FANA Ü3

21.) H ... Hilbertraum a) $A: H \to H$ ... lin., symmetrisch $(\forall x,y \in H: (Ax,y)=(x,Ay))$ zz: A ... stetig

Wir wollen den Satz vom abgeschlossenen Graphen (4.4.2) verwenden: Wenn X, Y Banachräume sind und $R: X \to Y$ ist linear sowie der Graph von R ist in $X \times Y$ abgeschlossen, so ist R stetig.
Aus der Bemerkung 4.4.3. wissen wir, dass graph A genau dann abgeschlossen ist, wenn $\forall$ Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H mit $\exists x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $\exists y := \lim_{n\to\infty} A(x_n) \Rightarrow y = F(x)$. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so eine Folge und sei $z \in H$ bel.

$$(y,z) = (\lim_{n\to\infty} A(x_n), z) \overset{(\cdot,\cdot)\text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} (A(x_n), z) \overset{\text{symm.}}{=} \lim_{n\to\infty} (x_n, Az) \overset{(\cdot,\cdot)\text{ stetig}}{=} (x, Az) \overset{\text{symm.}}{=} (Ax, z)$$

$$\Rightarrow 0 = (Ax,z) - (y,z) = (Ax-y, z) \ \forall z \in H \Rightarrow Ax - y \in H^\perp = \{0\} \Rightarrow Ax = y \Rightarrow A \text{ stetig}$$

b) $\forall x \in H: (Ax,x) \in \mathbb{R} \Rightarrow A$ ... symmetrisch

Sei $x,y \in H$ bel. $\Rightarrow \overset{\in\mathbb{R}}{(A(x+y), x+y)} = \overset{\in\mathbb{R}}{(Ax,x)} + \overset{\in\mathbb{C}}{(Ax,y)} + \overset{\in\mathbb{C}}{(Ay,x)} + \overset{\in\mathbb{R}}{(Ay,y)}$

$$0 = \mathrm{Im}((Ax,y)) + \mathrm{Im}((Ay,x)) = \mathrm{Im}((Ax,y)) - \mathrm{Im}((x,Ay))$$

Ebenso $\overset{\in\mathbb{R}}{(A(x+iy), x+iy)} = \overset{\in\mathbb{R}}{(Ax,x)} + (Ax,iy) + \overset{\in\mathbb{C}}{(A(iy),x)} + \overset{\in\mathbb{R}}{(A(iy),iy)}$

$$0 = \mathrm{Im}((Ax,iy)) + \mathrm{Im}((A(iy),x)) = \mathrm{Im}(-i(y,Ax)) + \mathrm{Im}(i(Ay,x)) = -\mathrm{Re}((y,Ax)) + \mathrm{Re}((Ay,x))$$

$$\Rightarrow 0 = (Ay,x) - (y,Ax)$$

c) $A: X \to X$, $f(t) \mapsto if'(t)$ zz: A ... symmetrisch, nicht stetig

symmetrisch: Sei $f,g \in X$ bel. $(Af,g) = \int_0^1 if'(t)\overline{g(t)}\,dt = if(t)\overline{g(t)}\Big|_0^1 - \int_0^1 if(t)\overline{g'(t)}\,dt$
$= 0 - \int_0^1 if(t)\overline{g'(t)}\,dt = \int_0^1 f(t)\,\overline{ig'(t)}\,dt = (f, Ag)$

nicht stetig: A ist lin, daher $\|A\| < +\infty \Leftrightarrow A$ ... stetig. Also zeigen wir $\|A\| = +\infty$:
Sei η ein Mollifier. Für $\varepsilon > 0$ definiere $g_\varepsilon(t) := \frac{2t-1}{\varepsilon}$, für $t \in [0,1]$ und 0 für $t \notin [0,1]$.
Dann ist $f_\varepsilon(t) := \eta(g_\varepsilon(t))$ eine bel. oft diffbare, außerhalb von $[0,1]$ verschwindende Funktion.

