LINAG Ü5

2.3.5 $M, N \subseteq V$

a) zz: $[M]=[N] \iff \forall v \in M: v \in [N] \wedge \forall v \in N: v \in [M]$

"$\Rightarrow$" $M \subseteq [M]$ und $N \subseteq [N]$

Da $[M]=[N]$ gilt auch $M \subseteq [N]$ sowie $N \subseteq [M]$

Also gilt $\forall v \in M: v \in [N]$ und $\forall v \in N: v \in [M]$

"$\Leftarrow$" $\forall v \in M: v \in [N] \iff \forall v \in M: [N] = [N \cup \{v\}] \iff [N] = [N \cup M]$

$\forall v \in N: v \in [M] \iff \forall v \in N: [M] = [M \cup \{v\}] \iff [M] = [M \cup N]$

$\Rightarrow [M] = [M \cup N] = [N]$

$\square$

b) zz: $x \in [M] \wedge \forall m \in M: m \in [N] \Rightarrow x \in [N]$

$\forall m \in M: m \in [N] \iff \forall m \in M: [N] = [N \cup \{m\}] \iff [N] = [N \cup M]$

$x \in [M] \Rightarrow x \in [N \cup M] \Rightarrow x \in [N]$

$\square$

2.3.8 $M \subseteq V$ $N \subseteq V$

zz: $[M \cup [N]] = [M \cup N]$

Bew: 1) $[M \cup [N]] \subseteq [M \cup N]$

Sei $x \in [M \cup [N]]$ beliebig. Das heißt es existiert eine Linearkombination aus Vektoren aus $M$ und $[N]$, sodass diese Linearkombination $= x$ ist. Für alle Vektoren aus $[N]$ gilt, dass diese Linearkombinationen aus $N$ sind. Man kann nun also alle Vektoren aus $[N]$, die in der Linearkombination für $x$ verwendet hat durch die Linearkombination des Vektors aus $N$ ersetzen und erhält wieder eine Linearkombination für $x$, die nur Vektoren aus $M$ und $N$ verwendet.

$\Rightarrow x \in [M \cup N]$

2) $[M \cup N] \subseteq [M \cup [N]]$

Da $N \subseteq [N]$ ist auch $[M \cup N] \subseteq [M \cup [N]]$.

$\Rightarrow [M \cup [N]] = [M \cup N]$

Bei $M = \emptyset$ gilt $[[N]] = [\emptyset \cup [N]] = [\emptyset \cup N] = [N]$

Bei $N = \emptyset$ gilt $[M \cup \{0\}] = [M \cup [\emptyset]] = [M \cup \emptyset] = [M]$

# LINAG Ü5

2.4.1 β) • $V = \mathbb{Z}_5^{3\times 1}$, $K = \mathbb{Z}_5$ $\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} \right\}$ Frage: linear abhängig?

Die Menge ist linear abhängig, da

$$2 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$ , also gibt es eine Linearkombination aus der Menge ohne $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, die $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ erzeugt.

• $V = \mathbb{Z}_5^{3\times 1}$ $K = \mathbb{Z}_5$ $\left\{ \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$ Frage: linear unabhängig?

$$x \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0$ $\Rightarrow \nexists$ nicht triviale Linearkombination für $0_V$

$\Rightarrow$ Die Menge ist linear unabhängig.

γ) • $V = \mathbb{C}^{2\times 1}$ $K = \mathbb{C}$ $\left\{ \begin{pmatrix}i\\i-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix} \right\}$ Frage: linear abhängig?

$$1 \cdot \begin{pmatrix}i\\i-1\end{pmatrix} + (-i)\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\\i-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-i\\-i+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists$ nicht triviale Linearkombination für $0_V$

$\Rightarrow$ Die Meng ist linear abhängig.

