LINAG Ü2

6.3.5 a)

A...affiner Raum π...semiaffine Abbildung, idempotent $A = s + X$

zz: $\exists t \in A \ \exists p \in L(X,X): \pi = \tau_t \circ p \circ \tau_{-t}$ p... Projektion

Wir wissen $\pi(A)$ ist ein affiner UR... $A' = s' + X'$.

Sei $t \in A'$ bel. (z.B. $t = s'$)

$$p: X \to X'$$
$$x \mapsto \tau_{-t} \circ \pi \circ \tau_t$$

ist eine Projektion, da

$$(p \circ p)(x) = (\tau_{-t} \circ \pi \circ \tau_t) \circ (\tau_{-t} \circ \pi \circ \tau_t)(x)$$
$$= (\tau_{-t} \circ \pi \circ \pi \circ \tau_t)(x) = (\tau_{-t} \circ \pi \circ \tau_t)(x) = p(x)$$

$$\tau_t \circ p \circ \tau_{-t} = \tau_t \circ \tau_{-t} \circ \pi \circ \tau_t \circ \tau_{-t} = \pi$$

LINAG Ü2

6.2.3. A... affiner Raum $\quad A = s + U \quad \dim A = 4$

a) $\forall \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset A$ mit $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ affine Ebenen: $(\mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2) \vee (\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ ... Gerade$) \vee$
$(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ ... Punkt$) \vee (\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset$ und $\exists g$ ... Gerade mit $\mathcal{E}_1 \parallel g$ und $\mathcal{E}_2 \parallel g)$

Sei $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \leq A$ mit $\dim(\mathcal{E}_1) = \dim(\mathcal{E}_2) = 2$ bel.

$\mathcal{E}_1 = s_1 + U_1 \quad \mathcal{E}_2 = s_2 + U_2$

Fallunterscheidung 1. Fall $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq \emptyset \quad \Rightarrow \exists t \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$

Fallunterscheidung a. Fall $\dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = 2$

Affiner Dimensionssatz: $\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = \dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2)$

$\Rightarrow 2 + 2 = 2 + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) \Rightarrow \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = 2$

Aus $\dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = 2$ folgt $\dim(U_1 (= \mathcal{E}_1 - t) \cap U_2 (= \mathcal{E}_2 - t)) = 2$

$\Rightarrow U_1 = U_2 \quad \Rightarrow \mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2$

b. Fall $\dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = 1 \quad \Rightarrow \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ ist eine Gerade

$\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = \dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) \Leftrightarrow 4 = 1 + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2)$

$\Rightarrow \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = 3$

c. Fall $\dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ ist ein Punkt.

$\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = \dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) \Rightarrow \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = 4$

2. Fall $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset$

Fallunterscheidung a. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$

$\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) - 1 \Rightarrow \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = 3$

$\dim(U_1 \cap U_2) = 2 \Rightarrow U_1 = U_2 \Rightarrow \mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2$

b. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$

$\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) - 1 \Rightarrow \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = 4$

Da $g = U_1 \cap U_2$ Dimension 1 hat ist g eine Gerade.

$g \subseteq U_1$ und $g \subseteq U_2 \Rightarrow \mathcal{E}_1 \parallel g$ und $\mathcal{E}_2 \parallel g$

c. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$

$\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) - 1 \Rightarrow \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = 5 \quad \lightning$

$\Rightarrow$ Fall kann nicht eintreten

...

LINAG Ü3

... 6.2.3.6) zz: $\forall H_1, H_2 \subseteq A$ ... H_1, H_2 ... Hyperebenen: $(H_1 \parallel H_2) \vee (H_1 \cap H_2$ ist eine Ebene$)$

$A = s + U$ mit $\dim A = 4$

Sei $H_1, H_2 \subseteq A$ mit H_1, H_2 ... Hyperebenen bel. $\Rightarrow \dim(H_1) = \dim(H_2) = 3$

$H_1 = s_1 + U_1 \quad H_2 = s_2 + U_2$

Fallunterscheidung: 1. Fall $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$

Fallunterscheidung: a. Fall $\dim(H_1 \cap H_2) = 3 \quad \Rightarrow U_1 = U_2 \Rightarrow H_1 \parallel H_2$

$\dim(H_1) + \dim(H_2) = \dim(H_1 \cap H_2) + \dim(H_1 \vee H_2)$

$\Rightarrow \dim(H_1 \vee H_2) = 3$

b. Fall $\dim(H_1 \cap H_2) = 2 \quad \Rightarrow H_1 \cap H_2$ ist eine Ebene

$\dim(H_1) + \dim(H_2) = \dim(H_1 \cap H_2) + \dim(H_1 \vee H_2)$

$\Rightarrow \dim(H_1 \vee H_2) = 4$

c. Fall $\dim(H_1 \cap H_2) \leq 1$

$\dim(H_1) + \dim(H_2) = \dim(H_1 \cap H_2) + \dim(H_1 \vee H_2)$

$\Rightarrow \dim(H_1 \vee H_2) \geq 5$ $\lightning$ $\Rightarrow$ dieser Fall kann nicht eintreten

