ALG Ü4

125) $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ... aufsteigende Familie von Algebren

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i =: \mathcal{A}_\infty$$

zz: $\exists\, \mathcal{U} \le \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i \ \exists f: \mathcal{U} \to \mathcal{A}_\infty$ ... Homomorphismus

$B := \{(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i : \exists i_0\in\mathbb{N}\ \forall j\ge i_0 : a_j = a_{i_0}\} \subseteq \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i$

zz: $B \le \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i$ also B ist Unteralgebra von $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i$

Sei $\omega^{\prod\mathcal{A}_i}$ eine beliebige Operation auf $\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_i$. Sei n die Stelligkeit von $\omega^{\prod\mathcal{A}_i}$ und

$\vec{b}_1 = (b_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, \dots, \vec{b}_n = (b_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} \in B$ beliebig.

$\omega^{\prod\mathcal{A}_i}(\vec b_1,\dots,\vec b_n) = (\omega^{\mathcal{A}_j}(b_{1,j},\dots,b_{n,j}))_{j\in\mathbb{N}}$

$\forall k\in\{1,\dots,n\}\ \exists l_k\in\mathbb{N}\ \forall j\ge l_k: b_{k,j} = b_{k,l_k}$, da $(b_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}\in B$

Sei $\hat l$ eine obere Schranke von $\{l_k : k\in\{1,\dots,n\}\}$.

$\Rightarrow \forall j\ge\hat l: \omega^{\mathcal{A}_j}(b_{1,j},\dots,b_{n,j}) = \omega^{\mathcal{A}_{\hat l}}(b_{1,\hat l},\dots,b_{n,\hat l})$ ... „konstant" $\Rightarrow B$ ist abgeschlossen

$\sim \subseteq B\times B$ mit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \sim (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists i_1\in\mathbb{N}\ \forall j\ge i_1: a_j=b_j$

zz: $\sim$ ist Äquivalenzrelation also reflexiv, transitiv und symmetrisch

Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}, (b_j)_{j\in\mathbb{N}}, (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in B$ bel.

$(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \sim (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, da für $i_1=0$ gilt $\forall j\ge i_1$ (also $j\in\mathbb{N}$): $a_j=a_j$

$(a_j)\sim(b_j) \wedge (b_j)\sim(c_j) \Rightarrow \exists i_1,i_2\in\mathbb{N}((\forall j\ge i_1: a_j=b_j)\wedge(\forall j\ge i_2: b_j=c_j)) \Rightarrow \forall j\ge\max(i_1;i_2): a_j=b_j=c_j$

$(a_j)\sim(b_j)\Rightarrow \exists i_1\in\mathbb{N}\ \forall j\ge i_1: a_j=b_j \Rightarrow \forall j\ge i_1: b_j=a_j$

zz: $\sim$ ist Kongruenzrelation also verträglich mit allen Operationen

Sei $\omega^{\prod\mathcal{A}_i}$ eine beliebige Operation auf B. Sei n die Stelligkeit und $\vec a_1=(a_{1,j})_{j\in\mathbb{N}},\dots,\vec a_n=(a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$,

$\vec b_1 = (b_{1,j})_{j\in\mathbb{N}},\dots,\vec b_n=(b_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}\in B$ mit $\vec a_1\sim\vec b_1,\dots,\vec a_n\sim\vec b_n$ beliebig.

$\Rightarrow \exists l_1,\dots,l_n\in\mathbb{N}: \forall i\in\{1,\dots,n\}\ \forall j\ge l_i: a_{i,j} = a_{i,l_i} = b_{i,l_i} = b_{i,j} =: c_i \quad l=\max\{l_1,\dots,l_n\}$

$\Rightarrow \omega^{\prod\mathcal{A}_i}(\vec a_1,\dots,\vec a_n) = (\omega^{\mathcal{A}_j}(a_{1,j},\dots,a_{n,j}))_{j\in\mathbb{N}} \sim (\omega^{\mathcal{A}_l}(c_1,\dots,c_n))_{j\in\mathbb{N}} \sim (\omega^{\mathcal{A}_j}(b_{1,j},\dots,b_{n,j}))_{j\in\mathbb{N}} = \omega^{\prod\mathcal{A}_i}(\vec b_1,\dots,\vec b_n)$

$C := B/\sim$

$\Rightarrow C$ ist Trägermenge einer Algebra $\mathcal{C}$ vom gleichen Typ wie $\mathcal{B}$

...