$$\|f_\varepsilon\|^2 = \int_0^1 \left|\eta\left(\tfrac{2t-1}{\varepsilon}\right)\right|^2 dt = \int_{-1}^1 \tfrac{1}{2^2}\left|\eta\left(\tfrac{u}{\varepsilon}\right)\right|^2 dt \le \tfrac{1}{4}\int_{-1}^1 1^2\,dt = \tfrac{1}{2} \qquad \left[u = 2t-1 \quad \tfrac{du}{dt} = 2\right]$$

$$\|Af_\varepsilon\|^2 = \int_0^1 \left|i\eta\left(\tfrac{2t-1}{\varepsilon}\right)'\right|^2 dt = \int_0^1 \left|\eta'\left(\tfrac{2t-1}{\varepsilon}\right)\tfrac{2}{\varepsilon}\right|^2 dt = \frac{4}{\varepsilon^2}\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} |\eta'(u)|^2 \frac{\varepsilon}{2}\,du = \frac{2}{\varepsilon}\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} |\eta'(u)|^2\,du$$

Da η ein Mollifier ist gilt $\mathrm{supp}\,\eta \subseteq [-1,1]$ und somit $\mathrm{supp}\,\eta' \subseteq [-1,1]$. Für klein genuges ε gilt also $\|Af_\varepsilon\|^2 = \frac{2}{\varepsilon}\int_{-1}^1 |\eta'(u)|^2\,du \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \infty \Rightarrow \|A\| = \sup_{f\in X} \frac{\|Af\|}{\|f\|} \ge \sup_{\varepsilon\in(0,1)} \frac{\|Af_\varepsilon\|}{\|f_\varepsilon\|} = +\infty \Rightarrow$ nicht stetig. $\square$

FANA Ü3

22) H ... Hilbertraum, S ... positiver Operator (d.h. $\forall x \in H: (Sx,x) \geq 0$), $T_t := S + t\, Id$ zz: $\forall t > 0: T_t$ ... bij.

Definiere $\langle x,y \rangle := (T_t x, y)$. Wir zeigen zuerst, dass $\langle x,y\rangle$ ein Skalarprodukt definiert:

- positiv definit: $x \in H$ bel. $\langle x,x\rangle = (T_t x, x) = (Sx + tx, x) = \underbrace{(Sx,x)}_{\geq 0} + t\underbrace{(x,x)}_{\geq 0} \geq 0$ für $t > 0$.

  $\langle 0,0\rangle = (\underbrace{S(0)}_{=0}, 0) + t\underbrace{(0,0)}_{=0} = (0,0) = 0$ und $0 = \langle x,x\rangle = \underbrace{(Sx,x)}_{\geq 0} + \underbrace{t}_{>0}(x,x) \Rightarrow (x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$

- hermitesch: $x,y \in H$ bel. $\overline{\langle y,x\rangle} = \overline{(Sy + ty, x)} = \overline{(Sy,x)} + t\overline{(y,x)} = (x, Sy) + (tx, y)$

  Da $(Sx,x) \geq 0 \Rightarrow$ aus 21b), dass S ... symmetrisch also $(Sx,y) = (x,Sy)$

  $\Rightarrow \overline{\langle y,x\rangle} = (Sx,y) + (tx,y) = (Sx + tx, y) = \langle x,y\rangle$

- linear: Sei $x,y,z \in H$ bel. $\langle x+y, z\rangle = (S(x+y) + t(x+y), z) = (Sx + Sy + tx + ty, z) = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

  Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ bel. $\langle \lambda x, y\rangle = (S(\lambda x) + t(\lambda x), y) = (\lambda(Sx + tx), y) = \lambda \langle x,y\rangle$

Nun zeigen wir, dass die beiden Normen $\|.\| := \sqrt{(.,.)}$ und $|||.||| := \sqrt{\langle .,.\rangle}$ äquivalent sind:

$|||x|||^2 = \langle x,x\rangle = (T_t x, x) \leq |(T_t x, x)| \overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \|T_t x\| \cdot \|x\| \leq \|T_t\| \cdot \|x\|^2$, da T_t ... lin, symm. also nach 21a) stetig. (Abbildungsnorm)

$\|x\|^2 = (x,x) \leq (x,x) + \underbrace{\tfrac{1}{t}}_{>0}\underbrace{(Sx,x)}_{\geq 0} = \tfrac{1}{t}(tx,x) + \tfrac{1}{t}(Sx,x) = \tfrac{1}{t}(Sx + tx, x) = \tfrac{1}{t}\langle x,x\rangle = \tfrac{1}{t}|||x|||^2$

$\Rightarrow |||x|||^2 \leq \|T_t\| \cdot \|x\|^2 \leq \|T_t\| \tfrac{1}{t} |||x|||^2$ also sind die Normen äquivalent.

