MAS Ü12

2) X_n ... unabhängige Folge StGen mit $X_1 \equiv 0$ und $P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log n}$, $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}$, $n \geq 2$

Gilt ein Gesetz der großen Zahlen?

schwaches Gesetz der großen Zahlen: $\forall \varepsilon > 0: \lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$

$$\mu = \mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = 0 \quad \text{, da } \mathbb{E}(X_i) = n\frac{1}{2n\log n} + (-n)\frac{1}{2n\log n} = 0$$

$$\sigma^2 = \mathbb{V}(\overline{X}_n) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{u.a.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=2}^{n}\mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=2}^{n}\frac{i}{\log i} < \infty$$

$$\mathbb{V}(X_n) = P(X_n = n)(n - \underbrace{\mathbb{E}X_n}_{=0})^2 + P(X_n = -n)(n - \mathbb{E}X_n)^2 + P(X_n = 0)(0 - \mathbb{E}X_n)^2 = \frac{2n^2}{2n\log n} = \frac{n}{\log n} \quad \forall n \geq 2$$

Nach Tschebyscheff-Ungleichung gilt $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$$\left(\frac{x}{\log x}\right)' = \frac{\log x - \frac{x}{x}}{(\log x)^2} = \frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log x} > \frac{1}{(\log x)^2} \Leftrightarrow (\log x)^2 > \log x \Leftrightarrow x > e \approx 2{,}718$$

$\Rightarrow$ für $x > e$ streng $\nearrow$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=2}^{n}\frac{i}{\log i} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{\log 2} + \sum_{i=3}^{n}\frac{i}{\log i}\right) \leq \frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{\log 2} + \sum_{i=3}^{n}\frac{n}{\log n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{\log 2} + (n-2)\frac{n}{\log n}\right) = \frac{1}{n^2}\frac{n^2}{\log n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{\log 2} - \frac{2n}{\log n}\right) = \frac{1}{\log n} + \frac{2}{n^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\log 2} - \frac{n}{\log n}\right)}_{\leq 0 \text{ für } n \geq 1} \leq \frac{1}{\log n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{\log n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

---

starkes Gesetz der großen Zahlen: $\forall \varepsilon > 0: P(\lim_n |\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$

$$\sum_{i=2}^{\infty} P(|X_i| \geq i) = \sum_{i=2}^{\infty}\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}i\log(i)} = \infty$$ und die Ereignisse $[|X_i| \geq i]$ sind unabhängig

$\Rightarrow$ nach 2. Lemma von Borel-Cantelli, dass $P(\limsup_{i\to\infty}[|X_i| \geq i]) = 1$

also gilt $|X_i| \geq i$ für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$.

Wäre $P(\lim_n |\overline{X}_n| < \varepsilon) = 1$ also $\lim_n |\overline{X}_n| < \varepsilon$ P-f.s. würde

$$\left|\frac{X_n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n-1} X_i\right)\right| = \left|\overline{X}_n - \frac{n-1}{n}\overline{X}_{n-1}\right| \leq \left|\frac{n-1}{n}\overline{X}_{n-1} - \overline{X}_{n-1}\right| + |\overline{X}_{n-1} - \overline{X}_n|$$

$$= |\underbrace{(\cancel{1} - \tfrac{1}{n} - \cancel{1})}_{\to 0}\underbrace{\overline{X}_{n-1}}_{<\varepsilon}| + |\overline{X}_{n-1} - \overline{X}_n| \longrightarrow 0 \quad \text{P-f.s.}$$

Das ist ein Widerspruch zu $|X_n| \geq n$ P-f.s.

MAS Ü12

4) X_n .. Folge unabhängig, identisch verteilt, $X_n \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{S}, P)$

$\eta := \mathbb{E}X_n$, $\quad \sigma^2 := \mathbb{V}X_n$, $\quad \overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $\quad S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$

zz: $\mathbb{E}(S_n^2)$ gesucht $\wedge$ $\lim\limits_n S_n^2 = \sigma^2$ P-f.s.

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\overline{X}_n + \overline{X}_n^2) = \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^n (X_i^2) - 2\overline{X}_n \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i}_{=n\overline{X}_n} + n\overline{X}_n^2\Big)$$

$$= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n\overline{X}_n^2 + n\overline{X}_n^2\Big) = \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}_n^2\Big)$$

$\sigma^2 = \mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \mathbb{E}(X_i^2) - \eta^2$

$$\mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}_n^2\Big)\Big) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) - \frac{n}{n-1}\mathbb{E}(\overline{X}_n^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \eta^2) - \frac{n}{n-1}\mathbb{E}(\overline{X}_n^2)$$

$$= \frac{n}{n-1}(\sigma^2 + \eta^2) - \frac{n}{n-1}\mathbb{E}(\overline{X}_n^2)$$

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n^2) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j\Big) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n X_i \cdot X_j\Big) = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\Big(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n X_i \cdot X_j + \sum_{i=1}^n X_i^2\Big)$$

$$= \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2)\Big) = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}^n \eta^2 + \sum_{i=1}^n(\sigma^2 + \eta^2)\Big) = \frac{1}{n^2}\big(n(n-1)\eta^2 + n(\sigma^2 + \eta^2)\big)$$

$$= \frac{n-1}{n}\eta^2 + \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{1}{n}\eta^2 = \eta^2 + \frac{1}{n}\sigma^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(S_n^2) = \frac{n}{n-1}\big(\sigma^2 + \eta^2 - \mathbb{E}(\overline{X}_n^2)\big) = \frac{n}{n-1}\Big(\sigma^2 + \cancel{\eta^2} - \cancel{\eta^2} - \frac{1}{n}\sigma^2\Big) = \frac{n}{n-1}\underbrace{\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)}_{\frac{n-1}{n}}\sigma^2 = \sigma^2$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}_n^2\Big) = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2\Big) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \lim_{n\to\infty}\overline{X}_n^2$$

$$\overset{P\text{-f.s.}}{=} \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

$\square$

MAS Ü12

5) A_n... Folge unabhängiger Ereignisse mit $P(A_n)=\frac{1}{n}$ $\qquad S_n := \sum_{i=2}^{n} \frac{\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i}}{\log i}$

zz: S_n konvergiert P-f.s.

