1.9.5

G ... Gruppe

a) zz $(U_i)_{i\in I} \neq \emptyset$ Familie von UG von G $\overset{?}{\Rightarrow} \bigcap_{i\in I} U_i$ Untergruppe von G

$\forall i \in I : e \in U_i \Rightarrow e \in \bigcap_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i \neq \emptyset$

$\forall i \in I : \forall x,y \in U_i : xy^{-1} \in U_i \Rightarrow \forall x,y \in \bigcap_{i\in I} U_i : xy^{-1} \in \bigcap_{i\in I} U_i$

$\square$

b) zz U_1, U_2 Untergruppen von G $\overset{?}{\Rightarrow} (U_1 \cup U_2$ UG $\Leftrightarrow U_1 \subset U_2 \vee U_2 \subset U_1)$

$\Leftarrow$) o.B.d.A. $U_1 \subset U_2 \Rightarrow \forall x \in U_1 : x \in U_2$. $U_1 \cup U_2 \Rightarrow U_2$

Da U_2 eine Untergruppe von G ist, ist also auch $U_1 \cup U_2$ UG von G.

$\Rightarrow$) Sei indirekt angenommen, dass $a \in U_1 \setminus U_2$ und $b \in U_2 \setminus U_1$.

$a, b \in U_1 \cup U_2 \Rightarrow (ab^{-1} \in U_1 \cup U_2)$ %

1.9.5 b) ... $(a \in U_1 \setminus U_2 \quad b \in U_2 \setminus U_1)$

$\Rightarrow (ab^{-1} \in U_1 \lor ab^{-1} \in U_2)$

Fallunterscheidung: 1. Fall $ab^{-1} \in U_2$

Da laut Def. $b \in U_2$ ist muss auch $b^{-1} \in U_2$ sein.

$ab^{-1} \in U_2 \Rightarrow a b^{-1} (b^{-1})^{-1} \in U_2 \Rightarrow a b^{-1} b \in U_2 \Rightarrow a \cdot 1 \in U_2 \Rightarrow a \in U_2$ ↯

(2. Untergruppenkriterium)

2. Fall $ab^{-1} \in U_1$

Da $a \in U_1$ ist auch $a^{-1} \in U_1$.

$ab^{-1} \in U_1 \Rightarrow b a^{-1} \in U_1 \Rightarrow b a^{-1} a \in U_1 \Rightarrow b \cdot 1 \in U_1 \Rightarrow b \in U_1$ ↯

(L-Inverses $\in G$) (2. UG Kriterium)

Also war die Annahme $\exists a \in U_1 \setminus U_2 \land \exists b \in U_2 \setminus U_1$ falsch

$\Rightarrow U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$. $\square$

$x \cdot ab^{-1} = 1$

$x = ba^{-1}$