# PDGL Ü6

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ... beschränktes Gebiet, $\partial\Omega \in C^1$ $\quad -\Delta u = f$ in $\Omega$ $\quad \nabla u \cdot \nu = 0$ auf $\partial\Omega$ $\quad f \in L^2(\Omega)$

(i) ges: schwache Formulierung in $H^1(\Omega)$

$$\Phi \in H^1(\Omega) \qquad \int_\Omega f \Phi \, dx = \int_\Omega -\Delta u \, \Phi \, dx = -\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u) \Phi \, dx \overset{\text{Gauß}}{=} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \Phi \, dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \nu) \Phi \, ds}_{=0}$$

Finde $u \in H^1(\Omega)$: $\int_\Omega f \Phi \, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \Phi \, dx \quad \forall \Phi \in H^1(\Omega)$ und $\nabla u \cdot \nu = 0$ auf $\partial\Omega$.

(ii) Angenommen $\int_\Omega f \, dx = 0$ $\qquad$ zz: $\exists u \in H^1(\Omega)$ ... Lsg der schwachen Formulierung

$$V := \{ v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v(x) \, dx = 0 \}$$

[ 4.5 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $\partial\Omega \in C^1$ $\Rightarrow \exists C > 0 \, \forall u \in H^1(\Omega): \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$

wobei $\bar{u} := \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega u(y) \, dy$

$V = \{ v \in H^1(\Omega) : \bar{v} = 0 \}$ $\qquad (u,v) := (u,v)_{H_1} = \int_\Omega u v \, dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $V$ ... Cauchy-Folge bel. $\Rightarrow \exists v \in H^1(\Omega): v_n \xrightarrow{n\to\infty} v$ $\qquad$ zz: $v \in V$

$\forall n \in \mathbb{N}: \int_\Omega v_n(x) dx = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n(x) \, dx = \int_\Omega v(x) \, dx \Rightarrow v \in V$

$\Rightarrow V$ ... Hilbertraum

[ Lax-Milgram $H$ ... Hilbertraum $a: H \times H \to \mathbb{R}$ ... stetig, koerziv $F \in H'$ $\Rightarrow \exists! u \in H: a(u,v) = F(v) \, \forall v \in H$

$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx \qquad F(v) := \int_\Omega f v \, dx \qquad$ [ $V \subseteq H^1 \Rightarrow \|.\|_V = \|.\|_{H^1}|_V$

$|a(u,v)| = |\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \Rightarrow$ $\underline{a(.,.)\text{ stetig}}$

$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{(C+1)^2} \|u\|_{H^1}^2$, da $\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \underset{\text{Poincare}}{\leq} (C+1)\|\nabla u\|_{L^2}$

$F$ ... linear ✓ $\qquad \Rightarrow$ $\underline{a(.,.)\text{ ... koerziv}}$

$F$ ... stetig: $|F(v)| = |\int_\Omega f v \, dx| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} < \infty \quad (f \in L^2, v \in V \subseteq H_1 \subseteq L_2)$

$$\overset{\text{Lax Mil.}}{\Rightarrow} \exists! u \in V: \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in V$$

Sei nun $\Phi \in H^1(\Omega) \Rightarrow \Phi - \bar{\Phi} =: v \in V$

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla \Phi \, dx = \int_\Omega \nabla u \, \nabla(v + \underset{\text{konstant}}{\bar{\Phi}}) \, dx = \int_\Omega \nabla u \, \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx = \int_\Omega f \Phi \, dx - \bar{\Phi} \underbrace{\int_\Omega f \, dx}_{=0}$$

$$= \int_\Omega f \Phi \, dx$$

$$\Rightarrow \forall \Phi \in H^1(\Omega): \int_\Omega \nabla u \nabla \Phi \, dx = \int_\Omega f \Phi \, dx$$

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \, ds \overset{\text{Gauß}}{=} \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u) \, dx = \int_\Omega \Delta u \, dx = -\int_\Omega f \, dx = 0 \quad \Rightarrow \nabla u \cdot \nu = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \quad \square$$

# PDGL Ü6

2) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ... beschr. Gebiet, $\partial\Omega \in C^2$ $\quad \Delta^2 u = f$ in $\Omega$ $\quad u = \nabla u \cdot \nu = 0$ auf $\partial\Omega$ $\quad f \in L^2(\Omega)$

