MAS Ü4

1) $X > 0$ ... SG $\quad X \sim \gamma(\alpha, \beta)$ ... Gamma-verteilt mit $\alpha > 0, \beta > 0 \iff$

Dichte $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} e^{-\beta x} \quad x > 0$

$X \sim \gamma(\alpha_1, \beta)$, $Y \sim \gamma(\alpha_2, \beta)$ $\quad X, Y$ ... unabhängig $\quad$ ges: Dichte von $X+Y$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(z-t \mid Y=t)\, f_Y(t)\, d\lambda(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{(0,\infty)}(z-t) \frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} (z-t)^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta(z-t)}\, 1\!\!1_{(0,\infty)}(t) \frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} t^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta t}\, d\lambda(t)$$

$$= \int_{(0,z)} \frac{\beta^{(\alpha_1 + \alpha_2)}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} (z-t)^{\alpha_1 - 1} t^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta(z-t+t)}\, d\lambda(t)$$

$$= \frac{\beta^{(\alpha_1+\alpha_2)}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta z} \int_{(0,z)} (z-t)^{\alpha_1 - 1} t^{\alpha_2 - 1}\, d\lambda(t)$$

$$\overset{*}{=} \frac{\beta^{(\alpha_1+\alpha_2)}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta z} z^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$= \frac{\beta^{(\alpha_1+\alpha_2)}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} z^{(\alpha_1+\alpha_2)-1} e^{-\beta z} \quad \text{für } z > 0$$

0 sonst $\quad$ also wieder Gamma $\gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$

$*$ $\int_{(0,z)} (z-t)^{\alpha_1 - 1} t^{\alpha_2 - 1}\, d\lambda(t) \qquad \left[\; t = zu \quad u = \frac{t}{z} \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{z} \quad dt = z\, du \right.$

$$= \int_{(0,1)} (z - zu)^{\alpha_1 - 1} (zu)^{\alpha_2 - 1} z\, d\lambda(u) = z^{\alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 1 + 1} \int_{(0,1)} (1-u)^{\alpha_1 - 1} u^{\alpha_2 - 1}\, d\lambda(u)$$

$$= z^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} B(\alpha_1, \alpha_2) = z^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

MAS Ü4

3) f ... stetige Lebesgue-Dichte mit kompaktem Träger

p ... Polynom vom Grad k

zz: $h := f * p$ ist integrierbar und als Polynom darstellbar

Sei $p(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$.

$$h(x) = f * p(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x-y) f(y) \, d\lambda(y) = \int_{\operatorname{supp} f} \sum_{n=0}^{k} a_n (x-y)^n f(y) \, d\lambda(y)$$

$$= \int_{\operatorname{supp} f} f(y) \sum_{n=0}^{k} a_n \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l (-y)^{n-l} \, d\lambda(y) = \sum_{n=0}^{k} a_n \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l (-1)^{n-l} \int_{\operatorname{supp} f} f(y) y^{n-l} \, d\lambda(y)$$

$$= \sum_{n=0}^{k} \sum_{l=0}^{n} \left(a_n \binom{n}{l} (-1)^{n-l} \int_{\operatorname{supp} f} f(y) y^{n-l} \, d\lambda(y) \right) x^l$$ ist ein Polynom

---

oder auch $\frac{d}{dx^n} f * p(x) = \frac{d}{dx^n} \int_{\operatorname{supp} f} p(x-y) f(y) \, d\lambda(y) = \int_{\operatorname{supp} f} f(y) \frac{d}{dx^n} p(x-y) \, d\lambda(y)$

für $n \leq k$: $\frac{d}{dx^n} p(x-y) \not\equiv 0$ und für $n > k$: $\frac{d}{dx^n} p(x-y) \equiv 0$ $\Rightarrow$ Grad von h ist k

---

$\mu(a,b] := \int_a^b f(x) \, dx$ für $a \leq b$ ist definiert, da f stetig Lebesgue Dichte mit kompaktem Träger

$\Rightarrow \int h \, d\mu = \int h f \, d\lambda = \int_{\operatorname{supp} f} h f \, d\lambda$ da h, f auf $\operatorname{supp} f$ integrierbar sind ist also auch h integrierbar.

