Zusammenfassung Heft 2 LINAG

Ida Hönigmann

7. Dezember 2020

1 Vektorraum

Definition 1.1. *$m_1, m_2, ..., m_n \in V$, $x_1, ..., x_n \in K$*
Dann ist $x_1 * m_1 + x_2 * m_2 + ... + x_n * m_n$ eine Linearkombination des Vektors $m_1, ..., m_n$

Bemerkung. *Wenn $m_1 = m_2$, dann Linearkombination über $m_1, ..., m_n$ auch Linearkombination über $m_2, ..., m_n$.*

Definition 1.2. *$M \subseteq V$*
$[M] \coloneqq \{v \in V \exists n \geq 0 \exists x_1, ..., x_n \in K \exists m_1, ..., m_n \in M : v = \sum_{i=1}^{n} x_i * m_i\}$ heißt die Hülle von M.
Kurz auch: $[M] = \{v \in V : v$ ist Linearkombination von Elementen aus $M\}$.

Bemerkung. *$\emptyset \neq M \subseteq V \implies [M]$ ist Unterraum von V.*

Lemma 1.1. *$(U_i)_{i \in I}$... Familie von Unterräumen von V*
Dann ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ ein Unterraum von V.

Lemma 1.2. *$[M]$ kann auch als $\cap\{U : U$ ist Unterraum von V, $M \in U\}$ definiert werden.*

Lemma 1.3. *V... Vektorraum, M... Menge, U... Unterraum, $M \subset U \subset V$*

- $M \subseteq [M] \subseteq U$
- $M_1 \subseteq M_2 \subseteq V \implies [M_1] \subseteq [M_2]$
- $[U] = U$
- $[[M]] = [M]$

1.1 Basis

Definition 1.3. *V... Vektorraum*
$M \subseteq V$ heißt Erzzeugnissystem von $V \Leftrightarrow [M] = V$

Definition 1.4. *V... Vektorraum*
$M \subseteq V$ heißt linear abhängig $\Leftrightarrow \exists a \in M : a \in [M \setminus \{a\}]$
$M \subseteq V$ heißt linear unabhängig $\Leftrightarrow \forall a \in M : a \notin [M \setminus \{a\}]$

Definition 1.5. *V... Vektorraum, $M \subseteq V$*
M ist Basis von $V \Leftrightarrow M$ ist linear unabhängig $\wedge M$ ist Erzzeugnissystem.

Lemma 1.4. *V... Vektorraum, $M \subseteq V$*
M ist linear abhängig $\Leftrightarrow \exists \sum_{i=1}^{n} x_i * a_i = 0_V$ nicht trivial

Lemma 1.5. *$M \subseteq V$*
$m \in [M] \Leftrightarrow [M] = [M \cup \{m\}]$

Theorem 1.6. *V... Vektorraum, $B \subseteq V$... Basis*
$\implies \forall x \in V \setminus \{0_V\} \exists b_1, ..., b_n \in B$ verschieden, $\exists x_1, ..., x_n \in K \neq 0 : x = \sum_{i=1}^{n} x_i * b_i$ mit $x_i * b_i$ eindeutig.

Theorem 1.7. *V... Vektorraum, $B \subseteq V$ ... Teilmenge*
Folgende Aussagen sind äquivalent:

- *B ist Basis*
- *B ist ein minimales Erzzeugnissystem*
- *B ist maximal linear unabhängig*

Theorem 1.8. *$A \subseteq M \subseteq V$ mit V... Vektorraum und A... linear unabhängig*
$\implies \exists Y(A \subseteq Y \subseteq M$ mit Y maximal linear unabhängig).

1.2 Maximalitätsprinzip

Definition 1.6. *K ist eine Kette, wenn gilt $\forall x, y \in K : x \leq y \vee y \leq x$*

Definition 1.7. *K ist eine maximale Kette, wenn gilt $\forall K' \supset K : K'$ ist keine Kette*

Theorem 1.9. *$(H, \leq)$... Halbordung*
$\implies \exists K \subseteq H : K$ ist eine maximale Kette.

1.3 Basis

Theorem 1.10. *V... Vektorraum*
$\implies \exists B \subseteq V : B$ ist Basis

Lemma 1.11. *Sei $A \subseteq V$ linear unabhängig $\implies \exists B \supseteq A : B$ ist Basis.*
Sei $M \subset V$ ein Erzeugungssystem $\implies \exists B \subset M : B$ ist Basis

Theorem 1.12. *Jeder Vektorraum V hat eine Basis B.*
Wenn $A \subseteq V$ linear unabhängig ist $\implies \exists B \supset A$ mit B ist Basis von V.
Wenn $M \subseteq V$ Erzeugungssystem von V, dann $\exists B \supseteq M$ mit B ist Basis.

