MAS Ü10

2) Man zeige die bedingte Hölder-Ungleichung: Wenn $X \in L_p$ und $Y \in L_q$ mit $1<p<\infty$ und konjugiertem $q = \frac{p}{p-1}$ auf $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ mit der Sub-σ-Algebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{S}$, dann gilt

$$\mathbb{E}[|XY| \mid \mathcal{A}] \leq (\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{A}])^{1/p} (\mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{A}])^{1/q}.$$

Sei $A \in \mathcal{A}$ bel. Für $U, V \neq 0$ gilt

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[|XY| \mid \mathcal{A}]\, \mathbb{1}_A}{\underbrace{(\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{A}])^{1/p}}_{U} \underbrace{(\mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{A}])^{1/q}}_{V}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{|XY|}{UV} \mathbb{1}_A \mid \mathcal{A}\right]\right] = \mathbb{E}\left[\frac{|X|}{U}\mathbb{1}_A \cdot \frac{|Y|}{V}\mathbb{1}_A\right]$$

die "normal" Hölder-Ungleichung gibt uns nun

$$\leq \left(\mathbb{E}\left[\frac{|X|^p}{U^p}\mathbb{1}_A\right]\right)^{1/p} \left(\mathbb{E}\left[\frac{|Y|^q}{V^q}\mathbb{1}_A\right]\right)^{1/q} = \left(\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{A}]}{U^p}\mathbb{1}_A\right]\right)^{1/p} \left(\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{A}]}{V^q}\mathbb{1}_A\right]\right)^{1/q}$$

$$= \left(\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{A}]}{(\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{A}])^{p/p}}\mathbb{1}_A\right]\right)^{1/p} \left(\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{A}]}{(\mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{A}])^{q/q}}\mathbb{1}_A\right]\right)^{1/q} = (\mathbb{E}[\mathbb{1}_A])^{1/p} (\mathbb{E}[\mathbb{1}_A])^{1/q}$$

$$= (\mathbb{E}[\mathbb{1}_A])^{1/p + 1/q} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A]$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\mathbb{E}[|XY| \mid \mathcal{A}]}{(\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{A}])^{1/p} (\mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{A}])^{1/q}} \quad P\text{-f.s.}$$

woraus die Hölder-Ungleichung folgt.

Falls $\mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{A}] = 0 \Rightarrow |X| = 0$ P-f.s $\Rightarrow \mathbb{E}[|XY| \mid \mathcal{A}] = 0$

Gleiches für $\mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{A}] = 0$

$\square$

MAS Ü10

3) Die Sub-σ-Algebren $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ vom Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn jede integrierbare, stochastische Größe X, die $\mathcal{C}$ messbar ist, auch $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}) = \mathbb{E}(X)$ f.s. erfüllt

---

($\Rightarrow$) Sei X eine beliebige $\mathcal{C}$-messbare SG. Da $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ stochastisch unabhängig sind ist auch X von $\mathcal{D}$ unabhängig also

$\forall D \in \mathcal{D}: \mathbb{E}[X \mathbb{1}_D] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_D] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]\mathbb{1}_D]$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{D}] = \mathbb{E}[X]$ nach Definition des bedingten Erwartungswert

($\Leftarrow$) Sei $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ bel.

$P(C \cap D) = \int_\Omega \mathbb{1}_{C\cap D}\, dP = \int_\Omega \mathbb{1}_C \mathbb{1}_D\, dP =$

$\mathbb{1}_C$ ist $\mathcal{C}$-messbar und nach Vorraussetzung gilt $\mathbb{E}(\mathbb{1}_C \mid \mathcal{D}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_C) = \int_\Omega \mathbb{1}_C\, dP = \int_C dP = P(C)$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{1}_C \mathbb{1}_D] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_C]\mathbb{1}_D] = \mathbb{E}[P(C)\mathbb{1}_D]$ also

$\int_\Omega \mathbb{1}_C \mathbb{1}_D\, dP = \int_\Omega P(C)\mathbb{1}_D\, dP = P(C)\int_D dP = P(C)P(D)$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sind stochastisch unabhängig

$\square$

MAS Ü10

4) Es sei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ eine Sub-σ-Algebra vom Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dann erfüllt die bedingte Wahrscheinlichkeit die üblichen Anforderungen an Wahrscheinlichkeiten wie:

a) Für $A \in \mathcal{A}$ und $C \in \mathcal{C}$ gilt $P(A \cap C | \mathcal{C}) = P(A|\mathcal{C}) \mathbb{1}_C$ f.s.

b) Für eine disjunkte Folge $A_i \in \mathcal{A}$ gilt $P(\biguplus_i A_i | \mathcal{C}) = \sum_i P(A_i | \mathcal{C})$ f.s.

a) Sei $A \in \mathcal{A}$ und $C \in \mathcal{C}$ bel. Sei $D \in \mathcal{C}$ bel.

