

CAGD

full 2 hours ($2 \times 60\text{ min}$) each Thursday 12:00 - 14:00

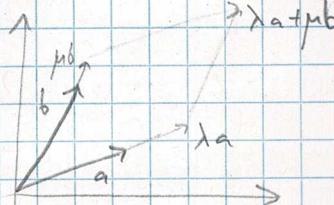
UE 14:00 - 16:00 Anwesenheitspflicht!

[Oral exam, write email to fix date and time]

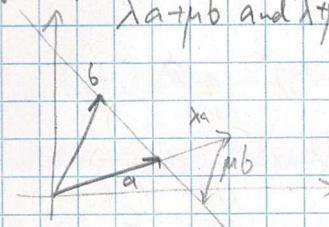
Freeform curves

Bézier curves

Bsp linear combination



Bsp affine combination



$\lambda a + \mu b$ and $\lambda + \mu = 1$ what is p so that $\lambda a + \mu b$ is on the line?

$$\lambda a + \mu b = a + t(b-a)$$

$$a(\lambda - 1 + t) + b(\mu - t) = 0$$

if a, b are lin. ua.

$$\Rightarrow \mu = t \wedge \lambda + \mu = 1$$

Bsp convex combination line is $a + t(b-a)$ with $t \in [0,1]$
 $\lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geq 0$

$$\Rightarrow \mu \in [0,1] \text{ and } \lambda \in [0,1]$$

Def linear combination $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ with $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

affine combination $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ and $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

convex combination $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ and $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ and $\lambda_i \geq 0 \forall i$

Def algorithm of de Casteljau

Given $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}^d$ (called control points / Kontrollpunkte), $t \in \mathbb{R}$

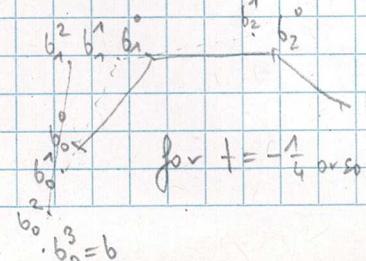
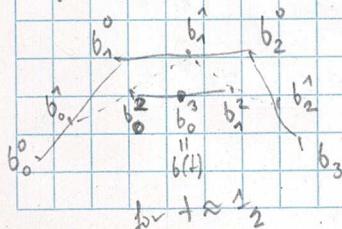
Recursion $b_i^0(t) := b_i$

$$b_i^j(t) := (1-t) b_i^{j-1}(t) + t b_{i+1}^{j-1}(t); j=1, \dots, n; i=0, \dots, n-j$$

$b(t) := b_0^n(t)$ (called Bézier curve)

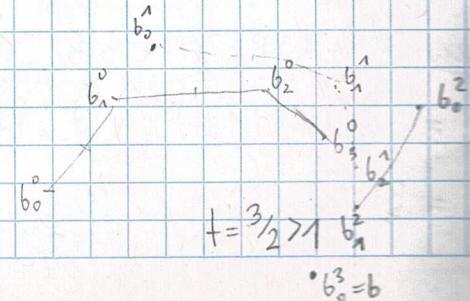
Bem in the algorithm above often $t \in [0,1]$

Bsp



$$\text{for } t = \frac{1}{4} \text{ or } s = \frac{1}{2}$$

$$\cdot b_0^3 = b$$



$$t = \frac{3}{4} > 1 \quad b_0^2 = b$$

CAGD

Bew In this course $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ and $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

Wkt $0! := 1$ $n! = n(n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ for $n \geq 1$

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & n \geq k \geq 0 \\ 0, & k > n \end{cases} \quad \text{for } n, k \in \mathbb{N}_0$$

Bernstein

Def Bernstein polynomials

$n, i \in \mathbb{N}_0$

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \in \mathbb{R}[t]$$

Bew Special cases of Bernstein polynomials

$$B_i^n(t) = 0 \quad \text{if } i > n$$

$$B_i^0(t) = \begin{cases} 0, & i \neq 0 \\ 1, & i = 0 \end{cases} \quad \text{if } t = 0$$

$$B_i^n(1) = \begin{cases} 0, & i < n \\ 1, & i = n \end{cases}$$

$$B_0^n(t) = 1$$

Satz

$$b_i^j(t) = \sum_{l=0}^j B_l^j(t) b_{i+l}$$

Bew

Induction over j : $j=0: \quad b_i^0(t) := b_i = 1 \cdot b_i = B_0^0(t) \cdot b_i \quad \checkmark$

$$\begin{aligned} j-1 \rightarrow j: \quad b_i^j(t) &:= (1-t) b_i^{j-1}(t) + t b_{i+1}^{j-1}(t) = (1-t) \sum_{l=0}^{j-1} B_l^{j-1}(t) b_{i+l} + \sum_{l=0}^{j-1} B_l^{j-1}(t) b_{i+l+1} \\ &= (1-t) \sum_{l=0}^{j-1} B_l^{j-1}(t) b_{i+l} + \sum_{l=0}^{j-1} B_{l+1}^{j-1}(t) b_{i+l} \\ &= \underbrace{\sum_{l=0}^{j-1} ((1-t) B_l^{j-1}(t) + t B_{l+1}^{j-1}(t))}_{= B_l^j(t)} b_{i+l} = \sum_{l=0}^j B_l^j(t) b_{i+l} \quad \checkmark \\ &\quad \text{using the following lemma} \end{aligned}$$

□

Morollar The Bézier curve $b(t) = b_0^n(t) = \sum_{l=0}^n B_l^n(t) b_l$, which is called

the Bernstein-representation of the Bézier-curve.

of degree n

Bew As $b(t) = \sum_{l=0}^n B_l^n(t) b_l \in C^\infty$ it is a polynomial curve, which is in C^∞ and therefore "very smooth".

Lemma $B_l^j(t) = (1-t) B_l^{j-1}(t) + t B_{l+1}^{j-1}(t)$

$$\begin{aligned} \text{Bew} \quad (1-t) B_l^{j-1}(t) + t B_{l+1}^{j-1}(t) &= (1-t) \binom{j-1}{l} + t(1-t)^{j-1-l} + t \binom{j-1}{l+1} + t^2(1-t)^{j-1-l} \\ &= \binom{j-1}{l} + t(1-t)^{j-1-l} + \binom{j-1}{l+1} + t^2(1-t)^{j-1-l} = \left[\binom{j-1}{l} + \binom{j-1}{l+1} \right] + t^2(1-t)^{j-1-l} = \binom{j}{l} + t(1-t)^{j-1-l} \\ &= B_l^j(t) \end{aligned}$$

□

CAGD

Bem What is $b(0)$? $b(0) = \sum_{i=0}^n B_i^n(0) b_i = 1 \cdot b_0 + 0 + 0 + \dots + 0 = b_0$

What is $b(1)$? $b(1) = 0 + \dots + 0 + 1 \cdot b_n = b_n$

Def curves which pass through the first and last point are called end-point-interpolating (Endpunktinterpolierend)

Bem Bézier curves are end-point-interpolating.

Bem How many intersection points are there between a planar (i.e. in \mathbb{R}^2)

Bézier curve and a straight line?

Straight line: $p + t(g - p)$ Bézier curve: $b(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) b_i$

Solve $p + t(g - p) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) b_i \Rightarrow$ resulting system of equations in t has at most n solutions.

Answer: at most n .

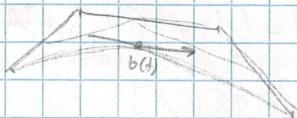
Lemma $\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$

Bem $\frac{d}{dt} B_i^n(t) = \frac{1}{dt} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} - \binom{n}{i} t^i (n-i)(1-t)^{n-i-1}$
 $= \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i)!} (n-i)t^i (1-t)^{n-i-1} = n \left(\frac{(n-1)!}{((i-1)!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i-1} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i}\right)$
 $= n \left(\binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} - \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} \right) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$

Satz $\frac{d}{dt} b(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^n B_i^n(t) (b_{i+1} - b_i) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) (b_{i+1} - b_i) = n(b_1^{n-1}(t) - b_0^{n-1}(t))$ □

Konollar $\rightarrow b(0) = n(b_1 - b_0)$

$\rightarrow b(1) = n(b_n - b_{n-1})$



\rightarrow The last segment in the algorithm of de Casteljau is the tangent of the Bézier curve in $b(t)$.

\rightarrow The derivative of a Bézier curve of degree n is a Bézier curve of degree $(n-1)$ with control points $(b_1 - b_0), (b_2 - b_1), \dots, (b_n - b_{n-1})$

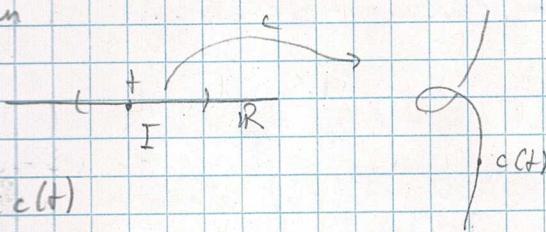
Bem UE Rhino, OpenSCAD, AutoCAD, ...

GeoGebra

CAGD

Einschub: parametrisierte Kurven

Def $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$



Def Tangentialvektor $\dot{c}(t) = \frac{d}{dt} c(t)$

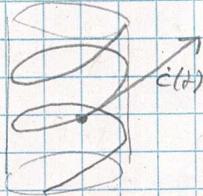
$$\dot{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t)) \text{ für } \mathbb{R}^3$$

Bsp

Schraublinie, Helix

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ t \end{pmatrix}$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$



△

Def Geschwindigkeit $\|\dot{c}(t)\|$

$$\text{Bsp } \|\dot{c}(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2} \quad (\text{Fortsetzung obiges Bsp})$$

Mit dieser Schraublinie wird mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen.

Def Ein Punkt $c(t)$ heißt regulär, wenn $\dot{c}(t) \neq 0$ Nullvektor

singular, wenn $\dot{c}(t) = 0$

Bsp (wieder Fortsetzung) Diese Schraublinie hat nur reguläre Punkte, da $\dot{c}(t) \neq 0$.

$$\text{Bsp } c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t^2, t^3, t^4) \quad \dot{c}(t) = (2t, 3t^2, 4t^3)$$

0 ist singular, da $\dot{c}(0) = (0, 0, 0)$. Sonst überall regulär.

Beim regulär und singular hängt von der Parametrisierung ab!

einerseits $c(t) = (t, t)$ dann überall regulär

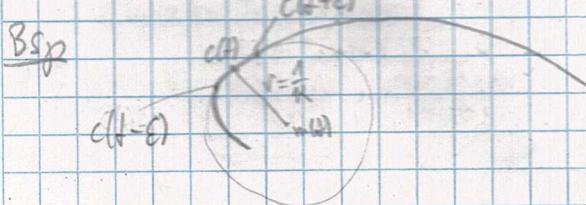
andererseits $c(t) = (t^3, t^3)$ dann ist 0 singular.

Es gibt aber Kurven mit Punkten die nicht parametrisiert werden können

wodass der Punkt regulär ist.

Def $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$

$K(t) = \frac{d\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|^2} = \frac{d(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^2}$ ist die Krümmung der Kurve im Punkt $c(t)$.



Krümmungskreis hat Radius $\frac{1}{K(t)}$

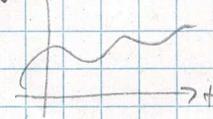
$m(t)$ heißt Krümmungsmittelpunkt und

$$\text{ist } c(t) + \frac{1}{K(t)} m(t) \text{ mit } m(t) = \frac{(-c_2(t), c_1(t))}{\|\dot{c}(t)\|}$$

CAGD

Bew Vergleich mit Schlußformel für Krümmung eines Geraden.

f(t)



$$t \mapsto (t, f(t))$$

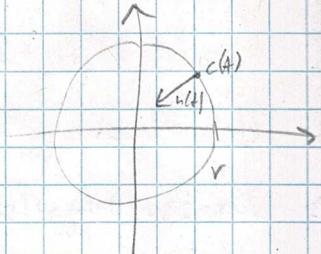
Als Übungsaufgabe.

