MAS Ü13

1) $X_i \sim Ex_1 \ldots$ iid $\quad M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$

ges: Verteilung von M_n und Grenzverteilung von $M_n - \log(n)$

$$P(M_n < x) = P(\max(X_1, \ldots, X_n) < x) = P(X_1 < x \wedge X_2 < x \wedge \ldots \wedge X_n < x)$$

$$= P(X_1 < x) \cdot P(X_2 < x) \cdot \ldots \cdot P(X_n < x) = P(X_1 < x)^n = (1 - e^{-x})^n \text{ für } x > 0$$

$$\Rightarrow F_{M_n}(x) = (1 - e^{-x})^n \left(= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} (-e^{-x})^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-kx} \right)$$

$Y_n := M_n - \log(n) \qquad F_{Y_n}(x) = P(M_n - \log(n) < x) = P(M_n < x + \log(n)) = F_{M_n}(x + \log(n))$

$$\Rightarrow F_{Y_n}(x) = \left(1 - e^{-(x + \log(n))}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{e^{\log(n)}} e^{-x}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n} e^{-x}\right)^n \text{ für } x > -\log(n)$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n} e^{-x}\right)^n = \exp\left(\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n} e^{-x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 - \frac{1}{n} e^{-x})}{\frac{1}{n}}\right)$$

$$\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n} e^{-x}} \left(+ e^{-x} \frac{1}{n^2}\right) \frac{1}{-\frac{1}{n^2}}\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} e^{-x}}{-\frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n} e^{-x}\right)}\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{n\to\infty} - \frac{e^{-x}}{1 - \frac{1}{n} e^{-x}}\right) = \exp\left(-e^{-x} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n} e^{-x}}\right) = \exp(-e^{-x})$$

$\square$

MAS Ü13

2) $X_n, n\in\mathbb{N}$ SG mit VF $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{, für } x<0 \\ x\left(1-\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi x}\right) & \text{, für } 0\le x<1 \\ 1 & \text{, für } x\ge 1 \end{cases}$

zz: $X_n \to X \sim U_{0,1}$ in Verteilung

Konvergieren auch die Dichten?

$X_n \to X$ in Verteilung $:\Leftrightarrow F_n \to F$ schwach $:\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}$, F bei t stetig: $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, für } x<0 \\ x & \text{, für } 0\le x<1 \\ 1 & \text{, für } x\ge 1 \end{cases}$ ist die VF von $X\sim U_{0,1}$ und ist auf $\mathbb{R}$ stetig

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} x\left(1-\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi x}\right) = x\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi x}\right) = x\left(1-\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sin(2n\pi x)}_{\text{beschränkt}}\underbrace{\frac{1}{2n\pi x}}_{\to 0}\right)$$

$$= x(1-0) = x \quad \text{für } x\in[0,1)$$

$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ für $(-\infty,0)\cup[1,\infty)$ klar $\qquad \Rightarrow X_n \to X$ in Verteilung

Dichte $f_n(x) = \frac{d}{dx}F_n(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}\, x\left(1-\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi x}\right) & \text{, für } 0\le x<1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

$$\frac{d}{dx}\, x\left(1-\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi x}\right) = \left(1-\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi x}\right) + x\left(1-\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi x}\right)'$$

$$= 1-\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi x} + \cancel{x}\left(-\frac{\cos(2n\pi x)\,2n\pi\, 2n\pi x - \sin(2n\pi x)\,2n\pi}{4n^2\pi^2 x^{\cancel{2}}}\right)$$

$$= 1-\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi x} - \frac{\cancel{2n\pi}\,(2n\pi x\cos(2n\pi x) - \sin(2n\pi x))}{\cancel{4}_{2}\, n^{\cancel{2}}\pi^{\cancel{2}} x}$$

$$= \frac{2n\pi x - \cancel{\sin(2n\pi x)} - 2n\pi x\cos(2n\pi x) + \cancel{\sin(2n\pi x)}}{2n\pi x} = 1-\cos(2n\pi x)$$

Dichte $f(x) = \begin{cases} 1, & 0\le x<1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1-\cos(2n\pi x)$ existiert nicht

Also konvergieren die Dichten nicht.

