PDGL Ü8

1) $v_t - \Delta_x v = 0$ für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ (1)

$u_t - \Delta_x u - \mathrm{div}_x(ux) = 0$ für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ (2)

a) $u(x,t) := R(t)^n\, v(xR(t), \tau(t))$ $\quad R(t) = e^t \quad \tau(t) = \frac{e^{2t}-1}{2}$ $\quad v(x,t)$... klassische Lsg von (1)

zz: $u$... klassische Lsg von (2)

- $u(x,t) = e^{nt}\, v(xe^t, \frac{1}{2}(e^{2t}-1))$
- $u_t(x,t) = n e^{nt}\, v(xe^t, \frac{1}{2}(e^{2t}-1)) + e^{nt}\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}(xe^t), \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(e^{2t}-1)\right)\right)(x,t) =$

$= ne^{nt} v(xe^t, \frac{1}{2}(e^{2t}-1)) + e^{nt}\nabla_x v(xe^t, \frac{1}{2}(e^{2t}-1))\, xe^t + e^{nt} v_t(xe^t, \frac{1}{2}(e^{2t}-1))\cancel{\tfrac{1}{2}} e^{2t} \cancel{2} =$

$= e^{nt}\left(n v(xe^t, \frac{1}{2}(e^{2t}-1)) + xe^t\, \nabla_x v(xe^t, \frac{1}{2}(e^{2t}-1)) + e^{2t} v_t(xe^t, \frac{1}{2}(e^{2t}-1))\right)$

- $\nabla_x u(x,t) = e^{nt} \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)^T}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{R(t)}_{\text{innere Ableitung}} = e^{nt}\nabla_x v \cdot e^t = e^{t(n+1)} \nabla_x v$
- $\Delta_x u(x,t) = \mathrm{div}_x(\nabla_x u) = \mathrm{div}_x(e^{t(n+1)}\nabla_x v) = e^{t(n+2)}\Delta_x v$
- $\mathrm{div}_x(ux) = \nabla_x u \cdot x + u \cdot \mathrm{div}_x(x) = \nabla_x u \cdot x + u \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} x}_{=n} = \nabla_x u \cdot x + nu$

$= e^{t(n+1)}\nabla_x v \cdot x + n e^{nt} v(xe^t, \frac{1}{2}(e^{2t}-1))$

$\Rightarrow u_t - \Delta_x u - \mathrm{div}_x(ux) =$

$= \cancel{ne^{nt} v} + \cancel{xe^{t(n+1)}\nabla_x v} + e^{t(n+2)} v_t - e^{t(n+2)}\Delta_x v - \cancel{e^{t(n+1)}\nabla_x v\, x} - \cancel{ne^{nt} v} =$

$= e^{t(n+2)}(\underbrace{v_t - \Delta_x v}_{=0}) = 0$

Außerdem $\exists$ alle notwendigen Ableitungen, da vererbt von $v$.

b) ges: $\tilde{u} \not\equiv 0$ mit $0 = \tilde{u}_t = \Delta_x \tilde{u} + \mathrm{div}_x(x\tilde{u})$

$0 = \Delta_x \tilde{u} + \mathrm{div}_x(x\tilde{u}) = \mathrm{div}_x(\nabla_x \tilde{u}) + \mathrm{div}_x(x\tilde{u}) = \mathrm{div}_x(\nabla_x \tilde{u} + x\tilde{u})$

$\Leftarrow \nabla_x \tilde{u} = -x\tilde{u} \qquad \tilde{u}(x,t) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot C$

Probe: $\tilde{u}_t(x,t) = 0 \qquad \nabla_x \tilde{u}(x,t) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_{x_1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{x_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} C e^{-\frac{\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right)^2}{2}}\right)_{i=1,\dots,n} = \left(C e^{-\frac{x^2}{2}}(-\cancel{2}x_i \tfrac{1}{\cancel{2}})\right)_{i=1,\dots,n}$

