LINAG Ü8

2.8.20 β) $U_1 = \left[\left\{ \begin{pmatrix}-2\\-6\\-5\\5\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\\-3\\3\\-2\end{pmatrix} \right\}\right]$ $U_2 = \left[\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}\right]$

a)

$$\begin{pmatrix}-2&0&-2\\-6&-1&-4\\-5&-1&-3\\5&1&3\\-4&-1&-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}\cdot(-1)&\cdot(-1)&\cdot(-1)\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}2&0&2\\6&1&4\\5&1&3\\-5&-1&-3\\4&1&2\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}-5\cdot II&&-3\cdot II\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}2&0&2\\1&1&1\\0&1&0\\0&-1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}&+I&-I\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}2&2&0\\1&2&0\\0&1&0\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}\cdot(-1)&&\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}-2&2&0\\-1&2&0\\\boxed{0\ \ 1}&0\\\boxed{0\ \ -1}&0\\\boxed{1\ \ 0}&0\end{pmatrix}\end{array} \Rightarrow \text{Basis ist } \left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ und } \dim U_1 = 2$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&3\\0&1&3\\0&-1&-2\\1&2&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}&-2\cdot I&-3\cdot II\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&-1&1\\1&0&-5\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}&&+5\cdot I\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}&+III&\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\\boxed{0\ \ 1\ \ 0}\\\boxed{0\ \ 0\ \ 1}\\\boxed{1\ \ 0\ \ 0}\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Basis ist } \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ und } \dim U_2 = 3$$

$$\begin{pmatrix}2&-2&0&0&0\\2&-1&0&1&0\\1&0&0&1&0\\-1&0&0&0&1\\0&1&1&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}+V&-III&&&\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}2&-2&0&0&0\\2&-1&0&1&0\\1&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}-IV&&&&\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}2&-2&0&0&0\\1&-1&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}\cdot(\frac{1}{2})&+I&&&\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\\frac{1}{2}&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}I&IV&V&III&II\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}\boxed{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}&0\\\boxed{\frac{1}{2}\ \ 1\ \ 0\ \ 0}&0\\\boxed{0\ \ 1\ \ 0\ \ 0}&0\\\boxed{0\ \ 0\ \ 1\ \ 0}&0\\\boxed{0\ \ 0\ \ 0\ \ 1}&0\end{pmatrix}\end{array} \Rightarrow \text{Basis ist } \left\{\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ und } \dim U_1 + U_2 = 4$$

b) Da $\dim U_1 + U_2 = 4$ (und nicht 5) können U_1 und U_2 nicht komplementäre Unterräume bzgl. $\mathbb{R}^{5\times 1}$ sein.

c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^{5\times 1}$.

$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ sind auch Basen von $\mathbb{R}^{5\times 1}$. $\Rightarrow \left[\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right]$ ist ein Komplement zu U_1.