(i) ges: schwache Formulierung

$$\int_\Omega f v \, dx = \int_\Omega \Delta^2 u \, v \, dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla(\Delta u)) v \, dx \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_\Omega \underbrace{\nabla(\underbrace{\Delta u}_{\nabla^2 u})}_{\nabla^3 u} \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} (\nabla(\Delta u) \cdot \nu) v \, ds =$$

$$= -\int_\Omega \Delta(\nabla u) \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} (\nabla^3 u \cdot \nu) v \, ds = -\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla^2 u) \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} (\nabla^3 u \cdot \nu) \cdot v \, ds =$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \int_\Omega \nabla^2 v \, \nabla^2 u \, dx - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\nabla v (\nabla^2 u}_{=0} \cdot \nu) \, ds + \int_{\partial\Omega} \nabla^3 u \cdot \nu \cdot \underbrace{v}_{=0} \, ds = \int_\Omega \Delta u \, \Delta v \, dx$$

Also schwache Formulierung: Suche $u \in H_0^2(\Omega)$ mit $\forall v \in H_0^2(\Omega)$: $\int_\Omega \Delta u \, \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$

(ii) $a(u,v) := \int_\Omega \Delta u \, \Delta v \, dx$ $\quad$ zz: stetig, koerziv

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \Delta u \, \Delta v \, dx \right| \leq \|\Delta u\|_{L^2} \|\Delta v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H_0^2} \|v\|_{H_0^2} \quad \Rightarrow \text{stetig}$$

$$a(u,u) = \int_\Omega (\Delta u)^2 \, dx = \|\Delta u\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{C^2} \|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \quad , \text{da } \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \overset{*}{\leq} C \|\Delta u\|_{L^2} \Rightarrow \text{koerziv}$$

(iii) zz: $\exists$ schwache Lösung

$H_0^2(\Omega)$ ... Hilbertraum $\quad a(.,.)$ ... stetig, koerziv $\quad F(v) := \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$

$F$ ... linear: klar $\quad F$ ... stetig: $|F(v)| = \left| \int_\Omega f v \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} < \infty$ ✓

Mit Lax-Milgram folgt

$$\exists u \in H_0^2(\Omega) \; \forall v \in H_0^2(\Omega): \; a(u,v) = F(v)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \Delta u \, \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

* Müssen wir das zeigen? Falls ja, dann hier:

$$\|u\|_{H_0^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2} \underset{\substack{\text{Poincare} \\ u \in H_0^2 \Rightarrow u \in H_0^1}}{\leq} C \|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2} =$$

$$= (C+1) \|\nabla u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2} \underset{\substack{\text{Poincare} \\ u \in H_0^2 \Rightarrow \nabla u \in H_0^1}}{\leq} (C+1) D \|\underbrace{\nabla^2 u}_{=\Delta u}\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2} = ((C+1)D + 1) \|\Delta u\|_{L^2}$$

Poincare $\quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ... offen, beschränkt $\Rightarrow \exists C > 0 \; \forall u \in H_0^1(\Omega): \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$

Bemerkung: die zwei Sätze brauchen wir damit wir so wie für $\Delta u = f$ rechnen können und alles weiterhin gilt.

<u>PDGL</u> Ü6

3) $\Delta^2 u + u = f$ in $\mathbb{R}^n$ mit $f \in L^2$ und $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$

(i) u.. lsg  ges: $\hat{u}$ in abhängigkeit von $\hat{f}$

$$\hat{f} = \widehat{\Delta^2 u + u} = \widehat{\Delta^2 u} + \hat{u} = \widehat{\Delta(\underbrace{\Delta u}_{g})} + \hat{u} =$$

[ $\widehat{\Delta g} = -|k|^2 \hat{g}$ nach Skript

$$= -|k|^2 \widehat{(\Delta u)} + \hat{u} = -|k|^2(-|k|^2)\hat{u} + \hat{u} =$$

$$= (|k|^4 + 1)\hat{u}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(k) = \frac{1}{|k|^4+1}\hat{f}(k)$$

(ii) zz: $\hat{u} \in L^1 \cap L^2$ für $n \le 7$  o.B. $\hat{f} \in L^2$

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \left\|\frac{1}{|k|^4+1}\hat{f}(k)\right\|_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|k|^4+1}\hat{f}(k)\right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{1}{(|k|^4+1)^2}}_{\le 1} (\hat{f}(k))^2 dx \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{f}(k))^2 dx = \|\hat{f}(k)\|_{L^2} < \infty$$

