ANA Ü1

1) Banachraum $(\ell^2, \|.\|_{\ell^2})$ mit $\ell^2(\mathbb{N}) = \{ \underline{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \}$

und $\|\underline{x}\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}$

$K_1(0) := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|\underline{x}\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \leq 1 \}$

zz: $K_1(0)$ ist nicht kompakt bzgl. der von der Norm kommenden Topologie.

$K \subseteq (X, \mathcal{T})$ ... kompakt $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X: $\exists$ konvergente Teilfolge $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$

Definieren wir $a_n := (\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}} = (0, \dots, 0, \underset{n\text{-te Stelle}}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, \dots)$.

$\|a_n\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\delta_{nm}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (1^2)^{\frac{1}{2}} = 1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \|a_n\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \in K_1(0)$

Sei $(a_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ eine bel. Teilfolge, Sei $N \in \mathbb{N}$ bel.

$$(b_m)_{m\in\mathbb{N}} := a_{n(m)} - a_{n(m+1)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } n(m) = n \\ -1, & \text{falls } n(m-1) = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow \| a_{n(m)} - a_{n(m+1)} \|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \| b_n \|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} > 1$

$\Rightarrow (a_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge und somit nicht konvergent.

Da die Teilfolge beliebig war besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge, also ist $K_1(0)$ nicht kompakt. $\square$

ANA Ü1

2) $(X, \mathcal{T}_x)$ ... topologischer Raum $\quad \sim$ ... Äquivalenzrelation auf X

$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\} \qquad X/\sim := \{[x] \mid x \in X\} \qquad \pi : X \to X/\sim$
$\qquad x \mapsto [x]$

$\mathcal{T}_{X/\sim} := \{Y \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(Y) \in \mathcal{T}_x\}$

zz: $(X/\sim, \mathcal{T}_{X/\sim})$ ... topologischer Raum

Def $(X, \mathcal{T})$ ... topologischer Raum $\Leftrightarrow$ (O1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

(O2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{T} : O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$

(O3) $\forall (O_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{T}$: $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$

(O1) $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_x$, da $(X, \mathcal{T}_x)$ ... topologischer Raum

$\pi^{-1}(X/\sim) = \pi^{-1}(\{[x] \mid x \in X\}) = X \in \mathcal{T}_x$

(O2) Sei $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_{X/\sim}$ bel. $\Rightarrow \exists \tilde{O}_1, \tilde{O}_2 \in \mathcal{T}_x : \pi(\tilde{O}_1) = O_1 \wedge \pi(\tilde{O}_2) = O_2$

$\Rightarrow \tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2 \in \mathcal{T}_x \quad \Rightarrow \pi(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2) \in \mathcal{T}_{X/\sim} \quad \Rightarrow \pi(\tilde{O}_1) \cap \pi(\tilde{O}_2) = O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}_{X/\sim}$

(O3) Sei $(O_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{T}_{X/\sim}$ bel. $\Rightarrow \exists (\tilde{O}_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{T}_x$: $\forall i \in I : \pi(\tilde{O}_i) = O_i$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} \tilde{O}_i \in \mathcal{T}_x \quad \Rightarrow \pi\left(\bigcup_{i \in I} \tilde{O}_i\right) \in \mathcal{T}_{X/\sim} \quad \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \pi(\tilde{O}_i) = \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}_{X/\sim}$

Zusatz $\pi(A \cap B) = \{x \in X \mid \exists y \in A \cap B : x \sim y\}$

$= \{x_A \in X \mid \exists y_A \in A : x_A \sim y_A\} \cap \{x_B \in X \mid \exists y_B \in B : x_B \sim y_B\} = \pi(A) \cap \pi(B)$

$\pi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \{x \in X \mid \exists i \in I \ \exists y \in A_i : x \sim y\} = \bigcup_{i \in I} \{x \in X \mid \exists y \in A_i : x \sim y\} = \bigcup_{i \in I} \pi(A_i)$

ANA Ü1

3) $X := \{1,2,3\}$ $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

(i) zz: $(X, \mathcal{T})$ ... topologischer Raum

(O1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$ klar

(O2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{T}: O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$

	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	
$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	alle in $\mathcal{T}$
$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	
$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	

(O3) $\forall (O_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{T}: \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$

Da $\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$ ist die Vereinigung beliebiger Mengen aus $\mathcal{T}$ das nach $\subseteq$ geordnete Maximum und liegt offenbar wieder in $\mathcal{T}$.