$\square$

MAS Ü13

3) zz: $\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$ durch Verwendung des zentralen Grenzverteilungssatzes.

Zentraler Grenzverteilungssatz

$X_n \in \mathcal{L}_2$ ...iid auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathbb{E}(X_n) = \mu$, $\mathbb{V}(X_n) = \sigma^2 < \infty$

$\Rightarrow \quad \sum \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$

Def $X_n \xrightarrow{D} X \iff F_{X_n} \Rightarrow F_X$

Sei $X_n \sim Poi(1)$ $\quad F_{X_n}(x) = e^{-1} \sum_{j=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1^j}{j!}$ $\quad \mathbb{E}(X_n) = 1 = \mathbb{V}(X_n)$

$Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_n \sim Poi(n)$ $\quad F_{Y_n}(x) = e^{-n} \sum_{j=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{n^j}{j!}$ $\quad \mu = n = \sigma^2$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - n = \frac{Y_n}{\sigma^2} - \mu$ also standardisiertes Y_n.

$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} P(Y_n \le n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\sum \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le 0\right) = P(Z \le 0) = \frac{1}{2}$

$\square$

MAS Ü13

4) ges: φ... charakteristische Funktion von $\mathcal{N}(0,1)$ indem $\frac{d\varphi}{dt} = -t\varphi$ gezeigt wird.

$X \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ... Dichte

$\varphi(t) := \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$\int_{\mathbb{R}} |\underbrace{e^{itx}}_{|.|=1} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{>0}| dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} < \infty$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} i \cdot x\, e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} i \cdot e^{itx} \cdot \underbrace{x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}_{= -\frac{d}{dx}(e^{-\frac{x^2}{2}})} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (e^{-\frac{x^2}{2}})' \cdot i \cdot e^{itx} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((i e^{-\frac{x^2}{2} + itx}) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} i \cdot i \cdot t e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)$

$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(i \underbrace{e^{-\frac{\infty^2}{2}}}_{\to 0} \underbrace{e^{it\infty}}_{|.|=1} - i \underbrace{e^{-\frac{\infty^2}{2}}}_{\to 0} \underbrace{e^{-it\infty}}_{|.|=1} + t \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = -t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -t\varphi(t)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\varphi = -t\varphi$ Separation der Variablen führt zu

$\frac{d\varphi}{dt} = -t\varphi \iff \frac{1}{\varphi} d\varphi = -t\,dt \iff \int \frac{1}{\varphi} d\varphi = \int -t\,dt \iff \ln(\varphi) = -\frac{t^2}{2} + c$

$\iff \varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2} + c}$

$\varphi(0) = \mathbb{E}(e^{iX\cdot 0}) = \mathbb{E}(1) = 1 \qquad \Rightarrow \varphi(0) = e^c = 1 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow \varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

$\square$

MA2 Ü13

5) X_n ... SGen mit $P(X_n \in \mathbb{Z}) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

zz: $X_n \Rightarrow X \iff \left(P(X \in \mathbb{Z}) = 1 \wedge \lim_n P(X_n = z) = P(X = z) \ \forall z \in \mathbb{Z}\right)$

$X_n \Rightarrow X$ (also konvergent in Verteilung) $:\iff P^{X_n} \xrightarrow{w} P^X$ (also schwach)

Portemanteau: $\iff \forall U$ ... offen: $\liminf_n P_n(U) \geq P(U)$

$\iff \forall G$ ... abgeschlossen: $\limsup_n P_n(G) \leq P(G)$

$\iff \forall S, P(\delta S) = 0$: $\lim_{n\to\infty} P_n(S) = P(S)$

($\Rightarrow$) $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen, $\forall n \in \mathbb{N}: P(X_n \in \mathbb{Z}) = 1 \Rightarrow 1 = \limsup_n P_n(\mathbb{Z}) \leq P(\mathbb{Z}) \leq 1$

