# LINAG Ü7

2.7.2. $\alpha$) $K = \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\8\\7\end{pmatrix} \right\}$

$U$... von den Vektoren aufgespannter Unterraum $\quad x = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

aus 2.7.1 $\alpha$: Basis $= \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$ Ja, x ist im UR, da die Basis den ganzen $\mathbb{R}^3$ aufspannt.

$$x = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

2.8.2. $\mathbb{R}^{4\times 1}$ $\quad U_1 = [\{a\}], \quad U_2 = [\{b, c\}], \quad U_3 = [\{b, a\}]$

$$a = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

- ges Basis von $U_1 + U_2$

  $U_1 + U_2 = \{ v_1 + v_2 \mid v_1 \in U_1, v_2 \in U_2 \}$

  Die Basis von $U_1$ ist $\{a\}$. Die Basis von $U_2$ ist $\{b, c\}$, da b und c l.u. sind.

  Da a nicht als LK aus b und c dargestellt werden kann (3. Komponente der Vektoren), ist die Basis von $U_1 \oplus U_2$ die Menge $\{a, b, c\}$.

- ges Basis von $U_2 + U_3$

  Die Basis von $U_3$ ist $\{a, b\}$ (l.u. z.B. wegen erster und zweiter Komponente).

  Die Basis von $U_2 + U_3$ ist $\{a, b, c\}$, da a von $\{b, c\}$ l.u. ist.

  Die Summe ist nicht direkt, da b aus $U_2$ durch b aus $U_3$ als LK bilden kann.

- ges Basis von $U_1 + U_2 + U_3$

  Basis von $U_1 + U_2 + U_3$ ist $\{a, b, c\}$, da Basis von $U_2 + U_3$ $\{a, b, c\}$ ist und a (aus der Basis von $U_1$) in der Basis von $U_2 + U_3$ schon enthalten ist. Die Summe ist nicht direkt (siehe Basis von $U_2 + U_3$)

# LINAG Ü7

2.8.3. $a = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $U_1 = [\{a\}]$ $U_2 = [\{b, c\}]$ $U_3 = [\{a, b\}]$

- ges Basis von $U_1 \cap U_2$:

Sei $v \in U_1 \cap U_2$ bel. Dann gilt

$$v = x_a \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } v = x_b \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + x_c \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_a \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = x_b \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + x_c \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Aus der 3. Komponente folgt $x_a = 0$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Die Basis von $U_1 \cap U_2$ ist somit $\emptyset$.

- ges Basis von $U_2 \cap U_3$:

Sei $v \in U_2 \cap U_3$ bel. Dann gilt

$$v = x_{b2} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + x_c \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ und } v = x_a \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + x_{b3} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{b2} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + x_c \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = x_a \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + x_{b3} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Aus der 3. Komponente folgt $x_a = 0$. Dann folgt aus der 2. Komponente, dass $x_c = 0$ ist.

$$\Rightarrow v = x_b \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Die Basis von $U_2 \cap U_3$ ist somit $\{b\}$.

- ges Basis von $U_1 + (U_2 \cap U_3)$

Da die Basis von $U_2 \cap U_3$ (nämlich $\{b\}$) und die Basis von $U_1$ (nämlich $a$) l.u. sind ist die Basis von $U_1 + (U_2 \cap U_3)$ die Menge $\{a, b\}$.

LINAG Ü7

2.8.7 $V$ ... Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$

$U_1, U_2, \dots, U_r$ ... Unterräume von $V$ mit $U_1 + U_2 + \dots + U_r = V$

zz: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r \Leftrightarrow \dim U_1 + \dim U_2 + \dots + \dim U_r = n$

$\Rightarrow$ Da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist $\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$.

($U_1 \cap U_2 = \emptyset$, daher $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$).

$U_a := U_1 \oplus U_2$ Aus 2.26. im Buch folgt $U_a$ ist UR von $V$.

Da $U_a \cap U_3 = \emptyset$ ist $\dim(U_a \oplus U_3) = \dim(U_a) + \dim(U_3)$.

... (gleich bis $U_r$)

Also ist $\dim(U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r) = \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dots + \dim(U_r)$

$$\shortparallel$$

$$\dim(V) = n$$

$\Leftarrow$ Aus dem Dimensionssatz folgt: Wenn $\dim(U) + \dim(T) = \dim(U+T)$, dann ist $\dim(U \cap T) = 0 \Rightarrow U \cap T = \emptyset$. Weiters folgt, dass $\dim(U+T) \leq \dim(U) + \dim(T)$ sein muss.