(ii) Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum?

Def $(X, \mathcal{T})$ heißt Hausdorff-Raum $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, x \neq y\ \exists O_x, O_y \in \mathcal{T}: O_x \cap O_y = \emptyset \wedge x \in O_x \wedge y \in O_y$

Nein, da für $x=2$, $y=3$ gilt $x \neq y$, aber damit $y \in O_y$ muss $O_y = \{1,2,3\}$ und für O_x kommt damit $x \in O_x$ nur $\{1,2\}$ und $\{1,2,3\}$ in Frage. Beide sind aber nicht zu $\{1,2,3\} = O_y$ disjunkt.

(iii) ges: Umgebungsfilter und möglichst kleine Filterbasis für alle $x \in X$

Def Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x) := \{U \subseteq X \mid \exists O \in \mathcal{T}: x \in O \subseteq U\}$

Def Filterbasis von $\mathcal{F}$ $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ mit $\forall F \in \mathcal{F}\ \exists B \in \mathcal{B}: B \subseteq F$

$x=1: \mathcal{U}(1) = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ $\quad \mathcal{B}(\mathcal{U}(1)) = \{\{1\}\}$

$x=2: \mathcal{U}(2) = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ $\quad \mathcal{B}(\mathcal{U}(2)) = \{\{1,2\}\}$

$x=3: \mathcal{U}(3) = \{\{1,2,3\}\}$. $\quad \mathcal{B}(\mathcal{U}(3)) = \{\{1,2,3\}\}$

(iv) ges: $\forall M \subseteq X$ Abschluss von M

Def closure $cl(M) := \bigcap \{A \subseteq X : A \text{ ... abgeschlossen}, A \supseteq M\}$

Abgeschlossene Mengen: $\{1,2,3\}, \{2,3\}, \{3\}, \emptyset$

$cl(\emptyset) = \emptyset$ $\quad cl(\{1\}) = \{1,2,3\}$ $\quad cl(\{2\}) = \{1,2,3\} \cap \{2,3\} = \{2,3\}$

$cl(\{3\}) = \{1,2,3\} \cap \{2,3\} \cap \{3\} = \{3\}$ $\quad cl(\{1,2\}) = \{1,2,3\}$ $\quad cl(\{1,3\}) = \{1,2,3\}$

$cl(\{2,3\}) = \{1,2,3\} \cap \{2,3\} = \{2,3\}$ $\quad cl(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\}$

ANA Ü1

4) $X = \{1,2,3\}$ $\quad \mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

(i) zz: $\mathcal{B}$ ... Basis von $\mathcal{T}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{B} = \mathcal{T} \vee \mathcal{B} = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

Def $\mathcal{B}$ ... Basis von $\mathcal{T}$ $\Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T} \wedge \forall O \in \mathcal{T}\ \forall x \in O\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq O$

Für $O = \{1\} \in \mathcal{T}$ und $x = 1 \in O$ muss gelten: $\exists B \in \mathcal{B} : 1 \in B \subseteq \{1\} \Rightarrow \{1\} \in \mathcal{B}$

Für $O = \{1,2\} \in \mathcal{T}$ und $x = 2 \in O$ muss gelten: $\exists B \in \mathcal{B} : 2 \in B \subseteq \{1,2\} \Rightarrow \{1,2\} \in \mathcal{B}$, da $\{2\} \notin \mathcal{T}$

— " — $\{1,2,3\}$ — " — 3 — " — $\quad 3 \in B \subseteq \{1,2,3\} \Rightarrow \{1,2,3\} \in \mathcal{B}$, da

$\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\} \notin \mathcal{T}$ (und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$)

$\Rightarrow \mathcal{B} \supseteq \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ woraus die Aussage folgt

(ii) zz: $\mathcal{V}$ ... Subbasis von $\mathcal{T}$ $\Leftrightarrow \{\{1\}, \{1,2\}\} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$

Def $\mathcal{C}$ ... Subbasis von $\mathcal{T}$ $\Leftrightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T} \wedge \forall O \in \mathcal{T}, O \neq X\ \forall x \in O\ \exists C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C} : x \in C_1 \cap \dots \cap C_n \subseteq O$

($\Leftarrow$) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ klar. Sei $O \in \mathcal{T}, O \neq X$ bel. Falls $O = \emptyset$ gilt $\forall x \in O \dots$ klarerweise.