Bsp

$$\text{Kreis } c(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix} \quad \dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \quad \ddot{c}(t) = \begin{pmatrix} -r \cos t \\ -r \sin t \end{pmatrix}$$

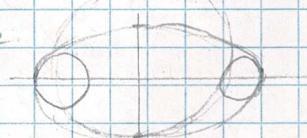
$$K(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} -r \sin t & -r \cos t \\ r \cos t & -r \sin t \end{pmatrix}}{r^3} = \frac{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}{r^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

$$n(t) = \frac{(-r \cos t, -r \sin t)}{r} = (-\cos t, -\sin t)$$



Def Scheitelpunkt $c(t)$ mit $K(t) = 0$

Bsp Ellipse



hat 4 Scheitelpunkte

$(t, \exp(t))$ hat keine Scheitelpunkte.

Bsp Klothoide sind Kurven mit $K(t) = t$. Verwendung im Straßenbau.

haben keinen Scheitelpunkt.

Def $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ $K(t) = \frac{\| \dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) \|}{\| \dot{c}(t) \|^3}$ ist Krümmung einer Raumkurve.

Def $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\tau(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))}{\| \dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) \|^2}$ ist Torsion einer Raumkurve.

Bsp Schraublinie

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ p \end{pmatrix} \quad \gamma(t) = \text{irgendetwas mit } p$$

Einschub Ende.

Wkl: Satz $b(t) := n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^n(t) (b_i, -b_i) = n (b_{n-1}^n(t) - b_0^{n-1}(t))$

Wir wissen bereits: $b_i^n(t) = \sum_{l=0}^n B_l^n(t) b_{i+l}$ und $B_l^n(t) = (1-t) B_{l-1}^{n-1}(t) + t B_{l-1}^{n-1}(t)$

$$\begin{aligned}
 b(t) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i^n(t) b_i \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d}{dt} B_i^n(t) b_i = \sum_{i=0}^{n-1} n (B_{i+1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) b_i \\
 &= n \left(\sum_{i=0}^{n-1} B_{i+1}^{n-1}(t) b_i - \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) b_i \right) = n \left(\sum_{i=1}^n B_{i-1}^{n-1}(t) b_i - \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) b_i \right) \\
 &= n \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) b_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) b_i \right)}_{= b_1^{n-1}(t)} = n \left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) (b_{i+1} - b_i) \right) \\
 &\qquad\qquad\qquad = b_0^{n-1}(t) = n (b_1^{n-1}(t) - b_0^{n-1}(t))
 \end{aligned}$$

□

CAGD

Korollar $b(t) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} b_i^{n-2}(t) (b_{i+2} - b_{i+1} - (b_{i+1} - b_i)) = b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i$

Korollar $b(0) = n(n-1)(b_2 - 2b_1 + b_0)$ $b(1) = n(n-1)(b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2})$

Korollar Krümmung im Punkt $b(0)$ hängt nur von b_0, b_1, b_2 ab.

$$b(1) = b_{n-2}, b_{n-1}, b_n \text{ ab.}$$

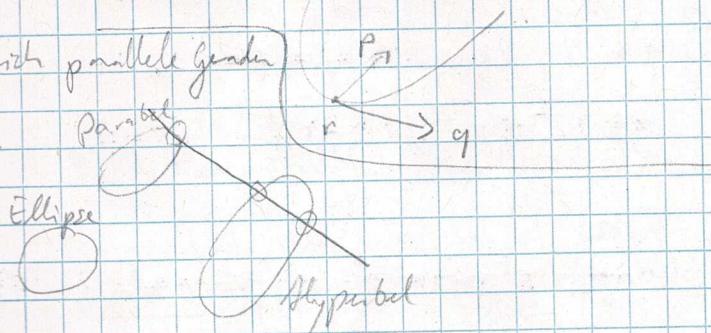
Bsp Quadratische Bézierkurve ($n=2$)

$$\begin{aligned} b(t) &= \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) b_i = B_0^2(t) b_0 + B_1^2(t) b_1 + B_2^2(t) b_2 = \binom{2}{0} t^2 b_0 + \binom{2}{1} t^1 (1-t)^1 b_1 + \binom{2}{2} t^0 (1-t)^2 b_2 \\ &= (1-t)^2 b_0 + 2t(1-t)b_1 + t^2 b_2 = t^2(b_2 - 2b_1 + b_0) + t(b_1 - 2b_0) + b_0 \end{aligned}$$

ist affine Verzerrung einer Parabel also auch eine Parabel.

→ Quadratische Bézierkurven sind Parabeln.

Beim Ferngerade (Punkte in den sich parallele Geraden treffen) egl. line at infinity.

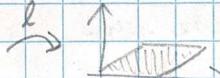


CAGD

Def $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt affin: $\Leftrightarrow \exists l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lin. Abbildung $\exists v \in \mathbb{R}^m$ mit $\alpha(x) = l(x) + v$

Bsp lin. Abbildungen

Scherung



$$l(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Flächeninhalt bleibt erhalten.

Def $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bij, affin nennt man auch Affinität

Satz Bezierkurven sind affin invariant.

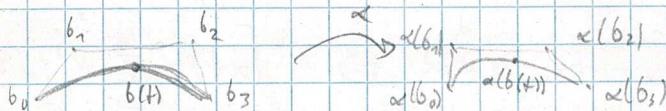
Bew

$$b(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) b_i \text{ ... Bezierkurve} \quad \alpha(x) = l(x) + v \quad \text{wobei } b_i \in \mathbb{R}^d \text{ und } l: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\alpha(b(t)) = l(b(t)) + v = l\left(\sum_{i=0}^n B_i^n(t) b_i\right) + v =$$

$$= \sum_{i=0}^n B_i^n(t) l(b_i) + v = \underbrace{\sum_{i=0}^n B_i^n(t)}_{\sum B_i^n(t) = 1} (\underbrace{l(b_i) + v}_{\alpha(b_i)}) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \alpha(b_i)$$

□



Lemma $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$

Binom Lehrsatz $(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$ für $x=t$ $y=1-t$

$$\Rightarrow 1 = (t + (1-t))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$

□

Lemma Für $t \in [0, 1]$ gilt $B_i^n(t) \geq 0$

$$B_i^n(t) = \underbrace{\binom{n}{i}}_{\geq 0} \underbrace{t^i}_{\geq 0} \underbrace{(1-t)^{n-i}}_{\geq 0} \geq 0$$

□

Satz

$\forall t \in [0, 1]$ ist $b(t)$ in der Konvexitätshülle ihrer Kontrollpunkte

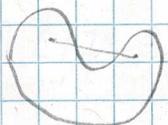
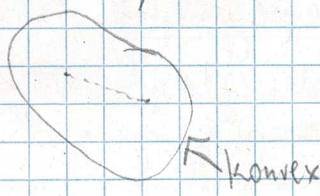
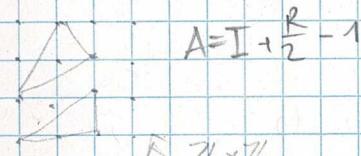
Def $M \subseteq \mathbb{R}^d$ $\text{conv}(M) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : v_i, \dots, v_k \in M; \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0; \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \in \mathbb{N} \right\}$

heißt Konvexe Hülle.

Def $M \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt Konvexe Menge $\Leftrightarrow \forall x, y \in M \quad \forall t \in [0, 1]: tx + (1-t)y \in M$.

Bem Satz von Pick

Bsp

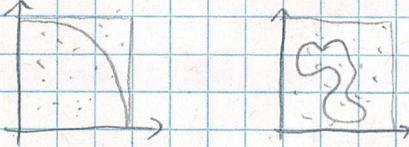


nicht konvex

CAGD

Bew $b(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) b_i \quad \forall t \in [0, 1] \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 1]$
 $\Rightarrow b(t)$ ist in der Konvexen Menge von $\{b_0, \dots, b_n\}$ □

Bem Monte Carlo Methode zum Flächenbestimmung



zufällige Punkte zählen wieviel drinnen + draußen
dann Volumen bestimmen.

Bem



Satz Beziérkurven sind symmetrisch, d.h. $b(t)$... Beziérkurve zu b_0, \dots, b_n und $\tilde{b}(t)$... Beziérkurve zu $\tilde{b}_0 = b_n, \tilde{b}_1 = b_{n-1}, \dots, \tilde{b}_n = b_0$ dann ist $b(t) = \tilde{b}(1-t)$

Bew

$$\begin{aligned} b(t) &= \sum_{i=0}^n B_i^n(t) b_i = \sum_{i=0}^n B_i^n(1-t) b_{n-i} = \sum_{i=0}^n B_{n-i}^n(1-t) b_i = \sum_{i=0}^n B_i^n(1-t) b_i = b(1-t) \end{aligned} \quad \square$$

Lemma $b(t)$... Beziérkurve zu $b_0, \dots, b_n \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow B_i^n(\alpha t) = \sum_{j=0}^n B_i^j(\alpha) B_j^n(t)$

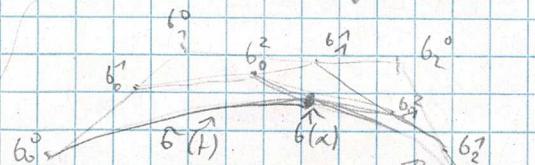
Bew durch nachrechnen. (Induktion)

Satz $b(t)$... Beziérkurve zu $b_0, \dots, b_n \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \tilde{b}(t) := b(\alpha t)$ eine Beziérkurve zu den Kontrollpunkten $b_0^\alpha(\alpha), b_1^\alpha(\alpha), b_2^\alpha(\alpha), \dots, b_n^\alpha(\alpha)$

und $\tilde{b}(t) := b((1-\alpha)t + \alpha)$... Beziérkurve zu

$$b_0^\alpha(\alpha), b_1^{n-1}(\alpha), b_2^{n-2}(\alpha), \dots, b_n^0(\alpha)$$



Bew

$$\begin{aligned} \tilde{b}(t) &= b(\alpha t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(\alpha t) b_i \stackrel{\text{Lemma}}{=} \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n B_i^j(\alpha) B_j^n(t) \right) b_i = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n B_i^j(\alpha) B_j^n(t) b_i \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^n B_j^n(t) \sum_{i=0}^n B_i^j(\alpha) b_i = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) b_0^j(\alpha)$$

$$b_0^j(\alpha) \rightarrow b_i^j(t) = \sum_{k=0}^i B_k^j(t) b_{i+k} \quad \text{haben wir am Anfang gezeigt.} \quad \square$$

Für \tilde{b} analog.

Diesen Satz heißt Unterteilungseigenschaft (sub-division-property).

Def $\Pi_n := \{f \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(f) \leq n\} \dots \text{VR}$
 Polynomring

DAED

Satz $\{B_0^n(t), \dots, B_n^n(t)\}$ ist eine Basis von Π_n .

Bew

$$B_i^n(t) \in \Pi_n \Rightarrow \text{span}(B_0^n(t), \dots, B_n^n(t)) \subseteq \Pi_n \quad \text{Sei } k \leq n \text{ belieb.}$$

$$1 = \sum_{i=0}^{n-k} B_i^n(t) = \sum_{i=k}^n B_{i-k}^{n-k}(t) = \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} t^{i-k} (1-t)^{n-k-(i-k)}$$

$$\rightarrow \binom{n}{k} t^k = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{n-k}{i-k} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} B_i^n(t)$$

Note: $\dim \Pi_n = n+1$ klar

$$\rightarrow t^k \in \text{span}(B_0^n(t), \dots, B_n^n(t)) \Rightarrow \Pi_n \subseteq \text{span}(B_0^n(t), \dots, B_n^n(t)) \quad \square$$

Korollar Jede polynomiale Kurve ist eine Beziérkurve.

