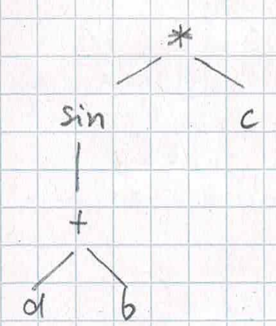
ALG Ü2

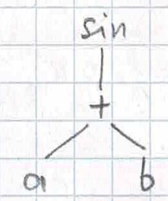
68) $*, +$ .. 2-stellig cos, sin .. 1-stellig i .. 0-stellig a, b, c ... Variablen

	Präfix	Infix	Postfix
(i)	* sin + a b c	sin(a+b)*c	a b + sin c *
(ii)	sin + a b	sin(a+b)	a b + sin
(iii)	+ sin a b	sin(a) + b	a sin b +
(iv)	+ * sin b i cos a	sin(b)*i + cos(a)	a cos i b sin * +

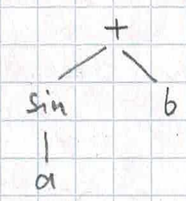
(i)



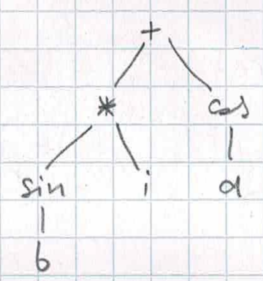
(ii)



(iii)



(iv)



ALG Ü2

66) M ... Menge $\quad \leq$ ... Totalordnung auf M $(\forall x,y \in M: x \neq y \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x)$

... abzählbar $\quad$ ... dicht $(\forall x,y \in M: x \neq y \Rightarrow \exists z \in M: x<z<y \vee y<z<x)$

... kein größtes Element $(\forall m \in M \; \exists x \in M: m < x)$

... kein kleinstes Element $(\forall m \in M \; \exists x \in M: x < m)$

zz: $(M, \leq)$ ist ordnungsisomorph zu $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$

$:\Longleftrightarrow \exists f: M \to \mathbb{Q}$ ... bijektiv $\quad \forall x,y \in M: x<y \Rightarrow f(x) <_{\mathbb{Q}} f(y)$

0: $\quad m_0 \in M$ bel.

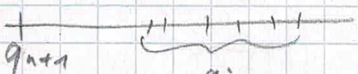
$f_0 : \{0\} \to \{m_0\}$; $f_0(0) = m_0$

n+1: für $f_n : \{q_0, \dots, q_n\} \to \{m_0, \dots, m_n\}$ mit $\forall i,j: q_i < q_j \Rightarrow m_i < m_j$

definieren wir $f_{n+1} : \{q_0, \dots, q_{n+1}\} \to \{m_0, \dots, m_{n+1}\}$ durch

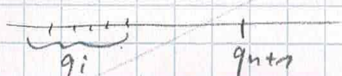
$$f_{n+1}(q_i) = \begin{cases} f_n(q_i) & \text{für } i < n+1 \\ m_{n+1} & \text{für } i = n+1 \end{cases}$$

wobei m_{n+1} definiert wird durch

1. Fall 

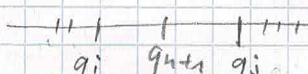
$\forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}: q_{n+1} < q_i$

$\Rightarrow \exists m_{n+1} \in M: \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}: m_{n+1} < m_i$ da sonst kleinstes Element $\exists$

2. Fall 

$\forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}: q_i < q_{n+1}$

$\Rightarrow \exists m_{n+1} \in M: \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}: m_i < m_{n+1}$, da sonst größtes Element $\exists$

3. Fall 

$\exists i,j \in \mathbb{N}_{\leq n}: q_i < q_{n+1} < q_j$

Sei i sodass q_i das größte mit $q_i < q_{n+1}$ und j sodass q_j das kleinste mit $q_{n+1} < q_j$. Diese existieren da $\{q_0, \dots, q_n\}$ endlich ist.