Sei $x \in O$ bel. Falls $x = 1$: $C_1 = \{1\} \in \mathcal{V}$ und $1 \in \{1\} \subseteq O$, da $1 \in O$

Falls $x = 2$: $C_1 = \{1,2\} \in \mathcal{V}$ und $2 \in \{1,2\} \subseteq O$, da $2 \in O \Rightarrow 1 \in O$

x kann nicht gleich 3 sein, da sonst $O = \{1,2,3\} = X$, was ausgeschlossen wurde.

$\Rightarrow \mathcal{V}$ ist eine Subbasis von $\mathcal{T}$

($\Rightarrow$) Da $\mathcal{V}$ ... Subbasis von $\mathcal{T}$ gilt für $O = \{1\} \in \mathcal{T} \setminus \{X\}$ und $x = 1 \in O$, dass $\exists C_1, \dots, C_n \in \mathcal{V}$:

$1 \in C_1 \cap \dots \cap C_n \subseteq \{1\}$. Also gilt $C_1 \cap \dots \cap C_n = \{1\}$. Da $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ muss für

zumindest ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gelten $C_i = \{1\}$. Da $C_i \in \mathcal{V}$ gilt $\{1\} \in \mathcal{V}$.

Gleiches gilt für $O = \{1,2\} \in \mathcal{T} \setminus \{X\}$ und $x = 2 \in O$: $\exists C_1, \dots, C_n \in \mathcal{V} : 2 \in C_1 \cap \dots \cap C_n \subseteq \{1,2\}$

Da $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{T} \Rightarrow C_1 \cap \dots \cap C_n = \{1,2\}$ und somit $\exists i \in \{1, \dots, n\} : C_i = \{1,2\}$

$\Rightarrow \{\{1\}, \{1,2\}\} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$

ANA Ü1

5) $f: X \to Y$ $\quad$ $\mathcal{U}$ ... Ultrafilter auf X $\quad$ $f(\mathcal{U}) := \{f(A) \mid A \in \mathcal{U}\}$

zz: $f(\mathcal{U})$ ... Filterbasis eines Ultrafilters in Y

Def $\mathcal{U}$ ... Ultrafilter auf X $:\Longleftrightarrow$ $\mathcal{U}$ ... Filter auf X $\wedge \forall \mathcal{F}$ ... Filter auf X, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{F}$

Def $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Filterbasis $:\Longleftrightarrow \emptyset \notin \mathcal{B} \wedge \forall U, V \in \mathcal{B}\ \exists W \in \mathcal{B}: W \subseteq U \cap V$

$f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ ist klar

Da $\mathcal{U}$ ... Filter ist gilt $\emptyset \notin \mathcal{U} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{U}: f(A) \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \notin f(\mathcal{U})$

zz: $\forall U, V \in f(\mathcal{U})\ \exists W \in f(\mathcal{U}): W \subseteq U \cap V$

Sei $U, V \in f(\mathcal{U})$ bel. $\Rightarrow \exists \tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{U}: f(\tilde{U}) = U \wedge f(\tilde{V}) = V$

Da $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{U}$ und $\mathcal{U}$ ein Filter ist gilt $\tilde{U} \cap \tilde{V} \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow f(\tilde{U} \cap \tilde{V}) \in f(\mathcal{U})$

Sei $w \in f(\tilde{U} \cap \tilde{V})$ bel. $\Rightarrow \exists \tilde{w} \in \tilde{U} \cap \tilde{V}: f(\tilde{w}) = w \Rightarrow \tilde{w} \in \tilde{U}, \tilde{w} \in \tilde{V} \Rightarrow w = f(\tilde{w}) \in f(\tilde{U}) = U$

$w = f(\tilde{w}) \in f(\tilde{V}) = V$ also $w \in U \cap V$, was $f(\tilde{U} \cap \tilde{V}) \subseteq U \cap V$ bedeutet

