ANA 07

1) $a \in \mathbb{C}$, $Re(a) > 0$ $\quad f_a(x) := e^{-ax} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \quad g_a(x) := e^{ax} \mathbb{1}_{(-\infty,0]}$

(i) ges: Fouriertransformierte von f_a

$$\int_{\mathbb{R}} |f_a(x)| \, d\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-ax} \, d\lambda(x) = -\frac{1}{a} \int_0^{-\infty} e^{u} \, d\lambda(u) = -\frac{1}{a} \qquad \left[u = -ax \quad \frac{du}{dx} = -a \right.$$

$\Rightarrow f_a \in L^1$

$$\hat{f_a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_a(x) e^{-itx} \, d\lambda(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-ax-itx} \, d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x(a+it)} \, d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-x(a+it)}}{\underbrace{-(a+it)}_{\substack{Re<0 \\ \Rightarrow \neq 0}}} \right|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(a+it)}$$

(ii) ges: Fouriertransformierte von g_a

$$\int_{\mathbb{R}} |g_a(x)| \, d\lambda(x) = \int_{-\infty}^0 e^{ax} \, d\lambda(x) = \left. \frac{e^{ax}}{a} \right|_{-\infty}^0 = \frac{1}{a} \qquad \Rightarrow g_a \in L^1$$

$$\hat{g_a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g_a(x) e^{-itx} \, d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{ax-itx} \, d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{x(a-it)} \, d\lambda(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{x(a-it)}}{a-it} \right|_{-\infty}^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(a-it)}$$

(iii) Polstellen von $\hat{f_a}$ bzw. $\hat{g_a}$?

Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ kann in beiden Fälle für die Betrachtung der Polstellen ignoriert werden.

$\frac{1}{a+it}$ kann nur eine Polstelle haben wenn $a+it = 0$ also $a = -it$

für <u>reellwertige t</u> gilt dann $Re(a) = Re(-it) = 0 \wedge Im(a) = Im(-it) = -t$

$\Rightarrow$ Polstelle bei $t = -Im(a)$ falls $Re(a) = 0$ (aber nach Angabe $Re(a) > 0$)

Analog für $\hat{g_a}$ also Polstelle bei $t = Im(a)$ falls $Re(a) = 0$ $\lightning$ zu $Re(a) > 0$

für <u>komplexwertige t</u>: $\hat{f_a}$ .... Polstelle $\Leftrightarrow a+it = 0 \Leftrightarrow t = ia$

$\hat{g_a}$ ... Polstelle $\Leftrightarrow a-it = 0 \Leftrightarrow t = -ia$

ANA Ü7

3) μ ... endliches, positives Borelmaß auf $\mathbb{R}$

$\hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} d\mu(x)$ heißt Fouriertransformierte des Maßes μ für $\xi \in \mathbb{R}$.

(i) zz: $\hat{\mu}$ ... stetig, beschränkt $\|\hat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|$ wobei $\|\mu\| := \mu(\mathbb{R})$

μ ... endlich $\Rightarrow$ σ-endlich $\Rightarrow \exists f \geq 0 : \mu(A) = \int_A f \, d\lambda$ μ-f.ü.

$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} d\lambda(x) = \sqrt{2\pi} \, \hat{f}(\xi)$

$\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda \overset{f \geq 0}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x) = \mu(\mathbb{R}) \underset{\mu \text{ ... endlich}}{<} \infty \quad \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$

Nach Satz 3.2.1: ist $\hat{f}(\xi)$ für L^1 Funktion stetig und hat Abbildungsnorm $\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$\Rightarrow \hat{\mu}(\xi) = \sqrt{2\pi} \, \hat{f}(\xi)$ ist stetig

$\forall \xi : |\hat{\mu}(\xi)| = |\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} d\mu(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-ix\xi}| d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} d\mu = \mu(\mathbb{R}) = \|\mu\| < \infty$

$\Rightarrow \|\hat{\mu}\|_\infty = \sup_\xi |\hat{\mu}(\xi)| \leq \|\mu\| < \infty \quad \Rightarrow \hat{\mu}$ ist beschränkt

(ii) $\mu := \delta_0$ ... Dirac-Maß in Punkt $x=0$ ges: $\hat{\mu}$ Ist $\hat{\mu} \in C_0^0(\mathbb{R})$?