$= (-\tilde{u}(x,t))$ ✓

□

PDGL Ü8

2) $u_t - u_{xx} = 0 \quad x \in (0,1),\ t > 0 \qquad u(0,t) = f(t) \quad u(1,t) = g(t),\ t > 0 \qquad u(x,0) = u_0(x),\ x \in (0,1)$

ges: Lösungsformel

$v(x,t) = u(x,t) - \varphi(x,t)$ wobei wir $\varphi(x,t)$ wählen wollen

$0 \overset{!}{=} v(0,t) = u(0,t) - \varphi(0,t) = f(t) - \varphi(0,t) \qquad 0 \overset{!}{=} v(1,t) = g(t) - \varphi(1,t)$

$\Rightarrow \varphi(0,t) = f(t) \qquad \varphi(1,t) = g(t)$ für $t > 0$

Ein Wahl von $\varphi$ ist $\varphi(x,t) = x\,g(t) + (1-x) f(t)$.

$\varphi_t(x,t) = x g'(t) + (1-x) f'(t) \qquad \varphi_{xx}(x,t) = 0$

$v_t - v_{xx} = u_t - \varphi_t - u_{xx} + \varphi_{xx} = \underbrace{u_t - u_{xx}}_{=0} - \varphi_t = x g'(t) + (1-x) f'(t) =: \tilde{f}(x,t)$

$v(0,t) = 0 = v(1,t) \qquad v(x,0) = u(x,0) - \varphi(x,0) = u_0(x) - (x g(0) + (1-x) f(0))$

Wir wissen dass $\Phi_k(x) = \sqrt{2}\sin(\pi k x)$ eine ONB mit EW $\lambda_k = (\pi k)^2$ für $k \in \mathbb{N}$, $-\Delta$ von $\Delta x$

Theorem 6.18.

$v(t) = e^{-Lt} v_0 + \int_0^t e^{-L(t-s)} \tilde{f}(s)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \langle v_0, \Phi_k \rangle_{L^2} \Phi_k + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k (t-s)} \langle \tilde{f}(\cdot,s), \Phi_k \rangle_{L^2} \Phi_k \,ds$

- $\langle v_0, \Phi_k \rangle_{L^2} = \int_0^1 [v_0(x) - x g(0) - (1-x) f(0)] \underbrace{\sqrt{2}\sin(\pi k x)}_{= \left(-\frac{\sqrt{2}\cos(\pi k x)}{\pi k}\right)'} dx =$

$= \sqrt{2}\left[\int_0^1 u_0(x) \sin(\pi k x)\,dx - \left([x g(0) - (1-x) f(0)] \frac{-\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^1 + \int_0^1 (g(0) - f(0)) \frac{\cos(\pi k x)}{\pi k}\,dx\right)\right] =$

$= \sqrt{2}\left(\int_0^1 u_0(x) \sin(\pi k x)\,dx - \frac{1}{\pi k}(g(0)(-1)^k + f(0))\right) = \langle u_0, \Phi_k \rangle_{L^2} - \frac{\sqrt{2}}{\pi k}(g(0)(-1)^k + f(0))$

- $\langle \tilde{f}(\cdot,s), \Phi_k \rangle_{L^2} = \int_0^1 (x g'(s) + (1-x) f'(s)) \sqrt{2}\sin(\pi k x)\,dx = \sqrt{2}[x g'(s) - (1-x) f'(s)] \frac{-\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^1 +$

$\int_0^1 (g'(s) - f'(s)) \frac{\cos(\pi k x)}{\pi k}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{k\pi}(g'(s)(-1)^k + f'(s))$

$\Rightarrow v(t) = \sum_{k=1}^{\infty}$ einsetzen.

Dann $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x,t)$

habe keine Lust das nochmal aufzuschreiben

$\square$

PDGL ÜB

3) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ... beschr. Gebiet  u ... klassische Lsg von
$$u_t - \Delta u + \gamma u = 0 \text{ in } \Omega\times(0,\infty)$$
$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\times(0,\infty)$$
$$u = u_0 \text{ auf } \Omega\times\{t=0\}$$
wobei $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ und $\gamma > 0$.

