2.3.1) d') $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mid a_1^2 + a_2^2 = 0 \right\}$ UR von $\mathbb{R}^{2\times 1}$?

· $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $0^2 + 0^2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$

· Sei $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in M$ bel.

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ $(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2$, da $a_1 = a_2 = 0$

$= 0^2 + 0^2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in M$

· Sei $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in M$ bel. Sei $c \in \mathbb{R}$ bel.

$c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \end{pmatrix}$ $(c \cdot a_1)^2 + (c \cdot a_2)^2$, da $a_1 = a_2 = 0$

$= 0^2 + 0^2 = 0 \Rightarrow c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in M$

$\Rightarrow$ Ja, M ist Unterraum.

Zwischenbew: Sei $x \in \mathbb{R}$ bel.

Fallunterscheidung: 1. Fall: $x = 0$ $x^2 = 0 \cdot 0 = 0$

2. Fall: $x > 0$. $x^2 = x \cdot x > 0$

3. Fall: $x < 0$ $x^2 = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x| \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot |x| = (-1) \cdot (-1) \cdot |x| \cdot |x|$

$= |x| \cdot |x| > 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$

---

d'') $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mid a_1^2 - a_2^2 = 0 \right\}$

Gegenbsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in M$, da $1^2 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in M$, da $2^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8 \neq 0$

$\Rightarrow$ M ist kein UR von $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

f) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \right\}$

Gegenbsp: $c = -1$ $n = 2$ $a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in M$, da $1 \leq 2$

$c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $-1 \not\leq -2 \Rightarrow$ M ist kein UR von $\mathbb{R}^{n\times 1}$