$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} d\delta_0(x) = \int_{\{0\}} e^{-ix\xi} d\delta_0(x) = 1$ da $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine δ_0 Nullmenge ist

offenbar ist $\hat{\mu}$ stetig, aber nicht verschwindend Δ

(iii) μ ... Maß, dass abs. stetig bzgl. Lebesgue-Maß mit Dichte $f \in L^1(\mathbb{R})$ ges: $\hat{\mu}$

$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} d\lambda(x) = \sqrt{2\pi} \, \hat{f}(\xi)$

Δ Zusatz:

δ_0 ist (sogar) endlich, da $\delta_0(\mathbb{R}) = 1$ und λ ist σ-endlich

$\delta_0 \ll \lambda \iff \forall N : \lambda(N) = 0 \Rightarrow \delta_0(N) = 0$ gilt nicht, da $N = \{0\}$ hat

$\lambda(N) = 0$, aber $\delta_0(N) = 1 \neq 0$

$\overset{RN}{\Longrightarrow} \delta_0$ besitzt keine Dichte bzgl. λ also $\nexists f : \delta_0(A) = \int_A f \, d\lambda$ δ_0-f.ü.

$\Rightarrow$ es gibt nicht die Darstellung $\hat{\delta}_0(\xi) = \sqrt{2\pi} \, \hat{f}(\xi)$ für ein f

$\Rightarrow \hat{\delta}_0$ muss nicht verschwindend sein (gäbe es eine Darstellung mit $\hat{f}$ wobei $f \in L^1$ natürlich schon)

ANA Ü7

4) (X,d) ... metr. Raum

$\delta>0$, $0\le s\in\mathbb{R}$ $\forall A\subseteq X$: $B^s_\delta(A) := \omega_s \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} r_i^s : 0<2r_i\le\delta, (x_i)_{i\in\mathbb{N}}\subseteq X : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{r_i}(x_i)\supseteq A\}$

(i) zz: B^s_δ ist äußeres Maß auf X

- $B^s_\delta(\emptyset)=\emptyset$: $\forall n\in\mathbb{N}$: $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{r_i}(x)\supseteq\emptyset$ für $x\in X$ bel. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n i^2}\right)^{\frac{1}{s}\cdot s} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

  $\Rightarrow B^s_\delta(\emptyset)=0$ $\quad r_i := \left(\frac{1}{n i^2}\right)^{\frac{1}{s}} > 0$ und o.B.d.A. $r_i\le\delta$ (sonst $r_i:=\delta$)

- $A\subseteq B \Rightarrow B^s_\delta(A)\le B^s_\delta(B)$

  Da $A\subseteq B \Rightarrow \forall (r_i),(x_i)$: $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{r_i}(x_i)\supseteq B\supseteq A$ also alle Überdeckungen von B sind auch welche von A. Somit nehmen wir das Infimum über eine kleinere Menge, wenn wir zu B übergehen. Infimum über kleinere Menge ist größer $\Rightarrow B^s_\delta(A)\le B^s_\delta(B)$

- $B^s_\delta(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\le\sum_{i=1}^{\infty} B^s_\delta(A_i)$

  Sei $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i\subseteq\bigcup_{l\in\mathbb{N}} B_{r_{i,l}}(x_{i,l})$ mit $0<2r_{i,l}\le\delta$

  $\Rightarrow \bigcup_{(i,l)\in\mathbb{N}^2} B_{r_{i,l}}(x_{i,l})$ ist δ-Überdeckung von A

  $\Rightarrow B^s_\delta(A)\le B^s_\delta(\bigcup_{(i,l)\in\mathbb{N}^2} B_{r_{i,l}}(x_{i,l}))\le\omega_s\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} r_{i,l}^s$ mit Bildung des Inf der $\sum_{l\in\mathbb{N}}$-Summen über alle δ-Überdeckungen von A, so folgt

  $$B^s_\delta(A)\le\sum_{i\in\mathbb{N}} B^s_\delta(A_i) \text{ für alle } A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow B^s_\delta(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\le\sum_{i=1}^{\infty} B^s_\delta(A_i)$$

(ii) zz: $B^s(A) := \lim_{\delta\to 0+} B^s_\delta(A)$ existiert für $\forall A\subseteq X$.

