

Zusammenfassung Heft 2 ANA

Ida Hönigmann

7. Dezember 2020

1 Rationale Zahlen

Definition 1.1. Ein angeordneter Körper heißt vollständig angeordnet, falls $\emptyset \neq M \subseteq K$ und M nach oben beschränkt ($\implies M$ hat Supremum).

Lemma 1.1. vollständig angeordnet \implies archimedisch angeordnet

Satz 1.2. K und $L \dots$ vollständig angeordnete Körper $\implies \exists! \phi : L \rightarrow K$ mit $+$ und $*$ verträglich, bijektiv und mit \leq verträglich.

Schreibweise. $\mathbb{R} =$ vollständig angeordneter Körper

Satz 1.3. $x \in \mathbb{R}, x \geq 0, n \in \mathbb{N}$
Dann $\exists! y \in \mathbb{R}, y \geq 0 : y^n = x$

Definition 1.2. $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$
Sei $\sqrt[n]{x}$ die eindeutige Zahl $y \geq 0$ mit $y^n = x$.

Bemerkung. $y \mapsto y^n$ ist bijektiv

Lemma 1.4. • $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$

- $\sqrt[n]{xz} = \sqrt[n]{x} * \sqrt[n]{z}$
- $(\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$

Definition 1.3. $x \in \mathbb{R}, x > 0, r \in \mathbb{Q}, r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$
 $x^r = (\sqrt[q]{x})^p$

Lemma 1.5. • $x^{r+s} = x^r * x^s$

- $(x^r)^s = x^{r*s}$
- $x^{-1} = \frac{1}{x^r}$

Bemerkung. $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Definition 1.4. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen irrationale Zahlen, dafür schreibt man auch \mathbb{I} .

Lemma 1.6. $M, N \neq \emptyset \dots$ Mengen $f : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$
Falls $f(M \times N)$ nach oben beschränkt, so gilt
 $\sup(\{f(m, n) : (m, n) \in M \times N\}) = \sup(\{s_q : q \in N\}) = \sup(\{\sup(\{f(m, n) : m \in M\}) : n \in N\})$
Falls $\forall n \in N \{f(m, n) : m \in M\}$ nach oben beschränkt und falls $\{\sup(\{f(m, n) : m \in M\}) : n \in N\}$ nach oben beschränkt ist, dann ist $f(M \times N)$ nach oben beschränkt.

Bemerkung. $A, B \subset \mathbb{R} \implies \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

2 Komplexe Zahlen

Definition 2.1. $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Schreibweise. $(a, b) \in \mathbb{C}$ werden in der Form $a + ib$ geschrieben. a nennt man den Realteil, b nennt man den Imaginärteil der Zahl.

Definition 2.2. $a + ib, c + id \in \mathbb{C}$
 $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
 $(a + ib) * (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Schreibweise. $a + ib \in \mathbb{C}$ mit $b = 0$ heißt rein reell.
 $a := (a + ib)$
 $a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a = 0$ heißt rein imaginär. $ib := (a + ib)$
 $z = (a + ib)$ dann ist $\operatorname{Re} z = a$ und $\operatorname{Im} z = b$

Bemerkung. i ist Lösung von $x^2 + 1 = 0$.

Satz 2.1. $(\mathbb{C}, +, *)$ ist Körper. Dabei ist für $a + ib \in \mathbb{C}$:

- $0 + i0$ ist additiv neutrales Element
- $-a + i(-b)$ ist additiv inverses Element
- $1 + i0$ ist multiplikativ neutrales Element
- $a + ib \neq 0 \implies \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{(-b)}{a^2+b^2}$ ist multiplikativ inverses Element

Bemerkung. \mathbb{C} ist kein angeordneter Körper.

Bemerkung. \mathbb{C} ist Vektorraum über \mathbb{C} mit Dimension 1.

\mathbb{C} ist Vektorraum über \mathbb{R} mit Dimension 2.

