LINAG Ü10

4.2.3

ges: drei verschiedene Linearformen $a_i^*: \mathbb{R}^{4\times1} \to \mathbb{R}$ und eine Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^{4\times1}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a_1^*, a_2^*, a_3^*) ist l.u. in $(\mathbb{R}^{4\times1})^*$
- $a_i^*|H$ ist nicht trivial
- $(a_1^*|H, a_2^*|H, a_3^*|H)$ ist l.a. in H^*

$a_1^*: \mathbb{R}^{4\times1} \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto x_1$ $\quad$ $a_2^*: \mathbb{R}^{4\times1} \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto x_2$ $\quad$ $a_3^*: \mathbb{R}^{4\times1} \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_4$

$$H = [\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}]$$

$a_1^*|H: H \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto x_1$ $\quad$ $a_2^*|H: H \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto x_2$ $\quad$ $a_3^*|H: H \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + 0 = x_1$

Offensichtlich ist $\{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$ l.u. in $(\mathbb{R}^{4\times1})^*$.

Offensichtlich ist $a_1^*|H$, $a_2^*|H$ und $a_3^*|H$ nicht trivial.

Offensichtlich ist $\{a_1^*|H, a_2^*|H, a_3^*|H\}$ l.a, da $a_1^*|H = a_3^*|H$.

LINAG Ü10

4.2.7 b) $f: \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}$ $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ... kanonische Basis des $\mathbb{R}^{4\times 1}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c \cdot p_3 + d \cdot p_4$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 52{,}2 \qquad f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 33{,}8 \qquad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 24{,}8$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 88{,}6$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 52{,}2 & 33{,}8 & 24{,}8 & 88{,}6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -\mathrm{II} & -\mathrm{III} & & -\mathrm{II} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 18{,}4 & 9 & 24{,}8 & 54{,}8 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \cdot(2^{-1}) & & & -2\cdot\mathrm{I} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 9{,}2 & 9 & 24{,}8 & 18 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & -\mathrm{I} & -2\cdot\mathrm{II} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 9{,}2 & 9 & 15{,}6 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \cdot(2^{-1}) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9{,}2 & 9 & 7{,}8 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$f_1(e_1) = 0$ $\qquad f_1(e_2) = 0{,}2$ $\qquad f_1(e_3) = 9$ $\qquad f_1(e_4) = 7{,}8$

$f_2(e_1) = 9$ $\qquad f_2(e_2) = 9{,}2$ $\qquad f_2(e_3) = 0$ $\qquad f_2(e_4) = -1{,}2$

$$f(e_1) - f(e_2) = f(e_1 - e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 9 - 7{,}8 = 1{,}2$$

LINAG Ü10

4.4.1 α) $B=(b_1,b_2,b_3)$ $\quad \tilde{B}=(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\tilde{b}_3)$ $\quad V\ldots$ VR über $\mathbb{R}$

$$\langle \tilde{B}^*, B\rangle = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $x \in V \quad \langle B^*, x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \langle \tilde{B}^*, x\rangle = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}$

ges: Transformationsformeln für beide Koordinatenwechsel

Aus den Zeilen von $\langle \tilde{B}^*, B\rangle$ kann man ablesen:

$\tilde{x}_1 = x_1 - 3x_2 - 3x_3 \qquad \tilde{x}_2 = x_1 - x_2 \qquad \tilde{x}_3 = x_1 + x_3$

Die zu $\langle \tilde{B}^*, B\rangle$ inverse Matrix ist $\langle B^*, \tilde{B}\rangle$.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} +\mathrm{III} & \cdot(-1) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & -\mathrm{I} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -\mathrm{III} & \mathrm{II} & \mathrm{I} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & -3\cdot\mathrm{I} & +2\cdot\mathrm{I} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{matrix}} = \langle B^*, \tilde{B}\rangle$$

Aus den Zeilen von $\langle B^*, \tilde{B}\rangle$ kann man ablesen:

$x_1 = \tilde{x}_1 - 3\tilde{x}_2 + 3\tilde{x}_3 \qquad x_2 = \tilde{x}_1 - 4\tilde{x}_2 + 3\tilde{x}_3 \qquad x_3 = -\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3$

b) Aus den Spalten von $\langle \tilde{B}^*, B\rangle$ kann man ablesen:

$b_1 = 1\tilde{b}_1 + 1\tilde{b}_2 + 1\tilde{b}_3 \qquad b_2 = -3\tilde{b}_1 - 1\tilde{b}_2 \qquad b_3 = -3\tilde{b}_1 + 1\tilde{b}_3$

Aus den Spalten von $\langle B^*, \tilde{B}\rangle$ kann man ablesen:

