_{[f\geq g]} f-g \, d\nu - \int_{[f<g]} f-g \, d\nu = \int_\Omega |f-g| \, d\nu$

2. Fall $\int_{A^c} f-g \, d\nu > \int_A f-g \, d\nu$:

$2|P_1(A) - P_2(A)| = \int_{A^c} f-g \, d\nu - \int_A f-g \, d\nu \leq \int_{A^c\cap[f\geq g]} f-g \, d\nu - \int_{A\cap[f<g]} f-g \, d\nu \leq \int_{[f\geq g]} f-g \, d\nu - \int_{[f<g]} f-g \, d\nu = \int_\Omega |f-g| \, d\nu$

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}: 2|P_1(A) - P_2(A)| \leq \int_\Omega |f-g| \, d\nu$

Also gilt $\int |f-g| \, d\nu \geq 2 \sup\{|P_1(A) - P_2(A)| : A \in \mathcal{A}\}$ und mit oben insgesamt Gleichheit.

$\square$

MAS Ü6

2) $\nu, \mu \dots$ σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\nu \leq \mu$.

zz: $\exists$ μ-f.ü. eindeutige Funktion $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ und $0 \leq f \leq 1$ μ-f.ü.

Nach Radon-Nikodym gilt $\nu, \mu \dots \sigma$-endlich, $\nu \ll \mu \Leftrightarrow$ Dichte $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ f.ü. eindeutig

Wir zeigen $\nu \ll \mu$: Sei N mit $\mu(N) = 0$ bel.

$0 \leq \nu(N) \leq \mu(N) = 0 \Rightarrow \nu(N) = 0$ also gilt $\nu \ll \mu$

zz: $0 \leq f \leq 1$ μ-f.ü. $\qquad f \geq 0$ gilt nach RN

Angenommen $\exists A$ mit $\mu(A) > 0$ (also nicht Nullmenge) und $f > 1$ auf A

$$\overset{\nu \leq \mu}{\Rightarrow} 0 \leq \mu(A) - \nu(A) = \int_A d\mu - \int_A d\nu = \int_A d\mu - \int_A f \, d\mu \overset{f>1 \text{ auf } A}{=} \int_A 1 - f \, d\mu < 0 \quad \lightning$$

$\Rightarrow 0 \leq f \leq 1$ μ-f.ü.

$\square$

MAS Üb 6

3) a) μ... endliches Maß, ν... σ-endliches Maß, $\nu \ll \mu$, ε-δ-Kriterium gilt nicht ist gesucht:

ε-δ-Kriterium: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall A: \mu(A)<\delta \Rightarrow \nu(A)<\varepsilon$

Sei $\nu := \lambda$ und $\mu := \mu_F$ wobei $F(x) := \arctan(x)$.

Offenbar ist λ σ-endlich und μ_F endlich, da $F: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

zz: $\lambda \ll \mu_F$: Sei A mit $\mu_F(A)=0$ bel.

$$\lambda(A) = \int_A d\lambda = \int_A \frac{x^2+1}{x^2+1}\, d\lambda(x) = \int_A (x^2+1)\, F'(x)\, d\lambda(x) = \int_A x^2+1\, \frac{d\mu_F}{d\lambda}\, d\lambda = \int_A x^2+1\, d\mu_F(x)$$
$$= \int_A x^2\, d\mu_F(x) + \mu_F(A) = 0$$

zz: $\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists A: \mu_F(A)<\delta \wedge \lambda(A)\geq \varepsilon$

Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Sei $\delta>0$ bel. Wähle $n\in\mathbb{N}$, sodass $|F(n+1)-F(n)| = |\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n)| < \delta$ $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

Sei $A := [n, n+1]$, dann gilt $\mu_F(A) = F(n+1)-F(n) < \delta$ und

$\lambda(A) = \lambda([n,n+1]) = 1 \geq \varepsilon$

b) μ... endlich, ν... σ-endlich, ε-δ-Kriterium gilt

zz: ν... endlich

Da μ endlich ist gilt $\mu(\Omega)<\infty$ und da ν σ-endlich ist $\exists A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \wedge \forall n: \nu(A_n)<\infty$

$\mu(\Omega) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon$

Nach ε-δ-Kriterium gilt nun $\exists \delta>0\ \forall A: \mu(A)<\delta \Rightarrow \nu(A)<\varepsilon$

$\forall n\geq N: \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) < \delta \Rightarrow \nu(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) < \varepsilon$

$$\Rightarrow \nu(\Omega) = \nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \underbrace{\nu(\bigcup_{k=1}^{N-1} A_k)}_{\substack{<\infty \\ \text{da } \nu\ \sigma\text{-endlich}}} + \underbrace{\nu(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k)}_{\substack{<\varepsilon<\infty \\ \text{nach } \varepsilon\text{-}\delta\text{-Kriterium}}} < \infty \quad \Rightarrow \nu \text{... endlich}$$

$\square$

MAS Ü 6

4) $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ heißt Dichtepunkt $:\Longleftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \frac{\lambda(A \cap [x-h, x+h])}{2h} = 1$

$D_A = \{x \in A : x \text{ ist Dichtepunkt}\}$

$A \in \mathcal{B}$ zz: $\lambda(A \setminus D_A) = 0$

Sei $A \subseteq \mathcal{B}|_{[a,b]}$ bel. für $a < b \in \mathbb{R}$ bel.

