2. Sei $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein angeordneter Körper. Ist $M \subseteq K$ nach oben beschränkt und bezeichnet O die Menge aller oberen Schranken von M, so zeige man, dass $O \cap M = \emptyset$ oder $O \cap M = \{z\}$ und dass die zweite Möglichkeit genau dann eintritt, wenn M ein Maximum hat.

M ist nach oben beschränkt $\Leftrightarrow \exists o \in K : \forall m \in M : o \geq m$

$O = \{x \in K : \forall m \in M : x \geq m\}$

$O \cap M = \{x \in K : \forall m \in M : x \geq m \land x \in M\} = \{x \in M : \forall m \in M : x \geq m\}$

Indirekter Bew: Angenommen $x_1, x_2 \in O \cap M$ mit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1, x_2 \in M$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \forall m \in M : x_1 \geq m \text{, da } x_2 \in M \Rightarrow x_1 \geq x_2 \\ \Rightarrow \forall m \in M : x_2 \geq m \text{, da } x_1 \in M \Rightarrow x_2 \geq x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 \ \lightning$$

$\Rightarrow \underline{O \cap M = \emptyset}$ oder $O \cap M = \{x\}$

zz: $O \cap M = \{z\} \Leftrightarrow \exists l \in M : \forall m \in M : l \geq m$

$\exists! z \in M : \forall m \in M : z \geq m \overset{?}{\Leftrightarrow} \exists l \in M : \forall m \in M : l \geq m$

Indirekter Bew: angenommen $\exists l_1, l_2 \in M : \forall m \in M : l_1 \geq m \land l_2 \geq m$ mit $l_1 \neq l_2$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \forall m \in M : l_1 \geq m \text{, da } l_2 \in M \text{ folgt } l_1 \geq l_2 \\ \Rightarrow \forall m \in M : l_2 \geq m \text{, da } l_1 \in M \text{ folgt } l_2 \geq l_1 \end{array}\right\} \Rightarrow l_1 = l_2 \ \lightning$$

$\square$