2. Fall $H_1 \cap H_2 = \emptyset$

Fallunterscheidung: a. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 3 \quad \Rightarrow U_1 = U_2 \Rightarrow H_1 \parallel H_2$

$\dim(H_1) + \dim(H_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(H_1 \vee H_2) - 1$

$\Rightarrow \dim(H_1 \vee H_2) = 4$

b. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) \leq 2$

$\dim(H_1) + \dim(H_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(H_1 \vee H_2) - 1$

$\Rightarrow \dim(H_1 \vee H_2) = 5$ $\lightning$ $\Rightarrow$ dieser Fall kann nicht eintreten

...

LINAG Ü2

6.2.3. c) $A = s + U \quad \dim(A) = 4$

zz: $\forall g \ldots$ Gerade $\forall \mathcal{E} \ldots$ Ebene : $(g \parallel \mathcal{E}) \vee (g \cap \mathcal{E} \ldots$ Punkt$) \vee (g \cap \mathcal{E} = \emptyset$ und $\neg g \parallel \mathcal{E})$

Sei $g, \mathcal{E}$ bel. mit $\dim(g) = 1$ und $\dim(\mathcal{E}) = 2 \quad g = s_1 + U_1 \quad \mathcal{E} = s_2 + U_2$

1. Fall $g \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$

a. Fall $\dim(g \cap \mathcal{E}) = 1 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = U_1 \Rightarrow g \parallel \mathcal{E}$

$\dim(g) + \dim(\mathcal{E}) = \dim(g \cap \mathcal{E}) + \dim(g \vee \mathcal{E}) \Rightarrow \dim(g \vee \mathcal{E}) = 2$

b. Fall $\dim(g \cap \mathcal{E}) = 0 \Rightarrow g \cap \mathcal{E} \ldots$ Punkt

$\dim(g) + \dim(\mathcal{E}) = \dim(g \cap \mathcal{E}) + \dim(g \vee \mathcal{E}) \Rightarrow \dim(g \vee \mathcal{E}) = 3$

2. Fall $g \cap \mathcal{E} = \emptyset$

a. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 1 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = U_1 \Rightarrow g \parallel \mathcal{E}$

$\dim(g) + \dim(\mathcal{E}) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(g \vee \mathcal{E}) - 1 \Rightarrow \dim(g \vee \mathcal{E}) = 3$

b. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 0 \Rightarrow \neg(U_1 \subseteq U_2) \wedge \neg(U_2 \subseteq U_1) \Rightarrow \neg(g \parallel \mathcal{E})$

$\dim(g) + \dim(\mathcal{E}) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(g \vee \mathcal{E}) - 1 \Rightarrow \dim(g \vee \mathcal{E}) = 4$

---

d) $\forall g \ldots$ Gerade $\forall H \ldots$ Hyperebene: $(g \parallel H) \vee (g \cap H \ldots$ Punkt$)$

Sei g, H bel. mit $\dim(g) = 1$ und $\dim(H) = 3 \quad g = s_1 + U_1 \quad H = s_2 + U_2$

1. Fall $g \cap H \neq \emptyset$

a. Fall $\dim(g \cap H) = 1 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = U_1 \Rightarrow g \parallel H$

$\dim(g) + \dim(H) = \dim(g \cap H) + \dim(g \vee H) \Rightarrow \dim(g \vee H) = 3$

b. Fall $\dim(g \cap H) = 0 \Rightarrow g \cap H \ldots$ Punkt

$\dim(g) + \dim(H) = \dim(g \cap H) + \dim(g \vee H) \Rightarrow \dim(g \vee H) = 4$

2. Fall $g \cap H = \emptyset$

a. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 1 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = U_1 \Rightarrow g \parallel H$

$\dim(g) + \dim(H) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(g \vee H) - 1 \Rightarrow \dim(g \vee H) = 4$

b. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$

$\dim(g) + \dim(H) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(g \vee H) - 1 \Rightarrow \dim(g \vee H) = 5$ ↯

$\Rightarrow$ dieser Fall kann nicht eintreten

LINAG Ü2

6.2.2. $\mathbb{R}^{4\times 1}$ ...affiner Raum $a=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}5\\4\\6\\5\end{pmatrix}$ $c=\begin{pmatrix}7\\5\\4\\5\end{pmatrix}$ $A_1=H(\{a,b,c\})$