$F(x) := \int\limits_{[a,x]} \mathbb{1}_A \, d\lambda$

$\Rightarrow$ aus dem Hauptsatz über Diff- und Integralrechnung F ist λ-f.ü. diffbar und $F' = \mathbb{1}_A$ λ-f.ü.

$F(x) = \int\limits_{[a,x]} \mathbb{1}_A \, d\lambda = \int \mathbb{1}_{A \cap [a,x]} \, d\lambda = \lambda(A \cap [a,x])$

$F'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\lambda(A \cap [a, x+h]) - \lambda(A \cap [a, x-h])}{2h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\lambda(A \cap [x-h, x+h])}{2h}$

$\Rightarrow D_A = \{x \in A : F'(x) = 1\}$ und da $F' = \mathbb{1}_A$ λ-f.ü. gilt $\lambda(A \setminus D_A) = 0$

$\square$

MAS Ü6

5) μ, ν ... endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$

a) $\kappa := \min(\mu, \nu)$ Ist κ ein Maß?

$\Omega := \{0,1\}$ $\mathcal{A} := \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\} = 2^{\Omega}$

$\mu(\emptyset) = 0$ $\mu(\{0\}) = 1$ $\mu(\{1\}) = 4$ $\mu(\{0,1\}) = 5$

$\nu(\emptyset) = 0$ $\nu(\{0\}) = 2$ $\nu(\{1\}) = 2$ $\nu(\{0,1\}) = 4$

$\kappa(\emptyset) = 0$ $\kappa(\{0\}) = 1$ $\kappa(\{1\}) = 2$ $\kappa(\{0,1\}) = 4 \neq \kappa(\{0\}) + \kappa(\{1\}) = 3$

b) zz: $\exists\, \mathfrak{I}$ .. Maß: $\mathfrak{I} \leq \mu, \mathfrak{I} \leq \nu$, $\forall \phi$ ... Maß mit $\phi \leq \mu \wedge \phi \leq \nu \Rightarrow \phi \leq \mathfrak{I}$

Nach 2) (da μ endlich $\Rightarrow$ σ-endlich) existiert eine Dichte $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$ gleiches für $g = \frac{d\lambda}{d\nu}$. Sei $h = \min(f, g) \geq 0$.

$\mathfrak{I}(A) := \int_A h \, d\lambda = \int_A \min(f,g)\, d\lambda = \int_A \min\left(\frac{d\lambda}{d\mu}, \frac{d\lambda}{d\nu}\right) d\lambda$

offenbar gilt $\mathfrak{I} \leq \mu$ und $\mathfrak{I} \leq \nu$ nach Definition von $\mathfrak{I}$.

Sei ϕ ein Maß mit $\phi \leq \mu \wedge \phi \leq \nu$ bel

$\mathfrak{I}(A) = \int_A \min(f,g)\, d\lambda = \int_{A \cap [f \geq g]} g \, d\lambda + \int_{A \cap [f < g]} f \, d\lambda = \int_{A \cap [f \geq g]} d\nu + \int_{A \cap [f < g]} d\mu = \nu(A \cap [f \geq g]) + \mu(A \cap [f < g])$

$\geq \phi(A \cap [f \geq g]) + \phi(A \cap [f < g]) = \phi(A)$

$\Rightarrow \phi \leq \mathfrak{I}$

$\square$

MAS Ü 6

6) $F(x) := \sqrt{x}$ auf $[0,\infty)$

a) glm. stetig?

Ja. zz: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in [0,\infty) \forall y : |x-y| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(y)| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $\delta := \varepsilon^2$ Sei $x \in [0,\infty)$ bel.

Sei y mit $|x-y| < \delta$ bel.

$\Rightarrow |F(x) - F(y)|^2 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}|\,|\sqrt{x} + \sqrt{y}| = |x - y| < \delta = \varepsilon^2$

$\Rightarrow |F(x) - F(y)| < \varepsilon$

b) Lipschitz-stetig?

Nein zz: $\neg(\exists M \forall x,y \in [0,\infty) : |F(x) - F(y)| < M|x-y|)$

zz: $\forall M \; \exists x,y \in [0,\infty) : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \geq M|x-y|$

Sei M bel. Wähle $x = \frac{1}{M^2}$ $y = 0$

$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{M} = M\frac{1}{M^2} = M|x-y|$

c) absolut stetig?

Ja. Nach 4.DS gilt F abs. stetig $\Leftrightarrow F(x) = \int_{[a,x]} f \, d\lambda + c$ mit $f \in \mathcal{L}_1(\lambda|_{[a,b]})$

$F'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad \int_{[a,x]} \frac{1}{2\sqrt{y}} d\lambda(y) + \sqrt{a} = \sqrt{y}\Big|_a^x = \sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{a} = \sqrt{x} = F(x)$

$\Rightarrow$ Für jedes $[a,b] \subseteq [0,\infty)$ gilt F ist abs. stetig auf $[a,b]$ $\Rightarrow$ auch auf $[0,\infty)$