PDGL Ü4

1) $L(\phi) = \mathrm{div}\,(A(x,y)\nabla\phi)$, wobei $A(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) & g(x) \\ f(y) & b(x,y) \end{pmatrix}$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$a(x,y), b(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

Def $L^*(\phi) := \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (c_\alpha \phi)$ wenn $L(\phi) = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha D^\alpha \phi$ mit $c_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist.

$$L(\phi) = \mathrm{div}\left(\begin{pmatrix} a(x,y) & g(x) \\ f(y) & b(x,y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{div}\begin{pmatrix} a(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial x} + g(x)\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ f(y)\frac{\partial\phi}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + a\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} + g\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x} + f\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + b\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right)\frac{\partial\phi}{\partial y} + (a)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + (b)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + (g+f)\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

$$L^*(\phi) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\phi\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right)\phi\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a\phi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(b\phi) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}((g+f)\phi)$$

$$= \left(-\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\phi - \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \left(-\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\phi - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\phi - \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) +$$

$$\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\phi + 2\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + a\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\phi + 2\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + b\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} + g\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x} + f\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + a\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + b\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + g\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + f\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \mathrm{div}(\nabla\phi^T A)$$

$L(\phi) = \partial_{tt}\phi - c^2\Delta\phi$ für $c \in \mathbb{R}$ konstant $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$

$$L(\phi) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - c^2\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k^2}$$

$$L^*(\phi) = (-1)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \sum_{k=1}^n (-1)^2\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(c^2\phi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n c^2\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\phi = L(\phi)$$

$\square$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\phi + a\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + a\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}((g+f)\phi) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\phi + g\frac{\partial\phi}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{=0}\phi + f\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \underbrace{\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}}_{=0}\phi + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}}_{=0}\frac{\partial\phi}{\partial x} + g\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x} + f\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} + g\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x} + f\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

(ii) nochmals $\langle L(\phi), \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi\psi - c^2\Delta\phi\psi \, d\lambda^{n+1} = \langle \phi, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi\rangle - c^2\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \partial_{x_i}^2\phi\psi \, d\lambda^{n+1}$

$$= \langle\phi, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi\rangle - c^2\langle\phi, \Delta\psi\rangle = \langle\phi, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - c^2\Delta\psi\rangle = \langle\phi, L\psi\rangle$$

PDGL Ü4

2) $U : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x,t)\mapsto \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}, & x\in\mathbb{R}, t>0\\ 0 & \text{, sonst}\end{cases}$ $\quad \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$

$Lu := u_t - \Delta u, \quad u\in D(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

zz: U ist Fundamentallsg von Lu

$\int_{\mathbb{R}} U(x,t)\,dx = 1$ für $t>0$ und $\int_{\mathbb{R}} U(x,t)\,dx \overset{..}{=} 0$ für $t<0$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} U(x,t)\,dx = H(t)$

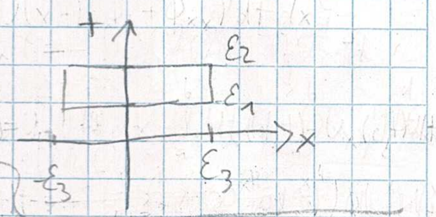
$U_t(x,t) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}(x^2-2t)$

$U_{xx}(x,t) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}(x^2-2t) = U_t(x,t)$

$\Rightarrow LU = U_t - U_{xx} = 0 \quad \forall t>0$ und $\forall t<0$

$x\neq 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} LU = 0 = \lim_{t\to 0^-} LU \quad \Rightarrow LU = 0 \quad \forall (t,x)\neq(0,0)$

$\int_{-\varepsilon_3}^{\varepsilon_3}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} U_t - U_{xx}\,dt\,dx = -\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\int_{-\varepsilon_3}^{\varepsilon_3} U_{xx}\,dx\,dt + \int_{-\varepsilon_3}^{\varepsilon_3}$



$= \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} U_x(\varepsilon_3,t) - U_x(-\varepsilon_3,t)\,dt +$

$= 2\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} U_x(\varepsilon_3,t)\,dt$

$\phi\in D(\mathbb{R}^2)$

$\langle LU,\phi\rangle = \langle U, -\partial_t\phi - \partial_{xx}\phi\rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} U(\partial_t\phi + \partial_{xx}\phi)\,d\binom{t}{x}$

$= -\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} U(\partial_t\phi + \partial_{xx}\phi)\,dx\,dt = -\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} U\partial_t\phi\,dx\,dt - \int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} U\partial_{xx}\phi\,dx\,dt$

$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\phi U\Big|_{\varepsilon}^{+\infty}}_{=\phi(x,\varepsilon)U(x,\varepsilon)} - \int_{\varepsilon}^{\infty}\phi\,\partial_t U\,dt\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\underbrace{U\partial_{xx}\phi\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty}\partial_{xx}U\,\phi\,dx\,dt =$

$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,\varepsilon)u(x,\varepsilon)\,dx + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\varepsilon}^{\infty}\phi L(u)\,dt\,dx}_{=0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,\varepsilon)U(x,\varepsilon)\,dx = \Delta$

$g\in C(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$

$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}} U(x-y,t)\,g(y)\,dy$ löst $u_t - \Delta u = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}, t>0$ und $\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = g(x_0) \;\forall x_0\in\mathbb{R}$

im klassischen Sinne.

