LINAG 08

2.8.10 $\quad U_1, U_2, U_3 \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit $U_1 \cap U_2 = U_2 \cap U_3 = U_3 \cap U_1 = \{0\}$

und keiner direkten Summe $U_1 + U_2 + U_3$

$$U_1 = \left[\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right] \qquad U_2 = \left[\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right] \qquad U_3 = \left[\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right]$$

$$U_1 \cap U_2 = \left\{v : x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = v = x_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix} = v = \begin{pmatrix}0\\x_2\\0\end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\x_2\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$U_2 \cap U_3 = \left\{v : x_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = v = x_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}0\\x_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_3\\x_3\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_3 = x_2 = 0$$

$$\Rightarrow U_2 \cap U_3 = \{0\}$$

$$U_3 \cap U_1 = \left\{v : x_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = v = x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_3 = x_1 = 0$$

$$\Rightarrow U_3 \cap U_1 = \{0\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in U_1 \qquad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in U_2 \qquad v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in U_3$$

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = v_3$$

$\Rightarrow$ Summe ist nicht direkt

LINAG Ü8

2.8.11 $U = \left[\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right]$ ges Komplementär in $\mathbb{R}^{4\times1}$

$K_1 = \left[\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right]$ Vektoren aus U haben immer die Form $\begin{pmatrix}x\\y\\y\\0\end{pmatrix}$, Vektoren aus K_1 die Form $\begin{pmatrix}0\\0\\a\\b\end{pmatrix}$, daher ist die Summe direkt.

Sei $v \in \mathbb{R}^{4\times1}$ bel. $v = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a\\b\\b\\0\end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\c-b\\d\end{pmatrix}}_{\in K_1} = \begin{pmatrix}a\\b\\b-b+c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow U \oplus K_1 = \mathbb{R}^{4\times1}$

$K_2 = \left[\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right]$ Vektoren aus K_2 haben die Form $\begin{pmatrix}0\\a\\0\\b\end{pmatrix}$, daher ist die Summe direkt.

Sei $v \in \mathbb{R}^{4\times1}$ bel. $v = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a\\c\\c\\0\end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\b-c\\0\\d\end{pmatrix}}_{\in K_2} = \begin{pmatrix}a\\b+c-c\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow U \oplus K_2 = \mathbb{R}^{4\times1}$

LINAG Ü8

2.8.20 β) $U_1 = \left[\left\{ \begin{pmatrix}-2\\-6\\-5\\5\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\\-3\\3\\-2\end{pmatrix} \right\}\right]$ $\quad U_2 = \left[\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}\right]$

a)

$$\begin{pmatrix}-2&0&-2\\-6&-1&-4\\-5&-1&-3\\5&1&3\\-4&-1&-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \cdot(-1)\quad \cdot(-1)\quad \cdot(-1) \\ \begin{pmatrix}2&0&2\\6&1&4\\5&1&3\\-5&-1&-3\\4&1&2\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} -5\cdot II\quad -3\cdot II \\ \begin{pmatrix}2&0&2\\1&1&1\\0&1&0\\0&-1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} +I\quad -I \\ \begin{pmatrix}2&2&0\\1&2&0\\0&1&0\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \cdot(-1) \\ \begin{pmatrix}-2&2&0\\-1&2&0\\0&1&0\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array} \Rightarrow \text{Basis ist } \left\{ \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\} \text{ und } \dim U_1 = 2$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&3\\0&1&3\\0&-1&-2\\1&2&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} -2\cdot I\quad -3\cdot II \\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&-1&1\\1&0&-5\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} +5\cdot I \\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} +III \\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Basis ist } \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \text{ und } \dim U_2 = 3$$

$$\begin{pmatrix}2&-2&0&0&0\\2&-1&0&1&0\\1&0&0&1&0\\-1&0&0&0&1\\0&1&1&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} +V\quad -III \\ \begin{pmatrix}2&-2&0&0&0\\2&-1&0&1&0\\1&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} -IV \\ \begin{pmatrix}2&-2&0&0&0\\1&-1&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \cdot(\frac{1}{2})\quad +I \\ \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\\frac{1}{2}&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} I\quad IV\quad V\quad III\quad II \\ \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\\frac{1}{2}&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array} \Rightarrow \text{Basis ist } \left\{ \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ und } \dim U_1 + U_2 = 4$$

b) Da $\dim U_1 + U_2 = 4$ (und nicht 5) können U_1 und U_2 nicht komplementäre Unterräume bezgl. $\mathbb{R}^{5\times 1}$ sein.

c) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^{5\times 1}$.

