MAB Ü1

1) X ... stochastische Größe $\quad \psi_X(s) = \mathbb{E}\exp(sX)$ ... Moment-erzeugende Funktion von X für $s>0$

a) zz: $P[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}(X^+)}{t}$, $t>0$

Nach Definition von X^+ gilt für $t>0$, dass $P[X \geq t] = P[X^+ \geq t]$.

Sei $s(x) := \begin{cases} t & \text{, falls } f(x) \geq t \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq s(x) \leq f(x) \quad \forall x$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X^+) = \int_{X^+} f(x)\, d\mu \geq \int_{X^+} s(x)\, d\mu = t\,\mu(\{x \in X^+ : f(x) \geq t\}) = t\, P[X^+ \geq t]$$

$$\Rightarrow P[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}(X^+)}{t}$$

b) zz: $P[X \geq t] \leq \inf\limits_{s \geq 0} e^{-st}\psi_X(s)$

$P[X \geq t] = P[e^{sX} \geq e^{st}] \leq \frac{\mathbb{E}(e^{sX})}{e^{st}}$ durch Einsetzen in die Ungleichung von oben

Da diese Ungleichung für alle $s \geq 0$ gilt, folgt

$$P[X \geq t] \leq \inf_{s \geq 0} \frac{\mathbb{E}(e^{sX})}{e^{st}} = \inf_{s \geq 0} e^{-st}\psi_X(s)$$

was zu zeigen war.

$\square$

MAB Ü1

2) X .. Anzahl Köpfe in n Münzwürfen $\qquad X \sim B_{n,p} \qquad p = \frac{1}{2}$

ges: Moment-erzeugende Funktion $\psi_X(s)$

Da X diskret ist gilt $\psi_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{sx_i} P(X = x_i)$.

Für Binomialverteilungen gilt $P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$.

In unserem Fall also $P(X=x_i) = \binom{n}{x_i}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} = \binom{n}{x_i}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\Rightarrow \psi_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{si}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n}{i}e^{si} = \frac{1}{2^n}(e^s+1)^n = \left(\frac{e^s+1}{2}\right)^n$$

$n = 100 \qquad t = 80$

$$P[X \geq 80] \leq \frac{\mathbb{E}(X^+)}{80} = \frac{n \cdot p}{80} = \frac{100 \cdot 0{,}5}{80} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

$$P[X \geq 80] \leq \inf_{s \geq 0} e^{-80s}\psi_X(s) = \inf_{s\geq 0} e^{-80s}\left(\frac{e^s+1}{2}\right)^{100} = \frac{1}{2^{100}}\inf_{s\geq 0}\frac{(e^s+1)^{100}}{e^{80s}}$$

$$\left(\frac{(e^s+1)^{100}}{e^{80s}}\right)' = \frac{((e^s+1)^{100})' e^{80s} - (e^s+1)^{100}(e^{80s})'}{e^{160s}} = \frac{100\cdot(e^s+1)^{99} e^s e^{80s} - (e^s+1)^{100} 80 e^{80s}}{e^{160s}}$$

$$= \frac{100 e^{81s}(e^s+1)^{99} - 80e^{80s}(e^s+1)^{100}}{e^{160s}} = \frac{e^{80s}(e^s+1)^{99}(100e^s - 80e^s - 80)}{e^{160s}} = 0$$

$\Leftrightarrow 20e^s - 80 = 0 \quad \Leftrightarrow e^s = 4 \quad \Leftrightarrow s = \ln(4)$

$$\left(\frac{(e^s+1)^{100}}{e^{80s}}\right)'' = 100e^{-80s}(e^s+1)^{98}(-31e^s + 4e^{2s} + 64)$$

$$\left(\frac{(e^s+1)^{100}}{e^{80s}}\right)''(\ln(4)) = 100\frac{1}{4^{80}}5^{98}(-31\cdot 4 + 4\cdot 4^2 + 64) = 100\frac{5^{98}}{4^{80}}4 > 0$$

$$\Rightarrow \inf_{s\geq 0}\frac{(e^s+1)^{100}}{e^{80s}} = \frac{5^{100}}{4^{80}} \qquad \Rightarrow P[X \geq 80] \leq \frac{1}{2^{100}}\frac{5^{100}}{4^{80}} \approx 4{,}25796\cdot 10^{-9}$$

