PDGL Ü1

1) (i) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \arctan(x_3 - x_2) + \sinh(x_1)\sin(x_1 - x_2^2)$

ges: Gradient von f

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(x_1)\sin(x_1 - x_2^2) + \sinh(x_1)\cos(x_1 - x_2^2) \\ -\frac{1}{(x_3 - x_2)^2 + 1} - \sinh(x_1)\cos(x_1 - x_2^2)\, 2x_2 \\ \frac{1}{(x_3 - x_2)^2 + 1} \end{pmatrix}$$

(ii) (a) ges: $\int_1^3 x^{1,5} \ln(x)\,dx$

$$\int x^{3/2} \ln(x)\,dx = \int \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\right)' \ln(x)\,dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \ln(x) - \int \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \frac{1}{x}\,dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \ln(x) - \frac{2}{5} \int x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \ln(x) - \frac{2}{5} \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{25} x^{5/2} (5 \ln(x) - 2)$$

$$\int_1^3 x^{3/2} \ln(x)\,dx = \frac{2}{25} x^{5/2} (5 \ln(x) - 2) \Big|_1^3 = \frac{2}{25} 3^{5/2} (5 \ln(3) - 2) - \frac{2}{25} (5 \underbrace{\ln(1)}_{=0} - 2)$$

$$= \frac{2}{25} 9\sqrt{3} (5 \ln(3) - 2) + \frac{4}{25} \approx 4{,}5161$$

(b) ges: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,dx$

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \sin(x) \cdot (-\cos(x))'\,dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\,dx$$

$$= -\sin(x)\cos(x) + \int 1 - \sin^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2 \int \sin^2(x)\,dx = x - \sin(x)\cos(x) \qquad \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi - 0(-1)}{2} - \frac{-\pi - 0(-1)}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

(iii) $0 < p < q$, $0 < a < b$ $\quad V \subseteq \mathbb{R}^2$ eingeschlossen durch $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $x^2 = ay$, $x^2 = by$

ges: Skizze und Flächeninhalt

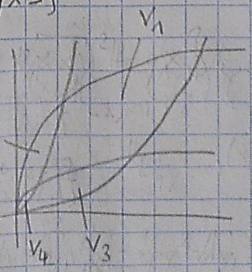
$V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0,\ x^2 \in [ay, by],\ y^2 \in [px, qx]\}$

$V_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0,\ y^2 \leq qx,\ x^2 \leq by\}$

$V_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0,\ y^2 \leq qx,\ x^2 \leq ay\}$

$V_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0,\ y^2 \leq px,\ x^2 \leq by\}$

$V_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0,\ y^2 \leq px,\ x^2 \leq ay\}$



$f(x) := \frac{x^2}{b}$ $\quad g(x) := \sqrt{qx}$ $\quad f(x) = g(x)$ für $x = 0$ und $x = \sqrt[3]{b^2 q}$

$$A(V_1) = \int_0^{\sqrt[3]{b^2 q}} g(x) - f(x)\,dx = \sqrt{q} \int_0^{\sqrt[3]{b^2 q}} x^{\frac{1}{2}}\,dx - \frac{1}{b} \int_0^{\sqrt[3]{b^2 q}} x^2\,dx = \sqrt{q}\, \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^{\sqrt[3]{b^2 q}} - \frac{1}{b} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt[3]{b^2 q}}$$

$$= \sqrt{q}\, \frac{2}{3} \sqrt{b^2 q} - \frac{1}{3b} b^2 q = \frac{2}{3} bq - \frac{1}{3} bq = \frac{1}{3} bq$$

PDGL Ü1

1) ...