• $V = \mathbb{C}^{2\times 1}$ $K = \mathbb{C}$ $\left\{ \begin{pmatrix}1+i\\-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\1-i\end{pmatrix} \right\}$ Frage: linear unabhängig?

$$x \cdot \begin{pmatrix}1+i\\-i\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}i\\1-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$ $\Rightarrow \nexists$ nicht triviale LK für $0_V$

$\Rightarrow$ Die Menge ist linear unabhängig.

ε) • $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ $K = \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} \right\}$ Frage: linear abhängig?

$$5 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\15\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\-12\\-10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5-4-1\\15-12-3\\10-10+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow \exists$ nicht triviale LK für $0_V$

$\Rightarrow$ Die Menge ist linear abhängig.

• $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ $K = \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\10\end{pmatrix} \right\}$ Frage: linear unabhängig?

$$x \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix}5\\2\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0$ $\Rightarrow \nexists$ nicht triviale LK für $0_V$

$\Rightarrow$ Die Menge ist linear unabhängig.

LINAG Ü5

$\not\forall$ 2.4.6 $t \in \mathbb{Q}$ Für welche t ist die folgende Teilmenge von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ linear unabhängig?

$$x \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $t=3$ linear abhängig:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-3 \\ 1+2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $t=-1$ linear abhängig:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+3 \\ 1-1 \\ 3-2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\not\forall$

2.4.5 V... Vektorraum $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ... Folge von l.u. Teilmengen von V

$\forall i \in \mathbb{N}: A_i \subset A_{i+1}$ zz: $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ist linear unabhängig.

Da $\forall i \in \mathbb{N}: A_i \subset A_{i+1}$ ist $\forall i \in \mathbb{N}: A_i \cup A_{i+1} = A_{i+1}$.

Allgemein gilt auch $\forall i \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}: A_i \subset A_{i+1} \subset \dots \subset A_{i+k}$

Da man wie oben gezeigt "nebeneinander liegende" Teilmengen zur Größeren zusammenfassen kann ist auch $\forall i \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}: A_i \cup A_{i+1} \cup \dots \cup A_{i+k} = A_{i+k}$

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ linear unabhängig $\Longleftrightarrow$ $\nexists$ nicht triviale LK aus Vektoren $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ für $O_V$

Da LK endlich sind müsste so eine LK Vektoren aus endlich vielen Teilmengen $A_i$ verwenden. Sei $A_K$ die von der LK verwendete Teilmenge, so dass

$\forall A_i$ : LK verwendet $A_i \Rightarrow A_i \subseteq A_K$.

Da wie oben gezeigt $\bigcup_{i=1}^{K} A_i = A_K$ und $A_K$ linear unabhängig, so wissen wir das die LK für den Nullvektor nicht existiert.

$\square$

LINAG Ü5

2.5.2 $(m_i)_{i\in I}$ Erzeugendensystem von $V$ also $[(m_i)_{i\in I}] = V$

zz: $(m_i)_{i\in I}$ ist Basis $\iff \exists x \in V : x = \sum_{i\in I} x_i m_i$ eindeutig

1.) zz: $(m_i)_{i\in I}$ ist Basis $\Rightarrow \exists x \in V : x = \sum_{i\in I} x_i m_i$ eindeutig

Da $(m_i)_{i\in I}$ eine Basis ist muss $(m_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.

offensichtlich $\exists x : x = \sum_{i\in I} x_i m_i$, da $(m_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von $V$ ist.

Wenn eine zweite Linearkombination für $x$ existieren würde (mit $LK1 \neq LK2$), wäre $(m_i)_{i\in I}$ nicht linear unabhängig:

$$x = \sum_{i\in I} x_i m_i = \sum_{i\in I} \bar{x}_i \bar{m}_i \quad \text{mit } \exists j \in I : x_j \neq \bar{x}_j \text{ oder } m_j \neq \bar{m}_j$$

Sei $j$ dieses Element aus $I$. $\sum_{i\in I\setminus\{j\}} x_i \cdot \frac{m_i}{n_i} = y_i \Rightarrow (m_i)_{i\in I}$ ist linear abhängig $\lightning$

2.) zz: $\exists x \in V : x = \sum_{i\in I} x_i m_i$ eindeutig $\Rightarrow (m_i)_{i\in I}$ ist Basis

Da $(m_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem ist müssen wir nur mehr die lineare Unabhängigkeit prüfen.