Echter Wert: $1{,}35138 \cdot 10^{-10}$

MAB Ü1

3) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ... Wahrscheinlichkeitsraum Ω ... endlich $m := |\Omega|$ $\forall \omega \in \Omega : P(\omega) > 0$

$\mathcal{F}(P) := -\int \log(P(\omega))\, dP(\omega)$ ... Entropie der Verteilung P

zz: $0 \leq \mathcal{F}(P) \leq \log(m)$

ln ... konkav $\Rightarrow$ $-\ln$ ... konvex , P ... integrierbar

Aus der Jensen-Ungleichung folgt

$$-\ln\left(\frac{1}{P(\Omega)} \int P(\omega)\, dP(\omega)\right) \leq \frac{1}{P(\Omega)} \int -\ln(P(\omega))\, dP(\omega)$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\ln(1) \leq -\int \ln(P(\omega))\, dP(\omega) \qquad \Rightarrow 0 \leq \mathcal{F}(P)$$

exp ... konvex $\Rightarrow$ nach Jensen $\exp\left(\underset{=1}{\cancel{\frac{1}{P(\Omega)}}} \int f\, dP\right) \leq \underset{=1}{\cancel{\frac{1}{P(\Omega)}}} \int \exp \circ f\, dP$

$$\exp\left(-\int_\Omega \ln(P(\omega))\, dP(\omega)\right) = \exp\left(\int_\Omega -\ln(P(\omega))\, dP(\omega)\right) = \exp\left(\int_\Omega \ln \frac{1}{P(\omega)}\, dP(\omega)\right)$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\leq} \int_\Omega \exp\left(\ln \frac{1}{P(\omega)}\right) dP(\omega) = \int_\Omega \frac{1}{P(\omega)}\, dP(\omega) = \int_\Omega \frac{1}{P(\omega)} P(\omega)\, d\omega = \int_\Omega 1\, d\omega =$$

$$\overset{\Omega \text{ endlich}}{=} \sum_{\omega \in \Omega} 1 = |\Omega| = m$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(P) = -\int_\Omega \ln(P(\omega))\, dP(\omega) \leq \ln(m)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \mathcal{F}(P) \leq \ln(m)$$

MAB Ü1

4) $x_i > 0, p_i > 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

zz: $\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i^{p_i}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(x_i)$$

Nach Jensen: Maßraum endlich, φ konvex $\Rightarrow \varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$

Sei X eine stochastische Größe mit $P(X = x_i) = p_i \quad \forall i$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \qquad$ Sei $\varphi \equiv \ln$

$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(x_i) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}$

Falls alle x_i unterschiedlich sind gilt, da $\ln$ strikt konkav ist

$\ln(\mathbb{E}(X)) > \mathbb{E}(\ln(X))$ woraus die strikte Ungleichung folgt.

zz: $q_i := \frac{1}{p_i}$ dann gilt $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{q_i}}{q_i}$

Sei Y eine stochastische Größe mit $P(Y = x_i^{q_i}) = p_i$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{q_i}}{q_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} x_i^{q_i} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\frac{1}{p_i}}$$

$\overset{\text{Jensen}}{\Rightarrow} \ln(\mathbb{E}(Y)) \geq \mathbb{E}(\ln(Y)) \quad \Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\frac{1}{p_i}}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(x_i^{\frac{1}{p_i}}\right)$

$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\frac{1}{p_i}}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{p_i} \ln(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\frac{1}{p_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{q_i}}{q_i}$

$\square$

MAB Ü1

5) ges: $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ... stochastische Größen $\mathbb{V}(X_k)>0\ \forall k$ mit

$$\forall k\in\mathbb{N}: \mathbb{P}[|X_k-\mathbb{E}(X_k)|\geq k]=\frac{\mathbb{V}(X_k)}{k^2}$$

