MAS Ü3

1) $(\Omega_i, \mathcal{A}_i) = ([0,1], \mathcal{B}|_{[0,1]})$ für $i=1,2$ ς... Zählmaß λ... Lebesguemaß

$D := \{(x,x) \mid 0 \le x \le 1\}$ $f = 1\!\!1_D$

a) zz: $D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ also $\{(x,x) \mid 0\le x\le 1\} \in \mathcal{B}|_{[0,1]} \otimes \mathcal{B}|_{[0,1]}$

Wir wissen $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B} = \mathcal{B}^2$ (weil $\mathcal{A}_i = \sigma(\mathcal{E}_i) \Rightarrow \mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{E}_1\times\mathcal{E}_2)$)
Erzeugendensystem

gleiches gilt für $\mathcal{B}|_{[0,1]} \otimes \mathcal{B}|_{[0,1]} = \mathcal{B}^2|_{[0,1]\times[0,1]}$.

$D^c = \{(x,y) \mid 0\le x,y \le 1, x\ne y\}$ $\mathcal{B}|_{[0,1]} = \sigma(\{[a,b] \mid 0\le a\le b\le 1, a,b\in\mathbb{Q}\})$

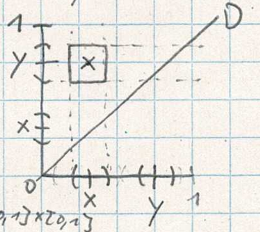
$\Rightarrow$ es reichen abzählbar viele Mengen im Erzeuger

Sei $x\ne y$ aus $[0,1]$ bel. $\Rightarrow \exists I_x, I_y \subseteq [0,1]: x\in I_x, y\in I_y, x\notin I_y, y\notin I_x$

z.B. $I_x = (\max(0, x-\frac{|x-y|}{3}), \min(1, x+\frac{|x-y|}{3}))$, $I_y = (\max(0,y-\frac{|x-y|}{3}), \min(1,y+\frac{|x-y|}{3}))$

$\Rightarrow I_x\times I_y \in \mathcal{B}^2|_{[0,1]\times[0,1]}$ und $(x,y)\in I_x\times I_y$ sowie $D\cap I_x\times I_y = \emptyset$

$\Rightarrow D^c = \bigcup_{\substack{x\in[0,1]\\ y\in[0,1]\\ x\ne y}} I_x\times I_y$ und da der Erzeuger abzählbar ist reicht auch hier eine abzählbare Vereinigung. $\Rightarrow D^c \in \mathcal{B}^2|_{[0,1]\times[0,1]}$



$\Rightarrow D\in \mathcal{B}^2|_{[0,1]\times[0,1]} = \mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$

zz: f ...messbar   klar, da $D\in\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ und f als Indikator von messbarer Menge selbst messbar ist.

b) zz: $\iint f_x(y)\,d\varsigma(y)\,d\lambda(x) \ne \iint f_y(x)\,d\lambda(x)\,d\varsigma(y)$

$$\iint f_x(y)\,d\varsigma(y)\,d\lambda(x) = \int_{[0,1]}\underbrace{\int 1\!\!1_D(x,y)\,d\varsigma(y)}_{=1,\text{ da für } x=y \text{ nur } 1 \text{ sonst } 0} d\lambda(x) = \int_{[0,1]} 1\,d\lambda(x) = 1$$

$$\iint f_y(x)\,d\lambda(x)\,d\varsigma(y) = \int_{[0,1]}\underbrace{\int 1\!\!1_D(x,y)\,d\lambda(x)}_{=0,\text{ da für } x\ne y \text{ gleich } 0 \text{ und nur für } x=y \text{ gleich } 1 \text{ das hat aber Länge } 0} d\varsigma(y) = \int 0\,d\varsigma(y) = 0$$

Warum geht Fubini nicht?

