ANA Ü4

1.) f... reellwertige Funktion I... Intervall auf dem f definiert ist

zz: $\forall x_1, x_2 \in I \ \forall \lambda \in [0,1]: f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

$\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$: $f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$

Bew Sei $x_1, x_2 \in I$ $\lambda \in [0,1]$ bel.

Setzen wir $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, dann gilt

$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \Longleftrightarrow x = \lambda x_1 + x_2 - \lambda x_2 \Longleftrightarrow x_2 - x = \lambda x_2 - \lambda x_1$

$\Longleftrightarrow x_2 - x = \lambda \cdot (x_2 - x_1) \Longleftrightarrow \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$

und $x_1 < x < x_2$, da

bei $\lambda = 0$ ist $x = 0 \cdot x_1 + (1-0) \cdot x_2 = x_2$ Bild eines Intervalls unter

bei $\lambda = 1$ ist $x = 1 \cdot x_1 + (1-1) \cdot x_2 = x_1$ einer stetigen Funktion ist

sowie   ein Intervall.

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

$\Longleftrightarrow f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, da

$1 - \lambda = 1 - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1 - x_2 + x}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

Sei $x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ bel.

Setzen wir $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, dann gilt

$\lambda > 0$, da $x_2 - x > 0$ und $x_2 - x_1 > 0$

$\lambda < 1$, da $x_2 - x < x_2 - x_1$ $\Rightarrow \lambda \in [0,1]$

Die Äquivalenz ist schon oben gezeigt.

---

zz: $\forall x_1, x_2 x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$: $f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$

$\Longleftrightarrow \forall x, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$: $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$

ANA Ü4

1.) ... Sei $x, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ bel.

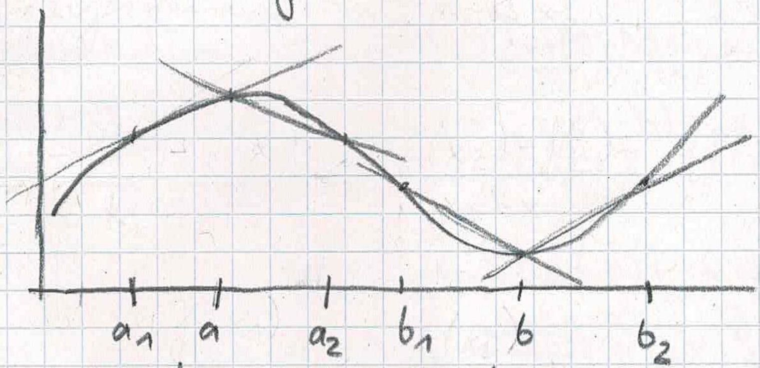
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \iff \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)}{x_2-x} - \frac{f(x)}{x_2-x}$$

$$\iff \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{\frac{x_2-x-x_2+x_1}{x_2-x}}{x-x_1} f(x) + \frac{f(x_2)}{x_2-x}$$

$$\iff f(x)-f(x_1) \le \left(\frac{x_2-x}{x_2-x_1}-1\right)\cdot f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

$$\iff f(x) \le \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

Geometrische Bedeutung



$\Rightarrow$ konkav $\Rightarrow$ konvex

ANA Ü4

2.) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ...konvex   zz: f...stetig

Sei $c,d\in(a,b)$ bel. Dann ist $(c,d)\subseteq[c,d]\subseteq(a,b)$,

also $a<c<d<b$

Aus dem 1. Bsp wissen wir

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\leq\frac{f(d)-f(c)}{d-c} \quad \text{und} \quad \frac{f(d)-f(c)}{d-c}\leq\frac{f(b)-f(d)}{b-d}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\right| \leq \max\left(\left|\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|,\left|\frac{f(b)-f(d)}{b-d}\right|\right)$$

$$\Leftrightarrow |f(d)-f(c)|\leq\max\left(\left|\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|,\left|\frac{f(b)-f(d)}{b-d}\right|\right)\cdot(d-c)$$

$\Rightarrow$ kontraktive Funktion $\Rightarrow$ stetig bei c $\Rightarrow$ stetig auf (a,b)

ANA Ü4

4.) $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad x \neq 0 \quad f(0)=0$

•) Nullstellen

$f(x)=0 \iff x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \iff x^2=0$ oder $\exp(-\frac{1}{x^2})=0$

$\iff x=0$, da $\exp(x)$ für keine reelle Zahl $=0$ ist.