Es folgt das die Stetigkeit auf $(H, (.,.))$ äquivalent zur Stetigkeit auf $(H, \langle .,.\rangle)$ ist.

Als nächstes zeigen wir T_t ist inj.: Sei $x \in \ker T_t$ bel.

$\Rightarrow 0 = T_t(x) = Sx + tx \Rightarrow 0 \leq (Sx,x) = (-tx,x) = \underbrace{-t}_{<0}\underbrace{(x,x)}_{\geq 0} \Rightarrow (x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Sei $y \in H$ bel. Definiere $\varphi: H \to \mathbb{C}$, $x \mapsto (x,y)$. φ ist lin., stetig auf $(H, \|.\|)$. Nach Riesz-Fischer $\exists!\, z \in H\ \forall x \in H: (x,y) = \varphi(x) = \langle x,z\rangle = (T_t x, z) \overset{\text{symm.}}{=} (x, T_t z)$

$\Rightarrow y = T_t z$ auf Grund der Eindeutigkeit. Daraus folgt aber die Surjektivität von T_t.

$\Rightarrow T_t$ ist bijektiv. $\square$

FANA Ü3

23) a) Zeige mit dem Satz von Baire, dass $[0,1]$ überabzählbar ist.

Indirekt angenommen $[0,1]$ ist abzählbar, dann gäbe es $x_n, n \in \mathbb{N}$ in $[0,1]$ sodass $[0,1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definiere $V_n := [0,1] \setminus \{x_n\}$ $(= \{x_n\}^c)$. Da einpunktige Mengen abgeschlossen sind ist V_n offen. Außerdem gilt V_n liegt für alle $n \in \mathbb{N}$ dicht in $[0,1]$, da für $x \in V_n$ bel. folgt $\frac{|x - x_n|}{2} =: \varepsilon > 0$ und somit $U_\varepsilon(x) \cap [0,1] \subseteq V_n$.

Mit dem Satz von Baire (4.1.1.) erhalten wir (da $([0,1], d_{Euklid})$ ein vollständig metr. Raum ist) aus obigem, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ dicht in X ist. Es gilt aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}^c = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}\right)^c = ([0,1])^c = \emptyset$ was sicher nicht dicht in $[0,1]$ ist. $\lightning$

---

b) zz: Es gibt keine Norm, die den Raum P der Polynome auf $[0,1]$ zu einem Banachraum macht.

$B = \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Basis von P, diese ist abzählbar unendlich. Nach Beispiel 24. gibt es aber keinen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ mit abzählbar unendlicher Basis, daher kann auch keine Norm $\|\cdot\|$ mit $(P, \|\cdot\|)$ ist Banachraum existieren. $\square$

FANA Ü3

24) $(X, \|.\|)$ ... Banachraum, B ... algebraische Basis von X als $\mathbb{C}$-VR zz: $|B| < \infty$ oder $|B| > \aleph_0$

Indirekt angenommen X hat eine Basis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (also abzählbar unendlich). o.B.d.A. $\forall n \in \mathbb{N}: \|b_n\| = 1$

Definiere die Folge $x_k := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} b_i$ für $k = 1, 2, \ldots$

Wir zeigen, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, aber der Grenzwert nicht in X liegt:

- Cauchy-Folge: Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle N, sodass $\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq \varepsilon$ Sei $n > m > N$ bel.

$$\Rightarrow \|x_n - x_m\| = \|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} b_i - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} b_i\| = \|\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{2^i} b_i\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{2^i} \underbrace{\|b_i\|}_{=1} = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{2^i} < \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq \varepsilon$$

- Grenzwert liegt nicht in X: $X = \text{span}(\{b_n : n\in\mathbb{N}\}) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{C}\}$

$\lim_{k\to\infty} x_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} b_i$ und liegt somit nicht in X.

Daher ist $(X, \|.\|)$ nicht vollständig und kann somit kein Banachraum sein. $\lightning$ $\square$

FANA Ü3

25) a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $M := \{x \in \mathbb{R} : f \text{ ist stetig bei } x\}$ zz: M ist eine G_δ-Menge

[Def M... G_δ-Menge $\iff \exists (O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offene Mengen: $M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$

Definiere $O_n := \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 \, \forall s,t \in [x-\delta, x+\delta] : |f(s) - f(t)| < \frac{1}{n}\}$

- zz: O_n ist offen: Sei $x \in O_n$ bel. Wähle $\delta > 0$ wie nach Definition von O_n existent.

