MAS Ü2

1) zz: $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}_2$

Sei $A \notin \mathcal{L}$. $(A \times \{1\}) \in \mathcal{L}^2$, da es eine Nullmenge ist.

Angenommen $(A \times \{1\}) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \Rightarrow (A \times \{1\})_1 = A \in \mathcal{L}$ ↯

$\Rightarrow \mathcal{L}^2 \neq \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$

Sei $A \times B \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$ bel. $\Rightarrow A, B \in \mathcal{L}$

$\Rightarrow \lambda_2(A \times B) = \lambda(A)\,\lambda(B) \quad \Rightarrow A \times B \in \mathcal{L}_2$

weil A, B Lebesgue-messbar sind

$\Rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}_2$

$\square$

MAS Ü2

2) $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$

$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$, $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}$ oder $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j}$ ... absolut konvergent $\Rightarrow$ alle absolut konvergent $\wedge$ Summen sind gleich

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty}\int_0^{\infty} a_{i,\lfloor j\rfloor}\, dj = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} a_{\lfloor i\rfloor,\lfloor j\rfloor}\, dj\, di$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty}\int_0^{\infty} a_{\lfloor i\rfloor, j}\, di = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} a_{\lfloor i\rfloor,\lfloor j\rfloor}\, di\, dj$$

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{i,j} = \int_{\mathbb{N}^2} a_{\lfloor i\rfloor,\lfloor j\rfloor}\, d(i,j)$$

Da eine der Reihen absolut konvergiert ist auch eines der Integrale mit $|a_{\lfloor i\rfloor,\lfloor j\rfloor}|$ endlich.

Also können wir Fubini anwenden

$$\Rightarrow \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} |a_{\lfloor i\rfloor,\lfloor j\rfloor}|\, dj\, di = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} |a_{\lfloor i\rfloor,\lfloor j\rfloor}|\, di\, dj = \int_{\mathbb{N}^2} |a_{\lfloor i\rfloor,\lfloor j\rfloor}|\, d(i,j) < \infty$$

aka. alle Reihen konvergieren absolut und

$$\Rightarrow \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} a_{\lfloor i\rfloor,\lfloor j\rfloor}\, dj\, di = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} a_{\lfloor i\rfloor,\lfloor j\rfloor}\, di\, dj = \int_{\mathbb{N}^2} a_{\lfloor i\rfloor,\lfloor j\rfloor}\, d(i,j)$$

aka. alle Summen sind gleich. $\square$

$(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_Z)$ $\quad$ μ_Z ... Zählmaß $\quad$ σ-endlich, da $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}$ und $\mu_Z\{n\} = 1 < \infty\ \forall n$

$\Rightarrow \exists$ Produktmaß $\pi(A_1\times A_2) = \mu_Z(A_1)\cdot\mu_Z(A_2)$ für $A_1\times A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Falls eine der Reihen absolut konvergent $\Rightarrow \int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{i,j}\, d\pi = \int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} a_{i,j}\, d\mu_Z(i)\, d\mu_Z(j) = \int\int_{\mathbb{N}\,\mathbb{N}} a_{i,j}\, d\mu_Z(j)\, d\mu_Z(i)$

$\Rightarrow$ alle Summen sind gleich und alle anderen Reihen sind auch abs. konvergent

MAS Ü2

3) $(I_j) \subseteq \mathbb{N}$ ... endlich oder abzählbar mit $\bigcup_{j\in J} I_j = \mathbb{N}$ und $\forall j,k \in J: j \neq k \Rightarrow I_j \cap I_k = 0$

$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty$ oder $\sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} |a_i| < \infty$ zz: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} a_i$

$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad (i,j) \mapsto a_i \mathbb{1}_{I_j}(i)$ ist messbar

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$ und $\forall n \in \mathbb{N}: \lambda(\{n\}) = 1 < \infty$ $\Rightarrow$ Sigma-endlich

$\sum_{i\in I_j} a_i = \sum_{i\in I_j} a_i \mathbb{1}_{I_j}(i) = \sum_{i\in I_j} f(i,j)$ falls J endlich $|J| = k$ Sei: $\forall j > k: I_j = \emptyset$

$\Rightarrow \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} a_i = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} a_i \mathbb{1}_{I_j}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \mathbb{1}_{I_j}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f(i,j) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(i,j)\, d\lambda(i)\, d\lambda(j)$

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 1 \overset{\text{A}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{I_j}(i) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f(i,j) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(i,j)\, d\lambda(j)\, d\lambda(i)$

da die I_j disjunkt sind liegt jedes i in nur einem I_j

$\Rightarrow$ nach Fubini gilt (da eines der Integrale absolut $< \infty$)

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(i,j)\, d\lambda(j)\, d\lambda(i) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(i,j)\, d\lambda(i)\, d\lambda(j)$$

also auch

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} a_i$$

$\square$

MAS Ü2

4)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & i=j \\ -1, & i=j-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} j \downarrow \; i \rightarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \; \dots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

zz: $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \neq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$

Für $\forall i \in \mathbb{N}: \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} = 1-1=0$

Für $j=0$ $\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} = 1$ Für $\forall j \geq 1: \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} = -1+1=0$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty} 0 = 0$ $\quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{0\}}(j) = 1$ $\quad \Rightarrow \neq$

Welche Vorraussetzung vom Satz von Fubini ist verletzt?