$\Rightarrow \exists m_{n+1} \in M: m_i < m_{n+1} < m_j$, da sonst nicht dicht

Mit $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto q_n$ definieren wir

$f: \mathbb{Q} \to M$, $q \mapsto f_{g^{-1}(q)}(q) \; (= f_{g^{-1}(p)+k}(q) \; \forall k \in \mathbb{N})$

- Sei $p,q \in \mathbb{Q}: p<q$ bel. $\quad m := \max(g^{-1}(p), g^{-1}(q))$

$f(p) = f_m(p) < f_m(q) = f(q)$ nach Definition von f_m

...

ALG Ü2:

66) ... ZZ: f ist bijektiv

f ist injektiv, da $\forall p, q \in \mathbb{Q}, p \neq q \Rightarrow p < q \vee q < p$

$\Rightarrow f(p) < f(q) \vee f(q) < f(p)$ insbesondere $f(p) \neq f(q)$

surjektiv

Angenommen $\exists m \in M \ \forall p \in \mathbb{Q}: f(p) \neq m$

$\Rightarrow \forall p \in \mathbb{Q}: f(p) < m \vee f(p) > m$

$P^- := \{p \in \mathbb{Q}: f(p) < m\}$ $\quad P^+ := \{p \in \mathbb{Q}: f(p) > m\} \Rightarrow P^- \dot\cup P^+ = \mathbb{Q}$

$\forall p^- \in P^- \ \forall p^+ \in P^+: \underbrace{f(p^-)}_{\in M} < m < \underbrace{f(p^+)}_{\in M}$

Da M abzählbar $\Rightarrow M \cap [f(p^-), f(p^+)]$ ist abzählbar

ALG Ü2

66) $M \ldots$ abzählbare Menge $\quad \leq \ldots$ dichte Totalordnung, ohne kleinstes und größtes Element

zz: $\exists f: M \to \mathbb{Q} \ldots$ bijektiv, $\forall m_1, m_2 \in M: m_1 < m_2 \Rightarrow f(m_1) < f(m_2)$

Wir definieren Funktionen $f_n : A \to B$ mit $A \subseteq M$, $B \subseteq \mathbb{Q}$, $|A| = |B| = n+1$

$n=0$: $f_0 : A \to B$ Sei $m_0 \in M$ bel. $A = \{m_0\}$ $B = \{0\}$ $f(m_0) := 0 = q_0$

$n+1$: für gegebene Funktion $f_n : \{m_0, \ldots, m_n\} \to \{q_0, \ldots, q_n\}$ die $\forall i,j \in \{0,\ldots,n\}: m_i < m_j \Rightarrow f(m_i) = q_i < q_j = f(m_j)$ erfüllt definieren wir

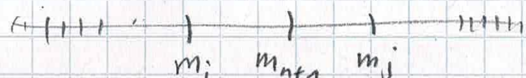
$$f_{n+1}(m_i) = \begin{cases} f_n(m_i) = q_i & \text{falls } i < n+1 \\ q_{n+1} & \text{falls } i = n+1 \end{cases} \quad \text{wobei}$$

$q_{n+1} \in \mathbb{Q}$ mit

1. Fall $\forall j \in \{0,\ldots,n\}: m_j < m_{n+1} \Rightarrow \exists q_{n+1} \in \mathbb{Q}\ \forall j \in \{0,\ldots,n\}: q_j < q_{n+1}$

2. Fall $\forall j \in \{0,\ldots,n\}: m_{n+1} < m_j \Rightarrow \exists q_{n+1} \in \mathbb{Q}\ \forall j \in \{0,\ldots,n\}: q_{n+1} < q_j$

3. Fall $\exists i,j \in \{0,\ldots,n\}: m_i < m_{n+1} < m_j$ Sei i, sodass m_i das größte solche und j, sodass m_j das kleinste solche Element ist.



$\exists q_{n+1} \in \mathbb{Q}: f(m_i) = q_i < q_{n+1} < q_j = f(m_j)$

$f: M \to \mathbb{Q}$

$m \mapsto f_{g^{-1}(m)}(m) \,(= f_{g^{-1}(m)+k}(m)) \quad \forall k \in \mathbb{N}$ nach Definition

wobei $g: \mathbb{N} \to M$ das existiert, da M abzählbar ist.

Nach Definition gilt $\forall m_1, m_2 \in M: m_1 < m_2 \Rightarrow f(m_1) < f(m_2)$, daraus folgt auch gleich die Injektivität.

