ANA Ü2

1) $\mathcal{U}$ ... Ultrafilter auf $X \neq \emptyset$ zz: $\forall A \subseteq X: \; A \in \mathcal{U} \vee A^c \in \mathcal{U}$

Def $\mathcal{U}$ ... Ultrafilter auf $X \Longleftrightarrow \mathcal{U}$ ... Filter auf $X \wedge \forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ ... Filter: $\mathcal{U} = \mathcal{F}$

Def $\mathcal{F}$ ... Filter $\Longleftrightarrow \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) \wedge \emptyset \notin \mathcal{F} \wedge \forall A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F} \wedge \forall A \in \mathcal{F} \; \forall B \supseteq A: B \in \mathcal{F}$

Sei $A \subseteq X$ mit $A \notin \mathcal{U}$ bel. zz: $A^c \in \mathcal{U}$

Falls $A = \emptyset \Rightarrow A^c = X \in \mathcal{U}$ ✓

Falls $A \neq \emptyset \Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}: U \not\subseteq A$ (sonst $U \subseteq A \Rightarrow A \in \mathcal{U}$) $\Rightarrow U \cap A^c \neq \emptyset$

o) zz: $U \cap A^c \in \mathcal{U}$, da dann $A^c \supseteq U \cap A^c \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$

$\mathcal{F} := \{ F \supseteq U \cap A^c \mid U \in \mathcal{U} \}$ ist ein Filter auf X, da

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$: $U \cap A^c \neq \emptyset$
- $C, D \in \mathcal{F} \Rightarrow C \cap D \in \mathcal{F}$: $C \supseteq U_C \cap A^c$, $D \supseteq U_D \cap A^c$

  $\Rightarrow C \cap D \supseteq U_C \cap A^c \cap U_D \cap A^c = \underbrace{U_C \cap U_D}_{\in \mathcal{U}} \cap A^c \in \mathcal{F}$
- $C \in \mathcal{F}, D \supseteq C \Rightarrow D \in \mathcal{F}$ klar

o) zz: $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, da dann $\mathcal{U} = \mathcal{F}$ und $U \cap A^c \in \mathcal{F} = \mathcal{U}$ folgt.

Sei $U \in \mathcal{U}$ bel. $\Rightarrow U \cap A^c \in \mathcal{F}$, $\quad U \supseteq U \cap A^c \Rightarrow U \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$

Da $A \notin \mathcal{U} \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$ folgt $A^c \notin \mathcal{U} \Rightarrow (A^c)^c = A \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \forall A \subseteq X: A \in \mathcal{U} \vee A^c \in \mathcal{U}$

$\square$

ANA Ü2

2) $M \neq \emptyset$ .. Menge $\quad \beta M$ .. Menge aller Ultrafilter auf M

$\forall A \subseteq M \quad \mathcal{O}_A := \{\mathcal{U} \in \beta M : A \in \mathcal{U}\}$

(i) zz: $\mathcal{B}_M := \{\mathcal{O}_A : A \subseteq M\}$ .. Basis einer Topologie $\mathcal{T}_M$

Def $\mathcal{B}$ ... Basis von $\mathcal{T}$ $\Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T} \wedge \forall O \in \mathcal{T} \exists (B_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{B}$: $O = \bigcup_{i\in I} B_i$

Prop 1.1.1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist Basis einer Topologie auf X $\Leftrightarrow$

$\forall U,V \in \mathcal{B}\ \forall x \in U\cap V\ \exists W \in \mathcal{B}: x \in W \subseteq U \cap V \wedge \bigcup_{U\in\mathcal{B}} U = X$

- $\mathcal{B}_M \subseteq \mathcal{P}(\beta M)$ klar
- $\bigcup_{U \in \mathcal{B}_M} U = \bigcup_{A\subseteq M} \mathcal{O}_A = \beta M$, da jeder Ultrafilter eine Menge A filtert.
- Sei $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B \in \mathcal{B}_M$ bel. Sei $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B$ bel.

