FANA Ü2

11) $(X, (.,.)_X)$.. lin. Raum mit pos. definitem Skalarprodukt
$(\iota, H, (.,.)_H)$.. Hilbertraumvervollständigung von X
$\iota^*: H^* \to X^*$ ... zu ι adjungierte Abbildung. zz: $X' = \{\iota^*((.,y)_H) : y \in H\}$
$(A: X \to Y$ ... lin., X, Y.. lin. Räume ist $A^*: Y^* \to X^*$ durch $A^* y^*(x) := y^*(Ax)$
für $y^* \in Y^*$, $x \in X$ definiert).

$\subseteq$ Sei $f \in X'$ bel. Nach Definition ist $f: X \to \mathbb{C}$ ... lin., stetig
$g: \iota(X) \to \mathbb{C}$, $\iota(x) \mapsto f(x)$ ist • wohldefiniert, da ι injektiv ist.
• linear, da f lin. und • stetig, da f stetig, also auch • glm. stetig.
Nach Definition von Vervollständigung ist $\iota(X)$ dicht in H. $\mathbb{C}$ ist vollständig also gibt es nach Satz 1.1.1. eine Fortsetzung $\tilde{g}: H \to \mathbb{C}$ die auch glm. stetig und linear ist. Nach Riesz-Fischer gilt $\exists! y \in H\ \forall x \in X: \tilde{g}(x) = (x,y)_H$
Für $x \in X$: $f(x) = g(\iota(x)) = \tilde{g}(\iota(x)) = (\iota(x), y)_H = \iota^*((\cdot, y)_H)$ also hat f die entsprechende Form.

$\supseteq$ Sei $f(.) \equiv \iota^*((.,y)_H)$ für ein $y \in H$. $\Rightarrow f(.) \equiv (\iota(.), y)_H$
Da ι und $(.,y)_H$ linear sind ist f lin. Sei $x \in X$ bel.
$|f(x)| = |(\iota(x), y)_H| \leq \|\iota(x)\|_H \|y\|_H = \|x\|_H \|y\|_H \quad \Rightarrow \|f\| \leq \|y\|_H < \infty$
Also ist f beschränkt und gemeinsam mit linear folgt stetig.

$\square$

FANA Ü2

12) $(X, \|.\|)$ ... normierter Raum, $\|.\|$ erfüllt Parallelogrammregel z.z.: $\exists \langle .,. \rangle$ Skalarprodukt: $\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$

Parallelogrammregel: $\forall x,y \in X: \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

$(.,.): X \times X \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto \frac14(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$

- $(x,x) = \frac14(\underbrace{\|x+x\|^2}_{(2\|x\|)^2} - \underbrace{\|x-x\|^2}_{=0}) + \frac{i}{4}(\underbrace{\|x+ix\|^2}_{\|(-i)(ix-x)\|} - \|x-ix\|^2) = \|x\|^2 + \frac{i}{4}(\|ix-x\|^2 - \|ix-x\|^2) = \|x\|^2$

- $\overline{(x,y)} = \overline{\frac14(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)+\frac{i}{4}(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2)} = \frac14(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) - \frac{i}{4}(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2)$

  $= \frac14(\|y+x\|^2-\|y-x\|^2) + \frac{i}{4}(\underbrace{\|x-iy\|^2}_{=(-i)(ix+y)} - \underbrace{\|x+iy\|^2}_{=i(y-ix)}) = \frac14(\|y+x\|^2-\|y-x\|^2)+\frac{i}{4}(\|y+ix\|^2-\|y-ix\|^2)$

  $=(y,x)$

- $2(x,\frac12 z)+2(y,\frac12 z) = \frac24(\|x+\frac12 z\|^2 - \|x-\frac12 z\|^2) + \frac{2i}{4}(\|x+\frac{i}{2}z\|^2-\|x-\frac{i}{2}z\|^2)$

  $+\frac24(\|y+\frac12 z\|^2-\|y-\frac12 z\|^2)+\frac{2i}{4}(\|y+\frac{i}{2}z\|^2 + \|y-\frac{i}{2}z\|^2) = \frac14(2\|x+\frac12 z\|^2+2\|y+\frac12 z\|^2 - 2\|x-\frac12 z\|^2 -$

