MAS Ü2

1.) a) $\Omega = \mathbb{N}$ $\quad \mathcal{C} = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| < \infty$ oder $|A^c| < \infty\}$

•) kein Dynkin-System, da

$\{2\} \in \mathcal{C}, \{4\} \in \mathcal{C}, \{6\} \in \mathcal{C}, \dots$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \{2n\} = 2\mathbb{N}$, aber $|2\mathbb{N}| = \infty$ $\quad |(2\mathbb{N})^c| = \infty$

$\Rightarrow 2\mathbb{N} \notin \mathcal{C}$

•) kein Sigmaring / Sigmaalgebra aus gleichem Grund

•) Ring, da

Sei $A,B \in \mathcal{C}$ bel. 1. Fall $|A|<\infty$ und $|B|<\infty \Rightarrow |A\cup B| < \infty \wedge |A\setminus B| < \infty$

2. Fall $|A^c|<\infty$ und $|B^c|<\infty \Rightarrow A\cup B = (\mathbb{N}\setminus A^c)\cup(\mathbb{N}\setminus B^c) = \mathbb{N}\setminus(A^c\cap B^c)$

$\Rightarrow |(A\cup B)^c| < \infty \qquad [(A\setminus B) = B^c \cap A]$

$A\setminus B = (\mathbb{N}\setminus A^c)\setminus(\mathbb{N}\setminus B^c) = (A\cap\mathbb{N})\setminus(B\cap\mathbb{N}) = (B\cap\mathbb{N})^c\cap(A\cap\mathbb{N})$

$= (B^c \cup \emptyset)\cap(A\cap\mathbb{N}) = A\cap B^c = B^c\setminus A^c \Rightarrow |(A\setminus B)^c| < \infty$

3. Fall o.B.d.A. $|A|<\infty$ $\quad |B^c|<\infty$

$A\cup B = (A^c\cap B^c)^c = (B^c\setminus A)^c = \mathbb{N}\setminus(B^c\setminus A) \Rightarrow |(A\cup B)^c|<\infty$

$|A|<\infty$ $\quad |B^c|<\infty$ dann ist $A\setminus B = B^c\cap A \Rightarrow |A\setminus B|<\infty$

$|A^c|<\infty$ $\quad |B|<\infty$ dann ist $A\setminus B = B^c\cap A = (B\cup A^c)^c = \mathbb{N}\setminus(B\cup A^c)$

$\Rightarrow |(A\setminus B)^c| < \infty$

•) Algebra, da Ring und $\Omega=\mathbb{N}\in\mathcal{C}$ ($\mathbb{N}^c=\emptyset \Rightarrow |\mathbb{N}^c| = 0 < \infty$)

•) Semiring, da $\forall A,B\in\mathcal{C}: \underbrace{(A\cup B)}_{\in\mathcal{C}}\setminus\underbrace{(A\setminus B)}_{\in\mathcal{C}}\cup\underbrace{(B\setminus A)}_{\in\mathcal{C}} = A\cap B\in\mathcal{C}$

und $\forall A,B\in\mathcal{C}, A\subseteq B$ ist $B\setminus A\in\mathcal{C} \Rightarrow B\setminus A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{1}(B\setminus A)$

$A\cup\dot{\bigcup}_{k=1}^{1}(B\setminus A) = A\cup(B\setminus A)\in\mathcal{C}$

...

<u>MAS</u> Ü2

1.) b)... $\Omega = \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{C} = \{A \subseteq \mathbb{R} : card(A) \leq \aleph_0$ oder $card(A^c) \leq \aleph_0\}$

- Dynkin-System (auch im engeren Sinn)

  Sei $A, B \in \mathcal{C}$ bel. Falls $card(A) \leq \aleph_0$ und $card(B) \leq \aleph_0$ ist $A \setminus B \in \mathcal{C}$

  Falls $card(A) \leq \aleph_0$ und $card(B^c) \leq \aleph_0$ ist $A \setminus B \in \mathcal{C}$. Falls $card(A^c) \leq \aleph_0$ und $card(B) \leq \aleph_0$ ist $A \setminus B \in \mathcal{C}$. Falls $card(A^c) \leq \aleph_0$ und $card(B^c) \leq \aleph_0$ ist $A \setminus B \in \mathcal{C}$.

  Da die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen abzählbar unendlichen Mengen, abzählbar unendlich ist, folgt das $\mathcal{C}$ bzgl. $\dot{\cup}$ abgeschlossen ist. $\mathbb{R} \in \mathcal{C}$, da $\mathbb{R}^c = \emptyset$

- Sigmaring / Sigmaalgebra

  siehe Dynkin-System

- Ring / Algebra

  siehe Dynkin-System

- Semiring

  Sei $A, B \in \mathcal{C}$ bel. $(A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = A \cap B$ ist laut oben $\in \mathcal{C}$. Da $B \setminus A \in \mathcal{C}$ ist die (disjunkte) Vereinigung des einen Elements gegeben. Die Vereinigung des einen Elements mit A ist, wie oben gezeigt, in $\mathcal{C}$.