$d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $e=\begin{pmatrix}1\\-1\\6\\2\end{pmatrix}$ $f=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\\-2\end{pmatrix}$ $A_2=H(\{d,e,f\})$

•) $\dim(A_1)$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\alpha\cdot a+\beta\cdot b+\gamma\cdot c=\begin{pmatrix}4&5&7\\4&4&5\\4&6&4\\4&5&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&5&7&0\\4&4&5&0\\4&6&4&0\\4&5&5&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}4&5&7&0\\0&-1&-2&0\\0&1&-3&0\\0&0&-2&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{5}{4}&\frac{7}{4}&0\\0&1&-3&0\\0&0&1&0\\0&1&2&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{5}{4}&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&2&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&2&0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0 \Rightarrow$ affin unabhängig $\Rightarrow \dim(A_1)=2$

•) $\dim(A_2)$

$$2\cdot d-1\cdot e=\begin{pmatrix}2-1\\0+1\\0-6\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\\-2\end{pmatrix}=f \quad (\text{affine LK, da } 2-1=1)$$

$\Rightarrow$ offensichtlich $\dim(A_1)=1$

•) $A_1\cap A_2$

$$\alpha\cdot a+\beta\cdot b+(1-\alpha-\beta)\cdot c=\delta d+(1-\delta)\cdot e$$

$$\Leftrightarrow \alpha\cdot a+\beta\cdot b+c-\alpha\cdot c-\beta\cdot c=\delta\cdot d+e-\delta\cdot e$$

$$\Leftrightarrow \alpha\cdot(a-c)+\beta\cdot(b-c)+\delta\cdot(e-d)=e-c$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-3&-2&0&-6\\-1&-1&-1&-6\\0&2&6&2\\-1&0&2&-3\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&0&6\\1&1&1&6\\0&1&3&1\\1&0&-2&3\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&0&6\\0&1&3&3\\0&1&3&1\\1&0&-2&3\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&6&-3\\0&0&0&2\\0&1&3&1\\1&0&-2&3\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&-5\\0&0&0&2\\0&1&3&1\\1&0&-2&3\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&3\\0&1&3&1\\0&0&0&2\\0&0&0&-5\end{array}\right)\Rightarrow A_1\cap A_2=\emptyset$$

•) Basis des $A_1\vee A_2$

$\{a,b,c,d,e\}$ ist eine Basis, da affin unabhängig und affines E.S.

•) zz: $A_1 \parallel A_2$ $\quad A_1=f+[\{d-f\}]$ $\quad A_2=a+[\{b-a,c-a\}]$

$d-f=\begin{pmatrix}0\\-1\\6\\2\end{pmatrix}$ $\quad b-a=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ $\quad c-a=\begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad 3\cdot(b-a)-(c-a)=\begin{pmatrix}3\\0\\6\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\6\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A_1 \parallel A_2$

LINAG Ü3

G3 K... Körper

$(A, T, +_{aff})$ heißt abstrakter affiner Raum, falls

$\cdot)$ $A \neq \emptyset$ $\quad\cdot)$ $T \ldots VR/K$ $\quad\cdot)$ $+_{aff}: A \times T \to A$

$\cdot)$ $\forall a \in A\ \forall t_1, t_2 \in T: (a +_{aff} t_1) +_{aff} t_2 = a +_{aff} (t_1 + t_2)$

$\cdot)$ $\forall a \in A: a +_{aff} 0 = a$

$\cdot)$ $\forall a, a' \in A\ \exists! t \in T: a +_{aff} t = a'$

$(A, T, +_{aff})$ heißt konkreter affiner Raum, falls $(A, T, +_{aff})$ ein abstrakter affiner Raum ist und zusätzlich gilt

$\exists V \ldots VR$ $\quad \exists a_0 \in V$, sodass

$\cdot)$ $T \ldots UR$ von V

$\cdot)$ $A = a_0 + T$

$\cdot)$ $\forall a \in A\ \forall t \in T: a +_{aff} t = a + t$

zz: $\forall (A, T, +_{aff}) \ldots$ abstrakter affiner Raum $\exists (A', T', +_{aff}'): (A, T, +_{aff}) \cong (A', T', +_{aff}')$

Sei $(A, T, +_{aff}) \ldots$ abstrakter affiner Raum bel. Da $A \neq \emptyset$ $\exists a \in A$.

