ALG Ü5

157) G ... Gruppe $\quad A,B \leq G$

(1) $\neg(A,B \leq G \Rightarrow AB \leq G)$

Gegenbsp: $G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ $\quad (G, \circ, id, ^{-1})$ ... Gruppe

$A := \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{Q}\ \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = x^m\}$

$B := \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = x+n\}$

zz: $A, B \leq G$ $\quad$ Sei $f, f' \in A$, $g, g' \in B$ bel.

$f \circ f'(x) = f(x^{m'}) = (x^{m'})^m = x^{(m \cdot m')} \Rightarrow f \circ f' \in A$

$f^{-1}(x) := x^{\frac{1}{m}} \quad f \circ f^{-1}(x) = f(x^{\frac{1}{m}}) = x^{(\frac{1}{m} \cdot m)} = x \Rightarrow f \circ f^{-1} = id = x^1 \in A$

$g \circ g'(x) = g(x+n') = (x+n')+n = x+(n'+n) \Rightarrow g \circ g^{-1} \in B$

$g^{-1}(x) := x-n \quad g \circ g^{-1}(x) = g(x-n) = x-n+m = x \Rightarrow g \circ g^{-1} = id = x+0 \in B$

zz: $AB \nleq G$

$f(x) = x^2 \in A \quad g(x) = x+5 \in B \qquad f \circ g(x) = (x+5)^2 \in AB$

$(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} - 5 \notin AB \qquad \Rightarrow AB$ ist keine Gruppe

(2) $A \trianglelefteq G,\ B \leq G \Rightarrow AB = BA \leq G$

zz: $AB = BA$ $\qquad$ Sei $a \in A$, $b \in B$ bel. Da A ein Normalteiler ist gilt

$\forall x \in G\ \exists a' \in A: xa = a'x \quad \Rightarrow \exists a' \in A: ba = a'b \in AB \ \wedge \exists a'' \in A: ab = ba'' \in BA \Rightarrow AB = BA$

zz: $AB \leq G$ $\qquad$ Sei $a, \hat{a} \in A$, $b, \hat{b} \in B$ bel.

zz: $ab\hat{a}\hat{b} \in AB$ $\qquad$ Da $AB = BA$ gilt $\exists \hat{a}' \in A, b' \in B: b\hat{a} = \hat{a}'b'$

$\Rightarrow ab\hat{a}\hat{b} = a\hat{a}'b'\hat{b} \in AB$

zz: $\exists c \in A, d \in B: abcd = 1$

$\exists c \in A, d \in B: b^{-1}a^{-1} = cd \quad \Rightarrow a^{-1}d^{-1} = bc \qquad \Rightarrow abcd = aa^{-1}d^{-1}d = 1$

zz: $1 \in AB$ $\qquad 1 \in A, 1 \in B \Rightarrow 1 \cdot 1 = 1 \in AB$

(3) $A, B \trianglelefteq G \Rightarrow AB \trianglelefteq G$

Das $AB \leq G$ ist haben wir schon in (2) gezeigt. zz: $\forall x \in G: xAB \subseteq ABx$

Sei $x \in G$, $a \in A$, $b \in B$ bel. $\quad xab = a'xb = a'b'x \in ABx$, da A und B Normalteiler

sind und somit $\forall x \in G, a \in A, b \in B: \exists a' \in A, b' \in B: xa = a'x \wedge xb = b'x$ $\qquad$ ...

ALG Ü5

157) (4) $N_1, \dots, N_k \trianglelefteq G$ $\quad \sup(N_1, \dots, N_k) = N_1 N_2 \cdots N_k$

zz: $N_1 N_2 \cdots N_k$ ist obere Schranke von $N_1, \dots, N_k$

Sei $i \in \{1, \dots, k\}$ bel. Sei $x \in N_i$ bel. Da $1 \in N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_k$ gilt

$$\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot x \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{x \text{ an } i\text{-te Stelle}} = x \in N_1 N_2 \cdots N_k \quad \Rightarrow N_i \subseteq N_1 N_2 \cdots N_k$$

i-te Stelle

zz: $N_1 N_2 \cdots N_k$ ist kleinste obere Schranke von $N_1, \dots, N_k$

Sei S eine bel. obere Schranke von $N_1, \dots, N_k$. Offenbar muss gelten $\forall i \in \{1, \dots, k\}: N_i \subseteq S$ damit S obere Schranke ist. Sei $x_1 \in N_1, \dots, x_k \in N_k$ bel.