Angenommen die Summe zw. $U_n$ und $U_m$ ist nicht direkt. $\Rightarrow \exists v \in V : v \in U_n \cap U_m$

$\Rightarrow \dim(U_n \cap U_m) > 1$

$\Rightarrow \dim(U_n + U_m) < \dim(U_n) + \dim(U_m)$

$\Rightarrow \dim(U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots + U_m + \dots + U_r) < \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dots + \dim(U_n) + \dots$

$\dots + \dim(U_m) + \dots + \dim(U_r) = n$

$\Leftrightarrow \dim\left(\sum_{i=0}^{n} U_i\right) < n$ $\Rightarrow$ Basis von $\sum_{i=0}^{n} U_i$ spannt nicht ganz $V$ auf $\lightning$

$\square$

# LINAG Ü7

2.8.18 $U_1, U_2, T \dots$ UR von $V$ $\qquad V = U_1 \oplus U_2$

a) zz: $T \subset U_1 \vee T \subset U_2 \Rightarrow T = (T \cap U_1) \oplus (T \cap U_2)$

Aus $V = U_1 \oplus U_2$ folgt, dass $\nexists v \in V: v \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = \emptyset$

1. Fall $T = \emptyset$: $T \subset U_1 \wedge T \subset U_2$, da $\emptyset$ in jeder Menge enthalten ist.

$T \cap U_1 = \emptyset$ und $T \cap U_2 = \emptyset$

$\Rightarrow T = (T \cap U_1) + (T \cap U_2)$ und die Summe ist direkt, da $\emptyset \cap \Sigma \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

2. Fall $T \neq \emptyset$: Da $U_1 \oplus U_2 = V$ folgt, dass $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

$\Rightarrow T$ kann nicht Teilmenge von $U_1$ und $U_2$ sein.

o.B.d.A $T \subset U_1 \wedge T \not\subset U_2$

$T \cap U_1 = T \qquad T \cap U_2 = \emptyset$

$(T \cap U_1) + (T \cap U_2) = T + \emptyset = T$ offensichtlich ist die Summe direkt.

b) zz: $U_1 \subset T \vee U_2 \subset T \Rightarrow T = (T \cap U_1) \oplus (T \cap U_2)$

o.B.d.A. $U_1 \subset T$

$T \cap U_1 = U_1 \qquad T \cap U_2$ ist laut Satz 2.3.8 ein UR von $V$ und da $T \cap U_2 \subseteq U_2$ auch UR von $U_2$.

Da $T \cap U_2$ auch gleich $T \setminus U_1$ ist (folgt aus $U_1 \cap U_2 = \emptyset$) kann $0_v$ nicht in $T \setminus U_1 = T \cap U_2$ liegen, da $0_v \in U_1$.

$\Rightarrow T \cap U_2 = \emptyset$

Dann gilt $(T \cap U_1) + (T \cap U_2) = U_1 \oplus \emptyset = U_1 = T$.

offensichtlich ist die Summe direkt.

LINAG Ü7

2.6. x Wissen: $\dim(V) = n < \infty \iff \exists$ Unterraumkette $(U_0, U_1, \dots, U_n)$

$\wedge \nexists$ Unterraumkette $(U_0, U_1, \dots, U_{n+1})$

a) Aus Übung 2.6.4 folgt, dass (A2) und (A3) zu (D2) äquivalent sind. (A1) ist nicht zu (D2) äquivalent, siehe b).

b) Gegenbsp: $V = \mathbb{R}^3$ $\dim(V) = 3$

$U_0 = \emptyset$ $U_1 = [\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}]$ $U_2 = [\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}]$

offensichtlich ist $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2$.

Da $U_2 = V$ existiert kein $U_3$ für das gilt $U_2 \subsetneq U_3 \subset V$.

$\Rightarrow$ (A1) gilt, aber (D2) gilt nicht!

c) zz: (D2) $\Rightarrow$ (A1)

$\dim(V) = 2 \Rightarrow \exists$ Unterraumkette $(U_0, U_1, U_2) \wedge \nexists$ Unterraumkette $(U_0, U_1, U_2, U_3)$

Nachdem es keine 4 Elemente lange Unterraumkette in $V$ gibt, kann es auch keinen Unterraum $U_3$ geben für den gilt $U_2 \subsetneq U_3 \subset V$.

$\Rightarrow \exists U_0, U_1, U_2 \leq V: ((U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2) \wedge (\nexists U_3 \leq V: U_2 \subsetneq U_3))$

d) (A2) ist die korrekte Formalisierung.

(A3) ist auch korrekt, allerdings wurden den Unterräumen andere Namen gegeben (ändert aber nichts an der Aussage.)

# LINAG Ü7

2.8.x V... Vektorraum $n \geq 0$ $m \geq 2$

$v_1, \ldots, v_n$ ...Vektoren aus $V$ $U_1, \ldots, U_m$ ... Unterräume von $V$

a) zz: $(v_1, \ldots, v_n)$ l.u. $\iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} : (v_i \notin [\{v_j : j < i\}]$

Bew: $(\Rightarrow)$ trivial, da $\forall v \in \{v_1, \ldots, v_n\} : (v \notin [\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v\}])$, daher ist $v$ auch nicht in einer Teilmenge von $[\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v\}]$.

