ANA Ü12

1.) $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{, falls } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{, sonst} \end{cases}$ Wo stetig, wo unstetig?

Für $x \in (-1, 0)$ stetig, da f dort eine Polynomfunktion (und diese sind immer stetig). Für $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ stetig aus gleichem Grund.

Bei $x = -1$:

$\lim\limits_{x \to (-1)-} f(x) = 1-(-1) = 2$ $\lim\limits_{x \to (-1)+} f(x) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0$

Da $\lim\limits_{x \to (-1)-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to (-1)+} f(x)$ ist f bei -1 unstetig, da beide

lim existieren $\Rightarrow$ Unstetigkeit 1. Art.

Bei $x = 0$:

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$ $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1 - 0 = 1$

Da $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ ist f bei 1 stetig.

$f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & \text{falls } x \leq 1 \\ ax - x^3, & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ b \cdot x^2, & \text{falls } x > 2 \end{cases}$ Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist f stetig?

Für $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$ ist f stetig, da Polynom.

$x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 1 + 1^2 = 2$ $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = a \cdot 1 - 1^3 = a - 1$

$a - 1 = 2 \iff a = 3$

$x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 3 \cdot 2 - 2^3 = -2$ $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = b \cdot 2^2 = 4b$

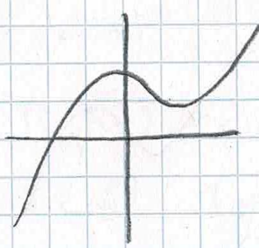
$4b = -2 \iff b = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Damit f stetig ist muss $a = 3$ und $b = -\frac{1}{2}$ sein.

ANA Ü12

2.) $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ mit $\forall i \in \mathbb{N}, i \leq n: a_i \in \mathbb{R}$ $\quad a_n \neq 0$

zz: $\exists k \in \mathbb{N}: n = 2k-1 \quad \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: f(c) = 0$



1. Fall $a_n > 0$:

Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$

Das heißt $\exists p, n \in \mathbb{R}: f(p) > 0 \wedge f(n) < 0$

Da p als Polynom stetig ist gilt, dass $f((p,n))$ ein Intervall ist und das (laut Zwischenwertsatz) $\forall x \in f((p,n)) \exists c \in (p,n)$: $f(c) = x$

Da $x = 0 \in (f(n), f(p))$ ist

$\exists c \in (n,p) (\subseteq \mathbb{R}): f(c) = 0.$

2. Fall $a_n < 0$:

genauso mit $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = +\infty$

zz: $(\exists k \in \mathbb{N}: n = 2k) \wedge (a_0 \cdot a_n < 0) \Rightarrow \exists c', c'' \in \mathbb{R}, c' \neq c'': f(c') = 0 = f(c'')$

$(a_0 \cdot a_n < 0) \Leftrightarrow (a_0 < 0)$ xor $(a_n < 0)$

1. Fall $(a_0 < 0) \wedge (a_n > 0)$:

Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = +\infty$, $p(0) = a_0 < 0$

$\Rightarrow \exists p', p'' \in \mathbb{R}, p' < 0 < p'': f(p') > 0 \wedge f(p'') > 0$

$\exists c' \in (p', 0): f(c') = 0 \qquad \exists c'' \in (0, p''): f(c'') = 0$

$c' \neq c''$, da $(p', 0) \cap (0, p'') = \emptyset$

2. Fall $(a_0 > 0) \wedge (a_n < 0)$:

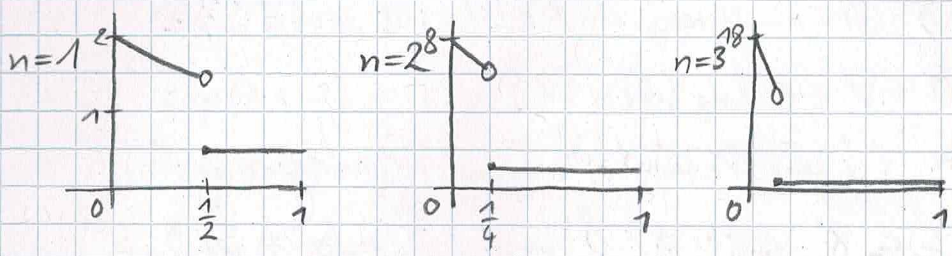
genauso mit $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$, $p(0) = a_0 > 0$