Nicht σ-endlich:

Damit $\varsigma(A)<\infty$ darf A nur endlich viele Elemente enthalten. Da $[0,1]$ überabzählbar viele Elemente enthält gilt $\nexists (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varsigma(A_n)<\infty\ \forall n: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [0,1]$

MAS Ü3

2) X_1, X_2 ... diskrete, unabhängige SGen   ges: bedingte Verteilung für $X_1 | X_1 + X_2$

a) $X_1 \sim B_{n,p}$ $X_2 \sim B_{m,p}$

$$P[X_1 = x \mid X_1 + X_2 = z] = \frac{P[X_1 = x, X_1 + X_2 = z]}{P[X_1 + X_2 = z]}$$

$$= \frac{P[X_1 = x, X_2 = z - x]}{P[X_1 + X_2 = z]} = \frac{P[X_1 = x]\, P[X_2 = z - x]}{P[X_1 + X_2 = z]}$$

$$P[X_1 = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P[X_2 = z - x] = \binom{m}{z-x} p^{z-x} (1-p)^{m-(z-x)}$$

$$P[X_1 + X_2 = z] = P[Z = z] = \binom{n+m}{z} p^z (1-p)^{n+m-z} \quad \text{mit } Z \sim B_{n+m,p} \quad \Delta$$

$$\Rightarrow P[X_1 = x \mid X_1 + X_2 = z] = \frac{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \binom{m}{z-x} p^{z-x} (1-p)^{m-(z-x)}}{\binom{n+m}{z} p^z (1-p)^{n+m-z}}$$

$$= \frac{\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}}{\binom{n+m}{z}} p^{x+z-x-z} (1-p)^{n-x+m-z+x-n-m+z} = \frac{\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}}{\binom{n+m}{z}}$$

b) $X_1 \sim P_{\lambda_1}$ $X_2 \sim P_{\lambda_2}$ $Z = X_1 + X_2 \sim P_{\lambda_1 + \lambda_2}$ Δ

$$P[X_1 = x] = \frac{\lambda_1^x e^{-\lambda_1}}{x!} \qquad P[X_2 = z - x] = \frac{\lambda_2^{z-x} e^{-\lambda_2}}{(z-x)!}$$

$$P[X_1 + X_2 = z] = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^z e^{-\lambda_1 - \lambda_2}}{z!}$$

$$\Rightarrow P[X_1 = x \mid X_1 + X_2 = z] = \frac{\frac{\lambda_1^x e^{-\lambda_1}}{x!} \frac{\lambda_2^{z-x} e^{-\lambda_2}}{(z-x)!}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^z e^{-\lambda_1 - \lambda_2}}{z!}} = \frac{\lambda_1^x \lambda_2^{z-x} z!\, e^{-\lambda_1 - \lambda_2}}{x!(z-x)!(\lambda_1+\lambda_2)^z e^{-\lambda_1-\lambda_2}}$$

$$= \binom{z}{x} \lambda_1^x \lambda_2^{z-x} \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^z}$$

Probe: $\sum_x P[X_1 = x \mid X_1 + X_2 = z] = \sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x} \lambda_1^x \lambda_2^{z-x} \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^z} = \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^z} (\lambda_1 + \lambda_2)^z = 1$

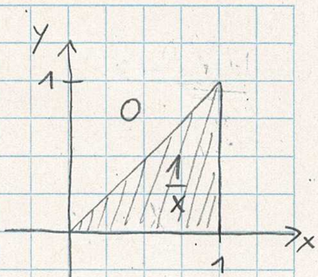
$$\sum_x \frac{\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}}{\binom{n+m}{z}} = \frac{1}{\binom{n+m}{z}} \sum_{x=0}^{z} \binom{n}{x}\binom{m}{z-x} = \frac{1}{\binom{n+m}{z}} \binom{n+m}{z} = 1$$

Vandermonde Identity

Δ Das die Summe wieder gleichverteilt ist, haben wir in der Vorlesung gezeigt (mittels Faltung $F_{X_1+X_2}(t) = \int F_1(t-z) f_2(z)\, dz$ und $f_{X_1+X_2}(t) = \int f_1(t-z) f_2(z)\, d\lambda(z)$)

