ANA Ü9

1.) $\langle \mathbb{C}, d_2 \rangle$ ges: $HP(U_1(0))$ und $c(U_1(0))$

Behauptung $HP(U_1(0)) = K_1(0)$

Sei $x \in K_1(0)$ bel. Sei $\varepsilon > 0$ bel.

zz: $\exists y \in U_1(0) : y \in U_\varepsilon(x)$

Fallunterscheidung: 1. Fall $\varepsilon \geq 1$ falls $x \neq 0$ $y = 0 \in U_\varepsilon(x)$

falls $x = 0$ $y = 0{,}5 \in U_\varepsilon(x)$

2. Fall $\varepsilon < 1$ falls $x = 0$ $y = \frac{\varepsilon}{2} \in U_\varepsilon(x)$

falls $x \neq 0$ $y = x - \frac{x}{|x|} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$

- $|y - 0| = |x - \frac{x}{|x|} \cdot \frac{\varepsilon}{2}| = \left| \frac{x \cdot |x| \cdot 2 - x \cdot \varepsilon}{|x| \cdot 2} \right| = \left| \frac{x \cdot (|x| \cdot 2 - \varepsilon)}{x \cdot sgn(x) \cdot 2} \right| = \left| \frac{|x| \cdot 2 - \varepsilon}{2 \cdot sgn(x)} \right|$

$= \frac{||x| \cdot 2 - \varepsilon|}{|2 \cdot sgn(x)|} \leq \frac{|1 \cdot 2 - \varepsilon|}{2} = \frac{2 - \varepsilon}{2} = \frac{2}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$

$\Rightarrow y \in U_1(0)$

- $|x - y| = |x - (x - \frac{x}{|x|} \cdot \frac{\varepsilon}{2})| = |x - x + \frac{x}{|x|} \cdot \frac{\varepsilon}{2}| = \left| \frac{x \cdot \varepsilon}{|x| \cdot 2} \right| = \left| \frac{x \cdot \varepsilon}{x \cdot sgn(x) \cdot 2} \right|$

$= \left| \frac{\varepsilon}{sgn(x) \cdot 2} \right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\Rightarrow y \in U_\varepsilon(x)$

- $c(U_1(0)) = HP(U_1(0)) \cup U_1(0) = K_1(0) \cup U_1(0) = K_1(0)$

ges: $HP((\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap U_1(0))$ und $c((\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap U_1(0))$

Behauptung $HP((\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap U_1(0)) = K_1(0)$ $x \in K_1(0)$

Von oben gilt $y_1 = x - \frac{x}{|x|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \in HP(U_1(0))$ ähnlich zeigt man $y_2 = x - \frac{x}{|x|} \cdot \frac{\varepsilon}{3} \in HP(U_1(0))$.

Offensichtlich gilt $y_1 \neq y_2$ und es gibt eine Zahl $y \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ so dass $\operatorname{Re} y \in \mathbb{Q}$ zwischen $\operatorname{Re} y_1$ und $\operatorname{Re} y_2$ liegt und $\operatorname{Im} y \in \mathbb{Q}$ zwischen $\operatorname{Im} y_1$ und $\operatorname{Im} y_2$ liegt.

Also $y \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap U_1(0)$ und $y \in U_\varepsilon(x)$

$\Rightarrow x \in HP((\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap U_1(0))$

Abschluss $= HP((\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap U_1(0)) \cup ((\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap U_1(0)) = K_1(0)$

ANA Üg

2.) (i) $M = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

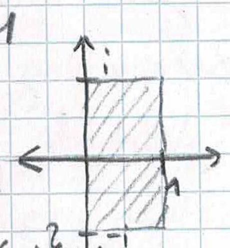
- nicht offen, da $\mathbb{N}$ nur aus isolierten Punkten besteht
- abgeschlossen, —— " ——
- nicht beschränkt (trivial)
- nicht kompakt, siehe Buch Bsp 5.2.7 (i)

(ii) $M = \{x+y : x, y \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad M = [0,2]$

- nicht offen, da in jeder ε-Kugel um 0 ein Wert, der nicht in M liegt existiert. (Sei $\varepsilon > 0$ bel. $y = -\frac{\varepsilon}{2}$ Dann ist $y \notin M$, aber $y \in U_\varepsilon(0)$)
- abgeschlossen trivial
- beschränkt trivial
- kompakt (siehe Buch Bsp 5.2.7)

(iii) $M = \{x+y : x \in [0,1], y \in (0,1)\} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad M = (0,2)$

- offen, siehe Buch Bsp 5.1.5 (i)
- nicht abgeschlossen, da 0 Häufungspunkt, aber $0 \notin M$
- beschränkt trivial
- nicht kompakt, da $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $0 \notin M$



