FANA Ü1

1) Ist ein linearer Raum versehen mit der diskreten Topologie ein topologischer Vektorraum?

Def $(X,\mathcal{T})$ ... topologischer VR $:\Leftrightarrow$ $+: X\times X \to X$ ... stetig und $\cdot: \mathbb{C}\times X \to X$ ... stetig

wobei $(X\times X, \mathcal{T}\times\mathcal{T})$ und $(\mathbb{C}\times X, \mathcal{E}\times\mathcal{T})$ betrachtet wird

Def diskrete Topologie $\mathcal{T}$ von X $\quad \mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$

Def $f:(X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ ... stetig $\Leftrightarrow \forall O' \in \mathcal{T}' : f^{-1}(O') \in \mathcal{T}$

- Sei $O \in \mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ bel. Klarerweise ist $+^{-1}(O) \subseteq X\times X$ also $+^{-1}(O) \in \mathcal{P}(X\times X) = \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X) = \mathcal{T}\times\mathcal{T}$ $\Rightarrow$ $+$ ... stetig

- Falls $X = \{0\}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}\}$ $\quad \cdot^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $\cdot^{-1}(\{0\}) = \mathcal{E}\times\{0\}$
$\Rightarrow \forall O \in \mathcal{T} : \cdot^{-1}(O) \in \mathcal{E}\times\mathcal{T}$ $\Rightarrow$ $\cdot$ ... stetig
$\Rightarrow (X,\mathcal{T})$ ist top. VR

- Falls $X \neq \{0\}$
Angenommen $\cdot : \mathbb{C}\times X \to X$ ist stetig $\Rightarrow \forall x \in X : \cdot|_{\mathbb{C}\times\{x\}\,(\cong \mathbb{C})}$ ist stetig
$\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}\ \forall V \in \mathcal{U}^X(z\cdot x)\ \exists U \in \mathcal{U}^{\mathbb{C}}(z) : \cdot(U\times\{x\}) \subseteq V$
$\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}\ \forall z\cdot x \in \underline{V} \subseteq X\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(z)\cdot x \subseteq V$ $\quad$ Wählen wir $V = \{z\cdot x\}$
$\Rightarrow (\forall x \in X)\ \forall z \in \mathbb{C}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall w \in B_\varepsilon(z) : w\cdot x = z\cdot x$
Wir können ein $w \in B_\varepsilon(z)\setminus\{z\}$ finden $\Rightarrow ((w-z)\cdot x = 0 \Rightarrow x = 0)$
↯ zu $X \neq \{0\}$ (eigentlich sogar direkt und nicht indirekt gezeigt).

Zusammenfassend: Vektorraum mit diskreter Topologie wird zu einem topologischem Vektorraum genau dann wenn der Vektorraum nur aus dem Null-Element besteht.

$\square$

FANA Ü1

2) Zeigen Sie, dass ein nichttriviales, stetiges, lineares Funktional auf einem topologischen Vektorraum offen ist, also offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

[Def topologischer VR $(X, \mathcal{T})$: $+ : X \times X \to X$, $\cdot : \mathbb{C} \times X \to X$ ...stetig

[Def stetig $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$: $\forall O' \in \mathcal{T}' : f^{-1}(O') \in \mathcal{T}$

[Def linear $f : X \to X'$ $\forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C} : f(x+y) = f(x) + f(y) \wedge f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Sei $f : X \to \mathbb{C}$ ein beliebiges stetiges, lineares, nichttriviales Funktional.

nichttrivial $\Rightarrow \exists x_0 \in X : f(x_0) = c \neq 0 \quad \Rightarrow f(c^{-1} x_0) = c^{-1} \cdot f(x_0) = \frac{c}{c} = 1$

$e := c^{-1} \cdot x_0 \in X$

Sei $V \in \mathcal{T}$ bel. zz: $f(V)$ ist offen in $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

Sei $y \in f(V)$ bel. $\Rightarrow \exists x \in V : f(x) = y$

Da $(X, \mathcal{T})$ .. top. VR $\Rightarrow +, \cdot$ ... stetig $\Rightarrow$ offene Mengen werden mit Addition und Skalarmultiplikation auf offene Mengen abgebildet.

