LINAG Ü7

2.8.18 $U_1, U_2, T \ldots$ UR von V $\qquad V = U_1 \oplus U_2$

a) zz: $T \subset U_1 \vee T \subset U_2 \Rightarrow T = (T \cap U_1) \oplus (T \cap U_2)$

Aus $V = U_1 \oplus U_2$ folgt, dass $\nexists v \in V: v \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = \emptyset$

1\. Fall $T = \emptyset$: $T \subset U_1 \wedge T \subset U_2$, da $\emptyset$ in jeder Menge enthalten ist.

$T \cap U_1 = \emptyset$ und $T \cap U_2 = \emptyset$

$\Rightarrow T = (T \cap U_1) + (T \cap U_2)$ und die Summe ist direkt,

da $\emptyset \cap \Sigma \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

2\. Fall $T \neq \emptyset$: Da $U_1 \oplus U_2 = V$ folgt, dass $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

$\Rightarrow T$ kann nicht Teilmenge von U_1 <u>und</u> U_2 sein.

o.B.d.A $T \subset U_1 \wedge T \not\subset U_2$

$T \cap U_1 = T \qquad T \cap U_2 = \emptyset$

$(T \cap U_1) + (T \cap U_2) = T + \emptyset = T$ offensichtlich ist die Summe direkt.

b) zz: $U_1 \subset T \vee U_2 \subset T \Rightarrow T = (T \cap U_1) \oplus (T \cap U_2)$

o.B.d.A. $U_1 \subset T$

$T \cap U_1 = U_1 \qquad T \cap U_2$ ist laut Satz 2.3.8 ein UR von V.

und da $T \cap U_2 \subseteq U_2$ auch UR von U_2.

Da $T \cap U_2$ auch gleich $T \setminus U_1$ ist (folgt aus $U_1 \cap U_2 = \emptyset$)

kann 0_V nicht in $T \setminus U_1 = T \cap U_2$ liegen, da $0_V \in U_1$.

$\Rightarrow T \cap U_2 = \emptyset$

Dann gilt $(T \cap U_1) + (T \cap U_2) = U_1 \oplus \emptyset = U_1 = T$.

offensichtlich ist die Summe direkt.