DGL Ü11

1) a) Lösbarkeit des RWP $u''=f(x)$ mit $u'(0)=\rho_1$, $u(2)=\rho_2$

$$Lu := a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = u'' = f(x)$$

gemischte Randbedingungen $\alpha_1 u(a)+\beta_1 u'(a)=\rho_1$, $\alpha_2 u(b)+\beta_2 u'(b)=\rho_2$ $\quad a=0 \quad b=2$

$\qquad u'(0)=\rho_1 \qquad u(2) \qquad =\rho_2$

Satz 6.2 ... $u_1, u_2 \dots$ FS für $Lu=0$ Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1) inhomogene RWP $Lu=f$ $R_1 u=\rho_1$ $R_2 u=\rho_2$ ist $\forall f\ \forall \rho_1,\rho_2$ lösbar

2) $\det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} \neq 0$

3) homogenes RWP hat nur triviale Lösung $u(x)=0$

$u_1(x)=1$, $u_2(x)=x$ ist FS

$$\det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u_1'(0) & u_2'(0) \\ u_1(2) & u_2(2) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ für alle f und alle ρ_1,ρ_2 ist das RWP lösbar (eindeutig)

b) $u''=e^x-x^2 \qquad u'(0)=0 \qquad u(2)=1$

$$u''(x)=e^x-x^2 \Rightarrow u'(x)=\int e^x-x^2\,dx = e^x-\frac{x^3}{3}+c$$

$$\Rightarrow u(x)=\int e^x-\frac{x^3}{3}+c\,dx = e^x-\frac{x^4}{12}+cx+d$$

$u'(0)=1+c=0 \Rightarrow c=-1$

$u(2)=e^2-\frac{2^4}{12}+2c+d=e^2-\frac{4}{3}-2+d \Rightarrow d=2+\frac{4}{3}-e^2=\frac{13}{3}-e^2$

$\Rightarrow u(x)=e^x-\frac{x^4}{12}-x+\frac{13}{3}-e^2$

DGLÜ 11

5) $-(xu')' = \frac{\lambda}{x} u \qquad u(1)=0 \quad u(e)=0$

ges: EW und EF

zuerst: alle EW > 0

$$-(xu')' = \frac{\lambda}{x} u \iff -u(xu')' = \frac{\lambda}{x} u^2 \iff \int_1^e -u(xu')' dx = \int_1^e \frac{\lambda}{x} u^2 dx$$

$$\iff -xuu'\Big|_1^e + \int_1^e u'xu' dx = \lambda \int_1^e \frac{1}{x} u^2 dx$$

$$\iff -eu(e)u'(e) + u(1)u'(1) + \int_1^e x(u')^2 dx = \lambda \int_1^e \frac{1}{x} u^2 dx$$

$$\iff \underbrace{\int_1^e x(u')^2 dx}_{\geq 0} = \lambda \underbrace{\int_1^e \frac{1}{x} u^2 dx}_{\geq 0}$$

$\neq 0$, da $u^2 = 0 \Rightarrow u = 0$ ↯

$\neq 0$, da $u' = 0 \Rightarrow u = \text{const} \wedge u(1) = 0 \Rightarrow u(x) = 0$ ↯

$\Rightarrow \lambda > 0$

Wir setzen $\lambda = \mu^2 \quad \mu \in \mathbb{R}$

$$-(xu')' = -(u' + xu'') = -xu'' - u' = \frac{\mu^2}{x} u = \frac{\lambda}{x} u$$

$$\iff xu'' + u' + \frac{\mu^2}{x} u = 0 \iff x^2 u'' + xu' + \mu^2 u = 0$$

Ansatz $u(x) = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow u'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad u''(x) = (\alpha^2 - \alpha) x^{\alpha-2}$$

$$\Rightarrow x^2 u'' + xu' + \mu^2 u = (\alpha^2 - \alpha) x^\alpha + \alpha x^\alpha + \mu^2 x^\alpha = x^\alpha (\alpha^2 \cancel{-\alpha} \cancel{+\alpha} + \mu^2) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{-\mu^2} = \pm i\mu \qquad \Rightarrow u(x) = x^{i\mu}$$