$(\Leftarrow)$ offensichtlich gilt $\emptyset$ ist l.u. $\leftarrow$ IA

IV: $\{v_1, \ldots, v_x\}$ ist l.u.

IS: Da $v_{x+1} \notin [\{v_j : j < x+1\}] = [\{v_1, \ldots, v_x\}]$ ist $\{v_1, \ldots, v_x\} \cup \{v_{x+1}\}$ l.u. (Satz ??)

$\Rightarrow (v_1, \ldots, v_n)$ l.u.

b) $U_1 + \ldots + U_m$ ist eine direkte Summe $\iff \forall i \in \{1, \ldots, m\} : (U_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} U_j = \{\theta\})$

Bew: $(\Rightarrow)$ trivial, da $\forall i \in \{1, \ldots, m\} : (U_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} U_j = \{\theta\})$

$(\Leftarrow)$ IA: $\forall i \in \{1, 2\} : (U_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} U_j = \{\theta\})$

Für $i = 2$ gilt $U_2 \cap \sum_{j=1} U_1 = \{\theta\}$. $\Rightarrow U_2 \cap U_1 = \{\theta\}$

$\Rightarrow \sum_{j=2}^{2} U_2 \cap U_1 = \{\theta\}$

$\Rightarrow U_1 \oplus U_2$ ist eine direkte Summe

IV: $U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_x$ ist eine direkte Summe

IS: Da die Summe bei $x$ direkt ist gilt:

$\forall j \in \{1, 2, \ldots, x\} : U_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{x} U_i = \{\theta\}$

Die Summe $U_1 + U_2 + \ldots + U_x + U_{x+1}$ ist also nur direkt wenn $U_{x+1} \cap \sum_{j=1}^{x} U_j = \{\theta\}$.

$\Rightarrow U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$ ist direkt wenn

$\forall i \in \{1, \ldots, m\} : (U_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} U_j = \{\theta\})$

$\square$

# LINAG Ü7

3.2.1. $f : K^{3\times 1} \to K^{2\times 1}$

b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \overline{x_2} \end{pmatrix}$ $\quad K = \mathbb{C}$

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ bel.

$$f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \overline{x_2+y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \overline{x_2} + \overline{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \overline{x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \overline{y_2} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$z := (1+2i)$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1+1i \\ 2+2i \\ 3+3i \end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix} (1+2i)\cdot(1+1i) \\ (1+2i)\cdot(2+2i) \\ (1+2i)\cdot(3+3i) \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} (1-2)+i(1+2) \\ (2-4)+i(2+4) \\ (3-6)+i(3+6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i3 \\ \overline{-2+i6} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1+i3 \\ 6+i2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2i)\cdot(1+1i) \\ (1+2i)\cdot\overline{(2+2i)} \end{pmatrix} = (1+2i)\cdot f\begin{pmatrix} 1+1i \\ 2+2i \\ 3+3i \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ ist <u>keine</u> lineare Abbildung

c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix}$

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in K^{3\times 1}$ bel.

$$f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_1+y_2+y_3 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Sei $c \in K$ bel. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^{3\times 1}$ bel.

$$f\begin{pmatrix} c\cdot x_1 \\ c\cdot x_2 \\ c\cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c\cdot x_1 + c\cdot x_2 + c\cdot x_3 \end{pmatrix} = c\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix} = c\cdot f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ ist eine lineare Abbildung

d) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ ist <u>keine</u> lineare Abbi

# LINAG Ü7

3.2.1. ...

c) ges: Basis von $\ker f$

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^{3\times 1} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

Behauptung: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\ker f$.

Bew: - Anhand der ersten zwei Komponenten ist offensichtlich, dass die Vektoren l.u. sind.

- Sei $x \in \ker f$ bel. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Es muss gelten $x_3 = -x_1 - x_2$.

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ erzeugt ganz $\ker f$

-

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix}$$

$$(a) + (b) + (-a-b) = a - a + b - b = 0$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ erzeugt nur $\ker f$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\ker f$

ges: Basis von $f(K^{3\times 1})$

$$f(K^{3\times 1}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \mid \exists x_1, x_2, x_3 : x = x_1 + x_2 + x_3 \right\}$$

Jeder Wert $x \in K$ kann als Summe aus $x_1, x_2, x_3$ dargestellt werden

z.B. durch $x = 0 + 0 + x$ (mit $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = x$).

$\Rightarrow$ Basis von $f(K^{3\times 1})$ ist z.B. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

offensichtlich l.u. und Erzeugungssystem von $f(K^{3\times 1})$.