Da $x_1, \dots, x_k \in S \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \in S$ damit S eine Gruppe ist.

$\Rightarrow N_1 N_2 \cdots N_k \subseteq S$ also ist $N_1 N_2 \cdots N_k$ das Supremum

(5) $\forall i \in I \neq \emptyset \quad N_i \trianglelefteq G \quad \Rightarrow \sup_{i \in I} N_i = N = \bigcup_{\substack{J \subseteq I \\ k = |J| < \infty}} (N_{j_1} N_{j_2} \cdots N_{j_k})$

zz: N ist obere Schranke

Sei $i \in I$ bel. Da $\{i\} \subseteq I$ und $|\{i\}| < \infty$ gilt $N_i \subseteq N$.

zz: N ist kleinste obere Schranke

Sei S eine bel. obere Schranke von $(N_i)_{i \in I}$. Offenbar muss $\forall i \in I: N_i \subseteq S$.

Sei $J \subseteq I$ mit $|J| < \infty$ bel. Da $\forall j \in J: N_j \subseteq S$ und S unter den Operationen abgeschlossen ist muss $\forall n_1 \in N_{j_1}, \dots, n_k \in N_{j_k}: n_1 n_2 \cdots n_k \in S$

$\Rightarrow \bigcup_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = k < \infty}} (N_{j_1} N_{j_2} \cdots N_{j_k}) \subseteq S \quad \Rightarrow N$ ist kleinste obere Schranke

$\square$

ALG Ü5

161a) G... Gruppe $U_1, U_2 \leq G$

(A) φ... surjektiv (B) $\forall x \in U_1, y \in U_2 : xy = yx$ (B') $U_1, U_2 \trianglelefteq G$

(C) $U_1 \cap U_2 = \{e\}$ (C') $U_1 \cap U_2 = \{e\}$

---

(1) G ist das innere direkte Produkt von U_1, U_2 (2) A, B, C (3) A, B, C'

(4) A, B', C (5) A, B', C'

---

zz: (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5)

Nach Proposition 3.2.3.2. gilt (1) $\Leftrightarrow U_1, U_2 \trianglelefteq G \wedge U_1 \cap U_2 = \{e\} \wedge U_1 \cdot U_2 = G$

zz: (1) $\Rightarrow$ (A) also $\varphi : U_1 \times U_2 \to G$, $(u_1, u_2) \mapsto u_1 u_2$ ist surjektiv $\Leftrightarrow U_1 \cdot U_2 = G$

zz: (1) $\Rightarrow$ (B'), (1) $\Rightarrow$ (C) beides nach obem genannten klar

Da (C) $\Leftrightarrow$ (C') und (B) $\Leftrightarrow$ (B') (nach Definition von Normalteiler) gilt nun

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5).

zz: (4) $\Rightarrow$ (1) also (A), (B'), (C) $\Rightarrow$ (B'), (C), $U_1 \cdot U_2 = G$

$U_1 \cdot U_2 \subseteq G$ ist klar. Sei $g \in G$ bel. Da $\varphi : U_1 \times U_2 \to G$ surjektiv ist $\exists u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$:

$u_1 \cdot u_2 = g \Rightarrow g \subseteq U_1 \cdot U_2$ also $U_1 \cdot U_2 = G$

$\square$

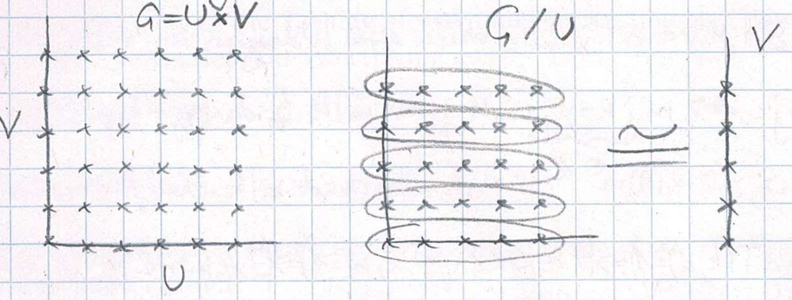
ALG Ü5

162) G ... Gruppe $U, V \trianglelefteq G$ mit $G = U \odot V$ ... inneres direktes Produkt

zz: $G/U \cong V$ und $G/V \cong U$

Offenbar reicht es $G/U \cong V$ zu zeigen

Da $G = U \odot V$ gilt $\varphi: U \times V \to G$ $(u,v) \mapsto u+v$ ... Isomorphismus.



