Zusammenfassung Heft 1 ANA

Ida Hönigmann

13. November 2020

1 Die reellen Zahlen

1.1 Körper

Definition 1.1 (Körper). *$(K, +, *)$ heißt Körper, falls:*

1. $K \neq \emptyset$
2. $0, 1 \in K$
3. (a1) $(x + y) + z = x + (y + z)$
4. (a2) $x + 0 = 0 + x = x$
5. (a3) $\forall x \in K : \exists (-x) \in K$
6. (a4) $\forall x, y \in K : x + y = y + x$
7. (m1) $\forall x, y \in K : (x * y) * z = x * (y * z)$
8. (m2) $\forall x \in K \setminus \{0\} : x * 1 = 1 * x = x$
9. (m3) $\forall x \in K \setminus \{0\} : \exists x^{-1} \in K : x * (x^{-1}) = (x^{-1}) * x = 1$
10. (m4) $\forall x, y \in K : x * y = y * x$
11. (d) $\forall x, y, z \in K : x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$

Bemerkung. *Wenn $(K, +, *)$ ein Körper ist, dann ist $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, *)$ eine kommutative Gruppe.*

Schreibweise. *Wenn $(K, +, *)$ ein Körper und $u, w, x, y, z \in K$ ist schreiben wir auch:*

- $xy \coloneqq x * y$
- $\frac{x}{y} \coloneqq x * y^{-1}$ *bei* $y \neq 0$
- $uw + xy \coloneqq (u * w) + (x * y)$
- $x - y \coloneqq x + (-y)$

Lemma 1.1. *$(K, +, *)$ ... Körper, dann gelten folgende Regeln:*

- $\forall x \in K : (-(-x)) = x$
- $\forall x \in K \setminus \{0\} : (x^{-1})^{-1} = x$
- $\forall x \in K : x * 0 = 0$
- $\forall x, y \in K \setminus \{0\} : x * y \neq 0$
- $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$
- $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$
- $(-1) * (-1) = 1$
- $x(-y) = -(x * y)$
- $(-x)(-y) = x * y$
- $x(y - z) = xy - xz$
- $\forall a, b, c, d \in K, b, d \neq 0 : \frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Schreibweise. *$(K, +, *)$ ... Körper, $A, B \subseteq K$*

- $-A = \{-x : x \in A\}$
- $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$
- $A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$
- $A * B = \{x * y : x \in A, y \in B\}$

Definition 1.2. *$(K, +, *)$...Körper, $x \in K$, $n \in \mathbb{N}$*
$n * x$ ist definiert durch: $1 * x = x$ und $(n+1) * x = n * x + x$
x^n ist definiert durch: $x^1 = x$ und $x^{n+1} = x^n * x$

1.1.1 angeordnete Körper

Definition 1.3 (angeordneter Körper)**.** *$(K, +, *)$...Körper heißt angeordneter Körper, falls $\exists P \subseteq K$ mit:*

- *(p1) $K = P \cup \{0\} \cup (-P)$*
- *(p2) $x, y \in P \implies x + y \in P$*
- *(p3) $x, y \in P \implies x * y \in P$*

Für $x, y \in K$ gelte:

- *$x < y$, falls $y - x \in P$*
- *$x > y$, falls $x - y \in P$*
- *$x \leq y$, falls $y - x \in P \cup \{0\}$*
- *$x \geq y$, falls $x - y \in P \cup \{0\}$*

Lemma 1.2. *Sei K ein angeordneter Körper. $a, b, x, y, z \in K$. Dann gilt:*

- *$x \leq x$*
- *$x \leq y \land y \leq x \implies x = y$*
- *$x \leq y \land y \leq z \implies x \leq z$*
- *$x \leq y \lor y \leq x$*
- *$x \leq y \land a \leq b \implies x + a \leq y + b$*
- *$x \leq y \implies -x \geq -y$*
- *$z > 0 \land x \leq y \implies x * z \leq y * z$*
- *$z < 0 \land x \leq y \implies x * z \geq y * z$*
- *$x \neq 0 \implies x^2 > 0$, insbesondere gilt $1 > 0$*
- *$x > 0 \implies x^{-1} > 0$*
- *$0 \leq x \leq y \implies \frac{x}{y} \leq 1 \leq \frac{y}{x}$*
- *$0 \leq x \leq y \implies x^{-1} \geq y^{-1}$*
- *$0 < x \leq y \land 0 < a \leq b \implies x * a \leq y * b$*
- *$x < y \implies x < \frac{x+y}{2} < y$*