Wir wissen $K^{\langle I \rangle} \cong T$. Sei π der dazugehörige Isomorphismus. Dann ist $(\pi(a) + K^{\langle I \rangle}, K^{\langle I \rangle}, +)$ ein konkreter affiner Raum, da:

$\cdot)$ $\pi(a) + K^{\langle I \rangle} \neq \emptyset$ ✓ $\quad \cdot$ $K^{\langle I \rangle} \ldots VR/K$ ✓ $\quad \cdot$ $+: \pi(a) + K^{\langle I \rangle} \times K^{\langle I \rangle} \to \pi(a) + K^{\langle I \rangle}$ ✓

$\cdot)$ $\forall a \in \pi(a) + K^{\langle I \rangle}\ \forall t_1, t_2 \in K^{\langle I \rangle}: (a + t_1) + t_2 = a + (t_1 + t_2)$ ✓

$\cdot)$ $\forall a \in \pi(a) + K^{\langle I \rangle}: a + 0 = a$ ✓ $\quad \cdot)$ $\forall a, a' \in \pi(a) + K^{\langle I \rangle}\ \exists! t \in K^{\langle I \rangle}: a + t = a'$ ✓

$\cdot)$ $K^{\langle I \rangle} \ldots UR$ von $K^{\langle I \rangle}$ ✓ $\quad \cdot)$ $\pi(a) + K^{\langle I \rangle} = a_0 + K^{\langle I \rangle}$ ✓

$\cdot)$ $\forall a \in \pi(a) + K^{\langle I \rangle}\ \forall t \in K^{\langle I \rangle}: a + t = a + t$ ✓

A ist isomorph zu $\pi(a) + K^{\langle I \rangle}$, da $A = a + T \cong \pi(a) + \pi(T)$
$= \pi(a) + K^{\langle I \rangle}$

LINAG Ü2

7.4.8. $V \dots VR/K$ $\dim(V) = n \in \mathbb{N}^{\times}$ $\Delta: V^n \to K \dots$ nicht triviale Determinantenform

$(a_1, \dots, a_{n-1}) \in V^{n-1}$

a) $a^*: V \to K$ $U := [\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}]$

$x \mapsto \Delta(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x)$

zz: a^* ist eine Linearform und $U \subseteq \ker(a^*)$

-) Sei $x, y \in V$ bel. Sei $c \in K$ bel.

$a^*(x+y) = \Delta(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x+y) = \Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, x) + \Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, y)$

$= a^*(x) + a^*(y)$

$a^*(c \cdot x) = \Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, c \cdot x) = c \cdot \Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$

-) Sei $x \in U$ bel.

$a^*(x) = \Delta(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x) = 0$, da $x = a_i$ für ein $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

b) (1) $U \dots$ Hyperebene von V (2) $\dim(U) = n-1$

(3) $(a_1, \dots, a_{n-1})$ ist Basis von U (4) $(a_1, \dots, a_{n-1})$ ist l.u.

(5) $a^* \neq 0$ (6) $\ker(a^*) \neq V$

(7) $\dim(\ker(a^*)) \leq n-1$ (8) $\ker(a^*) = U$

zz: Äquivalenz der Aussagen (1) – (8)

(1) $\Leftrightarrow$ (2) laut Beobachtung auf Seite 100 (wegen Rangformel)

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Wenn ein von k Vektoren aufgespannter Vektorraum Dimension k hat sind die Vektoren l.u. (und ES sowieso).

(3) $\Leftrightarrow$ (4) ($\Rightarrow$) offensichtlich ($\Leftarrow$), da $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ ES sind

(5) $\Leftrightarrow$ (6) $a^* = 0 \Rightarrow \ker(a^*) = V$ und $\ker(a^*) = V \Rightarrow a^* = 0$ ← (Kontrapositionen)

(6) $\Leftrightarrow$ (7) $\ker(a^*) = V \Rightarrow \dim(\ker(a^*)) = n > n-1$; $\dim(\ker(a^*)) > n-1 \Rightarrow \ker(a^*) = V$

(8) $\Rightarrow$ (5) Da $\dim(V) = n$ $\exists x \in V: x \in U$ Dann gilt $a^*(x) \neq 0$

(4) $\Rightarrow$ (5) $\exists x \in V: x \in U$ Da Δ nicht trivial ist $a^*(x) \neq 0$

(2)$\wedge$(7) $\Rightarrow$ (8) $\ker(a^*) \neq U \overset{\text{wegen a)}}{\Rightarrow} U \subsetneq \ker(a^*) \Rightarrow \underset{\underset{n-1}{\parallel}}{\dim(U)} < \dim(\ker(a^*))$ (Kontraposition)

(5) $\Rightarrow$ (4) $a^* \neq 0 \Rightarrow \exists x \in V: a^*(x) \neq 0$ Falls $(a_1, \dots, a_{n-1})$ l.a. wären würde $a^*(x) = 0$