ALG Ü4

125) ...

zz: $\mathcal{C} \simeq \mathcal{A}_\infty$ also $\exists f: C \to A_\infty$ ... Homomorphismus $\quad \in A_{i_0} \subseteq A_\infty$

Für $[(c_j)_{j\in\mathbb{N}}]_\sim \in C$ gilt $\forall (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in [(c_j)_{j\in\mathbb{N}}]_\sim \; \exists i_0 \in \mathbb{N} \; \forall j \geq i_0 : c_j = c_{i_0} =: \hat{c}$

Wir wollen zeigen, dass dieser Wert für unterschiedliche $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}, (d_j)_{j\in\mathbb{N}} \in [(c_j)_{j\in\mathbb{N}}]_\sim$ gleich ist. Da $(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \sim (d_j)_{j\in\mathbb{N}} \Rightarrow \exists i_1 \in \mathbb{N} \; \forall j \geq i_1 : c_j = d_j$

$\exists i_c \in \mathbb{N} \; \forall j \geq i_c : c_j = c_{i_c} \quad \exists i_d \in \mathbb{N} \; \forall j \geq i_d : d_j = d_{i_d} \quad i := \max\{i_1, i_c, i_d\}$

$\Rightarrow \forall j \geq i : c_j = c_i = d_i = d_j$ $\Rightarrow$ gleicher Wert c in oberer Formel

$f([(c_j)_{j\in\mathbb{N}}]_\sim) := \hat{c}$ (also dieser Wert aus A_∞)

Wohldefiniert: oben gezeigt

Homomorphismus:

Sei ω^C eine n-stellige Operation auf C. Sei $[(c_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}]_\sim, \dots, [(c_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}]_\sim \in C$ bel.

$$f(\omega^C([(c_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}]_\sim, \dots, [(c_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}]_\sim)) = f(\omega^B((\hat{c}_1)_{j\in\mathbb{N}}, \dots, (\hat{c}_n)_{j\in\mathbb{N}}))$$
$$= f((\omega^{A_e}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n))_{j\in\mathbb{N}}) = \omega^{A_e}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n) = \omega^{A_\infty}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n)$$

$$\omega^{A_\infty}(f([(c_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}]_\sim), \dots, f([(c_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}]_\sim)) = \omega^{A_\infty}(f((\hat{c}_1)_{j\in\mathbb{N}}), \dots, f((\hat{c}_n)_{j\in\mathbb{N}}))$$
$$= \omega^{A_\infty}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n)$$

$\Rightarrow \mathcal{C} \simeq \mathcal{A}_\infty$

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i \arrow[rr, dotted] \arrow[d, "\text{Unteralgebra}"'] & & \mathcal{A}_\infty \\
\mathcal{B} \arrow[rr, "\text{Faktorisieren nach Kongruenz}"'] & & \mathcal{C} \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

ALG Ü4

2005) A... Menge $\quad \Theta_1, \Theta_2, \ldots$ Äquivalenzrelationen auf A

$$\Theta_2/\Theta_1 := \{([a]_{\Theta_1}, [b]_{\Theta_1}) \in A/\Theta_1 \times A/\Theta_1 \mid (a,b) \in \Theta_2\}$$

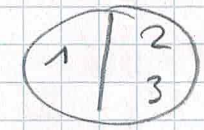
a) ges: Beispiel sodass $([x]_{\Theta_1}, [y]_{\Theta_1}) \in \Theta_2/\Theta_1 \not\Leftrightarrow (x,y) \in \Theta_2$

$A = \{1,2,3\} \quad A/\Theta_1 = \{\{1\},\{2,3\}\} \quad A/\Theta_2 = \{\{1,2\},\{3\}\}$

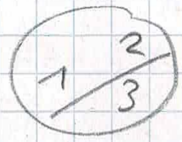
$x = 1,\ y = 3 \quad \Rightarrow (x,y) = (1,3) \notin \Theta_2$

$([x]_{\Theta_1}, [y]_{\Theta_1}) = (\{1\},\{2,3\}) = ([1]_{\Theta_1}, [2]_{\Theta_1}) \in \Theta_2/\Theta_1$, da $(1,2) \in \Theta_2$

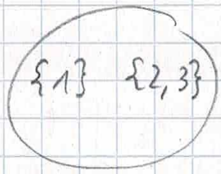
A/Θ_1



A/Θ_2



Θ_2/Θ_1



b) zz: $(\forall x,y \in A: ([x]_{\Theta_1}, [y]_{\Theta_1}) \in \Theta_2/\Theta_1 \Leftrightarrow (x,y) \in \Theta_2) \Rightarrow \Theta_1 \subseteq \Theta_2$

Sei $(x,y) \in \Theta_1$ bel.