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall |r| < \delta : x + r \cdot e \in V \Rightarrow f(x + r \cdot e) = y + r$

$\Rightarrow B_\delta(y) \subseteq f(V) \quad \forall y \in f(V)$ für ein passendes δ (von y abhängig)

$\Rightarrow f(V)$ ist offen in $\mathbb{C}$

$\square$

FANA Ü1

3) Zeigen Sie Satz 2.2.1. (i) durch Induktion nach der Dimension n des Unterraumes ohne Verwendung von Satz 2.2.1. oder dessen Folgerungen.

Satz 2.2.1. (i) X ... topologischer VR, $n \in \mathbb{N}$, Y ... n-dim linearer Unterraum von X

Jeder Isomorphismus (bij, lineare Abbildung) von $\mathbb{C}^n$ auf Y ist auch ein Homöomorphismus (stetig und $\cdot^{-1}$ ist stetig) (von $(\mathbb{C}^n, \|.\|_2)$ auf Y mit Spurtopologie von X).

$n = 0$ $\quad Y = \{0\}$ ist der einzige 0-dim lineare UR von X

$\Rightarrow f \equiv 0$ ist die einzige Abbildung nach Y und ist auch Homöomorphismus

$n = 1$ $\quad Y = \{\lambda \cdot x_0 : \lambda \in \mathbb{C}\}$ für ein $x_0 \in X$

$\Rightarrow f : \mathbb{C}^1 \to Y$ ... bij, linear eine bel. Abbildung

f ... bij $\Rightarrow f^{-1}$ ... bij $\Rightarrow f^{-1}$ ... inj $\Rightarrow \ker f^{-1} = \{0\}$ ... abgeschlossen

Nach 2.1.14. ist f^{-1} ... stetig $\Leftrightarrow \ker f^{-1}$ ... abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}$ ... stetig

$f(\lambda \cdot x_0) = \lambda f(x_0)$ da f linear ist. Nach dem Fortsetzungssatz hat f die Form $\lambda \mapsto \lambda \cdot f(x_0)$. Also ist f nach Lemma 2.1.3. stetig

$n \mapsto n+1$ $\quad$ Sei Y ein $n+1$ dim UR von X. $\Rightarrow \exists$ Basis von Y $B = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ Sei $v \in Y$ bel. $\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i$ für irgendwelche $\lambda_i \in \mathbb{C}$

f sei eine lineare, bijektive Abbildung von $\mathbb{C}^{n+1} \to Y$

$\Rightarrow f^{-1}(v) = f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^{-1}(e_i) + \lambda_{n+1} f^{-1}(e_{n+1}) = f^{-1}|_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}(pr_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}(v)) + f^{-1}|_{\langle e_{n+1} \rangle}(pr_{\langle e_{n+1} \rangle}(v))$

$f^{-1}|_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}$ ist ein Isomorphismus von $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ nach $\mathbb{C}^n$ und somit nach Voraussetzung ein Homöomorphismus (also stetig). $f^{-1}|_{\langle e_{n+1} \rangle}(pr_{\langle e_{n+1} \rangle}(v)) \equiv v \mapsto \lambda_{n+1} e_{n+1} \mapsto \lambda_{n+1} \tilde{f}(e_{n+1})$ ist nach oben stetig. $\Rightarrow f^{-1}$ ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig.

Analog mit $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ ... Basis von $\mathbb{C}^n$ folgt f ... stetig

$\Rightarrow f$ ... Homöomorphismus

$\square$

FANA Ü1

4) Sei X ein topologischer VR und E ein linearer Unterraum von X. Zeigen Sie, dass E genau dann abgeschlossen ist, wenn $X\setminus E$ Hausdorff ist.