MAS Ü3

3) (X,Y) SG mit Dichte $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , 0<x\leq 1, 0<y\leq x \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$



ges: Dichte von $X|Y=y$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \qquad f(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{(0,x]}(y)\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{\mathbb{1}_{[y,1]}(x)\,\frac{1}{x}}{-\log(y)} \qquad = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[y,1]}(x)\,\frac{1}{x}dx = \int_y^1 \frac{1}{x}dx = \log(x)\Big|_y^1 = 0-\log y$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{x\log(y)} & , 0< y\leq x\leq 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

ges: $\mathbb{E}(X|Y=y)$

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x|y)\,dx = \int_y^1 x\left(-\frac{1}{x\log(y)}\right)dx = -\frac{1}{\log(y)}\int_y^1 dx = -\frac{1-y}{\log(y)} = \frac{y-1}{\log(y)}$$

ges: Dichte von $Y|X=x$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{(0,x]}(y)\,\frac{1}{x}\,dy = \int_0^x dy\ \mathbb{1}_{(0,1]}(x)\,\frac{1}{x} = \frac{x}{x}\,\mathbb{1}_{(0,1]}(x) = \mathbb{1}_{(0,1]}(x)$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{x}\,\mathbb{1}_{(0,x]}(y)}{1} = \begin{cases} \frac{1}{x} & , 0<y\leq x \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

ges: $\mathbb{E}(Y|X=x)$

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \int_{\mathbb{R}} y\, f(y|x)\,dy = \int_0^x y\,\frac{1}{x}\,dy = \frac{1}{x}\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^x = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}-0\right) = \frac{x}{2}$$

Eigentlich gehört überall statt $\int_{\mathbb{R}} \ldots dx$ natürlich $\int_{\mathbb{R}} \ldots d\lambda(x)$ usw.,
bin aber zu faul, das überall zu ändern.

MAS Ü3

4) $(X,Y) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ mit Dichte

$$f(x,y) = c_N \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right)$$

wobei $c_N = \dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$

ges: Randdichte von X und Randdichte von Y

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} c_N \exp\left(-\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{2(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\right)\right) d\lambda(y)$$

Sei $\tilde{x} = \dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}$ und $\tilde{y} = \dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ dann ist der Ausdruck im $\exp(-(\ldots))$ gleich

$$\frac{\tilde{x}^2}{2(1-\rho^2)} - 2\rho\frac{\tilde{x}\tilde{y}}{2(1-\rho^2)} + \frac{\tilde{y}^2}{2(1-\rho^2)} = \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\tilde{x}^2 - \rho^2\tilde{x}^2 + (\tilde{y}^2 - 2\rho\tilde{x}\tilde{y} + \rho^2\tilde{x}^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\tilde{x}^2(1-\rho^2) + (\tilde{y}-\rho\tilde{x})^2\right) = \frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{y}-\rho\tilde{x}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{\mathbb{R}} c_N \exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{y}-\rho\tilde{x}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2\right)\sigma_2\, d\lambda(\tilde{y}) \qquad \left[\frac{d\lambda(y)}{d\lambda(\tilde{y})} = \frac{1}{\sigma_2}\right]$$

$$= \sigma_2 c_N \exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2}\right)\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(\tilde{y}-\rho\tilde{x})^2}{2(1-\rho^2)}\right) d\lambda(\tilde{y}) = \sigma_2 c_N \exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2}\right)\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}{2}\right)\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2} = \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$ ist Dichte einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$

für $f(y)$ statt $f(x)$ analog.

MAS Ü3

6) P_1, P_2 ... Wahrscheinlichkeitsmaße $\qquad F_1, F_2$ ... entsprechende, stetige Verteilungsfunktion $\qquad a \leq b$

zz: $\displaystyle\int_{(a,b]} F_1\, dP_2 + \int_{(a,b]} F_2\, dP_1 = F_1(b)F_2(b) - F_1(a)F_2(a)$

$$F_1(x) = P_1((-\infty, x]) = \int_{(-\infty,x]} dP_1 = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{(-\infty,x]}(s)\, dP_1(s) \qquad F_2(x) = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{(-\infty,x]}(s)\, dP_2(s)$$

$$\Rightarrow \int_{(a,b]} F_1\, dP_2 + \int_{(a,b]} F_2\, dP_1 = \int_{(a,b]} P_1(-\infty, x]\, dP_2(x) + \int_{(a,b]} P_2(-\infty, y]\, dP_1(y)$$

$$= \int_{(a,b]} \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{(-\infty,x]}(y)\, dP_1(y)\, dP_2(x) + \int_{(a,b]} P_2(-\infty, y]\, dP_1(y)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{(a,b]} 1\!\!1_{(-\infty,x]}(y)\, dP_2(x)\, dP_1(y) + \int_{(a,b]} P_2(-\infty, y]\, dP_1(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{(a,b]} 1\!\!1_{[y,\infty)}(x)\, dP_2(x)\, dP_1(y) + \int_{(a,b]} P_2(-\infty, y]\, dP_1(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} P_2(\max(a,y), b]\, dP_1(y) + \int_{(a,b]} P_2(-\infty, y]\, dP_1(y)$$

