ANA Ü11

2.) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ... met. Raum

$(x,y) \mapsto \max\{x,y\}$ zz: f ist stetig

$\forall x \in \mathbb{R}^2 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}^2, d_2(t,x) < \delta : d_2(f(t), f(x)) < \varepsilon$

Sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ bel. Sei $\varepsilon > 0$ bel.

o.B.d.A $x_1 \geq x_2$ Wähle $\delta = \varepsilon$ Sei $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ bel.

mit $d_2(t,x) < \delta$

$$d_2(t,x) = \sqrt{(t_1 - x_1)^2 + (t_2 - x_2)^2} < \delta = \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow (t_1 - x_1)^2 + (t_2 - x_2)^2 < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow (t_1 - x_1)^2 < \varepsilon^2 \quad \wedge \quad (t_2 - x_2)^2 < \varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow |t_1 - x_1| < \varepsilon \quad \wedge \quad |t_2 - x_2| < \varepsilon$$

o.B.d.A. $t_1 \geq t_2$ Nun gilt:

$$d_2(f(t), f(x)) = |f(t) - f(x)| = |t_1 - x_1| < \varepsilon$$

$\Rightarrow f$ ist stetig

8.) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(0,0) = 0$ $f(x,y) = \frac{x \cdot y^2}{x^2 + y^4}$

zz: f ist nicht stetig

Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}^2$ mit $t_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$

$$\lim_{n \to \infty} (t_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0,0)$$

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot (\frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n^2})^2 + (\frac{1}{n})^4} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^4}{2n^4} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f((t_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \lim_{n \to \infty} (f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

$\Rightarrow f$ ist nicht stetig

ANA Ü11

6.) $\langle X, d\rangle$ ... metrischer Raum $x \in X$

$f = (f_1, f_2, \dots, f_p) : X \to \mathbb{R}^p$ $\qquad f_j : X \to \mathbb{R}$

zz: f bei x stetig $\iff \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}: f_j$ bei x stetig

$\Rightarrow$ zz: $\neg(\forall j \in \{1,2,\dots,p\}: f_j$ bei x stetig$) \Rightarrow \neg(f$ bei x stetig$)$

Das heißt $\exists k \in \{1, 2, \dots, p\}$ mit f_k bei x nicht stetig.

$\iff \exists$ Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $X \setminus \{x\}$, $\lim_{n\to\infty} t_n = x : \lim_{n\to\infty} f_k(t_n) = y \neq f_k(x)$

$\Rightarrow f$ ist bei x nicht stetig, da

$$\lim_{n\to\infty} t_n = x \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} f_1(t_n) \\ f_2(t_n) \\ \vdots \\ f_k(t_n) \\ \vdots \\ f_p(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} f_1(t_n) \\ \lim_{n\to\infty} f_2(t_n) \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} f_k(t_n) \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} f_p(t_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ y \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} = f(x)$$

$\Leftarrow$ $\forall j \in \{1,2,\dots,p\} \ \forall (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge aus $X \setminus \{x\}$, $\lim_{n\to\infty} t_n = x$:

$(\lim_{n\to\infty} f_j(t_n) = f_j(x))$

$\Rightarrow \forall (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge aus $X \setminus \{x\}$, $\lim_{n\to\infty} t_n = x$:

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} f_1(t_n) \\ f_2(t_n) \\ \vdots \\ f_p(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} f_1(t_n) \\ \lim_{n\to\infty} f_2(t_n) \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} f_p(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} = f(x)$$

ANAÜ11

3.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, \\ & \text{ggT}(m,n) = 1 \end{cases}$

zz: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: f ist bei x stetig

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bel. $\qquad$ stetig $\iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall t \in \mathbb{R}, d(t,x) < \delta :$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\qquad d(f(t), f(x)) < \varepsilon$

Da $\delta > 0$, können wir alle $t \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$ δ bel. wählen

denn $|f(t) - f(x)| = |0 - 0| = 0 < \delta$

Sei $t \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ bel. $\quad t = \frac{p}{q}$

$|f(t) - f(x)| = |f(\frac{p}{q}) - 0| = |\frac{1}{q}| = \frac{1}{q}$

Das heißt wir suchen ein δ, sodass $\frac{1}{q} < \varepsilon$ gilt.