  $2\|y-\frac12 z\|^2) + \frac{i}{4}(2\|x+\frac{i}{2}z\|^2 + 2\|y+\frac{i}{2}z\|^2 - 2\|x-\frac{i}{2}z\|^2 - 2\|y-\frac{i}{2}z\|^2) \overset{\text{Parallelogrammregel}}{=}$

  $=\frac14(\|x+y+z\|^2 + \cancel{\|x-y\|^2} - \|x+y-z\|^2 - \cancel{\|x-y\|^2}) + \frac{i}{4}(\|x+y+iz\|^2 + \cancel{\|x-y\|^2} - \|x+y-iz\|^2 - \cancel{\|x-y\|^2})$

  $=\frac14(\|(x+y)+z\|^2 - \|(x+y)-z\|^2 + \frac{i}{4}(\|(x+y)+iz\|^2 - \|(x+y)-iz\|^2 = (x+y,z)$

- $(x+y,z) = 2(x,\frac12 z)+2(y,\frac12 z) = (x,z)+(y,z)$, da $(x,z)=(x+0,z)=2(x,\frac12 z)+\overbrace{2(0,\frac12 z)}^{=0}=2(x,\frac12 z)$

- $\lambda=1$ klar. $\lambda=0 \Rightarrow (0x,y) = \frac14(\|y\|^2-\|-y\|^2)+\frac{i}{4}(\|iy\|^2-\|-iy\|^2)=0$ ✓

  $\lambda=-1: (-x,y)=\frac14(\underbrace{\|-x+y\|^2}_{=\|x-y\|^2} - \underbrace{\|-x-y\|^2}_{=\|x+y\|^2}) + \frac{i}{4}(\underbrace{\|-x+iy\|^2}_{=\|x-iy\|^2} - \underbrace{\|-x-iy\|^2}_{=\|x+iy\|^2}) = -(x,y)$

  $\lambda=2: (2x,y)=(x+x,y)=(x,y)+(x,y)=2(x,y)$ ist Induktionsanfang

  $\lambda>2, \in\mathbb{N}$: Induktionsschritt: $(nx,y)=(x+(n-1)x,y)=(x,y)+((n-1)x,y)\overset{IV}{=}(x,y)+(n-1)(x,y)=n(x,y)$

  $\lambda\in\mathbb{Z}$: folgt von oben für $n\in-\mathbb{N}$ bel. $\Rightarrow (nx,y)=(|n|(-x),y)=|n|(-x,y)=n(x,y)$

  $\lambda\in\mathbb{Q}: \lambda=\frac pq$ $\quad q(\lambda x,y)=q(\frac pq x,y)=p\cdot q(\frac1q x,y)=p(\frac qq x,y)=p(x,y) \Rightarrow (\lambda x,y)=\frac pq(x,y)$

  $\lambda\in\mathbb{R}$: $(.,.)$ ist stetig als Zusammensetzung stetiger Funktionen. Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt folgt auch für $\lambda\in\mathbb{R}$: $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

  $\lambda=i: (ix,y) = \frac14(\|ix+y\|^2-\|ix-y\|^2)+\frac{i}{4}(\underbrace{\|ix+iy\|^2}_{=\|x+y\|^2}-\underbrace{\|ix-iy\|^2}_{=\|x-y\|^2}) = i(x,y)$

  $\lambda\in\mathbb{C}: \lambda=a+ib$ $\quad (\lambda x,y)=(ax+ibx,y)=(ax,y)+(ibx,y)=a(x,y)+i(bx,y)=$

  $=a(x,y)+ib(x,y)=(a+ib)(x,y)$

□

FANA Ü2

13) $\mathbb{C}_n[z]$... Raum Polynome höchstens n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten

$(p,q) := \int_{-1}^{1} p(t)\overline{q(t)}\,dt$ zz: $(.,.)$... pos. definites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}_n[z]$

zz: $(\mathbb{C}_n[z],(.,.))$... Hilbertraum zz: $\forall w \in \mathbb{C}\ \forall l \in \mathbb{N}_0\ \exists! K_{w,l} \in \mathbb{C}_n[z]: p^{(l)}(w) = \int_{-1}^{1} p(x)\overline{K_{w,l}(x)}\,dx$

