MAS ÜG

1.) R ... Ring μ, ν ... Maße auf R

a) zz: $(\mu+\nu)^* = \mu^* + \nu^*$

Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in R mit $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ bel.

$E_1 := B_1 \quad E_2 := B_2 \setminus B_1 \quad E_3 := B_3 \setminus (B_1 \cup B_2) \quad \dots$

$\Rightarrow A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n \left(= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \qquad \mu(E_i) \le \mu(B_i) \ \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) : E_n \in R,\ A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n\}$

ist eine äquivalente Definition

$(\mu+\nu)^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu+\nu)(E_n) : E_n \in R,\ A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n\}$ wobei $(\mu+\nu)(A) = \mu(A) + \nu(A)$

$= \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) + \nu(E_n) : E_n \in R,\ A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n\} \ge \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) : E_n \in R,\ A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n\}$

$+ \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n) : E_n \in R,\ A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n\} = \mu^*(A) + \nu^*(A)$

$\underline{\Rightarrow (\mu+\nu)^*(A) \ge \mu^*(A) + \nu^*(A)}$

Sei $A_n \in R$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq A$ mit $\mu^*(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \le \mu^*(A) + \varepsilon$.

Sei $B_n \in R$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n \supseteq A$ mit $\nu^*(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(B_n) \le \nu^*(B) + \varepsilon$

$\Rightarrow \sum_{n,m\in\mathbb{N}^2} A_n \cap B_m \supseteq A$

$\sum_{n,m\in\mathbb{N}^2} \mu(A_n \cap B_m) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \qquad \sum_{n,m\in\mathbb{N}^2} \nu(A_n \cap B_m) \le \sum_{m\in\mathbb{N}} \nu(B_m)$

$(\mu+\nu)^*(A) \le \sum_{n,m\in\mathbb{N}^2} (\mu+\nu)(A_n \cap B_m) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(B_n) \le \mu^*(A) + \mu^*(B) + 2\varepsilon$

$\underline{\Rightarrow (\mu+\nu)^*(A) \le \mu^*(A) + \nu^*(A)}$

---

b) $M_{\mu^*} \cap M_{\nu^*} \subseteq M_{\mu^*+\nu^*} = M_{(\mu+\nu)^*}$

Sei $A \in M_{\mu^*} \cap M_{\nu^*}$ bel. Sei B mit $(\mu+\nu)^*(B) < \infty$ bel.

$(\mu+\nu)^*(B) = \mu^*(B) + \nu^*(B) = \mu^*(B\cap A) + \mu^*(B\setminus A) + \nu^*(B \cap A) + \mu^*(B\setminus A)$

$= (\mu+\nu)^*(B\cap A) + (\mu+\nu)^*(B\setminus A)$

$\Rightarrow A \in M_{\mu^*+\nu^*}$

...

MAS Ü6

2.) a) $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } A = \emptyset \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$

ist ein äußeres Maß, da $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(A) \geq 0 \; \forall A$

$A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ und $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n)$

(entweder gleichheit oder $0 \leq 1$) (auch klar)

$M = \{\emptyset, \Omega\}$ $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap \emptyset) + \mu^*(B \setminus \emptyset)$ klar

$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap \Omega) + \mu^*(B \setminus \Omega)$ klar

Sei $A \neq \emptyset$ und $A \neq \Omega$ $\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = 2$, da $B \cap A \neq \emptyset \neq B \setminus A$

---

b) $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } card(A) \leq \aleph_0 \\ \infty & \text{, falls } card(A) > \aleph_0 \end{cases}$

ist ein äußeres Maß $\mu^*(\emptyset) = 0$ klar $\mu^*(A) \geq 0 \; \forall A$ klar

$A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ klar $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n)$

falls $card(A) \leq \aleph_0$ klar falls $card(A) > \aleph_0$ muss für zumindest ein B_n die $card(B_n) > \aleph_0$ sein

$M = P(\Omega)$

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } card(A) \leq \aleph_0 \wedge card(B) \leq \aleph_0 \\ \infty & \text{— " —} \wedge card(B) > \aleph_0 \\ 0 & \text{falls } card(A) > \aleph_0 \wedge card\, B) \leq \aleph_0 \\ \infty & \text{falls — " —} \wedge card(B) > \aleph_0 \end{cases}\right\} = \mu^*(B)$$

