Zusammenfassung Heft 3 LINAG

Ida Hönigmann

10. Dezember 2020

Lemma 0.1. *Zu jeder linearen Abbildung existiert eine passende Matrix und umgekehrt.*

$A \in K^{m \times n}$ (m ... Dimension des Zielraums, n ... Dimension des Urraums)

$\phi_A : K^n \to K^m$, dann ist $\phi_A \in L(K^n, K^m)$

$f \in L(K^n, K^m) \implies \exists A' \in K^{m \times n} : f = \phi_{A'}$

Bemerkung. $\Phi : K^{m \times n} \to L(K^n, K^m), A \mapsto \phi_A$ *ist surjektiv, injektiv und linear*

Definition 0.1. $A \in K^{m \times n}$

$rg(A) := dim[\{s_1, ..., s_n\}] = dim[\{\phi_A(e_1), ..., \phi_A(e_n)\}] = dim\phi_A(K^n) = rg(\phi_A)$ *heißt der Spaltenrang von A.*

$\{e_1, ..., e_n\}$*... Erzeugnissystem von* $K^n \implies \{\phi_A(e_1), ..., \phi_A(e_n)\}$ *... Erzeugnissystem von* $\phi_A(K^n)$

Lemma 0.2. $\{b_1, ..., b_n\}$*... Basis von* K^n, $d_1, ..., d_n \in K^m$

$\exists! g \in L(K^n, K^m) : \forall i : g(b_i) = d_i$

Um die Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit $g = \phi_A$ zu finden:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} E_n \\ A \end{pmatrix}$$

Lemma 0.3. $f \in L(K^n, K^m)$, $g \in L(K^m, K^l)$

$\implies g \circ f$ *linear*

A ... Matrix der Abbildung f, B ... Matrix der Abbildung g

$\implies \phi_B \circ \phi_A = \phi_{B*A}$

Bemerkung. $A \in K^{n \times m}$, $B \in K^{m \times l}$, $C \in K^{l \times j}$

$\implies C * (B * A) = (C * B) * A$

Bemerkung. $(K^{n \times m}, *)$ *bildet eine Halbgruppe (E_n ist neutrales Element, unter $*$ abgeschlossen, aber für manche Matrizen existiert kein inverses Element).*

1 Koordinaten

Definition 1.1. *V... Vektorraum, B... Basis von V, $x \in V$*

$x = \sum_{b \in B} x_b * b$

$B* : V \to K^{<B>}, x \mapsto < B*, x >: B \to K, b \mapsto x_b$ *(Isomorphismus von V nach $K^{<B>}$)*

$b_0 \in B$

$b_0* : V \to K, x \mapsto x_{b_0}$

Dann ist b_i die i-te Koordinate von x.

Bemerkung. *Die Reihenfolge von B ist bei den Koordinaten wichtig.*

b_0* hängt von B ab.

Schreibweise. $b * (x) =< b*, x >\in K$

$B * (x) =< B*, x >\in K^{<B>}$

Bemerkung. $b_1, b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$

$b_1 * (b_1) = 1$ *und* $b_1 * (b_2) = 0$

Lemma 1.1. *Wenn Funktionen, wie im folgenden*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, Rightarrow, "f"'] \arrow[d, "B*"'] & W \arrow[d, "C*"] \\ K^{<B>} \arrow[r, dashed, no head, "f'"'] & K^{<C>} \end{tikzcd}$$

Diagramm gelten

dann gilt $\exists f'$ ... linear (also $\exists$ Matrix die f' beschreibt).

Bemerkung. $f = (C*)^{-1} \circ f' \circ B*$

Schreibweise. *Die Matrix die f' beschreibt wird auch $< C*, f(B) >$ gennant.*

Bemerkung. $f \in L(V, W)$, *B... Basis von V, C... Basis von W*

$rg(< C*, f(B) >) = rg(f)$

Bemerkung. *$< D*, id(B) >$ wandelt zwischen Koordinatendarstellungen um.*

2 Lineare Selbstabbildungen

Lemma 2.1. *$(\{f : f \in L(V,V) | f$ ... bijektiv, $\circ\})$ bildet eine Gruppe.*

Schreibweise. *Für die Menge aller bijektiven Funktionen aus $L(V,V)$ schreibt man $GL(V)$.*

Definition 2.1. *$A \in K^{n\times n}$ heißt regulär $\Leftrightarrow \exists B \in K^{n\times n} : B * A = E_n$*

Theorem 2.2. *$A \in K^{n\times n}$ regulär $\Leftrightarrow \phi_a : K^n \to K^n$ bijektiv*
$(\{A \in K^{n\times n} | A$ regulär$\}, *)$ bildet eine Gruppe $\cong GL(V)$

Definition 2.2. *Wenn A eine Matrix ist, dann heißt A^{-1} die inverse Matrix, wenn gilt $A * A^{-1} = A^{-1} * A = E_n$*

Lemma 2.3. *Um von A zu A^{-1} zu kommen:*
$$\begin{pmatrix} E_n \\ A \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A^{-1} \\ E_n \end{pmatrix}$$

Bemerkung. *$(GL_n(K), *)$ ist eine nicht kommutative Gruppe $\forall n \geq 2$.*

3 Vektorräume linearer Abbildungen

Lemma 3.1. *V, W ... Vektorräume*
$W^V := \{f : V \to W\}$ ist ein Vektorraum über K
$L(V,W)$ ist ein Unterraum von W^V.

Lemma 3.2. *V, W ... Vektorraum, $B = \{b_1, ..., b_n\}$ ... Basis von V, $C = \{c_1, ..., c_m\}$*
$\Phi : L(V,W) \to K^{m\times n}, f \mapsto < C*, f(B) >$
Φ ist ein Isomorphismus.
Insbesondere ist $dim(L(V,W)) = dim(K^{m\times n})$

Definition 3.1. $c * A = \begin{pmatrix} c * a_{11} & \cdots & c * a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c * a_{m1} & \cdots & c * a_{mn} \end{pmatrix}$

Bemerkung. *Für lineare Abbildungen f, g und h gilt:*
$g \circ (c * f) = c * (g \circ f) = (c * g) \circ f$
$(g + h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f)$
$g \circ (f + h) = (g \circ f) + (g \circ h)$
Für die dazugehörigen Matrizen A, B und C gilt:
$B * (c * A) = c * (B * A) = (c * B) * A$
$(B + C) * A = (B * A) + (C * A)$
$A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$