LINAG Ü5

G7 $V, W \ldots$ Vektorräume über K

a) $B \ldots$ Basis von V $\quad f \in L(V,W)$ $\quad f$ injektiv $\Leftrightarrow f(B) \ldots$ Basis von W

falsch Gegenbeispiel:

$K = \mathbb{R} \quad V = \mathbb{R}^2 \quad W = \mathbb{R}^1 \quad B = \{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$

f, so dass $\binom{1}{0} \mapsto (1) \quad \binom{0}{1} \mapsto (1)$

$f(B) = \{(1)\}$ ist Basis von W, f ist jedoch nicht injektiv

b) $B \ldots$ Basis von V $\quad f \in L(V,W)$ $\quad f$ injektiv $\Leftrightarrow f(B) \ldots$ l.u. in W

falsch gleiches Gegenbeispiel wie in a)

c) $B = (b_i : i \in I) \ldots$ Basis von V $\quad f \in L(V,W)$

$f \ldots$ injektiv $\Leftrightarrow (f(b_i) : i \in I) \ldots$ Basis von W

falsch Gegenbeispiel:

$K = \mathbb{R} \quad V = \mathbb{R}^1 \quad W = \mathbb{R}^2 \quad b_1 = (1)$

f, so dass $(1) \mapsto \binom{1}{0}$

$f(b_1) = \binom{1}{0}$ ist keine Basis von W, obwohl f injektiv ist

d) $B = (b_i : i \in I) \ldots$ Basis von V $\quad f \in L(V,W)$

$f \ldots$ injektiv $\Leftrightarrow (f(b_i) : i \in I) \ldots$ l.u. in W $\quad$ wahr

$(\Rightarrow)$ $\ker f = \{0\}$, da $f \ldots$ injektiv

$0 = \sum_{i \in I} x_i \cdot f(b_i) = f(\sum_{i \in I} x_i b_i) \Leftrightarrow \sum_{i \in I} x_i b_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in I: x_i = 0$

$\Rightarrow f(b_i)$ sind l.u.

$(\Leftarrow)$ $\sum_{i \in I} x_i \underbrace{f(b_i)}_{=f(\sum_{i \in I} x_i b_i)} = 0 \Leftrightarrow \forall i \in I: x_i = 0$

$\Rightarrow \ker f = \{0\} \Rightarrow f \ldots$ injektiv

e) $\exists (b_i : i \in I) \ldots$ Basis von V $\quad \forall f \in L(V,W)$

$f \ldots$ injektiv $\Leftrightarrow (f(b_i) : i \in I) \ldots$ l.u. in W $\quad$ wahr

Beweis gleich wie d mit z.B. kanonischer Basis von V

LINAG Ü5

G8 $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1}$ ... affine Ebene mit Gleichung $x=1$

$A=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $B=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $C=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $D=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $P=\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $Q=\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $M=\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ $N=\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$A'=A\cap\mathcal{E}$ $B'=B\cap\mathcal{E}$ $C'=C\cap\mathcal{E}$ ... $N'=N\cap\mathcal{E}$

$A'=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $B'=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $C'=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $D'=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $P'=\begin{pmatrix}1\\0{,}5\\0\end{pmatrix}$ $M'=\begin{pmatrix}1\\0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$ Q',N' ... Fernpunkte

•) $DV(A,B,P,Q)=DV\left(\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \underset{\mathbb{R}(P+Q)=\mathbb{R}B}{\underset{\parallel}{\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}}}, \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{-1}{1} = -1$, da

$\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \mathbb{R}\left(x_0\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

