ALG Ü*

339) R ... Integritätsbereich zz: $R[x]$ ... Hauptidealring $\Leftrightarrow$ R ... Körper

($\Leftarrow$) Sei $I \lhd R[x]$ ... Ideal beliebig.

1. Fall $I = \{0\}$ $\Rightarrow I = \langle 0 \rangle$ also Hauptideal

2. Fall $I = R[x]$ $\Rightarrow I = \langle 1 \rangle$ also Hauptideal

3. Fall $I \neq \{0\} \wedge I \neq R[x]$ $\Rightarrow \exists p \in R[x] \setminus \{0\} : p \in I$ Wir wählen p mit geringstem Grad

Für $p \in R \Rightarrow p \cdot \frac{1}{p} = 1 \in I \Rightarrow I = R[x]$ also Hauptideal

Für $p \notin R$ Sei $f \in I$ bel. zz: $f \in (p)$, da dann $I = (p)$ also Hauptideal

$\exists q, r \in R[x]$: $f = q \cdot p + r$ $\Rightarrow r = f - q \cdot p \in I$

Da $\text{grad}(r) < \text{grad}(p)$ oder $r = 0$ muss, $\in I$ da $\text{grad}(p)$ minimal gewählt war gelten, dass $r = 0$. $\Rightarrow f = q \cdot p \in (p)$

$\Rightarrow I = (p)$ $\Rightarrow R[x]$ ist Hauptidealring

($\Rightarrow$) zz: $\forall r \in R \setminus \{0\} \; \exists r^{-1} \in R: r \cdot r^{-1} = 1$

Sei $r \in R \setminus \{0\}$ bel. $I := (r, x) \lhd R[x]$ Da $R[x]$ ein Hauptidealring ist

$\exists p \in I : (p) = I$ $\Rightarrow \exists z_1, z_2 \in R[x]: r = z_1 p \wedge x = z_2 p$

$\Rightarrow 0 = \text{grad}(r) = \text{grad}(z_1) + \text{grad}(p) \Rightarrow \text{grad}(z_1), \text{grad}(p) = 0$

$\Rightarrow 1 = \text{grad}(x) = \text{grad}(z_2) + \text{grad}(p) = \text{grad}(z_2) + 0 \Rightarrow \text{grad}(z_2) = 1$

$\Rightarrow \exists a, b \in R: z_2 = a + bx \Rightarrow x = z_2 p = ap + bpx \Rightarrow bp = 1$

$\Rightarrow b = p^{-1} \Rightarrow p \in E(R) \Rightarrow I = (p) = R[x]$

$\Rightarrow \exists c, d \in R[x]: cr + dx = 1 \Rightarrow rc_1 + \ldots = 1 \Rightarrow c_1 = r^{-1} \in R$

$\Rightarrow R$ ist Körper

$\square$