ANA3 Wichtigstes

Ida Hönigmann

January 24, 2023

Satz (Fubini)**.** *f ... Lebesgue-messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$, integrierbar oder positiv; $i_1, ..., i_n$ ... Permutation von $1, ..., n$*

$$\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, ..., x_n) d\lambda(x_{i_1}) \cdots d\lambda(x_{i_k}) \text{ sind } \lambda^{n-k}\text{-messbare Funktionen auf } \mathbb{R}^{n-k}$$

$$\text{und } \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, ..., x_n) d\lambda(x_{i_1}) \cdots d\lambda(x_{i_n})$$

Definition (Durchmesser)**.**

$$diam(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

Satz (Isodiametrische Ungleichung)**.** *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ ... beschränkt, ω_n ... Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel*

$$\lambda^n(A) \leq \omega_n(diam(A)/2)^n$$

Satz. *$f_t(\omega), t \in (a, b)$ ... messbar auf (Ω, μ), $t \mapsto f_t(\omega)$ ... für μ-f.a. ω stetig in t_0, $\exists g$ ... integrierbar auf Ω $\exists \delta > 0 \forall t : |t - t_0| < \delta \implies |f_t| \leq g \mu$-f.ü.*

$$\implies \forall t : |t - t_0| < \delta \implies f_t \text{... integierbar und } \int_{\Omega} f_t(\omega) d\mu(\omega) \text{... stetig in } t_0$$

$$\text{d.h. } \lim_{t \to t_0} \int_{\Omega} f_t d\mu = \int_{\Omega} f_{t_0} d\mu$$

Satz. *$f_t(\omega), t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ ... messbar auf (Ω, μ), $\exists \frac{\partial f_t}{\partial t}$ für μ-f.a. ω bei t_0, $\exists g$ ... integrierbar auf Ω: $\forall t : |t - t_0| < \delta \implies \left|\frac{f_t(\omega) - f_{t_0}(\omega)}{t - t_0}\right| \leq g(\omega)$ bzw. $\left|\frac{\partial f_t}{\partial t}(\omega)\right| \leq g(\omega)$*

$$\implies t \mapsto \int_{\Omega} f_t(\omega) d\mu(\omega) \text{ ist in } t_0 \text{ diffbar und } \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f_t(\omega) d\mu(\omega)\bigg|_{t=t_0} = \int_{\Omega} \frac{\partial f_t(\omega)}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} d\mu(\omega)$$

Definition (Vervollständigung)**.** *(M, d) ... metr. Raum, $((\tilde{M}, \tilde{d}), \iota : M \to \tilde{M})$ heißt Vervollständigung, falls $(\tilde{M}, \tilde{d})$ ... vollständig metr. Raum; ι ... isometrische Abbildung mit dichtem Bild in $\tilde{M}$.*

Definition (Banachraum)**.** *Banachraum ist ein normierter Raum, dessen induzierte Metrik vollständig ist.*

Lemma. *M ... Menge $\implies (l^\infty(M, \mathbb{R}), ||.||)$ ... Banachraum ($||.||$ ist Supremumsnorm).*

Lemma. *(M, d) ... metr. Raum, $x_0 \in M$ fest $\implies M \to l^\infty(M, \mathbb{R}), x \mapsto f_x$ mit $f_x(t) := d(x_0, t) - d(x, t)$ ist Isometrie.*

Satz. *$(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ ... metr. Raum, (X_2, d_2) ... vollständig, $A \subseteq X_1$, $f : A \to X_2$ ... glm. stetig*

$$\implies \exists! F : \bar{A} \to X_2 : F|_A = f$$

F ist glm. stetig und f ... isometrisch $\implies F$ ... isometrisch

Definition (Operatornorm)**.** *$(X, ||.||_X), (Y, ||.||_Y)$ ... normierter Raum, $L(X,Y)$ ... Raum linearer, beschränkter Funktionen von X nach Y. $||T||_{L(X,Y)} := \sup\{\frac{||Tx||_Y}{||x||_X} : 0 \neq x \in X\}$*

Satz. *Vollständige metr. Räume und normierte Räume haben jeweils eine eindeutige Vervollständigung bis auf Isometrien.*

Satz. *X ... nomierter Raum, Y... Banachraum $\implies$ $L(X,Y)$ ... Banachraum*