LINAG Ü6

2.4.2 K... Körper

a) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ... Vektoren aus $K^{2\times 1}$

zz: Familie (x,y) l.u. $\Longleftrightarrow$ $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$

1) (x,y) l.u. $\Rightarrow$ $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Rightarrow (x,y)$ l.a.

Wähle $a = y_2$ und $b = -x_2$. Dann ist

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 y_2 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 y_1 \\ -x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ x_2 y_2 - x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (x,y)$ ist l.a.

2) $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0 \Rightarrow (x,y)$ l.u.

$\Longleftrightarrow (x,y)$ l.a. $\Rightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a x_1 + b \cdot y_1 \\ a x_2 + b y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a x_1 + b y_1 &= 0 \\ a x_2 + b y_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$a x_2 + b y_2 = 0 \Longleftrightarrow a x_2 = -b y_2 \Longleftrightarrow a = -\frac{b y_2}{x_2}$$

$$a x_1 + b y_1 = 0 \Longleftrightarrow -\frac{b y_2}{x_2} \cdot x_1 + b y_1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow b \cdot \left(y_1 - \frac{y_2}{x_2} \cdot x_1 \right) = 0 \Longleftrightarrow y_1 - \frac{y_2}{x_2} \cdot x_1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{y_2 \cdot x_1}{x_2} = -y_1 \Longleftrightarrow -y_2 \cdot x_1 = -x_2 \cdot y_1$$

$$\Longleftrightarrow 0 = -x_2 \cdot y_1 + x_1 y_2$$

$\square$

LINAG Ü6

2.4.2 b) K ... Körper $\quad K^{n\times 1}$ ... VR über K $\quad n \geq 2$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

zz: (x,y) l.u. $\Leftrightarrow \exists\, i,j \in \{1,2,\dots,n\} : i \neq j \wedge x_i y_j - x_j y_i \neq 0$

1.) (x,y) l.u $\Rightarrow \exists\, i,j \in \{1,2,\dots,n\} : i \neq j \wedge x_i y_j - x_j y_i \neq 0$

$\Leftrightarrow (\forall i,j \in \{1,2,\dots,n\} : i = j \vee x_i y_j - x_j y_i = 0) \Rightarrow (x,y)$ ist l.a.

[wenn $i=j$, dann gilt $x_i y_j - x_j y_i = x_i y_i - x_i y_i = 0$
Also gilt $\forall i,j \in \{1,2,\dots,n\} : x_i y_j - x_j y_i = 0$]

Wähle nun $a = y_1$ und $b = -x_1$, dann gilt

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (-x_1) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cdot x_1 \\ y_1 \cdot x_2 \\ \vdots \\ y_1 \cdot x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \cdot y_1 \\ -x_1 \cdot y_2 \\ \vdots \\ -x_1 \cdot y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 \\ \vdots \\ x_n \cdot y_1 - x_1 \cdot y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$, da laut Vorbedingung gilt

$\forall i \in \{1,2,\dots,n\} : x_i \cdot y_1 - x_1 \cdot y_i = 0$

2.) $(\exists\, i,j \in \{1,2,\dots,n\} : i \neq j \wedge x_i y_j - x_j y_i \neq 0) \Rightarrow (x,y)$ l.u.

$\Leftrightarrow (x,y)$ l.a $\Rightarrow \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\} : i = j \vee x_i y_j - x_j y_i = 0$

Sei $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ bel.

1. Fall $i = j$: trivial

2. Fall $i \neq j$: Da (x,y) l.a ist existiert eine nicht triviale LK, sodass

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also gilt $a \cdot x_i + b \cdot y_i = 0$ und $a \cdot x_j + b \cdot y_j = 0$. Aus a) wissen wir, das nun gilt: $0 = -x_j y_i + x_i y_j$ $\square$

LINAG Ü6

2.4.10 $\quad b \in \mathbb{R}^\times \qquad \forall x \in \mathbb{R}: f''(x) + b^2 \cdot f(x) = 0$

a) $g_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \sin(b \cdot x) \qquad g_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \cos(b \cdot x)$

$\sin'(b \cdot x) = b \cdot \cos(b \cdot x) \qquad \cos'(b \cdot x) = -b \cdot \sin(b \cdot x)$

$\sin''(b \cdot x) = -b^2 \cdot \sin(b \cdot x) \qquad \cos''(b \cdot x) = -b^2 \cdot \cos(b \cdot x)$

$\sin''(b \cdot x) + b^2 \cdot \sin(b \cdot x) \qquad \cos''(b \cdot x) + b^2 \cdot \cos(b \cdot x) =$

$= -b^2 \cdot \sin(b \cdot x) + b^2 \cdot \sin(b \cdot x) = 0 \qquad = -b^2 \cdot \cos(b \cdot x) + b^2 \cdot \cos(b \cdot x) = 0$

ZZ: g_1, g_2 sind l.u.