$\Rightarrow 0$ ist einzige Nullstelle

•) lokale (globale) Extrema

$f'(x) = 2x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (x + x^2 \cdot \frac{1}{x^3}) = 2 e^{-\frac{1}{x^2}} (x + \frac{1}{x})$

$f'(x) = 0 \iff 2 \cdot \exp(-\frac{1}{x^2}) \cdot (x + \frac{1}{x}) = 0 \iff 2 \cdot \exp(-\frac{1}{x^2}) = 0$ oder $(x+\frac{1}{x})=0$

$\iff \frac{1}{x} = -x \iff 1 = -x^2 \iff x = i \qquad \Rightarrow$ keine reellen Extrema

•) Wendepunkte

$f''(x) = 2(e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (x+\frac{1}{x})' + (e^{-\frac{1}{x^2}})' \cdot (x+\frac{1}{x})) = 2(e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (1-\frac{1}{x^2}) + e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot (x+\frac{1}{x}))$

$= 2e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (\frac{x^2-1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \frac{x^2+1}{x}) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (\frac{x^2-1}{x^2} + \frac{2(x^2+1)}{x^4}) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} (\frac{x^2 \cdot (x^2-1) + 2(x^2+1)}{x^4})$

$= 2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^4 - x^2 + 2x^2 + 2}{x^4} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^4 + x^2 + 2}{x^4}$

$f''(x) = 0 \iff 2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ oder $\frac{x^4+x^2+2}{x^4} = 0 \iff x^4 + x^2 = -2$

$\iff x^2 \cdot (x^2+1) = -2 \iff x^2 = -2$ oder $x^2+1 = -2 \iff x = i\sqrt{2}$ oder $x = i\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ keine reellen Wendepunkte

•) (streng) monoton wachsend / fallend

Falls $x>0$: $f'(x) = 2 \cdot \exp(-\frac{1}{x^2}) (x + \frac{1}{x}) > 0$, da $\exp(y) > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$

Falls $x<0$: $f'(x) = 2 \cdot \exp(-\frac{1}{x^2}) (x + \frac{1}{x}) \qquad 2 \cdot \exp(-\frac{1}{x^2}) > 0$

$x^2 + 1 > 0 \iff x + \frac{1}{x} < 0$, da $\frac{1}{x} < 0 \quad \Rightarrow f'(x) < 0$

$\Rightarrow$ bei $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend, bei $(0, +\infty)$ streng monoton wachsend

•) konvex, konkav

laut letzten Bsp konvex $\iff f'$ monoton wachsend

$f''(x) = 2 \cdot \exp(-\frac{1}{x^2}) \cdot \frac{x^4+x^2+2}{x^4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow f'$ streng monoton wachsend (außer bei 0)

$\Rightarrow f$ konvex (außer bei 0)

ANA Ü4

9.) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$

$\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx$ $\quad u = \ln(x) \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad dx = x \cdot du$

$\int \frac{1}{x} \cdot u \cdot x \, du = \int u \, du = \frac{u^2}{2} = \frac{\ln(x)^2}{2}$

$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln(e)^2}{2} - \frac{\ln(1)^2}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

$\int_1^2 \frac{1}{x^3+x} dx$

$\int \frac{1}{x^3+x} dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{x \cdot (x^2+1)} dx = \int \frac{x^2+1}{x \cdot (x^2+1)} - \frac{x^2}{x \cdot (x^2+1)} dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} dx$

$= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \ln(x) - \int \frac{x}{x^2+1} dx$

$u = x^2+1 \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad dx = \frac{1}{2x} \cdot du$

$\ln(x) - \int \frac{x}{u} \cdot \frac{1}{2x} du = \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u} du = \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(u)$

$= \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1)$

$\int_1^2 \frac{1}{x^3+x} dx = \ln(2) - \frac{1}{2} \cdot \ln(2^2+1) - (\ln(1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1^2+1))$

$= \ln(2) - \frac{\ln(5)}{2} - (0 - \frac{1}{2} \cdot \ln(2)) = \ln(2) - \frac{\ln(5)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$

$= \frac{3}{2} \cdot \ln(2) - \frac{1}{2} \cdot \ln(5)$

ANA Ü4

8.) $f(x) = x^3+1$ $\quad f:[0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$R_n = ((k \cdot \frac{1}{n})_{k \in \{0,1,\dots,n\}}, (\alpha)_k)$ mit $(\alpha)_k$ bel., so dass $\forall k$ $k \cdot \frac{1}{n} < \alpha < (k+1) \cdot \frac{1}{n}$

ges: $O(R_n)$, $U(R_n)$

$$O(R_n) = \sum_{j=1}^{n(R_n)} \left(j \cdot \frac{1}{n} - (j-1) \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \sup_{t \in [(j-1) \cdot \frac{1}{n}, j \cdot \frac{1}{n}]} f(t)$$

Da f monoton wachsend ($f'(x) = 3x^2 \geq 0$ $\forall x \in [0,1]$) ist

$\inf_{t \in [..]} f(t) = f((j-1) \cdot \frac{1}{n})$ und $\sup_{t \in [..]} f(t) = f(j \cdot \frac{1}{n})$.

