Zusammenfassung Heft 3 ANA

Ida Hönigmann

12. Januar 2021

1 Metrische Räume

Definition 1.1. *$< M, d >$ ... metrischer Raum, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, $x \in M$*
$U_\epsilon(x) := \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\}$ heißt die offene ϵ-Kugel um x.
$U_\epsilon(x) := \{y \in M : d(x, y) \leq \epsilon\}$ heißt die abgeschlossene ϵ-Kugel um x.

Bemerkung. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *... Folge in M, $x \in M$*
$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}\{x_n : n \geq N\} \subseteq U_\epsilon(x)$

Definition 1.2. *$< M, d >$... metrischer Raum*
$O(\subseteq M)$ heißt offen, falls $\forall x \in O \exists\epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \subseteq O$

Lemma 1.1. *$< M, d >$... metrischer Raum*

- *$n \in \mathbb{N}$, $O_1, ..., O_n \subseteq M$ ... offen $\implies \bigcap_{j=1}^n O_j$ ... offen*
- *O_i, $i \in I$ ... offene Teilmengen von M $\implies \bigcup_{i\in I} O_i$ ... offen*

Definition 1.3. *$< M, d >$ ... metrischer Raum, $E \subseteq M$*

- *$x \in M$ heißt Häufungspunkt von E, falls $\forall\epsilon > 0 : (E \setminus \{x\}) \cap U_\epsilon(x) \neq \emptyset$*
- *$x \in E$ heißt isolierter Punkt von E, falls $\exists\epsilon > 0 : E \cap U_\epsilon(x) = \{x\}$*
- *E heißt abgeschlossen, falls alle Häufungspunkte von E in E enthalten sind.*

Bemerkung. *$E \subseteq M$, $x \in M$, dann trifft genau eine der folgenden Aussagen zu:*

- *$x \in E$ und ist isolierter Punkt*
- *$x \in E$ und ist Häufungspunkt*
- *$x \notin E$ und x ist Häufungspunkt von E*
- *$x \notin E$ und ist kein Häufungspunkt von E*

Definition 1.4. *$E \subseteq M$*
$c(E)$ heißt Abschluss von E, wenn $c(E) = \{x \in M : (x \in E) \vee (x \notin E \wedge x$ ist Häufungspunkt von $E)\}$.

Lemma 1.2. *Eigenschaften von $c(E)$:*

- $E \subseteq c(E)$
- $c(E) = E \cup HP(E)$
- *$E = c(E) \Leftrightarrow E$ ist abgeschlossen*
- $E \subseteq F \implies c(E) \subseteq c(F)$
- $x \in c(E) \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists y \in E : d(x, y) < \epsilon \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 : E \cap U_\epsilon(x) \neq \emptyset$
- $c(c(E)) = c(E)$
- *$x \in HP(E) \forall\epsilon > 0 : (e \setminus \{x\}) \cap U_\epsilon(x)$ hat ∞ viele Punkte.*

Bemerkung. $E \subseteq M$, $|E| < \infty \implies HP(E) = \emptyset$

Lemma 1.3. *$E \subseteq M$, $< M, d >$... metrischer Raum, $x \in M$*

- *$x \in HP(E) \Leftrightarrow \exists$ Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $E \setminus \{x\}$ mit $\lim_{n\to\infty} = x$*
- *$x \in c(E) \Leftrightarrow \exists$ Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus E mit $\lim_{n\to\infty} = x$*

Lemma 1.4. *$< M, d >$ ... metrischer Raum, $A \subseteq M$ Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *A ist abgeschlossen*
- *Falls (x_n) .. Folge aus A mit Grenzwert in M, so liegt der Grenzwert in A.*
- *A^C ... Komplement von A ist offen*

Lemma 1.5. *$< M, d >$ ... metrischer Raum*

- *$A_1, ...A_n$ ... abgeschlossene Teilmengen von $M \implies \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ abgeschlossen*
- *$A_i, i \in I$ ... abgeschlossene Teilmengen von $M \implies \bigcap_{i \in I}$ abgeschlossen*

Definition 1.5. *$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \implies x$ ist einziger Häufungspunkt von (x_n).*
$(x_{j(n)})$ Teilfolge von $(x_n) \implies HP((x_j)) \subseteq HP((x_n))$

Lemma 1.6. *(x_n) ... Folge in $\mathbb{R}$, beschränkt*

- *$\lim\limits_{n\to\infty} inf(x_n)$ ist kleinster Häufungspunkt von (x_n).*
- *$\lim\limits_{n\to\infty} sup(x_n)$ ist größter Häufungspunkt von (x_n).*
- *(x_n) hat mindestens einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$.*
- *(x_n) ist konvergent $\Leftrightarrow$ (x_n) hat genau einen Häufungspunkt.*

Satz 1.7. *Satz von Bolzano-Weierstraß:*
(x_n) ... beschränkte Folge in $\mathbb{R}^p$
$\implies (x_n)$ hat einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}^p$

Definition 1.6. *$K \subset M$ heißt kompakt, falls $\forall (x_n)$ in $K : (x_n)$ hat einen Häufungspunkt in K.*

Lemma 1.8. *$K \subseteq M$ ... kompakt. Dann gelten folgende Aussagen:*

- *K ist abgeschlossen*
- *$F \subseteq M$ ist abgeschlossen $\wedge F \subseteq K \implies F$ ist kompakt.*
- *K ist beschränkt.*

Bemerkung. *$K \subset \mathbb{R}^p$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ K ist abgeschlossen und beschränkt.*

Lemma 1.9. *M... metrischer Raum, (x_n) ... Folge in M, $x \in M$*

- *$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall$ Teilfolge $(x_j) : x$ ist Häufungspunkt von x_j*
- *$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$, K ... kompakt. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow x$ ist einziger Häufungspunkt von (x_n).*

1.1 Gerichtete Mengen und Netze

Definition 1.7. *$(I, \leq)$ heißt gerichtete Menge, falls $I \neq \emptyset$ und falls folgende Eigenschaften gelten:*

- *$\leq$ ist reflexiv*
- *$\leq$ ist transitiv*
- *$\leq$ ist gerichtet ....*