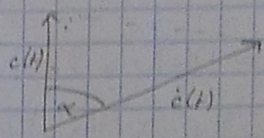
CAGD Ü2

11) $c(t) := e^t(\cos t, \sin t)$ ges: Winkel zw. $\dot{c}(t)$ und $c(t)$

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} e^t \cos t \\ \frac{d}{dt} e^t \sin t \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} e^t \cos t + e^t(-\sin t) \\ e^t \sin t + e^t \cos t \end{pmatrix}^T = e^t \begin{pmatrix} -\sin t + \cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}^T$$

$$\cos(\alpha) = \frac{c(t) \cdot \dot{c}(t)}{\|c(t)\| \cdot \|\dot{c}(t)\|}$$



$$c(t) \cdot \dot{c}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \begin{pmatrix} e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \sin t + e^t \cos t \end{pmatrix}$$

$$= e^{2t}(\cos^2 t \cancel{- \sin t \cos t} + \sin^2 t \cancel{+ \sin t \cos t}) = e^{2t}$$

$$\|c(t)\| = \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t)} = e^t$$

$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{e^{2t}((-\sin t + \cos t)^2 + (\sin t + \cos t)^2)} = e^t \sqrt{\underbrace{\sin^2 t - 2\sin t \cos t + \cos^2 t}_{1} + \underbrace{\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t}_{1}}$$

$$= e^t \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{e^{2t}}{e^{2t}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

unabhängig von t! □

CAGD Ü2

12) $c(t) = e^t(\cos t, \sin t)$ ges: Krümmung

$$K(t) := \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3}$$

$$\dot{c}(t) = e^t \begin{pmatrix} -\sin t + \cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

$$\ddot{c}(t) = e^t \begin{pmatrix} -\sin t + \cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} = 2e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t)) = \det \begin{pmatrix} e^t(-\sin t + \cos t) & -2e^t \sin t \\ e^t(\sin t + \cos t) & 2e^t \cos t \end{pmatrix} = 2e^{2t}(-\sin t \cos t + \cos^2 t) + 2e^{2t}(\sin^2 t + \sin t \cos t)$$

$$= 2e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t) = 2e^{2t}$$

$$\|\dot{c}(t)\| = e^t \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow K(t) = \frac{2e^{2t}}{e^{3t}\, 2\sqrt{2}} = \frac{1}{e^t \sqrt{2}}$$

$\square$

CAGD Ü2

13) $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ Parametrisierung von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ also $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

ges: Krümmung von c

$$\kappa(t) := \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(t) & f''(t) \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \right\|^3}$$

$$= \frac{f''(t)}{\left(\sqrt{1+(f'(t))^2}\right)^3} \left(= \frac{f''(t)}{(1+f'(t)^2)\sqrt{1+f'(t)^2}} \right)$$

$\square$

CAGD Ü2

14) zz: Kreis kann nicht durch Bezierkurve parametrisiert werden

Wir wissen, dass Bezierkurven Polynome sind.

Kreis = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r\}$ Wir wählen $r = 1$.

Angenommen es gäbe eine Bezierkurve, die den Kreis ergibt.
Nennen wir sie $(x(t), y(t))$ für $t \in [0,1]$.

$\Rightarrow x^2(t) + y^2(t) = 1 \quad \forall t \in [0,1]$

also können nicht $x \equiv 0 \equiv y$. Sei d die max Ordnung der beiden.

$\Rightarrow x^2(t) + y^2(t)$ ist ein Polynom von Ordnung $2d$. mit positiven führenden Koeffizienten.

Da $x^2(t) + y^2(t)$ auf $[0,1]$ konstant sein soll muss aber der führende Koeffizient gleich 0 sein $\lightning$ zu Ordnung $2d$.

$\Rightarrow$ Der Kreis kann nicht als Polynom und somit schon gar nicht als Bezierkurve dargestellt werden.

$\square$

CAGD Ü2

15) ges: Bezierkurve mit singulären Punkt

$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Bezierkurve $\quad \dot{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
b(t) &= B_0^2(t)\, b_0 + B_1^2(t)\, b_1 + B_2^2(t)\, b_0 \\
&= 1\, t^0 (1-t)^2\, b_0 + 2t^1(1-t)^1 b_1 + 1\, t^2 (1-t)^0\, b_0 \\
&= (1-2t+t^2)\, b_0 + (2t-2t^2)\, b_1 + t^2\, b_0 \\
&= (1-2t+2t^2)\, b_0 + (2t-2t^2)\, b_1
\end{aligned}
$$

$$b'(t) = (-2+4t)\, b_0 + (2-4t)\, b_1$$

$$b'(\tfrac{1}{2}) = (-2+\tfrac{4}{2})\, b_0 + (2-\tfrac{4}{2})\, b_1 = 0 \cdot b_0 + 0 \cdot b_1 = 0$$

$\Rightarrow b(\tfrac{1}{2})$ ist ein singulären Punkt.

$\square$

CAGD Ü2

1b) $y(x) = 2(x-1)^2 + 1 = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2x^2 - 4x + 3$

ges: Darstellung als Bezierkurve

Polynomdarstellung ist eindeutig $\Rightarrow n = 2$

$$b(t) = B_0^2(t)\,b_0 + B_1^2(t)\,b_1 + B_2^2(t)\,b_2 = 1 \cdot t^0 (1-t)^2 b_0 + 2t(1-t) b_1 + 1 t^2 (1-t)^0 b_2$$

$$= (1 - 2t + t^2) b_0 + (2t - 2t^2) b_1 + t^2 b_2 = b_0 + t(-2b_0 + 2b_1) + t^2 (b_0 - 2b_1 + b_2)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2x^2 - 4x + 3 \end{pmatrix} = (b_0 - 2b_1 + b_2) t^2 + (-2b_0 + 2b_1) t + b_0 \qquad (x = t)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = b_0 - 2b_1 + b_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -2b_0 + 2b_1 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = b_0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + 2b_1 \quad \Rightarrow 2b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow b_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} + b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \quad \Rightarrow b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b(t) = B_0^2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + B_1^2(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + B_2^2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t^2 - 4t + 3 \end{pmatrix}$$

$\square$