- $\overline{(p,q)} = \overline{\int_{-1}^{1} p(t)\overline{q(t)}\,dt} = \int_{-1}^{1}\overline{p(t)}\,q(t)\,dt = (q,p)$

  $(\lambda p+q,r) = \int_{-1}^{1} (\lambda p(t)+q(t))\overline{r(t)}\,dt = \lambda\int_{-1}^{1} p(t)\overline{r(t)}\,dt + \int_{-1}^{1} q(t)\overline{r(t)}\,dt = \lambda(p,r)+(q,r)$

  $(p,p) = \int_{-1}^{1} p(t)\overline{p(t)}\,dt = \int_{-1}^{1}|p(t)|^2\,dt > 0\ \forall p \in \mathbb{C}_n[z]\setminus\{0\}$; $(0,0) = \int_{-1}^{1} 0\,dt = 0$

  $\Rightarrow (.,.)$ ist pos. definites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}_n[z]$

- $\dim \mathbb{C}_n[z] = n+1 < \infty$, da $\{x^k : k=0,\dots,n\}$ eine Basis ist. Also ist $\mathbb{C}_n[z]$ endlichdimensional und somit $(\mathbb{C}_n[z], \langle .,. \rangle)$ ein Hilbertraum.

- Sei $w \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{N}_0$ bel. $\varphi: \mathbb{C}_n[.] \to \mathbb{C}$, $p(.) \mapsto p^{(l)}(w)$

  φ ist linear $(\varphi(\lambda p(.)+q(.)) = \lambda p^{(l)}(w)+q^{(l)}(w) = \lambda\varphi(p(.))+\varphi(q(.)))$, beschränkt (da endlich dimensionaler, normierter Raum und lin.) also auch stetig.

  Nach Riesz-Fischer gilt $\exists! K_{w,l} \in \mathbb{C}_n[z]\ \forall p \in \mathbb{C}_n[z]: \varphi(p) = (p,K_{w,l})$

  $\Rightarrow p^{(l)}(w) = \varphi(p(.)) = (p(.),K_{w,l}) = \int_{-1}^{1} p(x)\overline{K_{w,l}(x)}\,dx$ $\square$

FANA Ü2

14) $\mathbb{C}_n[z]$ mit $(p,q) := \int_{-1}^{1} p(t)\,\overline{q(t)}\,dt$ $\quad K_{w,\ell}$ sodass $p^{(\ell)}(w) = (p, K_{w,\ell})$ $\forall p \in \mathbb{C}_n[z]$

zz: $K_{w,0}(z) = \overline{K_{z,0}(w)}$ $\forall z,w \in \mathbb{C}$ und $K_{w,1} = \frac{d}{dw} K_{w,0}$ $\forall w \in \mathbb{C}$

- Sei $z, w \in \mathbb{C}$ bel. Da $K_{w,0}(t) \in \mathbb{C}_n[z]$ $\Rightarrow K^{(0)}_{w,0}(z) = (K_{w,0}, K_{z,0}) = \overline{(K_{z,0}, K_{w,0})}$

  $= \overline{K^{(0)}_{z,0}(w)}$ folgt aus der Definition von $K_{w,\ell}$ und aus $(x,y) = \overline{(y,x)}$.

- $p'(w) = \frac{d}{dw} p(w) = \frac{\partial}{\partial w}(p, K_{w,0}) = \frac{\partial}{\partial w} \int_{-1}^{1} p(t)\,\overline{K_{w,0}(t)}\,dt$ Da $[-1,1]$ kompakt ist und die innere Funktion stetig ist, können wir die Ableitung und das Integral vertauschen.

  $= \int_{-1}^{1} p(t)\,\overline{\frac{\partial}{\partial w} K_{w,0}(t)}\,dt = (p, \frac{\partial}{\partial \overline{w}} K_{w,0})$

Mit der Eindeutigkeit aus Riesz Fischer in 13) folgt, dass $K_{w,1} = \frac{\partial}{\partial \overline{w}} K_{w,0}$.