  Sei $y \in [x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}]$ bel. $\Rightarrow \forall s,t \in [y - \frac{\delta}{2}, y + \frac{\delta}{2}] \Rightarrow s,t \in [x-\delta, x+\delta]$

  und somit $|f(s) - f(t)| < \frac{1}{n}$ $\Rightarrow y \in O_n$ $\Rightarrow$ $U_{\frac{\delta}{2}}(x) = [x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}] \subseteq O_n$

- zz: $M \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$: Sei $x \in M$ bel. $\Rightarrow f$ ist bei x stetig $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall s \in U_\delta(x) : f(s) \in U_\varepsilon(f(x))$

  Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2n}$ und das dazu passende $\delta > 0$. Sei $s,t \in U_\delta(x)$ bel.

  $\Rightarrow |f(s) - f(t)| = |f(s) - f(x) + f(x) - f(t)| \leq |f(s) - f(x)| + |f(t) - f(x)| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$

  $\Rightarrow x \in O_n \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \Rightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$

- zz: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \subseteq M$: Sei $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ bel. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x \in O_n$ also $\exists \delta > 0 \, \forall s,t \in U_\delta(x) : |f(s) - f(t)| < \frac{1}{n}$

  Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow \exists \delta > 0 \, \forall s,t \in U_\delta(x) : |f(s) - f(t)| < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

  $\Rightarrow |f(x) - f(s)| = |f(x) - f(t) + f(t) - f(s)| \leq |f(x) - f(t)| + |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\Rightarrow x \in M$

b) zz: $\nexists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $M = \mathbb{Q}$ also nur an allen rationalen Punkten stetig.

Angenommen es gäbe so ein $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nach a) wäre dann $\mathbb{Q}$ ein G_δ-Menge und somit $\exists (O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offen: $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{Q} \subseteq O_n$ und da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, liegen alle O_n dicht in $\mathbb{R}$.

Wir definieren $V_0 = O_0$, $V_1 = O_0 + z$, $V_2 = O_1$, $V_3 = O_1 + z$, $V_4 = O_2$, $V_5 = O_2 + z$, ... mit $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (z.B. $\sqrt{2}$)

Alle V_n sind offen und dicht in $\mathbb{R}$, da O_n offen und dicht sind. $\mathbb{R}$ ist vollständig also ist nach Satz von Baire (4.1.1) auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dicht in $\mathbb{R}$, dieser ist aber $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n}_{\subseteq \mathbb{Q}} \cap \underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n + z}_{\subseteq \mathbb{Q}+z} = \emptyset$ ↯

c) ges: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit } p,q \text{ teilerfremd} \end{cases}$ i) zz: f bei $\mathbb{Q}$ nicht stetig: $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ bel. Für $\varepsilon = \frac{1}{2q}$ gilt $\forall \delta > 0 \, \exists y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap U_\delta(\frac{p}{q})$ und somit $|f(\frac{p}{q}) - f(y)| = |\frac{1}{q} - 0| = \frac{1}{q} > \frac{1}{2q} = \varepsilon$. ii) f ist bei $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig: Sei $x \notin \mathbb{Q}$ bel. Sei $\varepsilon > 0$ bel. o.B.d.A. $x \in [0,1]$ sonst betrachte Verschiebung. $U_1 = \{y \in [0,1] : f(y) < \varepsilon\}$

$U_2 := [0,1] \setminus U_1 \subseteq \mathbb{Q}$ und $\frac{p}{q} \in U_2 \iff \frac{1}{q} \geq \varepsilon \iff q \leq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow U_2 \subseteq \{\frac{p}{q} : q \leq \frac{1}{\varepsilon} \text{ und } p \in \{0,1,2,\dots,q\}\} \Rightarrow U_2$ endlich also $\exists \delta > 0$ $U_\delta(x) \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow U_\delta(x) \subseteq U_1$ also ist f bei x stetig.

$\square$

FANA Ü3

26) Ω ... Menge, $X \subseteq \{f : \Omega \to \mathbb{C}\}$ ... lin. Raum mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation

$w \in \Omega$, $\chi_w : X \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(w)$ ... linear   zz: Es gibt (bis auf Äquivalenz) höchstens eine Norm $\|.\|$ auf X, sodass $(X, \|.\|)$ ein Banachraum ist und alle Punktauswertungsfunktionale bzgl. $\|.\|$ stetig sind.