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ sind auch

Basen von $\mathbb{R}^{5\times 1}$. $\Rightarrow \left[\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}\right]$ ist ein Komplement zu U_1.

LINAG Ü8

3.2.3 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ges: injektive $\wedge \neg$ surjektive Abbildung $f_1 \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$

$$f_1 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (2\cdot(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

Sei $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bel. Sei $c \in \mathbb{R}$ bel.

$$f_1((a_n)+(b_n)) = 2\cdot((a_n)+(b_n)) = 2\cdot(a_n) + 2\cdot(b_n) = f_1(a_n) + f_1(b_n)$$
$$f_1(c\cdot(a_n)) = 2\cdot(c\cdot(a_n)) = c\cdot 2\cdot(a_n) = c\cdot f_1(a_n)$$

Angenommen $f_1(a_n) = f_1(b_n)$.

$$\Rightarrow 2\cdot(a_n) = 2\cdot(b_n) \iff (a_n) = (b_n)$$
$$\Rightarrow f_1 \text{ ist injektiv}$$

$(1)_{n\in\mathbb{N}}$ (konstante Einsfolge) ist $\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3.2.3. $f_1 \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ ... injektiv, $\neg$ surjektiv

$$f_1 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$
$$(a_n) \mapsto \begin{cases} a_{n-1}, & \text{falls } n \geq 1 \\ 0, & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

Sei $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bel. Sei $c \in \mathbb{R}$ bel.

$$f((a_n)+(b_n)) = (0, a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots) = (0, a_0, a_1, \ldots) + (0, b_0, b_1, \ldots) = f(a_n) + f(b_n)$$
$$c\cdot f(a_n) = c\cdot(0, a_0, a_1, \ldots) = (0, c\cdot a_0, c\cdot a_1, \ldots) = f(c\cdot a_n)$$

Angenommen $f(a_n) = f(b_n)$.

$$(0, a_0, a_1, \ldots) = (0, b_0, b_1, \ldots) \Rightarrow a_0 = b_0 \wedge a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \ldots$$
$$\Rightarrow (a_n) = (b_n)$$

f_1 ist nicht surjektiv, da die Folge $(1,2,3,4,\ldots)$ nicht im Bild von f_1 liegt.

$\ker f = \{(0,0,0,\ldots)\}$

$f(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_0 = 0\}$

...

LINAG Ü8

3.2.10 a) V... Vektorraum $\dim V < \infty$ $f \in L(V,V)$

zz: $V = \ker f \oplus f(V) \Leftrightarrow \ker f = \ker(f \circ f)$

$\Rightarrow$ Sei $x \in \ker f$. $f(f(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow x \in \ker(f \circ f)$

$\Rightarrow \ker f \subseteq \ker(f \circ f)$

Sei $x \in \ker(f \circ f)$ bel. Dann ist $f(x) \in \ker f$.

Indirekt angenommen $x \notin \ker f$. (also $f(x) \neq 0$)

$\exists u \in \ker f \; \exists w \in f(V): x = u + w$

3.2.3 ... $f_2 \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ ... $\neg$injektiv, surjektiv

$f_2: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$(a_n) \mapsto (a_{n+1})$

Sei $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bel. Sei $c \in \mathbb{R}$ bel.

$f((a_n)+(b_n)) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots)$

$= f(a_n) + f(b_n)$

$c \cdot f(a_n) = c \cdot (a_1, a_2, a_3, \dots) = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, c \cdot a_3, \dots) = f(c \cdot (a_n))$

Sei $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bel.

