ANA ÜG

8.) $\langle X, d\rangle$... metrischer Raum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Folge in X $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \precsim)$ mit

$(n_1, m_1) \precsim (n_2, m_2) \iff n_1 \leq n_2 \wedge m_1 \leq m_2$ ...gerichtete Menge

zz: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge $\iff \lim\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} d(x_m, x_n) = 0$

Wissen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N: d(x_n, x_m) < \varepsilon \iff \lim\limits_{N\to\infty} d(x_n, x_m) = 0,\ n, m \geq N$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N: d(x_n, x_m) < \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists (N,N) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ \forall (n,m) \succsim (N,N):$

$d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\lim\limits_{N\to\infty} d(x_n, x_m) = 0,\ n, m \geq N \iff \lim\limits_{(N,N)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} d(x_n, x_m) = 0,\ (m,n) \succsim (N,N)$

$\Updownarrow$

$\lim\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} d(x_n, x_m) = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists (N,N) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ \forall (n,m) \succsim (N,N): d(x_n, x_m) < \varepsilon \iff \lim\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} d(x_n, x_m) = 0$

$\square$