Methode:

Wähle $\delta_1 = x - \lfloor x \rfloor$

Falls $\forall \frac{p}{q} \in (x - \delta_1, x + \delta_1) : \frac{1}{q} < \varepsilon$ fertig

Sonst wähle $\delta_2 = \frac{\delta_1 + x}{2}$ und wiederhole den letzten Schritt

Die Auswahlmethode endet, da zw. x und $x + \delta_n$ jeweils unendlich viele Zahlen liegen und da $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert und daher ab einem Index $< \varepsilon$ ist.

ANA Ü11

7) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(0,0)=0 \quad f(x,y) = \frac{x y^2}{x^2+y^4}$ für $(x,y) \neq (0,0)$

$D = \{\lambda(x_0,y_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ zz: f_D ist stetig

Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ bel. Wähle $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda(x_0,y_0) = (x,y)$

Wenn $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n) = \lambda$ ist

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\lambda_n(x_0,y_0)) = \lambda(x_0,y_0) = (x,y)$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_0 = x \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n y_0 = y$$

$$\lim_{n\to\infty} f(\lambda_n(x_0,y_0)) = \lim_{n\to\infty} f((\lambda_n \cdot x_0, \lambda_n \cdot y_0))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\lambda_n \cdot x_0)\cdot(\lambda_n \cdot y_0)^2}{(\lambda_n \cdot x_0)^2 + (\lambda_n \cdot y_0)^4} = \frac{x \cdot y^2}{x^2+y^4} = f(x,y)$$

$\Rightarrow f$ ist stetig

ANA Ü11

5.) $\langle X, d \rangle$ ... metr. Raum $\quad A \subseteq X, \; A \neq \emptyset \quad f: X \to \mathbb{R}$
$x \mapsto d(x, A)$

(i) zz: f ist stetig

f ist kontraktiv, da: Für $y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ gilt

1. Fall $x \in A \wedge y \in A$:

$|f(x) - f(y)| = |0 - 0| = 0 \leq d(x,y)$

2. Fall $x \in A \wedge y \notin A$:

$|f(x) - f(y)| = |0 - d(y, A)| = d(y, A) \leq d(x,y)$

3. Fall $x \notin A \wedge y \in A$:

$|f(x) - f(y)| = |d(x,A) - 0| = d(x,A) \leq d(x,y)$

4. Fall $x \notin A \wedge y \notin A$:

o.B.d.A. $d(x,A) \geq d(y,A)$

$|f(x) - f(y)| = |d(x,A) - d(y,A)| = d(x, a_x) - d(y, a_y) \geq$
$d(x, a_x) - d(y, a_x) = d(x,y)$

$\Rightarrow f$ ist stetig

(ii) $K \subseteq X$ ... kompakt $\quad$ zz: $\exists x \in K: d(K, A) = d(x, A)$

$d(K, A) = \inf \{ d(k,a), k \in K, a \in A \}$

Sei $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus K bzw. A mit
$d(k_n, a_n) = d(K, A)$

Da K kompakt konvergiert $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen k. $d(k, A) = d(K, A)$

(iii) K.. kompakt, $K \neq \emptyset \quad A$... abgeschlossen, $A \neq \emptyset \quad K \subseteq X, A \subseteq X$

zz: $A \cap K \neq \emptyset \Leftrightarrow d(A, K) = 0$

$\Rightarrow$ $\exists x \in A \cap K \Rightarrow x \in A \wedge x \in K \Rightarrow d(A,K) = d(x,x) = 0$

$\Leftarrow$ Aus letzter Woche: $\exists a \in A, \exists k \in K: d(A,K) = d(a,k)$

Da $d(A,K) = 0$ folgt $d(a,k) = 0 \Rightarrow a = k$

$\Rightarrow a = k \in A \cap K \quad \Rightarrow A \cap K \neq \emptyset$