Wie oft ist u diffbar? $u(x,t) = (\underbrace{U(.,t)}_{\in C^\infty(\mathbb{R})} * g(.))(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ bzgl. x

beschränkt: $|u(x,t)| = \left|\int_{\mathbb{R}} U(x-y,t)g(y)\,dy\right| \leq \|g\|_{L^\infty}\underbrace{\left|\int_{\mathbb{R}} U(x-y,t)\,dy\right|}_{=1 \text{ nach oben}} = \|g\|_{L^\infty} < \infty$

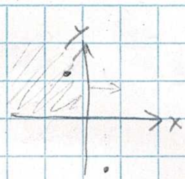
$\Delta = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty \phi(x,\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty \phi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon}\,e^{-\frac{y^2}{4}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty \phi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)e^{-\frac{y^2}{4}}\,dy$

$x = \sqrt{\varepsilon}y \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

$y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$

$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_0^\infty \phi(0,0)e^{-\frac{y^2}{4}}\,dy = \phi(0,0)$

PDGL Ü4

3) $\Omega = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0\}$  ges: $G(x,y,\xi,\eta)$ für Δ auf Ω

Fundamentallsg in $\mathbb{R}^2$ $\quad U(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ (aus Skript) wobei $(x,y) \neq (0,0)$

Wir fügen für einen Pol $(\xi,\eta) \in \Omega$ die Pole $(-\xi,\eta)$, $(\xi,-\eta)$ und $(-\xi,-\eta)$ hinzu

$$G(x,y,\xi,\eta) = U\left(\binom{x}{y} - \binom{\xi}{\eta}\right) - U\left(\binom{x}{y} - \binom{-\xi}{\eta}\right) - U\left(\binom{x}{y} - \binom{\xi}{-\eta}\right) + U\left(\binom{x}{y} - \binom{-\xi}{-\eta}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\ln((x-\xi)^2+(y-\eta)^2) - \ln((x+\xi)^2+(y-\eta)^2) - \ln((x-\xi)^2+(y+\eta)^2) + \ln((x+\xi)^2+(y+\eta)^2)\right)$$

Nur der erste Pol liegt in Ω, daher ist die Funktion Fundamentallsg auf Ω.

Als nächstes zeigen wir $(\xi,\eta) \in \partial\Omega \Rightarrow G(x,y,\xi,\eta) = 0$ (hom. Randbedingung)

1. Fall $(\xi,\eta) = (0,\eta)$ mit $\eta > 0$:

$$G(x,y,0,\eta) = \frac{1}{4\pi}\left(\ln(x^2+(y-\eta)^2) - \ln(x^2+(y-\eta)^2) - \ln(x^2+(y+\eta)^2) + \ln(x^2+(y+\eta)^2)\right) = 0$$

2. Fall $(\xi,\eta) = (\xi,\eta)$ mit $\xi < 0$:

$$G(x,y,\xi,0) = \frac{1}{4\pi}\left(\ln((x-\xi)^2+y^2) - \ln((x+\xi)^2+y^2) - \ln((x-\xi)^2+y^2) + \ln((x+\xi)^2+y^2)\right) = 0$$

Repräsentationsformel $\quad \Delta u = f$ in Ω $\quad u = g$ auf $\partial\Omega$

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)\, ds(y) + \int_{\Omega} G(x,y) f(y)\, dy$$

$\Delta u = 0$ in Ω, $\quad u(x,0) = f(x)$ für $x < 0$, $\quad u(0,y) = g(y)$ für $y > 0$

$$\nu = \binom{1}{0} \text{ auf } \underbrace{\left\{\binom{0}{y} : y \in \mathbb{R}^+\right\}}_{\partial\Omega_1} \text{ und } \nu = \binom{0}{-1} \text{ auf } \underbrace{\left\{\binom{x}{0} : x \in \mathbb{R}^-\right\}}_{\partial\Omega_2}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int_{\partial\Omega_1} g(\eta) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x,y,0,\eta)\, d\eta + \int_{\partial\Omega_2} -f(\xi) \frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y,\xi,0)\, d\xi + \int_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta) \cdot 0 \, d\binom{\xi}{\eta}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} g(\eta) \frac{x}{\pi}\left(\frac{1}{(y+\eta)^2+x^2} - \frac{1}{(y-\eta)^2+x^2}\right) d\eta - \int_{\mathbb{R}^-} f(\xi) \frac{y}{\pi}\left(\frac{1}{(x+\xi)^2+y^2} - \frac{1}{(x-\xi)^2+y^2}\right) d\xi$$