$([x]_{\Theta_1}, [y]_{\Theta_1}) = ([x]_{\Theta_1}, [x]_{\Theta_1}) \in \Theta_2/\Theta_1$, da $(x,x) \in \Theta_2$ (reflexiv)

$\Rightarrow (x,y) \in \Theta_2$

also $\Theta_1 \subseteq \Theta_2$

ALG Ü4

2006) a) $(H, \cdot)$ ... Halbgruppe

ges: S ... Menge und $\iota: H \to S^S$ ... isomorphe Einbettung

$S = H \cup \{e\}$ wobei e das neutrale Element ist also $\forall h \in H: eh := h =: he$

$\iota(h) := f_h: S \to S \quad , \quad s \mapsto h \cdot s$

ι ist ein Homomorphismus, da $\forall h, g \in H$ gilt

$\iota(h \cdot g) = f_{h \cdot g} = s \mapsto (h \cdot g) \cdot s = s \mapsto h \cdot (g \cdot s) = s \mapsto h \cdot f_g(s) = s \mapsto f_h \circ f_g(s)$

$= f_h \circ f_g = \iota(h) \circ \iota(g)$

ι ist injektiv, da $\forall h, g \in H$ mit $\iota(g) = \iota(h)$ bel. gilt

$\forall s \in S = H \cup \{e\}: g \cdot s = f_g(s) = \iota(g)(s) = \iota(h)(s) = f_h(s) = h \cdot s$

$\Rightarrow g = g \cdot e = h \cdot e = h$ (für die Wahl $s = e$)

$\Rightarrow \iota: H \to \iota(H) \subseteq S^S$ ist ein Isomorphismus

b) ges: H ... Halbgruppe sodass $\varphi: H \to H^H$, $a \mapsto f_a$ wobei $f_a(x) = ax$ ist nicht injektiv ist.

$H = \mathbb{Z}$ mit Operation $(x, y) \mapsto |x \cdot y|$

(i) $(\mathbb{Z}, (x, y) \mapsto |x \cdot y|)$ ist eine Halbgruppe, da unter der Operation abgeschlossen und assoziativ $||x \cdot y| \cdot z| = |x \cdot y \cdot z| = |x \cdot |y \cdot z||$

(ii) φ ist nicht injektiv, da

$\varphi(1) = a \mapsto |1 \cdot x| = |x| \qquad \varphi(-1) = a \mapsto |-1 \cdot x| = |x|$

ALG Ü4

155) G... Gruppe $U \leq G$

zz: U hat gleich viele Links- und Rechtsnebenklassen

$L := \{gU \mid g \in G\}$ $R := \{Ug \mid g \in G\}$

$f: L \to R$

$gU \mapsto Ug^{-1}$

zz: f ist wohldefiniert

Sei $g, h \in G$ bel. Wenn $\{gv : v \in U\} = gU = hU = \{hv : v \in U\}$, dann

$\Rightarrow \exists \hat{v} \in U: g = g \cdot e = h\hat{v}$

Sei $vg^{-1} \in Ug^{-1}$ bel. $\Rightarrow vg^{-1} = v(h\hat{v})^{-1} = \underbrace{v\hat{v}^{-1}}_{\in U} h^{-1} \in Uh^{-1}$