$\square$

FANA Ü2

15) $n \in \mathbb{N}$ $K := \{p \in \mathbb{R}_n[z] : p(x+2) \geq p'(x-2), p''(x+2) \geq p'(x-2), x \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{C}_n[z]$

zz: $\forall f \in L^2[-1,1]\ \exists! p_0 \in K : \int_{-1}^{1} |f(t) - p_0(t)|^2 dt \leq \int_{-1}^{1} |f(t) - p(t)|^2 dt,\ p \in K$

Satz 3.2.3. (i) sagt: H .. Hilbertraum, $E \subseteq H$ .. nichtleer, konvex, abgeschlossen

$\Rightarrow \forall x \in H\ \exists! p_E(x) \in E : \|x - p_E(x)\| = \inf\{\|x-y\| : y \in E\}$

Wir wissen $L^2[-1,1]$ mit $\|f\| := \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt$ ist ein Hilbertraum und

$K \subseteq \mathbb{C}_n[z] \subseteq L^2[-1,1]$. Wir müssen also nur mehr folgendes zeigen:

- nichtleer: $0 \in K$
- konvex: $p, q \in K$ bel. $t \in [0,1]$ bel. Sei $x \in [0,1]$ bel.

  $tp(x+2) + (1-t)q(x+2) \geq tp'(x-2) + (1-t)q'(x-2) = (tp + (1-t)q)'(x-2)$

  $tp''(x+2) + (1-t)q''(x+2) \geq tp'(x-2) + (1-t)q'(x-2) = (tp + (1-t)q)'(x-2)$

  $\Rightarrow tp + (1-t)q \in K$
- abgeschlossen: $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K bel. $x \in [0,1]$ bel.

  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : p_n(x+2) \geq p_n'(x-2) \wedge p_n''(x+2) \geq p_n'(x-2)$

  Wenn $p_n \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} p$ so folgt $p(x+2) \geq p'(x-2)$ und $p''(x+2) \geq p'(x-2)$

  also auch $p \in K$.

$\Rightarrow$ aus dem Satz $\exists! p_0 \in K : \int_{-1}^{1} |f(t) - p_0(t)|^2 dt \leq \int_{-1}^{1} |f(t) - p(t)|^2 dt\ \forall p \in K$ $\square$

FANA Ü2

16) μ ... normiertes Lebesguemaß $d\mu = \frac{1}{2\pi} dx$ in $L^2([0,2\pi),\mu)$ sei $e_n(t) := e^{int}, n \in \mathbb{Z}$

$u_n(t) := \frac{e_{-n}(t) + n e_n(t)}{\sqrt{1+n^2}}, n \in \mathbb{N}$; $M := \overline{\text{span}\{e_n : n = 0,1,2,\dots\}}$; $N := \overline{\text{span}\{u_n : n = 1,2,\dots\}}$

a) zz: M und N sind (mit dem $L^2(\mu)$-Skalarprodukt) Hilberträume. $\{e_n : n = 0,1,2,\dots\}$ bzw. $\{u_n : n = 1,2,\dots\}$ sind ONB von M bzw. N.

M bzw. N sind abgeschlossene Unterräume von $L^2[0,2\pi)$, einem vollständigen VR, und sind somit selbst vollständig. Also M bzw. N ist ein Hilbertraum.

$n, m \in \mathbb{N}$ bel. $(e_n, e_m) = \int_0^{2\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} \, d\mu(t) = \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-imt} \, d\mu(t) = \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} \, d\mu(t) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} e^0 \, d\mu(t) = \frac{2\pi}{2\pi} = 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$

$(u_n, u_m) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-int} + n e^{int}}{\sqrt{1+n^2}} \left(\overline{\frac{e^{-imt} + m e^{imt}}{\sqrt{1+m^2}}} \right) d\mu(t)$

$= \int_0^{2\pi} \frac{(e^{-int} + n e^{int})(e^{imt} + m e^{-imt})}{\sqrt{1+n^2}\sqrt{1+m^2}} d\mu(t) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it(m-n)} + m e^{-it(m+n)} + n e^{it(m+n)} + nm e^{it(n-m)}}{\sqrt{1+n^2}\sqrt{1+m^2}} d\mu(t)$

$= \begin{cases} \int_0^{2\pi} \frac{1 + n e^{it2n - it2n} + n^2}{1+n^2} d\mu(t) = \int_0^{2\pi} \frac{1+n+n^2}{1+n^2} d\mu(t) = 1? \\ \frac{1}{\sqrt{1+n^2}\sqrt{1+m^2}} \left(\int_0^{2\pi} e^{it(m-n)} d\mu(t) + m \int_0^{2\pi} e^{-it(m+n)} d\mu(t) + n \int_0^{2\pi} e^{it(m+n)} d\mu(t) + nm \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} d\mu(t) \right) = 0 \end{cases}$

Also sind $\{e_n : n = 0,1,\dots\}$ und $\{u_n : n = 1,2,\dots\}$ ONS und nach Korollar 3.3.4 eine ONB.