$B^s_\delta(A)$ ist eine in δ monoton fallende Funktion $\Rightarrow$ Grenzwert existiert.

(iii) zz: B^s ist ein Borelmaß.

Da die offenen Kugeln $B_\varepsilon(x)$ ein Erzeuger der Borel-Mengen ist und diese messbar sind ist B^s ein Borelmaß.

(iv) ges: $a,b>0$: $\forall A\subseteq X$: $a B^s(A)\le\mathcal{H}^s(A)\le b B^s(A)$

Wenn $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(x_i)$ eine Überdeckung in B^s_δ ist ist es auch eine in $\mathcal{H}^s_\delta$ wobei $2r_i = \operatorname{diam} B_{r_i}(x_i)$ womit $B^s_\delta(A)\ge\mathcal{H}^s_\delta(A)$ folgt. Sei $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ eine Überdeckung in $\mathcal{H}^s_\delta$, dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{2\operatorname{diam}(C_i)}(x_i)$ wobei $x_i\in C_i$ bel. ($\emptyset$ kann ignoriert werden) eine Überdeckung in B^s_δ

$\sum_{i=1}^{\infty}(2\operatorname{diam}(C_i))^s = 2^s\sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{diam}(C_i)^s \Rightarrow B^s_\delta(A)\le 2^s\mathcal{H}^s_\delta(A) \Rightarrow \frac{1}{2^s}B^s_\delta(A)\le\mathcal{H}^s_\delta(A)\le B^s_\delta(A)$

Übergang zu $\delta\to 0$ liefert für $a=\frac{1}{2^s}$ und $b=1$ die Ungleichung.

ANA Ü7

5) T_n wie in Angabe $\quad T := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$

(i) ges: explizite Formel für Fläche und Umfang von T_n

A_n … Fläche von T_n $\quad U_m$ … Umfang von T_n

$A_0 = 1 \qquad A_n = \frac{8}{9} A_{n-1} \qquad \Rightarrow A_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$ … zweidimensional

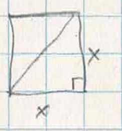
$U_0 = 4 \qquad U_n = U_{n-1} + 8^{n-1} \frac{1}{3^n} 4 \quad \Rightarrow U_n = 4\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{8^{i-1}}{3^i} + 1\right)$ … eindimensional

Hausdorffdimension von T?

$A_n \xrightarrow{n \to \infty} 0 \qquad U_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$ also muss die Hausdorffdimension zwischen 1 und 2 liegen.

(ii) ges: gute obere Schranke für Hausdorffdimension von T

Sei A_x ein Quadrat mit Seitenlänge $x > 0$. $\operatorname{diam}(A_x) = \sqrt{2}\,x$



Da $\forall n \in \mathbb{N}$ $\;8^n$ viele Quadrate mit Seitenlänge $\frac{1}{3^n}$ eine Überdeckung von T_n ist gilt für $\sqrt{2}\frac{1}{3^n}$ (also Durchmesser der Quadrate) $< \delta$, dass $\mathcal{H}^s_\delta(T_n) \leq \omega_s 8^n \left(\frac{\sqrt{2}}{3^n}\right)^s$

$\omega_s 8^n \left(\frac{\sqrt{2}}{3^n}\right)^s = \omega_s 8^n \sqrt{2}^s 3^{-ns} = \omega_s (8 \cdot 3^{-s})^n \sqrt{2}^s$ für $8 \cdot 3^{-s} < 1$ (also $8 < 3^s \Leftrightarrow \log(8) < s \log(3) \Leftrightarrow s > \frac{\log(8)}{\log(3)}$) geht $\mathcal{H}^s_\delta(T_n) \leq \omega_s (8 \cdot 3^{-s})^n \sqrt{2}^s \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Also ist $s \leq \frac{\log(8)}{\log(3)} \approx 1{,}892789$

Tatsächliche Hausdorffdimension ist wirklich auch $\frac{\log(8)}{\log(3)}$ also war das sogar die beste obere Schranke.