Sei $\mathcal{V} := \{V \supseteq U \mid U \in f(\mathcal{U})\} = \{V \supseteq f(A) \mid A \in \mathcal{U}\}$

$\mathcal{V}$ ist ein Filter, da • $\emptyset \in f(\mathcal{U}) \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{V}$

- Sei $A, B \in \mathcal{V}$ bel. $\Rightarrow \exists \tilde{A}, \tilde{B} \in f(\mathcal{U}): A \supseteq \tilde{A} \wedge B \supseteq \tilde{B}$ $\quad \Rightarrow \exists W \in f(\mathcal{U}): W \subseteq \tilde{A} \cap \tilde{B}$

  $\Rightarrow W \subseteq \tilde{A} \cap \tilde{B} \subseteq A \cap B$ $\quad \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{V}$ (da $W \in f(\mathcal{U})$)

- Sei $A \in \mathcal{V}$ bel. Sei $B \supseteq A$ bel. $\Rightarrow \exists \tilde{A} \in f(\mathcal{U}): A \supseteq \tilde{A} \Rightarrow B \supseteq A \supseteq \tilde{A} \Rightarrow B \in \mathcal{V}$

$\mathcal{V}$ ist ein Ultrafilter, da: $\quad$ Sei $\mathcal{F}$ ... Filter auf Y mit $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}$ bel.

Sei $F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{V}$ bel. Nach Konstruktion von $\mathcal{V}$ muss $\forall A \in \mathcal{U}: \neg(f(A) \subseteq F)$

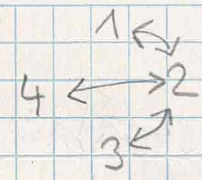
also $\forall A \in \mathcal{U}: F \subset f(A)$. Also $\exists f^{-1}(F) \subseteq X$. Da $\mathcal{F}$ ... Filter $\Rightarrow F \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(F) \neq \emptyset$

$f^{-1}(F) \notin \mathcal{U}$, da sonst $f(f^{-1}(F)) = F \in \mathcal{V}$

Wir finden nun den Widerspruch, dass $\mathcal{U} \cup \{f^{-1}(F)\}$ zu einem Filter abgeschlossen einen echt feineren Filter auf X bilden würde.

$\Rightarrow \mathcal{F} \setminus \mathcal{V} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{V}$ und $\mathcal{V}$ somit ein Ultrafilter. $\quad \square$

ANA Ü1



6) X... Menge $\quad \mathcal{T}, \mathcal{T}'$... Topologien auf X

Def $f:(X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{V})$...stetig $:\Longleftrightarrow \forall x \in X \; \forall U \in \mathfrak{U}_Y(f(x)) : f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}_X(x)$

zz: (i) ⇒ (ii) also $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}' \Rightarrow id_X : (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ ist stetig

Sei $x \in X$ bel. Sei $V \in \mathfrak{U}_{\mathcal{T}}(id_X(x)) = \mathfrak{U}_{\mathcal{T}}(x)$ bel. $\Rightarrow id^{-1}(V) = V \in \mathfrak{U}_{\mathcal{T}}(x) \subseteq \mathfrak{U}_{\mathcal{T}'}(x)$

zz: (ii) ⇒ (i) also $id_X (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ ist stetig $\Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$

Aus Satz 1.2.7 folgt id_X ist stetig $\Longleftrightarrow \forall O \in \mathcal{T} : id_X^{-1}(O) = O \in \mathcal{T}' \Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$

zz: (ii) ⇒ (iii) also $id_X (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ ist stetig $\Rightarrow \forall (Y,\mathcal{V})$... top. Raum $\forall f:(X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{V})$... stetig : $f':(X,\mathcal{T}') \to (Y,\mathcal{V})$... stetig

Aus Prop. 1.2.8. wissen wir Zusammensetzungen stetiger Funktionen sind stetig $\Rightarrow f \circ id_X$... stetig

zz: (ii) ⇒ (iv) also $id_X (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ ist stetig $\Rightarrow \forall (Y,\mathcal{V})$... top. Raum $\forall f':(Y,\mathcal{V}) \to (X,\mathcal{T}')$... stetig : $f:(Y,\mathcal{V}) \to (X,\mathcal{T})$... stetig

