MAS Ü7

1.) $$F(x) = \begin{cases} x & \text{für } x<0 \\ 1+x^2 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 3x & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 9 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

a) zz: F ist eine Verteilungsfunktion

Satz 3.1. besagt F... Verteilungsfunktion $\Leftrightarrow$ f... monoton wachsend $\wedge$ f... rechtsstetig

offensichtlich ist x auf $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup (9, +\infty)$ monoton wachsend

$$\lim_{x \to 0^-} F(x) = 0 \leq 1 = \lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0)$$

$$\lim_{x \to 1^-} F(x) = 2 \leq 3 = \lim_{x \to 1^+} F(x) = F(1)$$

$$\lim_{x \to 2^-} F(x) = 6 \leq 9 = \lim_{x \to 2^+} F(x) = F(2)$$ $\Rightarrow$ F auf $\mathbb{R}$ monoton $\nearrow$ und rechtsstetig

b) ges:

$$\mu_F(]0,2]) = \lim_{x \to 0^+} \lim_{y \to 2^+} F(y) - F(x) = 9 - 1 = 8$$
$$\mu_F(]0,2[) = \lim_{x \to 0^+} \lim_{y \to 2^-} F(y) - F(x) = 6 - 1 = 5$$
$$\mu_F([0,2[) = \lim_{x \to 0^-} \lim_{y \to 2^-} F(y) - F(x) = 6 - 0 = 6$$
$$\mu_F([0,2]) = \lim_{x \to 0^-} \lim_{y \to 2^+} F(y) - F(x) = 9 - 0 = 9$$

$$\mu_F(]-1{,}2; 0{,}7[) = F(0{,}7) - F(-1{,}2) = 1 + (0{,}7)^2 + 1{,}2 = 2{,}69$$
$$\mu_F(\mathbb{Q}) = \sum_{x \in \mathbb{Q}} \lim_{y \to x^+} F(y) - \lim_{y \to x^-} F(y) = \lim_{y \to 0^+} F(y) - \lim_{y \to 0^-} F(y) + \lim_{y \to 1^+} F(y) - \lim_{y \to 1^-} F(y)$$
$$+ \lim_{y \to 2^+} F(y) - \lim_{y \to 2^-} F(y) = 1 - 0 + 3 - 2 + 9 - 6 = 5$$

<u>MAS Ü7</u>

2.) F ... eindimensionale Verteilungsfunktion

zz: F ... stetig $\Leftrightarrow \mu_F$ ... stetig

$\Leftarrow$ μ_F heißt stetig $\Leftrightarrow \forall x \in \Omega : \mu_F(\{x\}) = 0$

$$\mu_F(\{x\}) = F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y)$$

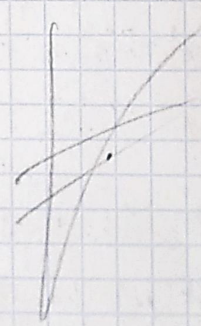
$\Rightarrow \lim_{y \to x^-} F(y) = F(x)$ also F bei x stetig, da x bel. $\Rightarrow$ überall stetig

(rechtsseitige Stetigkeit schon aus Definition)

$\Rightarrow$

$$\lim_{y \to x^-} F(y) = F(x) = \lim_{y \to x^+} F(y)$$

$\mu_F(\{x\}) = F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y) = 0 \quad \forall x \in \Omega$ $\Rightarrow \mu_F$ ist stetig



MAS Ü7

3.) $F(x) = \begin{cases} x & x<0 \\ 1+x^2 & 0 \le x < 1 \\ 3x & 1 \le x < 2 \\ 9 & x \geq 2 \end{cases}$

ges: F_s, F_d mit F_s... stetig, F_d... diskret und $F = F_s + F_d$

$F_s(x) = \begin{cases} x & x<0 \\ x^2 & 0 \le x < 1 \\ 3x-2 & 1 \le x < 2 \\ 4 & x \geq 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0-} F_s(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0+} F_s(x)$ $\lim\limits_{x \to 1-} F_s(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 1+} F_s(x)$

$\lim\limits_{x \to 2-} F_s(x) = 4 = \lim\limits_{x \to 2+} F_s(x)$ $\Rightarrow F_s$ ist stetig

$F_d(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & 0 \le x < 1 \\ 2 & 1 \le x < 2 \\ 5 & x \geq 2 \end{cases}$

$\mu_F(0) = 1$ $\mu_F(1) = 1$ $\mu_F(2) = 3$

offensichtlich ist F_d diskret und $F_s + F_d(x) = \begin{cases} x & x<0 \\ x^2+1 & 0 \le x < 1 \\ 3x & 1 \le x < 2 \\ 9 & x \geq 2 \end{cases}$

MAS Ü7

4.) sigmaendlich $\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{B}$: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} \wedge \forall n\in\mathbb{N}: \mu(A_n) < \infty$

von oben regulär $\forall A \in \mathcal{B}: \mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{... offen}\}$

ges: sigmaendliches, aber nicht von oben reguläres Maß

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} [\tfrac{1}{n} \in A]$$

$\forall n\in\mathbb{N}: A_n = (-\infty, 0] \cup (\tfrac{1}{n}, 1) \cup [1, +\infty)$ $\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$

$$\mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} [\tfrac{1}{k} \in (-\infty, 0]] + \sum_{k=1}^{\infty} [\tfrac{1}{k} \in (\tfrac{1}{n}, 1)] + \sum_{k=1}^{\infty} [\tfrac{1}{k} \in [1, +\infty)]$$

$$= 0 + \sum_{k=2}^{n-1} 1 + 1 = n-2 < \infty$$

$\Rightarrow$ sigmaendlich

$\inf\{\mu(U) : \{0\} \subseteq U, U \text{... offen}\} = \infty$, da $\forall U \supseteq \{0\}: 0+\varepsilon \in U$ da offen