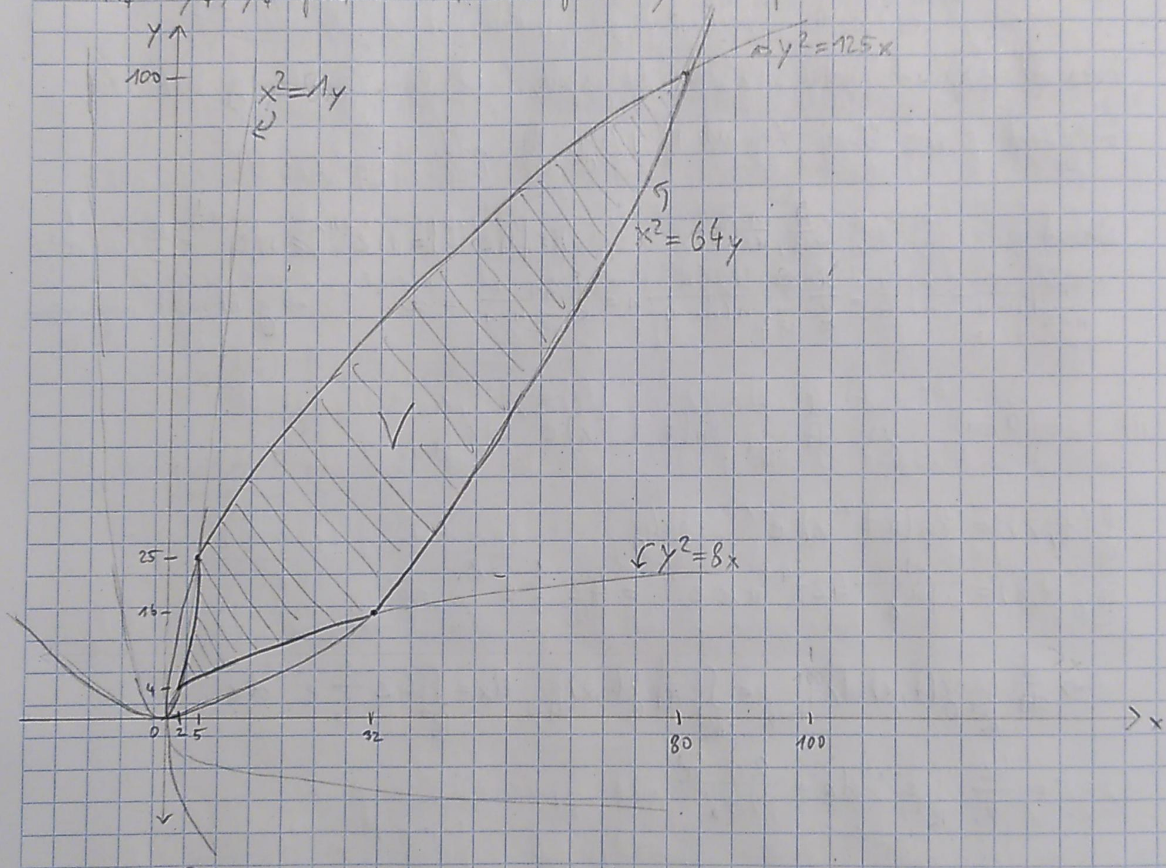
$x_1 = \sqrt{a^{4/3} p^{2/3}}$

$x_1^2 = a y_1$, $y_1^2 = p x_1$ $\Rightarrow x_1 = \sqrt{a y_1} = \frac{1}{p} y_1^2 \Rightarrow a y_1 = \frac{1}{p^2} y_1^4 \Rightarrow y_1 = a^{1/3} p^{2/3}$

$x_2^2 = a y_2$, $y_2^2 = q x_2$ $\Rightarrow x_2 = \sqrt{a^{4/3} q^{2/3}}$ $\quad y_2 = a^{1/3} q^{2/3}$

$x_3^2 = b y_3$, $y_3^2 = q x_3$ $\Rightarrow x_3 = \sqrt{b^{4/3} q^{2/3}}$ $\quad y_3 = b^{1/3} q^{2/3}$

$x_4^2 = b y_4$, $y_4^2 = p x_4$ $\Rightarrow x_4 = \sqrt{b^{4/3} p^{2/3}}$ $\quad y_4 = b^{1/3} p^{2/3}$



$0 < p = 8 < q = 125$ $\qquad 0 < a = 1 < b = 64$

$p = 2^3$, $q = 5^3$, $a = 1^3$, $b = 4^3$

$\Rightarrow x_1 = \sqrt{1^{4/3} \cdot 8^{2/3}} = \sqrt{2^{2/3 \cdot 3}} = 2 \qquad y_1 = 1^{1/3} \cdot 8^{2/3} = 4$

$x_2 = \sqrt{1 \cdot 5^2} = 5 \qquad y_2 = 1 \cdot 5^2 = 25 \qquad x_3 = \sqrt{4^4 \cdot 5^2} = 80 \qquad y_3 = 4 \cdot 5^2 = 100$