(iv) $M = \{x+iy : x \in [0,1], y \in [-1,1]\} \subseteq \mathbb{C}$

- nicht offen, da $\varepsilon > 0$ bel. $-\frac{\varepsilon}{2} \notin M$, aber $-\frac{\varepsilon}{2} \in U_\varepsilon(0)$
- abgeschlossen, da Durchschnitt von $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ und $\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$ (siehe Buch Bsp 5.1.16 (iv))
- beschränkt trivial
- kompakt, da $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und M abgeschlossen und beschränkt (siehe Buch Korollar 5.2.9)

ANA Üg

3.) $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2n^2}, \frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}\right)$ ges: $HP(M)$, $Isol(M)$, $c(M)$

- Behauptung: $HP(M) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2n^2}, \frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}\right] \setminus \{0\}$

  Sei $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2n^2}, \frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}\right] \setminus \{0\}$ Sei $\varepsilon > 0$ bel.

  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x \in \left[\frac{1}{2n_0^2}, \frac{1}{2n_0^2}+\frac{1}{3n_0^3}\right]$

  Falls $\varepsilon \geq \frac{1}{2n_0^2}+\frac{1}{3n_0^3} - x$: falls $x = \frac{1}{2n_0^2}+\frac{1}{3n_0^3}$: $\frac{1}{2n_0^2}+\frac{1}{3n_0^3} - \frac{\varepsilon}{2} =: y$

  sonst $y := \frac{x + \frac{1}{2n_0^2}+\frac{1}{3n_0^3}}{2}$

  Sonst $y := x + \frac{\varepsilon}{2}$

  In jedem Fall ist $y \in M$. $\Rightarrow$ x ist Häufungspunkt

- Behauptung: $Isol(M) = \emptyset$

  Da $HP(M) \supseteq M$ gibt es keine isolierten Punkte.

- Behauptung: $c(M) = HP(M)$

  Da $HP(M) \supseteq M$ ist $HP(M) \cup M = HP(M)$.

ANA Ü9

4.) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (n+i+(-1)^n(n-i^n))_{n\in\mathbb{N}}$ ges: $HP((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

Fallunterscheidung: 1. Fall $n \bmod 4 = 0$

$n+i+(-1)^n(n-i^n) = n+i+1\cdot(n-1) = n+i+n-1 = 2n-1+i$

divergent

2. Fall $n \bmod 4 = 1$

$n+i+(-1)^n(n-i^n) = n+i+(-1)\cdot(n-i) = n+i-n+i = 2i$

konvergiert

3. Fall $n \bmod 4 = 2$

$n+i+(-1)^n(n-i^n) = n+i+1\cdot(n+1) = n+i+n+1 = 2n+1+i$

divergent

4. Fall $n \bmod 4 = 3$

$n+i+(-1)^n(n-i^n) = n+i+(-1)(n+i) = n+i-n-i = 0$

konvergiert

$\Rightarrow HP((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{0, 2i\}$

Häufungspunkte der Folge stimmen mit den Häufungspunkten der Menge überein.

ANA Üg

5.) $\left((-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^2}-2\right)+(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} =: (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ges: $HP((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $\limsup\limits_{n\to\infty}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\liminf\limits_{n\to\infty}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Fallunterscheidung: 1. Fall $n \bmod 4 = 0$

$(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^2}-2\right)+(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)$

$=(-1)\left(\frac{1}{n^2}-2\right)+1\cdot\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=-\frac{1}{n^2}+2+2-\frac{1}{n^2}=4-\frac{2}{n^2}$

2. Fall $n \bmod 4 = 1$

$(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^2}-2\right)+(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)$

$=1\cdot\left(\frac{1}{n^2}-2\right)+1\cdot\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n^2}-2+2-\frac{1}{n^2}=0$

3. Fall $n \bmod 4 = 2$

$(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^2}-2\right)+(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)$

$=(-1)\cdot\left(\frac{1}{n^2}-2\right)+(-1)\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=-\frac{1}{n^2}+2-2+\frac{1}{n^2}=0$

4. Fall $n \bmod 4 = 3$

$(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^2}-2\right)+(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)$

$=1\cdot\left(\frac{1}{n^2}-2\right)+(-1)\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n^2}-2-2+\frac{1}{n^2}=-4+\frac{2}{n^2}$

$\Rightarrow HP((x_n)_{n\in\mathbb{N}})=\{-4,0,4\}$

$\limsup\limits_{n\to\infty}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=4$

$\liminf\limits_{n\to\infty}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=-4$

ANA Ü9

6.) $\langle X, d \rangle$ ... metrischer Raum $\quad A, B \subseteq X \quad A, B \neq \emptyset$

$d(A,B) := \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}$

Für $x \in X$: $d(x,A) := d(\{x\}, A)$

(i) zz: $x \in c(A) \Leftrightarrow d(x,A) = 0$

$\Rightarrow$ 1. Fall $x \in A$: $d(x,A) = 0$ ✓

2. Fall $x \in HP(A)$: $\varepsilon_1 > 0$ bel $\quad \exists y_1 \in A : d(x, y_1) < \varepsilon_1$

$\varepsilon_2 = d(x, y_1) \quad \exists y_2 \in A : d(x, y_2) < \varepsilon_2$, ...

