

LINAG Ü10

3.6.9 $f_1: \mathbb{R}^{4 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 1}$ $f_2: \mathbb{R}^{4 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 1}$ $V = U_1 \oplus U_2$

$\forall x_1 \in U_1: f_1(x_1) = x_1 \wedge f_2(x_1) = -x_1$ $\forall x_2 \in U_2: f_1(x_2) = -x_2 \wedge f_2(x_2) = x_2$

a) zz: $f_2 = -f_1$ ges: $\langle E^*, f_1(E) \rangle$ und $\langle E^*, f_2(E) \rangle$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} -III & -IV \end{smallmatrix}}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-I) & -II \end{smallmatrix}}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} II & IV & I & III \end{smallmatrix}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \langle E^*, f_1(E) \rangle$
---	--	---	--	--	---	--

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} -III & -IV \end{smallmatrix}}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-I) & -II \end{smallmatrix}}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} II & IV & I & III \end{smallmatrix}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \langle E^*, f_2(E) \rangle$
--	--	---	--	---	---	---

$\langle E^*, f_1(E) \rangle + \langle E^*, f_2(E) \rangle = 0\text{-Matrix} \Rightarrow f_2 = -f_1$

b) $p_1 = \frac{1}{2}(f_1 + \text{id})$ ges: $\langle E^*, p_1(E) \rangle$ zz: p_1 ist Projektion auf U_1 in Richtung U_2

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ durch Ablesen aus $\langle E^*, f_1(E) \rangle$ und ein wenig Kopfrechnen ergibt sich:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \langle E^*, p_1(E) \rangle$

$p_1(v_1) = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $p_1(v_2) = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2$

$p_1(v_3) = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $p_1(v_4) = p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_1$ ist die angegebene Projektion