ALG Ü2

66) M ... abzählbare Menge $\leq$ ... dichte Totalordnung ohne kleinstes und größtes Element

zz: $\exists f: M \to \mathbb{Q}$ ... bijektiv mit $\forall m_1, m_2 \in M: m_1 < m_2 \Rightarrow f(m_1) < f(m_2)$

Da M, $\mathbb{Q}$ abzählbar $\exists g: \mathbb{N} \to M$, $h: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ... bijektiv.

Wir definieren $f_n: A \subseteq M \to B \subseteq \mathbb{Q}$ mit $|A| = |B| = n$ durch

$f_0: \emptyset \to \emptyset$

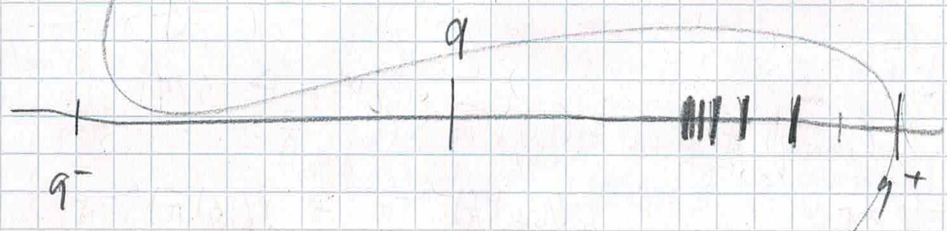
$$f_{n+1}: \underbrace{\{m \in M \mid \exists k \in \mathbb{N}_{\leq n+1}: g(k) = m\}}_{=\{m_0, m_1, \dots, m_n, m_{n+1}\}} \longrightarrow \underbrace{\{q \in \mathbb{Q} \mid \exists k \in \mathbb{N}_{\leq n+1}: h(k) = q\}}_{=\{q_0, q_1, \dots, q_n, q_{n+1}\}}$$

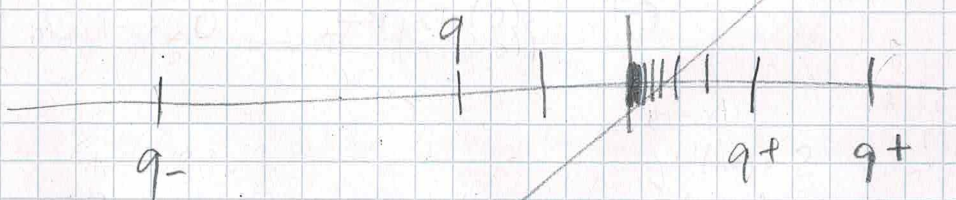
Da $\leq$ auf M eine Totalordnung ist $\exists \pi: \{0, \dots, n+1\} \to \{0, \dots, n+1\}$ mit $m_{\pi(0)} < m_{\pi(1)} < \dots < m_{\pi(n+1)}$. Gleiches gilt für $\mathbb{Q}$:

$\exists \tilde{\pi}: \{0, \dots, n+1\} \to \{0, \dots, n+1\}$ mit $p_{\tilde{\pi}(0)} < p_{\tilde{\pi}(1)} < \dots < p_{\tilde{\pi}(n+1)}$

$f_{n+1}(m) := h(\tilde{\pi}^{-1}(\pi(g^{-1}(m))))$

surjektiv da





$d(m_1, m_2) = |f(m_1) - f(m_2)|$

ALG Ü2

66) $f_0 : \emptyset \to \emptyset$

$f_{n+1} : A_n \cup \{m\} \to B_n \cup \{p\}$ $\quad |A_n| = |B_n| = n$

$A_n = \{m_0, \dots, m_n\}$ $\quad B_n = \{p_0, \dots, p_n\}$ mit

$m_0 < m_1 < \dots < m_n$ $\quad p_0 < p_1 < \dots < p_n$

$f_n : A_n \to B_n$ mit $f_n(m_i) = p_i \ \forall i \in \{0, \dots, n\}$ also $\forall i,j : m_i < m_j \Rightarrow f(m_i) < f(m_j)$