G, G/U und V haben offenbar alle den selben Typ. $f: \begin{array}{l} G \to V \\ u+v \mapsto v \end{array}$ ist als Abbildung auf eine Untergruppe ein Homomorphismus.

$\sim := \{(x,y) \mid f(x) = f(y)\} = \{(u_1+v_1, u_2+v_2) \mid f(u_1+v_1) = f(u_2+v_2)\} = \{(u_1+v_1, u_2+v_2) \mid v_1 = v_2\}$

$= \{(u_1+v, u_2+v)\}$ Es gilt $G/\sim = G/U$.

Nach dem Homomorphisatz gilt $\exists g: G/U \to V$ ... injektiver Homomorphismus

$\Rightarrow G/U \cong V$

ALG Ü5

165) (a) $k \in \mathbb{N}$ bel. zz: $(ggT(k,n)=1) \Leftrightarrow (\forall l \in k+n\mathbb{Z}: ggT(l,n)=1) \Leftrightarrow (\exists l \in k+n\mathbb{Z}: ggT(l,n)=1)$

Angenommen $ggT(k,n)=1$, das heißt $\forall m \geq 2: \neg(m|k \wedge m|n)$. Sei $m \geq 2$ bel.

1. Fall $\neg m|n \Rightarrow m \neq ggT(l,n)$

2. Fall $m|n \Rightarrow l=k+nj$ $\quad m|l \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}: mx = l = k+nj$

Da $m|n$ gilt $\exists y \in \mathbb{Z}: my=n$ Wir wollen einen Widerspruch zu $m|k$ herleiten.

$mx = k+nj = k+myj \Leftrightarrow m\underbrace{(x-yj)}_{\in\mathbb{Z}} = k \Rightarrow m|k$ ↯ da $ggT(k,n)=1$

($m|n$ und $m|k$ darf für $m \geq 2$ nicht gelten)

Gezeigt (bzw. klar) ist $(ggT(k,n)=1) \Rightarrow (\forall l \in k+n\mathbb{Z}: ggT(l,n)=1) \Rightarrow (\exists l \in k+n\mathbb{Z}: ggT(l,n)=1)$

zz: $(\exists l \in k+n\mathbb{Z}: ggT(l,n)=1) \Rightarrow (ggT(k,n)=1)$

Sei $j \in \mathbb{Z}$: $l=k+nj$. Es gilt $\forall m \geq 2: \neg(m|l \wedge m|n)$, da $ggT(l,n)=1$.

Sei $m \geq 2$ bel. $\quad$ 1. Fall $\neg m|n \Rightarrow m \neq ggT(k,n)$

2. Fall $m|n$ $\quad$ Angenommen $m|k$ also $\exists x \in \mathbb{Z}: mx=k$ $\quad$ zz: $m|l$ also Widerspruch

Da $m|n$ gilt $\exists y \in \mathbb{Z}: my=n$. $\quad l = k+nj = mx+myj = m\underbrace{(x+yj)}_{\in\mathbb{Z}} \Rightarrow m|l$ ↯

$\Rightarrow ggT(k,n)=1$

b) $A := \{k+n\mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}, ggT(n,k)=1\}$ $\qquad B := \{k+n\mathbb{Z} \mid k \in \{0,\dots,n-1\} \wedge ggT(n,k)=1\}$

$C := \{k \mid k \in \{0,\dots,n-1\} \wedge ggT(n,k)=1\}$

zz: $|A| = |B| = |C|$

$B \subseteq A$ gilt nach Definition. $\Rightarrow |B| \leq |A|$

Wir wollen zeigen $|C| \leq |B|$. Sei $k \in C$ bel. $\Rightarrow ggT(n,k)=1 \Rightarrow k+n\mathbb{Z} \in B$

Für $k_1, k_2 \in \{0,\dots,n-1\}$, $k_1 \neq k_2$ gilt $k_1+n\mathbb{Z} \neq k_2+n\mathbb{Z}$ $\Rightarrow |C| \leq |B|$

Nun müssen wir noch zeigen $|A| \leq |C|$.