$x_4 = \sqrt{4^4 \cdot 2^2} = 32 \qquad y_4 = 4 \cdot 2^2 = 16$

$\Rightarrow A(V) = A(V_1) - A(V_2) - A(V_3) + A(V_4)$

$= \frac{1}{3} bq - \frac{1}{3} aq - \frac{1}{3} bp + \frac{1}{3} ap = \frac{1}{3} (ap + bq - aq - bp)$

(im Beispiel oben $= \frac{1}{3}(1 \cdot 8 + 64 \cdot 125 - 1 \cdot 125 - 64 \cdot 8) = 2457$ sieht gut aus laut Geogebra)

PDGL Ü1

2) (i) ges: $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} n e^{-nx}\,dx$, $\int_{\mathbb{R}^+} \lim_{n\to\infty} n e^{-nx}\,dx$ $\quad$ Wid. zu Satz von Lebesgue?

$$\int_0^\infty n e^{-nx}\,dx = n\int_0^{-\infty} e^u \left(-\frac{1}{n}\right) du = -\int_0^{-\infty} e^u\,du = -e^u\Big|_0^{-\infty} \qquad \left[u=-nx \quad \frac{du}{dx}=-n\right.$$

$$= -\lim_{u\to-\infty} e^u + e^0 = 0+1 = 1 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^+} n e^{-nx}\,dx = \lim_{n\to\infty} 1 = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} n e^{-nx} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{nx}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n e^{nx}} = 0 \qquad \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^+}\lim_{n\to\infty} n e^{-nx}\,dx = \int_{\mathbb{R}^+} 0\,dx = \underline{\underline{0}}$$

Kein Widerspruch zum Satz von Lebesgue, da es keine Funktion g gibt, die integrierbar ist und $\forall n\in\mathbb{N}: |f_n| \leq g$ (μ-f.ü.) gilt.

Damit $g \geq |f_n|$ auf $\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right]$ muss $g(x) \geq |ne^{-nx}| = ne^{-nx} \geq ne^{-n\frac{1}{n}} = \frac{n}{e}$ für $n=2,3,\dots$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right|\frac{n}{e} = \frac{1}{e}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-(n-1)}{n(n-1)}n = \frac{1}{e}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1} = \infty \qquad \Rightarrow g \text{ ist nicht integrierbar}$$

(ii) $t_0 \in (0,\infty)$ $\quad$ ges: $\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^+} \ln(\pi t^{42} x) e^{-x^2}\,dx\Big|_{t=t_0}$

$f(t,x) := \ln(\pi t^{42} x)\, e^{-x^2}$ ... stetig

$\frac{d}{dt} f(t,x) = \frac{1}{\pi t^{42} x} 42 t^{41}\pi x e^{-x^2} = 42\,\frac{1}{t} e^{-x^2}$ ... stetig

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^+} f(t,x)\,dx\Big|_{t=t_0} = \int_{\mathbb{R}^+}\frac{d}{dt}f(t,x)\Big|_{t=t_0}dx = \int_{\mathbb{R}^+} 42\,\frac{1}{t_0}e^{-x^2}\,dx$$

$$= \frac{42}{t_0}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2}\,dx}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{21\sqrt{\pi}}{t_0}$$

[Sei $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum und sei (f_n) eine Folge von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $f_n: \Omega \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Die Folge (f_n) konvergiere μ-f.ü. gegen eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion f. Ferner $\exists g$ ... μ-integrierbare Funktion $\forall n\in\mathbb{N}: |f_n| \leq g$ μ-f.ü. $\quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu$

[$f: [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) ... stetig $\quad \forall (s,t)\in[a,b]\times[c,d]\ \exists \frac{d}{ds}f(s,t)$ und ist stetig $\quad \Rightarrow \frac{d}{ds}\int_c^d f(s,t)\,dt = \int_c^d \frac{d}{ds}f(s,t)\,dt$

PDGL Ü1

3) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ... offen, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ... stetig, $C_c^\infty(\Omega) := \{\varphi\in C^\infty(\Omega) : \mathrm{supp}(\varphi) \text{ kompakt in } \Omega\}$

$\int_\Omega f\varphi\,dx = 0 \quad \forall \varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ zz: $f\equiv 0$ in Ω

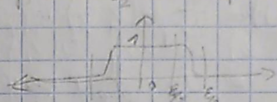
Indirekt angenommen $\exists x\in\Omega : f(x)\neq 0$.