Bem Nachteile von Beziérkurven: Unschärfe, Veränderung der ganzen Kurve

CAGD

Weiter mit Eigenschaften von Bézierkurven.

Satz

Die Folge $P_0 := (b_0^0, b_0^1, \dots, b_0^n)$

$P_1 := (b_0^0, b_0^1, \dots, b_0^n, b_1^0, b_1^1, \dots, b_1^{n-2})$

$P_2 :=$ besteht aus Punkten, die wir bekommen indem wir die zwei unktlichen Bézierkurvekontrollpunkte wieder unterteilen. \dots, P_n

für $t = \frac{1}{2}$

"Konvergiert" zur Bézierkurve (corner-cutting / Ecken abschneiden)

Bew

$d := \max_{0 \leq i \leq n} \|b_i - b_{i+1}\|$. - Maximum der Länge der Kanten des Kontrollpolygons.

\Rightarrow Die Kanten des Polygons sind höchstens d lang.
also sind Kanten des neuen Polygons höchstens $\frac{d}{2}$ lang.

Maximale Kantellänge von P_0 ist d , -& P_1 ist $\frac{d}{2}$, -& \dots , P_n ist $\frac{d}{2^n}$

Wie weit sind die Punkte von P_k von der Bézierkurve b entfernt?

$$\|P_k(i) - b\| \leq (n-1) \frac{d}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Bem Es gilt auch $P_n \rightarrow b$ also nicht nur punktweise konvergenz, sondern Konvergenz als Kurve.

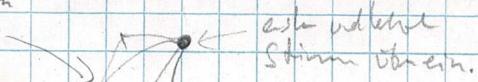
B-Spline-Kurven

Bem B-Spline-Kurven sind zusammengesetzte Bézierkurven.

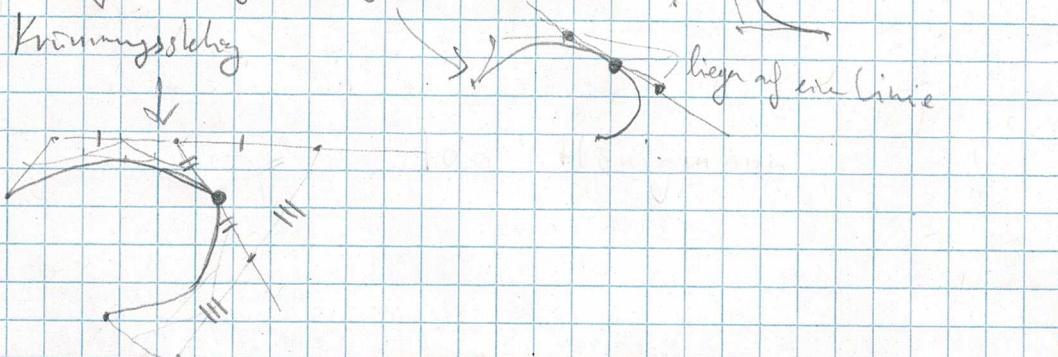
Bsp Steiger Übergang von Bézierkurven

Tangentialebiger Übergang

Krümmungsschlag



liegen auf einer Linie



CAGD

Def B-Spline-Kurven

$$m, n \in \mathbb{N} \quad T = (t_0, t_1, \dots, t_{m+n}) \quad t_i \in \mathbb{R} \quad t_i \leq t_{i+1} \quad t_i < t_{i+1}$$

T heißt Knotenvektor

m ... Anzahl Kontrollpunkte

n ... Grad der B-Spline-Kurve

$$\alpha_i^r(t) := \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i}, & \text{falls } t_{i+r} - t_i \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$N_i^r(t)$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch

$$N_i^0(t) := \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_i^n(t) = \alpha_i^r(t) N_{i+1}^{n-1}(t) + (1 - \alpha_{i+1}^r(t)) N_{i+1}^{n-1}(t)$$

N_i^n heißen B-Spline-Basisfunktionen und sind stückweise polynomiale Kurven.

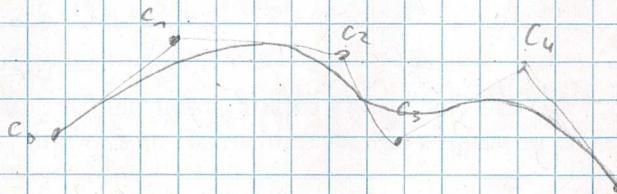
Satz jede B-Spline-Kurve $s(t)$ hat eine Darstellung der Form

$$s(t) = \sum_{i=0}^m N_i^n(t) c_i \quad \text{wobei } c_0, \dots, c_m \in \mathbb{R}^d \quad \text{Kontrollpunkte sind}$$

n ist der Grad der B-Spline Kurve.

Bsp o. B.

Bsp



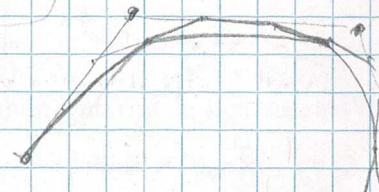
ges: quadratische B-spline-Kurven.

c5 mehrere Kurven möglich je nach Knotenvektor.

Bem typischerweise wird $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5)$ gewählt

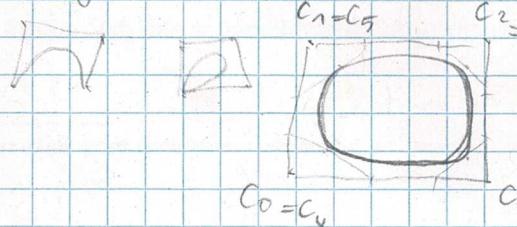
also oft 0 dann loschreibt den nicht gleich wie nicht holt so oft wie 0 wiederholt wurde.

Bsp kubische B-Spline Kurve



Linie dicken, dann erhält man Kontrollkurve der Beziérkurve

Bsp geschlossene B-Spline-Kurve



Krümmungsschleife, geschlossene B-Spline.

NURBS-Kurven

(Non-Uniform-Rational-B-Spline-Kurven)

CAGD

Kurvdefinition

(1) gegeben sind Kontrollpunkte $c_0, \dots, c_m \in \mathbb{R}^d$

(2) $c_i \mapsto \underbrace{(1, c_i)}_{=: d_i} \in \mathbb{R}^{d+1}$ (heißt homogenisieren)

(3) wähle Gewichte $w_i > 0$

$$w_i \cdot d_i = : e_i \in \mathbb{R}^{d+1}$$

(4) Bestimme B-Spline-Kurve zu den Kontrollpunkten e_i

$$s(t) = \sum_{i=0}^m N_i^n(t) e_i = \sum_{i=0}^m N_i^n(t) w_i (1, c_i) = \left(\sum_{i=0}^m N_i^n(t) w_i, \sum_{i=0}^m N_i^n(t) w_i c_i \right)$$

(5) Projizierte $s(t)$ zunächst auf $(1 \times \mathbb{R}^d)$ -Ebene

$$\tilde{x}(t) = pr(s(t)) = \left(1, \frac{\sum_{i=0}^n N_i^n(t) w_i c_i}{\sum_{i=0}^n N_i^n(t) w_i} \right)$$

(6) $x(t) := pr_{\mathbb{R}^d}(\tilde{x}) = \frac{\sum_{i=0}^n N_i^n(t) w_i c_i}{\sum_{i=0}^n N_i^n(t) w_i}$ ist die NURBS-Kurve zu den Gewichten w_0, \dots, w_m
(heißt dehomogenisieren)

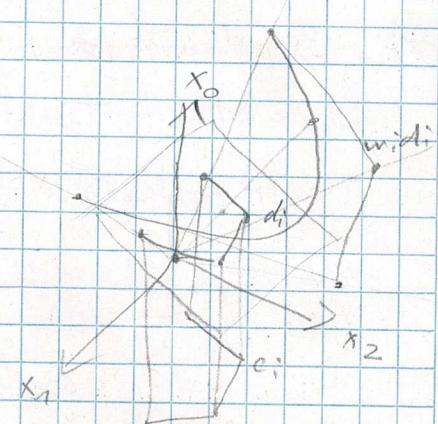
Bem Falls alle $w_i = w \in \mathbb{R}^+$ dann ist $x(t) = s(t)$ eine B-Spline-Kurve

Rem $\sum_{i=0}^m N_i^n(t) = 1 \quad , \quad N_i^n(t) \geq 0$

Bem Je größer w_i desto eher wird die Kurve von dem Punkt c_i "gezogen"

Bem NURBS und B-Spline Kurven sind affin invariant

Bem B-Spline Kurven vom Grad n mit $(n+1)$ Kontrollpunkten (d.h. $m=n$) sind Beziirkurven.



Unterteilungsalgorithmen (für Kurven)

Algorithmus von Chaikin gegeben: Polygon $p_i, p_{i+1}, \dots \in \mathbb{R}^d$

(1) Verdoppeln jeden Knoten

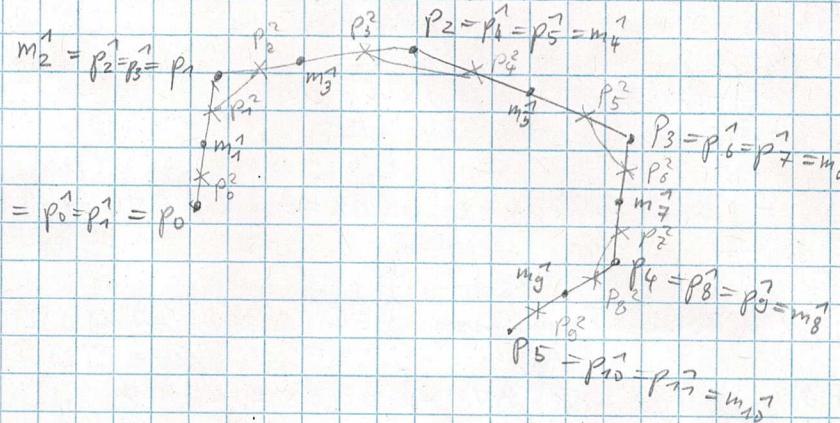
$$p_i \rightarrow p_i^1$$

(2) Mittle die p_i^1 's

$$m_i^1 = (p_i^1 + p_{i+1}^1) \frac{1}{2}$$

(3) Mittle die m_i^1 's

$$p_i^2 = (m_i^1 + m_{i+1}^1) \frac{1}{2}$$



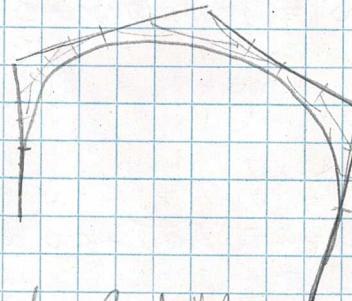
Wir erhalten ein Polygon, das ähnlich zu Original nur mit Abgerundeten Ecken.

Wiederholen mit neuem Polygon als Input.

Satz

Der Algorithmus von Chaikin konvergiert

zu einer quadratischen B-Spline-Kurve.



Bew o. B.

Bem Chaikin Algorithmus ist laut: 1x Verdoppeln 2x Mitteln

Algorithmus von Lane-Riesenfeld

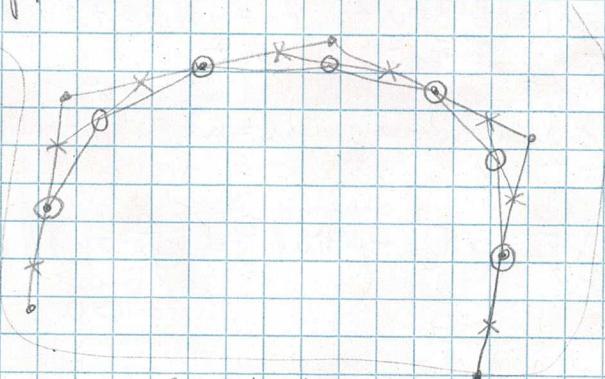
1x Verdoppeln n x Mitteln $p_i \in \mathbb{R}^d$

Satz Der Algorithmus von Lane-Riesenfeld

konvergiert gegen eine B-Spline-Kurve vom

Grad n.