$f((0, x_0, x_1, x_2, \dots)) = (x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_n)$

$\Rightarrow f$ ist surjektiv

f ist nicht injektiv, da $(a_n) = (0,1,2,3,4,\dots)$ und $(b_n) = (1,1,2,3,4,\dots)$ beide auf $(1,2,3,4,\dots)$ abgebildet werden.

$\ker f_2 = \{(x,0,0,0,\dots) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$f_2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

LINAG 08

3.3.1.	injektiv	surjektiv	bijektiv
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	X, da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ¬ l.u.	X, da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$	X
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	X, da nicht l.u.	X, da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin$ Hülle	X
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	✓	✓	✓, da Basis von $\mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	✓	X, da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin$ Hülle	X
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	✓	✓	✓, da Basis von $\mathbb{R}^3$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	X, da $2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ also ¬ l.u.	✓	X
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	✓	✓	✓, da Basis von $\mathbb{R}^4$

LINAG Ü8

3.3.10 $\quad U_1 = [\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\}] \qquad U_2 = [\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\}]$

a) $p_2 : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{4\times 1}$ ... Projektion auf U_2 in Richtung U_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -III & -IV & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \cdot(-1) & & -II & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} II & IV & I & III \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_4 \\ -x_1 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

$v_1 = x_1 + x_2 + x_3$

$v_2 = x_2 + x_4$

$\underline{v_3 = -x_1}$

$v_4 = x_1 + x_3$

$\Rightarrow x_1 = -v_3$

$v_1 = -v_3 + x_2 + x_3$

$v_2 = x_2 + x_4$

$\underline{v_4 = -v_3 + x_3}$

$\Rightarrow x_3 = v_4 + v_3$

$\underline{v_1 = \cancel{-v_3} + x_2 + v_4 + \cancel{v_3}}$

$v_2 = x_2 + x_4$

$\Rightarrow x_2 = v_1 - v_4$

$v_2 = v_1 - v_4 + x_4$

$\Rightarrow x_4 = v_2 - v_1 + v_4$

$$\Rightarrow \quad v = -v_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + (v_1 - v_4) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + (v_4 + v_3) \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + (v_2 - v_1 + v_4) \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -v_3 + v_1 - v_4 \\ 0 + v_1 - v_4 \\ v_3 + 0 \\ -v_3 + 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_4 + v_3 + 0 \\ 0 + v_2 - v_1 + v_4 \\ 0 + 0 \\ v_4 + v_3 + 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 - v_3 - v_4 \\ v_1 - v_4 \\ v_3 \\ -v_3 \end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} v_3 + v_4 \\ -v_1 + v_2 + v_4 \\ 0 \\ v_3 + v_4 \end{pmatrix}}_{\in U_2}$$

LINAG Ü8

3.3.2. α) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&3&4\\3&4&5\\3&5&3\\2&3&2\\1&1&2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix} & -\mathrm{I} & -\mathrm{I}\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\3&1&2\\3&2&0\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}-\mathrm{III} & & -\mathrm{II}\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&1&1\\3&2&-2\\2&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix} & -\mathrm{III} & -\mathrm{I}\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\3&4&-5\\2&2&-3\\0&-1&1\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}\mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{I}\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\4&-5&3\\2&-3&2\\-1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}4&-5&3\\2&-3&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

β) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&3&4\\3&4&5\\2&3&1\\1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix} & -\mathrm{I} & -\mathrm{II}\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&1&1\\2&1&-2\\1&-1&0\\2&-2&0\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}-3\cdot\mathrm{III} & -\mathrm{III} & \end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&0&1\\8&3&-2\\1&-1&0\\2&-2&0\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}-\mathrm{II} & & \end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&0&1\\5&3&-2\\2&-1&0\\4&-2&0\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}\cdot(-1) & & +\mathrm{I}\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\\-5&3&3\\-2&-1&2\\-4&-2&4\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\begin{matrix}\mathrm{II} & \mathrm{I} & \mathrm{III}\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\3&-5&3\\-1&-2&2\\-2&-4&4\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}3&-5&3\\-1&-2&2\\-2&-4&4\end{pmatrix}$$