$\mu(\{0\}) = 0$ $\quad\Rightarrow$ nicht von oben regulär

---

ges: nicht sigmaendliches, aber von oben reguläres Maß

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } A = \emptyset \\ +\infty & \text{, sonst} \end{cases}$$

Für $A = \emptyset$ $\inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{... offen}\} = 0$, da $\emptyset \subseteq \emptyset$

$\mu(\emptyset) = 0$

Für $A \neq \emptyset$ $\inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{.. offen}\} = \infty$ $\quad \mu(A) = \infty$

$\Rightarrow$ von oben regulär

$\nexists (A_n)_{n\in\mathbb{N}}: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} \wedge \forall n\in\mathbb{N}: \mu(A_n) < \infty$ klar

$\Rightarrow$ nicht sigmaendlich

MAS Ü7

5.) $F_1, F_2, \dots$ eindimensionale Verteilungsfunktionen

zz: $F(x_1, x_2) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)$ ist eine zweidimensionale Verteilungsfunktion

[Satz 3.3. besagt falls F rechtsstetig ist und $\forall a, b \in \mathbb{R}^n, a \leq b : \Delta(a,b)F \geq 0$

$\Rightarrow$ F ist eine Verteilungsfunktion eines Lebesgue-Stieltjes Maßes

- rechtsstetig

Sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ bel.

$F(a,b) = F_1(a) \cdot F_2(b)$

$\lim\limits_{\alpha \to a^+} F(\alpha, b) = \lim\limits_{\alpha \to a+} F_1(\alpha) \cdot F_2(b) = F_1(a) \cdot F_2(b)$ da F_1 rechtsstetig

Für $\lim\limits_{\beta \to b+}$ genauso.

- $\forall \underset{a}{(a_1, a_2)}, \underset{b}{(b_1, b_2)} \in \mathbb{R}^2$ mit $a_1 \leq b_1$ und $a_2 \leq b_2$: $\Delta(a,b)F \geq 0$

$\Delta(a,b)F = \mu_F(]a,b]) = F(b) - F(a) = F_1(b_1) F_2(b_2) - F_1(a_1) F_2(a_2)$

$F_1(a_1) \leq F_1(b_1)$ und $F_2(a_2) \leq F_2(b_2)$ da F_1, F_2 monoton wachsend

$\Rightarrow F_1(b_1) \cdot F_2(b_2) \geq F_1(a_1) \cdot F_2(a_2)$

$\Rightarrow \Delta(a,b)F \geq 0$

$\Rightarrow$ F ist eine Verteilungsfunktion

MAS Ü7

6.) $F(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$

zz: F ist eine 2-D Verteilungsfunktion

[Satz 3.3 : F... Verteilungsfunktion $\Leftrightarrow$ F... rechtsstetig $\wedge\ \forall a, b \in \mathbb{R}^2, a \leq b \Rightarrow \Delta(a,b)F \geq 0$

· rechtsstetig

Sei $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ bel.

$\lim_{y_1 \to x_1} F(y_1, x_2) = \lim_{y_1 \to x_1} \min(y_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$

für $\lim_{y_2 \to x_2}$ genauso

· $\forall \underbrace{(a_1, a_2)}_{a}, \underbrace{(b_1, b_2)}_{b} \in \mathbb{R}^2, a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2 : \Delta(a,b)F \geq 0$

$\Delta(a,b)F = \mu(]a,b]) = F(b) - F(a) = \min(b_1, b_2) - \min(a_1, a_2)$

1. Fall $b_1 \leq b_2$

$\min(a_1, a_2) \leq a_1 \leq b_1 = \min(b_1, b_2)$

2. Fall $b_2 \leq b_1$

$\min(a_1, a_2) \leq a_2 \leq b_2 = \min(b_1, b_2)$

$\Rightarrow \min(b_1, b_2) - \min(a_1, a_2) \geq 0$

also $\Delta(a,b)F \geq 0$

$\Rightarrow$ F ist eine Verteilungsfunktion

ges: $\mu_F(]\binom{0}{0}, \binom{1}{1}]) = F(1,1) - F(0,1) - F(1,0) + F(0,0) = 1$

ges: $\mu_F(\{(x,x) : 0 < x \leq 1\})$

$\Bigg($ $G = F|_{\{(x,x):x \in \mathbb{R}\}}$ $\quad G(x) = x$ $\quad \mu_F|_{\{(x,x):x \in \mathbb{R}\}} = \mu_G$

$\mu_G(]0,1]) = G(1) - G(0) = 1$

$\Rightarrow \mu_F(\{(x,x) : 0 < x \leq 1\}) = 1$ $\Bigg)$?

$\mu_F(\{(x,x) : 0 < x \leq 1\}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \mu_F(]\binom{\frac{k-1}{2^n}}{\frac{k-1}{2^n}}, \binom{\frac{k}{2^n}}{\frac{k}{2^n}}]) =$

$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2^n} F(\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n}) - F(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}) - F(\frac{k}{2^n}, \frac{k-1}{2^n}) + F(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k-1}{2^n})$

$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n} - \cancel{\frac{k-1}{2^n}} + \cancel{\frac{k-1}{2^n}} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^n} = 1$