Fundamentalsystem $\{\mathrm{Re}(u), \mathrm{Im}(u)\} = \{\mathrm{Re}(e^{i\mu \ln(x)}), \mathrm{Im}(e^{i\mu \ln(x)})\} = \{\cos(\mu \ln(x)), \sin(\mu \ln(x))\}$

Satz 6.10. $\lambda \ldots$ EW $\iff \det \begin{pmatrix} R_1 u_1(\cdot,\lambda) & R_1 u_2(\cdot,\lambda) \\ R_2 u_1(\cdot,\lambda) & R_2 u_2(\cdot,\lambda) \end{pmatrix} = 0$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\mu) & \sin(\mu) \end{pmatrix} = \sin(\mu) = 0 \iff \mu \in \pi\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \lambda_k = \pi^2 k^2 \qquad \lambda_k > 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N}$

$u(x) = a \cos(\mu \ln(x)) + b \sin(\mu \ln(x))$

$u(1) = a = 0 \quad \Rightarrow u(x) = b \sin(\mu \ln(x)) \qquad u(e) = b \sin(\mu) = 0 \qquad b \neq 0$ sonst $u = 0$ ↯

$\Rightarrow$ EW $\lambda_k = \pi^2 k^2$ EF $u_k = \sin(\pi k \ln(x))$ für $k \in \mathbb{N}$

DGL Ü11

4) a) $Lu = u'' + p(x)u' + g(x)u = 0$

zz: durch substitution $v(x) = e^{\frac{1}{2}\int p(x)dx} u(x)$ kann Lu in die Form

$v'' + k(x)v = 0$ gebracht werden.

$u(x) = v(x) e^{-\frac{1}{2}\int p dx}$

$u'(x) = v' e^{-\frac{1}{2}\int pdx} + v e^{-\frac{1}{2}\int pdx}(-\frac{1}{2}p) = e^{-\frac{1}{2}\int pdx}(v' - \frac{1}{2}pv)$

$u''(x) = -\frac{1}{2}p e^{-\frac{1}{2}\int pdx}(v' - \frac{1}{2}pv) + e^{-\frac{1}{2}\int pdx}(v'' - \frac{1}{2}p'v - \frac{1}{2}pv')$

$= e^{-\frac{1}{2}\int pdx}(-\frac{v'p}{2} + \frac{p^2 v}{4} + v'' - \frac{p'v}{2} - \frac{v'p}{2}) = e^{-\frac{1}{2}\int pdx}(v'' - v'p + \frac{p^2 v}{4} - \frac{p'v}{2})$

$Lu = u'' + pu' + qu = e^{-\frac{1}{2}\int pdx}(v'' - v'p + \frac{p^2 v}{4} - \frac{p'v}{2}) + p e^{-\frac{1}{2}\int pdx}(v' - \frac{1}{2}pv) + q e^{-\frac{1}{2}\int pdx} v$

$= e^{-\frac{1}{2}\int pdx}(v'' - \cancel{v'p} + \frac{p^2 v}{4} - \frac{p'v}{2} + \cancel{v'p} - \frac{p^2 v}{2} + qv) = e^{-\frac{1}{2}\int pdx}(v'' - \frac{p^2 v}{4} - \frac{p'v}{2} + qv) = 0$

Da $e^{-\frac{1}{2}\int pdx} \neq 0 \Rightarrow v'' + v\underbrace{(q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2})}_{k(x)} = 0.$

b) Wie wirkt sich die Transformation auf das EWP $Lu = \lambda u$ aus?

