LINAG Ü7

8.5.1. α) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

zz: $A \approx C \wedge B \approx C$ für ein C... Diagonalmatrix

$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} 4-X & 1 \\ -2 & 1-X \end{pmatrix} = (4-X)(1-X)+2$ hat Nullstellen bei 2, 3

$\chi_B(X) = \det \begin{pmatrix} 3-X & -3 \\ 0 & 2-X \end{pmatrix} = (3-X)(2-X)$ —— " ——

$\Rightarrow A \approx B$

$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_C(X) = \det \begin{pmatrix} 3-X & 0 \\ 0 & 2-X \end{pmatrix} = (3-X)(2-X)$ hat Nullstellen bei 2, 3

$\Rightarrow A \approx C \approx B$

ges: $P \in GL_2(\mathbb{R}) : B = P^{-1} A P \quad \Leftrightarrow P \cdot B = A \cdot P$

$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & -3a+2b \\ 3c & -3c+2d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+c & 4b+d \\ -2a+c & -2b+d \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 3a = 4a+c \quad -3a+2b = 4b+d \quad 3c = -2a+c \quad -3c+2d = -2b+d$

$\Rightarrow$ z.B. $a=1 \quad b=1 \quad c=-1 \quad d=-5$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & -5 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc} 1 & -4 \\ -1 & 0 \\ \hline 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ +\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) = P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

... Probe geglückt!

LINAG Ü7

8.5.2. a) zz: $A, B \in K^{n\times n}$, $A \approx B \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: A^k \approx B^k$

Sei $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \approx B$ bel. $\Rightarrow \exists P \in GL_n(K): B = P^{-1}AP$

$$B^k = (P^{-1}AP)^k = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdot\ldots\cdot(P^{-1}AP)}_{k\text{-Mal}} = P^{-1}A^kP$$

$$\Rightarrow A^k \approx B^k$$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ges: B... Diagonalmatrix mit $\exists P \in GL_2(\mathbb{R}): B = P^{-1}AP$

$\chi_A(X) = \det\begin{pmatrix} 4-X & -3 \\ -1 & 2-X \end{pmatrix} = (4-X)(2-X)-3$ hat Nullstellen bei 1 und 5

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad P \cdot B = A \cdot P$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 5b \\ c & 5d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a-3c & 4b-3d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a = 4a-3c \quad 5b = 4b-3d \quad c = -a+2c \quad 5d = -b+2d$

$\Rightarrow$ z.B. $a = 1 \quad b = 3 \quad c = 1 \quad d = -1$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ \hline 1/4 & 0 \\ 1/4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{array}\right) = P^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 5/4 & -5/4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 5/4 & -5/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

... Probe geglückt!

ges: B^{100} und A^{100}

$B^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{pmatrix}$ da Diagonalmatrix

$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow PBP^{-1} = A$

$\Rightarrow A^{100} = (PBP^{-1})^{100} \underset{\text{laut a)}}{=} P B^{100} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

LINAG Ü7

8.5.7 (B) $\quad t \in \mathbb{R} \qquad A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Für welche t ist A_t diagonalisierbar?

$$\chi_{A_t}(X) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ t & 1-X & 0 \\ 0 & 1 & 3-X \end{pmatrix} = (1-X)^2(3-X)$$

$$B = P^{-1}AP \iff PB = AP$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 3c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ at+d & bt+e & ct+f \\ d+3g & e+3h & f+3i \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 3c = c \quad d = at+d \quad e = bt+e \quad 3f = ct+f$

$g = d+3g \quad h = e+3h \quad 3i = f+3i$

$t \neq 0 \Rightarrow a=0 \quad b=0 \quad c=0 \quad d=-2g \quad e=-2h \quad f=0 \quad g=-\frac{1}{2}d \quad h=-\frac{1}{2}e \quad i=*$

also $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2g & -2e & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$ aber P nicht regulär! (siehe erste Zeile)

$t = 0 \Rightarrow a=* \quad b=* \quad c=0, d=-2g, e=-2h, f=0, g=-\frac{1}{2}d, h=-\frac{1}{2}e, i=*$

also $P = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -2g & -2h & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$ z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =: P$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) = P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

... Probe geglückt!

$\Rightarrow A_t$ ist nur für $t=0$ diagonalisierbar

LINAG Ü7

8.6.4 $\quad f \in L(V,V) \quad \dim(V) =: n$

a) zz: f hat n verschiedene EW $\Rightarrow \mu_f(X) = (-1)^n \chi_f(X)$

$\chi_f(X) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - X)$, da $\mathrm{grad}(\chi_f(X)) \leq n$

$\forall P(X) \in K[X]$ mit $P(f) = 0 : \exists k \in \mathbb{N}: P(X) = \mu_f^k(X)$

$\chi_f(f) = 0 \quad \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: \chi_f(X) = \mu_f^k(X)$

$(\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - X) = \mu_f^k(X) \quad \Rightarrow k = 1$

$\Rightarrow \mu_f(X) = (-1)^n \chi_f(X)$ [$(-1)^n$ entsteht durch Normierung]

b) ges: Gegenbsp zu $\mu_f(X) = (-1)^n \chi_f(X) \Rightarrow f$ hat n verschiedene EW

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \chi_A(X) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{pmatrix} = (1-X)^2 = 1 - 2X + X^2$

$\mu_A(X) = X^2 - 2X + 1$

$\Rightarrow \chi_A(X) = \mu_A(X)$

aber A hat nur einen verschiedenen Eigenwert (nämlich 1).