$\square$

MAS Ü4

4) a) ν... signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{S})$

$$zz: |\nu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\nu(A_i)| : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \wedge A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j \right\}$$

Nach Satz 2.52 (Jordanischer Zerlegungssatz) $\exists \mu_1, \mu_2 : \nu = \mu_1 - \mu_2$; μ_1, μ_2 singuläre Maße

$|\nu| = \mu_1 + \mu_2$ nach Definition der Totalvariation.

$\Rightarrow |\nu|(A) = (\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$

$\geq$ Für A_i mit $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \wedge A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |\nu(A_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\nu|(A_i) = |\nu| \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \leq |\nu|(A)$$

$\leq$ Sei M, sodass $\mu_1(M) = 0 = \mu_2(M^c)$. Sei $A_1 = A \cap M$ und $A_2 = A \cap M^c$.

$$\sup\{\ldots\} \geq |\nu(A_1)| + |\nu(A_2)| = |\underbrace{\mu_1(A \cap M)}_{=0} - \underbrace{\mu_2(A \cap M)}_{=\mu_2(A)}| + |\underbrace{\mu_1(A \cap M^c)}_{=\mu_1(A)} - \underbrace{\mu_2(A \cap M^c)}_{=0}|$$

$$= |\mu_2(A)| + |\mu_1(A)| = \mu_1(A) + \mu_2(A) = |\nu|(A)$$

$\Rightarrow |\nu|(A) = \sup\{\ldots\}$

b) μ, ν ... signierte Maße , $\mu + \nu$ ... signiertes Maß

zz: $|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|$

$$|\mu + \nu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |(\mu + \nu)(A_i)| : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \wedge A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j \right\}$$

$$\leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| + \sum_{i=1}^{n} |\nu(A_i)| : \text{— " —} \right\}$$

$$\leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| : \text{— " —} \right\} + \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\nu(A_i)| : \text{— " —} \right\}$$

$$= |\mu| + |\nu|$$

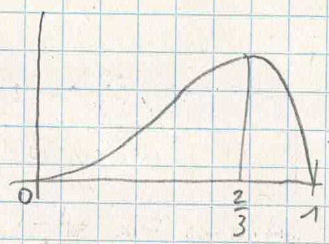
$\square$

MAS Ü4

5) $F(x) = x^2 - x^3$ ... Verteilungsfunktion auf $([0,1], \mathbb{B}|_{[0,1]})$

F legt ein signiertes Maß μ fest

ges: Hahn- und Jordan-Zerlegung von μ



$F'(x) = 2x - 3x^2 = x(2-3x) = 0 \iff x=0 \vee x=\frac{2}{3}$

$F''(x) = 2-6x \quad F''(0) = 2 > 0 \quad F''(\frac{2}{3}) = 2-4 = -2 < 0$

F ist auf $[0, \frac{2}{3}]$ monoton $\nearrow$ und auf $[\frac{2}{3}, 1]$ monoton $\searrow$, daher gilt

$\forall M \subseteq [0, \frac{2}{3}] : \mu(M) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\mu[a_i, b_i]}_{\geq 0} \geq 0$ mit $\forall i: 0 \leq a_i \leq b_i \leq \frac{2}{3}$

$\forall M \subseteq (\frac{2}{3}, 1] : \mu(M) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\mu[a_i, b_i]}_{\leq 0} \leq 0$ mit $\forall i: \frac{2}{3} < a_i \leq b_i \leq 1$

Wobei $\mu[a_i, b_i] \geq 0$, da $\mu[a_i, b_i] = F(b_i) - F(a_i) \geq 0$ da $a_i \leq b_i$ und F monoton $\nearrow$.

$\Rightarrow$ Hahn-Zerlegung $P = [0, \frac{2}{3}]$, $P^c = (\frac{2}{3}, 1]$

$\mu_+(A) := \mu(A \cap P) \qquad \mu_-(A) := -\mu(A \cap P^c)$ sind beides Maße

$\mu(A) = \underbrace{\mu(A \cap P)}_{\geq 0} + \underbrace{\mu(A \cap P^c)}_{\leq 0} = \mu(A \cap P) - (\underbrace{-\mu(A \cap P^c)}_{\geq 0}) = \mu_+(A) - \mu_-(A)$

$\Rightarrow \mu = \mu_+ - \mu_-$ und $\mu_-(P) = 0 = \mu_+(P^c)$, da

$\mu_-(P) = -\mu(P \cap P^c) = -\mu(\emptyset) = 0 \qquad \mu_+(P^c) = \mu(P^c \cap P) = \mu(\emptyset) = 0$.