Bem o. B.



Bem Chaikin ist $n=2$ Sonderfall von Lane-Riesenfeld.

Bem Lane-Riesenfeld ist ein approximatives Kurvenschema.

Bem Lane-Riesenfeld ist affin invariant.

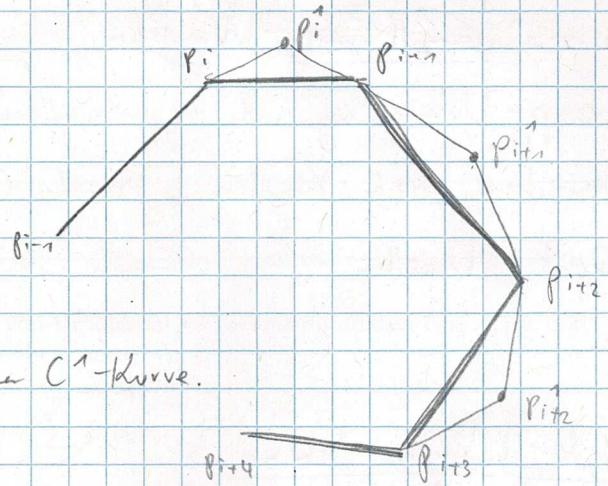
CAAD

Four-Point-Scheme

$$p_i^1 := -\frac{1}{16} p_{i-1} + \frac{9}{16} p_i + \frac{9}{16} p_{i+1} - \frac{1}{16} p_{i+2}$$

(ist affine Kombination)

Rekursiv weiter



Satz Die Kurve konvexität zu einer C^1 -Kurve.

Die Kurve ist affine invariant,

Die Kurve ist interpolierend.

Bew interpolierend: klar, affin invariant: klar C^1 : o.B.

Bem

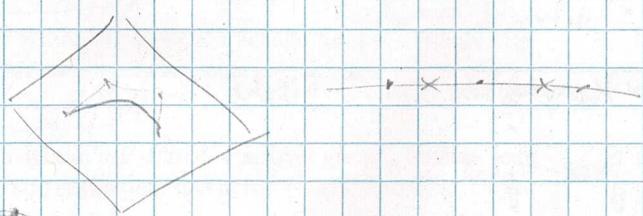
Alternative zu Four-Point-Schema mit anderen "Gewichten".

$$p_i^1 := -w p_{i-1} + (\frac{1}{2} + w) p_i + (\frac{1}{2} - w) p_{i+1} - w p_{i+2} \quad (\text{oben ist } w = \frac{1}{16})$$

Interpolierend ✓ C^1 : nicht notwendigerweise! nur für $w \in (0, \frac{\sqrt{5}-1}{8})$

Bem

Die obigen Schemata haben die Eigenschaft der linearen Präzision, d.h. sie erhalten Unterkrümmen



Nicht "zirkuläre Präzision", also

wenn Punkte auf Kreis liegen, dann

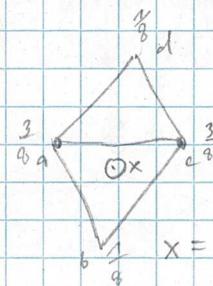
liegt die Kurve ext. außerhalb der

Kurve.

Unterteilungsalgorithmen für Netze (meshes)

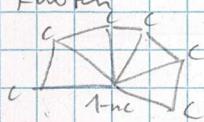
Dreiecksnetze

Loop-Subdivision: Kante



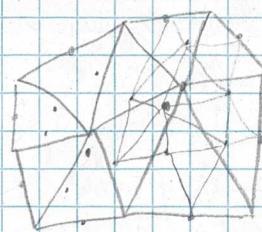
$$x = \frac{3}{8}a + \frac{1}{8}b + \frac{3}{8}c + \frac{1}{8}d$$

Knoten



am Rand

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$



Knoten der Valenz n (= Anzahl Kanten durch den Knoten)

$$c = \frac{1}{n} \left(\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right)^2 \right) \stackrel{n=6}{=} \frac{1}{16}$$

$$1 - nc = \frac{5}{8}$$

CAD

$$w_6 \cdot r_c = R = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5}{8}} \left(\frac{9}{16} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\pi} \frac{1}{6}$$

Satz hoop-Unterteilung ist approximiert, konvex gegen C^2 -Fläche bei gewissen $n=6$ Knoten, sonst C^1 -Fläche.

Face-Split (Facetten werden "vertikal" in kleinere Facetten)

Bew o. B.

Modified - Butterfly - Scheme

Wie im Bild neue Knoten aus Kante.

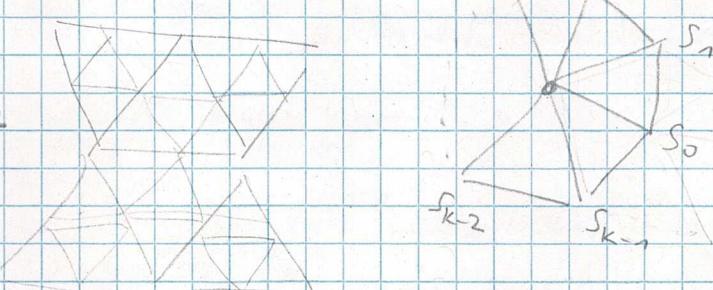
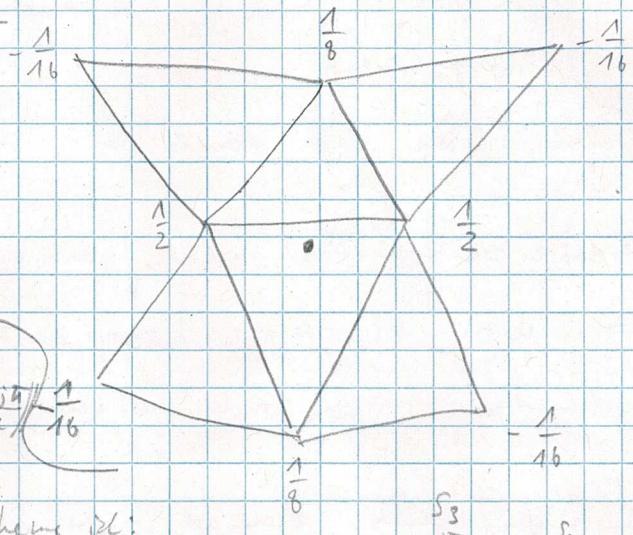
Für besondere Kosten

(n ≠ 6) machen wir:

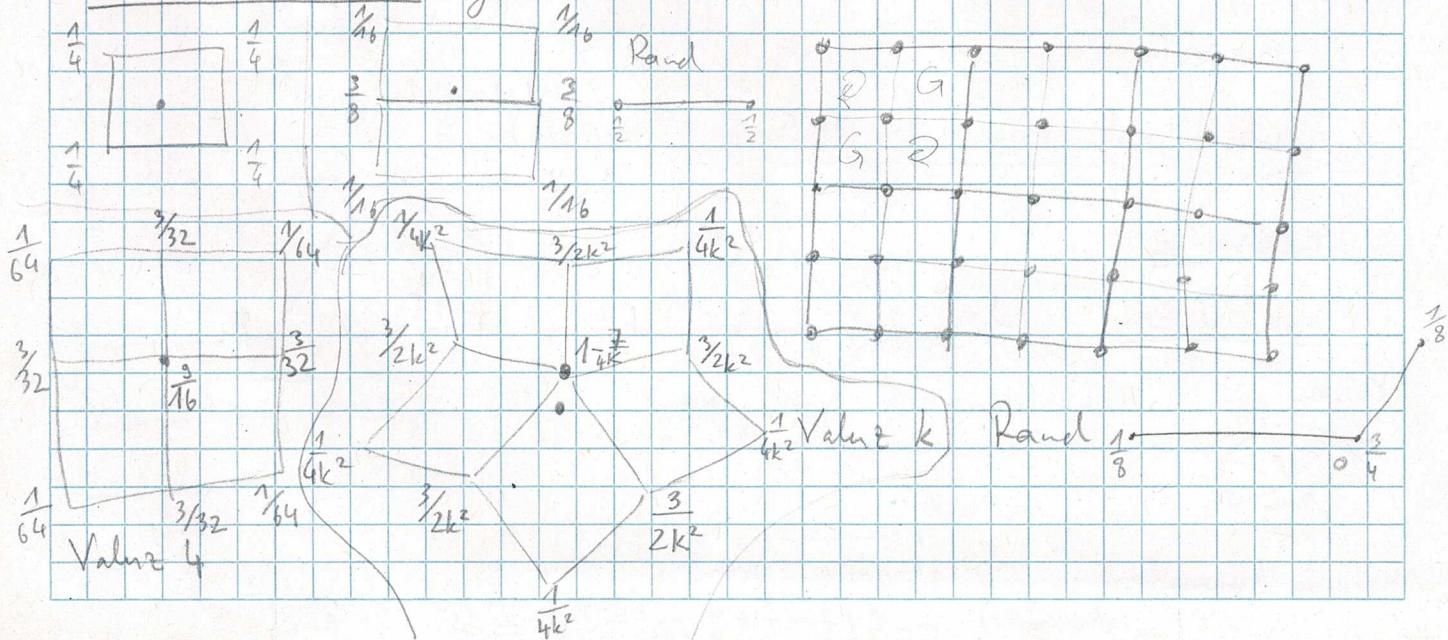
$$S_j = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{4} + \cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{6j\pi}{k}\right) \right) \frac{1}{16}$$

Sitz Modified Buffly - Scheme 2:

- interpolierend
 - Konvexität zu C^1 -Flächen
 - face-split



Catmull - Clark für Vierecksnetze

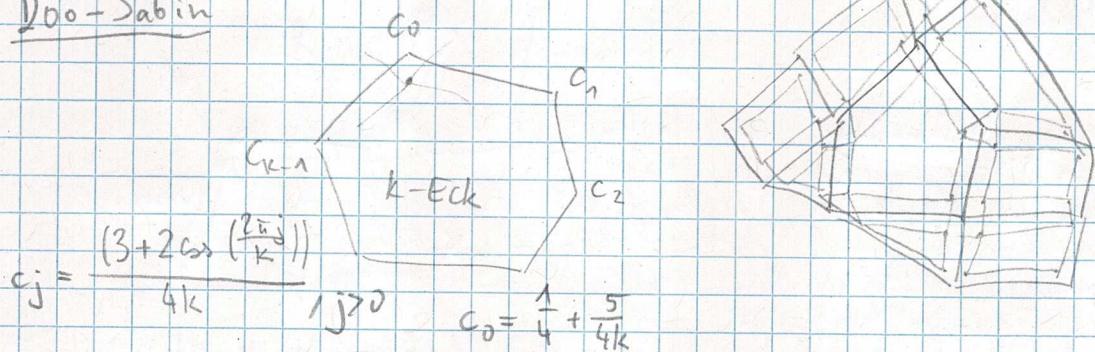


CAGD

Satz Catmull-Clark ist: • approximiert

- konvergiert zu C^2 -Fläche (außer bei extraordinary vertices)
- face-split.
(Singularitäten erkennt)

Doo-Sabin



For quadrat $k=4$

$$c_1 = \frac{3}{16}$$

$$c_2 = \frac{1}{16}$$

$$c_3 = \frac{3}{16}$$

$$\frac{3}{16} = c_0$$

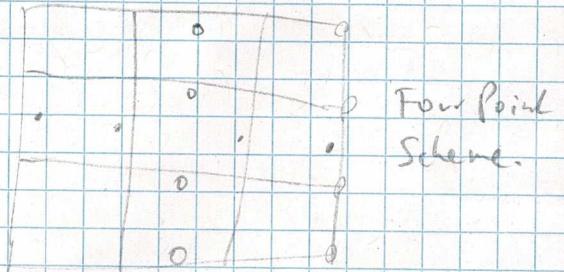
Satz Eigenschaften Doo-Sabin: • approximiert

- konvergiert zu C^1 -Fläche
- vertex-split

Kobbelt-Scheme für Vierecksnetze

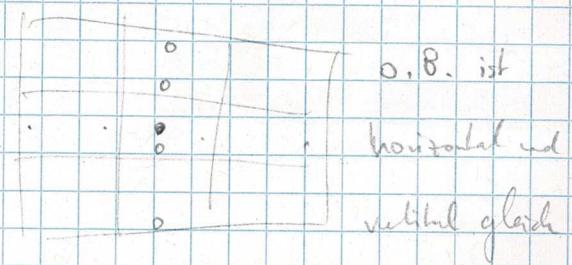
Satz • interpoliert

- konvergiert zu C^1 -Fläche
- face-split



vertical + horizontal

Dann Fourpoint Scheme auf resultierende Punkte



1	1	2	2
1	2	1	1

CAGD

Half-Edge - Data - Structure

gegeben: Netz ... das eine Fläche repräsentiert
orientierbar

→ ... Halfedges

Ein Netz ist eine Ansammlung von Listen,
nämlich Ecken v_i , Kanten e_i , Facetten f_i und

Halbkanten h_i .

