ANA Ü11

6.) $\langle X, d\rangle$ ... metrischer Raum $\quad x \in X$

$f = (f_1, f_2, \dots, f_p) : X \to \mathbb{R}^p \qquad f_j : X \to \mathbb{R}$

zz: f bei x stetig $\iff \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}: f_j$ bei x stetig

"$\Rightarrow$" zz: $\neg(\forall j \in \{1,2,\dots,p\}: f_j$ bei x stetig$) \Rightarrow \neg(f$ bei x stetig$)$

Das heißt $\exists k \in \{1, 2, \dots, p\}$ mit f_k bei x nicht stetig.

$\iff \exists$ Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $X \setminus \{x\}$, $\lim_{n\to\infty} t_n = x$: $\lim_{n\to\infty} f_k(t_n) = y \neq f_k(x)$

$\Rightarrow f$ ist bei x nicht stetig, da

$$\lim_{n\to\infty} t_n = x \ \wedge\ \lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} f_1(t_n) \\ f_2(t_n) \\ \vdots \\ f_k(t_n) \\ \vdots \\ f_p(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} f_1(t_n) \\ \lim_{n\to\infty} f_2(t_n) \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} f_k(t_n) \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} f_p(t_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ y \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} = f(x)$$

"$\Leftarrow$" $\forall j \in \{1,2,\dots,p\}\ \forall (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge aus $X\setminus\{x\}$, $\lim_{n\to\infty} t_n = x$:

$(\lim_{n\to\infty} f_j(t_n) = f_j(x))$

$\Rightarrow \forall (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge aus $X \setminus \{x\}$, $\lim_{n\to\infty} t_n = x$:

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} f_1(t_n) \\ f_2(t_n) \\ \vdots \\ f_p(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} f_1(t_n) \\ \lim_{n\to\infty} f_2(t_n) \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} f_p(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} = f(x)$$