2.8.2. $\mathbb{R}^{4\times 1}$ $U_1 = [\{a\}]$, $U_2 = [\{b, c\}]$, $U_3 = [\{b, a\}]$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ges Basis von $U_1 + U_2$

  $U_1 + U_2 = \{ v_1 + v_2 \mid v_1 \in U_1, v_2 \in U_2 \}$

  Die Basis von U_1 ist $\{a\}$. Die Basis von U_2 ist $\{b, c\}$, da b und c l.u. sind.

  Da a nicht als LK aus b und c dargestellt werden kann (3. Komponente der Vektoren), ist die Basis von $U_1 \oplus U_2$ die Menge $\{a, b, c\}$.

- ges Basis von $U_2 + U_3$

  Die Basis von U_3 ist $\{a, b\}$ (l.u. z.B. wegen erster und zweiter Komponente).

  Die Basis von $U_2 + U_3$ ist $\{a, b, c\}$, da a von $\{b, c\}$ l.u. ist.

  Die Summe ist nicht direkt, da b aus U_2 durch b aus U_3 als LK bilden kann.

- ges Basis von $U_1 + U_2 + U_3$

  Basis von $U_1 + U_2 + U_3$ ist $\{a, b, c\}$, da Basis von $U_2 + U_3$ $\{a, b, c\}$ ist und a (aus der Basis von U_1) in der Basis von $U_2 + U_3$ schon enthalten ist. Die Summe ist nicht direkt (siehe Basis von $U_2 + U_3$)