ANA Ü7

1.) $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$

ges: $\|D\|_2$, $\|D\|_\infty$ $\qquad I := (1,2,\dots,n)^2$

$$\|D\|_2 = \sqrt{\sum_{j,k \in I} |D_{jk}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2} = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2}$$

$$\|D\|_\infty = \max_{j,k \in I} (|D_{jk}|) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

$D \in L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ $\qquad$ ges: $\|D\|$

$$\|D\| = \sup\left\{ \frac{\|Dx\|_2}{\|x\|_2} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} \left(= \sup\{\|Dx\|_2 : \|x\|_2 \leq 1\}\right)$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bel.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\qquad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$D(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x_1 \\ \lambda_2 \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \cdot x_n \end{pmatrix}$

$$\|Dx\|_2 = \sqrt{(\lambda_1 \cdot x_1)^2 + (\lambda_2 \cdot x_2)^2 + \dots + (\lambda_n \cdot x_n)^2}$$
$$= \sqrt{\lambda_1^2 \cdot x_1^2 + \lambda_2^2 \cdot x_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \cdot x_n^2}$$
$$\leq \sqrt{(\|D\|_\infty)^2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} = \|D\|_\infty \cdot \|x\|_2$$

$$\Rightarrow \frac{\|Dx\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\|D\|_\infty \cdot \|x\|_2}{\|x\|_2} = \|D\|_\infty$$

$$\|Dx\|_2 = \sqrt{\lambda_1^2 \cdot x_1^2 + \lambda_2^2 \cdot x_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \cdot x_n^2} \leq \sqrt{(\|x\|_\infty)^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2)}$$
$$= \|x\|_\infty \cdot \|D\|_2$$

$$\frac{\|Dx\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\|D\|_2 \cdot \|x\|_\infty}{\|x\|_2} = \frac{\|D\|_2 \cdot k \cdot \|x\|_2}{\|x\|_2} = k \cdot \|D\|_2$$

$\|.\|_\infty$ und $\|.\|_2$ sind auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent

ANA Ü7

2.) wie in 1.) $D \in L_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$

$$\|D\| = \sup\left\{ \frac{\|Dx\|_\infty}{\|x\|_\infty} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bel. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

$$\|Dx\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i \cdot x_i| \leq \max_{i=1,\dots,n} |\|D\|_\infty \cdot x_i| = \|D\|_\infty \cdot \|x\|_\infty$$

$$\|Dx\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i \cdot x_i| \leq \max_{i=1,\dots,n} |\|x\|_\infty \cdot \lambda_i| = \|x\|_\infty \cdot \|D\|_\infty$$

$$\frac{\|Dx\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\|D\|_\infty \cdot \|x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \|D\|_\infty$$

$$\|D\| = \sup\{\|Dx\|_\infty : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty \leq 1\}$$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ hat $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |1| = 1$

$$\|Dx\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| = \|D\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|D\| = \|D\|_\infty$$

ANA Ü7

3.) $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$ $\quad (L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \|.\|)$ $\quad L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$

$A \in L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $\quad A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ $\quad$ zz: $\|A\| = \|A\|_\infty$

$$\|A\| = \sup\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|_1} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\} = \sup\{\|Ax\| : \|x\|_1 \leq 1\}$$

$$\|Ax\| = A(x) = |x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n| \leq |\, \|A\|_\infty \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)|$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \qquad \overset{\text{\rotatebox{90}{$\leq$}}}{\|A\|_\infty \cdot \|x\|_1}$$

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|_1} \leq \frac{\|A\|_\infty \cdot \|x\|_1}{\|x\|_1} = \|A\|_\infty$$

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der Eins dort wo a_j in A maximal ist.

$$\|Ax\| = |0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \dots + 1 \cdot a_j + 0 \cdot a_{j+1} + \dots + 0 \cdot a_n| = |a_j| = \|A\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|A\| = \|A\|_\infty$$

ANA Ü7

5.) $f:[0,1] \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ f... stetig, beschränkt $(C_b[0,1], \|.\|_\infty)$

$(T(f))(t) = f\left(\frac{t+1}{3}\right)$

zz: $T(f) \in C_b[0,1]$

- Sei $t \in [0,1]$ bel. Dann ist $\frac{t+1}{3} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \subseteq [0,1]$

  $\Rightarrow T(f): [0,1] \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ Definitionsbereich macht Sinn
- $t \mapsto \frac{t+1}{3}$ ist stetig. Da auch f stetig ist, ist $f(\frac{t+1}{3})$ stetig
- Da f beschränkt ist, ist auch $f|_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}$ beschränkt

  $\Rightarrow T(f) \in C_b[0,1]$

zz: T... linear

- Sei $f,g \in C_b[0,1]$ bel.

  $(T(f+g))(t) = (f+g)(\frac{t+1}{3}) = f(\frac{t+1}{3}) + g(\frac{t+1}{3}) = (T(f))(t) + (T(g))(t)$
- Sei $f \in C_b[0,1]$ bel. Sei $c \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ bel.

  $(T(c\cdot f))(t) = (c\cdot f)(\frac{t+1}{3}) = c\cdot f(\frac{t+1}{3}) = c\cdot (T(f))(t)$

ges: $\|T\|$

$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tf\|_\infty}{\|f\|_\infty} : f \in C_b[0,1] \setminus \{0\}\right\}$

Sei $f \in C_b[0,1] \setminus \{0\}$

$\|Tf\|_\infty = \|f(\frac{t+1}{3})\|_\infty = \sup\{\|f(\frac{t+1}{3})\| : t \in [0,1]\} = \sup\{\|f(x)\| : x \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\}$

$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : x \in [0,1]\}$ $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

$\frac{\|Tf\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_\infty} = 1$

Falls $f(x)$ die konstante 1 Funktion, dann ist $\frac{\|Tf\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow \|T\| = 1$

injektiv und/oder surjektiv?