---

b) zz: $M \cap N = \{0\}$

Sei $x \in M \cap N$ bel. $\Rightarrow \exists (\alpha_n)_{n=0}^\infty, (\beta_n)_{n=1}^\infty : x = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^\infty \beta_n u_n$

$u_n = \frac{e_{-n} + n e_n}{\sqrt{1+n^2}} \Rightarrow x = \sum_{n=1}^\infty \frac{\beta_n}{\sqrt{1+n^2}} e_{-n} + \frac{n\beta_n}{\sqrt{1+n^2}} e_n$

Da $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_{-n} = \sqrt{1+n^2} u_n - n e_n$ eine ONB bildet und die α_n eindeutig sind folgt $\frac{\beta_n}{\sqrt{1+n^2}} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \beta_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = \sum_{n=1}^\infty 0 \cdot u_n = 0$

---

c) zz: $M + N$ ist dicht in $(L^2[0,2\pi), \mu)$ aber nicht gleich ganz $L^2[0,2\pi)$.

Wir wissen $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\} = \{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ist dicht in $L^2[0,2\pi)$. Da $e_{-n} = \sqrt{1+n^2} u_n - n e_n \in M + N$ folgt $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq M + N$ und somit auch $M + N$ liegt dicht in $L^2[0,2\pi)$. Um $M + N \neq L^2[0,2\pi)$ zu zeigen sei $y := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e_{-n}}{\sqrt{1+n^2}} \in L^2[0,2\pi)$. Angenommen $y \in M + N$

$\Rightarrow \exists v = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n e_n \in M \ \exists w = \sum_{n=1}^\infty \beta_n u_n \in N : y = v + w$. $y = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n e^{int} + \sum_{n=1}^\infty \beta_n \frac{e^{-int} + n e^{int}}{\sqrt{1+n^2}}$

$= \sum_{n=0}^\infty \left(\alpha_n + \frac{\beta_n n}{\sqrt{1+n^2}} \right) e^{int} + \sum_{n=1}^\infty \frac{\beta_n}{\sqrt{1+n^2}} e^{-int}$ Aus der Eindeutigkeit der Darstellung folgt $\beta_n = 1$ und $\alpha_n = -\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

$\Rightarrow \beta_n \notin \ell^2(\mathbb{N})$ ↯ zu Satz 3.3.3. $\Rightarrow y \notin M + N$

FANA Ü2

16) ... d) $X := M \dot{+} N$ zz: Projektion von X auf M mit Kern N ist nicht stetig

Nennen wir die Projektion $p: X \to M$.

$\forall n \in \mathbb{N}: \|e_{-n}\|_\infty = \|\sqrt{1+n^2}\, u_n - n e_n\|_\infty = \sup_{t \in [0,2\pi)} \left| \sqrt{1+n^2}\, \frac{e^{-int} + n e^{int}}{\sqrt{1+n^2}} - n e^{int} \right| = \sup_{t \in [0,2\pi)} |e^{-int}| = 1$

$\|p(e_{-n})\|_\infty = \|n e_n\|_\infty = n \sup_{t \in [0,2\pi)} |e^{int}| = n \qquad \Rightarrow \sup\left\{ \frac{\|p(x)\|}{\|x\|} : \|x\| = 1 \right\} \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \|p\| = \infty$ also ist p unbeschränkt, also auch nicht stetig. $\square$

FANA Ü2

18) Sei μ das normierte Lebesguemaß $d\mu = \frac{1}{2\pi} dx$, $A \subseteq \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$

$H(A) := \{ f \in L^2([0,2\pi),\mu) : \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0, n \in A \}$

zz: $H(A)$ ist abgeschlossener Teilraum von $L^2(0,2\pi)$ ges: ONB von $H(A)$

ges: orthogonales Komplement von $H(A)$ ges: explizite Formel für orthogonale Projektion auf $H(A)$