$\mathcal{U}\in\mathcal{O}_A \Rightarrow A \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}\in\mathcal{O}_B \Rightarrow B\in\mathcal{U}$

Da $\mathcal{U}$ ein Filter ist gilt also $A\cap B \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U}\in\mathcal{O}_{A\cap B}$

Da $A \supseteq A\cap B \Rightarrow \forall \mathcal{V}$ .. Filter: $A\cap B\in\mathcal{V} \Rightarrow A\in\mathcal{V}$ für $B\supseteq A\cap B$ analog

$\Rightarrow \mathcal{O}_{A\cap B}\subseteq \mathcal{O}_A \wedge \mathcal{O}_{A\cap B}\subseteq\mathcal{O}_B \quad \Rightarrow \mathcal{U}\in\mathcal{O}_{A\cap B}\subseteq \mathcal{O}_A\cap\mathcal{O}_B$

(ii) zz: $\mathcal{T}_M$ ist Hausdorff

Sei $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\beta M$ bel. mit $\mathcal{U}\neq\mathcal{V}$.

Es gilt $\mathcal{U}\not\subseteq\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}\not\subseteq\mathcal{U}$, da beides Ultrafilter sind.

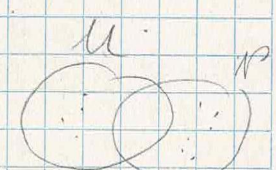
$\Rightarrow \mathcal{U}\setminus\mathcal{V}\neq\emptyset \wedge \mathcal{V}\setminus\mathcal{U}\neq\emptyset$

$\bigcup_{X\in\mathcal{U}\setminus\mathcal{V}} X \in \mathcal{U}$, da $\exists X\in\mathcal{U}\setminus\mathcal{V}: X\subseteq \bigcup_{X\in\mathcal{U}\setminus\mathcal{V}} X \wedge X\in\mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{X\in\mathcal{U}\setminus\mathcal{V}}X\in\mathcal{U}$ analog für $\bigcup_{X\in\mathcal{V}\setminus\mathcal{U}} X\in\mathcal{V}$

$\mathcal{O}_{\bigcup_{X\in\mathcal{U}\setminus\mathcal{V}}X} \cap \mathcal{O}_{\bigcup_{X\in\mathcal{V}\setminus\mathcal{U}}X} = \{\mathcal{W}\in\beta M: \bigcup_{X\in\mathcal{U}\setminus\mathcal{V}}X\in\mathcal{W} \wedge \bigcup_{X\in\mathcal{V}\setminus\mathcal{U}}X\in\mathcal{W}\}$

$\Rightarrow \mathcal{W}\in \bigcup_{X\in\mathcal{U}\setminus\mathcal{V}}X \cap \bigcup_{Y\in\mathcal{V}\setminus\mathcal{U}} Y = \emptyset$

$\Rightarrow T2$



(iii) zz: $\mathcal{O}_A$ ... clopen

$\mathcal{O}_A$ ... offen klar $\quad$ Sei $\mathcal{O}_A$ bel. zz: $\mathcal{O}_A^c$ ... offen

$\mathcal{O}_A^c = \{\mathcal{U}\in\beta M: A\notin\mathcal{U}\}$ Da $\mathcal{U}$ .. Ultrafilter $\Rightarrow A\notin\mathcal{U}\Rightarrow A^c\in\mathcal{U}$ Somit folgt

$\subseteq \{\mathcal{U}\in\beta M: A^c\in\mathcal{U}\}$ Sei $\mathcal{U}\in\beta M$ mit $A^c\in\mathcal{U}$ bel $\Rightarrow (A^c)^c\notin\mathcal{U}\Rightarrow A\notin\mathcal{U}$ also

$\mathcal{O}_A^c = \{\mathcal{U}\in\beta M: A^c\in\mathcal{U}\} = \mathcal{O}_{A^c}$ ... offen

ANA Ü2

3) $(X,\mathcal{T})$ ... top. Raum mit Basis $\mathcal{B}$

zz: $(X,\mathcal{T})$ ... kompakt $\Leftrightarrow \forall (B_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{B}$ mit $\bigcup_{i\in I} B_i = X \ \exists J \subseteq I$ ... endlich : $\bigcup_{j\in J} B_j = X$