Eindeutig? Nein, da $v(x,y) := u(x,y) + x \cdot y$ auch

$\Delta v = \Delta u + \Delta(x \cdot y) = 0 + 0 + 0 = 0$ und $v(x,0) = u(x,0) + 0 = f(x)$, $v(0,y) = u(0,y) + 0 = g(y)$

$\Rightarrow$ v erfüllt das Dirichlet-Problem auch.

Analog wie im Beweis von 4.5. ist $(\xi,\eta) \mapsto G(x,y,\xi,\eta)$ harmonisch für $(x,y) \neq (\xi,\eta)$ $\quad G$ ... symmetrisch

$\Rightarrow (x,y) \mapsto G(x,y,\xi,\eta)$ ... harmonisch für $(x,y) \neq (\xi,\eta)$ $\Rightarrow -\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y,\xi,\eta)$ mit $\nu = \xi$ und $\xi = 0$ bzw. $\nu = \eta$ und $\eta = 0$ ist

harmonisch in Ω $\quad \Rightarrow \Delta u(x,y) = \int_{\partial\Omega_1} g(\eta) \Delta_{(x,y)} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x,y,0,\eta)\, d\eta + \int_{\partial\Omega_1} -f(\xi) \Delta_{(x,y)} \frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y,\xi,0)\, d\xi = 0$

$\lim_{x,y \to x_0,0} |u(x,y) - f(x_0)| = \ldots = 0 \quad \lim_{x,y \to 0,y_0} |u(x,y) - g(y_0)| = \ldots = 0$

PDGL Ü4

4) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ... beschränktes Gebiet, $\partial\Omega \in C^1$

$\Delta u = u^3$ in Ω; $u = \tanh(\|x\|)$ auf $\partial\Omega$ zz: besitzt höchstens eine klassische Lsg.

Seien u_1, u_2 klassische Lsgen. Definiere $v := u_1 - u_2$

$v \in C^2(\Omega)$, da $u_1, u_2 \in C^2(\Omega)$ und $v \in C^0(\overline{\Omega})$, da $u_1, u_2 \in C^0(\overline{\Omega})$. $\Rightarrow v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

$\Delta v = \Delta(u_1 - u_2) = \Delta u_1 - \Delta u_2 = u_1^3 - u_2^3 \in C^2(\Omega)$

$\Omega_+ := \{x \in \Omega : u_1^3 - u_2^3 > 0\}$ $\Omega_0 := \{x \in \Omega : u_1^3 - u_2^3 = 0\}$ $\Omega_- := \{x \in \Omega : u_1^3 - u_2^3 < 0\}$

$\forall x \in \Omega_0 : u_1^3(x) - u_2^3(x) = 0 \Rightarrow u_1(x) = u_2(x)$

Ω_+ und Ω_- müssen kein Gebiet (nicht zusammenhängend) sein, allerdings gilt nach Bem Theorem 4.10. (ii) auch für nur offene beschränkte Mengen (wie es Ω_+ und Ω_- sind).

$$\Rightarrow \sup_{x \in \Omega_+} v(x) = \sup_{x \in \partial\Omega_+} v(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_0 \in \Omega_0 \\ \tanh(\|x_0\|) - \tanh(\|x_0\|), & \text{falls } x_0 \in \partial\Omega \end{cases} = 0 \quad \Rightarrow v(x) \leq 0 \text{ auf } \Omega_+$$

$$\Rightarrow \inf_{x \in \Omega_-} v(x) = \inf_{x \in \partial\Omega_-} v(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_0 \in \Omega_0 \\ \tanh(\|x_0\|) - \tanh(\|x_0\|), & \text{falls } x_0 \in \partial\Omega \end{cases} = 0 \quad \Rightarrow v(x) \geq 0 \text{ auf } \Omega_-$$

Angenommen $0 > v(x) = u_1(x) - u_2(x)$ für ein $x \in \Omega_+$ $\Rightarrow u_1^3(x) - u_2^3(x) < 0$ ↯ zu $x \in \Omega_+$

Analog für $0 < v(x)$ für $x \in \Omega_-$ $\Rightarrow v \equiv 0$ auf $\Omega_+ \cup \Omega_0 \cup \Omega_- = \Omega$ $\square$