$$O(R_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{j}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\cancel{j}-\cancel{j}+1}{n} \cdot \left(\left(\frac{j}{n}\right)^3 + 1\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{j^3}{n^3} + \frac{n^3}{n^3}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{j^3+n^3}{n^4} = \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{j=1}^{n} j^3+n^3 = \frac{1}{n^4} \cdot \left(n \cdot n^3 + \sum_{j=1}^{n} j^3\right) = 1 + \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{j=1}^{n} j^3$$

$$U(R_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f\left((j-1) \cdot \frac{1}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\left((j-1) \cdot \frac{1}{n}\right)^3 + 1\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{(j-1)^3}{n^3} + \frac{n^3}{n^3}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{(j-1)^3+n^3}{n^3} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(j-1)^3+n^3}{n^4} = \frac{1}{n^4} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \left((j-1)^3 + n^3\right)\right) = \frac{1}{n^4} \sum_{j=1}^{n} \left((j-1)^3\right) + 1$$

$$\Rightarrow O(R_n) = 1 + \frac{1}{4n^4} \cdot n^2 (n+1)^2 \text{ und } U(R_n) = 1 + \frac{1}{4n^4} n^2 \cdot (n-1)^2$$

$$\lim_{n \to \infty} O(R_n) = 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4n^4} = 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{n^4+2n^3+n^2}{4n^4}$$

$$= 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{1 + 2\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{n \to \infty} U(R_n) = 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 \cdot (n^2-2n+1)}{4n^4} = 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{n^4-2n^3+n^2}{4n^4} = 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{1 - 2\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

ANA Ü4

3.) $f: I \to \mathbb{R}$ ...stetig, im Inneren von I ableitbar

zz: f...konvex $\Leftrightarrow$ f'...monoton wachsend

$\Rightarrow$ Sei $a,b \in I$ mit $a<b$ bel. $(a,b) \subseteq I$ Sei $x \in (a,b)$ bel.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \quad \text{, da } f \text{ konvex}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \lim_{x \to b} \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

$$f'(a) \leq f'(b) \quad \Rightarrow f' \text{...monoton wachsend}$$

$\Leftarrow$ Sei $a,b \in I$ mit $a<b$. $(a,b) \subseteq I$ Sei $x \in (a,b)$ bel.

Laut dem Mittelwertsatz $\exists y_1 \in (a,x)$ mit $f'(y_1) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

und $\exists y_2 \in (x,b)$ mit $f'(y_2) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$

Da $y_1 < y_2$ und f' monoton wachsend

$$\Rightarrow f'(y_1) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(y_2)$$

$\Rightarrow f$...konvex

ANA Ü4

6.) $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ $\quad \mathcal{R}$ ... Menge aller Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$

$(f(R))_{R \in \mathcal{R}}$ $\quad$ zz: Äquivalenz von (i), (ii), (iii) mit

(i) $\lim_{R \in \mathcal{R}} f(R) = y$ also $\forall \varepsilon > 0 \; \exists R_0 \in \mathcal{R} \; \forall R \succcurlyeq R_0 : d(f(R), y) < \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall R \in \mathcal{R}, |R| \leq \delta : d(f(R), y) < \varepsilon$

(iii) $\forall (R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \to \infty} |R_n| = 0$ gilt $\lim_{n \to \infty} f(R_n) = y$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\varepsilon > 0$ bel. Dann $\exists R_0 \in \mathcal{R}$, sodass (i) gilt. Wähle $\delta = |R_0|$, dann gilt (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\varepsilon > 0$ bel. Dann $\exists \delta > 0$, sodass (ii) gilt. Sei $M = \{R \in \mathcal{R} : |R| \leq \delta\}$ Offensichtlich ist $M \neq \emptyset$ Wähle $R_0 \in M$ bel. Dann gilt (i).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \to \infty} |R_n| = 0$ bel. Sei $\varepsilon > 0$ bel.
Dann $\exists \delta > 0$, sodass (ii) gilt. Wähle N, so dass $\forall n \geq N : |R_n| < \delta$
Sei $n \geq N$ bel. $\Rightarrow d(f(R_n), y) < \varepsilon$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : d(f(R_n), y) < \varepsilon$
Sei $M = \{R_n \in \mathcal{R} : n \geq N\}$ Wähle R_0, so dass $|R_0| \geq |R| \; \forall R \in M$
$\Rightarrow \forall R \succcurlyeq R_0 : d(f(R), y) < \varepsilon$

---

zz: $(f(R))_{R \in \mathcal{R}}$ ... Cauchy-Netz $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall R_1, R_2 \in \mathcal{R}, |R_1| \leq \delta, |R_2| \leq \delta :$
$d(f(R_1), f(R_2)) < \varepsilon$

($\Rightarrow$) Cauchy-Netz bedeutet
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists R_0 \in \mathcal{R} \; \forall R_1, R_2 \succcurlyeq R_0 : d(f(R_1), f(R_2)) < \varepsilon$
Sei $\varepsilon > 0$ bel. Sei $R_0 \in \mathcal{R}$, sodass gilt. Wähle $\delta = |R_0|$, dann gilt.

($\Leftarrow$) Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $\delta > 0$, sodass die rechte Seite gilt. Wähle R_0, so dass $|R_0| < \delta$. Dann gilt für $\forall R_1, R_2 \succcurlyeq R_0$, dass
$d(f(R_1), f(R_2)) < \varepsilon$

$\square$