1.5.8 $f: A \to B$

a) zz. $\# A = 1 \Rightarrow \exists!\, g: B \to A.\quad g \circ f = id_A$

$(\exists!\, x_0 \in A) \Rightarrow \forall y \in B: g(y) = x_0 \Rightarrow g: B \to A \quad y \mapsto x_0$

Sei x_0 ein "beliebiges" Element von A.

$(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) \quad f(x_0) \in B \quad \forall y \in B: g(y) = x_0 \Rightarrow g(f(x_0)) = x_0 \quad \square$

b) zz $\# A \neq 1$ $\quad f: A \to B$ bijektiv genau wenn $\exists!\, g: B \to A$ mit $g \circ f = id_A$.

1. (bijektiv $\Rightarrow \exists!\, g$): Sei f bijektiv. Dann existiert ein g mit $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$ (Satz 1.5.5).

Sei g' ebenfalls von $B \to A$ mit $g' \circ f = id_A$.

$\forall x \in A: g'(f(x)) = x = g(f(x)) \Rightarrow \forall y \in B: g'(y) = g(y) \Rightarrow g' = g$

2. ($\exists!\, g \Rightarrow$ bijektiv): $\exists!\, g: B \to A$ mit $g \circ f = id_A$. Angenommen $\exists\, g_R: B \to A$ mit $f \circ g_R = id_B$, dann ist $g_R = id_A \circ g_R = (g \circ f) \circ g_R = g \circ (f \circ g_R)$ $= g \circ id_B = g$. Also ist $g_R = g$ und $f \circ g = id_B$.

Da $g \circ f = id_A$ ist laut Satz 1.5.4 f injektiv und g surjektiv.

Da aber auch $f \circ g = id_B$ muss auch g injektiv und f surjektiv sein

$\Rightarrow f$ bijektiv (und g bijektiv). $\square$

c) f bijektiv $\Leftrightarrow \exists!\, g: B \to A$ mit $f \circ g = id_B$ gilt.

gleich b