1.11.12 $g: A \to B$ ... Funktion $\ker_2 g := \{(x,y) \in A \times A \mid g(x) = g(y)\}$ Äquivalenzrel.

$(G, *)$ ... Gruppe $(H, +)$ ... Gruppe e_G ... neutrales Elem von G e_H ... neutrales Elem von H

$f: G \to H$ Homomorphismus $\ker_1 f = \{v \in G \mid f(v) = e_H\}$ ... UG von G und NT

zz: 1) $\ker_1 f = \{v \in G \mid (v, e_G) \in \ker_2 f\} = [e_G]_{\ker_2 f}$ (Was ist mit $[e_G]_{\ker_2 f}$ gemeint?)

$[e_G]_{\ker_2 f}$ ist die von e_G aufgespannte Restklasse.

Zwischenschritt $f(e_G) = e_H$: Sei $a \in G$ beliebig. $f(a) \circ f(e_G) = f(a \cdot e_G) = f(a)$ ✓

<u>Bew</u> $\ker_1 f = \{v \in G \mid f(v) = e_H\} = \{v \in G \mid f(v) = f(e_G)\} = \{v \in G \mid (v, e_G) \in \ker_2 f\}$

$= \{v \in G \mid v \ker_2 f \; e_G\} = [e_G]_{\ker_2 f}$

LINAGÜ 31.11.12

zz: 2) $\ker_1 f = \{ v \in G \mid \exists a, b \in G : ((a,b) \in \ker_2 f \wedge v = b \cdot a^{-1}) \}$

Bew $\ker_1 f = \{ v \in G \mid (v, e_G) \in \ker_2 f \} = \{ v \in G \mid \exists a, b \in G : (v, b \cdot a^{-1}) \in \ker_2 f \wedge b \cdot a^{-1} = e_G \}$

$= \{ v \in G \mid \exists a, b \in G : (v, b \cdot a^{-1}) \in \ker_2 f \wedge (a, b) \in \ker_2 f \}$

$= \{ v \in G \mid \exists a, b \in G : (a, b) \in \ker_2 f \wedge v = b \cdot a^{-1} \}$

zz: 3) $\ker_2 f = \{ (a,b) \in G \times G \mid a^{-1} \cdot b \in \ker_1 f \} = \{ (a,b) \in G \times G \mid b \cdot a^{-1} \in \ker_1 f \}$

Zwischenschritt: $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$: Sei $a \in G$ beliebig. $f(a) \circ f(a^{-1}) = f(a \cdot a^{-1}) = f(e_G)$

Bew $\ker_2 f = \{ (a,b) \in G \times G \mid f(a) = f(b) \} = \{ (a,b) \in G \times G \mid (f(a))^{-1} \cdot f(b) = e_H \}$

$= \{ (a,b) \in G \times G \mid f(a^{-1} b) = e_H \} = \{ (a,b) \in G \times G \mid a^{-1} b \in \ker_1 f \}$

zz: 4) $\ker_2 f = \{ (a,b) \in G \times G \mid \exists v \in \ker_1 f : a \cdot v = b \}$

Bew $\ker_2 f = \{ (a,b) \in G \times G \mid f(a) = f(b) \} = \{ (a,b) \in G \times G \mid f(b) = \ker_1 f \cdot f(a) \}$

$= \{ (a,b) \in G \times G \mid \exists v \in \ker_1 f : a \cdot v = b \}$