$\lambda_1 > 0$ ... kleinster EW des Laplace Operators $-\Delta$ mit homogenen Dirichletrandbedingungen

(i) zz: $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le C e^{-(\lambda_1+\gamma)t}$ für $t>0$

$u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ also stetig auf einem Kompaktum

$\|u_0\|_{C^0(\Omega)} = \|u_0\|_{L^\infty} < \infty \Rightarrow u_0 \in L^\infty(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$, da endl. Maßraum

Theorem 6.13. $u_0 \in L^2(\Omega) \Rightarrow \exists$ vollständiges ONS $(v_n)$ von $L^2(\Omega)$ $\exists (\lambda_n) \nearrow$ Folge positiven Zahlen mit $\lambda_n^L \xrightarrow{n\to\infty} \infty$: $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k^L t}(u_0, v_k)_{L^2} v_k$ eindeutige Lsg von

$u_t - \operatorname{div}(A\nabla u) + cu = 0$ in $\Omega\times(0,\infty)$  $u(\cdot,0) = u_0$ in $\Omega$  $u=0$ auf $\partial\Omega\times(0,\infty)$

Ferner gilt $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \le e^{-\lambda_1^L t}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ (Apriori Abschätzung)

$\lambda_i^L$ ... EW von $L(u) = -\Delta u + \gamma u \Rightarrow \lambda_i^L = \lambda_i + \gamma$, wenn $\lambda_i$ ... EW von $-\Delta$

$\gamma > 0 \Rightarrow \lambda_1 + \gamma = \min_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i^L$

Mit Apriori Abschätzung $\Rightarrow \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le e^{-\lambda_1^L t}\underbrace{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}}_{=:C} = C e^{-(\lambda_1+\gamma)t}$

(ii) zz: $|u(x,t)| \le C e^{-\gamma t}$ für $(x,t) \in \Omega\times(0,\infty)$

$|u(x,t)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\lambda_k+\gamma)t}(u_0,v_k)_{L^2} v_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\lambda_k+\gamma)t}\left|\langle u_0, v_k\rangle_{L^2} v_k\right|$

$e^{-\lambda_1 t} \ge e^{-\lambda_k t}$ $k \ge 1, t>0$  1 und 2 Norm äquivalent

$\le e^{-\gamma t} e^{-\lambda_1 t}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\langle u_0,v_k\rangle_{L^2} v_k\right| \le e^{-\gamma t}e^{-\lambda_1 t}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\langle u_0,v_k\rangle_{L^2} v_k\right|^2\right)^{1/2} =$

Parseval $= e^{-\gamma t}\underbrace{e^{-\lambda_1 t}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}}_{=:C} = C e^{-\gamma t}$

□

Parseval $(v_n)$ vollständiges ONS in $H$  $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ Folge

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_n \to v \in H \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ ... konvergiert

In dem Fall gilt $a_k = (v, v_k)$ und die Parseval Gleichung $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$

$|u(x,t)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\lambda_k+\gamma)t}\langle u_0,v_k\rangle_{L^2} v_k\right| \overset{?}{\le} e^{-\gamma t}e^{-\lambda_1}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\langle u_0,v_k\rangle_{L^2} v_k\right| = e^{-\gamma t}e^{-\lambda_1}|u_0(x)| \le e^{-\gamma t}e^{-\lambda_1}\|u_0\|_{C(\Omega)}$

PDGL Ü8

4) $i\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ $\quad u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ wobei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(i) $u$ ... Lsg von $\uparrow$ mit $u(t), u_t(t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\forall t \geq 0$

ges: Darstellung mittels Fourier Transform unabhängig von $\hat{f}$

$$0 = \hat{0}(k) = \widehat{-i u_t - \Delta u}(k) = -i\,\hat{u}_t(k) + |k|^2 \hat{u}(k) \qquad \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)$$

$$\Rightarrow \hat{u}_t(k,t) = -i|k|^2 \hat{u}(k) \qquad \Rightarrow \hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\, e^{-i|k|^2 t}$$

