LINAG Ü3

1.12.3. K, K' ... Körper $\quad f: K \to K'$ ... Homomorphismus

zz: $f(1) = 0'$ oder $f(1) = 1'$

Fallunterscheidung: $\forall x \in K: f(x) = 0' \quad \Rightarrow f(1) = 0' \quad \Rightarrow f(K) = \{0'\}$

oder

$\exists x \in K: f(x) \neq 0' \quad \Rightarrow f(x) = f(1 \cdot x) = f(1) \cdot f(x)$ und da $f(x) \neq 0' \Rightarrow f(1)$ ist $1'$ (neutrales Element bzgl. $\cdot$)

zz: Im zweiten Fall: f ist injektiv

Sei $x \in K$ mit $f(x) \neq 0'$ Sei $a \in K$ mit $a \neq 0$ bel.

$0' \neq f(x) = f(x \cdot a \cdot a^{-1}) = f(x) \cdot f(a) \cdot f(a^{-1}) \quad \Rightarrow f(a) \neq 0'$

$\Rightarrow \ker(f) = \{0\}$

Sei $a, b \in K$ mit $f(a) = f(b)$ bel.

$\Rightarrow f(a) - f(b) = 0' \Leftrightarrow f(a-b) = 0' \quad \Rightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$

$\Rightarrow$ injektiv

zz: Im zweiten Fall: $f(K)$ ist ein zu K isomorpher Unterkörper von K'

Offensichtlich ist K zu $f(K)$ isomorph (injektiv von oben, surjektiv klar).

$0' \in f(K)$, da $f(0) = 0' \quad 1' \in f(K)$, da $f(1) = 1'$

Sei $a', b' \in f(K)$ bel. $\exists a, b \in K: f(a) = a', f(b) = b'$

$a' + b' = f(a) + f(b) = f(a+b) \in f(K)$

$a' \cdot b' = f(a) \cdot f(b) = f(ab) \in f(K)$

$\Rightarrow f(K)$ ist ein Unterkörper von K'

LINAG Ü3

6.3.9 α) $\alpha: \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{4\times 1}$

a)
$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline -1 & -3 & -5 & -3 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 11 & 14 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

$\alpha = \tau_t \circ f_\alpha$ mit $t = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und f_α festgelegt durch $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha(a) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\alpha = \tau_{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}} \circ f_\alpha \circ \tau_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

LINAG Ü3

6.4.3. A... affine Gerade $x, y, p, u \in A$

a) zz: $TV(x,u,p) = 1 - T(x,p,u)$ für $u \neq p$

$a = TV(x,u,p) \Leftrightarrow x = p + a \cdot (u-p) \Leftrightarrow \frac{x-p}{u-p} = a$

$b = 1 - TV(x,p,u) \Leftrightarrow b = 1 - \frac{x-u}{p-u} \Leftrightarrow b = \frac{p-u-x+u}{p-u} = \frac{p-x}{p-u} = \frac{-(x-p)}{-(u-p)} = \frac{x-p}{u-p}$

$\Rightarrow a = b$

b) zz: $TV(p,x,u) = (TV(x,p,u))^{-1}$ für $x \neq u \neq p$

$TV(p,x,u) = \frac{p-u}{x-u} = \left(\frac{x-u}{p-u}\right)^{-1} = (TV(x,p,u))^{-1}$

c) zz: $TV(x,p,u) = TV(y,p,u) \cdot TV(x,y,u)$ für $y \neq u \neq p$

$TV(x,p,u) = \frac{x-u}{p-u}$

$TV(y,p,u) \cdot TV(x,y,u) = \frac{y-u}{p-u} \cdot \frac{x-u}{y-u} = \frac{x-u}{p-u} = TV(x,p,u)$

LINAG Ü3

5.2.1. $V, W \ldots VR/K$ zz: V, W sind semilinear-isomorph $\Leftrightarrow V, W$ sind linear isomorph

$\Rightarrow$ Sei $f: V \to W$ die bezüglich ς (ein Automorphismus auf K) semilineare Abbildung.

Dann ist $\varsigma^{-1} \circ f$ ein Isomorphismus (mit ς^{-1} ist die komponentenweise Anwendung auf Vektoren gemeint)

Sei $x, y \in V$ bel. Sei $c \in K$ bel.

$(\varsigma^{-1} \circ f)(x+y) = \varsigma^{-1}(f(x+y)) = \varsigma^{-1}(f(x) + f(y)) = (\varsigma^{-1} \circ f)(x) + (\varsigma^{-1} \circ f)(y)$

$(\varsigma^{-1} \circ f)(c \cdot x) = \varsigma^{-1}(f(c \cdot x)) = \varsigma^{-1}(\varsigma(c) \cdot f(x)) = (\varsigma^{-1} \circ \varsigma)(c) + (\varsigma^{-1} \circ f)(x) = c \cdot (\varsigma^{-1} \circ f)(x)$

$\Rightarrow V, W$ sind linear isomorph

$\Leftarrow$ trivial, da id_K ein Automorphismus auf K ist.