Zu jedem Knoten v_i gibt es einen Punkt zu einer Halbkante $v \rightarrow h$.

Jede Facette wird eine Halbkante zugeordnet.

Jede Edge wird eine Halbkante zugeordnet.

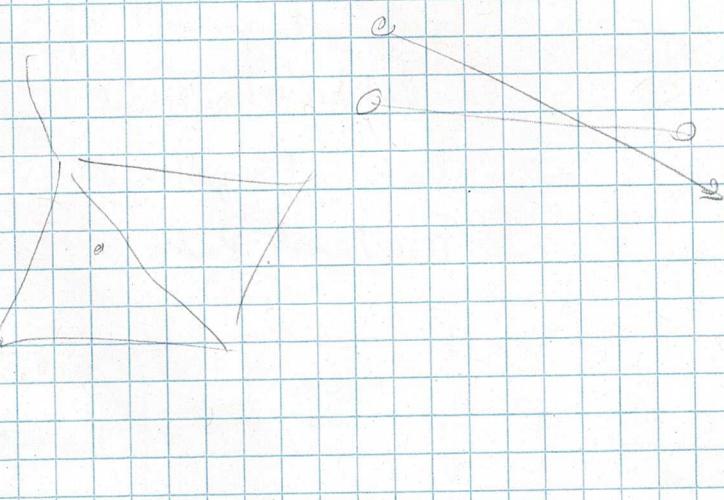
Jede Halbkante wird die gegenüberliegende Halbkante (flip), die nächste
(next), (previous), facette (f), vertex (v), edge (e) wobei
dass die end die zu dieren Halbkante befinden sind.

Bsp. In Python

geopy für Lehrunterlagen

dokumentation: www.geometrie.fmnia.ac.at/

Kilian/docs/geopy



CAGD

NURBS - Kurven

$$\text{WGL } x(t) = \frac{\sum_{i=0}^m N_i^n(t) w_i c_i}{\sum_{i=0}^m N_i^n(t) w_i}, \quad w_i > 0$$

Bsp NURBS - Kurve über einer quadr. Beziérkurve

$$b(t) = (1-t)^2 b_0 + 2(1-t)b_1 + t^2 b_2$$

$$x(t) = \frac{(1-t)^2 w_0 b_0 + 2(1-t)w_1 b_1 + t^2 w_2 b_2}{(1-t)^2 w_0 + 2(1-t)w_1 + t^2 w_2}$$

ist eine Zentralprojektion einer Parabel, also ein Regelschnitt.

Bsp $w_0 = w_1 = w_2 \quad x(t) = b(t)$ also eine Parabel.

Bsp $w_0 = w_2 = 1 \quad w_1 = w$ Frage: Wie muss w gewählt werden, sodass ein anderer Regelschnitt (als Parabel) entsteht?

$x(t)$ ist eine $\begin{cases} \text{Ellipse} \\ \text{Parabel} \\ \text{Hypole} \end{cases}$ wenn $x(t) \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$ Fernpunkte hat.

Also untersuchen wir, wann hat die Nenner 0, 1, 2 Nullstellen?

$$(1-t)^2 + 2(1-t)tw + t^2 = 1 - 2t + t^2 + 2tw - 2t^2w + t^2 = (2-2w)t^2 + (-2+2w)t + 1$$

$$t_{1,2} = \frac{2-2w \pm \sqrt{(2-2w)^2 - 4(2-2w)}}{2(2-2w)} = \frac{2-2w \pm \sqrt{4-8w+4w^2-8+8w}}{2(2-w)}$$

Falls $w=1 \Rightarrow$ Parabel (oben). Soll $w \neq 1 \Rightarrow$ keine Division durch 0

Das interessiert wie viele Fzg. wir erhalten also das untere Wurzel

$\begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$ reelle Nullstellen, wenn $4(w^2-1) \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$

$$4(w^2-1) = 0 \Leftrightarrow w=1$$

Satz $x(t)$ ist eine $\begin{cases} \text{Ellipse} \\ \text{Parabel} \\ \text{Hypole} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} w < 1 \\ w = 1 \\ w > 1 \end{cases}$.

$$w=1$$



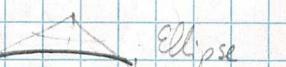
Parabel

$$w > 1$$

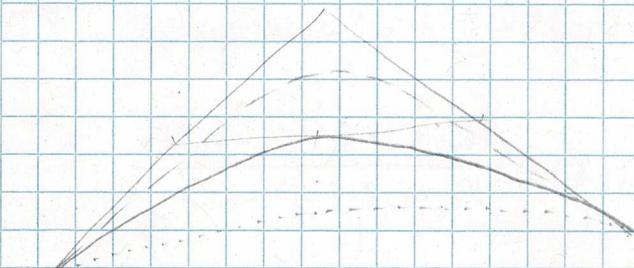


Hypole

$$w < 1$$



Ellipse



--- Hyperbol --- Parabol Ellipse

CAGD

Bsp Ist ein Kreis auch möglich?

Offenbar müssen die Abstände von b_1 zu den

Berührungsstellen b_0, b_2 der Kreistangentialen durch b_1

sind gleich lang.

Aber notwendige Bedingung, damit $x(t)$ ein Kreis ist, ist, dass b_0, b_1, b_2 ein gleichseitiges Dreieck bilden.

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(1-\frac{1}{2})^2 b_0 + 2(1-\frac{1}{2})\frac{1}{2}w b_1 + (\frac{1}{2})^2 b_2}{(1-\frac{1}{2})^2 + 2(1-\frac{1}{2})\frac{1}{2}w + (\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{2}w b_1 + \frac{1}{4}b_2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}w + \frac{1}{4}} = \frac{b_0 + 2w b_1 + b_2}{2 + 2w}$$

$$= \frac{1}{2+2w} (b_0 + b_2 + 2w b_1) = \frac{1}{1+w} \left(\frac{b_0 + b_2}{2} + w b_1 \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1+w} \right) \frac{b_0 + b_2}{2} + \frac{w}{1+w} b_1 \quad \text{... affin Kombination aus } \frac{b_0 + b_2}{2} \text{ und } b_1$$

$$\frac{x}{y} = \frac{c-a}{b-c} = \frac{(1-\lambda)a + \lambda b - a}{b - (1-\lambda)a + \lambda b}$$

$$c = (1-\lambda)a + \lambda b \quad \begin{matrix} x \\ a \\ c \\ b \end{matrix}$$

$$= \frac{\lambda(b-a)}{(1-\lambda)(b-a)} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad \text{Verehdnis parallel Vektoren}$$

$$\text{Für } \underbrace{\left(\frac{1}{1+w} \right) \frac{b_0 + b_2}{2}}_{1-\lambda} + \underbrace{\left(\frac{w}{1+w} \right) b_1}_{\lambda} \quad \text{wählen wir } \frac{x}{y} = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{\frac{w}{1+w}}{\frac{1}{1+w}} = \frac{w}{1}$$

$$\text{Strahlensatz: } \frac{p}{q} = \frac{w}{1} \quad \text{Trigonometrische Satz: } \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{p}{q} = w$$

$$\Rightarrow w = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

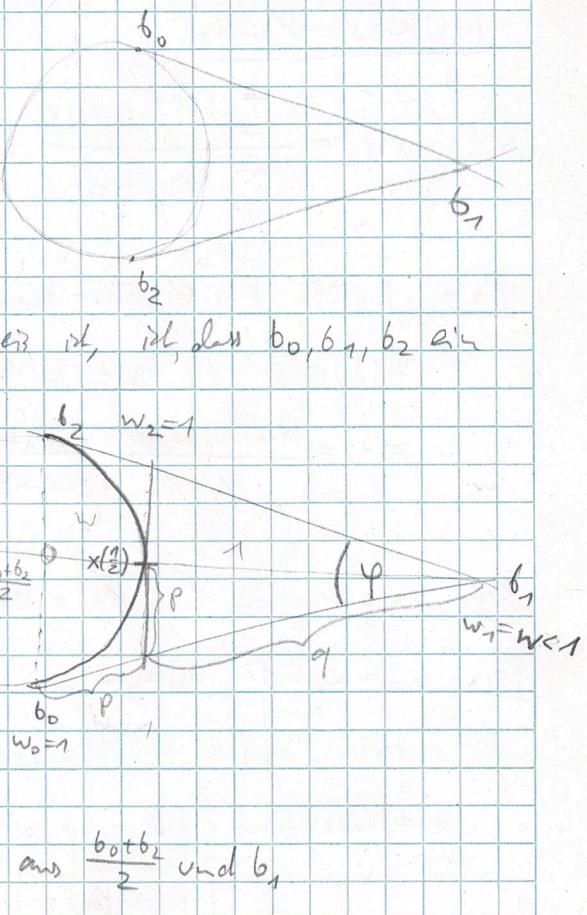
Satz $x(t)$ ist ein Kreis, wenn b_0, b_1, b_2 ein gleichseitiges Dreieck

bilden und $w_0 = w_2 = 1$ und $w_1 = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ wobei $\varphi = \angle(b_0-b_1, b_2-b_1)$ ist.

Den Winkel berechnen

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle b_0 - b_1, b_2 - b_1 \rangle}{\|b_0 - b_1\| \cdot \|b_2 - b_1\|}$$

$$\text{Mit weiteren Rechnungen erhalten wir } w = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\|b_0 - b_1\| \times \left(\frac{b_0 - b_2}{2} - b_1 \right)}{\|b_0 - b_1\| \cdot \left(\|b_0 - b_2\| - \|b_0 - b_1\| \right)}$$



$$\frac{x}{y} = \frac{c-a}{b-c} = \frac{(1-\lambda)a + \lambda b - a}{b - (1-\lambda)a + \lambda b}$$

$$c = (1-\lambda)a + \lambda b \quad \begin{matrix} x \\ a \\ c \\ b \end{matrix}$$

$$= \frac{\lambda(b-a)}{(1-\lambda)(b-a)} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad \text{Verehdnis parallel Vektoren}$$

$$\text{Für } \underbrace{\left(\frac{1}{1+w} \right) \frac{b_0 + b_2}{2}}_{1-\lambda} + \underbrace{\left(\frac{w}{1+w} \right) b_1}_{\lambda} \quad \text{wählen wir } \frac{x}{y} = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{\frac{w}{1+w}}{\frac{1}{1+w}} = \frac{w}{1}$$

$$\text{Strahlensatz: } \frac{p}{q} = \frac{w}{1} \quad \text{Trigonometrische Satz: } \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{p}{q} = w$$

$$\Rightarrow w = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Satz $x(t)$ ist ein Kreis, wenn b_0, b_1, b_2 ein gleichseitiges Dreieck

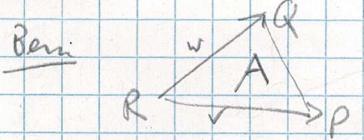
bilden und $w_0 = w_2 = 1$ und $w_1 = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ wobei $\varphi = \angle(b_0-b_1, b_2-b_1)$ ist.