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \cap C} \mathbb{1}_D] = \int_D \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C \, dP = \int_D \mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{C}] \mathbb{1}_C \, dP = \mathbb{E}[P(A|\mathcal{C}) \mathbb{1}_C \mathbb{1}_D]$$

$$\Rightarrow P(A|\mathcal{C}) \mathbb{1}_C = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \cap C} | \mathcal{C}] = P(A \cap C | \mathcal{C}) \quad \text{f.s.}$$

b) Sei $A_i \in \mathcal{A}$ disjunkt bel. Sei $D \in \mathcal{C}$ bel.

$$\mathbb{E}[\sum_i P(A_i|\mathcal{C}) \mathbb{1}_D] = \int_D \sum_i P(A_i|\mathcal{C}) \, dP = \sum_i \int_D P(A_i|\mathcal{C}) \, dP = \sum_i \int_D \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}|\mathcal{C}] \, dP$$

$$= \sum_i \int_D \mathbb{1}_{A_i} \, dP = \int_D \sum_i \mathbb{1}_{A_i} \, dP = \int_D \mathbb{1}_{\biguplus_i A_i} \, dP = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\biguplus_i A_i} \mathbb{1}_D]$$

$$\Rightarrow \sum_i P(A_i|\mathcal{C}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\biguplus_i A_i} | \mathcal{C}] = P(\biguplus_i A_i | \mathcal{C}) \quad \text{f.s.}$$

$\square$

MAS Ü10

5) Die Folge (X_n) unabhängiger und identisch verteilter stochastischen Größen sei integrierbar mit Erwartungswert $\mu := \mathbb{E}X$. Die stochastische Größe N sei von allen X_n unabhängig mit Werten in $\mathbb{N}$ und $\nu := \mathbb{E}N < \infty$. Dann gilt für die Summe $S := \sum_{i=1}^{N} X_i$ die Wald'sche Identität $\mathbb{E}(S|N) = \mu N$ und $\mathbb{E}(S) = \mu\nu$.

$$\mathbb{E}(S|N=n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, N=n\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = \mu \cdot n.$$

Also $\mathbb{E}(S \mathbb{1}_{[N=n]}) = \mathbb{E}(\mu \cdot N \mathbb{1}_{[N=n]}) \Rightarrow \mu N = \mathbb{E}(S|N)$ f.s.

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(S|N)) = \mathbb{E}(\mu N) = \mu \mathbb{E}(N) = \mu\nu$$

$\square$

MAS Ü10

6.) Die Stochastischen Größen X, Y seien quadratisch integrierbar auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit der Sub-σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}$. Man zeige

a) $\operatorname{Var} X = \operatorname{Var} \mathbb{E}(X|\mathcal{A}) + \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X|\mathcal{A})]^2 \Rightarrow \operatorname{Var} \mathbb{E}(X|\mathcal{A}) \leq \operatorname{Var} X$

b) Aus $\mathbb{E} X^2 = \mathbb{E} Y^2$ und $\mathbb{E}(Y|\mathcal{A}) = X$ P-f.s. folgt $X = Y$ P-f.s.

---

a) Offenbar gilt $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X|\mathcal{A})]^2 \geq 0$ und somit

$$\operatorname{Var} X = \operatorname{Var} \mathbb{E}(X|\mathcal{A}) + \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X|\mathcal{A})]^2 \geq \operatorname{Var} \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$$

b.) $\mathbb{E}[(X-Y)^2] = \mathbb{E}[X(X-Y) - Y(X-Y)] = \mathbb{E}[X^2 - XY] + \mathbb{E}[Y^2 - XY]$

$= \mathbb{E}[X^2 - XY] + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2 - XY] + \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[XY] = 2\,\mathbb{E}[X^2 - XY]$

$= 2(\mathbb{E}[X \cdot X] - \mathbb{E}[XY]) = 2(\mathbb{E}[X\,\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]] - \mathbb{E}[XY]) = 2(\mathbb{E}(\mathbb{E}[XY|\mathcal{A}]] - \mathbb{E}[XY])$

$= 2(\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[XY]) = 0$

$\Rightarrow \mathbb{E}[(X-Y)^2] = 0$

$\mathbb{E}[X-Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}] - Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]] - \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y] = 0$

$\operatorname{Var}[X-Y] = \mathbb{E}[(X - Y - \underbrace{\mathbb{E}[X-Y]}_{=0})^2] = \mathbb{E}[(X-Y)^2] = 0$

$\Rightarrow X = Y$ P-f.s.

$\square$

MASÜ10

7) Unter den Annahmen des letzten Beispiels gilt auch

$\mathbb{E}(X|Y)=Y$ P-f.s. $\wedge$ $\mathbb{E}(Y|X)=X$ P-f.s. $\Rightarrow$ $X=Y$ P-f.s.

$\mathbb{V}ar(X-Y)=\mathbb{E}[(X-Y-\mathbb{E}[X-Y])^2]$

$\mathbb{E}[X-Y]=\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)-Y]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]-\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[Y]-\mathbb{E}[Y]=0$

$\Rightarrow \mathbb{V}ar(X-Y)=\mathbb{E}[(X-Y)^2]$

$\mathbb{E}[(X-Y)^2]=\mathbb{E}[X(X-Y)-Y(X-Y)]=\mathbb{E}[X^2-XY]+\mathbb{E}[Y^2-XY]$

$\mathbb{E}[X^2-XY]=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X\,\mathbb{E}[Y|X]]-\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[XY|X]]-\mathbb{E}[XY]$

$=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[XY]=0$

analog für $\mathbb{E}[Y^2-XY]=0$

$\Rightarrow \mathbb{V}ar(X-Y)=\mathbb{E}[X^2-XY]+\mathbb{E}[Y^2-XY]=0$

$\Rightarrow X=Y$ P-f.s.

$\square$