7.) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Folge $\langle X, d\rangle$ ... metrischer Raum $x \in X$

zz: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall k \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: d(x_n, x) < \frac{1}{k}$

"$\Rightarrow$" ε ist aus $\mathbb{R}$ und da $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist gilt die Aussage der Konvergenz auch für die Teilmenge.

"$\Leftarrow$" Für jedes $\varepsilon > 0$ aus $\mathbb{R}$ existiert in $\mathbb{Q}$ ein $\frac{1}{k}$, sodass $0 < \frac{1}{k} < \varepsilon$. Da laut der rechten Seite $d(x_n, x) < \frac{1}{k}$ muss auch $d(x_n, x) < \frac{1}{k} < \varepsilon$ gelten. Damit gilt für alle ε: $\exists N\ \forall n \geq N: d(x_n, x) < \varepsilon$. $\square$

$k \in \mathbb{N}$ $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Folge in $[0, +\infty)$ $d(x,y) = |x-y|$

$$(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff (t_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

"$\Rightarrow$" Sei $k \in \mathbb{N}$ bel.

Da t_n in $[0, +\infty)$ liegt und (t_n) gegen 0 konvergiert folgt das wenn $n \geq N$ gilt, das $t_n < t_N$. Daher ist dann auch $(t_n)^k < t_N^k$.

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle N, so dass $t_N^k \leq \varepsilon \iff t_N \leq \sqrt[k]{\varepsilon}$.

Dann ist $d(t_n^k, 0) = |t_n^k - 0| = |t_n^k| = t_n^k < t_N^k \leq \varepsilon$ $\square$