Für $vh^{-1} \in Uh^{-1}$ genauso $\Rightarrow Ug^{-1} = Uh^{-1}$

zz: f ist bijektiv

$g: R \to L$ ist wohldefiniert mit Beweis analog zu oben

$Uh \mapsto h^{-1}U$

Sei $hU \in L$ bel. $g(f(hU)) = g(Uh^{-1}) = (h^{-1})^{-1}U = hU$

$\Rightarrow g = f^{-1}$ also ist f bijektiv

$\square$

ALG Ü4

2007) $(G, \cdot, 1, ^{-1})$ ... Gruppe $U \leq G$ $K := \{gU : g \in G\}$

a ⇒ b) $(\forall g \in G : gU = Ug) \Rightarrow (\forall g \in G : gU \subseteq Ug)$

klar

b ⇒ c) $(\forall g \in G : gU \subseteq Ug) \Rightarrow (\forall g \in G : gUg^{-1} = U)$

$gUg^{-1} = \{x \in G \mid \exists u \in U : x = gug^{-1}\}$

Sei $g \in G$ bel. Sei $u \in U$ bel.

- $\Rightarrow \exists v \in U : gu = vg$, da $gU \subseteq Ug$ somit gilt

$gug^{-1} = vgg^{-1} = v \in U \Rightarrow gUg^{-1} \subseteq U$

- $\Rightarrow \exists v \in U : g^{-1}u = vg^{-1}$, da $g^{-1}U \subseteq Ug$ somit gilt

$u = gg^{-1}u = gvg^{-1} \in gUg^{-1} \Rightarrow U \subseteq gUg^{-1} \Rightarrow gUg^{-1} = U$

c ⇒ a) $(\forall g \in G : gUg^{-1} = U) \Rightarrow (\forall g \in G : gU = Ug)$

Sei $g \in G$ bel. Sei $u \in U$ bel.

$\Rightarrow gug^{-1} = v \in U \Rightarrow gu = vg \in Ug$

$\Rightarrow \exists v \in U : gvg^{-1} = u \Rightarrow gv = ug \Rightarrow ug \in gU \Rightarrow gU = Ug$

a) ⇒ d) $(\forall g \in G : gU = Ug) \Rightarrow (\forall g, h \in G : (gh^{-1} \in U \Leftrightarrow h^{-1}g \in U))$

Sei $g, h \in G$ mit $gh^{-1} \in U$ bel.

$\Rightarrow \exists u \in U : gh^{-1} = u \Rightarrow g = uh \overset{a)}{\Rightarrow} \exists v \in U : uh = hv$

$\Rightarrow g = hv \Rightarrow h^{-1}g = v \in U$

Für $h^{-1}g \in U$ folgt aus oben mit $g' = h^{-1}$ die Aussage $gh^{-1} \in U$.

d) ⇒ b) $(\forall g, h \in G : (gh^{-1} \in U \Leftrightarrow h^{-1}g \in U)) \Rightarrow (\forall g \in G : gU \subseteq Ug)$

Sei $g \in G$, $u \in U$ bel. $gu =: h \in G \Leftrightarrow g = hu^{-1} \Leftrightarrow h^{-1}g = u^{-1} \in U$

$\Rightarrow gh^{-1} =: v \in U \Leftrightarrow g = vh \Leftrightarrow v^{-1}g = h \Rightarrow gu = h = v^{-1}g \in Ug$

...

ALG Ü4

2007) ...

e) $\forall g,h \in G: \; gU * hU := (gh)U$ liefert eine wohldefinierte Abbildung von $K \times K$ nach K

Wohldefiniert:

$$\forall g,g',h,h': ((gU = g'U \wedge hU = h'U) \Rightarrow ((gh)U = (g'h')U))$$

a,b,c,d) $\Rightarrow$ e)

Sei $g,g',h,h' \in G$ mit $gU = g'U \wedge hU = h'U$ bel.

$*$ [$\forall g,h \in G: \; g(hU) = (gh)U$

$$g(hU) = \{x \in G : \exists y \in \{z \in G : \exists u \in U : z = hu\} : x = g \cdot y\}$$
$$= \{x \in G : \exists u \in U : x = g \cdot (hu)\} = \{x \in G : \exists u \in U : x = (gh)u\} = (gh)U$$

$$(gh)U \overset{*}{=} g(hU) = g(h'U) \overset{*}{=} (gh')U \overset{(a)}{=} U(gh')$$

$*'$ [$\forall g,h \in G: (Ug)h = U(gh)$ Beweis wie oben

$$\overset{*'}{=} (Ug)h' \overset{a)}{=} (gU)h' = (g'U)h' \overset{a)}{=} (Ug')h' \overset{*'}{=} U(g'h') \overset{a)}{=} (g'h')U$$

e) $\Rightarrow$ d)

Sei $g,h \in G$ mit $gh^{-1} \in U$ bel.

