1.8.4 $(M_1, \sqsubseteq_1)$ $(M_2, \sqsubseteq_2)$ $\sqsubseteq \subset M_1 \times M_2$ mit $(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2)$

für $(x_1 \neq y_1$ und $x_1 \sqsubseteq_1 y_1)$ oder $(x_1 = y_1$ und $x_2 \sqsubseteq_2 y_2)$

a) zz. $\sqsubseteq$ ist Halbordnung auf $M_1 \times M_2$

Bew: (ref) $(x_1, x_2) \sqsubseteq (x_1, x_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_1 \wedge x_2 \sqsubseteq_2 x_2)$

Weil $\sqsubseteq_2$ reflexiv ist muss also auch $\sqsubseteq$ reflexiv sein.

(tra) $(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \sqsubseteq (z_1, z_2)$

für $x_1 \neq y_1 \wedge y_1 \neq z_1$: $(x_1 \neq y_1 \wedge x_1 \sqsubseteq_1 y_1) \wedge (y_1 \neq z_1 \wedge y_1 \sqsubseteq_1 z_1)$

$\Leftrightarrow x_1 \sqsubseteq_1 y_1 \wedge y_1 \sqsubseteq_1 z_1$

für $x_1 = y_1 \vee y_1 = z_1$: für den Teil wo $a_1 = b_1$: $(a_1 = b_1 \wedge a_2 \sqsubseteq_2 b_2)$

$\Leftrightarrow a_2 \sqsubseteq_2 b_2$

Da $\sqsubseteq_1$ und $\sqsubseteq_2$ transitiv sind ist also auch $\sqsubseteq$ transitiv.

(antisym) zz: $(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \sqsubseteq (x_1, x_2) \overset{?}{\Rightarrow} (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

1.8.4 ... Sei indirekt angenommen, dass $x_1 \neq y_1$

$(x_1 \neq y_1 \wedge x_1 \sqsubseteq_1 y_1) \wedge (y_1 \neq x_1 \wedge y_1 \sqsubseteq_1 x_1)$

$\Leftrightarrow x_1 \sqsubseteq_1 y_1 \wedge y_1 \sqsubseteq_1 x_1 \Rightarrow x_1 = y_1$ $\lightning$

Sei indirekt angenommen, dass $x_1 = y_1 \wedge x_2 \neq y_2$

$(x_1 = y_1 \wedge x_2 \sqsubseteq_2 y_2) \wedge (y_1 = x_1 \wedge y_2 \sqsubseteq_2 x_2)$

$\Leftrightarrow x_2 \sqsubseteq_2 y_2 \wedge y_2 \sqsubseteq_2 x_2 \Rightarrow x_2 = y_2$ $\lightning$

Daher muss gelten $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$ also $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

$\square$

b) $(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2) \vee (y_1, y_2) \sqsubseteq (x_1, x_2)$

Fallunterscheidung: 1. Fall $x_1 = y_1$

... $\Leftrightarrow (x_1 = y_1 \wedge x_2 \sqsubseteq_2 y_2) \vee (y_1 = x_1 \wedge y_2 \sqsubseteq_2 x_2) \Leftrightarrow x_2 \sqsubseteq_2 y_2 \vee y_2 \sqsubseteq_2 x_2$

2. Fall $x_1 \neq y_2$

... $\Leftrightarrow (x_1 \neq y_1 \wedge x_1 \sqsubseteq_1 y_1) \vee (y_1 \neq x_1 \wedge y_1 \sqsubseteq_1 x_1) \Leftrightarrow x_1 \sqsubseteq_1 y_1 \vee y_1 \sqsubseteq_1 x_1$

Da $\sqsubseteq_1$ und $\sqsubseteq_2$ lineare Ordnungen sind, ist also auch $\sqsubseteq$ eine lineare Folge.

$\square$