Def $(X,\mathcal{T})$ ... kompakt $\Leftrightarrow \forall (O_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{T}$ mit $\bigcup_{i\in I} O_i = X \ \exists J\subseteq I$ ... endlich : $\bigcup_{j\in J} O_j = X$

Def $\mathcal{B}$ ... Basis von $(X,\mathcal{T}) \Leftrightarrow \mathcal{B}\subseteq \mathcal{T} \wedge \forall O\in\mathcal{T} \ \exists (B_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{B}$: $\bigcup_{i\in I} B_i = O$

$(\Rightarrow)$ Sei $(B_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{B}$ mit $\bigcup_{i\in I} B_i = X$ bel. $\Rightarrow \forall i\in I: B_i \in \mathcal{T}$, da $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}$

$\Rightarrow \exists J\subseteq I$ ... endlich : $\bigcup_{j\in J} B_j = X$

$(\Leftarrow)$ Sei $(O_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{T}$ mit $\bigcup_{i\in I} O_i = X$ bel. $\Rightarrow \forall i\in I \ \exists (B_{i,j})_{j\in J}$ aus $\mathcal{B}$: $O_i = \bigcup_{j\in J} B_{i,j}$

$\Rightarrow X = \bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} B_{i,j} = \bigcup_{i,j\in I\times J} B_{i,j}$

$\Rightarrow \exists K\subseteq I\times J$ ... endlich : $\bigcup_{i,j\in K} B_{i,j} = X$

$\Rightarrow \exists K_I \subseteq I : K\subseteq K_I\times J \subseteq I\times J \quad \Rightarrow \bigcup_{i,j\in K_I\times J} B_{i,j} \supseteq X \Rightarrow \bigcup_{i,j\in K_I\times J} B_{i,j} = X$

$X = \bigcup_{i,j\in K_I\times J} B_{i,j} = \bigcup_{i\in K_I}\bigcup_{j\in J} B_{i,j} = \bigcup_{i\in K_I} O_i$ und da $I\times J$ ... endlich $\Rightarrow K_I$ ... endlich

$\square$

zz: $(\beta M, \mathcal{T}_M)$ ist kompakt

also zeigen wir nach oben $\forall (B_i)_{i\in I}$ aus $\{O_A : A\subseteq M\}$ mit $\bigcup_{i\in I} B_i = \beta M \ \exists J\subseteq I$ ... endlich : $\bigcup_{j\in J} B_j = \beta M$

Sei $(C_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ bel. mit $\bigcup_{i\in I} O_{C_i} = \beta M$ ohne endlicher Teilüberdeckung von $\mathbb{N}$.

$\forall i\in I \ D_i := \mathbb{N}\setminus C_i \quad \Rightarrow \{\bigcap_{j\in J} D_j \mid J\subseteq I \text{ ... endlich}\}$ ist eine Filterbasis $\mathcal{D}$:

$\emptyset \notin \mathcal{D}$, da $D\in\mathcal{D} \Rightarrow D = \bigcap_{j\in J} D_j = \bigcap_{j\in J} C_j^c = (\bigcup_{j\in J} C_j)^c = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{j\in J} C_j = \mathbb{N}$ ↯ zu keine endlich Teilüberdeckung von $\mathbb{N}$.

$U,V\in\mathcal{D} \Rightarrow \exists W\in\mathcal{D} : W\subseteq U\cap V$, da $U = \bigcap_{j\in J} D_j$, $V = \bigcap_{k\in K} D_k \Rightarrow U\cap V = \bigcap_{z\in J\cap K} D_z \in \mathcal{D}$

Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der den von $\mathcal{D}$ generierten Filter enthält.