Da f stetig ist $\exists \varepsilon>0$ mit $U_\varepsilon(x)\subseteq\Omega$ (Ω ist offen daher möglich) und

$\forall y\in U_\varepsilon(x) : |f(y)|>\delta$ für $\delta>0$ bel.

Es gibt Funktionen $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq \overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)}$, $\varphi\geq 0$, $\varphi|_{U_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)}\equiv 1$

wie wir aus Ana 3 wissen.



$\Rightarrow \int_\Omega f\cdot\varphi\,dx = \int_{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)} \mathrm{sgn}(f(x))\,|f(x)|\,\varphi(x)\,dx = \mathrm{sgn}(f(x))\int_{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)} \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0}\cdot\underbrace{\varphi(x)}_{\geq 0}\,dx$

$\geq \mathrm{sgn}(f(x))\int_{U_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)}|f(x)|\underbrace{\varphi(x)}_{\equiv 1}\,dx = \mathrm{sgn}(f(x))\int_{U_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)}|f(x)|\,dx \geq \mathrm{sgn}(f(x))\int_{U_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)}\delta\,dx$

$= \underbrace{\mathrm{sgn}(f(x))}_{\neq 0}\,\underbrace{\delta}_{>0}\,\underbrace{\lambda(U_{\frac{\varepsilon}{3}}(x))}_{>0} \neq 0$ $\lightning$

$\Rightarrow f\equiv 0$ in Ω

PDGL Ü1

4) (i) $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$

u heißt radiale Funktion $:\Leftrightarrow$ u hängt nur von $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ab

ZZ: u... radiale Funktion $\Leftrightarrow x_2 u_{x_1} - x_1 u_{x_2} = 0$

Mit Polarkoordinaten rechnen: $x_1(r,\varphi) = r\cos\varphi \quad x_2(r,\varphi) = r\sin(\varphi)$

u ist radial $\Leftrightarrow \frac{d}{d\varphi} u(x_1(r,\varphi), x_2(r,\varphi)) = 0$

Wir wollen $\frac{d}{d\varphi}(u(x_1(r,\varphi), x_2(r,\varphi))$ berechnen:

$$\frac{d}{d\varphi}(u(x_1,x_2)) = \frac{d}{dx_1}u(x_1,x_2)\frac{d}{d\varphi}x_1(r,\varphi) + \frac{d}{dx_2}u(x_1,x_2)\frac{d}{d\varphi}x_2(r,\varphi)$$

$$= u_{x_1}\frac{d}{d\varphi}r\cos\varphi + u_{x_2}\frac{d}{d\varphi}r\sin\varphi = -u_{x_1} r\sin(\varphi) + u_{x_2} r\cos(\varphi)$$

$\Rightarrow$ u... radial $\Leftrightarrow -u_{x_1}x_2 + u_{x_2}x_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 u_{x_1} - x_1 u_{x_2} = 0$

(ii) $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2,\ k > 0 \quad b > 0,\ a = k \cdot b \qquad \frac{(x_1-m_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{b^2} = 1$

ges: PDGL mit Lösungsmenge ist Menge aller Funktionen $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$, die auf jeder solchen Ellipse konstant sind.

$x_1(a,\varphi) = m_1 + a\cos(\varphi) \qquad x_2(b,\varphi) = m_2 + b\sin\varphi$

Analog zu oben wollen wir $\frac{\partial}{\partial\varphi}u(x_1,x_2) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}u(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}u(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial\varphi}m_1 + a\cos(\varphi) + \frac{\partial}{\partial x_2}u(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial\varphi}m_2 + b\sin\varphi$$

$$= -u_{x_1}a\sin(\varphi) + u_{x_2}b\cos(\varphi) = -u_{x_1}(\underbrace{m_2 + b\sin(\varphi)}_{x_2} - m_2)\frac{a}{b} + u_{x_2}(\underbrace{m_1 + a\cos(\varphi)}_{x_1} - m_1)\frac{b}{a}$$

$$= -u_{x_1}(x_2 - m_2)\frac{a}{b} + u_{x_2}(x_1 - m_1)\frac{b}{a}$$

$$= -u_{x_1}(x_2 - m_2)k + u_{x_2}(x_1 - m_1)\frac{1}{k}$$

$\Rightarrow$ Es muss $u_{x_1}(x_2 - m_2)k - u_{x_2}(x_1 - m_1)\frac{1}{k} = 0$ gelten