Den Winkel berechnen

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle b_0 - b_1, b_2 - b_1 \rangle}{\|b_0 - b_1\| \cdot \|b_2 - b_1\|}$$

$$\text{Mit weiteren Rechnungen erhalten wir } w = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\|b_0 - b_1\| \times \left(\frac{b_0 - b_2}{2} - b_1 \right)}{\|b_0 - b_1\| \cdot \left(\|b_0 - b_2\| - \|b_0 - b_1\| \right)}$$

CAGD



$$A = \frac{|\det(v, w)|}{2} = \frac{|\det(P-R, Q-R)|}{2} = \frac{|\det\begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & P-R \\ 0 & Q-R \end{pmatrix}|}{2}$$

$$= \frac{|\det\begin{pmatrix} 1 & R \\ 1 & P \\ 1 & Q \end{pmatrix}|}{2}$$

Freiformflächen

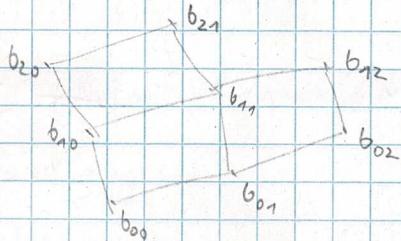
Def gegeben ein Kontrollnetz $b_{00}, b_{01}, \dots, b_{mn} \in \mathbb{R}^d$, $m, n \in \mathbb{N}$ sowie zwei

Kurvenschemata $g(s) = \sum_{i=0}^m D_i(s) p_i$,

und $h(t) = \sum_{j=0}^n E_j(t) q_j$.

$f(s, t) := \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n D_i(s) E_j(t) b_{ij}$ heißt

Freiformfläche (auch Tensorproduktfläche).



Bsp $D_i(s) = B_i^m(s)$... Bernsteinpolynom $E_j(t) = B_j^n(t)$... B-spline-Polynom

Dann heißt $f(s, t)$ eine Bezißfläche vom Grad (m, n) .

Bsp $D_i(s) = N_i^m(s)$... B-Spline-Basisfunktion $E_j(t) = N_j^n(t)$... B-Spline-Basisfunktion

Dann heißt $f(s, t)$ eine B-Spline-Fläche vom Grad (m, n) .

Lemma

$$\text{Bewt } f(s, t) = \sum_i \sum_j D_i(s) E_j(t) b_{ij} = \sum_i D_i(s) \underbrace{\sum_j E_j(t) b_{ij}}_h_i(t) = \sum_i D_i(s) h_i(t)$$

$$\text{Def } f(s, t) = \dots = \sum_j E_j(t) \underbrace{\sum_i D_i(s) b_{ij}}_{=: g_j(s)} = \sum_j E_j(t) g_j(s) = h(t)$$

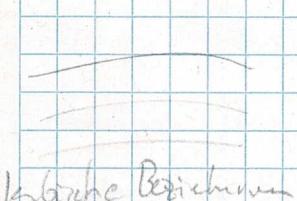
Für festes s ist $f(s, t)$ eine s -Parallellinie.

$f(s, t_0) = \sum_i D_i(s) h_i(t_0)$ $\Rightarrow s$ -Parallellinien sind Kurven vom Kurvtyp $g(s)$.

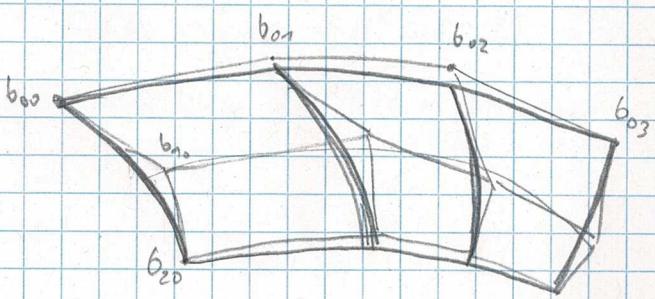
Analog für t -Parallellinien von Kurvtyp $h(t)$.

Bsp

Bezißfläche vom Grad $(2, 3)$

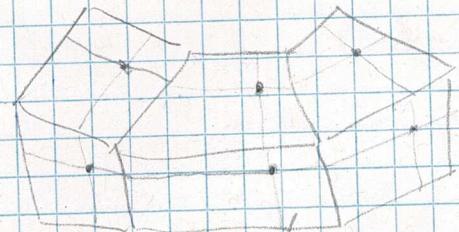


quadratische
Bezißkurve



CAGD

Algorithmus von De Casteljau



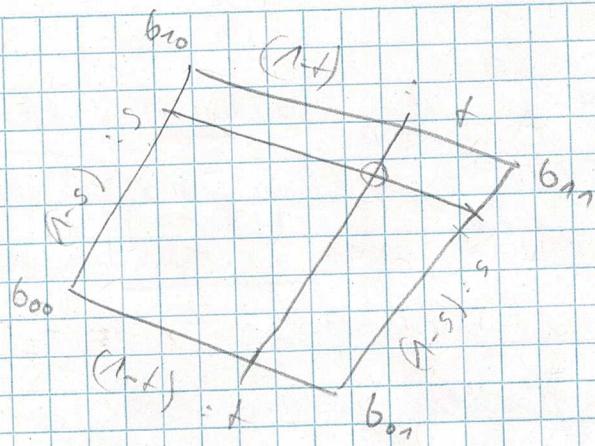
Wiederholen



Wiederholen



flieg!



CAGD

$$\text{Whl: } f(s, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n D_i(s) E_j(t) b_{ij}$$

Gehst alles analog zu Kurven. Als Bsp schauen wir uns folgende Satz an.

Satz D_i, E_j, \dots affin invariant $\Rightarrow f$... affin invariant

$$\text{Bew: } \alpha \text{-affin invariant ist. z.B.: } \alpha(f(s, t)) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n D_i(s) E_j(t) \underbrace{\alpha(b_{ij})}_{h_{ij}}$$

$$\alpha(f(s, t)) = \alpha\left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n D_i(s) E_j(t) b_{ij}\right) = \alpha\left(\sum_{i=0}^m D_i(s) \underbrace{\sum_{j=0}^n E_j(t) b_{ij}}_{h_{ij}}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^m D_i(s) \alpha(h_{ij}) = \sum_{i=0}^m D_i(s) \alpha\left(\sum_{j=0}^n E_j(t) b_{ij}\right) = \sum_{i=0}^m D_i(s) \sum_{j=0}^n E_j(t) \alpha(b_{ij})$$

□

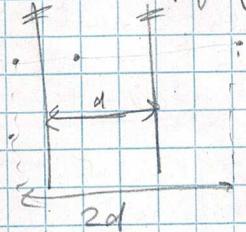
Andere Sätze wie konvexe Hülle, Endpunktinterpolation, ... analog.

Konformes Pattern Matching (Musterübertragung)

Euklidische Geometrie

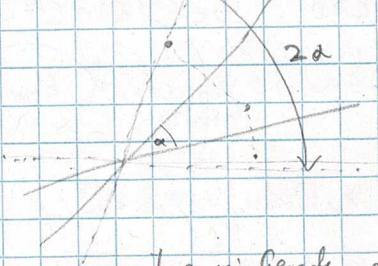
Transformationen: Translation, Drehung, Spiegelung

Translation durch Spiegelung



mit zwei parallelen Geraden

Drehung durch Spiegelung



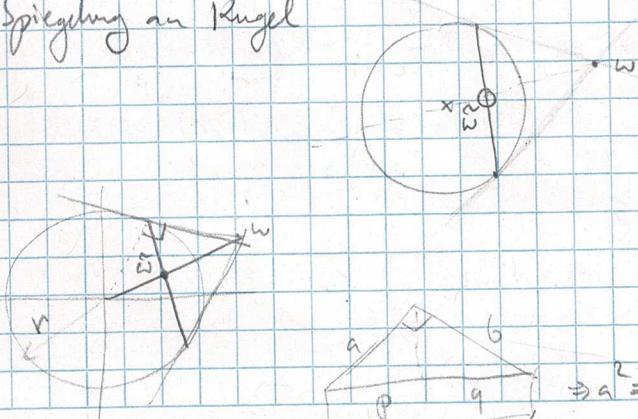
mit zwei Geraden durch den Drehungsmittelpunkt

\Rightarrow Euklidische Transformationen lassen sich durch Spiegelungen an Hyperebenen erzeugen.

Möbius Geometrie

Def Möbius transformationen sind Zusammenhänger von Spiegelungen an Kreisen.

Def Spiegelung an Kugel



$$\|w\| \cdot \|w\| = r^2$$

$$\Rightarrow \widehat{w} = \frac{w}{\|w\|} \frac{w}{\|w\|} = \frac{r^2}{\|w\|^2} w$$

$$a^2 = p \cdot c$$

CAGD

$$\text{Bem } \widetilde{\omega} = \frac{n^2}{\|w\|^2} \bar{w} = \frac{n^2}{\|w\|^2} \frac{n^2}{\|w\|^2} w = \frac{n^2}{n^4 \|w\|^2} \|w\|^2 n^2 \frac{1}{\|w\|^2} w = w$$

Aber zwei mal Spiegeln ergibt Identität.

Spiegeln von w an Kreis mit Hilfspunkt c und Radius r :

$$\tilde{w} = \frac{r^2(w-c)}{\|w-c\|^2} + c$$

Spezialfall an c spiegeln: $\tilde{c} = \infty$ und $\tilde{\omega} = c$

Bem Wir können \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} identifizieren.

Dann erhalten wir $\tilde{w} = \frac{r^2(w-c)}{(w-c)(\bar{w}-\bar{c})} + c$ wobei $w, c \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{>0}$. Kürzen ergibt

$$\tilde{w} = \frac{r^2}{(\bar{w}-\bar{c})} + c = \frac{r^2 + c\bar{w} - c\bar{c}}{(\bar{w}-\bar{c})} =$$

Funktionentheorie, Komplexe Analysis lehrt eine Möbiustransformation $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$. Antimöbiustransformation $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$.

Möbiustransformation ist $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix}$

Einbettung von $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}) := \{v \in \mathbb{C}^2 \mid \dim v=1\}$ mit $z \in \mathbb{C} \mapsto [z, 1] \frac{z_0}{z_1} \leftarrow [z_0, z_1] \frac{z_0}{z_1} \neq 0$

\Rightarrow Möbius Transformationen in $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ lassen sich aus den Abbildungen

Drehung | Streckung | Inversion | Translation
 $z \mapsto p \cdot z$ | $z \mapsto Az$ | $z \mapsto \frac{1}{z}$ | $z \mapsto z + B$ mit $A, B \notin \mathbb{C}$ zusammensetzen.
 mit $|p| \neq 1$ | $A \in \mathbb{R}$

Sehen Sie Wikipedia. $\left(\frac{az}{c} + \frac{b}{c} \right)$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$)

D) $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden $DV(a, b, c, d) := \frac{(a-b)(c-d)}{(b-a)(d-c)}$ $\in \mathbb{C}$ heißt Doppelverhältnis (cross-ratio)

Bsp $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$$DV(a, b, c, d) = \frac{(a-b)}{(c-b)} \cdot \frac{(c-d)}{(a-d)} = \frac{re^{i\varphi}}{se^{i\varphi}} \cdot \frac{ve^{i\gamma}}{ue^{i\gamma}}$$

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{v}{u} e^{i(\varphi-\gamma)} = \frac{v}{su} e^{i(\alpha+\beta)}$$

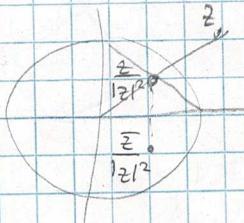
Peripheriewinkelhalbierende

Das Argument des DV ist der Schmittwinkel der Umkreise von abc und cda .

