LINAG Ü5

2.5.2 $(m_i)_{i\in I}$ Erzeugendensystem von V also $[(m_i)_{i\in I}] = V$

zz: $(m_i)_{i\in I}$ ist Basis $\iff \exists x \in V : x = \sum_{i\in I} x_i m_i$ eindeutig

1.) zz: $(m_i)_{i\in I}$ ist Basis $\implies \exists x \in V : x = \sum_{i\in I} x_i m_i$ eindeutig

Da $(m_i)_{i\in I}$ eine Basis ist muss $(m_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.

offensichtlich $\exists x : x = \sum_{i\in I} x_i m_i$, da $(m_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von V ist.

Wenn eine zweite Linearkombination für x existieren würde (mit $LK1 \neq LK2$), wäre $(m_i)_{i\in I}$ nicht linear unabhängig:

$$x = \sum_{i\in I} x_i m_i = \sum_{i\in I} \bar{x}_i \bar{m}_i \quad \text{mit } \exists j \in I : x_j \neq \bar{x}_j \text{ oder } m_j \neq \bar{m}_j$$

Sei j dieses Element aus I. $\sum_{i\in I\setminus\{j\}} x_i \cdot \frac{m_i}{n_i} = y_i \Rightarrow (m_i)_{i\in I}$ ist linear abhängig ↯

2.) zz: $\exists x \in V : x = \sum_{i\in I} x_i m_i$ eindeutig $\implies (m_i)_{i\in I}$ ist Basis

Da $(m_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem ist müssen wir nur mehr die lineare Unabhängigkeit prüfen.

Angenommen $\exists y \in V$ mit $x \neq y$ für den es zwei unterschiedliche Linearkombinationen aus $(m_i)_{i\in I}$ gibt, also

$$y = \sum_{i\in I} y_i n_i = \sum_{i\in I} \bar{y}_i \bar{n}_i \quad \text{mit } \exists j \in I : y_j \neq \bar{y}_j \text{ oder } n_j \neq \bar{n}_j$$

Dann gilt
$$\sum_{i\in I} y_i n_i - \sum_{i\in I} \bar{y}_i \bar{n}_i = 0_V$$

Also könnte man x auch wie folgt anschreiben

$$x = \sum_{i\in I} x_i m_i + \sum_{i\in I} y_i n_i + \sum_{i\in I} (-\bar{y}_i) \bar{n}_i \quad ↯$$

Da man y bel. wählen kann gibt es keinen Vektor für den mehrere verschiedene Linearkombinationen existieren. Also muss $(m_i)_{i\in I}$ linear unabhängig sein. $\square$