LINAG Ü6

8.2.9 V… K-Algebra

$D \in L(V,V)$ heißt Derivation, falls $\forall a,b \in V$: $D(a \cdot b) = D(a)\cdot b + a \cdot D(b)$.

$P(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i \in K[X] \qquad P'(X) := \sum_{i\in\mathbb{N}} (i+1) a_{i+1} X^i \in K[X]$

a)

$(aX^n)' = n \cdot a \cdot X^{n-1} \qquad \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right)' = \sum_{i\in\mathbb{N}} (a_i X^i)' = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \cdot (X^i)'$

$\Rightarrow$ formale Ableitungsoperator ist linear

$(a \cdot X^n \cdot b \cdot X^m)' = (a\cdot b \cdot X^{n+m})' = a \cdot b \cdot (n+m) \cdot X^{n+m-1}$

$= a \cdot b \cdot n \cdot X^{n+m-1} + a \cdot b \cdot m \cdot X^{n+m-1} = a \cdot n \cdot X^{n-1} \cdot b \cdot X^m + a \cdot X^n \cdot b \cdot m \cdot X^{m-1}$

$= (a \cdot X^n)' \cdot (b \cdot X^m) + (a \cdot X^n) \cdot (b \cdot X^m)'$

$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right) \cdot \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j X^j\right) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}^2} a_i \cdot b_j \cdot X^{i+j}$

Wegen der Liniarität ist nun $\left(\sum_{i,j\in\mathbb{N}^2} a_i \cdot b_j \cdot X^i \cdot X^j\right)' = \sum_{i,j\in\mathbb{N}^2} (a_i \cdot X^i \cdot b_j \cdot X^j)'$

$= \sum_{i,j\in\mathbb{N}^2} (a_i X^i)' \cdot (b_j \cdot X^j) + (a_i X^i) \cdot (b_j X^j)' = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right)' \cdot \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j X^j\right) + \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right) \cdot \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j X^j\right)'$

b) char $K = 0 \qquad t \in K \qquad k \neq 0$

zz: t… k-fache Nullstelle von $P(X) \Rightarrow t$… $(k-1)$-fache Nullstelle von $P'(X)$

$\exists Q(X) \in K[X]: P(X) = Q(X) \cdot (X-t)^k$

Vollständige Induktion nach k

$k=1$: $\quad P'(X) = (Q(X) \cdot (X-t)^1)' = Q'(X) \cdot (X-t) + Q(X) \cdot (1)$

$P'(t) = Q'(t) \cdot (t-t) + Q(t) = Q(t) \neq 0$ (sonst wäre t eine $(k+1)$-fache Nullstelle)

$k+1$: $\quad P'(X) = Q'(X) \cdot (X-t)^{k+1} + Q(X) \cdot ((X-t)^{k+1})'$

$= Q'(X) \cdot (X-t)^{k+1} + Q(X) \cdot ((X-t)^{k\,'} \cdot (X-t) + (X-t)^k \cdot 1)$

$= Q'(X) \cdot (X-t)^{k+1} + Q(X) \cdot ((X-t)^k)' \cdot (X-t) + Q(X) \cdot (X-t)^k$

$= (X-t)^k \cdot (Q'(X) \cdot (X-t) + Q(X)) + Q(X) \cdot ((X-t)^k)' \cdot (X-t)$

…

LINAG Ü6

8.3.2. V... VR $\quad g, h \in L(V,V)$

a) $t \in K^\times$ zz: t... Eigenwert von $g \circ h \Leftrightarrow t$... Eigenwert von $h \circ g$

$\Rightarrow$ $\exists a \in V \setminus \{0\}: (g \circ h)(a) = t \cdot a$

$\Leftrightarrow g(h(a)) = t \cdot a \quad \Leftrightarrow h(g(h(a))) = h(t \cdot a)$

$\Leftrightarrow (h \circ g)(h(a)) = t \cdot h(a)$

$h(a) \neq 0$, da sonst $(g \circ h)(a) = 0 = t \cdot a$ mit $t \neq 0$ und $a \neq 0$ ↯

$\Leftarrow$ analog

b) $\dim V = n < \infty \qquad t \in K$

zz: t... Eigenwert von $g \circ h \Leftrightarrow t$... Eigenwert von $h \circ g$

$\Rightarrow$ Falls $t \neq 0$ siehe a. D.h. $t = 0$

$\Rightarrow \ker((g \circ h) - 0 \cdot id_V) = \ker(g \circ h) \neq \{0\}$ also nicht injektiv