Prop 1.2.8. $\Rightarrow id_X \circ f' : (Y,\mathcal{V}) \to (X,\mathcal{T})$ ... stetig

zz: (iii) ⇒ (ii) also $\forall (Y,\mathcal{V})$.. top Raum $\forall f:(X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{V})$...stetig : $f:(X,\mathcal{T}') \to (Y,\mathcal{V})$...stetig $\Rightarrow$ $id_X : (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ ist stetig

Nach Vorraussetzung gilt für $(Y,\mathcal{V}) = (X,\mathcal{T})$ und $f:(X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{V}) = (X,\mathcal{T}) \equiv id_X$, dass da $f \equiv id_X (X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{T})$ stetig ist auch $id_X : (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ stetig ist

zz: (iv) ⇒ (ii) also $\forall (Y,\mathcal{V})$.. top. Raum $\forall f:(Y,\mathcal{V}) \to (X,\mathcal{T}')$...stetig : $f:(Y,\mathcal{V}) \to (X,\mathcal{T})$...stetig $\Rightarrow$ $id_X : (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ ist stetig

Nach Vorraussetzung gilt für $(Y,\mathcal{V}) = (X,\mathcal{T}')$ und $f:(Y,\mathcal{V}) = (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T}') \equiv id_X$, dass da $f \equiv id_X : (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T}')$ stetig ist auch $id_X : (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ stetig ist

$\square$

ANA Ü1

7) $(X, \mathcal{T})$ ... kompakter Hausdorff-Raum

Def $(X,\mathcal{T})$ ... Hausdorff-Raum $:\Longleftrightarrow \forall x,y \in X, x\neq y \ \exists O_x, O_y \in \mathcal{T}, O_x \cap O_y = \emptyset : x \in O_x, y \in O_y$

Def $K \subseteq X$ ... kompakt $\Longleftrightarrow \forall \mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ mit $\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V \supseteq K \ \exists V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V} : \bigcup_{i=1}^{n} V_i \supseteq K$

zz: $\forall \mathcal{U}$ ... Topologie, $\mathcal{U} \subset \mathcal{T} : \neg \mathcal{U}$ ... Hausdorff-Raum

Sei $\mathcal{U}$ wie oben bel. Angenommen $\mathcal{U}$ wäre ein Hausdorff-Raum.

$id_X : (X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{U})$ ist stetig, da $\mathcal{U}$ gröber ist als $\mathcal{T}$. [12.5. Anfang]

Sei $A \in \mathcal{T}$ bel. $\Rightarrow A^c = X \setminus A \subseteq X$ ... abgeschlossen in $(X,\mathcal{T})$ [Lemma 12.12.7 (i)]

Da X kompakt in $\mathcal{T}$ ist, ist auch A^c als abgeschlossene Teilmenge kompakt in $(X,\mathcal{T})$.

Da id_X stetig ist, gilt $id_X(A^c)$ kompakt in $(X,\mathcal{U})$. [Lemma 12.12.8.]

Da nach Annahme $(X,\mathcal{U})$ ein Hausdorff-Raum ist, ist $id_X(A^c)$ (wegen kompakt) [Lemma 12.12.7 (iii)]

auch abgeschlossen in $(X,\mathcal{U})$. $\Rightarrow (id_X(A^c))^c \in \mathcal{U}$ ist also offen.

$\Rightarrow A = (id_X(A^c))^c \in \mathcal{U} \ \forall A \in \mathcal{T} \quad \Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$ ↯ $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$

zz: $\forall \mathcal{U}$ ... Topologie, $\mathcal{T} \subset \mathcal{U} : \neg \mathcal{U}$ ... kompakt

Sei $\mathcal{U}$ wie oben bel. Angenommen $\mathcal{U}$ wäre kompakt.

$id_X : (X,\mathcal{U}) \to (X,\mathcal{T})$ ist stetig, da $\mathcal{U}$ feiner als $\mathcal{T}$.

Da $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$ ist auch $(X,\mathcal{U})$ ein Hausdorff-Raum.