Definition 2.3. $z := (a + ib) \in \mathbb{C}$
 $\bar{z} := a + i(-b)$ heißt konjugiert komplexe Zahl.
 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ mit $|z| = 0 \Leftrightarrow (a + ib) = (0 + i0)$

Bemerkung. " $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ "

Lemma 2.2. • $|Re z| \leq |z|$

- $|Im z| \leq |z|$
- $|z * w| = |z| * |w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $z * \bar{z} = |z|^2$
- $z \neq 0 \implies \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{|z|^2} + i\frac{-b}{|z|^2}$

3 Grenzwerte

Definition 3.1. $M = \emptyset$, $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$
 (M, d) heißt metrischer Raum, falls

- (M1) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (M2) $d(x, y) = d(y, x)$
- (M3) $x, y, z \in M \implies d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Lemma 3.1. $p \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}$
 $(\sum_{j=1}^n a_j * b_j)^2 \leq (\sum_{j=1}^n a_j^2) * (\sum_{j=1}^n b_j^2)$
 $(\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{j=1}^n a_j^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{j=1}^n b_j^2)^{\frac{1}{2}}$

Definition 3.2. $X \dots$ Menge mit $X \neq \emptyset$
 Eine Folge x ist eine Funktion $x : \mathbb{N} \rightarrow X$.
 Meist schreibt man $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = x(n)$.

Definition 3.3. $(M, d) \dots$ metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 \dots Folge aus M , $x \in M$
 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen x falls
 $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \epsilon$
 In diesem Fall schreibt man auch
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ oder "bei $n \rightarrow \infty$ geht $x_n \rightarrow x$ " oder
 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$.

Bemerkung. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$

Bemerkung. $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{\geq k} := \{p \in \mathbb{Z} : p \geq k\}$
 $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k}} \dots$ Folge
 konvergiert $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq k} : d(x_n, x) < \epsilon \forall n \geq N$

Bemerkung. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$
- $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq \epsilon$
- Für ein gewisses $K > 0$ gilt: $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : d(x_n, x) < K * \epsilon$
- Für ein gewisses $K > 0$ gilt: $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq K * \epsilon$

Definition 3.4. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M . Ist $n : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{N}$ streng monoton wachsend, so heißt $(x_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz 3.2. $(M, d) \dots$ metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$ Folge in M , $x \in M$

- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert
- $k \in \mathbb{N}$ beliebig. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x \Leftrightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k}} \rightarrow x$
- $k \in \mathbb{N}$ beliebig. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x \Leftrightarrow (x_n + k)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x \Leftrightarrow (x_n - k)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k+1}} \rightarrow x$
- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x \wedge (x_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \implies \lim_{j \rightarrow \infty} (x_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}} = x$

Bemerkung. Teilfolge konvergiert $\not\Rightarrow$ Folge konvergiert

Lemma 3.3. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow y \dots$ Folgen in (M, d)

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

Lemma 3.4. $(M, d) \dots$ metrischer Raum, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in M$

$$|d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2)| \leq d(a_1, a_2) + d(b_1, b_2)$$

Definition 3.5. $(M, d) \dots$ metrischer Raum

- $Y \subseteq M$ heißt beschränkt, falls $Y \neq \emptyset$ und $\exists z \in M \exists c > 0 \forall y \in Y : d(z, y) \leq c$
- $f : E \rightarrow M$ heißt beschränkt wenn $f(E) \subseteq M$ beschränkt ist.
- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$ Folge aus M heißt beschränkt, falls $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ beschränkt ist.

Bemerkung. $\emptyset \neq Y \subseteq M$ ist beschränkt $\Leftrightarrow \forall x \in M : \exists C_x \geq 0 \forall y \in Y : d(y, x) \leq C_x$

Lemma 3.5. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$ Folge in (M, d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt.}$$

Lemma 3.6. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$ Folgen in (\mathbb{R}, d_2) mit $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$

Dann gelten folgende Aussagen:

- $\exists c \in \mathbb{R} : x < c \implies \exists N \in \mathbb{N} ; x_n < c \forall n \geq N.$
- $x < y \implies \exists N \forall n \geq N : x_n < y_n$
- $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \leq y_n \implies x \leq y$

Satz 3.7. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$ Folgen in (\mathbb{R}, d_2)

$x_n \rightarrow a \wedge y_n \rightarrow a \wedge x_n \leq a_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele $\implies a_n \rightarrow a$

Satz 3.8. Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen aus \mathbb{C} mit $z_n \rightarrow z$ und $w_n \rightarrow w$, dann gelten folgende Aussagen:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z|$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{z}_n = \bar{z}$
- $\lim z_n + w_n = z + w$ und $\lim(-z_n) = -z$
- $z = 0$ und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$ beschränkte Folge $\implies z_n * u_n \rightarrow 0$
- $\lim z_n * w_n = z * w$

