LINAG 04

2.3.10

$V \ldots$ VR über $K \ldots$ Körper $U \subseteq V$ mit $U \neq \emptyset$

zz: $U \leq V \iff U = [U] \iff \exists W \subseteq V: U = [W]$

- $U \leq V \Rightarrow U = [U]$

$U \subseteq [U]$ klar Sei $x \in [U]$ bel.

$\exists y_1, \ldots, y_n \in K \; \exists m_1, \ldots, m_n \in U: \sum_{i=1}^{n} y_i \, m_i = x$

* Da $m_1, \ldots, m_n \in U$ und U ist UR ist auch $\forall i \in \{1, \ldots, n\}: y_i \cdot m_i \in U$.

Da $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $y_i \cdot m_i \in U$ und U ist UR ist auch $\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot m_i \in U$.

* UR ist ein VR und damit unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen.

$\Rightarrow x \in U \Rightarrow U = [U]$

- $U = [U] \Rightarrow \exists W \subseteq V: U = [W]$

Sei $U \subseteq V$ mit $U = [U]$ bel. $W := U$ $W \subseteq V$ klar

$[W] = [U] \iff [W] = U$

- $\exists W \subseteq V: U = [W] \Rightarrow U \leq V$

Sei $W \subseteq V$ bel. mit $U = [W]$.

Da $U \neq \emptyset$ muss auch $W \neq \emptyset$. Für ein bel. $x \in W$ gilt $0 \cdot x \in U$

$\Rightarrow 0 \in U$

Sei $a, b \in U$ bel. a muss LK aus W sein $a = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$ gleiches für b

$a + b = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \cdot x_i$ mit $x = \sum_{i=1}^{n} w_i + v_i$

$x \in [W]$ ✓

$\Rightarrow a + b \in [W] \Rightarrow a + b \in U$

Sei $a \in U$ bel. wie oben $a = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$ Sei $c \in K$ bel.

$c \cdot a = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = \sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) w_i \in [W]$

$\Rightarrow c \cdot a \in U$

$\Rightarrow U \leq V$

Wenn $U = \emptyset$:

$U \leq V$ ist falsch

$U = [U]$ ist falsch, da $[\emptyset] = \{0_V\}$

$\exists W \subseteq V: U = [W]$ falsch, da $[W]$ zumindest 0_V enthält.