a) $f \geq 0$ gilt nicht, da $a_{0,1} = -1 < 0$

b) $\int f \, d\mu = \sum_{i,j \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} < \infty$ gilt nicht, da $\int_{\mathbb{N}^2} \mathbb{1}_{\{j\}}(i) - \mathbb{1}_{\{j\}}(i+1) \, d\mu(i,j)$

$= \int_{\mathbb{N}^2} \mathbb{1}_{\{j\}}(i) d\mu(i,j) - \int_{\mathbb{N}^2} \mathbb{1}_{\{j\}}(i+1) \, d\mu(i,j) = \infty - \infty$

c1) $\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} |a_{i,j}| \, di \, dj < \infty$ gilt nicht, da

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} |a_{i,j}| \, di \, dj = \int_{\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{\infty} |a_{i,j}| \, dj = \int_{\mathbb{N}} \begin{cases} 1 & \text{falls } j=0 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases} dj = \infty$$

c2) $\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} |a_{i,j}| \, dj \, di < \infty$ gilt nicht, da

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} |a_{i,j}| \, dj \, di = \int_{\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{i,j}| \, di = \int_{\mathbb{N}} 2 \, di = \infty$$

MAS Ü2

5) X... SG in $\mathbb{R}$ F... Verteilungsfunktion von X

z.z: $\forall c \in \mathbb{R}: \int F(x+c) - F(x) \, d\lambda(x) = c$

Da F die Verteilungsfunktion von X ist gilt

$$F(x+c) - F(x) = \lambda(X \leq x+c) - \lambda(X \leq x) = \lambda(x \leq X \leq x+c)$$
$$= \int_x^{x+c} X \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{x < X \leq x+c} \, d\lambda$$

$$\int_{\mathbb{R}} F(x+c) - F(x) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{x < X \leq x+c} \, d\lambda \, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{X-c \leq x < X} \, dx \, d\lambda$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{X-c}^{X} 1 \, dx \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} X - (X-c) \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} c \, d\lambda = \mathbb{E}(c) = c$$

Sei f die Dichte $\Rightarrow F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s) \, ds$

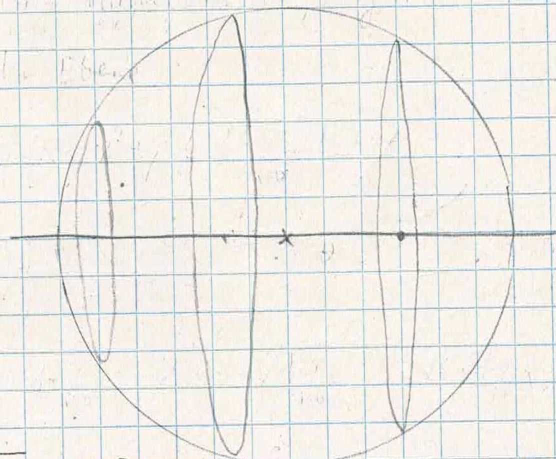
$$\Rightarrow \int F(x+c) - F(x) \, d\lambda(x) = \int \int_{-\infty}^{x+c} f(s) \, ds - \int_{-\infty}^{x} f(s) \, ds \, d\lambda(x) = \int \int_{x}^{x+c} f(s) \, ds \, d\lambda(x)$$
$$= \int_{x}^{x+c} \int f(s) \, d\lambda(x) \, ds$$

MAS Ü2

6) $B_k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \le 1\}$ $\lambda^k(B_k) =: V_k$

zz: $V_{k+2} = \frac{2\pi}{k+2} V_k$

Schneiden wir die k+2 dim Kugel mit einer n-2 dim Ebene, die durch den Mittelpunkt geht, so erhalten wir eine k-dim Kugel.



$V_n(1) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 V_{n-2}(\sqrt{1-r^2})\, r\, dr\, d\theta$

$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 V_{n-2}(\sqrt{1-r^2})\, r \int_0^{2\pi} d\theta\, dr$

$\overset{*}{=} \int_0^1 (\sqrt{1-r^2})^{n-2} V_{n-2}(1)\, r\, 2\pi\, dr$

$= 2\pi V_{n-2}(1) \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r\, dr$

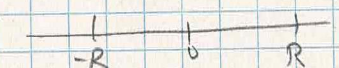
$= 2\pi V_{n-2}(1) \int_1^0 u^{\frac{n}{2}-1} \left(-\frac{r}{2r}\right) du$ $\left[u = 1-r^2 \quad du = -2r\, dr \right.$

$= -2\pi V_{n-2}(1) \frac{1}{2} \int_1^0 u^{\frac{n}{2}-1} du = -\pi V_{n-2}(1) \left. \frac{u^{\frac{n}{2}-1+1}}{\frac{n}{2}} \right|_1^0$

$= -2\pi V_{n-2}(1) \frac{1}{n} (0-1) = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}(1)$

$*$ zz: $V_n(R) = R^n V_n(1)$

$n=1$: $V_1(R) = 2R = R^1 2 = R^1 V_1(1)$ ✓



$n+1$: $V_{n+1}(R) = \int_{-R}^{R} V_n(\sqrt{R^2-x^2})\, dx \overset{IV}{=} \int_{-R}^{R} R^n V_n\left(\sqrt{\frac{R^2}{R^2} - \frac{x^2}{R^2}}\right) dx$

$= R^n \int_{-t}^{t} V_n(\sqrt{1-t^2})\, dt = R^n V_{n+1}(1)$ $t = \frac{x}{R}$ $dx = dt$