$\Rightarrow \det(g \circ h) = 0 = \det(h \circ g)$ also ist auch $h \circ g$ nicht bijektiv

$\Rightarrow h \circ g$ ist nicht injektiv (Satz 3.2.9 inj v sur $\Rightarrow$ bij wenn $\dim V = \dim V < \infty$)

$\Rightarrow \ker(h \circ g) \neq \{0\}$ also ist 0 Eigenwert von $h \circ g$

$\Leftarrow$ analog

LINAG Ü6

8.3.5. $f \in L(V,V)$

a) $\exists r \in \mathbb{N}: \ker f^r = \ker f^{r+1} \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}: \ker f^r = \ker f^{r+i}$

Indirekter Beweis: Angenommen $\exists i \in \mathbb{N}: \ker f^r \neq \ker f^{r+i}$

o.B.d.A. ist i die kleinste solche natürliche Zahl

Offensichtlich ist $\ker(f^r) \subseteq \ker(f^{r+i})$, d.h.

$\exists a \in f^{r+i-1}(V): a \neq 0 \wedge f(a) = 0$ (da $\ker(f^{r+i-1}) = \ker(f^r)$)

$\Rightarrow \exists b \in f^{i-1}(V): f^r(b) = a$

$b \in V$ und $f^r(b) = a \neq 0 \wedge f^{r+1}(b) = f(a) = 0$

$\Rightarrow \ker(f^r) \neq \ker(f^{r+1})$ $\lightning$

b) $\dim V = n < \infty$ zz: $\exists r \in \mathbb{N}: \ker(f^r) = \ker(f^{r+1})$

$I = \{1, 2, \dots, n\}$ $B = (b_i)_{i \in I}$ ... Basis von V

$n = \text{rg } f^0 \geq \text{rg } f^1 \geq \text{rg } f^2 \geq \dots$ dabei kann maximal n-mal ein echtes $>$ stehen und sonst nur $=$

Sei $r \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall s \geq r: \text{rg } f^r = \text{rg } f^s$

$\Rightarrow \text{def}(f^r) = \dim(V) - \text{rg}(f^r) = \dim(V) - \text{rg}(f^{r+1}) = \text{def}(f^{r+1})$

Da $\ker(f^r) \subseteq \ker(f^{r+1})$ und der Kern immer ein UR ist folgt

$\ker(f^r) = \ker(f^{r+1})$

c) $\dim V = \infty$ zz: muss kein $r \in \mathbb{N}$ mit $\ker f^r = \ker f^{r+1}$ geben

$\dim(V) > |\mathbb{N}|$ $B = (b_i)_{i \in I}$ ... Basis von V $\Rightarrow \mathbb{N} \subset I$

$f \in L(V,V)$, so dass $b_0 \mapsto 0$, $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}: b_i \mapsto b_{i-1}$ und $\forall i \in I \setminus \mathbb{N}: b_i \mapsto b_i$

$\Rightarrow \forall r \in \mathbb{N}: f^r(b_r) = b_0 \neq 0 \wedge f^{r+1}(b_r) = 0$

$\Rightarrow \forall r \in \mathbb{N}: \ker(f^r) \neq \ker(f^{r+1})$

LINAG Ü6

8.4.1. ges: Eigenwerte und Basen der Eigenräume

α) $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}$ $\quad A-XE_4=\begin{pmatrix}-X&1&0&0\\0&-X&1&0\\0&0&-X&1\\1&0&0&-X\end{pmatrix}$

$\det(A-XE_4)=X^4-1=:\chi_A(X)$

offensichtlich sind 1 und -1 Nullstellen $\quad (X-1)\cdot(X+1)=X^2-1$

$X^4-1:(X^2-1)=X^2+1 \quad \Rightarrow \chi_A(X)=(X-1)(X+1)(X^2+1)$

$-(X^4-X^2)$

$X^2-1 \quad$ X^2+1 hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$

$-(X^2-1)$

$0 \quad \Rightarrow A$ hat Eigenwerte $\{-1,1\}$

$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad x_1+x_2=0 \quad x_2+x_3=0 \quad x_3+x_4=0 \quad x_1+x_4=0$

$x_1=-x_2=x_3=-x_4$ $\quad$ Lösung $\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right]$

$\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad -x_1+x_2=0 \quad -x_2+x_3=0 \quad -x_3+x_4=0 \quad x_1-x_4=0$

$x_1=x_2=x_3=x_4$ $\quad$ Lösung $\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$