Sei $\|.\|$ und $|||.|||$ mit obigen Eigenschaften bel.

$id : (X, \|.\|) \to (X, |||.|||)$ ist linear.

$\operatorname{graph} id = \{(f, id(f)) \in X \times X : f \in X\} = \{(f,f) : f \in X\} = \{(f,g) \in X \times X : \forall w \in \Omega : f(w) = g(w)\}$

Definiere $D = \{(x,x) : x \in \mathbb{C}\}$, dann ist weiter gleich $= \bigcap_{w \in \Omega} \{(f,g) \in X \times X : (\chi_w(f), \chi_w(g)) \in D\}$

$= \bigcap_{w \in \Omega} \{ z \in X \times X : (\chi_w \circ \pi_1(z), \chi_w \circ \pi_2(z)) \in D\} = \bigcap_{w \in \Omega} (\chi_w \circ \pi_1, \chi_w \circ \pi_2)^{-1}(D)$

D ist abgeschlossen in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $\chi_w \circ \pi_i$ ist stetig also gilt, dass $(\chi_w \circ \pi_i)^{-1}(D)$ abgeschlossen ist und somit auch $\operatorname{graph} id = \bigcap_{w \in \Omega} (\chi_w \circ \pi_1, \chi_w \circ \pi_2)^{-1}(D)$ in $(X, \|.\|) \times (X, |||.|||)$.

Analog zeigt man obiges für id^{-1}. Aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (4.4.2) folgt nun, dass id, id^{-1} stetig sind. Womit folgt, dass $\mathcal{T}(\|.\|) = \mathcal{T}(|||.|||)$ und somit $\|.\| \sim |||.|||$ (also die Äquivalenz). $\square$

FANA ÜB

27) Zeigen Sie mit dem Satz von der offenen Abbildung, dass die Fouriertransformation als Abbildung von $L^1(\mathbb{T})$ nach $c_0(\mathbb{Z})$ nicht surjektiv ist.

Satz von der offenen Abbildung: X, Y ... Banachräume, $R: X \to Y$ ... surj, beschränkt, lin.
$\Rightarrow R$ ist offen (also $\forall O \subseteq X$ ... offen $\Rightarrow f(O) \subseteq Y$ ... offen)

Wir wissen: $L^1(\mathbb{T})$ ist ein Banachraum. $f \mapsto \hat{f}$ ist linear, beschränkt, stetig, injektiv.

Wir zeigen nun, dass $c_0(\mathbb{Z})$ ein Banachraum ist und dass $f \mapsto \hat{f}$ nicht offen ist:

verkehrte Reihenfolge macht mehr Sinn

- $f \mapsto \hat{f}$ ist offen $\Leftrightarrow$ $\hat{f} \mapsto f$ stetig ist. Sei $\mathcal{F}(f) := \hat{f}$. $\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}: \mathcal{F}(L^1(\mathbb{T})) \to L^1(\mathbb{T})$

  Wir wollen also $\|\mathcal{F}^{-1}\| = \sup\left\{ \frac{\|\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))\|_1}{\|\mathcal{F}(f)\|_\infty} : \mathcal{F}(f) \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{T})) \setminus \{0\} \right\} = \infty$ zeigen.

  Für $f_n := \frac{1}{\|D_n\|_1} D_n$ gilt $\|f_n\|_1 = 1$ und, da $\mathcal{F}(D_n)_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-n}^{n} e^{ijx} e^{-ikx}\, dx = \begin{cases} 2\pi, & |k| \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

  folgt $\|\mathcal{F}^{-1}\| = \sup_{f \in L^1(\mathbb{T}) \setminus \{0\}} \frac{\|f\|_1}{\|\mathcal{F}(f)\|_\infty} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|f_n\|_1}{\|\mathcal{F}(f_n)\|_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\frac{1}{\|D_n\|_1} \|\mathcal{F}(D_n)\|_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|D_n\|_1}{2\pi} = \infty$

- $c_0(\mathbb{Z})$ ist ein lin. Teilraum von ℓ^∞ (der Menge aller beschränkten Folgen). Wir zeigen, dass $c_0(\mathbb{Z})$ abgeschlossen ist, da dann aus ℓ^∞ ist vollständig, die Vollständigkeit von $c_0(\mathbb{Z})$ folgt.

  Sei $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}}$ eine gegen $(x^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty$ konvergente Folge in $c_0(\mathbb{Z})$.