[Def Hausdorff A $\quad \forall x,y \in A, x \neq y \ \exists O_x, O_y \in \mathcal{T}$ ... disjunkt: $x \in O_x \wedge y \in O_y$

(⇒) Sei E ein beliebiger abgeschlossener, linearer Unterraum von X.
Nach Prop 2.4.6. ist der Faktorraum X/E mit der finalen Topologie von der kanonischen Projektion $\pi : X \to X/E$ ein topologischer Vektorraum, also nach unserer Definition Hausdorff.

(⇐) Sei X/E Hausdorff. $\{0_{X/E}\} := \{0_x + E\}$ ist eine einpunktige Menge in X/E.
In Hausdorffräumen sind einpunktige Mengen abgeschlossen (T_1 gilt).
Sei wieder $\pi : X \to X/E$ die kanonische Projektion (die stetig ist). So gilt $\pi^{-1}(\{0_{X/E}\}) = E$ und da $\{0_{X/E}\}$ ... abgeschlossen folgt aus der Stetigkeit E ... abgeschlossen.

$\square$

FANA Ü1

6) $X \ldots$ VR über $\mathbb{C}$ $\quad p: X \to [0,\infty)$ $\quad p(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \wedge p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ $\forall x \in X\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

zz: $p \ldots$ Norm $\Leftrightarrow$ $B(p,1) := \{x \in X : p(x) \leq 1\} \ldots$ konvex

---

[Def Norm $\|.\|$: $\Leftrightarrow$ (N1) $\forall x: \|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\quad$ (N2) $\forall x \forall \lambda: \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(N3) $\forall x,y: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

[Def konvex $\quad \forall x,y \in A\ \forall t \in [0,1]: \ tx + (1-t)y \in A$

(N1) und (N2) werden bereits von p erfüllt, daher zz: (N3) $\Leftrightarrow$ $B(p,1) \ldots$ konvex

($\Rightarrow$) Sei $x,y \in B(p,1)$ bel. Sei $t \in [0,1]$ bel. $\quad$ zz: $tx + (1-t)y \in B(p,1)$

$p(tx + (1-t)y) \leq p(tx) + p((1-t)y) = t\,p(x) + (1-t)\,p(y)$ da $p \ldots$ Norm

Aus $x,y \in B(p,1)$ folgt $p(x) \leq 1$ und $p(y) \leq 1$.

$\Rightarrow p(tx + (1-t)y) \leq t\,p(x) + (1-t)\,p(y) \in [\min(p(x),p(y)), \max(p(x),p(y))]$

also auf jeden Fall ≤ 1. Somit ist $B(p,1)$ konvex.

($\Leftarrow$) Sei $x,y \in X$ bel. $\quad p(x)=0 \vee p(y)=0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$ klar. o.B.d.A. $p(x) \neq 0 \neq p(y)$

$\frac{x}{p(x)}, \frac{y}{p(y)} \in B(p,1)$, da $p\left(\frac{x}{p(x)}\right) = 1 = p\left(\frac{y}{p(y)}\right)$ $\quad$ Wähle $t := \frac{p(x)}{p(x)+p(y)} \in [0,1]$

$\Rightarrow$ da $B(p,1)$ konvex, gilt dass $\frac{p(x)}{p(x)+p(y)} \frac{x}{p(x)} + \underbrace{\left(1 - \frac{p(x)}{p(x)+p(y)}\right)}_{\frac{p(y)}{p(x)+p(y)}} \frac{y}{p(y)} \in B(p,1)$

$\Rightarrow \frac{x}{p(x)+p(y)} + \frac{y}{p(x)+p(y)} \in B(p,1)$

$\Rightarrow p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)}\right) = \frac{1}{p(x)+p(y)}\, p(x+y) \leq 1 \quad \Rightarrow p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

$\Rightarrow p \ldots$ Norm

$\square$

FANA Ü1

7) Bestimmen Sie die topologischen Dualräume der Räume $c_{00}(\mathbb{N})$, $c_0(\mathbb{N})$ und $c_\infty(\mathbb{N})$.