γ) $B=\begin{pmatrix}\cos(\varphi)&-\sin(\varphi)\\\sin(\varphi)&\cos(\varphi)\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times2}$ mit $\varphi\in\mathbb{R}$ $\quad B-XE_2=\begin{pmatrix}\cos(\varphi)-X&-\sin(\varphi)\\\sin(\varphi)&\cos(\varphi)-X\end{pmatrix}$

$\det(B-XE_2)=(\cos(\varphi)-X)^2+(\sin(\varphi))^2=(\cos(\varphi))^2-2\cos(\varphi)X+X^2+(\sin(\varphi))^2$

1. Fall: $\varphi=2\mathbb{Z}\pi$ $\quad \det(B-XE_2)=(1-X)^2=0 \iff X=1$ … EW von B

$B-1E_n=\begin{pmatrix}1-1&0\\0&1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ Lösung $\left[\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\right]$

2. Fall: $\varphi=(2\mathbb{Z}-1)\pi$ $\quad \det(B-XE_2)=(-1-X)^2=(-(X+1))^2=(X+1)^2=0 \iff X=-1$ … EW von B

$B-(-1)E_n=\begin{pmatrix}-1+1&0\\0&-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ Lösung $\left[\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\right]$

3. Fall: $\varphi\neq\mathbb{Z}\pi$ $\quad \det(B-XE_2)=X^2-2\cos(\varphi)X+(\sin(\varphi))^2+(\cos(\varphi))^2=X^2-2\cos(\varphi)X+1$

$\det(B-XE_2)=0 \iff X^2-2\cos(\varphi)X+1=0 \iff X=\cos(\varphi)\pm\sqrt{(\cos(\varphi))^2-1}$

$\iff x=\cos(\varphi)\pm\sqrt{-(\sin(\varphi))^2} \iff x=\cos(\varphi)\pm i\cdot\sin(\varphi)$ … Eigenwerte von B

LINAG Ü6

8.4.1...

$$(B-(\cos(\varphi)-i\sin(\varphi))E_2) = \begin{pmatrix} i\sin(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & i\sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$i\sin(\varphi)\cdot x_1 - \sin(\varphi)\, x_2 = 0$ $\qquad$ $\sin(\varphi)\, x_1 + i\sin(\varphi)\cdot x_2 = 0$

$\underset{\neq 0}{\sin(\varphi)}\cdot(i x_1 - x_2) = 0$ $\qquad$ $\underset{\neq 0}{\sin(\varphi)}\cdot(x_1 + i x_2) = 0$

$i x_1 = x_2$ $\qquad$ $x_1 = -i x_2 \overset{\cdot i}{\Leftrightarrow} i x_1 = x_2$

Lösung $\left[\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\}\right]$

$$B-(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))E_2) = \begin{pmatrix} -i\sin(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -i\sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-i\sin(\varphi)\, x_1 - \sin(\varphi)\, x_2 = 0$ $\qquad$ $\sin(\varphi)\, x_1 - i\sin(\varphi)\, x_2 = 0$

$-\underset{\neq 0}{\sin(\varphi)}\cdot(i x_1 + x_2) = 0$ $\qquad$ $\underset{\neq 0}{\sin(\varphi)}\cdot(x_1 - i x_2) = 0$

$i x_1 = -x_2$ $\qquad$ $x_1 = i x_2 \overset{\cdot i}{\Leftrightarrow} i x_1 = -x_2$

Lösung $\left[\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right\}\right]$

LINAG Ü6

8.3.6. $P(X) \in K[X]$ $\quad f \in L(V,V)$

a) zz: $t \in K$... Eigenwert von $f \Rightarrow P(t)$ ... Eigenwert von $P(f)$

$\exists a \in V \setminus \{0\}: f(a) = t \cdot a \qquad f^i(a) = f^{i-1}(t \cdot a) = t \cdot f^{i-1}(a) = \ldots = t^i \cdot a$

$P(f) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i f^i \qquad P(f)(a) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i f^i(a) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \cdot t^i \cdot a = \underbrace{\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \cdot t^i\right)}_{\in K} \cdot a$

b) $K = \mathbb{C} \qquad n := \text{grad}(X) \geq 1$

zz: $\forall v$... Eigenwert von $P(f)$: $\exists t \in \mathbb{C}$... Eigenwert von f: $v = P(t)$

Da der Körper $\mathbb{C}$ ist zerfällt $P(X) - v$ laut dem Fundamentalsatz der Algebra in

$P(X) - v = a_n \prod_{j=1}^{n} (X - t_j)$ mit $a_n \in \mathbb{C}^\times$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$

$P(f) - v\, id_V = a_n (f - t_1 id_V) \circ (f - t_2 id_V) \circ \ldots \circ (f - t_n id_V)$