$m_0 < m_1 < \dots < m_i < m < m_{i+1} < \dots < m_n$ $\quad p_0 < \dots < p_j < p < p_{j+1} < \dots < p_n$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{N} & \\ \rotatebox{45}{$\cong$} & & \rotatebox{-45}{$\cong$} \\ M & \xrightarrow[\text{inj.}]{f} & \mathbb{Q} \end{array}$$

ALG Ü2

77) A ... Menge $\quad \mathcal{O}_A$ ... Menge aller Klone auf A

zz: $(\mathcal{O}_A, \subseteq)$ bilden einen vollständigen Verband

- Sei $P \subseteq \mathcal{O}_A$ bel. $\quad$ *

a) zz: $\exists C \in \mathcal{O}_A : C = \inf P$ also $\forall D \in P: C \subseteq D$ und $\forall \hat{C} \in \mathcal{O}_A : (\forall D \in P: \hat{C} \subseteq D) \Rightarrow \hat{C} \subseteq C$

$C := \bigcap\limits_{D \in P} D$

(i) zz: C ist ein Klon auf $A \iff C \in \mathcal{O}_A$

Sei $\pi_i^{(n)}$ eine beliebige Projektion auf A. $\Rightarrow \forall D \in P: \pi_i^{(n)} \in D$, da $D \in \mathcal{O}_A \Rightarrow \pi_i^{(n)} \in C$

Sei $f_1, \dots, f_k : A^n \to A$, $g: A^k \to A$ aus C bel. $\Rightarrow \forall D \in P: f_1, \dots, f_k, g \in D$, da $D \in \mathcal{O}_A \Rightarrow g \circ_{n,k} (f_1, \dots, f_k) \in C$

(ii) zz: $\forall D \in P: C \subseteq D$ $\quad$ nach Definition

(iii) zz: $\forall \hat{C} \in \mathcal{O}_A : (\forall D \in P: \hat{C} \subseteq D) \Rightarrow \hat{C} \subseteq C$

Sei $\hat{C} \in \mathcal{O}_A$ mit $\forall D \in P: \hat{C} \subseteq D$ bel. Angenommen $C \subsetneq \hat{C}$. $\Rightarrow \exists f \in \hat{C} \setminus C$

Da $f \notin C$ gilt $\exists D \in P: f \notin D \quad \Rightarrow \hat{C} \not\subseteq D$ ↯ $\quad \Rightarrow \hat{C} \subseteq C$

$\Rightarrow C = \inf P$

b) zz: $\exists C \in \mathcal{O}_A : C = \sup P$ also $\forall D \in P: D \subseteq C$ und $\forall \hat{C} \in \mathcal{O}_A : (\forall D \in P: D \subseteq \hat{C}) \Rightarrow C \subseteq \hat{C}$

$C := \left[\bigcup\limits_{D \in P} D \right]$ $\quad$ wobei $[M]$ den Abschluss unter allen $\circ_{n,k}$ bezeichnet

(i) zz: C ist ein Klon auf $A \iff C \in \mathcal{O}_A$

Sei $\pi_i^{(n)}$ eine beliebige Projektion auf A. Da für $\forall D \in P: \pi_i^{(n)} \in D$, da $D \in \mathcal{O}_A \Rightarrow \pi_i^{(n)} \in C$

Abgeschlossenheit bezgl $\circ_{n,k}$ nach Definition

(ii) zz: $\forall D \in P: D \subseteq C$ $\quad$ nach Definition

(iii) zz: $\forall \hat{C} \in \mathcal{O}_A : (\forall D \in P: D \subseteq \hat{C}) \Rightarrow C \subseteq \hat{C}$

Sei $\hat{C} \in \mathcal{O}_A$ mit $\forall D \in P: D \subseteq \hat{C}$ bel. Angenommen $\hat{C} \subsetneq C$ $\quad \Rightarrow \exists f \in C \setminus \hat{C}$

Da $f \in C$ gilt entweder $\exists D \in P: f \in D$ ↯ zu $D \subseteq \hat{C}$, da $f \notin \hat{C}$ $\quad$ oder

f entsteht durch $\circ_{n,k}$ auf $\bigcup\limits_{D \in P} D$, da $\forall D \in P: D \subseteq \hat{C} \Rightarrow \bigcup\limits_{D \in P} D \subseteq \hat{C}$, da $f \notin \hat{C}$ ist $\hat{C}$ kein Klon,

da nicht unter allen $\circ_{n,k}$ abgeschlsssen.