1.1.2 Ordnungen auf Körpern

Definition 1.4 (Halbordnung, Totalordnung)**.** *M...Menge, $R \subseteq M \times M$...Relation*

R heißt eine Halbordnung, falls

- *$\forall x \in M : xRx$*
- *$\forall x, y \in M : xRy \land yRx \implies x = y$*
- *$\forall x, y, z \in M : xRy \land yRz \implies xRz$*

R heißt eine Totalordnung, falls zusätzlich gilt:

- *$\forall x, y \in M : xRy \lor yRx$*

Definition 1.5 (Supremum, Infimum)**.** *K...Menge, $\leq$...Totalordnung auf K, $x, y \in K$, $A \subseteq K \land A \neq \emptyset$*

- *$max(x, y) \coloneqq x$ falls $x \geq y$ und als y falls $x < y$*
- *$min(x, y) \coloneqq x$ falls $x \leq y$ und als y falls $x > y$*
- *$max(A) = m \in A$, sodass $\forall a \in A : m \leq a$*
- *$min(A) = m \in A$, sodass $\forall a \in A : m \geq a$*

A heißt nach oben beschränkt, falls $\exists x \in K : \forall a \in A : x \geq a$. Dafür schreibt man $A \leq x$. Jedes solches x heißt obere Schranke.

A heißt nach unten beschränkt, falls $\exists x \in K : \forall a \in A : x \leq a$. Dafür schreibt man $A \geq x$. Jedes solches x heißt untere Schranke.

Falls A nach oben und unten beschränkt ist, heißt A auch beschränkt.

Falls $\{x \in K : A \leq x\}$ ein Minimum hat, so heißt dieses Supremum von A. Dafür schreibt man $sup(A)$.

Falls $\{x \in K : A \geq x\}$ ein Maximum hat, so heißt dieses Infimum von A. Dafür schreibt man $inf(A)$.

Lemma 1.3. *K...totalgeordnete Menge*

Falls $A \subseteq K$ ein Maximum hat, so ist dieses auch Supremum. Falls $A \subseteq K$ ein Minimum hat, so ist dieses auch Infimum.

$A \subseteq B \subseteq K \implies \{x \in K : B \leq x\} \subseteq \{x \in K : A \leq x\}$

Falls $A \subset B \subset K$ und falls A und B ein Maximum haben, gilt $Max(A) \leq Max(B)$. Falls A und B ein Minimum haben, gilt $Min(A) \geq Min(B)$.

Falls $A \subset B \subset K$ und A und B ein Supremum haben, gilt $sup(A) \leq sup(B)$. Falls A und B ein Infimum haben gilt $inf(A) \geq inf(B)$.

Lemma 1.4. *K...angeordneter Körper, $x, y \in K$, $A \subset K$*

- $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
- $x \leq A \Leftrightarrow -A \leq -x$
- $A \leq x \Leftrightarrow -x \leq -A$
- $min(-A) = -max(A)$
- $max(-A) = -min(A)$
- $inf(-A) = -sup(A)$
- $sup(-A) = -inf(A)$

Definition 1.6. *K...angeordneter Körper, $a, b \in K$*

- $(a, b) := \{x \in K : a < x < b\}$
- $[a, b] := \{x \in K : a \leq x \leq b\}$
- $[a, b) := \{x \in K : a \leq x < b\}$
- $(a, b] := \{x \in K : a < x \leq b\}$
- $(a, +\infty) := \{x \in K : a < x\}$
- $(-\infty, b) := \{x \in K : x < b\}$

Lemma 1.5. *K...angeordneter Körper, $a, b \in K$, $a < b$*

Es gilt $sup((a, b)) = b$ und $inf((a, b)) = a$.

Definition 1.7 (Signumfunktion, Absolutbetrag)**.** *K...angeordneter Körper*

Die Funktion $sgn(x) := -1$, falls $x < 0$; 0, falls $x = 0$ und 1, falls $x > 0$.