Lemma 1.13. *V... Vektorraum über K, $M \subseteq V$, $m \in V$, $m = \sum_{i=1}^{n} x_i * m_i$ mit $x_1, ..., x_n \in K^\times$ und $m_1, ..., m_n \in M$ verschieden*

- *M Erzeugungssystem $\implies \forall i (M \setminus \{m_i\}) \cup \{m\}$ ist Erzeugungssystem*
- *M linear unabhängig $\implies \forall i (M \setminus \{m_i\}) \cup \{m\}$ ist linear unabhängig*
- *M Basis $\implies \forall i (M \setminus \{m_i\}) \cup \{m\}$ ist Basis*

Theorem 1.14 (Austauschsatz von Steinitz)**.** *Sei M ein Erzeugungssystem von V. Sei A eine linear unabhängige Teilmenge von V. Dann gilt:*
$\exists \phi : A \to M$ injektiv, sodass $(M \setminus \phi(A)) \cup A$ ein Erzeugungssystem ist.

Lemma 1.15. *V... Vektorraum über K, B, B'... Basen von V*
$\implies \exists \phi : B \to B'$ injektiv $\wedge \exists \phi' : B' \to B$ injektiv
Alle Basen zu einem Vektorraum sind gleich groß: $|B| = |B'|$, d.h. $\exists \psi : B \to B'$ bijektiv

Theorem 1.16 (Satz von Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *C, D... Mengen, $\exists \phi : C \to D$ injektiv, $\exists \phi' : D \to C$ injektiv*
$\implies \exists \psi : C \to D$ bijektiv

Definition 1.8. *$dimV :=$ Größe einer beliebigen Basis von V*

Bemerkung. *$dimV = \infty \Leftrightarrow \neg(dimV endlich)$*

Lemma 1.17. *Sei V, V'... Vektorräume über K*
$dimV = dimV' \Leftrightarrow V \cong V'$, wobei $\cong$ bedeutet, dass V und V' isomorph sind

Theorem 1.18. *V... Vektorraum über K*
$V \cong K^{<B>}$, wobei $B \supseteq V$ eine beliebige Basis ist.

Definition 1.9. *V... Vektorraum über K heißt endlich erzeugt*

- *$\Leftrightarrow \exists M \subseteq V : [M] = V$*
- *$\Leftrightarrow V$ hat endliches Erzeugungssystem*
- *$\Leftrightarrow V$ hat endliche Basis*
- *$dimV$ ist endlich*

Lemma 1.19. *V endlich erzeugt*

- *$M \subseteq V$ Erzeugungssystem $\implies |M| \geq dimV$*
- *$M \subseteq V$ linear unabhängig $\implies |M| \leq dimV$*

Wenn Gleichheit gilt ist M sogar eine Basis.

Lemma 1.20. *V... Vektorraum, $U_1 \subseteq U_2 \subseteq V$, U_2... endlich erzeugt*

- *$dimU_1 \leq dimU_2$*
- *$U_1 \neq U_2 \Leftrightarrow dimU_1 < dimU_2$*

1.4 Elementare Spaltenumformungen

Definition 1.10. *Es gibt folgende elementare Spaltenumformungen:*

- *Multiplikation einer Spalte mit $c \in K^\times$*
- *Vertauschen zweier beliebiger Spalten*

- *Addition eines vielfachen einer Spalte zu einer anderen.*

Lemma 1.21. *$(a_1, ..., a_m)$ lässt sich durch elementare Spaltenumformungen zu $(a'_1, ...a'_m)$ umformen $\Leftrightarrow [\{a_1, ..., a_m\}] = [\{a'_1, ..., a'_m\}]$*

Definition 1.11. *$n \geq 1$*

$$Er := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in K^{r \times r}$$

Lemma 1.22. *$A \in K^{n \times m}$ beliebig.*

$\implies \exists r \leq min(n, m)$, sodass A durch elementare Spaltenumformungen zu $\begin{pmatrix} Er & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ umgeformt werden kann (bis auf die Reihenfolge der Zeilen).

Die entstandene Matrix nennt man auch Normalform.

Bemerkung. *K... Körper, $n \geq 1$, $a_1, ..., a_n \in K^n$ verschieden*

$b = \sum_{i=1}^{n} x_i * a_i$ mit $x_1, ..., x_m \in K$

Sei j mit $1 \leq j \leq n$, sodass $x_j \neq 0$.

$\implies (a_1, ..., a_n)$ lässt sich durch elementare Spaltenumformungen nach $(a_1, ..., a_{j-1}, b, a_{j+1}, ..., a_n)$ umformen.