MAS Ü2

1.) c)... $\Omega = \{1,2,\dots,10\}$ $\quad \mathcal{E} = \{A \subseteq \Omega : |A| \dots \text{gerade}\}$

•) Dynkin-System

Sei $A, B \in \mathcal{E}$ bel. mit $B \subseteq A$ $\quad |A| = 2k \quad |B| = 2l \quad l \leq k$

$|A \setminus B| = |A| - |B| = 2k - 2l = 2(k-l) \dots$ gerade

da $B \subseteq A$

Sei $A_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$ bel. aber disjunkt $\quad |A_k| = 2k$

$\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |A_n| = 2 \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} k\right) \dots$ gerade

Da $\Omega \in \mathcal{E}$ ist $\mathcal{E}$ ein Dynkin-System im engeren Sinne.

•) kein Sigmaring, da $\{1,2,3,4\} \setminus \{4,5\} \notin \mathcal{E}$

•) keine Sigmaalgebra, da kein Sigmaring

•) kein Ring, da $\{1,2,3,4\} \cup \{2,6\} \notin \mathcal{E}$

•) keine Algebra, da kein Ring

•) kein Semiring, da $\{1,2,3,4\} \cap \{2,6\} \notin \mathcal{E}$

d) $\Omega = \mathbb{Z} \quad \mathcal{E} = \{\emptyset, \mathbb{Z}\} \cup \{\{-n\} \cup \{1,2,\dots,n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(\{-n\} \cup \{1,2,\dots,n\})^c : n \in \mathbb{N}\}$

•) Dynkin-System

Sei $A, B \in \mathcal{E}$ mit $B \subseteq A$ bel. Aus der Definition folgt entweder

$A = \mathbb{Z}$: $\quad A \setminus B = B \in \mathcal{E} \quad$ oder $B = \emptyset$: $A \setminus B = A \in \mathcal{E}$

oder $A = B$: $A \setminus B = \emptyset \in \mathcal{E}$

Sei $A_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$ bel. aber disjunkt. Aus Def folgt es gibt nur ein $A_n \neq \emptyset$

Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ das eine $A_n \in \mathcal{E}$. $\quad$ Da $\mathbb{Z} \in \mathcal{E}$ ist $\mathcal{E}$ ein Dynkin-System im engeren Sinne.

•) kein Sigmaring / Sigmaalgebra, da $(\{-2\} \cup \{1,2\}) \setminus (\{-1\} \cup \{1\}) = \{-2, 2\} \notin \mathcal{E}$

•) kein Ring / Algebra, da $(\{-2\} \cup \{1,2\}) \cup (\{-1\} \cup \{1\}) = \{-2,-1,1,2\} \notin \mathcal{E}$

•) kein Semiring, da $(\{-2\} \cup \{1,2\}) \cap (\{-1\} \cup \{1\}) = \{1\} \notin \mathcal{E}$

...

MAS Ü2

1.e) ... $\Omega = \{1,2,3\}$ $\quad \mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

•) kein Dynkin-System, da $\{1,2,3\} \setminus \{1\} = \{2,3\} \notin \mathcal{C}$

•) kein Sigmaring / Sigmalgebra aus gleichem Grund

•) kein Ring / Algebra aus gleichem Grund

•) Semiring, da $\forall A, B \in \mathcal{C}$ offensichtlich gilt $A \cap B \in \mathcal{C}$ und

$\forall A, B \in \mathcal{C}$ ist $B \setminus A$ die disjunkte Vereinigung einer Teilmenge von $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

•) Semiring, im engeren Sinn, da $\forall A, B \in \mathcal{C}$ $\exists C_1, C_2, C_3 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$:

$B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{3} C_i$ und $\bigcup_{i=1}^{3} C_i \cup A$ ist offensichtlich wieder in $\mathcal{C}$

MAS Ü2

2.) a) $\mathcal{C} \neq \emptyset$ $\quad \forall A,B \in \mathcal{C}: A \setminus B \in \mathcal{C}$ $\quad$ zz: $\mathcal{C}$... Semiring

zz: $\mathcal{C} = R_\sigma(\mathcal{C})$

$\forall A,B \in \mathcal{C}$ mit $A \subseteq B$ $\exists C_0 : B \setminus A = C_0$ (C_0 ist eine einelementige, disjunkte Vereinigung).