$\ker(P(f) - v\, id_V) \neq \{0\}$, da v EW von $P(f)$ ist (Satz 8.3.5)

$\Rightarrow \exists x \in V \setminus \{0\}: (P(f) - v\, id_V)(x) = (a_n (f - t_1 id_V) \circ \ldots \circ (f - t_n id_V))(x) = 0$

$a_n (f - t_1 id_V) \circ \ldots \circ (f - t_n id_V)$ hat Nullstellen bei $t_1, \ldots, t_n$

$\exists i \in \{1, \ldots, n\}: (f - t_i id_V)(x) = 0 \quad \Rightarrow t_i$ ist Eigenwert zum Eigenvektor x (von f)

$(P(f) - v\, id_V)(x) = 0 \quad \Rightarrow v$ ist Eigenwert zum Eigenvektor x (von $P(f)$)

Nach a) ist $P(t_i)$ ein Eigenwert von $P(f)$ zum Eigenvektor x. Da ein Eigenvektor den Eigenwert eindeutig bestimmt (Buch Seite 217) gilt $v = P(t_i)$

$\square$

LINAG Ü6

8.4.3. a) $t \in K$ $\quad f \in L(V,V)$ $\quad t \ldots$ Eigenwert von f

zz: algebraische Vielfachheit von $t \geq$ geometrische Vielfachheit von t

Definition algebraische Vielfachheit: Vielfachheit der Nullstelle t in χ_f

Definition geometrische Vielfachheit: dim des Eigenraums von t

$k :=$ geometrische Vielfachheit von t

$\exists b_1, b_2, \ldots, b_k \in V \ldots$ l.u., EV zu t also Basis des Eigenraums von t

Erweitern wir nun $(b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots)$ zu einer Basis von V, dann ist

$$\langle B^*, f(B) \rangle = \left(\underbrace{\begin{matrix} t & 0 & \cdots \\ 0 & t & \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \end{matrix}}_{k \text{ Spalten}} \middle| \begin{matrix} * & * \cdots \\ * & * \\ \vdots & \end{matrix} \right) \quad \text{da } f(b_1) = t \cdot b_1 \quad f(b_2) = t \cdot b_2 \ \ldots$$

$$\chi_f(x) = \det \left(\underbrace{\begin{matrix} t-x & 0 & \cdots \\ 0 & t-x & \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \end{matrix}}_{k \text{ Spalten}} \middle| \ * \right) = (t-x)^k \cdot \ ?$$

$\Rightarrow$ algebraische Vielfachheit ist zumindest k

b) $$J_n(t) := \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & t & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & t \end{pmatrix}$$

ges: geometrische und algebraische Vielfachheiten aller Eigenwerte von $J_n(t)$

$$\chi_{J_n(t)} = \det(J_n(t) - x E_n) = \det \begin{pmatrix} t-x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t-x & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & t-x & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & & t-x \end{pmatrix} = (t-x)^n, \text{ da obere Dreiecksmatrix}$$

$\Rightarrow \chi_{J_n(t)}$ hat eine Nullstelle bei t

mit algebraischer Vielfachheit n

$$(\underbrace{J_n(t) - t E_n}) \cdot (x_j) = (0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2 = 0, \ x_3 = 0, \ldots, x_n = 0$

$\Rightarrow$ Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ $\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit $= 1$

LINAG Ü6

8.2.9. ...

$$(X-t)^k\,(Q'(X)\cdot(X-t)+Q(X)) + Q(X)\cdot((X-t)^k)'\cdot(X-t)$$

Nach Annahme hat $((X-t)^k)'$ eine $(k-1)$-fache Nullstelle bei t.

$\Rightarrow \exists\, S(X) : ((X-t)^k)' = (X-t)^{k-1}\cdot S(X)$

$$(X-t)^k(Q'(X)\cdot(X-t)+Q(X)) + Q(X)\cdot(X-t)^{k-1}\cdot S(X)\cdot(X-t)$$
$$= (X-t)^k\,(\,Q'(X)\cdot(X-t)+Q(X)+Q(X)\cdot S(X))$$

$\Rightarrow P'(X)$ hat eine k-fache Nullstelle bei t (kann keine $(k+1)$-fache Nullstelle sein, da sonst $Q(X)$ $(X-t)$ teilen müsste)

Falls $\operatorname{char} K \neq 0$ könnte die Summe in der Klammer 0 ergeben.

Bei $\operatorname{char} K = 0$ ist die Summe sicher nicht das Nullpolynom.