$\Rightarrow P(X \in \mathbb{Z}) = 1$

Sei $z \in \mathbb{Z}$ bel. $S := (z - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2})$ hat $P(\delta S) = P(\{z - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\}) \leq P(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n(S) = P(S) \qquad \forall n \in \mathbb{N}: P_n(S) = P_n(S \cap \mathbb{Z}) + \underbrace{P_n(S \cap \mathbb{Z}^c)}_{\leq P(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = 0} = P_n(\{z\})$

analog für $P(S) = P(\{z\}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(X_n = z) = P(X = z)$

($\Leftarrow$) Sei S mit $P(\delta S) = 0$ bel.

$$\lim_{n\to\infty} P_n(S) = \lim_{n\to\infty} P_n(S \cap \mathbb{Z}) + \underbrace{P_n(S \cap \mathbb{Z}^c)}_{=0} = \lim_{n\to\infty} P_n(\{z_1, z_2, \dots\})$$

$$= \lim_{n\to\infty} P_n(\{z_1\}) + P_n(\{z_2\}) + \dots = P(\{z_1\}) + P(\{z_2\}) + \dots = P(\{z_1, z_2, \dots\})$$

$$= P(S \cap \mathbb{Z}) + \underbrace{P(S \cap \mathbb{Z}^c)}_{=0} = P(S)$$

$\square$

MAS Ü13

6) Abstimmung von 2N+1 Personen n stimmen für, Rest entscheidet mit 0,5 für und mit 0,5 gegen. Gesucht: n sodass für mit Wahrscheinlichkeit 0,99 gewinnt

$X_i \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$ iid $Y_j = \sum_{i=1}^{j} X_i \sim \text{Binomial}(j, \frac{1}{2})$ $j = 2N+1-n$

gegen gewinnt, falls $n + Y_j < \frac{2N+1}{2} = \underbrace{N+\frac{1}{2}}_{\notin \mathbb{N}}$ also $Y_j \leq N-n$

$\Rightarrow$ Wir suchen n, sodass $P(Y_j \leq N-n) = 0,01$. Das ist für große N unpraktisch.

Für große N gilt $Y_j \approx \mathcal{N}(\frac{2N+1-n}{2}, \frac{2N+1-n}{4}) = \mathcal{N}(N-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, \frac{N}{2}-\frac{n}{4}+\frac{1}{4})$

$\Rightarrow P(Y_j \leq N-n) \approx F_{\mathcal{N}}(N-n) = \Phi\left(\frac{N-n-N+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{N}{2}-\frac{n}{4}+\frac{1}{4}}}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\frac{n+1}{\frac{1}{2}\sqrt{2N-n+1}}\right) = \Phi\left(-\frac{n+1}{\sqrt{2N-n+1}}\right)$

$0,01 = P(Y_j \leq N-n) \approx \Phi\left(-\frac{n+1}{\sqrt{2N-n+1}}\right)$ $\Phi(-2,32) \approx 0,01$

$\Rightarrow 2,32 \approx \frac{n+1}{\sqrt{2N-n+1}} \iff 5,3824 \approx \frac{n^2+2n+1}{2N-n+1} \iff n^2+2n+1 \approx 2 \cdot 5,3824 N - 5,3824n + 5,3824$

$\iff n^2 + (2+5,3824)n + 1 - 5,3824 - 10,7648N = 0$

$\iff n^2 + 7,3824n - 4,3824 - 10,7648 \cdot N = 0 \Rightarrow n = \left\lceil \frac{1}{625}(58\sqrt{1250N+2091} - 2307) \right\rceil$

Für N = 500.000 also n = 2317.

Probe: $P(Y_j \leq N-n) = P(Y_j \leq 497683) \approx 0,01$