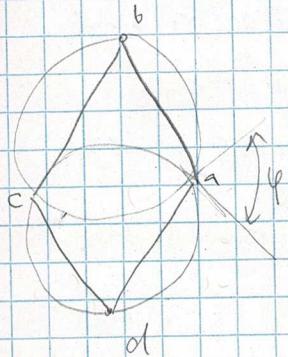
CAGD

Wkl $DV(a, b, c, d) = \frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)}$

Wkl Inversion $\mapsto \frac{1}{z}$ ist Spiegelung am Kreis, dann Spiegelung an x-Achse



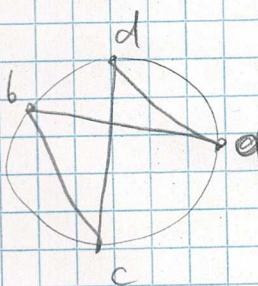
Wkt bei DV



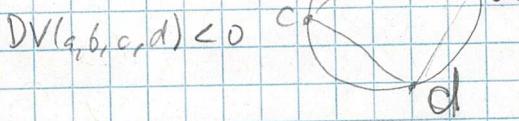
$$DV(a, b, c, d) = r e^{i\varphi}$$

Bew Es gilt $DV(a, b, c, d) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

a, b, c, d sind zirkular (l.h. haben einen Umkreis).



$$DV(a, b, c, d) > 0$$



$$DV(a, b, c, d) < 0$$

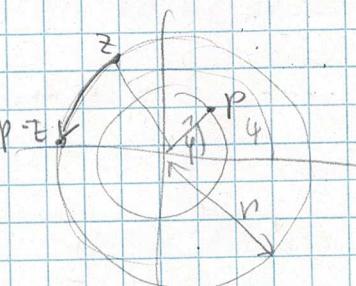
Satz DV ist invariant unter allen Möbius Transformationen.

Bew Skalierung: da Kreisen ✓

Translation: $+x - x = 0$ ✓

Drehungen ($z \mapsto p \cdot z$ mit $|p| = 1$)

$$p = e^{i\varphi} \quad z = r e^{i\varphi} \quad p \cdot z = r e^{i(\varphi+\psi)} \quad \checkmark$$



Inversion:

$$DV\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right) = \frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{a}\right)} abcd =$$

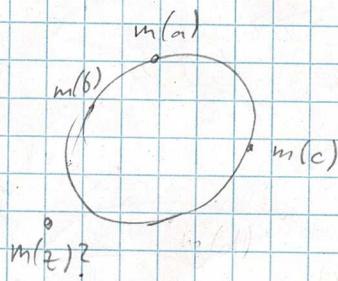
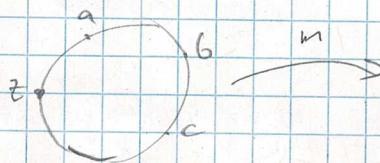
$$= \frac{(b-a)(d-c)}{(c-b)(a-d)} \quad \checkmark$$

□

Satz Möbius Transformationen sind Kreistrennen

CAGD

Bew $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ mit R.-Kreis bed. $z \in \mathbb{K}$ def.



$$DV(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$$

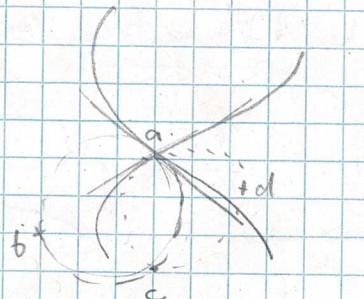
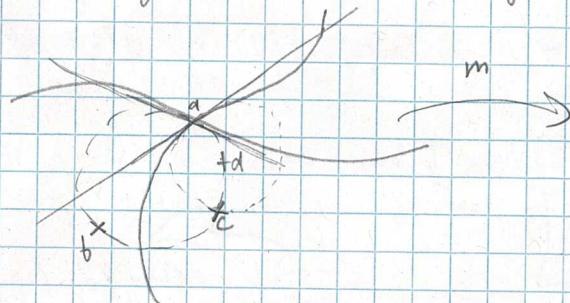
$$DV(m(a), m(b), m(c), m(d))$$

$$= DV(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow m(a), m(b), m(c), m(d)$ liegen auf Kreis

Satz Möbiustransformationen sind konform, d.h. winkelstreu.

Bew



Kreise tangentiel anlegen. Diese werden nicht in schneidende Kreise abgebildet.

$$DV(a, b, c, d) = r e^{i\varphi} \Rightarrow \varphi \text{ Winkel} \quad \Rightarrow DV(m(a), m(b), m(c), m(d)) = r e^{i\varphi}$$

Also Winkel bleibt erhalten.

Bem Auch holomorphe Funktionen (komplex diffbar) sind winkelstreu, allerdings nicht kreistreu.

Bsp $z \mapsto \sin(z^2)$ ist holomorph und nicht kreistreu

Bem Möbiustransformationen sind die einzigen konformen, bij. Abbildungen von offenen Mengen des \mathbb{R}^n mit $n \geq 3$. (Satz von Liouville)

Bem

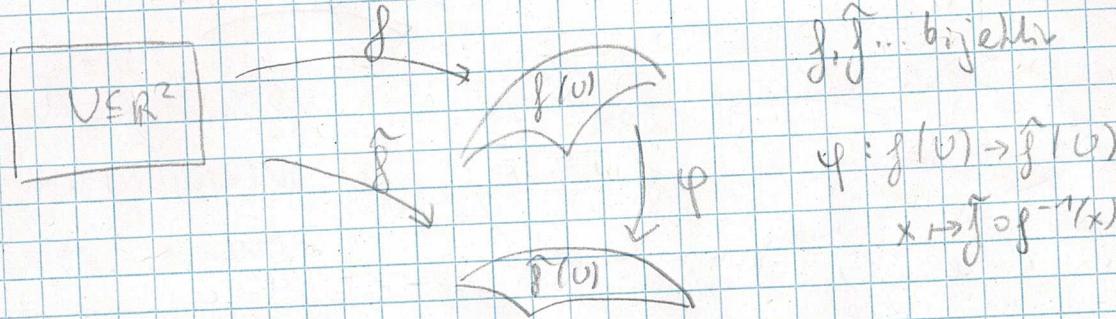
Sei $a, b, c, d \in \text{Im } \mathbb{H} \text{ (Quadranten)} \cong \mathbb{R}^3$

$DV(a, b, c, d) = (a-b) \cdot (b-c)^{-1} (c-d) (d-a)^{-1}$, da Reihenfolge wichtig weil nicht kommutativ (Schiefkörper).

Auch hier gilt $DV(a, b, c, d) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a, b, c, d$ zirkular.

OAGD

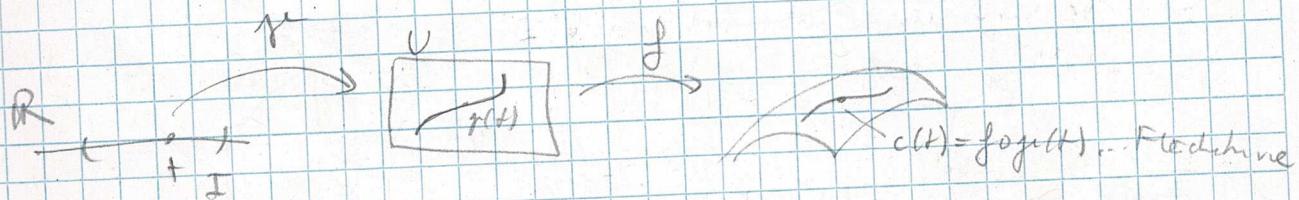
Def



φ ... ist über f, \tilde{f} durch gleichen Parameter beschrieben.

Frage Wann ist φ eine isometrische (= kugelnahe) Abbildung?

Def. φ heißt Isometrie $\Leftrightarrow \forall$ Kurven in $f(u)$ ist $\varphi(c)$ gleich lang wie c



$c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Kurve dann ist die Länge von c.

$$L(c) = \int_I \|c'(t)\| dt$$

Lemma $\Rightarrow \varphi$... Isometrie $\Leftrightarrow \forall y: I \rightarrow U: L(f \circ y) = L(\varphi(f \circ y))$

$$\begin{aligned} \text{Betrachte } \|c(t)\|^2 &= \left\| \frac{dc(t)}{dt} \right\|^2 \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \|f_u \cdot j_1 + f_v \cdot j_2\|^2 = \\ &= \langle j_1 \cdot f_u + j_2 \cdot f_v, j_1 \cdot f_u + j_2 \cdot f_v \rangle = j_1^T \underbrace{\langle f_u, f_u \rangle}_{=E} + 2 j_1 \cdot j_2 \underbrace{\langle f_u, f_v \rangle}_{=0} + j_2^T \underbrace{\langle f_v, f_v \rangle}_{=F} \\ &= (j_1, j_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} = j^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} j \end{aligned}$$

I... Matrix der 1. Fundamentalform

$$\Rightarrow \|c(t)\|^2 = j^T I j$$

$$\text{also } L(c) = \int_a^b \sqrt{j^T I j} dt$$

φ ... Isometrie $\Leftrightarrow \forall y: L(f \circ y) = L(\varphi(f \circ y))$

$$y: (a, b) \rightarrow U \quad t \mapsto q + \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L(y) = \int_a^b \sqrt{(1, 0)^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} dt = \int_a^b \sqrt{E} dt$$

$$L(\varphi(f \circ y)) = \int_a^b \sqrt{E} dt \quad \widetilde{E} = \langle j_u, j_u \rangle, \quad \widetilde{F} = \langle j_u, j_v \rangle, \quad \widetilde{G} = \langle j_v, j_v \rangle$$

CAhD

$\varphi \text{ ... längentreu} \Leftrightarrow \forall a, b : \int_a^b \sqrt{E'} dt = \int_a^b \sqrt{E} dt$
 $\Leftrightarrow \sqrt{E'} = \sqrt{E} \Leftrightarrow E' = \tilde{E} \quad (\Leftrightarrow \langle f_u, f_v \rangle = \langle \tilde{f}_u, \tilde{f}_v \rangle)$

Analog

$$g(t) = g + \begin{pmatrix} 0 \\ t_0+t \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{g} = \tilde{g}$$

$$f(t) = g + \begin{pmatrix} t_0+t \\ t_1+t \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{E+2F+C} = \sqrt{\tilde{E}+2\tilde{F}+\tilde{C}}$$

$$E+2F+C = \|f_u\|^2 + 2\langle f_u, f_v \rangle + \|f_v\|^2 \geq \|f_u\|^2 - 2\|f_u\|\|f_v\| + \|f_v\|^2 = \|f_u\|^2 -$$

$$\Rightarrow F = \tilde{F}$$

$\Rightarrow \varphi \text{ ... ist längentreu} \Rightarrow I = \tilde{I} \text{ und } I = \tilde{I} \Rightarrow \varphi \text{ ... längentreu}$

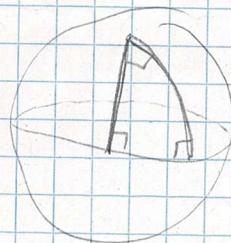
Satz φ ist flächentreu $\Leftrightarrow \det I = \det \tilde{I}$

Bew o. B.

