LINAG Ü10

4.3.2 $\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ kanonische Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $e_n = (\delta_{in})_{i\in\mathbb{N}}$

a) $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $b_0=(1,0,0,0,\ldots)$ $b_1=(-1,1,0,0,\ldots)$ $b_2=(0,-1,1,0,\ldots)\ldots$

zz: $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist Basis von $\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$

Offensichtlich ist $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ l.u., da $\forall j\in\mathbb{N}: b_{jj}=1 \wedge (\forall k<j: b_{kj}=0)$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ bel. Wir wissen $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall k>N: a_{nk}=0$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{j=0}^{N} a_{nj}\cdot\sum_{k=0}^{j} b_k \quad, \text{da} \quad \sum_{k=0}^{j} b_k = (0,0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{1},0,\ldots)$$

$\Rightarrow (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist Basis, da l.u. und ES.

b) ges: $\langle b_j^*, (a_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle \in \mathbb{R}$

Da $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = \sum_{l=0}^{N} a_{il}\cdot\sum_{k=0}^{l} b_k$ ist und b_j in jeder inneren Summe, die

bei zu einem $k \geq l$ geht, vorkommt (und dann immer multipliziert

mit a_{il}) ist

$$b_j^*((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{k=j}^{N} a_{ik}$$

Welche $b_j^* \in [(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}]$?

Sei $j\in\mathbb{N}$ bel.

$$b_j^*((e_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{k=j}^{n} e_{nk}$$

Sei $n\in\mathbb{N}$ bel.

$$b_j^*(e_n) = \sum_{k=j}^{n} e_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \leq j \\ 0, & \text{falls } n > j \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Alle b_j^* liegen in der Hülle von $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$. ?