$\forall A,B \in \mathcal{C}: A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{C}$ ... $\Rightarrow$ abgeschlossen bzgl. $\cap$

b) $\mathcal{C}$... Semiring $\quad$ $\mathcal{C}$... abgeschlossen bzgl. abzählbaren, disjunkter Vereinigung

zz: $\Rightarrow \mathcal{C}$... Sigmaring

Abgeschlossenheit bzgl. abzählbarer, disjunkter Vereinigung laut Angabe

Abgeschlossenheit bzgl. Differenz:

Sei $A, B \in \mathcal{C}$ bel.

$B \setminus A = (A \cup B) \setminus A$, da $A \subseteq (A \cup B)$ ist $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists C_k\ k = \{1,..,n\}$:

$(A \cup B) \setminus A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} C_k \in \mathcal{C}$, da Abgeschlossen bzgl. $\dot{\cup}$

$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon\ \varphi\ \zeta\ \xi\ \nu\ \mu\ o\ \pi\ \rho\ \zeta\ \eta\ \theta\ \iota\ \kappa\ \lambda\ \sigma\ \tau\ \upsilon\ \phi\ \chi\ \psi\ \omega$

MAS Ü2

4.) $\mathcal{E}$ $\quad \forall A, B \in \mathcal{E}: A \cap B \in \mathcal{E}$

zz: $D(\mathcal{E}) = A_\sigma(\mathcal{E})$

offensichtlich $D(\mathcal{E}) \subseteq A_\sigma(\mathcal{E})$

zz: $A_\sigma(\mathcal{E}) \subseteq D(\mathcal{E})$

$G_B := \{A \subseteq \Omega : A \cap B \in D(\mathcal{E})\}$ für alle $B \in D(\mathcal{E})$

$\forall B \in D(\mathcal{E}): \Omega \in G_B$, da $\Omega \cap B = B \in D(\mathcal{E})$ ist

Sei $D_1, D_2 \in G_A$ mit $D_1 \subseteq D_2$ bel.

$D_1 \cap A \in D(\mathcal{E})$ und $D_2 \cap A \in D(\mathcal{E})$, da das definierende Eigenschaft der guten Menge.

$D_1 \subseteq D_2 \Rightarrow (D_1 \cap A) \subseteq (D_2 \cap A)$

$(D_2 \setminus D_1) \cap A = (D_2 \cap A) \setminus (D_1 \cap A) \in D(\mathcal{E})$

$\Rightarrow (D_2 \setminus D_1) \in G_A$ $\quad \Rightarrow G_A$ ist abgeschlossen bzgl. Differenz von Teilmengen

$\forall A \in D(\mathcal{E}): \mathcal{E} \subseteq G_A$

$D(\mathcal{E}) \subseteq D(G_A) = G_A$, da G_A ein Dynkin-System ist.

Ein bezüglich $\cap$ abgeschlossenes Dynkin-System ist eine Sigmaalgebra.

$\Rightarrow A_\sigma(\mathcal{E}) \subseteq A_\sigma(D(\mathcal{E})) = D(\mathcal{E})$

MAS Ü2

5.) ges: alle Semiring, die den Ring $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ erzeugen

- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ ist ein Semiring im engeren Sinn
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}\}$ ist ein Semiring im engeren Sinn
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}\}$ ——— " ———
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$ ——— " ———
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

ist kein Semiring im engeren Sinn, da z.B. $\{1,2,3\} \setminus \{1\} = \{3\} \cup \{2\}$, $\{1\} \cup \{3\} \notin M$

- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$ ist ein Semiring im engeren Sinn
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$ ——— " ———
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ ——— " ———
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ ist ein Semiring im engeren Sinn
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

ist kein Semiring im engeren Sinn, da z.B. $\{1,2,3\} \setminus \{1\} = \{3\} \cup \{2\}$, $\{3\} \cup \{1\} \notin M$

- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ ist ein Semiring im engeren Sinn
- $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$ ist kein Semiring im engeren Sinn, da

$\{1,2,3\} \setminus \{1\} = \{2\} \cup \{3\}$, $\{1\} \cup \{2\} \notin M$

MAS Ü2

6.) $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ $\quad f: \Omega \to \mathbb{Z}$ $\quad f(x) = x^2 - 3x$

ges: $f^{-1}(2^{\mathbb{Z}})$

$$f^{-1}(2^{\mathbb{Z}}) = f^{-1}(A_6(2^{\mathbb{Z}})) = A_6(f^{-1}(2^{\mathbb{Z}})) = A_6(\{\{-1\}, \{0,3\}, \{1,2\}\})$$

$$= \{\emptyset, \{-1\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{-1,0,3\}, \{-1,1,2\}, \{0,1,2,3\}, \{-1,0,1,2,3\}\}$$

$-1 \mapsto (-1)^2 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$

$0 \mapsto 0^2 - 3 \cdot 0 = 0$

$1 \mapsto 1^2 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$

$2 \mapsto 2^2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$

$3 \mapsto 3^2 - 3 \cdot 3 = 0$