Kontrollen längentreu $\Rightarrow I = \tilde{I} \Rightarrow \det I = \det \tilde{I} \Rightarrow$ flächentreu

Satz φ ist winkelstreu (=konform) $\Leftrightarrow \exists \lambda : \mathbb{R} \rightarrow R \setminus \{0\} : I = \lambda^2 \tilde{I}$

Bem längentreu \Leftrightarrow winkelstreu \wedge flächentreu

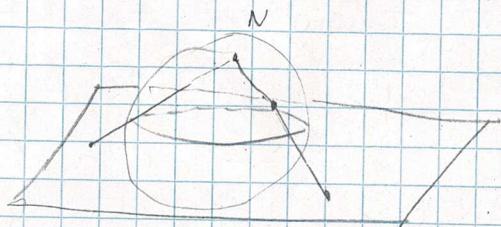


φ längentreu existiert nicht



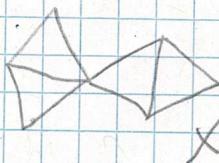
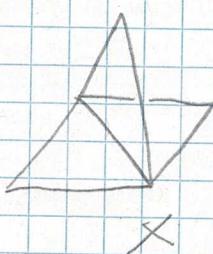
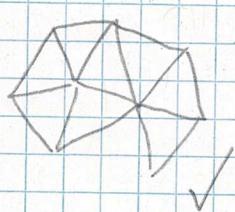
X geht nicht

Stereographische Projektion ist winkelstreu



Dfg Dreiecknetz

= Polyedrale Fläche (lokal wie offene Umgebung in \mathbb{R}^2) und alle Flächen sind Dreiecke



CAGD

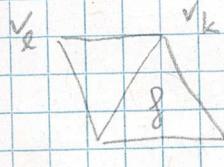
$$T = (V, E, F) \quad V \text{.. Vertices}, E \text{.. Edges}, F \text{.. Faces}$$

Dreiecksnetz

Bem Es gilt \forall Polyeder das homöomorph zum Kreis ist gilt $F - E + V = 2$

Def Eine Funktion $L: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ die $\forall f \in F$ die Dreiecksungleichung erfüllt heißt diskrete Metrik auf T .

d.h.



$$l(v_i, v_j) =: l_{ij} \quad \text{"Länge der Kante zw. } v_i, v_j\text{"}$$

$$l_{ij} \leq l_{jk} + l_{ki}$$

$$l_{jk} \leq l_{ki} + l_{ij}$$

$$l_{ki} \leq l_{ij} + l_{jk}$$

$$l_{ij} = l_{ji} \quad \forall i, j$$

Bsp die ecken hängen die Punkte bilden eine diskrete Metrik.

$$l_{ij} = \|v_i - v_j\|$$

Def Zwei kombinatorisch äquivalente Dreiecksnetze T, \hat{T} heißen diskret konform äquivalent, wenn $\exists \lambda: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit $\hat{l}_{ij} = \lambda_i \lambda_j l_{ij} \quad \forall (ij) \in E$

Bem

Paper von Peter Schröder, Boris Springborn, Ulrich Pinkall

Conformal Equivalence Triangle Meshes

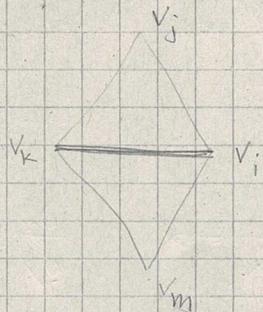
Siggraph, 2008

Lemma Sei m eine Möbiustransformation $m: \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$
 $\Rightarrow \exists g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : \|m(x) - m(y)\| = g(x)g(y)\|x-y\|$

o.B.

Def Kanten doppelverhältnis

$$\text{LDV}(v_i, v_j, v_k, v_m) := \frac{l_{ij}l_{km}}{l_{jk}l_{mi}}$$



Bem $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ $\text{LDV}(a, b, c, d) = |\text{DV}(a, b, c, d)|$

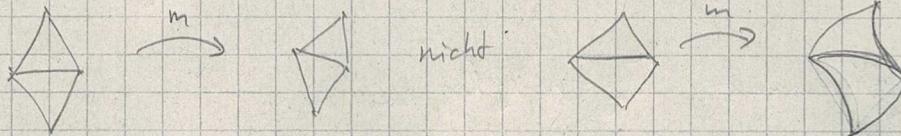
Satz (T, l) und (\tilde{T}, \tilde{l}) sind diskret konform äquivalent $\Leftrightarrow \forall i \in E:$

$$\text{LDV}(v_i, v_j, v_k, v_m) = \text{LDV}(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j, \tilde{v}_k, \tilde{v}_m)$$

Satz Sei T ein Dreiecksnetz mit Metrik $l_{ij} := \|v_i - v_j\|$.

Sei m eine Möbiustransformation. Dann sind T und $m(T)$ konform äquivalent.

Bem im obigen Satz ist gemeint, dass die Ecken möbiustransformiert werden und dann mit geraden Strecken zu einem Dreiecksnetz verbunden.



Bew Verwende voriges Lemma. \square

Ende

Bem In der Ebene sind Möbiustransformationen durch 3 Punkte V gegeben.

Def (Milnor's) hetachersky-Funktion

$$\text{JT}(x) = \int_0^x \log |2 \sin(t)| dt$$

"L" in Kürzel

Lemma Eigenschaften von $\text{JT}(x)$

1) $\text{JT}(0) = 0$

2) $\text{JT}(x + \pi) = \text{JT}(x)$ π -periodisch

3) $\text{JT}(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

4) $\text{JT}(-x) = -\text{JT}(x)$

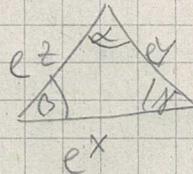
CAGD

Def

$$M := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^x, e^y, e^z \text{ sind Seitenlängen eines Dreiecks} \}$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^x \leq e^y + e^z, e^y \leq e^x + e^z, e^z \leq e^x + e^y \}$$

$f(x, y, z) := \alpha x + \beta y + \gamma z + J\Gamma(\alpha) + J\Gamma(\beta) + J\Gamma(\gamma)$ wobei $\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z)$ sind Winkel von Dreieck



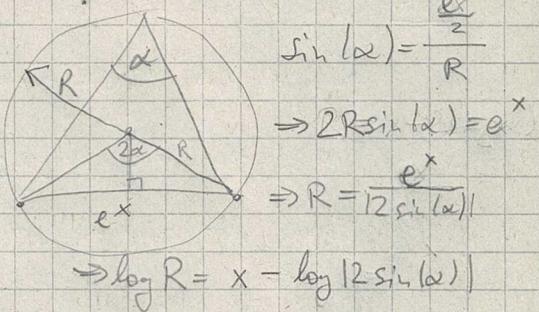
$$x, y, z \in M$$

Hinweis

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \beta \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \gamma$$

$$\begin{aligned} \text{Bew} \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x} x + \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial x} y + \frac{\partial \gamma}{\partial x} z + (-\log|2\sin(\alpha)|) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + (-\log|2\sin(\beta)|) \frac{\partial \beta}{\partial x} + \\ &\quad (-\log|2\sin(\gamma)|) \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} (x - \log|2\sin(\alpha)|) + \frac{\partial \beta}{\partial x} (y - \log|2\sin(\beta)|) + \frac{\partial \gamma}{\partial x} (z - \log|2\sin(\gamma)|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \log R + \frac{\partial \beta}{\partial x} \log R + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \log R = \\ &= \alpha + \log R \left(\frac{\partial (\alpha + \beta + \gamma)}{\partial x} \right) = \alpha + \log R \left(\frac{\partial \pi}{\partial x} \right) \\ &= \alpha \end{aligned}$$



Bem Diskret konform äquivalent $\lambda_{ij} = \lambda_i \lambda_j l_{ij}$

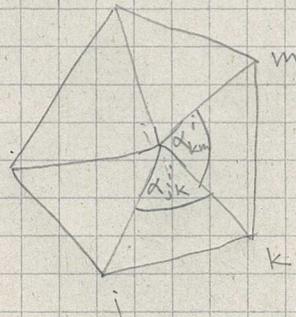
unschrebar ($\lambda_i > 0 \Rightarrow \exists u_i : \lambda_i = e^{\frac{u_i}{2}}$ mit $u_i \in \mathbb{R}$)

$\tilde{g}_{ij} := \log \lambda_{ij}$ $\tilde{f}_{ij} := \log l_{ij}$ ergibt

$$\log \lambda_{ij} = \log \lambda_i + \log \lambda_j + \log l_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{f}_{ij} = \frac{u_i}{2} + \frac{u_j}{2} + \tilde{g}_{ij} \quad \text{Additive Bedingung für konforme Äquivalenz}$$

Def Innenwinkel an der Stelle i: α_{ijk}^i



Innenwinkelsumme

$$\sum_{j \in \text{star}(i)} \alpha_{ijk}^i$$

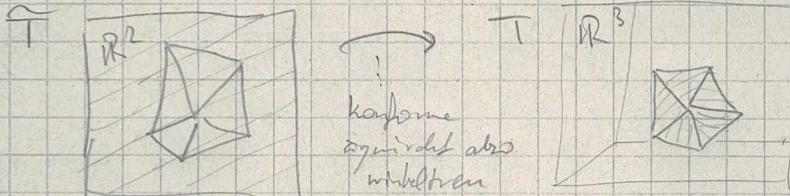
$\text{star}(i)$... relex star, Knotenstern um i

CAGD

Aufgabenstellung: gegeben Dreiecksnetz T , $\Theta \in \mathbb{R}^{\#V}$ $V \in \mathbb{V}$

gesuchte Dreiecksnetz \tilde{T} . kiform äquivalent zu T mit Winkelsummen Θ_i , $V \in \mathbb{V}$

Bem Wenn es ein \tilde{T} existiert und $\Theta_i = 2\pi$ für jedes wird, dann können wir \tilde{T} in der Ebene realisieren.



Sei $v \in \mathbb{R}^{\#V}$ sodass $\tilde{l}_{ij} = e^{\frac{v_i}{2}} e^{\frac{v_j}{2}} l_{ij} = e^{\frac{v_i+v_j}{2}} l_{ij}$... nach Kantelängen eines Dreiecksnetzes sind.

$$E(v) := \sum_{ijk \in F} \left[2 \cdot g \left(\frac{\tilde{l}_{ij}}{2}, \frac{\tilde{l}_{ik}}{2}, \frac{\tilde{l}_{jk}}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \cdot (\tilde{y}_{ij} + \tilde{y}_{ik} + \tilde{y}_{jk}) \right] + \sum_{i \in V} v_i \Theta_i$$

↓
 Facetten von oben
 $\tilde{y}_{ij} = \frac{v_i + v_j}{2} + y_{ij} = \frac{v_i}{2} + \frac{v_j}{2} + \log l_{ij}$

Lemma Eigenschaften von $E(v)$

$$1) \quad \frac{\partial E(v)}{\partial v_i} = \Theta_i - \sum_{j \in \text{Nachb}(i)} \alpha_{jk}^i \quad \text{Bew nachrechnen}$$

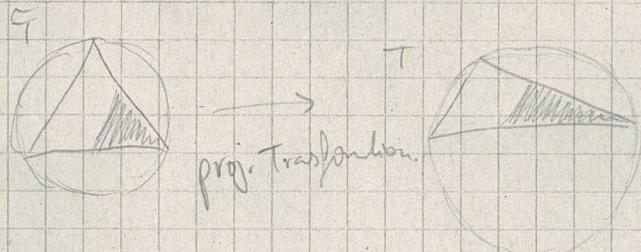
also kritische Punkte sind die Werte, die wir suchen

2) E lässt sich auf $\mathbb{R}^{\#V}$ als konvexe Funktion fortsetzen.

Satz Die kritischen Punkte von E beschreiben Dreiecksnetze \tilde{T} die wir suchen, d.h.

\tilde{T} ist kiform äquivalent zu T und $\forall i \in V: \Theta_i = \sum_{j \in \text{Nachb}(i)} \alpha_{jk}^i$.

Nachdem E konvex ist folgt \exists^* solchen kritischen Punkt.



tendenziell besser
als affine Transformation