$\Rightarrow \mathcal{U} \notin \bigcup_{i\in I} O_{C_i}$, da $\forall i\in I: D_i \in\mathcal{U} \Rightarrow D_i^c = C_i \notin \mathcal{U}$

↯ zu $\bigcup_{i\in I} O_{C_i} = \beta M$

$\Rightarrow \exists J\subseteq I$ ... endlich : $\bigcup_{j\in J} C_j = \mathbb{N} \quad \Rightarrow \bigcup_{j\in J} O_{C_j} = \bigcup_{j\in J} \bigcup_{C_j\in\mathcal{U}\in\beta M} \mathcal{U} \subseteq \bigcup_{\bigcup_{j\in J} C_j\in\mathcal{U}\in\beta M} \mathcal{U} = \bigcup_{\mathbb{N}\in\mathcal{U}\in\beta M} \mathcal{U} = \beta M$

ANA Ü2

5) $(X, \mathcal{T})$ ... top. Raum $\quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Folge in $X \quad x \in X$

zz: $x_n \to x \iff \forall (x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}} \; \exists (x_{n(j(k))})_{k\in\mathbb{N}} : x_{n(j(k))} \to x$

Def $x_n \to x \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : x_n \in U$

$(\Rightarrow)$ Sei $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ eine bel. Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von sich selbst.

Sei $U \in \mathcal{U}(x)$ bel. Da $x_n \to x$ gilt $\exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : x_n \in U$.

Da $\forall j \in \mathbb{N} : n(j) \geq j \Rightarrow \forall j \in \mathbb{N}, j \geq N : x_{n(j)} \in U \quad \Rightarrow x_{n(j)} \to x$

$(\Leftarrow)$ $x_n \not\to x \iff \exists U \in \mathcal{U}(x) \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n \geq N : x_n \notin U$

Wir zeigen $\neg$ $x_n \not\to x \Rightarrow \exists (x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}} \; \forall (x_{n(j(k))})_{k\in\mathbb{N}} : x_{n(j(k))} \not\to x$

$x_n \not\to x \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x) \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n \geq N : x_n \notin U$

Wähle $n(j)$ so dass $\forall j \in \mathbb{N} : n(j) > n(j-1) \wedge x_{n(j)} \notin U$

Sei $(x_{n(j(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ eine bel. Teilfolge $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : x_{n(j(k))} \notin U$

$\Rightarrow x_{n(j(k))} \not\to x$

$\square$

ANA Ü2

6) (X,d) ... metr. Raum $\quad A \subseteq X$

zz: A ... totalbeschränkt $\Leftrightarrow \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A $\exists (a_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ ... Cauchyfolge

Def A ... totalbeschränkt $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists x_1,\dots,x_n : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_\varepsilon(x_i)$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Cauchyfolge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n,m \geq N : d(x_n,x_m) \leq \varepsilon$

$\Leftarrow$ Sei $\varepsilon>0$ bel. $\quad A=\emptyset$ ist ein langweiliger Fall.

$A \neq \emptyset : \quad \Rightarrow \exists a_1 \in A$

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n, & \text{falls } \{a_1,\dots,a_n\} = A \\ x \in A \setminus \{a_1,\dots,a_n\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists (a_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}} \ \exists N_j \in\mathbb{N} \ \forall j,k > N_j : d(a_{n(j)}, a_{n(k)}) < \varepsilon$

Sei $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge aller Elemente, die nicht in $(a_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ vorkommen.

$\Rightarrow \exists (a_{n(k(h))})_{h\in\mathbb{N}} \ \exists N_h \in\mathbb{N} \ \forall h,j > N_h : d(a_{n(k(h))}, a_{n(k(j))}) < \varepsilon$

$\vdots$

Angenommen wir erhalten so unendlich viele Folgen, die alle in disjunkten ε-Umgebungen enden. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge aus dem ersten Element der ersten Folge, dem zweiten Elem. der zweiten Folge usw. $\Rightarrow (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine Cauchyteilfolge nach Angabe. $\lightning$ zu: es gibt ∞ viele Folge mit disjunkten ε-Umgebungen.

