LINAG Ü7

3.2.1. $f: K^{3\times 1} \to K^{2\times 1}$

b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \overline{x_2} \end{pmatrix}$ $\quad K = \mathbb{C}$

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ bel.

$$f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \overline{x_2+y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +y_1 \\ \overline{x_2} & +\overline{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \overline{x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \overline{y_2} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$z := (1+2i)$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1+1i \\ 2+2i \\ 3+3i \end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix} (1+2i)\cdot(1+1i) \\ (1+2i)\cdot(2+2i) \\ (1+2i)\cdot(3+3i) \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} (1-2)+i(1+2) \\ (2-4)+i(2+4) \\ (3-6)+i(3+6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i3 \\ -2+i6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1+i3 \\ 6+i2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2i)\cdot(1+1i) \\ \overline{(1+2i)\cdot(2+2i)} \end{pmatrix} = (1+2i)\cdot f\begin{pmatrix} 1+1i \\ 2+2i \\ 3+3i \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ ist <u>keine</u> lineare Abbildung

c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix}$

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in K^{3\times 1}$ bel.

$$f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_1+y_2+y_3 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Sei $c \in K$ bel. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^{3\times 1}$ bel.

$$f\begin{pmatrix} c\cdot x_1 \\ c\cdot x_2 \\ c\cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c\cdot x_1 + c\cdot x_2 + c\cdot x_3 \end{pmatrix} = c\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix} = c\cdot f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ ist eine lineare Abbildung

d) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ ist <u>keine</u> lineare Abbi

LINAG Ü7

3.2.1. ...

c) ges: Basis von $\ker f$

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^{3\times 1} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

Behauptung: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\ker f$.

Bew: - Anhand der ersten zwei Komponenten ist offensichtlich, dass die Vektoren l.u. sind.

- Sei $x \in \ker f$ bel. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Es muss gelten $x_3 = -x_1 - x_2$.

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ erzeugt ganz $\ker f$

-

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix}$$

$$(a) + (b) + (-a-b) = a - a + b - b = 0$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ erzeugt nur $\ker f$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\ker f$

ges: Basis von $f(K^{3\times 1})$

$$f(K^{3\times 1}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \mid \exists x_1, x_2, x_3 : x = x_1 + x_2 + x_3 \right\}$$

Jeder Wert $x \in K$ kann als Summe aus x_1, x_2, x_3 dargestellt werden

z.B. durch $x = 0 + 0 + x$ (mit $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = x$).

$\Rightarrow$ Basis von $f(K^{3\times 1})$ ist z.B. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

offensichtlich l.u. und Erzeugungssystem von $f(K^{3\times 1})$.