ANA Ü7

6) (X,d)... metr. Raum $\quad (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$... Folge von Teilmengen von X $\quad \dim(.)$... Hausdorffdimension

zz: $\dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \dim(A_n)$

$\geq$ $\forall k\in\mathbb{N}: A_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \overset{\text{Satz 4.1.8.}}{\Longrightarrow} \mathcal{H}^s(A_k) \leq \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ für alle $s\in[0,\infty)$

$\forall s > \dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right): \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$

$\forall k\in\mathbb{N}\,\forall s > \dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right): \mathcal{H}^s(A_k) \leq \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$

$\Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}: \dim(A_k) \leq \dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \quad \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \dim(A_n) \leq \dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$

$\leq$ Sei $(C_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ jeweils eine Überdeckung von A_i mit $\forall j: \operatorname{diam}(C_{i,j}) \leq \delta$.

Dann folgt $(C_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}^2}$ ist eine δ-Überdeckung von $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \omega_s \sum_{i,j\in\mathbb{N}^2} \left(\frac{\operatorname{diam}(C_{i,j})}{2}\right)^s = \sum_{i\in\mathbb{N}} \omega_s \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\frac{\operatorname{diam}(C_{i,j})}{2}\right)^s$$

gehen wir zum Minimum der δ-Überdeckungen über erhalten wir

$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s_\delta(A_i)$ und für $\delta \to 0$ folgt

$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_i)$

Für $\forall s > \sup_{i\in\mathbb{N}} \dim(A_i)$: $\forall i\in\mathbb{N}: \mathcal{H}^s(A_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_i) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = 0$

$\Rightarrow \dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \dim(A_n)$

ANA Ü7

7) $(X, d_1), (Y, d_2)$ ... metr. Räume $f: X \to Y$ ... Hölder-stetig mit Exponent $\alpha \in (0,1]$

d.h. $\exists C > 0 \; \forall x, y \in X: d_2(f(x), f(y)) \leq C(d_1(x,y))^\alpha$

$A \subseteq X$ zz: $\alpha \dim_{d_2}(f(A)) \leq \dim_{d_1}(A)$

Für $A \subseteq X$ gilt $\operatorname{diam}_{d_2}(f(A)) = \sup\{d_2(f(x), f(y)) : x, y \in A\} \leq \sup\{C(d_1(x,y))^\alpha : x, y \in A\}$

$= C \sup\{d_1(x,y) : x, y \in A\}^\alpha = C \operatorname{diam}_{d_1}(A)^\alpha$

$\forall s < \dim_{d_1}(A): \mathcal{H}^s(A) = \infty \;\wedge\; \forall s > \dim_{d_1}(A): \mathcal{H}^s(A) = 0$

$$\mathcal{H}^s(f(A)) = \lim_{\delta \to 0} w_s \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}_{d_2}(C_i)}{2}\right)^s : \operatorname{diam}_{d_2}(C_i) \leq \delta, \bigcup_{i=1}^\infty C_i \supseteq f(A)\right\}$$

$$\leq \lim_{\delta \to 0} w_s \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \left(\frac{C \operatorname{diam}_{d_1}(D_i)^\alpha}{2}\right)^s : C\operatorname{diam}_{d_1}(D_i)^\alpha \leq \delta, \bigcup_{i=1}^\infty D_i \supseteq A\right\}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} w_s \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty C^s 2^{s(\alpha-1)} \frac{\operatorname{diam}_{d_1}(D_i)^{\alpha s}}{2^{\alpha s}} : \operatorname{diam}_{d_1}(D_i) \leq \left(\frac{\delta}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \bigcup_{i=1}^\infty D_i \supseteq A\right\}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} (C \cdot 2^{\alpha-1})^s w_s \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}_{d_1}(D_i)}{2}\right)^{\alpha s} : \operatorname{diam}_{d_1}(D_i) \leq \delta, \bigcup_{i=1}^\infty D_i \supseteq A\right\}$$

$$= (C \cdot 2^{\alpha-1})^s \frac{w_s}{w_{\alpha s}} \lim_{\delta \to 0} w_{\alpha s} \inf\{\dots\}$$

$$= (C \cdot 2^{\alpha-1})^s \frac{w_s}{w_{\alpha s}} \mathcal{H}^{\alpha s}(A)$$