---

c) $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } |A| < \infty \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$

Wenn $card(A) = \aleph_0$ $\exists B_n$ mit $card(B_n) < \aleph_0$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A$

$\mu^*(A) = 1$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n) = 0$ $\Rightarrow$ kein äußeres Maß

---

d) $\mu^*(A) = \begin{cases} \frac{|A|}{|A|+10} & \text{, falls } |A| < \infty \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{n}{n+10} \leq 1$

$\mu^*(\emptyset) = \frac{0}{10} = 0$, $\mu^*(A) \geq 0 \; \forall A$ klar, $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$

$\Rightarrow \frac{|A|}{|A|+10} \leq \frac{|B|}{|B|+10}$ falls $|A|$ und $|B| < \infty$ $1 \leq 1$ falls $|A|$ und $|B| = \infty$

$\frac{|A|}{|A|+10} \leq 1$ falls $|A| < \infty$ und $|B| = \infty$

...

MAS Ü6

2.) d.

$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ Falls $\exists B_n: |B_n| = \infty$ trivial

Falls $|A| = \infty \Rightarrow \exists B_n: |B_n| = \infty$ trivial

oder $\exists$ abzählbar unendlich viele B_n mit

$|B_n| \geq 1 \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+10} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{11} = \infty$

Falls $|A| < \infty$ und $\forall n: |B_n| < \infty$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|B_n|}{|B_n|+10} \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|B_n|}{\sum_{m\in\mathbb{N}} |B_m|+10} = \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} |B_n|}{\sum_{m\in\mathbb{N}} |B_m|+10} \geq \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$

da $|A| \leq \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |B_n| \qquad \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n)$

$M = \{\emptyset, \Omega\}$

$$\mu^*(B \cap \Omega) + \underbrace{\mu^*(B \setminus \Omega)}_{0} = \mu^*(B)$$

$$\underbrace{\mu^*(B \cap \emptyset)}_{0} + \mu^*(B \setminus \emptyset) = \mu^*(B)$$

Sei $A \neq \emptyset$ und $A \neq \Omega$

Falls $|\Omega| < \infty$: $\mu^*(\Omega \cap A) + \mu^*(\Omega \setminus A) = \frac{|A|}{|A|+10} + \frac{|\Omega|-|A|}{|\Omega|-|A|+10}$

$\mu^*(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|+10}$ $\neq$

Falls $|\Omega| = \infty$: Falls $|A| < \infty \rightarrow \mu^*(\Omega \cap A) + \mu^*(\Omega \setminus A)$

$$= \frac{|A|}{|A|+10} + 1 \neq 1 = \mu^*(\Omega)$$

Falls $|A| = \infty \qquad \mu^*(\Omega \cap A) + \underbrace{\mu^*(\Omega \setminus A)}_{>0} \neq 1 = \mu^*(\Omega)$

MAS Ü6

3.) $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5\}\}$ $\quad \Omega = \{1,2,3,4,5\}$

$\mu(\emptyset) = 0 \quad \mu(\{1,2\}) = 0 \quad \mu(\{3,4\}) = 2 \quad \mu(\{5\}) = 1$

erzeugter Ring: $\{\emptyset, \{5\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,5\}, \{3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\} =: R$

$\mu(\{1,2,5\}) = 1 \quad \mu(\{3,4,5\}) = 3 \quad \mu(\{1,2,3,4\}) = 2 \quad \mu(\Omega) = 3$

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \subseteq \{1,2\} \\ 1, & \text{falls } 5 \in A \wedge \neg(3 \in A \vee 4 \in A) \\ 2, & \text{falls } \neg(5 \in A) \wedge (3 \in A \vee 4 \in A) \\ 3, & \text{falls } 5 \in A \wedge (3 \in A \vee 4 \in A) \end{cases}$$

(Def $\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) : E_n \in R, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\}$)

M... System der messbaren Mengen

Aus Satz 2.26: M ist eine Sigmaalgebra und $R \subseteq M$

(Def $M = \{A \subseteq \Omega : \forall B \subseteq \Omega : \mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(B \setminus A)\}$)