$\Rightarrow C = \sup P$

* Für $P = \emptyset$ ist $\inf(P) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{ f : A^n \to A \}$ und $\sup(P) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{ \pi_i^{(n)} : i \in \{1, \dots, n\} \}$

ALG Ü2

102) (1) $E := \{\{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{0,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

ges: Algebra $\mathcal{A}$ auf $A := \{0,1,2,3\}$ sodass $\forall M \in E$: M ist Unteralgebra von $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} = (A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ vom Typ $(0,2,2)$

$\omega_1 : A^0 \to A$ $\quad$ $\omega_2 : A^2 \to A$ $\quad$ $\omega_3 : A^2 \to A$

$() \mapsto 0$ $\quad$ $(a,b) \mapsto \begin{cases} 2, & \text{falls } a=1 \wedge b=3 \\ a, & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad$ $(a,b) \mapsto \begin{cases} 3, & \text{falls } a=1 \wedge b=2 \\ a, & \text{sonst} \end{cases}$

$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset,$ $\omega_1!$
$\{0\},$
$\{1\},$ $\omega_1!$
$\{2\},$ $\omega_1!$
$\{3\},$ $\omega_1!$
$\{0,1\},$
$\{0,2\},$
$\{0,3\},$
$\{1,2\},$ $\omega_1!$
$\{1,3\},$ $\omega_1!$
$\{2,3\},$ $\omega_1!$
$\{0,1,2\},$ $\omega_3!$
$\{0,1,3\},$ $\omega_2!$
$\{0,2,3\},$
$\{1,2,3\},$ $\omega_1!$
$\{0,1,2,3\} \}$

$\omega_1! \ldots$ erfüllt nicht ω_1! $\quad$ $\omega_2! \ldots$ erfüllt nicht ω_2!

(2) Ist (1) für beliebige $E \subseteq \mathcal{P}(A)$ lösbar?

Nein, z.B. für $E = \emptyset$ gibt es keine Algebra $\mathcal{A} = (A, \omega_1, \omega_2, \ldots)$ ohne Unteralgebren, da A immer eine Unteralgebra von sich selber ist.

(3) ges: Kriterium / Algorithmus um entscheiden zu können ob für gegebenes A (endlich) und $E \subseteq \mathcal{P}(A)$ eine Algebra $\mathcal{A} = (A, \omega_1, \omega_2, \ldots)$ existiert mit $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}) = E$

...

ALG Ü2

102) … (3) Algorithmus (A … Menge, E … gewünschte Unteralgebren)

(1) $\text{for}\,(P \in \mathcal{P}(A)\setminus E)\ \{$ // $\mathcal{P}(A)\setminus E$ ist endlich

(2) $\quad C := \bigcap_{\substack{B\in E \\ P\subseteq B}} B;$ // $\{B \in E : P \subseteq B\}$ ist endlich

(3) $\quad \text{if}\,(C\setminus P = \emptyset)\ \{$

(4) $\quad\quad$ throw "Nicht Lösbar";

(5) $\quad \}\ \text{else}\ \{$

(6) $\quad\quad w_P : A^{|P|} \to A,\ (x_1,\dots,x_{|P|}) \mapsto \begin{cases} y \in C\setminus P \text{ (fest)}, & \text{falls } \{x_1,\dots,x_{|P|}\} = P \\ x_1 & \text{, sonst} \end{cases}$