Definieren wir $e_n(x) := e^{inx}$ für $n \in \mathbb{Z}$, so gilt für ein $f \in L^2[0,2\pi)$, dass

$f \in H(A) \Leftrightarrow \forall n \in A: \int_0^{2\pi} f(x) \overline{e_n(x)} dx = 0 \Leftrightarrow \forall n \in A: (f, e_n) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in A: f \perp e_n$

$\Leftrightarrow f \in \bigcap_{n \in A} \{e_n\}^\perp = \bigcap_{n \in A} \ker(\cdot, e_n)$

Es folgt $H(A) = \bigcap_{n \in A} \ker(\cdot, e_n)$. Der Kern ist abgeschlossen und ein lin. UR.

Als Schnitt von abgeschlossenen, lin. URen ist auch $H(A)$ ein abgeschlossener, lin. UR.

$\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ bilden eine ONB von $L^2[0,2\pi)$. Also gibt es für jedes $f \in H(A)$ eine Darstellung $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n$ wobei $\alpha_n = (f, e_n)$ also gilt $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}/A} (f, e_n) e_n$ (da $\forall n \in \mathbb{N}: (f, e_n) = 0$). Somit ist $\{e_n : n \in \mathbb{Z}/A\}$ eine ONB von $H(A)$.

Die orthogonale Projektion $p: L^2(0,2\pi) \to H(A)$ ist durch $f \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}/A} (f, e_n) e_n$ gegeben (folgt von oben). Somit gilt außerdem

$(H(A))^\perp = (\operatorname{ran} p)^\perp = \ker p = \{ f \in L^2(0,2\pi) : p(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}/A} (f, e_n) e_n = 0 \}$

$= \{ f \in L^2(0,2\pi) : (f, e_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}/A \} = H(\mathbb{Z} \setminus A)$

$\square$

FANA Ü2

19) H...Hilbertraum, E...abgeschlossener, lin. UR von H $(\phi_i)_{i\in I}$...Familie stetiger lin. Funktionale

zz: $\phi_i|_E$ und $\phi_i|_{E^\perp}$ sind durch $C\in\mathbb{R}_+$ beschränkt $\Rightarrow$ ϕ_i auf H durch $\sqrt{2}C$ beschränkt

---

Sei $x\in H$ bel. $\Rightarrow \exists v\in E\ \exists w\in E^\perp: x=v+w$ (da $H=E\dot{+}E^\perp$) Sei $i\in I$ bel.

$$\|\phi_i(x)\| = \|\phi_i(v+w)\| \overset{\text{lin.}}{=} \|\phi_i(v)+\phi_i(w)\| \overset{\text{Cauchy}}{\leq} \|\phi_i(v)\| + \|\phi_i(w)\| = \|\phi_i|_E(v)\| + \|\phi_i|_{E^\perp}(w)\|$$

$$\leq \|\phi_i|_E\|\,\|v\| + \|\phi_i|_{E^\perp}\|\,\|w\| \leq C\|v\| + C\|w\| = C(\|v\|+\|w\|)$$

Es gilt $(\|v\|+\|w\|)^2 \leq 2(\|v\|^2+\|w\|^2)$, da für $a,b\in\mathbb{R}: (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ und aus

$0\leq (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \Rightarrow 2ab \leq a^2+b^2$ und somit $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$.

Durch Wurzelziehen folgt insgesamt $\|\phi_i(x)\| \leq C\sqrt{2}\sqrt{\|v\|^2+\|w\|^2} = \sqrt{2}C\|x\|$

$\Rightarrow \|\phi_i\| \leq \sqrt{2}C$ auf H

---

zz: Satz der gleichmäßigen Beschränktheit für endlich dim. Hilbertraum und Familie $M=\{\phi_i : i\in I\}$ stetiger, linearer Funktionale auf H (4.2.2. Korollar)

Sei $n=\dim H\in\mathbb{N}$. Sei $(e_j)_{j=1}^n$ eine ONB von H.