$\{1\}$ $\quad \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\mu^*(\{1\} \cap B)} + \mu^*(B \setminus \{1\}) = \mu^*(B \setminus \{1\}) = \mu^*(B)$ messbar

$\{2\}$ $\quad$ —— " —— messbar

$\{3\}$ $\quad \mu^*(\{3\} \cap \{3,4,5\}) + \mu^*(\{3,4,5\} \setminus \{3\}) = 2 + 3 = 5$

$\mu^*(\{3,4,5\}) = 3$ nicht messbar

$\{4\}$ $\quad$ —— " —— nicht messbar

$\{1,3\}$ $\mu^*(\{1,3\} \cap \{3,4,5\}) + \mu^*(\{3,4,5\} \setminus \{1,3\}) = 2 + 3 = 5$ nicht messbar

$\{1,4\}$ — " — $\quad \{2,3\}$ — " — $\{2,4\}$ — " — nicht messbar

$\{1,2,3\}$ $\mu^*(\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\}) + \mu^*(\{3,4,5\} \setminus \{1,2,3\}) = 2 + 3 = 5$ nicht messbar

$\{1,2,4\}$ — " — nicht messbar

⋮

Alle Mengen die entweder (nicht 3 und nicht 4) oder (3 und 4) enthalten ist klar, dass sie in M liegen, da M eine Sigmaalgebra ist.

Mengen, die entweder 3 oder 4 enthalten:

$\mu^*(A \cap \Omega) + \mu^*(\Omega \setminus A) \geq 2 + 2 = 4 > \mu^*(\Omega)$

MAS Ü6

4.) $\mathcal{C}$ ... Mengensystem $\quad \emptyset \in \mathcal{C} \quad f: \mathcal{C} \to [0, +\infty] \quad f(\emptyset) = 0$

$$\mu^*(A) = \inf \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} f(B_n) : B_n \in \mathcal{C}, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \}$$

zz: μ^* ist eine äußere Maßfunktion

1.) $\mu^*(\emptyset) = \inf \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} f(B_n) : B_n \in \mathcal{C}, \emptyset \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \} = 0 \quad (B_n = \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N})$

2.) $\mu^*(A) \geq 0$ klar, da $f(A) \geq 0$

3.) $A \subseteq B \quad \mu^*(A) = \inf \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} f(B_n) : B_n \in \mathcal{C}, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \}$

$\leq \inf \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} f(B_n) : B_n \in \mathcal{C}, B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \} = \mu^*(B)$

4.) $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

$\exists E_{nk} \in \mathcal{C} : \sum_{k \in \mathbb{N}} f(E_{nk}) \leq \mu^*(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad B_n \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{nk}$ (wie S. 31/S. 32)

$A \subseteq \bigcup_{n,k \in \mathbb{N}} E_{nk} \qquad \mu^*(A) \leq \sum_{n,k \in \mathbb{N}} f(E_{nk}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu^*(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(B_n) + \varepsilon$

Da ε beliebig gewählt war folgt $\mu^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(B_n)$

MAS Ü6

5.) $(\mu_i^*)_{i\in I}$ ... Familie von äußeren Maßen

$\mu^* := \sup_{i\in I} \mu_i^*$ zz: μ^* ist ein äußeres Maß

1) $\mu^*(\emptyset) = \sup_{i\in I}\{\mu_i^*(\emptyset)\} = 0$

2) $\mu^*(A) \geq 0$ klar, da $\forall i\in I: \mu_i^*(A) \geq 0$

3) $A \subseteq B$ $\mu^*(A) = \sup_{i\in I}\{\mu_i^*(A)\} \leq \sup_{i\in I}\{\mu_i^*(B)\} = \mu^*(B)$

da $\forall i \in I: \mu_i^*(A) \leq \mu_i^*(B)$

4) $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

$\mu^*(A) = \sup_{i\in I}\{\mu_i^*(A)\} \leq \sup_{i\in I}\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_i^*(B_n)\} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{i\in I}\{\mu_i^*(B_n)\}$

$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n)$