LINAG Ü3

6.4.15. $\alpha: \mathbb{R}^{3\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 + 7 \\ x_2 + 1 \\ -x_3 + 6 \end{pmatrix}$

a) zz: $\forall x \in \mathbb{R}^{3\times1}: x \neq \alpha(x)$

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}$ bel. Da $x_3 \neq -x_3 + 6 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ Mittelpunkt zw. x und y $M = \frac{1}{2}(x+y)$

$m1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad m2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 1,5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad m3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\mathcal{E} = H(\{m1, m2, m3\})$ oder auch $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4,5-3,5 \\ 0,5-1,5 \\ 3-3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4,5-2,5 \\ 0,5-0,5 \\ 3-3 \end{pmatrix} y$

$= \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y$ oder auch $\begin{matrix} 4,5 + 1x + 2y = x_1 \\ 0,5 - x = x_2 \\ 3 = x_3 \end{matrix}$

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}$ bel. $m = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_1 - 2x_3 + 7 \\ x_2 + x_2 + 1 \\ x_3 - x_3 + 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_3 + 7 \\ 2x_2 + 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + 3,5 \\ x_2 + 0,5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} + (-x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_1 + x_2 - x_3 - 1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 - x_2 + x_1 + x_2 - x_3 - 1 \\ 0,5 + x_2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + 3,5 \\ x_2 + 0,5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m \in \mathcal{E}$

b) zz: $\alpha(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ (1) $\alpha(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}$ (2) $\mathcal{E} \subseteq \alpha(\mathcal{E})$

(1) Sei $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ bel. $\alpha\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 - 2e_3 + 7 \\ e_2 + 1 \\ -e_3 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 - 6 + 7 \\ e_2 + 1 \\ -3 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 + 1 \\ e_2 + 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4,5 + x + 2y + 1 \\ 0,5 - x + 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} + (x-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y+1)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 + x - 1 + 2y + 2 \\ 0,5 - x + 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$

(2) Sei $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ bel. $\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}$ mit $\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$, da α eine Bijektion ist. zz: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$

$\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 + 7 \\ x_2 + 1 \\ -x_3 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_2 + 1 = e_2 \Rightarrow x_2 = e_2 - 1 \\ -x_3 + 6 = e_3 \Rightarrow x_3 = -e_3 + 6 \end{matrix}$

$e_1 = x_1 - 2x_3 + 7 = x_1 - 2(-e_3 + 6) + 7 = x_1 + 2e_3 - 12 + 7 = x_1 + 2e_3 - 5 = e_1$

$\Rightarrow x_1 = e_1 - 2e_3 + 5$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 - 2e_3 + 5 \\ e_2 - 1 \\ -e_3 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 - 1 \\ e_2 - 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 + x + 2y - 1 \\ 0,5 - x - 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} + (x+1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

da $e_3 = 3$ $\quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$

LINAG Ü3

6.4.15. ...

c) zz: $\exists t \in \mathbb{R}^{3\times 1} \; \forall x \in \mathcal{E} : \alpha(x) = t + x$

$$\begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \qquad \alpha\begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 - 2\cdot 3 + 7 \\ 0,5+1 \\ -3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ 1,5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5-4,5 \\ 1,5-0,5 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: t$$

Sei $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ bel.

$$\alpha\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 - 2e_3 + 7 \\ e_2 + 1 \\ -e_3 + 6 \end{pmatrix} \underset{e_3=3}{=} \begin{pmatrix} e_1 + 1 \\ e_2 + 1 \\ 3 \end{pmatrix} \underset{e_3=3}{=} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + t$$

$\square$

LINAG Ü3

5.2.7 $f \in \mathcal{G}\text{-}L(V,W)$ bel. zz: $\exists p: V \to V$ ... Projektion $\exists g \in \mathcal{G}\text{-}L(p(V), W)$:

g ... injektiv und $f(x) = g(p(x))$

$\exists U$ ... UR von V mit $\ker f \oplus U = V$ $\quad \forall x \in V\ \exists x_1 \in \ker f\ \exists x_2 \in U: x_1 + x_2 = x$

$p: V \to V$ ist eine Projektion. $\quad g = f|_{p(V)}$ ist semi-linear.

$x = x_1 + x_2 \longmapsto x_2$

•) zz: $\forall x \in V: f(x) = g(p(x))$

Sei $x \in V$ bel. $\exists x_1 \in \ker f\ \exists x_2 \in U: x_1 + x_2 = x$

$f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + f(x_2) = f(x_2)$

$g(p(x)) = g(p(x_1 + x_2)) = g(x_2) = f(x_2)$, da $g = f|_{p(V)}$

•) zz: g ist injektiv $\Leftrightarrow \ker g = \{0_V\}$

Sei $x \in p(V)$ mit $g(x) = 0_W$ bel. Da $x \in p(V) \Rightarrow (x = 0_V) \vee (x \notin \ker f)$

$\ker f \supseteq \ker g \quad \Rightarrow (x = 0_V) \vee (x \notin \ker g) \quad \Rightarrow x = 0_V$

•) Eindeutigkeit

Bei gegebenem p ist g (offensichtlich) eindeutig. Allgemein ist p und g, aber nicht eindeutig, wie z.B. bei

$V = \mathbb{R}^{3\times1} \quad W = \mathbb{R}^{2\times1} \quad f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$p_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad p_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad p_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \quad g_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad g_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Dann ist p_1 eine Projektion und $f(x) = g_1(p_1(x))$ für alle $x \in V$.

$p_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0{,}5\end{pmatrix} \quad p_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad p_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad g_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad g_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

Auch p_2 ist eine Projektion und $f(x) = g_2(p_2(x))$ für alle $x \in V$.

$\rightarrow$ p und g sind nicht eindeutig.