Inversionsformel:

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{-i|k|^2 t} \hat{f}(k)}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)} e^{ik\cdot x}\, dk \qquad \text{Leider } e^{-i|k|^2 t} \notin L^1(\mathbb{R}^n) \text{ also rechnen wir}$$

$$\lim_{\delta \to 0^+} F^{-1}\Big[\underbrace{\hat{f}\, e^{-(\delta+i)|k|^2 t}}_{\in L^1}\Big](x) = \lim_{\delta \to 0^+} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k)\, e^{-(\delta+i)|k|^2 t} e^{ik\cdot x}\, dk = (*)$$

$$|\hat{f}(k)\, e^{-(\delta+i)|k|^2 t} e^{ikx}| = |\hat{f}(k)|\, \underbrace{|e^{-\delta|k|^2 t}|}_{\leq 1, \text{ da } \delta > 0,\ |k|^2 \geq 0,\ t > 0}\, \underbrace{|e^{-i|k|^2 t}|}_{=1}\, \underbrace{|e^{ikx}|}_{=1} \leq \underbrace{|\hat{f}(k)|}_{\in L^1}$$

Mit dominierter Konvergenz

$$(*) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) \lim_{\delta \to 0^+} e^{-(\delta+i)|k|^2 t} e^{ikx}\, dk = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k)\, e^{-i|k|^2 t} e^{ikx}\, dk = u(x,t)$$

Mit $w_\delta := F^{-1}\Big[\underbrace{e^{-(\delta+i)|k|^2 t}}_{\in L^1}\Big]$ folgt

$$u(x,t) = \lim_{\delta \to 0^+} F^{-1}[\hat{f}\, \hat{w}_\delta](x) = \lim_{\delta \to 0^+} F^{-1}[\widehat{f * w_\delta}](x) \quad, \text{da } f, w_\delta, \hat{f}, \hat{w}_\delta \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

zeigen wir gleich

$$= \lim_{\delta \to 0} f * w_\delta(x)$$

$y = \sqrt{2t(\delta+i)}\, k$

$\frac{dy}{dk} = \sqrt{2t(\delta+i)}$

$$w_\delta(x,t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\delta+i)|k|^2 t} e^{ikx}\, dk \overset{\vdots}{=} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{2}} e^{iy\cdot x \frac{1}{\sqrt{2t(\delta+i)}}} \frac{1}{(2t(\delta+i))^{n/2}}\, dy =$$

$$= (2\pi)^{-n} (2t(\delta+i))^{-\frac{n}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{2}} e^{-iy\cdot \frac{-x}{\sqrt{2t(\delta+i)}}}\, dy}_{= F^{-1}[e^{-\frac{|x|^2}{2}}](y)} =$$

$$= \left(2\pi \sqrt{2\pi} \sqrt{2t(\delta+i)}\right)^{-n} e^{-\frac{|k|^2}{2}}\Big|_{k = \frac{x}{\sqrt{2t(\delta+i)}}} = \left(\sqrt{4\pi(\delta+i)t}\right)^{-n} e^{-\frac{|x|^2}{4t(\delta+i)}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\lim_{\delta \to 0^+} w_\delta(x,t) = \left(\sqrt{4\pi i t}\right)^{-n} e^{-\frac{|x|^2}{4ti}} = \left(-2\sqrt{\pi t}\right)^{-n} e^{\frac{i|x|^2}{4t}}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = f * \left(-2\sqrt{\pi t}\right)^{-n} e^{\frac{i|x|^2}{4t}} = \frac{1}{(-2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-\frac{i|x-y|^2}{4t}}\, dy$$

ii) z.z.: $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ für $t > 0$

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \underset{\text{isometr. auf } L^2}{=} \|F[u]\|_{L^2} = \|F[f] \cdot e^{-i|\cdot|^2 t}\|_{L^2} \underset{|e^{i\cdot}| = 1}{=} \|F[f]\|_{L^2} \underset{\text{isometr. auf } L^2}{=} \|f\|_{L^2}$$

$\square$