LINAG Ü6

2.6.3 $K = GF(q)$ $V \dots K^n$ mit $n < \infty$

a) zz: V besitzt genau $(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1})$ Basen

(Reihenfolge der Basisvektoren ist relevant)

Wissen: Jede Basis besitzt n Vektoren.

Anzahl der Vektoren in V ist q^n

Jede l.u. Menge kann zu einer Basis erweitert werden.

Bew: Um eine Basis von V zu bilden können wir mit der leeren (trivialerweise l.u.) Menge beginnen und n Vektoren so zu der Menge hinzufügen, dass der neue Vektor jeweils noch nicht in der Hülle der Menge enthalten ist.

Da man mit k linear unabhängigen Vektoren durch LK jeweils q^k Vektoren bilden kann hat man bei jeder Wahl eines neuen l.u. Vektor $q^n - q^k$ Möglichkeiten, wenn die Menge schon k Elemente enthält.

$M = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ $\sum_{i=1}^{k} x_i v_i = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k$

q Möglichkeiten

$\Rightarrow q^k$ verschiedene LK, also

q^k verschiedene Vektoren (da M l.u.)

Anfang: • $M = \emptyset$ $[M] = \{0_V\}$ $|[M]| = 1$, d.h. $q^n - 1$ Möglichkeiten den nächsten Vektor v_1 zu wählen. $M = M \cup \{v_1\}$

• $M = \{v_1\}$ $|[M]| = q$, d.h. $q^n - q$ Möglichkeiten für v_2. $M = M \cup \{v_2\}$

• $M = \{v_1, v_2\}$ $|[M]| = q^2$, d.h. $q^n - q^2$ Möglichkeiten für v_3. $M = M \cup \{v_3\}$

⋮

• $M = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ $|[M]| = q^{n-1}$, d.h. $q^n - q^{n-1}$ Möglichkeiten für v_n. $M = M \cup \{v_n\}$

• $M = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ $|[M]| = q^n$ und $[M] = V$, d.h. M ist Basis

$(q^n - 1)\cdot(q^n - q)\cdot(q^n - q^2)\cdot\dots\cdot(q^n - q^{n-1})$ Möglichkeiten insgesamt

LINAG Ü6

2.6.3 b) $$\frac{(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{n-1})}{(n!)^n}$$

da es für jede Basis n! Möglichkeiten gibt die Basisvektoren anzuordnen.