Nun SLEWP

c) Transformieren Sie $u'' - 2xu' + 2nu = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}_0$

$p(x) = -2x \quad g(x) = 2n$

$\Rightarrow Lu = u'' + pu' + qu = u'' - 2xu' + 2nu = 0$

nach oben $k(x) = q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2} = 2n - \frac{4x^2}{4} - \frac{-2}{2} = 2n - x^2 + 1$

$v'' + v(2n - x^2 + 1) = 0$

DGL Ü11

6) RWP $Lu := -(xu')' = f(x)$ $\quad u(1)=0 \quad u(e)=0$

a) ges: FS von $-(xu')'=0$

$$-(xu')' = -u' - xu'' = 0 \iff xu'' + u' = 0$$

$u_1(x) = 1$ ist Lösung, da $xu_1'' + u_1' = 0+0=0$

für $z = u'$ $\Rightarrow xu'' + u' = xz' + z = 0 \Rightarrow z' = -\frac{1}{x} z$

$\Rightarrow z(x) = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow u_2(x) = \int z(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)$

Da u_1, u_2 Lsg undl.u. $\Rightarrow$ FS ist $\{1, \ln(x)\}$

b) ges: Green'sche Funktion des RWP

Satz 6.9. RWP hat für $f(x)=0$ nur triviale Lsg $\Rightarrow \exists G(x,s) \wedge G(x,s) = \begin{cases} \frac{u_2(s)u_1(x)}{a_2(s)W(s)}, & a \le x \le s \le b \\ \frac{u_1(s)u_2(x)}{a_2(s)W(s)}, & a \le s \le x \le b \end{cases}$

Satz 6.2 RWP hat für $f(x)=0$ nur triviale Lsg $\iff \det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{pmatrix} \neq 0$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \ln(1) \\ 1 & \ln(e) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{RWP homogen nur triviale Lsg}$$

$$W(s) = \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & \ln(s) \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix} = \frac{1}{s} \qquad a_2(s) = -s$$

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{\ln(s)\cdot 1}{-s\cdot\frac{1}{s}}, & x \le s \\ \frac{1\cdot\ln(x)}{-s\cdot\frac{1}{s}}, & s \le x \end{cases} = \begin{cases} -\ln(s), & x \le s \\ -\ln(x), & s \le x \end{cases}$$

c) zz: EWP $Lu = \lambda u$ besitzt nur reelle, positive EW

$$-(xu')' = -u' - xu'' = \lambda u \iff -u'u - xu''u = \lambda u^2$$

$$\Rightarrow -\int_1^e u'u\,dx - \int_1^e xu''u\,dx = \lambda \int_1^e u^2\,dx$$

$$\Rightarrow -\int_1^e xu''u\,dx = \lambda \int_1^e u^2\,dx$$

$$\Rightarrow \int_1^e x(u')^2\,dx = \lambda \int_1^e u^2\,dx$$

$$\left[\begin{aligned} -\int_1^e u'u\,dx &= -u^2\Big|_1^e + \int_1^e uu'\,dx \\ \Rightarrow 2\int_1^e u'u\,dx &= u(e)^2 - u(1)^2 = 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} -\int_1^e xu''u\,dx &= -xu'u\Big|_1^e + \int_1^e u'(u+xu')\,dx \\ &= -eu'(e)u(e) + u'(1)u(1) + \int_1^e u'u\,dx + \int_1^e xu'^2\,dx \\ &= \int_1^e u'u\,dx + \int_1^e x(u')^2\,dx = \int_1^e x(u')^2\,dx \end{aligned}\right.$$

Für EWP beachten wir nur $u \neq 0$

$\Rightarrow \int_1^e u^2\,dx > 0$

$\int_1^e x(u')^2\,dx > 0$, da $x > 0$ und wäre

$u'(x) = 0 \Rightarrow u(x) = c \in \mathbb{R}$ $\quad u(1)=0 \Rightarrow c=0$

$\lightning$ zu $u \neq 0$. Da L.S. und R.S. >0 muss auch $\lambda > 0$ sein!