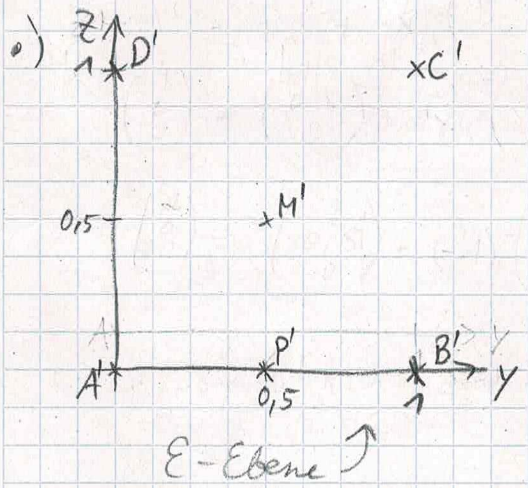
$\Rightarrow x_0 = -x_1$

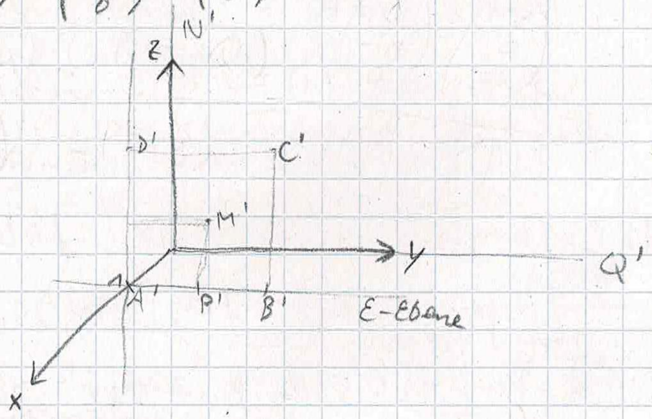
•) $DV_{affin}(A',B',P',Q') = \frac{(A'-P')}{(B'-P')} \Big/ \frac{(A'-Q')}{(B'-Q')} = \frac{A'-P'}{B'-P'}$, da $Q'=\infty$

$= TV(A',B',P') = -1$, da $A' = P' + (-1)(B'-P')$ also

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0{,}5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1-1\\1-0{,}5\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0{,}5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0{,}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

•)





LINAG Ü5

8.1.7. K... Körper $\quad I$... Menge

a) zz: K^I mit multiplikation wie $(x_i)_{i\in I}\cdot(y_i)_{i\in I}=(x_i\cdot y_i)_{i\in I}$
ist eine kommutative + assoziative K-Algebra mit Einselement

K^I ist ein VR. Sei $(a_i)_{i\in I},(b_i)_{i\in I},(c_i)_{i\in I}\in K^I$ bel. Sei $x\in K$ bel.

•) $(a_i)_{i\in I}\cdot((b_i)_{i\in I}+(c_i)_{i\in I})=(a_i)_{i\in I}(b_i+c_i)_{i\in I}=(a_i(b_i+c_i))_{i\in I}$
$=((a_i\cdot b_i)+(a_i\cdot c_i))_{i\in I}=(a_i b_i)_{i\in I}+(a_i\cdot c_i)_{i\in I}=(a_i)_{i\in I}\cdot(b_i)_{i\in I}+(a_i)_{i\in I}(c_i)_{i\in I}$

•) $((a_i)_{i\in I}+(b_i)_{i\in I})\cdot(c_i)_{i\in I}=((a_i+b_i)\cdot c_i)_{i\in I}=((a_i\cdot c_i)+(b_i\cdot c_i))_{i\in I}$
$=((a_i)_{i\in I}\cdot(c_i)_{i\in I})+((b_i)_{i\in I}\cdot(c_i)_{i\in I})$

•) $x((a_i)_{i\in I}\cdot(b_i)_{i\in I})=x(a_i\cdot b_i)_{i\in I}=(x\cdot a_i\cdot b_i)_{i\in I}=(x(a_i)_{i\in I})\cdot(b_i)_{i\in I}$
$\qquad\qquad (a_i\cdot x\cdot b_i)_{i\in I}=(a_i)_{i\in I}\cdot(x\cdot(b_i)_{i\in I})$

•) $((a_i)_{i\in I}\cdot(b_i)_{i\in I})\cdot(c_i)_{i\in I}=(a_i\cdot b_i\cdot c_i)_{i\in I}=(a_i)_{i\in I}\cdot((b_i)_{i\in I}\cdot(c_i)_{i\in I})$

•) $(a_i)_{i\in I}\cdot(b_i)_{i\in I}=(a_i\cdot b_i)_{i\in I}=(b_i\cdot a_i)_{i\in I}=(b_i)_{i\in I}\cdot(a_i)_{i\in I}$

•) $(a_i)_{i\in I}\cdot(1_K)_{i\in I}=(a_i)_{i\in I}=(1)_{i\in I}\cdot(a_i)_{i\in I}$

b) zz: $K^{\langle I\rangle}$... kommutative, assoziative K-Algebra $\quad$ Einselement?

$K^{\langle I\rangle}$ ist UR von K^I. Sei $(a_i)_{i\in I},(b_i)_{i\in I},(c_i)_{i\in I}\in K^{\langle I\rangle}$ bel.

