LINAG Ü7

2.8.3. $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $U_1 = [\{a\}]$ $U_2 = [\{b, c\}]$ $U_3 = [\{a, b\}]$

- ges Basis von $U_1 \cap U_2$:

Sei $v \in U_1 \cap U_2$ bel. Dann gilt

$$v = x_a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = x_b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Aus der 3. Komponente folgt $x_a = 0$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Basis von $U_1 \cap U_2$ ist somit $\emptyset$.

- ges Basis von $U_2 \cap U_3$:

Sei $v \in U_2 \cap U_3$ bel. Dann gilt

$$v = x_{b2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = x_a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{b3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{b2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{b3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der 3. Komponente folgt $x_a = 0$. Dann folgt aus der 2. Komponente, dass $x_c = 0$ ist.

$$\Rightarrow v = x_b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Basis von $U_2 \cap U_3$ ist somit $\{b\}$.

- ges Basis von $U_1 + (U_2 \cap U_3)$

Da die Basis von $U_2 \cap U_3$ (nämlich $\{b\}$) und die Basis von U_1 (nämlich a) l.u. sind ist die Basis von $U_1 + (U_2 \cap U_3)$ die Menge $\{a, b\}$.