1.11.11 G… Gruppe ges: Bew Homomorphismus + Kern

a) $\Psi: G \to Aut(G): a \mapsto (\Psi_{a^{-1}}: x \mapsto axa^{-1})$

Sei $a, b \in G$ beliebig.

$\forall x \in G: (\Psi(a) \circ \Psi(b))(x) = \forall x \in G: (\Psi_{a^{-1}} \circ \Psi_{b^{-1}})(x) = \forall x \in G: \Psi_{a^{-1}}(\Psi_{b^{-1}}(x))$

$\forall x \in G: (\Psi(a \cdot b))(x) = \forall x \in G: \Psi_{(a \cdot b)^{-1}}(x)$

Sei $x \in G$ beliebig.

$\Psi_{a^{-1}}(\Psi_{b^{-1}}(x)) = \Psi_{a^{-1}}(bxb^{-1}) = abxb^{-1}a^{-1} = (a \cdot b)x(b \cdot a)^{-1} = \Psi_{(a \cdot b)^{-1}}(x)$ ✓

$\Psi(e)(x) = \Psi_{e^{-1}}(x) = e \cdot x \cdot e^{-1} = x \quad \Rightarrow \Psi(e) = \{id_G\}$

$\ker \Psi = \{a : a \in G : \forall x \in G : axa^{-1} = x\} = \{a : a \in G : \forall x \in G : ax = xa\}$

also bei kommutativen Gruppen alle Elemente, sonst auf jeden Fall e.

c) $\Psi: G \to Sym(G): a \mapsto (\rho_{a^{-1}}: x \mapsto x \cdot a^{-1})$

Sei $a, b, x \in G$ beliebig.

$(\Psi(a) \circ \Psi(b))(x) = \rho_{a^{-1}}(\rho_{b^{-1}}(x)) = \rho_{a^{-1}}(x \cdot b^{-1}) = x \cdot b^{-1} \cdot a^{-1} = x \cdot (b a)^{-1}$

$= \rho_{(a \cdot b)^{-1}}(x) = (\Psi(a \cdot b))(x)$ ✓

$(\Psi(e))(x) = \rho_{e^{-1}}(x) = x \cdot e^{-1} = x \quad \Rightarrow \Psi(e) = \{id_G\}$

$\ker \Psi = \{a : a \in G : \forall x \in G : x \cdot a^{-1} = x\} = \{e\}$