•) $(a_i)_{i\in I}\cdot(b_i)_{i\in I}=(a_i\cdot b_i)_{i\in I}$ ist fast immer 0 $\Rightarrow (a_i)_{i\in I}\cdot(b_i)_{i\in I}\in K^{\langle I\rangle}$

•) kommutativ und assoziativ von oben

•) besitzt kein Einselement, da Einselement e ab einem Index $n\in I$
Null sein muss und eine Folge $a_i=\begin{cases}1, & \text{falls } i\leq n+1\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$
ist aus $K^{\langle I\rangle}$, jedoch ist $(a_i)_{i\in I}\cdot e$
am Index $n+1$ unterschiedlich von $(a_i)_{i\in I}$.

c) $I=\{1,2\}$ Sei $(a_i)_{i\in I}$ bel. $\quad (a_i)_{i\in I}\cdot(1)_{i\in I}=(a_i)_{i\in I}\Rightarrow e=(1)_{i\in I}$

$U=\{(x_1,0)\mid x_1\in K\}$ ist eine assoziative K-Algebra mit Einselement $(1,0)$, da
für bel. $(x_1,0),(x_2,0)\in U$: $\quad(x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1\cdot x_2,0)\in U$
assoziativ von oben $\quad(x_1,0)\cdot(1,0)=(x_1,0)$

Das Einselement von K^2 ist $(1,1)$ und somit ungleich $(1,0)$ (= Einselement von U).

LINAG Ü5

8.2.7. K... Körper $\mathrm{char}(K) \neq 2$ $P(X) = X^2 + a_0 \in K[X]$

$P(X)$... hat keine Nullstelle in K

a) zz: $L = \left\{ \begin{pmatrix} x & -a_0 y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\}$ bildet mit der Matrixaddition und -multiplikation einen Körper

1) $(L, +)$ ist eine Gruppe

Sei $A, B, C \in L$ bel.

$$(A+B)+C = \begin{pmatrix} x_a + x_b & -a_0 y_a - a_0 \cdot y_b \\ y_a + y_b & x_a + x_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_c & -a_0 y_c \\ y_c & x_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b + x_c & -a_0 \cdot (y_a + y_b + y_c) \\ y_a + y_b + y_c & x_a + x_b + x_c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_a & -a_0 y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b + x_c & -a_0 (y_b + y_c) \\ y_b + y_c & x_b + x_c \end{pmatrix} = A + (B + C)$$

$\Rightarrow$ assoziativ

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_0 \cdot 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A = A = A + \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \cdot 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ neutrales Element

$$A + \begin{pmatrix} -x_a & -a_0 \cdot (-y_a) \\ -y_a & -x_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_a & -a_0 \cdot y_a + a_0 y_a \\ y_a - y_a & x_a - x_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ inverses Element

2) Multiplikation kommutativ und assoziativ

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x_a & -a_0 \cdot y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b & -a_0 \cdot y_b \\ y_b & x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \cdot x_b - a_0 y_a y_b & -a_0 y_b x_a - a_0 \cdot y_a x_b \\ y_a x_b + x_a y_b & -a_0 y_b y_a + x_a x_b \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} x_b & -a_0 y_b \\ y_b & x_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a & -a_0 y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a x_b - a_0 y_b \cdot y_a & -a_0 y_a x_b - a_0 y_b x_a \\ y_b x_a + x_b y_a & -a_0 y_a y_b + x_a x_b \end{pmatrix}$$

assoziativ, da Matrixmultiplikation assoziativ

3) neutrales Element bzgl. multiplikation

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a & -a_0 y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a & -a_0 y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} = A$$

4) inverses Element bzgl. multiplikation

$$A \cdot \frac{1}{x_a^2 + y_a^2 a_0} \begin{pmatrix} x_a & y_a a_0 \\ -y_a & x_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a & -a_0 y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_a}{x_a^2 + y_a^2 a_0} & \frac{y_a a_0}{x_a^2 + y_a^2 a_0} \\ \frac{-y_a}{x_a^2 + y_a^2 a_0} & \frac{x_a}{x_a^2 + y_a^2 a_0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_a^2 + a_0 y_a^2}{x_a^2 + y_a^2 a_0} & \frac{x_a y_a a_0 - x_a y_a a_0}{x_a^2 + y_a^2 a_0} \\ \frac{x_a y_a - x_a y_a}{x_a^2 + y_a^2 a_0} & \frac{y_a^2 a_0 + x_a^2}{x_a^2 + y_a^2 a_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_a^2 + y_a^2 a_0 = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} x = -a_0 k y \\ y = k x \end{matrix} \Leftrightarrow x = -a_0 k^2 x$

$\Leftrightarrow k^2 = -\frac{1}{a_0} \Leftrightarrow k = \sqrt{-\frac{1}{a_0}}$

LINAG Ü5

... 8.2.7

5.) Linksdistributivgesetz Sei $A, B, C \in L$ bel.