Folge von $(d(x, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \Rightarrow d(x,A) = 0$

$\Leftarrow$ 1. Fall $x \in A$: $\quad x \in c(A)$ ✓

2. Fall $x \notin A \Rightarrow x \in HP(A)$, da sonst $d(x,A) \neq 0$

$\Rightarrow x \in c(A)$

(ii) zz: $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$

Sei $z_x \in A$, sodass $\forall a \in A : d(z_x, x) \leq d(a, x)$. Wähle z_y genauso.

$d(y, z_y) \leq d(y, z_x) \quad$ und $\quad d(x,A) = d(x, z_x)$

$d(x,y) + d(y, z_x) \geq d(x, z_x) = d(x,A)$

(iii) zz: $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$

1. Fall $d(x,A) \geq d(y,A)$

$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A) \Leftrightarrow d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$

2. Fall $d(y,A) \geq d(x,A)$

$|d(x,A) - d(y,A)| = |d(y,A) - d(x,A)| = d(y,A) - d(x,A)$

dann gleich Fall 1

$\square$

ANA Ü9

7.) $(I, \precsim_I), (J, \precsim_J)$ ... gerichtete Mengen

zz: $(I \times J, \precsim)$ ist gerichtet $(i_1, j_1) \precsim (i_2, j_2) \Leftrightarrow i_1 \precsim_I i_2 \wedge j_1 \precsim_J j_2$

Reflexiv Sei $(i_1, j_1) \in I \times J$ bel.

$(i_1, j_1) \overset{?}{\precsim} (i_1, j_1) \Leftrightarrow (i_1 \precsim_I i_1 \wedge j_1 \precsim_J j_1) = \text{wahr}$

$\Rightarrow$ reflexiv

Transitiv Sei $(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3) \in I \times J$ bel.

$(i_1, j_1) \precsim (i_2, j_2) \wedge (i_2, j_2) \precsim (i_3, j_3)$

$i_1 \precsim_I i_2 \wedge j_1 \precsim_J j_2 \wedge i_2 \precsim_I i_3 \wedge j_2 \precsim_J j_3$

$\Rightarrow i_1 \precsim_I i_3 \wedge j_1 \precsim_J j_3$, da $\precsim_I$ und $\precsim_J$ transitiv sind

$\Rightarrow (i_1, j_1) \precsim (i_3, j_3)$

$\Rightarrow$ transitiv

Gerichtet Sei $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in I \times J$ bel.

$\exists k_1 \in I: i_1 \precsim_I k_1 \wedge i_2 \precsim_I k_1$ $\exists k_2 \in J: j_1 \precsim_J k_2 \wedge j_2 \precsim_J k_2$

$\Rightarrow (i_1, j_1) \precsim (k_1, k_2) \wedge (i_2, j_2) \precsim (k_1, k_2)$

$\Rightarrow$ gerichtet

$\Rightarrow (I \times J, \precsim)$ ... gerichtet

$\square$

ANA ÜG

8.) $\langle X, d\rangle$... metrischer Raum $\quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Folge in X $\quad (\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \precsim)$ mit

$(n_1, m_1) \precsim (n_2, m_2) \iff n_1 \leq n_2 \wedge m_1 \leq m_2$ ... gerichtete Menge

zz: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge $\iff \lim\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} d(x_m, x_n) = 0$

Wissen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon \iff \lim\limits_{N\to\infty} d(x_n, x_m) = 0,\ n, m \geq N$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists (N,N) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ \forall (n,m) \succsim (N,N):$

$d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\lim\limits_{N\to\infty} d(x_n, x_m) = 0,\ n, m \geq N \iff \lim\limits_{(N,N)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} d(x_n, x_m) = 0,\ (m,n) \succsim (N,N)$

$\Updownarrow$

$\lim\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} d(x_n, x_m) = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists (N,N) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ \forall (n,m) \succsim (N,N) : d(x_n, x_m) < \varepsilon \iff \lim\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} d(x_n, x_m) = 0$

$\square$