1.9.16 $(G, \cdot)$ Gruppe mit neutralem Element 1 $SI(G)$ = Anzahl selbstinverse

1) In jeder endlichen Gruppe ist $SI(G) \neq 0$.

$\forall G(|G|<\infty : \exists x \in G : x \cdot x = 1)$; wahr, da immer $1 \cdot 1 = 1$

2) In jeder endlichen Gruppe ist $SI(G)$ eine gerade Zahl.

$\forall G(|G|<\infty : \exists n \in \mathbb{N} : 2n = SI(G))$; falsch, da $G = \{1\}$ auch endliche Gruppe ist.

3) In jeder endlichen Gruppe ist $SI(G)$ eine ungerade Zahl.

$\forall G(|G|<\infty : \exists n \in \mathbb{N} : 2n+1 = SI(G))$; falsch, siehe Gegenbeispiel

4) $\forall G(|G| = 27 : \exists n \in \mathbb{N} : 2n+1 = SI(G))$ ✓

5) $\forall G(|G| = 27 : \exists n \in \mathbb{N} : 2n = SI(G))$ falsch, siehe Gegenbeispiel

3) Bsp: $Sym(\{1,2\})$ $f: \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}$ $id: \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}$ $f \circ f = id$ $id \circ id = id$

LINAG Ü2

1 9 16 ...

5) 27 Element $SI(G)$ gerade

Bsp $M = \{0, 1, 2, \dots 26\}$

f_n Funktionen von $M \to M$ mit $f_n(x) \mapsto (x+n) \bmod 27$, $n \in M$

Insgesamt 27 Funktionen mit nur einer selbstinversen Funktion, nämlich f_0 (oder id_M). $id_M \circ id_M = id_M$

$$(x \overset{?}{=}) (f_n \circ f_n)(x) = f_n(f_n(x)) = f_n((x+n) \bmod 27)$$
$$= (((x+n) \bmod 27) + n) \bmod 27) = (x+n+n) \bmod 27$$
$$= (x + 2n) \bmod 27$$

$(x+2n) \bmod 27$ müsste x ergeben $\Rightarrow$ $2n \bmod 27$ müsste 0 ergeben

$\Rightarrow$ n müsste $\frac{27 \cdot z}{2}$ sein mit $z \in \mathbb{N}$ $\quad z = 0$ ergibt id_M

$z = 1 \Rightarrow n = \frac{27}{2} \notin M \qquad z \geq 2 \quad n > 26 \Rightarrow n \notin M$

4) 27 Elemente $SI(G)$ ungerade

Angenommen G hat eine gerade Anzahl an selbstinversen Elementen. $SI(G) = 2 \cdot z$ mit $z \in \mathbb{N}$

Da G 27 Elemente enthält gibt es eine ungerade Anzahl an nicht selbstinversen Elementen.

$$|G| = 27 \Rightarrow 27 - SI(G) = 2 \cdot z + 1 \text{ mit } z \in \mathbb{N}$$

Jedes nicht selbstinverses Element x muss ein unterschiedliches inverses Element x^{-1} besitzen. Daher kann man die nicht selbstinversen Elemente als Paare ansehen. Das widerspricht, das es eine ungerade Anzahl an nicht selbstinversen Elementen in G gibt. Also muss es eine ungerade Anzahl an selbstinversen in G geben.

$\square$