$\square$

ANA Ü12

3) $n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n(x): (0,1) \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \begin{cases} -n^3 x + 2n^2, & \text{falls } 0 < x < \frac{1}{2n} \\ \frac{n}{n+1}, & \text{falls } \frac{1}{2n} \le x < 1 \end{cases}$

Skizze:



Punktweise Konvergenz: $\quad f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$

$\forall x \in (0,1): \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$, da $\frac{1}{2n} \to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1 \quad \Rightarrow (f_n) \xrightarrow[\text{punktweise}]{n\to\infty} f$

Gleichmäßige Konvergenz:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \ge N: d_\infty(f_n, f) \le \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $N = \sqrt{\frac{\varepsilon+1}{2}}$ Sei $n \ge N$ bel.

$d_\infty(f_n, f) = \sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in (0,1)\}$

$= \sup(\{|-n^3 \cdot x + 2n^2 - 1| : x \in (0, \frac{1}{2n})\} \cup \{|\frac{n}{n+1} - 1| : x \in [\frac{1}{2n}, 1)\})$

Da $\frac{n}{n+1}$ monoton fallend ist $\sup\{|\frac{n}{n+1} - 1|\} = \frac{N}{N+1} - 1$

$|-n^3 \cdot x + 2n^2 - 1| \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$ und ist monoton fallend, daher ist $\sup\{|-n^3 x + 2n^2 - 1|\} = |-N^3 \cdot x + 2N^2 - 1|$

Je größer x, desto kleiner $-N^3 \cdot x + 2N^2 - 1$, daher $\sup\{|-N^3 x + 2N^2 - 1|\} = 2N^2 - 1$.

Offensichtlich ist $2N^2 - 1 > \frac{N}{N+1} - 1$ ab einem Index.

$2N^2 - 1 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{2}}^2 - 1 = 2\,\frac{\varepsilon+1}{2} - 1 = \varepsilon + 1 - 1 = \varepsilon$

$\Rightarrow$ konvergiert gleichmäßig gegen f

Fläche a_n unter f_n:

$a_n = (1 - \frac{1}{2n}) \cdot f(\frac{1}{2n}) + \frac{1}{2n} \cdot \lim\limits_{x \to \frac{1}{2n}-} f(x) + \frac{\frac{1}{2n} \cdot (\lim\limits_{x\to 0+} f(x) - \lim\limits_{x\to\frac{1}{2n}-} f(x))}{2} = \ldots$

$= \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{8} + n + \frac{n}{8}$

$(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$, da $(f_n) \xrightarrow{n\to\infty} f$ und Fläche unter $f = 1$

ANA Ü12

4 a) $f_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{x^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x^2}{n^2}} = \frac{0}{1+0} = 0 = f(x)$$

Gleichmäßig konvergent?

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: d_\infty(f_n,f)\leq\varepsilon$

Sei $\varepsilon>0$ bel.

$d_\infty(f_n,f) = \sup\{d(f_n(x),f(x)) : x\in\mathbb{R}\} = \sup\{|\frac{n}{n^2+x^2}| : x\in\mathbb{R}\}$

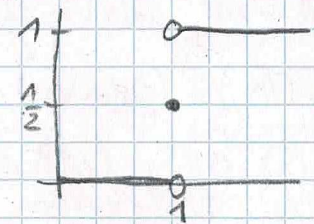
$\left|\frac{n}{n^2+x^2}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und ist ↘ $\Rightarrow \sup\{\dots\} = \frac{N}{N^2+x^2}$

Da $\lim_{N\to\infty}\frac{N}{N^2+x^2}=0$ $\quad \exists N\in\mathbb{N}: \frac{N}{N^2+x^2}<\varepsilon$

b) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^n}{x^n}}{\frac{1}{x^n}+\frac{x^n}{x^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^n}+1} = \begin{cases}1, & \text{falls } x>1\\ \frac{1}{2}, & \text{falls } x=1\\ 0, & \text{falls } x<1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases}0, & \text{falls } 0\leq x<1\\ \frac{1}{2}, & \text{falls } x=1\\ 1, & \text{falls } x>1\end{cases}$$



Gleichmäßig konvergent?

