

ANA Ü10

2) ges: $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit A, B abgeschlossen, disjunkt und $d(A, B) = 0$

$$A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^+\}$$

$$B = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}^+\}$$

Die Mengen A, B sind disjunkt, da Elemente aus A in der zweiten Komponente 0 sind, und Elemente aus B in der zweiten Komponente $\frac{1}{x} \neq 0$ sind.

$HP(A) \subseteq A$, da $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \exists \varepsilon > 0$ (nämlich $\frac{|y_2|}{2}$)

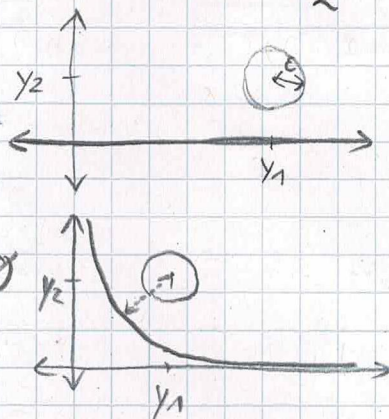
$$U_\varepsilon((y_1, y_2)) \cap A = \emptyset$$

$\Rightarrow A$ ist abgeschlossen

$HP(B) \subseteq B$, da $\forall y \in \mathbb{R}^2 \setminus B : d(y, B) > 0$

bei $\varepsilon = \frac{d(y, B)}{2}$ ist $U_\varepsilon(y) \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow B$ ist abgeschlossen



$$d(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Folge $(d((x, 0), (x, \frac{1}{x})))_{x \in \mathbb{R}^+}$

$$\sqrt{(x-x)^2 + (0 - \frac{1}{x})^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow d(A, B) = 0$$