DGL Ü11

7) $Lu = u'' + \lambda u = 0 \qquad u'(0) = 0 \qquad u(l) = 0, \quad l > 0$

a) zz: ist SLEWP

$u'' + \lambda u = 0 \iff -u'' = \lambda u \qquad p(x) = 1, q(x) = 0, r(x) = 1$

$\Rightarrow -(pu')' + qu = -u'' = \lambda u = \lambda r u$ hat Form eines SLEWP (sogar regulär)

b) zz: alle EW sind positiv

$-u'' = \lambda u \iff -u''u = \lambda u^2 \iff \int_0^l -u''u\,dx = \int_0^l \lambda u^2 dx$

$-\int_0^l u''u\,dx = -u'u\Big|_0^l + \int_0^l (u')^2 dx = \int_0^l (u')^2 dx = \lambda \int_0^l u^2 dx$

Da $u = 0$ als EF ausgeschlossen ist gilt $\int u^2 dx > 0$.

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{\int_0^l (u')^2 dx}{\int_0^l u^2 dx}$ $\qquad \int_0^l (u')^2 dx > 0$, da $\int_0^l (u')^2 dx = 0 \Rightarrow u'(x) = 0 \ \forall x \in (0, l)$

$\Rightarrow u(x) = \text{const} \wedge u(l) = 0 \Rightarrow u(x) = 0$ ↯ zu $u \neq 0$

$\Rightarrow \lambda > 0$

c) ges: Eigenfunktionen u_k

$-u'' = \lambda u \iff u'' = -\lambda u$

$u_1 = u \qquad u_1' = u_2$
$u_2 = u' \qquad u_2' = -\lambda u_1 \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} -z & 1 \\ -\lambda & -z \end{pmatrix} = z^2 + \lambda = 0 \iff z = \pm i\sqrt{\lambda} \qquad$ EW $\{-i\sqrt{\lambda}, i\sqrt{\lambda}\}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -\lambda a \end{pmatrix} = -i\sqrt{\lambda} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\lambda} a \\ -i\sqrt{\lambda} b \end{pmatrix} \Rightarrow b = -i\sqrt{\lambda} a, \ -\lambda a = -i\sqrt{\lambda} b = -\lambda a \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -\lambda a \end{pmatrix} = i\sqrt{\lambda} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{\lambda} a \\ i\sqrt{\lambda} b \end{pmatrix} \Rightarrow b = i\sqrt{\lambda} a, \ -\lambda a = i\sqrt{\lambda} b = -\lambda a \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\lambda} & i\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & i\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\lambda} & i\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}^{-1}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\lambda} & i\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{\lambda}x} & 0 \\ 0 & e^{i\sqrt{\lambda}x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{\lambda}x} & e^{i\sqrt{\lambda}x} \\ -i\sqrt{\lambda} e^{-i\sqrt{\lambda}x} & i\sqrt{\lambda} e^{i\sqrt{\lambda}x} \end{pmatrix}$ ... FM

$\operatorname{Re}(e^{i\sqrt{\lambda}x}) = \cos(\sqrt{\lambda}x) \qquad \operatorname{Im}(e^{i\sqrt{\lambda}x}) = \sin(\sqrt{\lambda}x) \qquad \{\sin(\sqrt{\lambda}x), \cos(\sqrt{\lambda}x)\}$ ... FM in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow u(x) = a\sin(\sqrt{\lambda}x) + b\cos(\sqrt{\lambda}x) \qquad u'(x) = a\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) - b\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$u'(0) = a\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow a = 0 \qquad u(l) = b\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0 \qquad b \neq 0$ sonst $u(x) = 0$

DGL Üm

7) ... $\Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda}\, l) = 0 \iff \sqrt{\lambda}\, l = k\cdot\pi + \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

Da $\lambda, l > 0$ sogar $\sqrt{\lambda}\, l = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ EW $\sqrt{\lambda_k}\, l = k\pi + \frac{\pi}{2} \iff \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} + \frac{\pi}{2l}\right)^2 \quad k \in \mathbb{N}$

EF $\quad u_k(x) = \cos(\sqrt{\lambda_k}\, x) = \cos\left(\left(\frac{k\pi}{l} + \frac{\pi}{2l}\right)x\right)$