Sei $X_i := \frac{1}{\log i} \mathbb{1}_{A_i}$ für $i \geq 2$.

$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{\log i} P(A_i) = \frac{1}{i \log i} \qquad \mathbb{E}(X_i^2) = \frac{1}{(\log i)^2} P(A_i) = \frac{1}{i(\log i)^2}$

$\Rightarrow X_i$ ist unabhängig und aus L_2.

$\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \frac{1}{i(\log i)^2} - \frac{1}{i^2(\log i)^2} = \frac{i-1}{i^2(\log i)^2}$

$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{V}(X_i) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i(\log i)^2} - \frac{1}{i^2(\log i)^2} \approx 2{,}10974 - 0{,}692606 < \infty$

Nach Satz 3.42 ist $\sum_{i=2}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)$ P-f.s. konvergent gegen $S_\infty = \sum_{i=2}^{\infty}(X_i - \mathbb{E}X_i) \in L_2$

$X_i - \mathbb{E}X_i = \frac{1}{\log i}\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i \log i} = \frac{\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i}}{\log i} \qquad \Rightarrow S_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i}}{\log i} = \sum_{i=2}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)$

Also $S_n \longrightarrow S_\infty$ P-f.s. wobei $S_\infty = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i}}{\log i}$

---

zz: $\frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i}) \to 0$ P-f.s.

[Kronecker Lemma $b_n > 0$ und $b_n \nearrow \infty$, $a_i \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_n \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$

$b_n := \log(n) > 0 \quad b_n \nearrow \infty \quad a_i := \frac{1}{\log i}\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i \log i} \in \mathbb{R}$ für $n, i \geq 2$

$\sum_{i \geq 2} a_i = \sum_{i=2}^{\infty}(X_i - \mathbb{E}X_i) < \infty$ nach oben P-f.s.

$\Rightarrow \lim_n \frac{1}{b_n} \sum_{i=2}^{n} a_i b_i = \lim_n \frac{1}{\log n} \sum_{i=2}^{n} (\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i}) = 0$ P-f.s.

---

zz: $\frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \to 1$ P-f.s.

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n) = 1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n)}_{\ln(n) \geq \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}} \leq 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - \ln(n)}_{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \geq \ln(n)} + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow 1 + \ln(n) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{n} + \ln(n) \Longleftrightarrow \underbrace{1 + \frac{1}{\ln(n)}}_{\to 1} = \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)} \geq \underbrace{\frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}_{\to 1} \geq \underbrace{\frac{1}{n \ln(n)} + 1}_{\to 1}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} - 1\right| \leq \underbrace{\left|\frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right|}_{\text{nach oben} \to 0} + \underbrace{\left|\frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - 1\right|}_{\to 0} \longrightarrow 0$ P-f.s.

$\square$

MAS Ü12

6) Für $\omega \in [0,1)$ von $([0,1), \mathcal{B}|_{[0,1)}, \lambda|_{[0,1)})$ sei $(0, \omega_1, \omega_2, \ldots)$; $\omega_i \in \{0,1\}$ die dyadiche Darstellung. Man begründe, dass λ-fast alle Zahlen $\omega \in [0,1]$ unendlich viele 0 in der dyadischen Darstellungen besitzen und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \frac{1}{2}$ erfüllen.

$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \frac{1}{2^i}$ ist die dyadische Darstellung

$$\lambda(\{\omega \in [0,1]: \text{nur endlich viele } \omega_i \text{ sind } 0\}) = \lambda(\{\omega \in [0,1]: \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N: \omega_i = 1\})$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \frac{1}{2^i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} 1 \cdot \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \frac{1}{2^i} + 2 \cdot \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{2^N} + \sum_{i=1}^{N} \omega_i \frac{1}{2^i}$$

$$\forall N \in \mathbb{N}: |\{\omega \in [0,1]: \forall n > N: \omega_i = 1,\ \omega_N = 0\}| = 2^{N-1} < \infty$$

$$\Rightarrow |\{\omega \in [0,1]: \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N: \omega_i = 1\}| = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{N-1} = \aleph_0$$

$$\Rightarrow \lambda(\{\omega \in [0,1]: \text{nur endlich viele } \omega_i \text{ sind } 0\}) = 0$$

$\Rightarrow$ λ-fast alle Zahlen $\omega \in [0,1]$ besitzen unendlich viele 0 in der dyadischen Darstellung

---

zz: $\lambda(\{\omega \in [0,1]: \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \frac{1}{2}\}) = 1$

Sei X_i ... unabhängige Folge SG mit Bernoulli-Verteilung also $P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ für $i \geq 1$.

dyadische Darstellung von ω entspricht nun den X_i ($\omega_i = 0$ falls X_i gleich 0 und $\omega_i = 1$ falls $X_i = 1$).

$$E(X_i) = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - E X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}$$

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt $P(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = 0) = 1$ also

$$\lambda(\{\omega \in [0,1]: \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = 0\}) = 1 \Rightarrow \lambda(\{\omega \in [0,1]: \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{2}\}) = 1$$

$\square$