LINAG Ü5

2.6.1 $(b_1, \dots, b_n)$ Basis von V ges: alle x, sodass $(x, b_2, \dots, b_n)$, $(b_1, x, b_3, \dots, b_n), \dots, (b_1, \dots, x, \dots, b_n), \dots (b_1, b_2, \dots x)$ alle auch Basis von V sind.

Behauptung: x muss Linearkombination aus allen Vektoren $b_1, \dots, b_n$ sein, also

$$x = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot b_i \quad \text{mit } \forall i : m_i \neq 0$$

Bew: Für jedes beliebige b_K gilt:

$$x = \sum_{i=1}^{K-1} (m_i b_i) + m_K b_K + \sum_{i=k+1}^{n} (m_i b_i)$$

$$x - m_K b_K = \sum_{i=1}^{K-1} (m_i b_i) + \sum_{i=k+1}^{n} (m_i b_i)$$

$$-m_K b_K = \sum_{i=1}^{K-1} (m_i b_i) - x + \sum_{i=k+1}^{n} (m_i b_i)$$

$$b_K = \sum_{i=1}^{K-1} \left(-\frac{m_i}{m_K} b_i\right) + \frac{1}{m_K} x + \sum_{i=k+1}^{n} \left(-\frac{m_i}{m_K} b_i\right)$$

$\Rightarrow$ jeder Vektor aus V kann durch LK aus $((b_i) \setminus \{b_K\}) \cup \{x\}$ dargestellt werden.

$\Rightarrow$ Wenn b_K durch x ersetzt wird ist $(b_1, \dots, x, \dots, b_n)$ ein Erzeugungssystem.
Da $(b_1, \dots, b_n)$ linear unabhängig ist, ist die LK für x eindeutig.
Da für alle K von 1 bis n gilt, dass b_K in der LK für x vorkommt muss auch $(b_1, \dots, x, \dots, b_n)$ linear unabhängig sein.

Wenn $x = \sum_{i=1}^{n} m_i b_i$ mit $\exists j : m_j = 0$, dann wäre

$$x = \sum_{i=1}^{j-1} m_i b_i + 0 \cdot b_j + \sum_{i=j+1}^{n} m_i b_i$$

Dann ist aber die Familie $(b_1, \dots, b_{j-1}, x, b_{j+1}, \dots, b_n)$ linear abhängig, da $x = \sum_{i=1}^{j-1} m_i b_i + \sum_{i=j+1}^{n} m_i b_i$. $\lightning$

$\square$