LINAG 1.4.5 A: Menge $M \subseteq A$

a) $\chi_M : A \to \{0,1\}$:

$$x \to \begin{cases} 1 & \text{für } x \in M \\ 0 & \text{für } x \notin M \end{cases}$$

$$\chi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$$

$$M \mapsto \chi_M$$

Bew. Sei indirekt angenommen $\exists M_1 \subset A$ und $\exists M_2 \subset A$ und $M_1 \neq M_2$ mit $\chi_{M_1} = \chi_{M_2}$. O.B.d.A. $\exists x_0 \in M_1 \setminus M_2$.

Laut Def. $\chi_{M_1}(x_0) = 1$ und $\chi_{M_2}(x_0) = 0$ also $\chi_{M_1} \neq \chi_{M_2}$

$\to$ Widerspruch. $\square$

b) $M \subset A$ $N \subset A$

$f_1 : A \longrightarrow \{0,1\}$ $\quad$ $f_2 : A \longrightarrow \{0,1\}$

$x \longmapsto \chi_M(x) \cdot \chi_N(x)$ $\quad$ $x \longmapsto \chi_M(x) + \chi_N(x) - \chi_M(x) \cdot \chi_N(x)$

Bew. $\exists x_0 \in A$ Fall 1: $x_0 \notin M \Rightarrow \chi_M(x_0) = 0$, daher ist auch $f_1(x_0) = 0$

Fall 2: $x_0 \notin N \Rightarrow \chi_N(x_0) = 0$, daher ist auch $f_1(x_0) = 0$

Fall 3: $x_0 \in M \wedge x_0 \in N \Rightarrow f_1(x_0) = \chi_M(x_0) \cdot \chi_N(x_0) = 1 \cdot 1 = 1$

Daher gilt für jedes $x \in A$ $\exists!\, y \in \{0,1\} : f_1(x) = y$. $\square$ $(M \cap N)$

Bew. $\exists x_0 \in A$ Fall 1: $x_0 \notin M \wedge x_0 \notin N \Rightarrow \chi_M(x_0) = 0 \wedge \chi_N(x_0) = 0 \Rightarrow f_2(x_0) = 0+0-0 \cdot 0 = 0$

o.B.d.A. Fall 2: $x_0 \in M \wedge x_0 \notin N \Rightarrow \chi_M(x_0) = 1 \wedge \chi_N(x_0) = 0 \Rightarrow f_2(x_0) = 1+0-1 \cdot 0 = 1$

Fall 3: $x_0 \in M \wedge x_0 \in N \Rightarrow \chi_M(x_0) = 1 \wedge \chi_N(x_0) = 1 \Rightarrow f_2(x_0) = 1+1-1 \cdot 1 = 1$

Daher gilt für jedes $x \in A$ $\exists!\, y \in \{0,1\} : f_2(x) = y$ $\square$ $(M \cup N)$