ANA Ü10

g) $\alpha \in \mathbb{R}$ $|z|<1$ zz: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$ konvergiert

Quotientenkriterium mit $q = |z|$

$$\frac{\left|\binom{\alpha}{k+1} \cdot z^{k+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{k} \cdot z^k\right|} = \left| \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(k+1)+1)}{(k+1)!} \cdot z^{k+1}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \cdot z^k} \right|$$

$$= \left| z \cdot \frac{k! \cdot \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k)}{k! \cdot (k+1) \cdot \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)} \right| = |z| \cdot \left| \frac{\alpha-k}{k+1} \right|$$

$$= |z| \cdot \left| \frac{\frac{\alpha}{k} - 1}{1 + \frac{1}{k}} \right|$$

$$\lim_{k\to\infty} |z| \cdot \left| \frac{\frac{\alpha}{k} - 1}{1+\frac{1}{k}} \right| = |z| \cdot \left| \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{k} - 1}{1+\frac{1}{k}} \right| = |z| \cdot \left| \frac{-1}{1} \right| = |z|$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: \frac{\binom{\alpha}{k+1} \cdot z^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} \cdot z^k} \leq q = |z|$$

$\Rightarrow$ bei $|z| < 1$ konvergiert die Reihe

bei $|z| > 1$ divergiert die Reihe