$$= \int_{(-\infty,a]} P_2(\max(a,y), b]\, dP_1(y) + \int_{(a,b]} P_2(\max(a,y), b]\, dP_1(y) + \int_{(b,\infty)} P_2(\max(a,y), b]\, dP_1(y) + \int_{(a,b]} P_2(-\infty, y]\, dP_1(y)$$

$$= \int_{(-\infty,a]} P_2(a,b]\, dP_1(y) + \int_{(a,b]} P_2(y,b]\, dP_1(y) + \int_{(b,\infty)} P_2(\emptyset)\, dP_1(y) + \int_{(a,b]} P_2(-\infty, y]\, dP_1(y)$$

$$= P_2(a,b]\, P_1(-\infty, a] + \int_{(a,b]} P_2(y,b] + P_2(-\infty, y]\, dP_1(y) + 0$$

$$= P_2(a,b]\, P_1(-\infty, a] + \int_{(a,b]} P_2(-\infty, b]\, dP_1(y)$$

$$= P_2(a,b]\, P_1(-\infty, a] + P_2(-\infty, b]\, P_1(a,b]$$

$$= (F_2(b) - F_2(a))F_1(a) + F_2(b)(F_1(b) - F_1(a))$$

$$= \cancel{F_1(a)F_2(b)} - F_1(a)F_2(a) + F_1(b)F_2(b) - \cancel{F_1(a)F_2(b)}$$

$$= F_1(b)F_2(b) - F_1(a)F_2(a)$$

$\square$

MAS Ü3

7) (X_1, X_2) ... SG mit Dichte bzgl. $\lambda \otimes \zeta$ wobei ζ... Zählmaß auf $\mathbb{N}$, λ... Lebesguemaß

$X_2 | X_1 = t$ hat Poissonverteilung mit Parameter $t>0$ $\quad f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$X_1 \sim Ex_1$ .. Exponentialverteilung mit $\mathbb{E} = 1 = \frac{1}{\lambda}$ $\quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

ges: Dichte von (X_1, X_2)

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \Rightarrow f(x_1,x_2) = f(x_2|x_1) f(x_1)$$

$$f(x_1,x_2) = \frac{x_1^{x_2}}{x_2!} e^{-x_1} e^{-x_1} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1^{x_2}}{x_2!} e^{-2x_1} & \text{, für } 0 \leq x_1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

ges: Randdichte von X_2

$$f(x_2) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)\, d\lambda(x_1) = \int_{[0,\infty)} \frac{x_1^{x_2}}{x_2!} e^{-2x_1} d\lambda(x_1) = \frac{1}{x_2!} \int_{[0,\infty)} x_1^{x_2} e^{-2x_1} d\lambda(x_1)$$

$$= \frac{1}{x_2!} \int_{(0,\infty]} \frac{1}{2^{x_2}} (2x_1)^{x_2} e^{-2x_1} d\lambda(x_1) = \frac{1}{x_2!\, 2^{x_2+1}} \int_{(0,\infty]} (2x_1)^{x_2+1-1} e^{-2x_1} d\lambda(2x_1)$$

$$= \frac{1}{x_2!\, 2^{x_2+1}} \Gamma(x_2+1) = \frac{x_2!}{x_2!\, 2^{x_2+1}} = \frac{1}{2^{x_2+1}} \quad (X_2 \text{ ist diskret})$$

ges: Dichte von $X_1 | X_2 = k$

$$f(x_1|k) = \frac{f(x_1,k)}{f(k)} = \frac{\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_1) \frac{x_1^k}{k!} e^{-2x_1}}{\frac{1}{2^{k+1}}} = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_1)\, 2^{k+1} \frac{x_1^k}{k!} e^{-2x_1}$$

$$= \begin{cases} \frac{2^{k+1}}{k!} x_1^k e^{-2x_1} & \text{, } 0 \leq x_1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \Rightarrow \text{Gamma}(x_1, k+1, 2)$$

ges: $\mathbb{E}(X_1 | X_2 = k)$

Gammafunktion hat Erwartungswert $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{k+1}{2}$