Angenommen $\exists y \in V$ mit $x \neq y$ für den es zwei unterschiedliche Linearkombinationen aus $(m_i)_{i\in I}$ gibt, also

$$y = \sum_{i\in I} y_i n_i = \sum_{i\in I} \bar{y}_i \bar{n}_i \quad \text{mit } \exists j \in I : y_j \neq \bar{y}_j \text{ oder } n_j \neq \bar{n}_j$$

Dann gilt
$$\sum_{i\in I} y_i n_i - \sum_{i\in I} \bar{y}_i \bar{n}_i = 0_V$$

Also könnte man $x$ auch wie folgt anschreiben

$$x = \sum_{i\in I} x_i m_i + \sum_{i\in I} y_i n_i + \sum_{i\in I} (-\bar{y}_i)\bar{n}_i \quad \lightning$$

Da man $y$ bel. wählen kann gibt es keinen Vektor für den mehrere verschiedene Linearkombinationen existieren. Also muss $(m_i)_{i\in I}$ linear unabhängig sein. $\square$

# LINAG Ü5

2.6.1 $(b_1, \dots, b_n)$ Basis von $V$ ges: alle $x$, sodass $(x, b_2, \dots, b_n)$, $(b_1, x, b_3, \dots, b_n), \dots, (b_1, \dots, x, \dots, b_n), \dots (b_1, b_2, \dots x)$ alle auch Basis von $V$ sind.

Behauptung: $x$ muss Linearkombination aus allen Vektoren $b_1, \dots, b_n$ sein, also

$$x = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot b_i \qquad \text{mit } \forall i : m_i \neq 0$$

Bew: Für jedes beliebige $b_K$ gilt:

$$x = \sum_{i=1}^{K-1} (m_i b_i) + m_K b_K + \sum_{i=K+1}^{n} (m_i b_i)$$

$$x - m_K b_K = \sum_{i=1}^{K-1} (m_i b_i) + \sum_{i=K+1}^{n} (m_i b_i)$$

$$-m_K b_K = \sum_{i=1}^{K-1} (m_i b_i) - x + \sum_{i=K+1}^{n} (m_i b_i)$$

$$b_K = \sum_{i=1}^{K-1} \left(-\frac{m_i}{m_K} b_i\right) + \frac{1}{m_K} x + \sum_{i=K+1}^{n} \left(-\frac{m_i}{m_K} b_i\right)$$

$\Rightarrow$ jeder Vektor aus $V$ kann durch LK aus $((b_i) \setminus \{b_K\}) \cup \{x\}$ dargestellt werden.

$\Rightarrow$ Wenn $b_K$ durch $x$ ersetzt wird ist $(b_1, \dots, x, \dots, b_n)$ ein Erzeugungssystem.
Da $(b_1, \dots, b_n)$ linear unabhängig ist, ist die LK für $x$ eindeutig.
Da für alle $K$ von $1$ bis $n$ gilt, dass $b_K$ in der LK für $x$ vorkommt muss auch $(b_1, \dots, x, \dots, b_n)$ linear unabhängig sein.

---

Wenn $x = \sum_{i=1}^{n} m_i b_i$ mit $\exists j : m_j = 0$, dann wäre

$$x = \sum_{i=1}^{j-1} m_i b_i + 0 \cdot b_j + \sum_{i=j+1}^{n} m_i b_i$$

Dann ist aber die Familie $(b_1, \dots, b_{j-1}, x, b_{j+1}, \dots, b_n)$ linear abhängig, da $x = \sum_{i=1}^{j-1} m_i b_i + \sum_{i=j+1}^{n} m_i b_i$. $\lightning$

$\square$

LINAG Ü5

2.4.8. a) Frage: Eine Menge $M \subset V$ ist l.u. $\Longleftrightarrow$ jede endliche Teilmenge von $M$ ist l.u.