Maxprinzip $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ... beschr. Gebiet $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ $\Delta u \geq 0$ bzw. $\Delta u \leq 0$ in Ω

$\Rightarrow$ (i) $\exists x_0 \in \Omega : u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ bzw. $\exists x_0 \in \Omega : u(x_0) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$

(ii) $\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)$ bzw. $\inf_{x \in \Omega} u(x) = \inf_{x \in \partial\Omega} u(x)$

Gebiet ... offen, nichtleer, zusammenhängend, Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Alternativ: $v = (u_1 - u_2)^2 \geq 0$ $\Delta v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left((u_1 - u_2)^2\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(2(u_1 - u_2)\frac{\partial}{\partial x_i}(u_1 - u_2)\right) =$

$= 2\sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(u_1 - u_2)\right)^2}_{\geq 0} + (u_1 - u_2)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u_1 - u_2) \geq 2(u_1 - u_2)\underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u_1 - u_2)}_{= \Delta(u_1 - u_2)} = 2(u_1 - u_2)(\Delta u_1 - \Delta u_2) =$

$= 2\underbrace{(u_1 - u_2)}_{\text{sgn}}\underbrace{(u_1^3 - u_2^3)}_{\text{sgn}} \geq 0$ $\Rightarrow \sup_{x \in \Omega} v(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} v(x) = 0$ $\Rightarrow v \leq 0$ $\Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow u_1 = u_2$ auf Ω.

PDGL Ü4

5) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ... beschr. Gebiet, $\partial\Omega \in C^1$

zz: $\exists C>0\ \forall u \in H^1(\Omega): \|u-\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$

wobei $\bar{u} := \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega u(y)\,dy$ "Mittelwert"

Zuerst zeigen wir den Hinweis zz: $\exists C>0\ \forall v \in H^1(\Omega): \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C(|\bar{v}| + \|\nabla v\|_{L^2})$

Indirekt angenommen $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists v_n \in H^1(\Omega): \|v_n\|_{H^1(\Omega)} > n(|\bar{v}_n| + \|\nabla v_n\|_{L^2})$

Mit Rellich-Kondrachov für $k=1, m=0$ folgt $H^1(\Omega) \hookrightarrow H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ ist kompakt

$\{w_n := \frac{1}{\|v_n\|_{H^1}} v_n\}$ ist beschränkt in $H^1(\Omega)$ $(\|w_n\|_{H^1} = 1)$

$\Rightarrow \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist präkompakt in $H^0 = L^2$ also gibt es eine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist.

o.B.d.A. w_n ist Cauchy-Folge und somit konvergiert gegen ein $w \in L^2$.

$\Rightarrow \frac{1}{n} > |\bar{w}_n| + \|\nabla w_n\|_{L^2} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \to 0$ folgt

$\Rightarrow |\bar{w}| = 0 = \|\nabla w\|_{L^2} \quad \Rightarrow w \in H^1(\Omega)$

Mit der Aussage (o.B.) aus dem Hinweis folgt $w \equiv c \in \mathbb{R}$

$\bar{w} = \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega w(y)\,dy = c \quad \Rightarrow 0 = |\bar{w}| = |c| \quad \Rightarrow w \equiv 0$

$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \|w_n\|_{H^1} = \|w\| = 0$ ↯

$\|u-\bar{u}\|_{L^2} \leq \|u-\bar{u}\|_{H^1} \leq C(|\underbrace{\overline{u-\bar{u}}}_{=0}| + \|\nabla(u-\bar{u})\|_{L^2})$

$\overline{u-\bar{u}} = \overline{u - \frac{1}{\lambda(\Omega)}\int_\Omega u(y)\,dy} = \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega \left(u(z) - \frac{1}{\lambda(\Omega)}\int_\Omega u(y)\,dy\right) dz = \frac{1}{\lambda(\Omega)}\int_\Omega u(z)\,dz - \frac{1}{\lambda(\Omega)^2}\lambda(\Omega)\int_\Omega u(y)\,dy$

$= \frac{1}{\lambda(\Omega)}\int_\Omega u(y)\,dy - \frac{1}{\lambda(\Omega)}\int_\Omega u(y)\,dy = 0$

$\nabla(u-\bar{u}) = \nabla u - \nabla\bar{u} = \nabla u$

$\Rightarrow \|u-\bar{u}\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}$

$\square$

Rellich-Kondrachov $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ... offen, beschränkt $\partial\Omega \in C^1$ $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0, k>m$

$\Rightarrow H^k(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega)$ ist kompakt, d.h. beschränkte Mengen in $H^k(\Omega)$ sind präkompakt im $H^m(\Omega)$.