$\forall k \in \mathbb{Z}: k+n\mathbb{Z} = (k-n)+n\mathbb{Z} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}\ \exists k' \in \{0,\dots,n-1\}: k+n\mathbb{Z} = k'+n\mathbb{Z}$

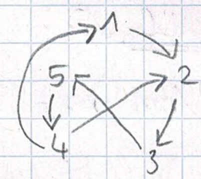
Sei $k+n\mathbb{Z} \in A$ bel. Sei $k'+n\mathbb{Z} = k+n\mathbb{Z}$ mit $k' \in \{0,\dots,n-1\}$. zz: $k' \in C$

Da $k'+n\mathbb{Z} \in A \Rightarrow ggT(n,k')=1$ also $k' \in C$. $\Rightarrow |A| \leq |C|$

$\Rightarrow |A| \leq |C| \leq |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B| = |C|$

□

ALG Ü5



1616) Sn a) gezeigt $\forall G\ \forall U_1, U_2 \leq G: (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$

Sei $U_1, \dots, U_n \leq G$ bel. zz: $(1) \Rightarrow (2)$

$(1) \Leftrightarrow \varphi: U_1 \times \dots \times U_n \to G \quad (u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1 \cdot \dots \cdot u_n$ ... Isomorphismus zw. dem direkten Produkt $\prod_{i=1}^{n} U_i$ und G $\Rightarrow \varphi$ ist surjektiv $\Leftrightarrow (A)$

Sei $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ bel. Sei $x \in U_i$, $y \in U_j$ bel. zz: $xy = yx$

$\hat{\varphi}: U_i, V_i \to G \quad (u_i, u_1 \cdot \dots \cdot u_{i-1} \cdot u_{i+1} \cdot \dots \cdot u_n) \mapsto \varphi(u_1, \dots, u_n) = u_1 \cdot \dots \cdot u_n$

$\hat{\varphi}$ ist surjektiv, injektiv und Homomorphismus, da φ diese Eigenschaften vererbt.

$\Rightarrow U_i, V_i \leq G$ erfüllen (1) mit $n = 2$ $\Rightarrow$ (2) gilt für $U_i, V_i \leq G$

$x \in U_i, y \in V_i \Rightarrow xy = yx \Leftrightarrow (B)$

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ bel. zz: $U_i \cap V_i = \{e\}$

$U_i, V_i \leq G$ erfüllen (1) mit $n = 2$ $\Rightarrow$ (2) gilt für $U_i, V_i \leq G$

$U_i \cap V_i = \{e\} \Leftrightarrow (C)$ $\qquad \Rightarrow (1) \Rightarrow (2)$

zz: $(2) \Rightarrow (3)$

$(C) \Rightarrow (C')$, da $\forall i \in \{1, \dots, n\}: U_i \cap V_i = \{e\}$ und $U_1 \cdot \dots \cdot U_{i-1} \subseteq V_i$

$\Rightarrow U_i \cap (U_1 \cdot \dots \cdot U_{i-1}) \subseteq U_i \cap V_i = \{e\}$ und $e \in U_i$, $e \in U_1 \cdot \dots \cdot U_{i-1}$

$\Rightarrow U_i \cap (U_1 \cdot \dots \cdot U_{i-1}) = \{e\}\ \forall i \in \{2, \dots, n\} \Leftrightarrow (C')$

zz: $(4) \Rightarrow (2)$

$(B') \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}: U_i \trianglelefteq G$ gemeinsam mit $(C) \Rightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j: U_i \cap U_j \subseteq U_i \cap V_i = \{e\}$

können wir Lemma 3.2.3.1. anwenden $\Rightarrow \forall u_i \in U_i, u_j \in U_j: u_i u_j = u_j u_i \Leftrightarrow (B)$

zz: $(3) \Rightarrow (5)$

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ bel. Sei $u_i \in U_i$ bel. Sei $g \in G$ bel. zz: $\exists g' \in G: u_i g = g' u_i$

Da φ surjektiv ist $\exists g_1 \in U_1, \dots, g_n \in U_n: g = g_1 \cdot \dots \cdot g_n$. $u_i g = u_i g_1 \cdots g_n$

$(B) \Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\ \forall y \in U_j: gy = yg \Rightarrow u_i g = g_1 \cdots g_{i-1} \underline{u_i g_i} \cdots g_n$

$u_i g_i u_i^{-1} = \tilde{g}_i \in U_i \Rightarrow u_i g_i = \tilde{g}_i u_i \qquad \Rightarrow u_i g = g_1 \cdots g_{i-1} \tilde{g}_i u_i \cdots g_n =$

$= g_1 \cdots g_{i-1} \tilde{g}_i g_{i+1} \cdots g_n u_i =: g' u_i \qquad \Rightarrow (B')$