MAS Ü4

6) $\nu(\{k\}) := k^p (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$ auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$

Für welche $p \in \mathbb{R}$ ist ν ein signiertes Maß?

$$\nu(2\mathbb{N}) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{2k\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(\{2k\}) = \sum_{k=1}^{\infty}(2k)^p(-1)^{2k} = 2^p \sum_{k=1}^{\infty} k^p = \begin{cases} <\infty, & p<-1 \\ \infty, & p \geq -1 \end{cases}$$

$$\nu(2\mathbb{N}-1) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{2k-1\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^p(-1)^{2k-1} = -\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^p = \begin{cases} >-\infty, & p<-1 \\ -\infty, & p \geq -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow p \in (-\infty, -1)$ kommt in Frage

$P = 2\mathbb{N}$ $\quad P^c = 2\mathbb{N}-1$ $\quad \nu_+(A) = \nu(A \cap P)$ $\quad \nu_-(A) = -\nu(A \cap P^c)$

$\rightarrow$ P, P^c ist Hahn Zerlegung und $\nu = \nu_+ - \nu_-$ ist Jordan-Zerlegung von ν

$\sum_{k=1}^{\infty} k^p$ ist für $p \geq 0$: $\sum_{k=1}^{\infty} k^p \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1^p = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$ $\qquad p \geq 0$

für $p \in [-1, 0)$: $\sum_{k=1}^{\infty} k^p = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{|p|} \geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$ $\qquad |p| \in (0, 1]$

für $p < -1$: $\sum_{k=1}^{\infty} k^p = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{|p|} < \infty$ $\qquad |p| > 1$

MAS Ü4

7) $\varrho(A) := \begin{cases} |A| & , \text{für } |A|<\infty \\ -|A^c| & , \text{für } |A^c|<\infty \end{cases}$ auf $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} : |A|<\infty \vee |A^c|<\infty\}$

zz: 6-additiv also $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho(A_n) = \varrho(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ für $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt bel. Angenommen $\exists i \neq j : |A_i^c|<\infty \wedge |A_j^c|<\infty$

$\Rightarrow |A_i| = \infty$, da $|\mathbb{R}|=\infty$. Da $A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow A_i \subseteq A_j^c$ ↯ zu $|A_i| > |A_j^c|$

o.B.d.A. $|A_1^c|<\infty \wedge \forall i \geq 2 : |A_i| < \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(A_n) = -|A_1^c| + \sum_{n=2}^{\infty} |A_n| = -|A_1^c| + |\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n|$ Da $\forall n \geq 2 : A_n \cap A_1 = \emptyset$

$= -(|A_1^c| - |\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n|) = -|A_1^c \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n|$ $\Rightarrow A_n \subseteq A_1^c$ $\Rightarrow \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \subseteq A_1^c$

$= -|A_1^c \cap (\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n)^c| = -|\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c| = -|(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c|$ ✓ $A \subseteq B \Rightarrow \mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

für $\nexists i : |A_i^c|<\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| = |\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|$ ✓

---

zz: $\varrho(\emptyset) = 0 = \varrho(\mathbb{R})$

$\varrho(\emptyset) = |\emptyset| = 0$, da $|\emptyset|<\infty$ $\varrho(\mathbb{R}) = -|\mathbb{R}^c| = -|\emptyset| = 0$, da $|\mathbb{R}^c| = |\emptyset| = 0 < \infty$

---

zz: ϱ kann nicht zu einem signierten Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortgesetzt werden

$A := \mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}$ liegt in $\sigma(\mathcal{A})$, da $|\{n\}| = 1 < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\varrho(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$

$A^c \in \sigma(\mathcal{A})$ $\varrho(A^c) = \varrho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}) = \varrho(\mathbb{R}) - \varrho(\mathbb{N}) = -|\emptyset| - \infty = -\infty$

Da beides $+\infty$ und $-\infty$ auftreten kann, kann ϱ nicht zu einem signierten Maß fortgesetzt werden.