  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \lim_{k \to \pm\infty} x_n^k = 0$, da $(x_n^k) \in c_0(\mathbb{Z})\ \forall n$ und $x^k = \lim_{n \to \infty} x_n^k$ nach Definition

  $\lim_{k \to \pm\infty} x^k = \lim_{k \to \pm\infty} \lim_{n \to \infty} x_n^k = \lim_{n \to \infty} \lim_{k \to \pm\infty} x_n^k = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$, wegen dem Limesvertauschungslemma

  Also ist $(c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Wir haben nun alles gezeigt um für $X = L^1(\mathbb{T})$, $Y = c_0(\mathbb{Z})$, $R = \mathcal{F}$ mit der Kontraposition aus dem Satz der offenen Abbildung zu zeigen, dass

$\mathcal{F}$ ... nicht offen $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ ... nicht surjektiv. $\square$

FANA Ü3

29) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge für die $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n c_n$ für alle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ konvergiert, so ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Wir verwenden den Satz der glm. Beschränktheit (4.2.2.) für $X = \ell^2(\mathbb{N})$ ... Banachraum $Y = \mathbb{C}$ ... normierter Raum, $R_n : X \to Y$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=1}^{n} b_k c_k$ ... linear und beschränkt, da

$$|R_n((c_k)_{k\in\mathbb{N}})| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_k c_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |b_k||c_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right)^{1/2} \le \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2}}_{\in\mathbb{R}} \|(c_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}$$

$\{R_n : n\in\mathbb{N}\}$ ist punktweise beschränkt:

Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ fest. $|R_n((c_k)_{k\in\mathbb{N}})| \le \sum_{k=1}^{\infty} |b_k||c_k| = \ldots$ Definiere $\tilde{c}_k := \begin{cases} |c_k|, & b_k = 0 \\ |c_k| \frac{|b_k|}{b_k}, & b_k \ne 0 \end{cases}$

$$\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \tilde{c}_k \frac{b_k}{|b_k|} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k b_k < \infty,$$ da nach Vorraussetzungen konvergent.

$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \|R_n((c_k)_{k\in\mathbb{N}})\| < \infty$ also punktweise beschränkt.

Es folgt also $\{R_n : n\in\mathbb{N}\}$ ist glm. beschränkt also $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|R_n\| = C < \infty$.

Von oben folgt $\|R_n\| \ge \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2} \le \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2} = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\ge N} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2} \le \lim_{N\to\infty} \sup_{n\ge N} \|R_n\| \le \lim_{N\to\infty} C = C < \infty$$

Somit ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\ell^2(\mathbb{N})$.

$\square$

FANA Ü3

30) $T: L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ ... beschränkt, lin. mit $T(C[0,1]) \subseteq C[0,1]$

zz: $T|_{C[0,1]}$ ist eine stetige Selbstabbildung in $(C[0,1], \|.\|_\infty)$

Das $T|_{C[0,1]}$ eine Selbstabbildung auf $C[0,1]$ ist gilt nach Angabe.

Sei $\iota: C[0,1] \to L^2[0,1]$, $f \mapsto f$ die Einbettungsabbildung. ι ist linear und, da $\|\iota(f)\|_2^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty^2 dx = \|f\|_\infty^2$ auch beschränkt und stetig.

Da $L^2[0,1]$ ein Hausdorffraum ist und $T: L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ stetig ist (folgt aus lin. beschr.) so folgt aus Lemma 4.4.1., dass $\operatorname{graph} T = \{(f, Tf) \in L^2 \times L^2 : f \in L^2\}$ ist abgeschlossen.

$\operatorname{graph} T|_{C[0,1]} = \{(f, Tf) : f \in C[0,1]\} = \{(f, g) \in C[0,1]^2 : (\iota(f), \iota(g)) \in \operatorname{graph} T\}$

$= \{z \in C[0,1]^2 : (\iota(pr_1(z)), \iota(pr_2(z))) \in \operatorname{graph} T\} = (\iota \circ pr_1, \iota \circ pr_2)^{-1}(\operatorname{graph} T)$

Da graph T abgeschlossen und $\iota \circ pr_i$ stetig ist, so folgt, dass auch $\operatorname{graph} T|_{C[0,1]}$ abgeschlossen ist und nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (4.4.2) ist $T|_{C[0,1]}$ stetig in $(C[0,1], \|.\|_\infty)$. $\square$