LINAG Ü6

2.4.2 K... Körper

a) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ... Vektoren aus $K^{2\times 1}$

zz: Familie (x,y) l.u. $\Longleftrightarrow$ $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$

1) (x,y) l.u. $\Rightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$

$\Longleftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Rightarrow (x,y)$ l.a.

Wähle $a = y_2$ und $b = -x_2$. Dann ist *

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 y_2 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 y_1 \\ -x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ x_2 y_2 - x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (x,y)$ ist l.a.

2) $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0 \Rightarrow (x,y)$ l.u.

$\Longleftrightarrow (x,y)$ l.a. $\Rightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a x_1 + b \cdot y_1 \\ a x_2 + b y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a x_1 + b y_1 &= 0 \\ a x_2 + b y_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$a x_2 + b y_2 = 0 \Longleftrightarrow a x_2 = -b y_2 \Longleftrightarrow a = -\frac{b y_2}{x_2}$$

$$a x_1 + b y_1 = 0 \Longleftrightarrow -\frac{b y_2}{x_2} \cdot x_1 + b y_1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow b \cdot \left(y_1 - \frac{y_2}{x_2} \cdot x_1\right) = 0 \Longleftrightarrow y_1 - \frac{y_2}{x_2} \cdot x_1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{y_2 \cdot x_1}{x_2} = -y_1 \Longleftrightarrow -y_2 \cdot x_1 = -x_2 \cdot y_1$$

$$\Longleftrightarrow 0 = -x_2 \cdot y_1 + x_1 y_2$$ $\square$

* Falls $y_2 = 0 \wedge x_2 = 0$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich l.a., da

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{y_1}{x_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$$

LINAG Ü6

2.4.4

1.) Wenn V unendlich ist und K unendlich ist, dann gibt es in V eine unendliche l.u. Menge.

falsch; Gegenbsp: $K = \mathbb{Z}$ $V = \mathbb{Z}^1$

Offensichtlich ist jede l.u Menge in V nur ein Element lange.

2.) Wenn V unendlich ist, und K endlich, dann gibt es in V eine unendlich l.u. Menge.

wahr; Beweis: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Da K endlich ist, V jedoch unendlich ist muss die Basis aus unendlich vielen Elementen bestehen ($\dim V = \infty$).

Die Basis ist immer eine l.u. Menge.

3.) Wenn V unendlich ist, dann gibt es in V eine unendliche l.u. Menge.

falsch, siehe 1.)

4.) Wenn V unendlich ist, dann gibt es in V eine unendliche l.a. Menge.

wahr, da V eine unendliche Menge ist, die den Nullvektor enthalt.

5.) Wenn V endlich ist, dann ist K endlich.

falsch; Gegenbsp: $K = \mathbb{Z}$ $V = \mathbb{Z}^0$

6.) Wenn V unendlich ist, dann ist K unendlich.

falsch; Gegenbsp: $K = \mathbb{Z}_2$ $V = \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$

Offensichtlich gibt es unendlich viele Folgen aus $\{0,1\}$.