- Sei $f,g \in C_b[0,1]$ mit $T(f) = T(g)$ bel., d.h. $f(\frac{t+1}{3}) = g(\frac{t+1}{3})\ \forall t \in [0,1]$

  $\Rightarrow f(x) = g(x)\ \forall t \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ Da f und g auf $[0,\frac{1}{3})$ und $(\frac{2}{3},1]$ nicht übereinstimmen müssen ist T nicht injektiv.
- Sei $f \in C_b[0,1]$ bel. $g(x) := f(3x-1)$ $(T(g))(t) = g(\frac{t+1}{3}) = f(3\frac{t+1}{3}-1) = f(t)$

  allerdings ist $f(3x-1)$ mit $x \in [0,1]$ nicht in $C_b[0,1] \Rightarrow T$ ist nicht surjektiv

ANA Ü7

6.) M... Menge $\quad B(M,\mathbb{R})$... Banachraum aller beschränkten, reellwertigen Funktionen auf M $\quad (B(M,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

$t_1,\dots,t_n \in M \qquad T: B(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$

$$T(f) \mapsto \begin{pmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{pmatrix}$$

zz: T ist linear und beschränkt

- Sei $f,g \in B(M,\mathbb{R})$ bel.

$$T(f+g) = \begin{pmatrix} (f+g)(t_1) \\ \vdots \\ (f+g)(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_1)+g(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n)+g(t_n) \end{pmatrix} = T(f)+T(g)$$

- Sei $f \in B(M,\mathbb{R})$ bel. Sei $c \in \mathbb{R}$ bel.

$$T(c\cdot f) = \begin{pmatrix} (c\cdot f)(t_1) \\ \vdots \\ (c\cdot f)(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cdot f(t_1) \\ \vdots \\ c\cdot f(t_n) \end{pmatrix} = c\cdot T(f)$$

$\Rightarrow$ T ist linear

- $\sup\{\|T(f)\|_\infty : f \in B(M,\mathbb{R})\}$

$$\|T(f)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |f(t_i)| \leq \max_{t\in M} |f(t)| = \|f\|_\infty < +\infty$$

$\Rightarrow$ T ist beschränkt

ANA Ü7

8.) $T, A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $T \dots$ invertierbar

zz: $T^{-1} \cdot \exp(A) \cdot T = \exp(T^{-1} \cdot A \cdot T)$

$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$

$T^{-1} \cdot \exp(A) \cdot T = T^{-1} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n\right) \cdot T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} T^{-1} A^n T\right)$

$\exp(T^{-1} A \cdot T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (T^{-1} A \cdot T)^n$

$(T^{-1} A \cdot T)^n = T^{-1} A \underbrace{T \cdot T^{-1}}_{=I} \cdot A \cdot \underbrace{T \dots}_{=I} \underbrace{\cdot T^{-1}}_{=I} \cdot A \cdot T = T^{-1} \cdot A^n \cdot T$

$\Rightarrow \exp(T^{-1} A \cdot T) = T^{-1} \cdot \exp(A) \cdot T$

---

ges: $\exp(A)$, falls $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m)$

$A^k = \mathrm{diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_m^k)$

$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$

$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{diag}\left(\frac{1}{j!} a_1^j, \frac{1}{j!} a_2^j, \dots, \frac{1}{j!} a_m^j\right)$

$= \mathrm{diag}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} a_1^j, \dots, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} a_m^j\right)$

$= \mathrm{diag}(\exp(a_1), \dots, \exp(a_m))$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_m \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{matrix} & \begin{matrix} a_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_m^2 \end{matrix} \end{array}$$

---

ges: $\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \frac{1}{0!} A^0 + \frac{1}{1!} \cdot A^1$

$= 1 \cdot I + 1 \cdot A = I + A$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}$$

ANA Ü7

10.) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ der Form $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ ges: $\exp(A)$

$\exp(A) = \exp(B+C)$ mit $B = \lambda \cdot I$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{pmatrix}$

$B \cdot C = \lambda \cdot I \cdot C = \lambda \cdot C = C \cdot \lambda I = C \cdot B$ $\Rightarrow B, C$ sind kommutierend

Aus 9. folgt nun $\exp(B+C) = \exp(B) \cdot \exp(C)$

$\exp(B) = \operatorname{diag}(\exp(\lambda), \exp(\lambda), \dots, \exp(\lambda)) = \exp(\lambda) \cdot I$ nach Beispiel 8

$$\exp(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} C^k$$

$$= \frac{1}{0!} C^0 + \frac{1}{1!} C^1 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} C^{(n-1)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{array}$$

Multiplizieren mit C "verschiebt" die Nebendiagonale nach rechts

$$\exp(B) \cdot \exp(C) = \exp(\lambda) \cdot I \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\exp(\lambda)}{0!} & \frac{\exp(\lambda)}{1!} & \frac{\exp(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{\exp(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & \frac{\exp(\lambda)}{0!} & \frac{\exp(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{\exp(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & \frac{\exp(\lambda)}{0!} & \cdots & \frac{\exp(\lambda)}{(n-3)!} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\exp(\lambda)}{0!} \end{pmatrix}$$