(7) $\quad\quad$ füge w_P zur Algebra hinzu

(8) $\quad \}$

(9) $\}$

Bew Jede Operation w erreicht (in unserer Anwendung), dass wenn $x_1,\dots,x_n$ in einer Unteralgebra U liegen, dass dann auch $y = w(x_1,\dots,x_n) \in U$ sein muss.
Damit ein $P \in \mathcal{P}(A)\setminus E$ nicht in $Sub(\mathcal{A})$ liegt muss also ein w_P garantieren, dass wenn $P \subseteq U \Rightarrow \exists y \notin P : y \in U$. Natürlich muss das y so gewählt werden, dass $\forall B \in E : P \subseteq B \Rightarrow y \in B$, da sonst $B \notin Sub(\mathcal{A})$. $\Rightarrow y \in \left(\bigcap_{\substack{B\in E \\ P\subseteq B}} B\right)\setminus P$
Falls aber $\left(\bigcap_{\substack{B\in E \\ P\subseteq B}} B\right)\setminus P = \emptyset$ kann nach dieser Überlegung keine Lösung existieren.
Sonst garantiert die Operation wie in (6) beschrieben, dass $P \notin Sub(\mathcal{A})$ für alle $P \notin E$ (durch Schleife in (1)).
Für $Q \in E$ hat keine der Funktionen $(w_P)_{P\in\mathcal{P}(A)\setminus E}$ einen Effekt, da $\forall P \in \mathcal{P}(A)\setminus E$ gilt: falls $P \subseteq Q$ ist nach Konstruktion $y = w_P(p_1,\dots,p_{|P|}) \in Q$ wobei $p_i \in P\ \forall i \in \{1,\dots,|P|\}$
falls $P \not\subseteq Q$ gilt $\forall x_1,\dots,x_{|P|} : w_P(x_1,\dots,x_{|P|}) = x_1 \in Q$, da $\{x_1,\dots,x_{|P|}\} \neq P$ sein muss
Also werden in beiden Fällen nur Werte zurückgeliefert, die bereits in der Menge liegen.

ALG Ü2

2003) $K=(K,+,0,-,\cdot,1)$ .. Körper $\mathrm{char}(K)=0$ $(\forall n>0: f(n)\neq 0)$

zz: $\exists K_0$ .. Unterkörper von K : $K_0 \cong \mathbb{Q}$

$f:\mathbb{Q}\to K$ mit $f(0_{\mathbb{Q}}):=0_K$; $\forall n\in\mathbb{N}: f((n+1)_{\mathbb{Q}}):=f(n)+1_K$;

$\forall n\in \mathbb{N}_{>0}: f(-n):=-f(n)$

$\forall q=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}: f(q)=f(m)\cdot f(n)^{-1}$

zz: $\forall n,m\in\mathbb{N}: f(n+m)=f(n)+f(m)$ vollständige Induktion nach m

$M_n:=\{m\in\mathbb{N}: f(n+m)=f(n)+f(m)\}$ $0\in M_n$, da $f(n+0)=f(n)=f(n)+0_K=f(n)+f(0)$

M_n ist abgeschlossen unter Nachfolgern, da wenn $m\in M_n \Rightarrow f(n+m)=f(n)+f(m)$ und

$f(n+(m+1))=f((n+m)+1)=f(n+m)+1 \overset{IV}{=} (f(n)+f(m))+(0+1)=f(n)+(f(m)+f(1))$

zz: $\forall n,m\in\mathbb{N}: f(n\cdot m)=f(n)\cdot f(m)$ vollständige Induktion nach m

$M_n:=\{m\in\mathbb{N}: f(n\cdot m)=f(n)\cdot f(m)\}$ $0\in M_n$, da $f(n\cdot 0)=f(0)=0=f(n)\cdot 0=f(n)\cdot f(0)$

M_n ist abgeschlossen unter Nachfolgern, da wenn $m\in M_n\Rightarrow f(n\cdot m)=f(n)\cdot f(m)$ und

$f(n\cdot(m+1))=f(n\cdot m+n)=f(n\cdot m)+f(n)\overset{IV}{=}f(n)\cdot f(m)+f(n) \underset{1=f(1)}{=} f(n)(f(m)+f(1))$

zz: $\forall n,m\in\mathbb{Z}: f(n+m)=f(n)+f(m)$

1. Fall: $n,m\in\mathbb{N}$ bereits gezeigt

2. Fall: $n\in\mathbb{N}$, $m\in-\mathbb{N}$ oder $n\in-\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$ o.B.d.A. $n\in\mathbb{N}$ $m\in-\mathbb{N}$