LINAG Ü7

8.6.5 K ... Körper $n \in \mathbb{N}$

a) $\forall A \in GL_n(K)\ \exists P(X) \in K[X]: P(A) = A^{-1}$

$\chi_A(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i$ mit $\chi_A(A) = 0$ laut Cayley-Hamilton

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i + a_0 \cdot X^0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i + a_0 E$

$\Leftrightarrow -a_0 E = \sum_{i=1}^{\infty} a_i A^i \Leftrightarrow E = \sum_{i=1}^{\infty} -\frac{a_i}{a_0} A^i = A \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} -\frac{a_i}{a_0} A^{(i-1)}\right)$

$\Leftrightarrow A^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} -\frac{a_{i+1}}{a_0} A^i$

$P(X) = \sum_{i=0}^{\infty} -\frac{a_{i+1}}{a_0} X^i \in K[X]$ mit $P(A) = A^{-1}$

b) $A = J_2(1) \in GL_2(K)$ zz: $\nexists P(X) \in K[X]: P(A) = A^T$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_A(X) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{pmatrix} = (1-X)^2$

$\chi_{A^T}(X) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & 1-X \end{pmatrix} = (1-X)^2$

$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2: A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ... EV von A

$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K^2: A^T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ ... EV von A^T

$P(X) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ $P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i A^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i A$, da $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} c & c \\ 0 & c \end{pmatrix}$ wenn $c = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\chi_{P(A)}(X) = \det\begin{pmatrix} c-X & c \\ 0 & c-X \end{pmatrix} = (c-X)^2$

$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2: P(A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c(x+y) \\ cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ... EV von $P(A)$

Da $P(A)$ und A^T verschiedene Eigenvektoren besitzen,

bzw. da $P(A) = \begin{pmatrix} c & c \\ 0 & c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ existiert kein $P(X) \in K[X]$ mit $P(A) = A^T$.

LINAG Ü7

8.6.8. $f \in L(V,V)$ $\quad k \in \mathbb{N}$ $\quad a \in V \setminus \{0\}$

(i) $\exists U \leq V, \dim(U)=k, f(U) \subseteq U : a \in U \wedge \nexists \tilde{U} \leq V, \dim(\tilde{U})<k, f(\tilde{U}) \subseteq \tilde{U} : a \in \tilde{U}$

(ii) $(a, f(a), \dots, f^k(a))$ l.a $\wedge$ $(a, f(a), \dots, f^{k-1}(a))$ l.u.

(iii) $\mu_{f,a}(X)$ hat Grad k

zz: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$\forall i \in \{0,\dots,k\}: f^i(a) \subseteq U$ $\quad$, da $f^i(a) = f^{i-1}(\underbrace{f(a)}_{\in U}) = \dots = f(f(\dots \underbrace{f(f(a))}_{\in U}))$ $\in U$

Da $\dim(U)=k$ können höchstens

k Vektoren von $(a, f(a), \dots, f^k(a))$ l.u. sein. Da es aber $k+1$ Vektoren sind

muss die Familie l.a. sein.

Wäre $(a, f(a), \dots, f^{k-1}(a))$ l.a., dann wäre $\tilde{U} = [\{a, f(a), \dots, f^{k-1}(a)\}]$

ein f-invarianter UR von V mit $\dim(\tilde{U}) < k$ und $a \in \tilde{U}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$f^k(a) = \sum_{i=0}^{k-1} b_i f^i(a)$ $\quad \Rightarrow P(X) = \sum_{i=0}^{k} -b_i X^i$ mit $b_k = -1$ und b_i sonst wie in der LK

$(P(f))(a) = 0$ $\quad$ grad $(P(X))$ ist k $\quad \Rightarrow P(X)$ ist Annulatorpolynom von grad k und ist normiert

Würde ein Annulatorpolynom von geringerem Grad existieren, wäre

$(a, f(a), \dots, f^{k-1}(a))$ l.a. $\quad \Rightarrow P(X) = \mu_{f,a}$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

$\exists P(X) \in K[X] : (P(f))(a) = 0$, grad $(P(X)) = k$ $\wedge$ $\nexists Q(X): (Q(f))(a) = 0$ mit grad $(Q(X)) < k$

$P(X) = \sum_{i=0}^{k} b_i X^i$ $\quad P(f) = \sum_{i=0}^{k} b_i f^i$ $\quad U = [\{\sum_{i=0}^{\ell} b_i f^i(a) : \ell \in \{0,\dots,k\}\}]$

$\dim(U) \leq k$, da $\sum_{i=0}^{k} b_i f^i(a) = 0$ und $\dim(U) \geq k$ da das Minimalpolynom sonst

kleineren Grad hätte. $\Rightarrow \dim(U) = k$

$a \in U$ ist klar; $f(U) \subseteq U$ da $f(\sum_{j=0}^{m} c_j \sum_{i=0}^{j} b_i f^i(a)) = \sum_{j=0}^{m} c_j \sum_{i=0}^{j} b_i f^{i+1}(a) \in U$

...

<u>LINAG Ü7</u>

8.6.8 ...

Angenommen $\exists \tilde{U}$ wie in (i) o.B.d.A. ist $\tilde{U}$ jener mit der geringsten dim

$\Rightarrow$ (aus (i) $\Rightarrow$ (ii)) $(a, f(a), \dots, f^{l-1}(a))$ ist l.u wobei $l = \dim(\tilde{U}) < k$

da die Familie aus l vielen l.u. Vektoren in $\tilde{U}$ besteht

$\Rightarrow (a, f(a), \dots, f^{l-1}(a))$ ist eine Basis von $\tilde{U}$

$$f^l(a) = \sum_{i=0}^{l-1} x_i f^i(a) \qquad P(X) = \sum_{i=0}^{l} -x_i X^i$$ wobei $x_l = -1$ und sonst wie in der LK

$P(X)$ ist ein Annulatorpolynom von a bezgl. f und hat grad $< k$ $\lightning$