• $\lim z_n^k = z^k$, falls $k \in \mathbb{N}$ fest

• $z \neq 0 \implies \lim \frac{1}{z_n} = \frac{1}{z}$

• $z_n \in \mathbb{R}, z_n \geq 0, z \in \mathbb{R}, z \geq 0, k \in \mathbb{N}$ fest $\implies \sqrt[k]{z_n} \rightarrow \sqrt[k]{z}$

Definition 3.6. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} heißt

- monoton wachsend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- monoton fallend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- streng monoton wachsend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- streng monoton fallend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

Satz 3.9. Falls $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in \mathbb{R} ist nach oben beschränkt (d.h. $\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq c$), dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$$

Falls $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in \mathbb{R} ist nach unten beschränkt (d.h. $\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq c$), dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$$

Definition 3.7. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$ beschränkte Folge in \mathbb{R} , $N \in \mathbb{N}$

$$y_N := \inf(\{x_n : n \geq N\})$$

$$z_N := \sup(\{x_n : n \geq N\})$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{N \rightarrow \infty} y_N = \sup\{y_N : N \in \mathbb{N}\}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{N \rightarrow \infty} z_N = \inf\{z_N : N \in \mathbb{N}\}$$

Lemma 3.10. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$ beschränkte Folge in \mathbb{R}

$$\implies \exists \text{ Teilfolge } (x_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n(j)} =$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\implies \exists \text{ Teilfolge } (x_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n(j)} =$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Lemma 3.11. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$ beschränkte Folge in \mathbb{R}

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\forall n : x_n \leq y_n \implies \liminf a_n \leq \liminf b_n \wedge \limsup a_n \leq \limsup b_n$$

- $\limsup_{n \rightarrow \infty}(-x_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty}(-x_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = x \wedge \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

3.1 Cauchy-Folgen

Definition 3.8. (M, d) ... metrischer Raum

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M heißt Cauchy-Folge, falls $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(x_m, x_n) < \epsilon$

Bemerkung. Ob ϵ aus \mathbb{R} oder \mathbb{Q} stammt ist egal.

$(x_n) \rightarrow x \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \in \mathbb{Q} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \epsilon$

Lemma 3.12. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge $\Rightarrow (x_n)$ ist beschränkt.

Lemma 3.13. (M, d) ... metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$... Folge in M

Falls (x_n) konvergent ist, dann ist (x_n) auch eine Cauchy-Folge.

Bemerkung. Cauchy-Folge impliziert nicht, dass die Folge konvergiert.

Definition 3.9. Ein metrischer Raum heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge auch gegen einen Punkt aus diesem metrischen Raum konvergiert.

Lemma 3.14. (M, d) ... metrischer Raum

Falls $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und falls \exists Teilfolge $(x_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n(j)} = x \in M$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

Satz 3.15. (\mathbb{R}, d_2) ist ein vollständig metrischer Raum.

Lemma 3.16. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$... Folge aus \mathbb{R}^p , $x_n = (\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,p})$

$x = (\xi_1, \dots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p$

Falls $x_n \rightarrow x$ bzgl. d_1, d_2, d_∞ , dann gilt $x_n \rightarrow x$ bzgl. aller dieser Metriken. Weiters gilt $x_n \rightarrow x$ bzgl. $d_1, d_2, d_\infty \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, p\} : \xi_{n,j} \rightarrow \xi_j$ in (\mathbb{R}, d_2) .

Lemma 3.17. $(\mathbb{R}^p, d_{1,2 \text{ oder } \infty})$ ist vollständig metrischer Raum.

$(\mathbb{C}^p, d_{1,2 \text{ oder } \infty})$ ist vollständig metrischer Raum.

Lemma 3.18. Eine komplexe Folge konvergiert, wenn ihr Realteil und Imaginärteil konvergieren.

Definition 3.10. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$... Folge in \mathbb{R}

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n > M$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n < M$

Bemerkung. Eine Folge kann nicht gleichzeitig gegen $x \in \mathbb{R}$ und gegen $+\infty$ oder $-\infty$ konvergieren.