X_k sei stochastische Größe mit $P[X_k=-k]=\frac{1}{2k^2}$ für alle $k\in\mathbb{N}$

$$P[X_k=0]=1-\frac{1}{k^2}$$

$$P[X_k=k]=\frac{1}{2k^2}$$

$$\mathbb{E}(X_k)=-k\cdot\frac{1}{2k^2}+0\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right)+k\cdot\frac{1}{2k^2}=0$$

$$\mathbb{V}(X_k)=\mathbb{E}((X_k-\mathbb{E}(X_k))^2)=\mathbb{E}((X_k-0)^2)=\mathbb{E}(X_k^2)=$$

$$=(-k)^2\frac{1}{2k^2}+0^2\left(1-\frac{1}{k^2}\right)+k^2\frac{1}{2k^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\mathbb{P}[|X_k-\mathbb{E}(X_k)|\geq k]=\mathbb{P}[|X_k|\geq k]=\mathbb{P}[X_k=-k]+\mathbb{P}[X_k=k]=\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{2k^2}=\frac{1}{k^2}$$

$$\frac{\mathbb{V}(X_k)}{k^2}=\frac{1}{k^2} \qquad \Rightarrow \mathbb{P}[|X_k-\mathbb{E}(X_k)|\geq k]=\frac{\mathbb{V}(X_k)}{k^2}$$

MAß Ü1

6) $X \in \mathcal{L}^2$ ... stochastische Größe m ... Median

zz: $|m - \mathbb{E}(X)| \leq \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]}$

m ... Median $\Rightarrow P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \wedge P(X < m) \leq \frac{1}{2}$

$|\mathbb{E}(X - m)| = |\int X - m \, dP| = |\int X \, dP - \int m \, dP| = |\mathbb{E}(X) - m|$

$|m - \mathbb{E}(X)| = |\mathbb{E}(X - m)| \leq \mathbb{E}(|X - m|)$ nach Jensen, da $|.|$ konvex.

Da der Median ein globales Minimum von $a \mapsto \mathbb{E}(|X - a|)$ ist gilt

$\mathbb{E}(|X - m|) \leq \mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|)$

Wieder nach Jensen, dieses Mal für $.^2$ konvex gilt.

$$\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|)^2 \leq \mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|) \leq \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}$$

$$\Rightarrow |m - \mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X - m|) \leq \mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|) \leq \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)} = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

zz: m ist globales Minimum von $a \mapsto \mathbb{E}(|X - a|)$

$$f: a \mapsto \mathbb{E}(|X - a|) = \int_{\mathbb{R}} |x - a| \, dP(x) = \int_{-\infty}^{a} |x - a| \, dP(x) + \int_{a}^{\infty} |x - a| \, dP(x)$$

$$f(a) = \int_{-\infty}^{a} (a - x) \, dP(x) + \int_{a}^{\infty} (x - a) \, dP(x) = (a - x) P(x) \Big|_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} P(x) \, dx + (x - a) P(x) \Big|_{a}^{\infty} - \int_{a}^{\infty} P(x) \, dx$$

$$= \lim_{y \to -\infty} (a - y) P(y) + \int_{-\infty}^{a} P(x) \, dx + \lim_{y \to \infty} (y - a) P(y) - \int_{a}^{\infty} P(x) \, dx = \int_{-\infty}^{a} P(x) \, dx - \int_{a}^{\infty} P(x) \, dx$$

$f'(a) = P(X \leq a) - P(a \leq X) = 0 \iff P(X \leq a) = P(X \geq a)$

und da $P(X \leq a) + P(X \geq a) = 1 \iff P(X \leq a) = P(X \geq a) = \frac{1}{2}$

$\iff a$ ist Median

MAß Ü1

7) $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ ... Messräume $\forall\, i = 1, \dots, n$ $\quad \Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$

$\mathcal{A} := \{ A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{A}_i \}$

Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra?

Nein! Gegenbeispiel:

$\Omega_1, \Omega_2 = \{1, 2\} \qquad \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$\Rightarrow \mathcal{A} = \{\emptyset, \{(1,1)\}, \{(1,2)\}, \{(1,1), (1,2)\}, \{(2,1)\}, \{(2,2)\}, \{(2,1), (2,2)\},$
$\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}\}$

$M_1 := \{1,2\} \times \{1,2\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\} = \Omega \in \mathcal{A}$

$M_2 := \{2\} \times \{2\} = \{(2,2)\} \in \mathcal{A}$

Es gilt aber $M_2^c = M_1 \setminus M_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\} \notin \mathcal{A}$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ muss keine σ-Algebra sein.