ALG Ü5

161 b)... zz: (5) $\Rightarrow$ (4)

$(C') \Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n-1\}: (U_1 \cdots U_i) \cap U_{i+1} = \{e\}$

Sei $i \in \{1,\dots,n\}$ bel. zz: $U_i \cap V_i = \{e\}$

Sei $x \in U_i \cap V_i$ bel. $\Leftrightarrow x \in U_i \wedge x \in U_1 U_2 \cdots U_{i-1} U_{i+1} \cdots U_n$

$\Leftrightarrow \exists u_1 \in U_1, \dots, u_{i-1} \in U_{i-1}, u_{i+1} \in U_{i+1}, \dots, u_n \in U_n : x = u_1 u_2 \cdots u_{i-1} u_{i+1} \cdots u_n$

$\Leftrightarrow u_{n-1}^{-1} \cdots u_{i+1}^{-1} u_{i-1}^{-1} \cdots u_2^{-1} u_1^{-1} x = u_n$ und da $(B') \Rightarrow \forall i: U_i \trianglelefteq G$

$\Leftrightarrow u_{n-1}^{-1} \cdots u_{i+1}^{-1} x u_{i-1}^{-1} \cdots u_2^{-1} u_1^{-1} = u_n$

$\Leftrightarrow (\underbrace{u_1 u_2 \cdots u_{i-1} x^{-1} u_{i+1} \cdots u_{n-1}}_{\in U_1 \cdots U_{n-1}})^{-1} = u_n$ da $x \in U_i$ ist und $U_1 \cdots U_{n-1} \trianglelefteq G$ (siehe Bsp 157) gilt, folgt

$u_n = (u_1 u_2 \cdots u_{i-1} x^{-1} u_{i+1} \cdots u_{n-1})^{-1} \in (U_1 \cdots U_{n-1}) \cap U_n \Rightarrow u_n = e$

$\Rightarrow x = u_1 u_2 \cdots u_{i-1} u_{i+1} \cdots u_{n-1}$ mittels schleichender Induktion erhalten wir $x = u_1 u_2 \cdots u_{i-1}$ und somit $x \in (U_1 \cdots U_{i-1}) \cap U_i = \{e\}$ also $x = e$ und dadurch $U_i \cap V_i = \{e\} \Longleftrightarrow (C)$.

zz: $(2) \wedge (3) \wedge (4) \wedge (5) \Rightarrow (1)$

zz: φ... Homomorphismus Sei $(u_1,\dots,u_n), (v_1,\dots,v_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$ bel.

$\varphi(u_1 v_1, \dots, u_n v_n) = u_1 v_1 \cdots u_n v_n = u_1 \cdots u_n v_1 \cdots v_n$, da $\forall i: U_i \trianglelefteq G$

$= \varphi(u_1,\dots,u_n)\, \varphi(v_1,\dots,v_n)$

zz: φ... Bijektion zw. $U_1 \times \dots \times U_n$ und G.

surjektiv, wegen (A) und injektiv, da $\forall (u_1,\dots,u_n),(v_1,\dots,v_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$ mit

$\varphi(u_1,\dots,u_n) = \varphi(v_1,\dots,v_n) \Rightarrow u_1 \cdots u_n = v_1 \cdots v_n$

Sei $i \in \{1,\dots,n\}$ bel. $u_i = u_{i-1}^{-1} u_{i-2}^{-1} \cdots u_1^{-1} v_1 \cdots v_n u_n^{-1} \cdots u_{i+1}^{-1}$

da $\forall i: U_i \trianglelefteq G \Rightarrow u_i = u_1^{-1} v_1 u_2^{-1} v_2 \cdots u_{i-1}^{-1} v_{i-1} u_{i+1}^{-1} v_{i+1} \cdots u_n^{-1} v_n v_i$

$\Leftrightarrow \underbrace{u_i v_i^{-1}}_{\in U_i} = \underbrace{u_1^{-1} v_1 \cdots u_{i-1}^{-1} v_{i-1} u_{i+1}^{-1} v_{i+1} \cdots u_n^{-1} v_n}_{\in U_1 \cdots U_{i-1} U_{i+1} \cdots U_n = V_i} = e$ (folgt aus C)

$\Rightarrow u_i = v_i \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$ $\Rightarrow (u_1,\dots,u_n) = (v_1,\dots,v_n)$ also φ... injektiv

$\Rightarrow \varphi$... Isomorphismus $\square$