Satz 3.19. $(x_n), (y_n)$... Folgen in \mathbb{R} , wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

Dann gelten folgende Aussagen:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} -x_n = -\infty$
- $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$... nach unten beschränkt $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty$
- $\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} : y_n \geq C$, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n * y_n) = +\infty$
- Falls $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} +\infty$
- $\forall n \in \mathbb{N} : y_n > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = 0$
- Wenn y_n monoton wachsend ist, dann gilt
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} = \sup(y_n)$, falls $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt.
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} +\infty$, falls $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ nicht nach oben beschränkt ist.

Bemerkung. Gleicher Satz gilt in gleicher Form auch für $-\infty$.

3.2 Reihen

Definition 3.11. a_k ... Folge aus \mathbb{R} oder aus \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}$

$S_n = \sum_{j=1}^n a_j$ heißt die j-te Partialsumme

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Reihe mit Summanden a_n .

Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existiert, so heißt die Reihe konvergent.

Schreibweise. Wenn eine Reihe konvergent ist schreiben wir für $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x$ auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = x$.

Für $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ schreiben wir auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$. Gleiches für $-\infty$.

Für (S_n) schreibt man auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Lemma 3.20. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k \dots$ konvergente Reihen in \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Dann gilt:

- $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) \dots$ konvergiert gegen $(\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{k=1}^{\infty} b_k)$
- $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda * a_k) = \lambda * \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$

Lemma 3.21. • $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \dots$ Reihen, wobei $\exists l \in \mathbb{N} \forall k \geq l : a_k = a'_k$
 $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ konvergiert

- $(k(j))_{j \in \mathbb{N}} \dots$ streng monoton wachsende Folge in \mathbb{N}
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\implies \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konvergiert mit $A_1 = a_1 + \dots + a_{k(1)}, \dots, A_k = a_{k(n-1)+1} + \dots + a_{k(n)}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k \dots$ konvergieren mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

- $\forall k \in \mathbb{N} : a_k \leq b_k \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$
- Falls zusätzlich gilt $\exists l \in \mathbb{N} : a_l < b_l$, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Bemerkung. Eine komplexe Reihe ist konvergent, falls die Reihe der Realteile und die Reihe der Imaginärteile konvergiert.

Lemma 3.22. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \dots$ konvergent $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_k)_{k \in \mathbb{N}} = 0$

Lemma 3.23. • $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \dots$ konvergent $\Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k \dots$ beschränkt

- **Majorantenkriterium:** $\forall k \in \mathbb{N} : a_k \leq b_k$. Falls $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \dots$ konvergiert, dann gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \dots$ konvergiert.

- **Minorantenkriterium:** $\forall k \in \mathbb{N} : a_k \leq b_k$. Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, dann gilt $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$.

Definition 3.12. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \dots$ konvergent.

Lemma 3.24. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \dots$ absolut konvergent $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \dots$ konvergent

Bemerkung. Die Umkehrung ist falsch.

3.3 Konvergenzkriterien

Satz 3.25. (Wurzelkriterium) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \dots$ Reihe aus \mathbb{R}/\mathbb{C}

- Falls $\exists q \in [0, 1) \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ dann ist die Reihe absolut konvergent.
- Falls \exists Teilfolge $(a_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\forall j \in \mathbb{N} : \sqrt[n(j)]{|a_{n(j)}|} \geq 1$ dann ist die Reihe divergent.

Satz 3.26. (Quotientenkriterium) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \dots$ Reihe aus \mathbb{R}/\mathbb{C}

- Falls $\exists q \in [0, 1) \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$, dann ist die Reihe absolut konvergent.
- Falls $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$, dann ist die Reihe divergent.

Lemma 3.27. $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}
Dann gilt $\sum_{n=1}^m a_n b_n = a_m * \beta_m - \sum_{n=1}^{m-1} (a_{n+1} - a_n) * \beta_n$ mit $\forall n \in \{1, \dots, m\} : \beta_n = \sum_{j=1}^n b_j$

Satz 3.28. (Dirichletsches Kriterium) (a_n) monotone Nullfolge aus \mathbb{R} , $(b_n) \dots$ Folge aus \mathbb{R} oder \mathbb{C}

$\exists C \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} : |\sum_{j=1}^n b_j| \leq C \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert

Satz 3.29. (Leibnitz-Kriterium) $(a_n) \dots$ monotone Nullfolge $\implies \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n * a_n$ konvergiert.