$C_j := \sup_{i\in I}\|\phi_i(e_j)\| < \infty$ aus der Vorraussetzung des Satzes. zz: $\sup_{i\in I}\|\phi_i\| = C < \infty$

Sei $\tilde{C} := \max_{j=1,\dots,n} C_j$ existiert da endlich. Sei $v\in H$ bel. Sei $i\in I$ bel.

$$\|\phi_i(v)\| = \|\phi_i(\sum_{j=1}^n (v,e_j)e_j)\| = \|\sum_{j=1}^n (v,e_j)\phi_i(e_j)\| \leq \sum_{j=1}^n |(v,e_j)|\tilde{C} \leq \tilde{C}\sqrt{\left(\sum_{j=1}^n |(v,e_j)|\cdot 1\right)^2}$$

$$\leq \tilde{C}\sqrt{\left(\sum_{j=1}^n (v,e_j)^2\right)\underbrace{\left(\sum_{j=1}^n 1^2\right)}_{=n}} = \tilde{C}\sqrt{n}\|v\|$$

$\Rightarrow \sup_{i\in I}\|\phi_i\| \leq \tilde{C}\sqrt{n} < \infty$

$\square$

FANA Ü2

20) zz: Satz der gleichmäßigen Beschränktheit für Hilbertraum H und Familie $M := \{\Phi_i : i \in I\}$ stetige lin. Funktionale auf H.

Für endliche Dimension haben wir das schon in 19) gezeigt. Aus der Vorraussetzung folgt $\sup_{i\in I} |\Phi_i(x)| = C_x < \infty$ für alle $x \in H$. Indirekt angenommen $\sup_{i\in I} \|\Phi_i\| = \infty$.

Wegen Riesz-Fischer können wir $\forall i \in I\ \exists!\ y_i \in H\ \forall x \in X: \Phi_i(x) = (x, y_i)$.

Sei $e_1 \in H$ normiert bel, sei $i_1 \in I$ bel. mit $|(e_1, y_{i_1})| = |\Phi_{i_1}(e_1)| \geq 1$ (geht da)

$\dim(\operatorname{span}\{e_1, y_{i_1}\}) < \infty \Rightarrow M$ ist auf $\operatorname{span}\{e_1, y_{i_1}\}$ glm. beschränkt (19) und somit auf $(\operatorname{span}\{e_1, y_{i_1}\})^\perp$ nicht.

Haben wir induktiv $e_1, y_{i_1}, \dots, e_k, y_{i_k}$ gewählt so folgt $(\operatorname{span}\{e_1, y_{i_1}, \dots, e_k, y_{i_k}\})^\perp$ ist so dass M darauf nicht glm. beschränkt ist. Also $\exists e_{k+1} \in (\operatorname{span}\{e_1, y_{i_1}, \dots, e_k, y_{i_k}\})^\perp$ normiert $\exists i_{k+1} \in I$ sodass $|(e_{k+1}, y_{i_{k+1}})| = |\Phi_{i_{k+1}}(e_{k+1})| \geq (k+1)(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} C_{e_j} + k + 1)$

$\dim(\operatorname{span}\{e_1, y_{i_1}, \dots, e_{k+1}, y_{i_{k+1}}\}) < \infty \Rightarrow M$ ist auf $\operatorname{span}\{e_1, y_{i_1}, \dots, e_{k+1}, y_{i_{k+1}}\}$ glm. beschränkt.

Insgesamt ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein ONS.

$F := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} e_n$

orthogonal zum Rest

$$|\Phi_{i_n}(F)| = |(F, y_{i_n})| = |(\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{j} e_j, y_{i_n})| = |\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{j}(e_j, y_{i_n})| = |\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}(e_j, y_{i_n})|$$

$$= |\frac{1}{n}(e_n, y_{i_n}) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}(e_j, y_{i_n})| \geq \frac{1}{n}|(e_n, y_{i_n})| - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} |\underbrace{(e_j, y_{i_n})}_{= \Phi_n(e_j)}| \geq \frac{n}{n}(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} C_{e_j} + n) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} C_{e_j} = n$$

Für $n \to \infty$ ist also $|\Phi_{i_n}(F)| \longrightarrow \infty$ was ein Widerspruch zu $\sup_{i\in I} |\Phi_i(F)| = C_F < \infty$ ist. Somit muss $\sup_{i\in I} \|\Phi_i\| < \infty$ gelten.

$\square$