$\tilde{b}_1 = 1b_1 + 1b_2 - 1b_3 \qquad \tilde{b}_2 = -3b_1 - 4b_2 + 3b_3 \qquad \tilde{b}_3 = 3b_1 + 3b_2 - 2b_3$

c) Aus den Zeilen von $\langle \tilde{B}^*, B\rangle$ kann man ablesen:

$\tilde{b}_1^* = 1b_1^* - 3b_2^* - 3b_3^* \qquad \tilde{b}_2^* = 1b_1^* - 1b_2^* \qquad \tilde{b}_3^* = 1b_1^* + 1b_3^*$

Aus den Zeilen von $\langle B^*, \tilde{B}\rangle$ kann man ablesen:

$b_1^* = 1\tilde{b}_1^* - 3\tilde{b}_2^* + 3\tilde{b}_3^* \qquad b_2^* = 1\tilde{b}_1^* - 4\tilde{b}_2^* + 3\tilde{b}_3^* \qquad b_3^* = -1\tilde{b}_1^* + 3\tilde{b}_2^* - 2\tilde{b}_3^*$

LINAG Ü10

4.3.2 $\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ kanonische Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $e_n = (\delta_{in})_{i\in\mathbb{N}}$

a) $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $b_0 = (1,0,0,0,\dots)$ $b_1 = (-1,1,0,0,\dots)$ $b_2 = (0,-1,1,0,\dots)\dots$

zz: $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist Basis von $\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$

Offensichtlich ist $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ l.u., da $\forall j\in\mathbb{N}: b_{jj}=1 \wedge (\forall k<j: b_{kj}=0)$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ bel. Wir wissen $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall k>N: a_{nk}=0$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{j=0}^{N} a_{nj} \cdot \sum_{k=0}^{j} b_k$, da $\sum_{k=0}^{j} b_k = (0,0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{1},0,\dots)$

$\Rightarrow (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist Basis, da l.u. und ES.

b) ges: $\langle b_j^*, (a_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle \in \mathbb{R}$

Da $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = \sum_{l=0}^{N} a_{il} \cdot \sum_{k=0}^{l} b_k$ ist und b_j in jeder inneren Summe, die

bei zu einem $k \geq l$ geht, vorkomment (und dann immer multipliziert

mit a_{il}) ist

$$b_j^*((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{k=j}^{N} a_{ik}$$

Welche $b_j^* \in [(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}]$?

Sei $j\in\mathbb{N}$ bel.

$$b_j^*((e_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{k=j}^{n} e_{nk}$$

Sei $n\in\mathbb{N}$ bel.

$$b_j^*(e_n) = \sum_{k=j}^{n} e_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \leq j \\ 0, & \text{falls } n > j \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Alle b_j^* liegen in der Hülle von $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$. ?

LINAG Ü10

4.3.3. $\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ $\quad (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... kanonische Basis

$$f: (\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle})^* \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$
$$a^* \mapsto (\langle a^*, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

zz: f ist linear und bijektiv

$a^*: \mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to \mathbb{R}$ ...linear $\qquad f(a^*) = (a^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$

Sei $a^*, b^* \in (\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle})^*$ bel. $\qquad$ Sei $x \in \mathbb{R}$ bel.

$$f(a^*+b^*) = ((a^*+b^*)(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = (a^*(e_n)+b^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$$
$$= (a^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}} + (b^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = f(a^*)+f(b^*)$$

$$f(x\cdot a^*) = ((x\cdot a^*)(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = (x\cdot(a^*(e_n)))_{n\in\mathbb{N}} = x\cdot(a^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$$
$$= x\cdot f(a^*)$$

$\Rightarrow f$ ist linear

Sei $a^*, b^* \in (\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle})^*$ bel. mit $f(a^*) = f(b^*)$

Wir wissen: durch das Verhalten auf einer Basis ist eine lineare Funktion vollständig und eindeutig definiert.

Da $(a^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = f(a^*) = f(b^*) = (b^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist verhalten sich die beiden Abbildungen auf eine Basis gleich.

$\Rightarrow a^* = b^* \quad \Rightarrow f$ ist injektiv

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bel.

Sei $a^*: \mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to \mathbb{R}$ definiert durch $e_i \mapsto x_i$ (also der i-te Basisvektor wird auf den Wert der i-ten Komponente von x abgebildet). Dann ist a^* wohl definiert und

$$(a^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$\Rightarrow f$ ist surjektiv

$\Rightarrow f$ ist linear und bijektiv

LINAG Ü10

3.6.9 $\quad f_1 : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{4\times 1} \quad f_2 : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{4\times 1} \quad V = U_1 \oplus U_2$