Nein.

Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\left|\frac{(x_n)^n}{1+(x_n)^n} - 1\right| = \frac{(\sqrt[n]{n})^n}{1+(\sqrt[n]{n})^n} = \frac{n}{1+n} = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{n}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$, d.h. Für $\varepsilon>1$ $\nexists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: d_\infty(f_n,f)<\varepsilon$

ANA Ü12

6.) $E \neq \emptyset \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad f, g : E \to \mathbb{C}$ ... beschränkt

zz: $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$\|f+g\|_\infty = \sup\{|f(x)+g(x)| : x \in E\} \leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| : x \in E\}$

$\leq \sup\{|f(x)| : x \in E\} + \sup\{|g(x)| : x \in E\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

zz: $\|\lambda \cdot f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

$\|\lambda \cdot f\|_\infty = \sup\{|\lambda \cdot f(x)| : x \in E\} = \sup\{|\lambda| \cdot |f(x)| : x \in E\}$

$= |\lambda| \cdot \sup\{|f(x)| : x \in E\} = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

zz: $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$

$\|f \cdot g\|_\infty = \sup\{|f(x) \cdot g(x)| : x \in E\} = \sup\{|f(x)| \cdot |g(x)| : x \in E\}$

$\leq \sup\{|f(x)| : x \in E\} \cdot \sup\{|g(x)| : x \in E\} = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$

ANA Ü12

8.) i) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(2+(-1)^n)^n}_{a_n} \cdot z^n$ ges: Konvergenzradius R

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\inf\{\sup\{\sqrt[k]{|\underbrace{\underbrace{(2+(-1)^k)}_{>0}{}^k}_{>0}|} : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}}$$

$$= \frac{1}{\inf\{\sup\{2+(-1)^k : k \geq n\} : n\in\mathbb{N}\}} = \frac{1}{\inf\{3 : n\in\mathbb{N}\}} = \frac{1}{3}$$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\inf\{\sup\{\sqrt[k]{|\underbrace{k!}_{>0}|} : k\geq n\} : n\in\mathbb{N}\}}$$

da $\sqrt[k]{k!} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ geht R gegen 0

$\Rightarrow R = 0$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)^n z^n$

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\inf\{\sup\{\sqrt[k]{|\frac{1}{k^2}(\sqrt{k^2+k} - \sqrt{k^2+1})^k|} : k\geq n\} : n\in\mathbb{N}\}}$$

$$= \frac{1}{\inf\{\sup\{\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}}\left(\sqrt{k^2+k} - \sqrt{k^2+1}\right) : k\geq n\} : n\in\mathbb{N}\}}$$

$$\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \exp\left(\log\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}}\right)\right) = \exp\left(\log\left(k^{-2\cdot\frac{1}{k}}\right)\right) = \exp\left(-2\cdot\log\left(\sqrt[k]{k}\right)\right)$$

$$\lim_{k\to\infty} \exp\left(-2\cdot\underbrace{\log(\underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\to 1})}_{\to 0}\right) = \exp(0) = 1$$

$$\sqrt{k^2+k} - \sqrt{k^2+1} = \frac{(\sqrt{k^2+k} - \sqrt{k^2+1})(\sqrt{k^2+k} + \sqrt{k^2+1})}{\sqrt{k^2+k} + \sqrt{k^2+1}} = \frac{k^2+k-k^2+1}{\sqrt{k^2+k} + \sqrt{k^2+1}}$$

$$= \frac{\frac{k}{k} + \frac{1}{k}}{\sqrt{\frac{k^2}{k^2} + \frac{k}{k^2}} + \sqrt{\frac{k^2}{k^2} + \frac{1}{k}^2}} = \frac{1 + \frac{1}{k}}{\sqrt{1+\frac{1}{k}} + \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}}{\sqrt{1+\frac{1}{k}} + \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

$$R = \frac{1}{1\cdot\frac{1}{2}} = 2$$