$n = 2, \dots, 7$

$$\hat{f} \in L^2 \quad \frac{1}{|k|^4+1} \in L^2, \text{ da } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|k|^4+1)^2} dk = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \frac{1}{(r^4+1)^2} r^{n-1} \prod_{k=2}^{n-1} (\sin(\Phi_{n-k}))^{k-1} d\Phi_1 \cdots d\Phi_{n-1} dr$$

$$= \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(r^4+1)^2} dr \int_0^{2\pi} 1 \, d\Phi_{n-1} \int_0^\pi \sin(\Phi_{n-2}) \, d\Phi_{n-2} \int_0^\pi \sin(\Phi_{n-3})^2 d\Phi_{n-3} \cdots \int_0^\pi \sin(\Phi_1)^{n-2} d\Phi_1 =$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(r^4+1)^2} dr + \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{(r^4+1)^2} dr\right)(2\pi)(\pi)\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3\pi}{8}\right)\left(\frac{16}{15}\right) \le$$

fällt weg je nach n

$$\le \left(\int_0^1 \frac{r^1}{(r^4+1)^2} dr + \int_1^\infty \frac{r^6}{(r^4+1)^2} dr\right) C = \left(\frac{2+\pi}{16} + \frac{1}{32}\left(4 + 3\sqrt{2}\pi - 3\sqrt{2}\ln(3 - 2\sqrt{2})\right)\right) C < \infty$$

$$n = 1: \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(|k|^4+1)^2} dk = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} < \infty$$

(alles mit Wolfram Alpha gerechnet)

$$\Rightarrow \hat{u}(k) = \frac{1}{|k|^4+1}\hat{f}(k) \in L^2(\mathbb{R}^n) \cdot L^2(\mathbb{R}^n)$$

Mit Hölder Ungleichung $p = 2, q = 2, r = 1 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$

$$\Rightarrow \|\hat{u}\|_r \le \left\|\frac{1}{|k|^4+1}\right\|_p \|\hat{f}\|_q < \infty$$

$$\Rightarrow \hat{u} \in L^1 \cap L^2$$

$\square$

PDGL Ü6

4) $\Omega = \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ $\quad p_n(x) := \begin{cases} 1, & \|x\|_\infty \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad$ ges: $\hat{p}_n$

$$\hat{p}_n(k) := \int_{\mathbb{R}^d} p_n(x) e^{-ikx} dx = \int_{B_n^\infty(0)} e^{-ikx} dx = \qquad \|x\|_\infty \leq n \Leftrightarrow \forall l : x_l \in [-n, n]$$

$$= \int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n} \exp(-i \sum_{l=1}^{d} k_l x_l) dx_1 \cdots dx_d = \int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n} \prod_{l=1}^{d} \exp(-ik_l x_l) dx_1 \cdots dx_d =$$

$$= \prod_{l=1}^{d} \int_{-n}^{n} e^{-ik_l x_l} dx_l = \prod_{l=1}^{d} \frac{1}{-ik_l} e^{-ik_l x_l} \Big|_{-n}^{n} = \prod_{l=1}^{d} \frac{-(e^{-ik_l n} - e^{+ik_l n})}{ik_l} =$$

$$= \prod_{l=1}^{d} \frac{e^{ik_l n} - e^{-ik_l n}}{ik_l} = \prod_{l=1}^{d} \frac{2}{k_l} \sin(k_l n) \qquad \left[ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right.$$

$$\hat{p}_n(0) = \int_{\mathbb{R}^d} p_n(x) e^0 dx = \int_{B_n^\infty(0)} 1 \, dx = \int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n} 1 \, dx_1 \cdots dx_d = (x_1 \big|_{-n}^{n})^d = (2n)^d$$

---

$$f(x) = (\check{\hat{f}})(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$$

Wir interessieren uns für $f(x) \equiv 1$ und suchen also ein $\hat{f}(k)$, dass obige Gleichung erfüllt. Bemerkung: Wir nehmen an es gibt eine Erweiterung von $\mathcal{F}$ auf nicht $L^1$ Funktionen, da offenbar $1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

$\hat{f}(k) = (2\pi)^d \delta_0(k)$ erfüllt schon mal die obige Gleichung.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2}{k} \sin(kn) = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 2 \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{k \to 0} \frac{\sin(kn)}{k} \overset{\text{l'H}}{=} 2 \lim\limits_{k,n \to \infty} \frac{n \sin(kn)}{1} = \infty, & k = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot \delta_0$$