1) $M$ ist l.u. $\Rightarrow \forall B \in \mathcal{P}(M): B$ ist l.u.

Behauptung: wahr

Bew: Sei $B$ eine bel. Teilmenge von $M$, die nicht leer ist.

Angenommen $\exists b \in B: \exists v_1, v_2, \dots, v_n \in B \; \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in K: b = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$

Dann gilt aber auch $b \in M: \exists v_1, v_2, \dots, v_n \in M \; \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in K: b = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$,

also wäre $M$ l.a. ↯

$\Rightarrow$ jede Teilmenge von $M$ ist l.u.

2) $\forall B \in \mathcal{P}(M): B$ ist l.u. $\Rightarrow M$ ist l.u.

Behauptung: wahr

Bew: Angenommen $M$ ist l.a., d.h. $\exists u \in M: \exists n \in \mathbb{N}:$

$\exists u \in M: \exists n \in \mathbb{N}: \exists v_1, v_2, \dots, v_n \in M \; \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in K: u = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i$

Nun bilden die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ eine endliche Teilmenge $B$ von $M$.

Dann gilt aber

$\exists u \in B \cup \{u\}: \exists n \in \mathbb{N}: \exists v_1, v_2, \dots, v_n \in B \cup \{u\} \; \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in K: u = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i$

also wäre $B$ nicht l.u. ↯

$\Rightarrow M$ ist l.u.

b) Frage: Eine unendliche Menge $M \subset V$ ist l.u. $\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; \exists T \subset M: T$ l.u. $\wedge \; \# T = n$

1) $M$ ist. l.u $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; \exists T \subset M: T$ l.u. $\wedge \; \# T = n$

Behauptung: wahr

Bew: von oben wissen wir: jede Teilmenge von $M$ ist l.u. und da jede unendliche Menge für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit # Teilmenge $= n$ besitzt gilt die Aussage.

2) $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists T \subset M: T$ l.u. $\wedge \; \# T = n \Rightarrow M$ ist l.u.

Behauptung: falsch

Gegenbsp: $K = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $M = \{(1,0,0,\dots), (0,1,0,\dots), (0,0,1,0,\dots)\} \cup \{(2,0,0,\dots)\}$

Offensichtlich existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $T$, die l.u. ist mit $\# T = n$, nämlich aus $M \setminus \{(2,0,0,\dots)\}$.

LINAG Ü5

2.4.8 ... b) 2) Aber M ist nicht l.u., da

$(2,0,0,\dots) = 2\cdot(1,0,0,\dots)$

c) Eine endliche Menge M ist l.u $\Leftrightarrow \forall n \in \{0,1,\dots,\#M\}\ \exists T \subset M: T$ ist l.u. $\wedge\ \#T = n$

1) M l.u. $\Rightarrow \forall n \in \{0,1,\dots,\#M\}\ \exists T \subset M: T$ ist l.u. $\wedge\ \#T = n$

Behauptung: wahr

Bew: Sei $n \in \{0,1,\dots,\#M\}$ beliebig. Wählen wir nun n Vektoren aus M, so erhalten wir eine Teilmenge T für die gilt $\#T = n$. Oben haben wir gezeigt, dass alle Teilmengen von M l.u. sind also ist auch T l.u.

2.) $\forall n \in \{0,1,\dots,\#M\}\ \exists T \subset M: T$ ist l.u. $\wedge\ \#T = n \Rightarrow M$ ist l.u.

Behauptung: wahr

Bew: Es gilt $M \subset M$ und $\#M = \#M$. Da M endlich ist existiert offensichtlich keine andere Teilmenge mit Mächtigkeit M. Aus der linken Seite folgt, dass M l.u. sein muss. $\square$