$\Rightarrow (gh^{-1})U = U \qquad gU = g^{-1}U \qquad h^{-1}U = hU$

$\Rightarrow (g^{-1}h)U = U \quad \Rightarrow \forall u \in U \, \exists v \in U: \; g^{-1}hu = v$

$\Leftrightarrow hu = gv \quad \Leftrightarrow u = h^{-1}gv \quad \Leftrightarrow uv^{-1} = h^{-1}g \quad \Rightarrow h^{-1}g \in U$

Falls $h^{-1}g \in U$ folgt die Aussage wenn man $g = h^{-1}$ setzt.

$\square$

ALG Ü4

144) $(\mathbb{N},+)$ ges: nichttriviale R, S ... Kongruenzrelationen mit

(i) $(3,14) \in R$

(ii) $\exists$ mindestens zwei R-Äquivalenzklassen, die 1-elementig und mindesten zwei , die nicht 1-elementig sind

(iii) $(3,14) \in S$

(iv) $\forall$ S-Äquivalenzklassen sind nicht 1-elementig

$(x,y) \in S :\Longleftrightarrow x-y \in 11\mathbb{Z}$

reflexiv: $x-x=0 \in 11\mathbb{Z}$ symmetrisch: $x-y \in 11\mathbb{Z} \Rightarrow y-x=-(x-y) \in 11\mathbb{Z}$

transitiv: $(x,y),(y,z) \in S \Rightarrow x-y \in 11\mathbb{Z}, y-z \in 11\mathbb{Z} \Rightarrow x-z = \underline{x-y}+\underline{y-z} \in 11\mathbb{Z}$

verträglich mit $+$: $(x,y),(a,b) \in S \Rightarrow x-y, a-b \in 11\mathbb{Z} \Rightarrow x+a-(y+b) = \underline{x-y}+\underline{a-b} \in 11\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sim_S$ ist Kongruenzrelation (nicht trivial, da $0 \sim_S 11$ und $0 \not\sim_S 1$)

(iii) $(3,14) \in S$, da $3-14=-11 \in 11\mathbb{Z}$

(iv) Sei $n \in \mathbb{N}$ bel. $\Rightarrow n+11 \neq n$ und $n, n+11 \in [n]_{\sim_S}$

Partition von R: $M_i = \{i\}\ \forall i \in \{0,1,2\}$ $M_i = \{i+11n : n \in \mathbb{N}\}\ \forall i \in \{3,\dots,13\}$

reflexiv, symmetrisch, transitiv nach Definition

mit + verträglich: Sei $a, a', b, b' \in \mathbb{N}$ mit $a \sim a'$ und $b \sim b'$ bel.

1. Fall $a \leq 2 \Rightarrow a' = a$

i. Fall $b \leq 2 \Rightarrow b' = b$ $\Rightarrow a+b \sim a'+b' = a+b$

ii. Fall $b \geq 3 \Rightarrow \exists i \in \{3,\dots,13\}\ \exists n, n' \in \mathbb{N}: b = i+11n \wedge b' = i+11n'$

$\Rightarrow a+b = a+i+11n$ $a'+b' = a+i+11n'$ $\Rightarrow a+b \sim a'+b'$

2. Fall $a \geq 3 \Rightarrow \exists i \in \{3,\dots,13\}\ \exists n, n' \in \mathbb{N}: a = i+11n \wedge a' = i+11n'$

i. Fall $b \leq 2 \Rightarrow b' = b \Rightarrow a+b \sim a'+b'$ wie oben

ii. Fall $b \geq 3 \Rightarrow \exists j \in \{3,\dots,13\}\ \exists l, l' \in \mathbb{N}: b = j+11l \wedge b' = j+11l'$

$\Rightarrow a+b = i+11n+j+11l = i+j+11(n+l)$ $a'+b' = i+11n'+j+11l' = i+j+11(n'+l')$

$\Rightarrow a+b \sim a'+b'$

(i) $3 = 3+11 \cdot 0$ $14 = 3+11 \cdot 1$ (ii) M_0, M_1 ... einelementig

$\Rightarrow 3 \sim_R 14$ M_3, M_4 ... nicht einelementig