$x_1 := a_1, \dots, x_{N_j} := a_{N_j}, x_{N_j+1} := a_{n(1)}, \dots, x_{N_j+N_h} := a_{n(k(1))}, \dots \ x_{N_j+\dots+N_z} := a_{n(\dots(z(N_z))}$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{N_j+\dots+N_z} U_\varepsilon(x_i) \supseteq A$

ANA Ü2

7) $F(t) := \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x} dx \, , \, t \geq 0$

$$\frac{e^{-tx}}{x} = \frac{e^{-tx}}{x} - \frac{e^{-\infty x}}{x} = \int_t^\infty e^{-sx} ds$$

$$\Rightarrow F(t) = \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-sx} \sin(x) \, ds \, dx =$$

$$\overset{*}{=} \int_t^\infty \int_0^\infty e^{-sx} \sin(x) \, dx \, ds =$$

$$\overset{\Delta}{=} \int_t^\infty \frac{1}{s^2+1} ds = \tan^{-1}(s) \Big|_t^\infty = \lim_{s \to \infty} \tan^{-1}(s) - \tan^{-1}(t) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(t)$$

$*$ $f(s,x) = e^{-sx} \sin(x)$ ... stetig also auch messbar und integrierbar

$\Rightarrow$ Satz von Fubini anwendbar

$$\Delta \quad A(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \sin(x) \, dx = \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-sx}}{s}\right)' \sin(x) \, dx = -e^{-sx} \frac{\sin(x)}{s} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{e^{-sx}}{s} \cos(x) \, dx$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(-e^{-sx} \frac{\sin(x)}{s}\right) - \left(-e^0 \frac{\sin(0)}{s}\right) + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-sx} \cos(x) \, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{s} \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-sx}}{s}\right)' \cos(x) \, dx = \frac{1}{s} \left(-\frac{e^{-sx}}{s} \cos(x) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty + \frac{e^{-sx}}{s} \sin(x) \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{s} \left(\lim_{x \to \infty} \left(-\frac{e^{-sx}}{s} \cos(x)\right) - \left(-\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{s} A(s) \right) = \frac{1}{s} \left(0 + \frac{1}{s} - \frac{1}{s} A(s)\right) = \frac{1}{s^2}(1 - A(s))$$

$$\Rightarrow A(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{A(s)}{s^2} \Leftrightarrow A(s)\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow A(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)}$$

$$\Rightarrow A(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Probe:		soll:	ist:
	$t=0$:	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
	$t=1$:	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
	$t=34$:	0,0294033	0,029403288
	$t=1024$:	0,000976562	0,000976562189

Sieht gut aus :)

ANA Ü2

8) zz: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(i) zz: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

(ii) zz: $-\int_0^1 x^m \ln(x)\,dx = \frac{1}{(m+1)^2}$, $m \geq 0$

$$-\int_0^1 x^m \ln(x)\,dx = -\int_0^1 \left(\frac{1}{m+1} x^{m+1}\right)' \ln(x)\,dx = -\left(\frac{1}{m+1} x^{m+1} \ln(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{m+1} x^{m+1} \frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$= -\left(0 - \frac{1}{m+1} \int_0^1 x^m\,dx\right) = \frac{1}{m+1} \frac{1}{m+1} x^{m+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{(m+1)^2}$$

(iii) zz: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{4}{3} \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\,dx$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\underbrace{2n-2}_{m}+1)^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} -\int_0^1 x^{2(n-1)} \ln(x)\,dx$$

$$= -\frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^{2(n-1)} \ln(x)\,dx \overset{*}{=} -\frac{4}{3} \int_0^1 \ln(x) \sum_{n=1}^{\infty} x^{2(n-1)}\,dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2(n-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{für } x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{4}{3} \int_0^1 \ln(x) \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

* Vertauschung möglich, da $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^{2(n-1)} \ln(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 x^{2(n-1)} \ln(x)\,dx$

Da $x^{2(n-1)} \ln(x)$ messbar ist (da stetig) gilt weiter $= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} x^{2(n-1)} \ln(x)\,dx$

ANA Ü2

9) (iv) Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial y} \ln(1+ay^2)$ $a \geq 0$

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln(1+ay^2) = \frac{1}{1+ay^2} 2ay = \frac{2ay}{1+ay^2}$$