Lemma 1.23. *K... Körper, $n \geq 1$, $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in K^n$*

Falls $[\{a_1, ..., a_n\}] = [\{b_1, ..., b_n\}]$, dann lässt sich $(a_1, ..., a_n)$ durch elementare Spaltenumformungen zu $(b_1, ..., b_n)$ umformen.

1.5 Dimenssionssatz

Definition 1.12. *V... Vektorraum, $(U_i | i \in I)$... Familie von Unterräumen von V*

$\sum_{i \in I} U_i = \{\sum_{i \in I} u_i | \forall i \in I : (u_i \in U_i) u_i = 0$ für fast alle $i \in I\}$

Bemerkung. $\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq [\bigcup_{i \in I} U_i] = \sum_{i \in I} U_i$

Definition 1.13. *$\sum_{i \in I} U_i$ heißt direkt $\Leftrightarrow \forall j \in I : U_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i = \{0\}$*

Schreibweise. *Für direkte Summen schreibt man auch $\bigoplus$.*

Lemma 1.24. *$(U_i)_{i \in I}$... Unterraume von V*

$S := \sum_{i \in I} U_i$ direkt $\Leftrightarrow \forall s \in S \exists!$ Darstellung $s = \sum_{i \in I} u_i$ wobei $\forall i \in I (u_i \in U_i)$

Definition 1.14. *U ... Unterraum von V*

$T \subseteq V$ heißt komplementärer Unterraum zu $U \Leftrightarrow V = U \bigoplus T$ also $U \cap T = \{0\}$.

Bemerkung. *$V \setminus U$ ist kein Unterraum von V., da $0_V \notin V \setminus U$.*

Theorem 1.25. *$\forall U$ ... Unterraum von V, $\exists T$ komplementär zu U (im Allgemeinen nicht eindeutig).*

Theorem 1.26. *(Dimenssionssatz) U, T ... Unterraum von V mit $dim(U) < \infty \wedge dim(T) < \infty$*

$\implies dim(U+T) = dim(U) + dim(T) - dim(U \cap T)$

Lemma 1.27. *U... Unterraum von V, $dim(V) < \infty$, T ... Komplementärraum von U*

$dim(T) = dim(V) - dim(U)$

2 Lineare Abbildungen

Definition 2.1. *V, W... Vektorräume*

$f : V \to W$ heißt linear $\Leftrightarrow$

- $\forall x, y \in V : f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall c \in K \forall x \in V : f(c * x) = c * f(x)$

Definition 2.2. *V... Vektorraum, f... lineare Abbildung*

$ker f := \{v \in V : f(v) = 0\}$

Lemma 2.1. *$ker f$ ist ein Unterraum von V.*

f injektiv $\Leftrightarrow ker f = \{0\}$

Schreibweise. *$L(V, W)$ ist die Menge aller linearer Abbildungen von V zu W.*

Lemma 2.2. *$f \in L(V, W)$*

- *$f(V)$ ist Unterraum von W*
- *$T \leq W$ Unterraum von $W \implies f^{-1}(T)$ ist Unterraum von V*

- $\forall M \subseteq V : f([M]) = [f(M)]$
- f *bijektiv* $\implies f^{-1} \in L(W, V)$

Lemma 2.3. $f \in L(V, W)$

- f *injektiv* $\Leftrightarrow dim(V) = dim(f(V))$
- f *surjektiv* $dim(W) = dim(f(V))$

Lemma 2.4. $f \in L(V, W)$, *$B\ldots$ Basis von V*

- f *injektiv* $\Leftrightarrow$ $f|_B$ *injektiv* $\wedge f(B)$ *linear unabhängig*
- f *surjektiv* $\Leftrightarrow f(B)$ *Erzeugungssystem von W*

Definition 2.3. $f \in L(V, W)$
$def(f) := dim(ker f)$ *heißt der Defekt.*
$rg(f) := dim(f(V))$ *heißt der Rang.*

Theorem 2.5. $f \in L(V, W)$, $dim(V) < \infty$
$rg(f) + def(f) = dim(V)$

Lemma 2.6. $f \in L(V, W)$, $dim(V) = dim(W) < \infty$
f *injektiv* $\implies f$ *surjektiv*
f *surjektiv* $\implies f$ *injektiv*

3 Fortsetzungssatz

Bemerkung. $f, g \in L(V, W)$, *$M \subseteq V\ldots$ Erzeugungssystem*
$f = g \Leftrightarrow f|_M = g|_M$

Theorem 3.1. *$V, W\ldots$ Vektorräume, $B\ldots$ Basis von V, $f : B \to W\ldots$ Funktion*
$\implies \exists! \hat{f} \in L(V, W)$ *mit* $\hat{f}|_B = f$