2.3.3. h) Ist $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ periodische Folgen ein UR von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

0_v von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist die Folge $\forall i\in\mathbb{N}: a_i = 0$, denn bel. Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} + 0 = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$

- 0_v ist periodische Folge
- Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nach n_a wiederholend und $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nach n_b wiederholend bel.

  $\Rightarrow (a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wiederholt sich nach $n_a \cdot n_b$, denn n_a durch $n_a \cdot n_b$ teilbar und n_b durch $n_a \cdot n_b$ teilbar.
- Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nach n_a wiederholend bel. Sei $c\in\mathbb{R}$ bel.

  $\Rightarrow c\cdot(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wiederholt sich nach n_a

$\Rightarrow$ Ja, es handelt sich um einen UR.

j) $U = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \exists s\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}(a_n = a_0 + n\cdot s)\}$

- $0\in U$ bei $a_0 = 0$ und $s = 0$
- Sei $a_0, b_0 \in\mathbb{R}$ bel. Sei $s, l\in\mathbb{R}$ bel.

  $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} := n\mapsto a_0 + s\cdot n \qquad (b_i)_{i\in\mathbb{N}} := n\mapsto b_0 + l\cdot n$

  $$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = n\mapsto a_0 + sn + b_0 + l\cdot n$$
  $$= \underbrace{a_0 + b_0}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(s+l)}_{\in\mathbb{R}}\cdot n \Rightarrow (a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in U$$
- $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wie oben. Sei $c\in\mathbb{R}$ bel.

  $$c\cdot(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = n\mapsto c\cdot(a_0 + sn)$$
  $$= \underbrace{c\cdot a_0}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{c\cdot s}_{\in\mathbb{R}}\cdot n \Rightarrow c\cdot(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in U$$

$\Rightarrow$ Ja, U ist UR von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

k) $U = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \exists q\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}: a_n = a_0\cdot q^n\}$

Gegenbsp: $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} := n\mapsto 1\cdot 2^n \qquad (b_i)_{i\in\mathbb{N}} := n\mapsto 1\cdot 3^n$

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = n\mapsto 2^n + 3^n \overset{?}{=} x\cdot y^n$$

$n=0$: $2^0 + 3^0 = 2 \overset{?}{=} x\cdot y^0 \Rightarrow x = 2$

$n=1$: $2^1 + 3^1 = 5 \overset{?}{=} 2\cdot y^1 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

$n=2$: $2^2 + 3^2 = 13 \overset{?}{=} 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 12{,}5$ ↯ $\Rightarrow$ U ist kein UR!