Die Funktion $|.| := x$, falls $x \geq 0$ und 1, falls $x < 0$.

Es gilt $sgn : K \to \{-1, 0, 1\}$ und $|.| : K \to K$.

Lemma 1.6. *K...angeordneter Körper, $x, y \in K$*

- $|x| = sgn(x) * x$
- $x = sgn(x) * |x|$
- $|x * y| = |x| * |y|$
- $max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$
- $min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Lemma 1.7. *K...angeordneter Körper, $x \in K$, $x \geq -1$*

Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : (1 + x)^n \geq 1 + n * x$

1.1.3 archimedisch angeordnete Körper

Definition 1.8 (archimedisch angeordnet)**.** *Ein angeordneter Körper $(K, +, *, P)$ heißt archimedisch angeordnet falls $\mathbb{N} \subseteq K$ nicht nach oben beschränkt ist.*

Satz 1.8. *K...archimedisch angeordneter Körper, $x, y \in K$, $x < y$*

Dann existiert ein $p \in \mathbb{Q}$ mit $x < p < y$.

1.2 Ganze Zahlen

Definition 1.9. *$\mathbb{N}_1$, $\mathbb{N}_2$... Körper von $\mathbb{N}$ disjunkte isomorphe Kopien. Mit $\phi : \mathbb{N} \to \tilde{\mathbb{N}}$ bijektiv.*

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_1 \cup \{0\} \cup \mathbb{N}_2$

$\psi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$

$- : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert als $-n : \psi(n)$, falls $n \in \mathbb{N}_1$, 0, falls $n = 0$ und $\psi^{-1}(n)$, falls $n \in \mathbb{N}_2$.

$\mathbb{N} := \mathbb{N}_1$ und $-\mathbb{N} := \mathbb{N}_2$ ergibt die neue Definition $\mathbb{Z} := -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$.

$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert als $|p| * |q|$, falls $p \neq 0, q \neq 0, sgn(p) = sgn(q)$, 0, falls $p = 0 \vee q = 0$ und $-(|p| * |q|)$, falls $p \neq 0, q \neq 0, sgn(p) \neq sgn(q)$.

$|.| : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch 0, falls $n = 0$, n, falls $n \in \mathbb{N}$ und $-n$, falls $n \in -\mathbb{N}$.

$sgn : \mathbb{Z} \to \{0, 1, -1\}$ definiert durch 1, falls $n \in \mathbb{N}$, 0, falls $n = 0$ und -1, falls $n \in -\mathbb{N}$.

$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $p + q$, falls $p, q \in \mathbb{N}$, $-(|p|+|q|)$, falls $p, q \in -\mathbb{N}$, $p-|q|$, falls $p, -q \in \mathbb{N}, p > -q$, $-(|q|-p)$, falls $p, -q \in \mathbb{N}, p < -q$, $-(|p|-q)$, falls $-p, q \in \mathbb{N}, -p > q$, $q - |p|$, falls $-p, q \in \mathbb{N}, -p < q$ und 0, falls $p = -q$.

Schreibweise. *Wenn $p, q \in \mathbb{Z}$ wird $p - q := p + (-q)$.*

Satz 1.9. *Für $(\mathbb{Z}, +, *)$ gelten folgende Aussagen:*

- *$+$ ist kommutativ, assoziativ und 0 ist neutrales Element bezgl. $+$.*

- *Für $p \in \mathbb{Z}$ ist $-p$ ein inverses Element bezgl. $+$.*
- *$*$ ist kommutativ, assoziativ und 1 ist neutrales Element bzgl. $*$, aber es bildet keine Gruppe.*
- *Distributivgesetz: $p * (q + r) = (p * q) + (p * r)$*
- *$p \neq 0 \wedge q \neq 0 \implies p * q \neq 0$*

Definition 1.10. *$p, q \in \mathbb{Z}$*
$p < q \Leftrightarrow q - p \in \mathbb{N}$ und $p \leq q \Leftrightarrow q - p \in \nvDash \cap \{0\}$

Definition 1.11. *$(K, +, *)$...Körper, $p \in \mathbb{Z}$, $x \in K$, $x \neq 0$*
$x^p := x^p$, falls $p \in \mathbb{N}$, 1, falls $p = 0$ und $\frac{1}{x^{-p}}$, falls $p \in -\mathbb{N}$.
Eigenschaften von x^p: Wenn $x \in K \setminus \{0\}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ gilt $x^p * x^q = x^{x+q}$, $(x^p)^q = x^{p*q}$ und $x^{-p} = \frac{1}{x^p}$.

