LINAG Ü10

4.3.3. $\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... kanonische Basis

$$f: (\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle})^* \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$
$$a^* \mapsto (\langle a^*, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

zz: f ist linear und bijektiv

$a^*: \mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle} \longrightarrow \mathbb{R}$ ...linear $\qquad f(a^*) = (a^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$

Sei $a^*, b^* \in (\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle})^*$ bel. $\qquad$ Sei $x \in \mathbb{R}$ bel.

$$f(a^*+b^*) = ((a^*+b^*)(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = (a^*(e_n) + b^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$$
$$= (a^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}} + (b^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = f(a^*) + f(b^*)$$

$$f(x\cdot a^*) = ((x\cdot a^*)(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = (x\cdot(a^*(e_n)))_{n\in\mathbb{N}} = x\cdot(a^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$$
$$= x\cdot f(a^*)$$

$\Rightarrow f$ ist linear

Sei $a^*, b^* \in (\mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle})^*$ bel. mit $f(a^*) = f(b^*)$

Wir wissen: durch das Verhalten auf einer Basis ist eine lineare Funktion vollständig und eindeutig definiert.

Da $(a^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = f(a^*) = f(b^*) = (b^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist verhalten sich die beiden Abbildungen auf eine Basis gleich.

$\Rightarrow a^* = b^* \qquad \Rightarrow f$ ist injektiv

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bel.

Sei $a^*: \mathbb{R}^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to \mathbb{R}$ definiert durch $e_i \longmapsto x_i$ (also der i-te Basisvektor wird auf den Wert der i-ten Komponente von x abgebildet). Dann ist a^* wohl definiert und

$$(a^*(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$\Rightarrow f$ ist surjektiv

$\Rightarrow f$ ist linear und bijektiv