$a \cdot g_1 + c \cdot g_2 = a \cdot \sin(b \cdot x) + c \cdot \cos(b \cdot x)$

Indirekt angenommen g_1, g_2 l.a $\qquad$ Bei $x = 0$ folgt

$0 = a \cdot \sin(b \cdot 0) + c \cdot \cos(b \cdot 0) = a \cdot \sin(0) + c \cdot \cos(0)$

$= a \cdot 0 + c \cdot 1 = c$

Bei $x = \frac{\pi}{2b}$ folgt:

$0 = a \cdot \sin\left(b \cdot \frac{\pi}{2b}\right) + c \cdot \cos\left(b \cdot \frac{\pi}{2b}\right) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= a \cdot 1 + c \cdot 0 = a$

$\lightning$, da nur die triviale LK für den 0_V existiert.

$\Rightarrow g_1, g_2$ sind l.u.

b) $\{g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto r \cdot \sin(b \cdot x) \text{ mit } r \in \mathbb{R}\}$

$g''(x) + b^2 \cdot g(x) = -b^2 \cdot r \cdot \sin(b \cdot x) + b^2 \cdot r \cdot \sin(b \cdot x) = 0$

LINAG Ü6

2.5.1 K … Körper $f: K \to K$ Polynomfunktionen

a) zz: Polynomfunktionen bilden einen UR T von K^K

- $0_V \in T$ $\quad f(x) = 0 \cdot x^0 = 0$

- $f, g \in T \Rightarrow f+g \in T$

Seien f, g beliebige Polynomfunktion.

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_0 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

$$g(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_0 \quad \text{mit } m \in \mathbb{N}$$

o.B.d.A $n \leq m$

$$(f+g)(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + (a_n + b_n) \cdot x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) \cdot x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$$

- $k \in K \quad f \in T \Rightarrow k \cdot f \in T$

Sei $k \in K$ bel. Sei $f \in T$ bel.

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_0 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

$$(k \cdot f)(x) = k \cdot a_n \cdot x^n + k \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + k \cdot a_0$$

b) ges: Erzeugendensystem von T, das von T verschieden ist

$$\{1 \cdot x^n : n \in \mathbb{N}\}$$

c) $K = \mathbb{Z}_2$ ges Basis $\quad \forall n \in \mathbb{N}\ f: K \to K,\ x \mapsto x^n$ als LK der Basis

Da $x^1 = x^2 = x^3 = \ldots$ ist die Basis $\{f_0(x) = x^0, f_1(x) = x^1\}$

$$f(x) = x^n = \begin{cases} f_0, & \text{falls } n = 0 \\ f_1, & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

d) $K = \mathbb{Z}_3$ ges Basis $\quad \forall n \in \mathbb{N}\ f: K \to K,\ x \mapsto x^n$ als LK der Basis

Da $x^1 = x^3 = x^5 = \ldots$ und $x^2 = x^4 = x^6 = \ldots$ ist die Basis $\{f_0(x) = x^0, f_1(x) = x^1, f_2(x) = x^2\}$

$$f(x) = x^n = \begin{cases} f_0, & \text{falls } n = 0 \\ f_1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ f_2, & \text{falls } n > 0 \text{ und gerade} \end{cases}$$

LINAG Ü6

2.5.3 $\quad B = (b_1, b_2, b_3)$ ... Basis eines VR V/K

- $(b_1 + b_2, b_2 + b_3, b_3 + b_1)$ ist l.u., wenn $char(K) \neq 2$

$$k_1 \cdot (b_1 + b_2) + k_2 \cdot (b_2 + b_3) + k_3 \cdot (b_3 + b_1)$$
$$= k_1 \cdot b_1 + k_1 \cdot b_2 + k_2 \cdot b_2 + k_2 \cdot b_3 + k_3 \cdot b_3 + k_3 \cdot b_1$$
$$= (k_1 + k_3) \cdot b_1 + (k_1 + k_2) \cdot b_2 + (k_2 + k_3) \cdot b_3$$, da (b_1, b_2, b_3) l.u ist folgt

$$k_1 + k_3 = 0 \wedge k_1 + k_2 = 0 \wedge k_2 + k_3 = 0$$

wenn $char(K) = 2$ ist die Menge l.a, da für $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ die obige Zeile gilt

wenn $char(K) \neq 2$ ist die Menge l.u, da $k_1 = -k_3 \wedge k_1 = -k_2$

$\Rightarrow k_2 = k_3$ aber aus $k_2 + k_3 = 0$ folgt auch $k_2 = -k_3 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$

$\Rightarrow$ die Menge ist l.u.