Sei $A \in \mathcal{U}$ bel. A^c ... abgeschlossen $\Rightarrow A^c$ ... kompakt in $(X,\mathcal{U})$

$\Rightarrow id(A^c)$ ... kompakt in $(X,\mathcal{T}) \Rightarrow id(A^c)$ ist abgeschlossen $\Rightarrow A = (id(A^c))^c$ ... offen in $\mathcal{T}$

$\Rightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ ↯ $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$

ANA Ü1

8) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ... diskret, beschränkt $\Rightarrow M$ ... endlich

Def $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ... abgeschlossen M heißt diskret $:\Leftrightarrow \forall x \in M \, \exists r>0 : \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y)<r\} \cap M = \{x\}$

Mit Bolzano-Weierstrass: Angenommen M wäre unendlich $\Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $M: \forall n \neq m: x_n \neq x_m$

Da M beschränkt ist gilt $\exists$ Teilfolge $(x_{K(n)})_{n\in\mathbb{N}} : (x_{K(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ... ist konvergent in $\mathbb{R}^n$

Da M abgeschlossen ist gilt $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_{K(n)} \in M$ $\lightning$ zu M ... diskret, da

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{K(n)} = x \in M \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : d(x_{K(n)}, x) < \varepsilon$ gleichzeitig aber

$\exists r>0 : \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y)<r\} \cap M = \{x\}$

$\Rightarrow M$ ist endlich

Mit Topologie: M ... diskret $\Rightarrow \forall x \in M \, \exists r_x > 0 : U_{r_x}(x) \cap M = \{x\}$

$\mathcal{C} := \{U_{r_x}(x) \mid x \in M\}$ ist eine offene Überdeckung von M

Da M abgeschlossen und beschränkt ist folgt in $\mathbb{R}^n$, dass M kompakt ist.

Def M ... kompakt $:\Leftrightarrow \forall (U_i)_{i\in I}$ ... offen mit $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \subseteq M \; \exists U_1, \dots, U_n : \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq M$

Also existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$ mit $\bigcup \mathcal{C}^* \subseteq M$.

Da nach Konstruktion $\forall U \in \mathcal{C} : |U \cap M| = 1$ enthält M n Elemente und ist somit endlich.

$\square$

ANA Ü1

9) $(X, \mathcal{T}_X)$ ... topologischer Raum $\quad (Y, \mathcal{T}_Y)$ ... Hausdorff-Raum

$f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ ... injektiv, stetig

zz: $(X, \mathcal{T}_X)$ ... Hausdorff-Raum

Def $(X, \mathcal{T})$ ... Hausdorff-Raum $:\Leftrightarrow \forall \underset{x \neq y}{x, y \in X}\ \exists O_x, O_y \in \mathcal{T}, O_x \cap O_y = \emptyset : x \in O_x, y \in O_y$

Sei $x, y \in X$ bel. mit $x \neq y$. Da f injektiv ist gilt $f(x) \neq f(y)$.

Da $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ... Hausdorff gilt $\exists \tilde{O}_x, \tilde{O}_y \in \mathcal{T}_Y : \tilde{O}_x \cap \tilde{O}_y = \emptyset \wedge f(x) \in \tilde{O}_x \wedge f(y) \in \tilde{O}_y$.

Da f stetig ist gilt $\forall z \in X\ \forall V \in \mathcal{U}(f(z))\ \exists U \in \mathcal{U}(z): f(U) \subseteq V$

$\Rightarrow \exists U_x \in \mathcal{U}(x): f(U_x) \subseteq \tilde{O}_x \quad \wedge \quad \exists U_y \in \mathcal{U}(y): f(U_y) \subseteq \tilde{O}_y$

Es gilt $x \in U_x \in \mathcal{T}_X$, $y \in U_y \in \mathcal{T}_X$ somit bleibt nur zz. $U_x \cap U_y = \emptyset$

Sei $z \in U_x \cap U_y$ bel. $\Rightarrow f(z) \in f(U_x) \subseteq \tilde{O}_x \wedge f(z) \in f(U_y) \subseteq \tilde{O}_y$

$\lightning$ zu $\tilde{O}_x \cap \tilde{O}_y = \emptyset$

$\Rightarrow U_x \cap U_y = \emptyset \quad$ also ist auch $(X, \mathcal{T}_X)$ Hausdorff

