ANA Ü8

3.) $z \in \mathbb{C}$, $|z|=1$ Für welche z ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konvergent?

1. Fall $z = 1+0i$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ bei $z=1$ divergent

2. Fall $z \neq 1$:

Dirichletsches Kriterium mit $C=2$. $(a_n) = \frac{1}{n}$ und $(b_n) = z^n$

Offensichtlich ist $(a_n) = \frac{1}{n}$ eine monotone Nullfolge.

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z^j\right| = \left|-1 + \sum_{j=0}^{n} z^j\right| \leq |-1| + \left|\sum_{j=0}^{n} z^j\right| = 1 + \left|\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\right|$$

$$\leq 1 + \frac{|z^{n+1}| + |-1|}{|z-1|} = 1 + \frac{|z|^{n+1}+1}{|z-1|} = 1 + \frac{1+1}{|z-1|} = \frac{|z-1|+2}{|z-1|}$$

$$\frac{|z-1|+2}{|z-1|} \leq \frac{|z|+|-1|+2}{|z|+|-1|} = \frac{1+1+2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2 = C$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ist für $z \neq 1$ konvergent