- $(b_1 - b_2, b_2 - b_3, b_3 - b_1)$ ist l.a., da

$$1 \cdot (b_1 - b_2) + 1 \cdot (b_2 - b_3) + 1(b_3 - b_1)$$
$$= \cancel{b_1} - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \cancel{b_3} - \cancel{b_1} = 0_V$$

- $(b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3)$

$$k_1 \cdot b_1 + k_2 \cdot (b_1 + b_2) + k_3 \cdot (b_1 + b_2 + b_3)$$
$$= k_1 \cdot b_1 + k_2 \cdot b_1 + k_2 \cdot b_2 + k_3 \cdot b_1 + k_3 \cdot b_2 + k_3 \cdot b_3$$
$$= (k_1 + k_2 + k_3) \cdot b_1 + (k_2 + k_3) \cdot b_2 + k_3 \cdot b_3$$, da (b_1, b_2, b_3) eine Basis ist

$$\Rightarrow (k_1 + k_2 + k_3) = 0 \wedge (k_2 + k_3) = 0 \wedge k_3 = 0$$
$$\Rightarrow k_1 = 0 \wedge k_2 = 0 \wedge k_3 = 0$$

$\Rightarrow$ die betrachtete Menge ist l.u.

LINAG Ü6

2.7.1. a) $K = \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & -4\cdot I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & -5 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & \cdot\frac{1}{5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & -I & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & -I & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \cdot\frac{1}{2} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & -II & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -3\cdot II & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & +II \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -IV & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \cdot\frac{1}{2} & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} IV & I & II & III \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{Basis} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

LINAG Ü6

2.6.3 $K = GF(q)$ $V \dots K^n$ mit $n < \infty$

a) zz: V besitzt genau $(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1})$ Basen

(Reihenfolge der Basisvektoren ist relevant)

Wissen: Jede Basis besitzt n Vektoren.

Anzahl der Vektoren in V ist q^n

Jede l.u. Menge kann zu einer Basis erweitert werden.

Bew: Um eine Basis von V zu bilden können wir mit der leeren (trivialerweise l.u.) Menge beginnen und n Vektoren so zu der Menge hinzufügen, dass der neue Vektor jeweils noch nicht in der Hülle der Menge enthalten ist.

Da man mit k linear unabhängigen Vektoren durch LK jeweils q^k Vektoren bilden kann hat man bei jeder Wahl eines neuen l.u. Vektor $q^n - q^k$ Möglichkeiten, wenn die Menge schon k Elemente enthält.

$M = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ $\sum_{i=1}^{k} x_i v_i = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k$

q Möglichkeiten

$\Rightarrow q^k$ verschiedene LK, also

q^k verschiedene Vektoren (da M l.u.)

Anfang: • $M = \emptyset$ $[M] = \{0_V\}$ $|[M]| = 1$, d.h. $q^n - 1$ Möglichkeiten den nächsten Vektor v_1 zu wählen. $M = M \cup \{v_1\}$

• $M = \{v_1\}$ $|[M]| = q$, d.h. $q^n - q$ Möglichkeiten für v_2. $M = M \cup \{v_2\}$

• $M = \{v_1, v_2\}$ $|[M]| = q^2$, d.h. $q^n - q^2$ Möglichkeiten für v_3. $M = M \cup \{v_3\}$

⋮

• $M = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ $|[M]| = q^{n-1}$, d.h. $q^n - q^{n-1}$ Möglichkeiten für v_n. $M = M \cup \{v_n\}$

• $M = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ $|[M]| = q^n$ und $[M] = V$, d.h. M ist Basis

$(q^n-1)\cdot(q^n-q)\cdot(q^n-q^2)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{n-1})$ Möglichkeiten insgesamt

LINAG Ü6

2.6.3 b) $\frac{(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{n-1})}{n!}$

da es für jede Basis $n!$ Möglichkeiten gibt die Basisvektoren anzuordnen.

$\not\forall$ 2.6.4 b) V... Vektorraum $I=\{0,1,\dots,r\}\subset\mathbb{N}$ mit $r\geq 0$ oder $I=\mathbb{N}$

Eine Familie $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Unterräumen $U_i\subset V$ heißt aufsteigende Unterraumkette in V, falls $U_{i-1}\subset U_i$ für alle $i\in I\setminus\{0\}$

zz: $\dim V = n < \infty \iff (U_0, U_1, \dots, U_n)$ in V, aber nicht $(U_0, U_1, \dots, U_{n+1})$ in V existiert.

$\not\forall$