(v) zz: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{x^2 y}{1+x^2y^2} - \frac{y}{1+y^2} \right) dy\, dx$

aus (iii) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{4}{3} \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 y}{1+x^2y^2} - \frac{y}{1+y^2} dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \frac{2x^2y}{1+x^2y^2} - \frac{1}{2}\frac{2y}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d}{dy} \ln(1+x^2y^2) - \frac{d}{dy} \ln(1+y^2) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d}{dy} \ln(1+x^2y^2) - \ln(1+y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d}{dy} \ln\left(\frac{1+x^2y^2}{1+y^2}\right) dy = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x^2y^2}{1+y^2}\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{y\to\infty} \ln\left(\frac{1+x^2y^2}{1+y^2}\right) - \frac{1}{2}\ln(1) = \frac{1}{2} \ln\left(\lim_{y\to\infty} \frac{1+x^2y^2}{1+y^2}\right) - 0$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{1}{2} \ln\left(\lim_{y\to\infty} \frac{2x^2y}{2y}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\lim_{y\to\infty} x^2\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2) = \ln(x^{2\cdot\frac{1}{2}}) = \ln(x)$$

woraus das zu zeigende folgt.

$$\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{x^2y(1+y^2) - y(1+x^2y^2)}{(1+x^2y^2)(1+y^2)}\right) = \frac{x^2y + x^2y^3 - y - x^2y^3}{(1-x^2)(1+x^2y^2)(1+y^2)}$$

$$= \frac{y\,(x^2-1)}{(1-x^2)(1+x^2y^2)(1+y^2)} = -\frac{y}{(1+x^2y^2)(1+y^2)}$$

(vi) vereinfachen und Satz von Fubini

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{x^2y}{1+x^2y^2} - \frac{y}{1+y^2}\right) dy\, dx$$

$$= -\frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^{\infty} -\frac{y}{(y^2+1)(x^2y^2+1)} dy\, dx$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{y}{(y^2+1)} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2} dx\, dy \qquad \left[u = xy \quad \frac{du}{dx} = y \Rightarrow dx = \frac{1}{y} du \right.$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{y}{(y^2+1)} \int_0^{y} \frac{1}{1+u^2} \frac{1}{y} du\, dy$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{(y^2+1)} \int_0^{y} \frac{1}{1+u^2} du\, dy = \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{y^2+1} \tan^{-1}(u)\Big|_0^y dy = \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{y^2+1} \tan^{-1}(xy)\Big|_0^1 dy$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{y^2+1} \tan^{-1}(y) dy = \underbrace{\frac{4}{3} \int_0^{\infty} (\tan^{-1}(y))' \tan^{-1}(y) dy}_{E} = \frac{4}{3} (\tan^{-1}(y))^2\Big|_0^{\infty} - \frac{4}{3} \int_0^{\infty} (\tan^{-1}(y))' \tan^{-1}(y) dy$$

$$= \frac{4}{3} \lim_{y\to\infty} \tan^{-1}(y)^2 - \frac{4}{3} E = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{4} - E = \frac{\pi^2}{3} - E = E$$

$$\Rightarrow 2E = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow E = \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\square$

ANA Ü2

10) $f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} & , x>0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} e^{-\beta x} & , x>0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ $\quad \alpha, \beta > 0$

ges: $f * g$

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\,d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{(0,\infty)}(x-y)\,e^{-\alpha(x-y)}\,1\!\!1_{(0,\infty)}(y)\,e^{-\beta y}\,d\lambda(y)$$

$$= \int_0^x e^{-\alpha x+\alpha y-\beta y}\,dy = \int_0^x e^{-\alpha x}\,e^{y(\alpha-\beta)}\,dy = e^{-\alpha x}\left(\frac{1}{\alpha-\beta}e^{y(\alpha-\beta)}\right)\Big|_0^x$$

$$= \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha-\beta}\left(e^{x(\alpha-\beta)} - e^{0}\right) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(e^{-\alpha x+\alpha x-\beta x} - e^{-\alpha x}\right) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right)$$