$\forall x_1 \in U_1 : f_1(x_1) = x_1 \wedge f_2(x_1) = -x_1 \quad \forall x_2 \in U_2 : f_1(x_2) = -x_2 \wedge f_2(x_2) = x_2$

a) zz: $f_2 = -f_1$ $\quad$ ges: $\langle E^*, f_1(E)\rangle$ und $\langle E^*, f_2(E)\rangle$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -\mathrm{III} & -\mathrm{IV} & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \cdot(-1) & & -\mathrm{II} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II} & \mathrm{IV} & \mathrm{I} & \mathrm{III} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}} = \langle E^*, f_1(E)\rangle$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -\mathrm{III} & -\mathrm{IV} & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \cdot(-1) & & -\mathrm{II} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{II} & \mathrm{IV} & \mathrm{I} & \mathrm{III} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}} = \langle E^*, f_2(E)\rangle$$

$\langle E^*, f_1(E)\rangle + \langle E^*, f_2(E)\rangle = 0$-Matrix

$\Rightarrow f_2 = -f_1$

b) $p_1 = \frac{1}{2}(f_1 + id)$ $\quad$ ges: $\langle E^*, p_1(E)\rangle$ $\quad$ zz: p_1 ist Projektion auf U_1 in Richtung U_2

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

durch Ablesen aus $\langle E^*, f_1(E)\rangle$

und ein wenig Kopfrechnen

ergibt sich:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}} = \langle E^*, p_1(E)\rangle$$

$$p_1(v_1) = p_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad p_1(v_2) = p_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2$$

$$p_1(v_3) = p_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_1(v_4) = p_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow p_1$ ist die angegebene Projektion

LINAG Ü10

4.3.x $V \dots VR/K$ $\dim(V)=n<\infty$ $n\geq 2$

$B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ $C=(c_1,\dots,c_n)$ … Basen von V $x\in K^\times$

$B^*=(b_1^*,b_2^*,\dots,b_n^*)$ $C^*=(c_1^*,\dots,c_n^*)$ … duale Basen zu B bzw C

a) $\forall i\geq 2: b_i=c_i \Rightarrow \forall i\geq 2: b_i^*=c_i^*$ falsch

$K=\mathbb{R}$ $V=\mathbb{R}^2$ $B=(\binom{1}{0},\binom{0}{1})$ $C=(\binom{1}{1},\binom{0}{1})$ $v=\binom{1}{1}\in V$

$b_2^*(v)=1$ $c_2^*(v)=0$

$\Rightarrow \exists i\geq 2: b_i^*\neq c_i^*$

b) $b_1=c_2 \wedge b_2=c_1 \wedge \forall i\geq 3: b_i=c_i \Rightarrow b_1^*=c_2^* \wedge b_2^*=c_1^* \wedge \forall i\geq 3: b_i^*=c_i^*$

Sei $v\in V$ bel. $s_1\cdot b_1+\dots+s_n\cdot b_n=v=t_1\cdot c_1+\dots+t_n\cdot c_n$ wahr

Da $b_1=c_2 \wedge b_2=c_1\wedge\forall i\geq 3: b_i=c_i$ gilt: $v=t_1\cdot b_2+t_2\cdot b_1+\dots+t_n\cdot b_n$

Da LK aus einer Basis eindeutig folgt $s_1=t_2\wedge s_2=t_1\wedge\forall i\geq 3: s_i=t_i$

$b_1^*(v)=s_1$ $b_2^*(v)=s_2$ $\forall i\geq 3: b_i^*(v)=s_i$

$c_1^*(v)=t_1=s_2$ $c_2^*(v)=t_2=s_1$ $\forall i\geq 3: c_i^*(v)=t_i=s_i$

$\Rightarrow b_1^*=c_2^*\wedge b_2^*=c_1^*\wedge\forall i\geq 3: b_i^*=c_i^*$

c) $\{b_1,\dots,b_n\}=\{c_1,\dots,c_n\}\Rightarrow\{b_1^*,\dots,b_n^*\}=\{c_1^*,\dots,c_n^*\}$ wahr

$\forall i\in\{1,\dots,n\}: b_i\in\{c_1,\dots,c_n\}$

$\Rightarrow b_i^*\in\{c_1^*,\dots,c_n^*\}$ $\Rightarrow\{b_1^*,\dots,b_n^*\}\subseteq\{c_1^*,\dots,c_n^*\}$

umgekehrt genauso

d) $x b_1=c_1\wedge\forall i\geq 2: b_i=c_1\Rightarrow x\cdot b_1^*=c_1^*\wedge\forall i\geq 2: b_i^*=c_i^*$

$K=\mathbb{R}$ $V=\mathbb{R}^2$ $B=(\binom{1}{0},\binom{0}{1})$ $C=(\binom{2}{0},\binom{0}{1})$ $x=2$ falsch

Sei $v=\binom{2}{2}$. $b_1^*(v)=2$ $c_1^*(v)=1$

$x\cdot b_1^*(v)=2\cdot 2=4\neq 1=c_1^*(v)$