(i) für $n>|m|$: $f(n+m)+f(|m|)=f(n-|m|)+f(|m|)=f(n-|m|+|m|)=f(n)$

$\Rightarrow f(n+m)=f(n)-f(|m|)=f(n)+f(-|m|)=f(n)+f(m)$

(ii) für $n=|m|$: $f(n+m)=f(0)=0=f(n)-f(|m|)=f(n)+f(-|m|)=f(n)+f(m)$

(iii) für $n<|m|$: $f(n+m)=f(-(|m|-n))=-f(|m|+(-n))\overset{(i)}{=}-(f(|m|)+(-f(n)))=f(m)+f(n)$

3. Fall $n,m\in-\mathbb{N}$: $f(n+m)=f(-(|n|+|m|))=-f(|n|+|m|)=-f(|n|)-f(|m|)=f(n)+f(m)$

zz: $\forall n,m\in\mathbb{Z}: f(n\cdot m)=f(n)\cdot f(m)$

1. Fall: $n,m\in\mathbb{N}$ bereits gezeigt

2. Fall: $n\in\mathbb{N}$, $m\in-\mathbb{N}$ oder $n\in-\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$ o.B.d.A. $n\in\mathbb{N}$, $m\in-\mathbb{N}$

$f(n\cdot m)=f(-(n\cdot|m|))=-f(n\cdot|m|)=-(f(n)\cdot f(|m|))=f(n)\cdot(-f(|m|))=f(n)\cdot f(m)$

3. Fall $n,m\in-\mathbb{N}$: $f(n\cdot m)=f(|n|\cdot|m|)=f(|n|)\cdot f(|m|)=(-f(|n|))\cdot(-f(|m|))=f(n)\cdot f(m)$

...

ALG Ü2

2003)... zz: $\frac{a}{b} = q = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(\frac{a}{b}) = f(\frac{c}{d})$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \Rightarrow f(a)f(d) = f(b)f(c) \Rightarrow f(a)f(b)^{-1} = f(c)\cdot f(d)^{-1} \Leftrightarrow f(\frac{a}{b}) = f(\frac{c}{d})$

zz: $\forall q = \frac{a}{b}, p = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: f(q+p) = f(q) + f(p)$

$f(q+p) = f(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) = f(\frac{ad+bc}{bd}) = f(ad+bc)f(bd)^{-1} = \frac{f(a)f(d)+f(b)f(c)}{f(b)f(d)}$

$= \frac{f(a)}{f(b)} + \frac{f(c)}{f(d)} = f(\frac{a}{b}) + f(\frac{c}{d}) = f(q) + f(p)$

zz: $\forall q = \frac{a}{b}, p = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: f(q \cdot p) = f(q) \cdot f(p)$

$f(p \cdot q) = f(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) = f(\frac{ac}{bd}) = f(ac) \cdot f(bd)^{-1} = \frac{f(a)f(c)}{f(b)f(d)} = \frac{f(a)}{f(b)} \frac{f(c)}{f(d)} = f(q) \cdot f(p)$

zz: $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}: f(n) \in P$

Vollständige Induktion nach n $\quad M := \{n \in \mathbb{N}_{>0} : f(n) \in P\}$

Da $f(1) = f(0+1) = f(0) + 1 = 0 + 1 = 1 \in P \Rightarrow 1 \in M$

für $n+1$ gilt $f(n+1) = f(n) + 1 \in P$, da $f(n) \in P \Rightarrow M$ ist unter Nachfolgern abgeschlossen

zz: $\forall n, m \in \mathbb{Z}: n < m \Rightarrow f(n) < f(m)$

$n < m \Leftrightarrow m - n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(m-n) \in P \Rightarrow f(m) - f(n) \in P \Rightarrow f(n) < f(m)$

zz: $\forall p = \frac{a}{b}, q = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: p < q \Rightarrow f(p) < f(q)$

$p < q \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Rightarrow f(ad) < f(bc) \Leftrightarrow f(a)f(d) < f(b)f(c)$

$\Leftrightarrow f(a)f(b)^{-1} < f(c)f(d)^{-1} \Leftrightarrow f(\frac{a}{b}) < f(\frac{c}{d}) \Leftrightarrow f(p) < f(q)$

$\Rightarrow f$ ist injektiv $\quad \Rightarrow f: \mathbb{Q} \to K_0 = f(\mathbb{Q})$ ist bijektiv,

wohldefiniert und mit allen Operationen verträglich