1.7.10 a) $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\times$ $\sim \subset M \times M$ $(a,b) \sim (c,d)$ genau für $ad = bc$

zz. $\sim$ Äquivalenzrel.

(Ref) Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}^\times$ dann ist $(a,b) \sim (a,b)$, da $a \cdot b = a \cdot b$.

(Sym) Sei $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{Z}^\times$ mit $(a,b) \sim (c,d)$, also ist $a \cdot d = b \cdot c$.

$a \cdot d = b \cdot c$ $(\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \cdot y = y \cdot x)$ $d \cdot a = c \cdot b$ $(\forall x, y \in \mathbb{Z} : (x = y) \Leftrightarrow (y = x))$

$c \cdot b = d \cdot a$, daher ist auch $(c,d) \sim (a,b)$

(Tra) Sei $a, c, e \in \mathbb{Z}$ und $b, d, f \in \mathbb{Z}^\times$ mit $(a,b) \sim (c,d)$ und $(c,d) \sim (e,f)$, also ist $a \cdot d = b \cdot c$ und $c \cdot f = d \cdot e$.

$a \cdot d = b \cdot c$ $(x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z)$

$a \cdot d \cdot e = b \cdot c \cdot e$ aus $c \cdot f = d \cdot e$ folgt

$a \cdot c \cdot f = b \cdot c \cdot e$ $(a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b)$

$a \cdot f \cdot c = b \cdot e \cdot c$ $(x \cdot z = y \cdot z \Leftrightarrow x = y)$

$a \cdot f = b \cdot e$ $(x \cdot y = y \cdot x)$

, daher ist auch $(a,b) \sim (e,f)$ $\square$

$M/\sim \;\to\; \mathbb{Q}$ $(x,y) \mapsto \frac{x}{y}$

$(x,y) \mapsto \frac{x}{y}$