ANA Ü1

10) $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ $\quad \mathcal{E}$... euklidische Topologie $\quad \mathcal{T} := \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus X$ ist kompakt in $(\mathbb{R}, \mathcal{E})\} \cup \{\emptyset\}$

(i) zz: $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ist eine Topologie

(O1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ klar $\quad \mathbb{R} \in \mathcal{T}$, da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ kompakt ist

(O2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{T}: O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$

Sei $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ bel. $\quad$ 1. Fall $O_1 = \emptyset \vee O_2 = \emptyset \Rightarrow O_1 \cap O_2 = \emptyset \in \mathcal{T}$

2. Fall $O_1 \neq \emptyset \neq O_2 \quad \Rightarrow \mathbb{R} \setminus O_1, \mathbb{R} \setminus O_2$ .. kompakt in $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$

$\Rightarrow O_1^c \cup O_2^c$ ... kompakt $\quad \Rightarrow (O_1^c \cup O_2^c)^c = O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$

(O3) $\forall (O_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{T}: \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$

Sei $(O_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{T}$ bel. Wir können alle $j \in I$ mit $O_j = \emptyset$ ignorieren, also beachten wir nur $\bigcup_{i \in I \setminus J} O_i$. Zur Lesbarkeit o.B.d.A. $\forall i \in I: O_i \neq \emptyset$

Da $(O_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ gilt $\forall i \in I: \mathbb{R} \setminus O_i$ .. kompakt in $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$

$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} O_i^c$ .. kompakt $\quad \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in I} O_i^c\right)^c = \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T} \qquad \Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ist eine Topologie

(ii) zz: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \; \exists O_x, O_y \in \mathcal{T}: (x \in O_x \wedge y \notin O_x) \wedge (y \in O_y \wedge x \notin O_y)$

Sei $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ bel. o.B.d.A. $x < y \qquad d := \frac{y-x}{3}$

$[y-d, y+d] \subseteq \mathbb{R}$ und $[x-d, x+d] \subseteq \mathbb{R}$ sind beide kompakt in $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$

$\Rightarrow O_x := \mathbb{R} \setminus [y-d, y+d] = (-\infty, y-d) \cup (y+d, \infty) \in \mathcal{T}, \quad y \notin O_x, \; x \in O_x$

$O_y := \mathbb{R} \setminus [x-d, x+d] = (-\infty, x-d) \cup (x+d, \infty) \in \mathcal{T}, \quad x \notin O_y, \; y \in O_y$

(iii) zz: Ist $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ Hausdorff?

Def $(X, \mathcal{T})$ .. Hausdorff $\iff \forall x, y \in X, x \neq y \; \exists O_x, O_y \in \mathcal{T}: x \in O_x, y \in O_y \wedge O_x \cap O_y = \emptyset$

Nein, da für $x = 0, y = 1$ gilt: Sei $O_x, O_y \in \mathcal{T}$ bel. mit $0 \in O_x$ und $1 \in O_y$ sowie $O_x \cap O_y = \emptyset$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: n \notin O_x \vee n \notin O_y \quad \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: n \in O_x^c \vee n \in O_y^c$

Da $O_x, O_y \in \mathcal{T} \Rightarrow O_x^c, O_y^c$ .. kompakt in $(\mathbb{R}, \mathcal{E}) \Rightarrow O_x^c \cup O_y^c$ .. kompakt in $(\mathbb{R}, \mathcal{E}) \Rightarrow$ auch beschränkt,

aber $\forall n \in \mathbb{N}: n \in O_x^c \cup O_y^c$ $\lightning$ $\quad \Rightarrow \forall O_x, O_y \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x, y \in O_y: O_x \cap O_y \neq \emptyset$

$\square$

$M \subseteq \mathbb{R}$ .. kompakt in $(\mathbb{R}, \mathcal{E}) \iff \exists a_1 \le b_1 < a_2 \le b_2 < \dots < a_n \le b_n \in \mathbb{R}: M = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$

$\Rightarrow X \in \mathcal{T} \iff \exists a_1 \le b_1 < \dots < a_n \le b_n \in \mathbb{R}: X = (-\infty, a_1) \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} (b_i, a_{i+1}) \cup (b_n, \infty)$