Lemma 1.10. *$(K, +, *, P)$...angeordneter Körper mit $x, y \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.*
$x < y \Leftrightarrow x^n < x^n$ und $x, y > 0 : x < y \Leftrightarrow x^{-n} > y^{-n}$

1.3 Rationale Zahlen

Definition 1.12. *$\sim \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ sei definiert durch $(p, n) \sim (\hat{p}, \hat{n}) \Leftrightarrow p * \hat{n} = \hat{p} * n$.*

Lemma 1.11. *$\sim$ ist Äquivalenzrelation.*

Definition 1.13. *$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \sim = \{[(x, n)] \sim : (x, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$*
$+ : (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ definiert durch $(x, n) + (y, m) := (x * m + y * n, n * m)$
$* : (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ definiert durch $(x, n) * (y, m) := (x * y + n * m)$

Lemma 1.12. *$+, *$ sind kommutativ und assoziativ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.*

Definition 1.14. *$sgn : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ definiert mit $sgn((x, n)) := sgn(x)$*

Lemma 1.13. *$(x, n) \sim (\hat{x}, \hat{n})$, $(y, m) \sim (\hat{y}, \hat{m})$*

- *$\implies sgn((x, n)) = sgn((\hat{x}, \hat{n}))$*
- *$\implies (x, n) + (y, m) \sim (\hat{x}, \hat{n}) + (\hat{y}, \hat{m})$*
- *$\implies (x, n) * (y, m) \sim (\hat{x}, \hat{n}) * (\hat{y}, \hat{m})$*

Definition 1.15. *$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definiert durch $[(x, n)]_\sim + [(y, m)]_\sim := [(x, n) + (y, m)]_\sim$*
$* : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definiert durch $[(x, n)]_\sim * [(y, m)]_\sim := [(x, n) * (y, m)]_\sim$
$sgn : \mathbb{Q} \to \{-1, 0, 1\}$ definiert als $sgn([(x, n)]_\sim) := sgn((x, n))$

Lemma 1.14.

- *$+, *$ sind assoziativ und kommutativ*
- *Es gilt das Distributivgesetz*
- *$[(0, 1)]_\sim$ ist das additiv neutrale Element. Man schreibt dafür auch 0.*
- *$[(1, 1)]_\sim$ ist das multiplikativ neutrale Element. Man schreibt dafür auch 1.*
- *$[(x, n)]_\sim \in \mathbb{Q} \implies [(-x, n)]_\sim$ ist Inverses bezgl. $+$.*
- *$[(x, n)]_\sim \neq 0 \implies [(sgn(x) * n, |x|)]_\sim$ ist Inverses bezgl. $*$.*
- *$P := \{[(x, n)]_\sim : sgn([(x, n)]_\sim) = 1\}$*
- *$-P := \{[(x, n)]_\sim : sgn([(x, n)]_\sim) = -1\}$*
- *$\mathbb{Z}$ lässt sich in $\mathbb{Q}$ isomorph einbetten, d.h. $\exists$ eine injektive Funktion $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.*
- *$\phi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Q}$ hat keine obere Schranke*

Daher ist $(\mathbb{Q}, +, *)$ ein Körper.

Lemma 1.15. *Sei $(K, +, *, P)$ ein beliebiger angeordneter Körper.*
Dann existiert eine eindeutige Abbildung $\phi : \mathbb{Q} \to K$ die verträglich mit $+$ und $*$ ist. ϕ ist dabei immer injektiv und mit $<$ und $\leq$ verträglich.

Schreibweise. $[(x, n)]_\sim \in \mathbb{Q}$
$[(x, n)]_\sim = \frac{\phi(x)}{\phi(n)} = \frac{x}{n}$