Zeigen Sie, dass c_∞ topologisch isomorph zu $c_0 \oplus \mathbb{C}$ ist.

Da offenbar $c_{00}(\mathbb{N}) \subseteq c_0(\mathbb{N}) \subseteq c_\infty(\mathbb{N})$ folgt gemeinsam mit der Definition von top. Dualraum ($X' = \{f : X \to \mathbb{C} \ldots \text{stetig, linear}\}$), dass wenn c_∞' der top. Dualraum von $c_\infty(\mathbb{N})$ ist $\Rightarrow c_\infty'|_{c_0(\mathbb{N})} = \{f : c_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{C} : \exists g \in c_\infty' : g|_{c_0(\mathbb{N})} = f\} = c_0'$ und $c_\infty'|_{c_{00}} = c_{00}'$.

Also reicht es c_∞' zu finden. Behauptung: $c_\infty' = \{f : c_\infty \to \mathbb{C}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\lambda_n \text{ mit } (\lambda_n) \in l_1\}$

$\boxed{\subseteq}$ Sei $f \in c_\infty'$ bel. $\Rightarrow f \ldots$ stetig, linear $\rightarrow f \ldots$ beschränkt, folgenstetig

$(\delta_n) := (0, \ldots, 0, \overset{\overset{n\text{-te Stelle}}{\downarrow}}{1}, 0, \ldots)$ $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Schauderbasis von $c_\infty(\mathbb{N})$ Sei $(c_n) \in c_\infty$ bel.

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \delta_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n\delta_n \Rightarrow f((c_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n \delta_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n f(\delta_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n f(\delta_n)$

Also nun zu zeigen $(f(\delta_n))_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$.

$\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(\delta_n)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(\delta_n)\, \mathrm{sgn}(f(\delta_n)) = f(\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n\, \mathrm{sgn}(f(\delta_n))) = f((\mathrm{sgn}(f(\delta_1)), \mathrm{sgn}(f(\delta_2)), \ldots)) \le \|f\| \overset{f \ldots \text{beschränkt}}{<} \infty$

$\Rightarrow f(\delta_n) \in l_1$

$\boxed{\supseteq}$ Sei $f : c_\infty \to \mathbb{C}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\lambda_n$ mit $(\lambda_n) \in l_1$ bel. Dass f dann linear ist, ist klar.

zz: $f \ldots$ stetig Da f linear ist reicht es $f \ldots$ beschränkt zu zeigen, da dann $f \ldots$ stetig folgt.

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bel. $|f((c_n)_{n\in\mathbb{N}})| = |\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\lambda_n| \le |\sum_{n\in\mathbb{N}} \|c_n\|_\infty \lambda_n| \le \|c_n\|_\infty \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| =$

$= \|c_n\|_\infty \|\lambda_n\|_1 < \infty$ da $\lambda_n \in l_1$ und c_n konvergent ist.

$\Rightarrow f \ldots$ beschränkt.

Es gilt also $c_{00}' = \{f : c_{00} \to \mathbb{C}, (c_n) \mapsto \sum c_n\lambda_n \text{ mit } (\lambda_n) \in l_1\}$ und $c_0' = \{f : c_0 \to \mathbb{C}, (c_n) \mapsto \sum c_n\lambda_n \text{ mit } (\lambda_n) \in l_1\}$.

$\Phi : c_0 \oplus \mathbb{C} \to c_\infty$ $((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, z) \mapsto (z + c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zz: linear, bij, stetig, $\cdot^{-1}$ stetig

linear ist klar. $\Phi^{-1} : c_\infty \to c_0 \oplus \mathbb{C}$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto ((b_n - \lim_{n\to\infty} b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lim_{n\to\infty} b_n)$ also ist Φ bijektiv.

