9.) (i) $\left(\frac{1}{n+\frac{1}{n^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}} =: (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\qquad d(x,y) = |x-y|$

Behauptung: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

offensichtlich gilt $\frac{1}{n+\frac{1}{n^2}} \geq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$

weiters gilt auch $\frac{1}{n+\frac{1}{n^2}} < \frac{1}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$

Da $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq 0$ ist muss die Folge also gegen 0 konvergieren. $\square$

(ii) $\left(\frac{(-1)^n}{3n+1} + i\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $\qquad d(a+bi, c+di) = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

Behauptung $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} 0+i0$

offensichtlich ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\frac{(-1)^n}{n} + i\,\frac{1}{n} =: (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Behauptung $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} 0+i0$

zz: $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: d(x_n,x)\leq\varepsilon$

Sei $\varepsilon>0$ bel. Wähle $N = \lceil \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\rceil$. Sei $n\geq N$ bel.

$\sqrt{\left(\frac{(-1)^n}{n}-0\right)^2+\left(\frac{1}{n}-0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{(-1)^{2n}}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{2\cdot\frac{1}{n^2}}$

$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{n^2}} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{n} \leq \sqrt{2}\cdot\frac{1}{N} \leq \frac{\sqrt{2}}{\lceil\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\rceil} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$

$\Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\square$

9.) (i) $\left(\frac{1}{n+\frac{1}{n^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}} =: (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad d(x,y) = |x-y|$

Behauptung: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

offensichtlich gilt $\frac{1}{n+\frac{1}{n^2}} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

weiters gilt auch $\frac{1}{n+\frac{1}{n^2}} < \frac{1}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$

Da $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq 0$ ist muss die Folge also gegen 0 konvergieren. $\square$

(ii) $\left(\frac{(-1)^n}{3n+1} + i\left(\frac{1}{3n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad d(a+bi, c+di) = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

Behauptung $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} 0+i0$

offensichtlich ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\frac{(-1)^n}{n} + i\frac{1}{n} =: (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Behauptung $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} 0+i0$

ZZ: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n \geq N: d(x_n, x) \leq \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $N = \lceil \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\rceil$. Sei $n \geq N$ bel.

$$\sqrt{\left(\frac{(-1)^n}{n}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{n}-0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{(-1)^{2n}}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{2\cdot\frac{1}{n^2}}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{n^2}} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{n} \leq \sqrt{2}\cdot\frac{1}{N} \leq \frac{\sqrt{2}}{\lceil\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\rceil} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

$\Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\square$