$\Rightarrow \forall s > \frac{\dim_{d_1}(A)}{\alpha} \Rightarrow \mathcal{H}^{\alpha s}(A) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(f(A)) = 0$ nach oben

$\Rightarrow \dim_{d_2}(f(A)) \leq \frac{\dim_{d_1}(A)}{\alpha}$ oder auch $\alpha \dim_{d_2}(f(A)) \leq \dim_{d_1}(A)$

was zu zeigen war. $\square$

ANA Ü7

8) $I_n, n\in\mathbb{N}$ ... offene reelle Intervalle $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ liegt dicht $(0,1)$ $\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n) < 1$

$g_n: [0,1] \to [0,1]$ mit $g_n(x) = 0 \ \forall x\in[0,1]\setminus I_n$, $0 < g_n(x) \leq \frac{1}{2^n} \ \forall x\in I_n$

$g := \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ $\quad T(x) := \int_0^x g(y)\,dy$, $x\in[0,1]$ $\quad g_n$ .. stetig

g ist als glm. Grenzwert stetiger Funktionen stetig, T ist stetig diff bar mit $T' = g$

(i) $a := T(1)$ zz: $a > 0$ $\wedge$ $T: [0,1] \to [0,a]$ ist Bijektion

g ... stetig und $0 < g_n(x) \ \forall x\in I_n \Rightarrow \exists x_0 \in I_n \ \exists r > 0: (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq I_n$ und

$\forall y\in(x_0 - r, x_0 + r): g_n(y) \geq \frac{1}{2} g_n(x_0)$

$a = T(1) = \int_0^1 g(y)\,dy \geq \int_{x_0-r}^{x_0+r} g_n(y)\,dy \geq \int_{x_0-r}^{x_0+r} \frac{1}{2} g_n(x_0)\,dy = \frac{1}{2} g_n(x_0)\, 2r > 0$

Wir zeigen T ist streng monoton wachsend:

Sei $x < y$ in $[0,1]$ bel. $\Rightarrow$

$\Rightarrow T(y) - T(x) = \int_0^y g(t)\,dt - \int_0^x g(t)\,dt = \int_x^y g(t)\,dt$

Da I dicht in $(0,1)$ liegt gibt es ein $n\in\mathbb{N}$: $I_n \cap [x,y] \neq \emptyset$.

Da I_n offen ist gibt es ein $A \subseteq I_n$ mit $\lambda(A) > 0$ und $\forall t\in A: g(t) \geq g_n(t) \geq \varepsilon > 0$

$\Rightarrow T(y) - T(x) = \int_x^y g(t)\,dt \geq \int_x^y \varepsilon\,dt = |y - x|\,\varepsilon > 0$

$[0,1]$ ist ein Intervall, T ist stetig, $T(0) = 0$, $T(1) = a$ $\Rightarrow T([0,1]) = [0,a]$

und somit ist T bijektiv (surjektiv, da $T([0,1]) = [0,a]$ und injektiv da monoton $\nearrow$).

(ii) ges: C_T ... Menge der kritischen Punkte

$C_T = \{x\in[0,1] : \text{rang}(dT)(x) < 1\} = \{x\in[0,1] : T'(x) = 0\} = \{x\in[0,1] : g(x) = 0\}$

$\forall n\in\mathbb{N}: \{x\in[0,1] : g_n(x) = 0\} = [0,1]\setminus I_n$

$\forall x\in[0,1]\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$: $\forall n\in\mathbb{N}: x\notin I_n \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: g_n(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$

$\forall x\in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$: $\exists n\in\mathbb{N}: x\in I_n \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}: g_n(x) \neq 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$

$\Rightarrow C_T = [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$