Wir versehen c_∞ mit der $\|.\|_\infty$ und $c_0 \oplus \mathbb{C}$ mit $\|((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, z)\| := \|(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty + \|z\|_2$ (ist Norm nachrechnen).

$\|\Phi((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, z)\|_\infty = \|(c_n + z)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \|(c_n)_n + (z)_n\|_\infty \le \|(c_n)\|_\infty + z < \infty$ da c_n konvergent ist.

$\|\Phi^{-1}((b_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_\infty = \|((b_n - \underset{\overset{\shortparallel}{\lim b_n}}{b})_n, b)\| = \|(b_n - b)_n\|_\infty + \|z\|_2 \le \|(b_n)_n\|_\infty + b + \|z\|_2 < \infty$

$\Rightarrow \Phi, \Phi^{-1}$ sind beschränkt, linear also stetig.

$\square$

FANA Ü1

8) $(X, \|.\|)$ ... normierter Raum $\quad X \neq \{0\}$ $\quad \mathcal{T}_{init}$ ... initiale Topologie bzgl. $\|.\|: X \to [0,\infty)$

$x \in X$ $\quad$ ges: Umgebungsbasis von x $\quad$ zz: $\mathcal{T}_{init} \neq \mathcal{T}_{\|.\|}$ ... Normtopologie

Def Umgebung $\mathcal{U}(x)$ $\quad \forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists O \in \mathcal{T}: x \in O \subseteq U$

Def Umgebungsbasis von x $\quad \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ $\quad \forall V \in \mathcal{U}(x)\ \exists B \in \mathcal{B}(x): B \subseteq V$

Def $\mathcal{T}$ ... initiale Topologie bzgl. $f_i: (X,\mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ $\iff$ $\mathcal{T}$ ... gröbste Topologie: $\forall i: f_i$ ... stetig

Def Normtopologie $\mathcal{T}_{\|.\|}$ $\quad \forall U \subseteq X: U \in \mathcal{T}_{\|.\|} \iff (\forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0: \|x-y\| < \varepsilon \Rightarrow y \in U)$

Wir zeigen zuerst $\mathcal{T}_{init} \neq \mathcal{T}_{\|.\|}$:

Lemma 1.2.3. $\quad (x_j)_{j\in J}$ ... Netz in X $\quad \exists x \in X: x_j \xrightarrow{j\in J} x$ bzgl. $\mathcal{T}$ $\iff \forall i: f_i(x_j) \xrightarrow{j \in J} f_i(x)$ bzgl. $\mathcal{T}_i$

In unserem Fall folgt $(x_j)_{j\in J}$ ... Netz in X konvergiert $\iff \|x_j\|$ konvergiert in $\mathbb{R}$.

Sei $x \in X\setminus\{0\}$ bel. ($\exists$ da $X \neq \{0\}$) $\Rightarrow x_j := \begin{cases} x & , j \text{ ... gerade} \\ -x & , j \text{ ... ungerade}\end{cases}$ $\Rightarrow \|x_j\| = \|x\|\ \forall j \in \mathbb{N}$

also ist $\|x_j\|$ in $\mathbb{R}$ konvergent $\Rightarrow x_j$ konvergiert gegen x

↯ zu Hausdorff, da $x \neq -x$ $\Rightarrow \exists O_x, O_{-x}: x \in O_x, -x \in O_{-x}$ und $O_x \cap O_{-x} = \emptyset$

$\Rightarrow \mathcal{T}_{init} \neq \mathcal{T}_{\|.\|}$

Nun suchen wir eine Umgebungsbasis von x (bzgl. $\mathcal{T}_{init}$):

Sei $x \in X$ bel. $\quad \mathcal{B}^{\mathbb{R}}(\|x\|) := \{U_r(\|x\|): r \in (0,\infty)\}$ ist eine Umgebungsbasis von $\|x\|$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$

$n: X \to [0,\infty)$, $x \mapsto \|x\|$ $\quad \mathcal{B}^X(x) := n^{-1}(\mathcal{B}^{\mathbb{R}}(\|x\|))$

$\forall B \in \mathcal{B}^{\mathbb{R}}(\|x\|)$: B ist offen. Da n stetig ist folgt $n^{-1}(B) \in \mathcal{T}_{init}$. $\quad n(x) \in B \Rightarrow x \in n^{-1}(B)$

$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}^X(x): x \in B \subseteq B$ mit $B \in \mathcal{T}_{init}$ $\quad \Rightarrow \mathcal{B}^X(x) \subseteq \mathcal{U}^X(x)$

Sei $V \in \mathcal{U}^X(x)$ bel. $\Rightarrow n(V) \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}}(\|x\|) \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}^{\mathbb{R}}(\|x\|): B \subseteq n(V)$

$\Rightarrow n^{-1}(B) \subseteq V$ und nach Definition $n^{-1}(B) \in \mathcal{B}^X(x)$

$\Rightarrow \mathcal{B}^X(x)$ ist eine Umgebungsbasis von x

Sei $U_r(\|x\|) \in \mathcal{B}^{\mathbb{R}}(\|x\|)$ bel. $\Rightarrow n^{-1}(U_r(\|x\|)) = \{y \in X: \|y\| \in U_r(\|x\|)\}$

$= \{y \in X: |\|x\| - \|y\|| < r\}$

$\Rightarrow \mathcal{B}^X(x) = \{\{y \in X: |\|x\|-\|y\|| < r\}: r \in (0,\infty)\}$ $\quad \square$

FANA Ü1

9) I ... überabzählbar $\quad (X_i, \mathcal{T}_i);\ i \in I$ ... top. Räume $\quad \forall i: \mathcal{T}_i \neq \{\emptyset, X_i\}$

$X := \prod_{i\in I} X_i \qquad$ ZZ: Es gibt keine Metrik auf X, welche die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf X induziert.

Angenommen es gibt eine Metrik d auf X, welche $\mathcal{T}$ induziert.

Wähle $(x_i)_{i\in I} \in X$ mit $\forall i \in I: x_i \in O_i \subsetneq X_i$ (geht nach Vorraussetzung).

Jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom (jeder Punkt hat eine höchstens abzählbare Umgebungsbasis). Nennen wir $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Umgebungsbasis von $(x_i)_{i\in I}$.

Nach der Bemerkung nach Definition 1.2.7. gilt für alle Mengen der Gestalt $\prod_{i\in I} O_i$ mit $O_i \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in I$, dass für alle bis auf endlich viele gilt $O_i = X_i$.

$\Rightarrow \exists I_n \subseteq I$ ... endlich: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall i \in I \setminus I_n: \pi_i(B_n) = X_i$

$J := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ ... abzählbar $\qquad J \subsetneq I$ da I_n ... endlich $\forall n$ und I ... überabzählbar

Sei $i_0 \in I \setminus J \qquad \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: i_0 \in I \setminus I_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \pi_{i_0}(B_n) = X_{i_0}$

$U := \prod_{i \in I\setminus\{i_0\}} X_i \times O_{i_0} \in \mathcal{T}$ nach Definition von $\mathcal{T}$ und $(x_i)_{i\in I} \in U$ ist klar.

$\Rightarrow U$ ist eine Umgebung von $(x_i)_{i\in I}$

$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Umgebungsbasis also $\forall$ Umgebungen von $(x_i)_{i\in I}\ \exists B \in (B_n)_{n\in\mathbb{N}}: B \subseteq$ Umgebung

Für U gibt es aber kein $B \in (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $B \subseteq U$, da

$\pi_{i_0}(U) = O_{i_0} \subsetneq X_{i_0} = \pi_{i_0}(B) \ \forall B \in (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ↯

$\square$