$$A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} x_a & -a_0 y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b + x_c & -a_0(y_b + y_c) \\ y_b + y_c & x_b + x_c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_a(x_b + x_c) - a_0 y_a(y_b + y_c) & -x_a a_0(y_b + y_c) - a_0 y_a(x_b + x_c) \\ y_a(x_b + x_c) + x_a(y_b + y_c) & -y_a a_0(y_b + y_c) + x_a(x_b + x_c) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_a x_b - a_0 y_a y_b) + (x_a x_c - a_0 y_a y_c) & (-x_a a_0 y_b - a_0 y_a x_c) + (x_a a_0 y_c - a_0 y_a x_c) \\ (y_a x_b + x_a y_b) + (y_a x_c + x_a y_c) & (-y_a a_0 y_b + x_a x_b) + (-y_a a_0 y_c + x_a x_c) \end{pmatrix}$$

$$= (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

6) zz: $\exists\, U \subseteq L$ ... Unterkörper mit $\varsigma : x \mapsto \mathrm{diag}(x,x)$ ist $U \cong K$

Offensichtlich ist $U := \{\mathrm{diag}(x,x) : x \in K\}$ ein Unterkörper von L (indem man $y=0$ setzt).

Sei $x, y \in K$ bel. $\varsigma(x) + \varsigma(y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{pmatrix} = \varsigma(x+y)$

$$\varsigma(x) \cdot \varsigma(y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot y & 0 \\ 0 & x \cdot y \end{pmatrix} = \varsigma(x \cdot y)$$

$$i := \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) zz: $L = \{x + yi \mid x, y \in K\}$ ges: $\dim(L)$

$\subseteq$ Sei $A \in L$ bel. $A = \begin{pmatrix} x & -a_0 y \\ y & x \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}}_{= x} + \underbrace{\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}}_{= y} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= i} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_0 y \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -a_0 y \\ y & x \end{pmatrix} = A$$

$$\Rightarrow A \in \{x + yi \mid x, y \in K\}$$

$\supseteq$ Sei $B \in \{x + yi \mid x, y \in K\}$ bel.

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -a_0 y \\ y & x \end{pmatrix} \in L$$

$\dim(L) = 2$, da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eine Basis bilden

LINAG Ü5

8.2.7. ... d)

zz: X^2+a_0 hat genau Nullstellen i und $-i$

$$i^2+a_0 = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_0 & 0 \\ 0 & -a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(-i)^2+a_0 = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_0 & 0 \\ 0 & -a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow i$ und $-i$ sind Nullstellen, da X^2+a_0 grad 2 hat gibt es keine anderen Nullstellen

zz: $\exists!\, \varsigma \in \mathrm{Aut}(L): \varsigma(i) = -i \wedge \varsigma(-i) = i \wedge \forall k \in K: \varsigma(k) = k$

$\forall x,y: \varsigma(x+iy) = x - iy \quad \Rightarrow \varsigma(x) = x \quad \varsigma(i) = -i \quad \varsigma(-i) = i$

Der Automorphismus ist eindeutig da für $x,y \in K$ mit $\varsigma(x) = x$, $\varsigma(y) = y$ und $\varsigma(i) = -i$ schon $\varsigma(x+iy) = \varsigma(x) + \varsigma(i)\cdot\varsigma(y)$ festgelegt ist.
(linear + $\dim(L) = 2 \Rightarrow$ durch $\varsigma(1)$ + $\varsigma(i)$ festlegen alles festgelegt)

e) In $\mathbb{Z}_3$ bildet $\{aX^2+bX : a,b \in \mathbb{Z}_3\}$ einen Körper, da

$(aX^2+bX)+(cX^2+dX) = (a+c)X^2+(b+d)X$ und

$(aX^2+bX)\cdot(cX^2+dX) = acX^4+adX^3+bcX^3+bdX^2$

$= acX^2+adX+bcX+bdX^2 = (ac+bd)X^2+(ad+bc)X$

(da $\forall x \in \mathbb{Z}_3: x^3 = x$)

Der Körper enthält 9 Elemente, da $a \in \{0,1,2\}$ und $b \in \{0,1,2\}$ (also jeweils 3 Optionen $3\cdot3=9$).

LINAG Ü5

8.1.1. $\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad K=\{\operatorname{diag}(x,x) : x\in\mathbb{R}\}\cong\mathbb{R}$

a) ges: $I\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $I^2=\operatorname{diag}(-1,-1)$

$$I=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \qquad I^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

b) ges: L mit $K\subseteq L\subseteq\mathbb{R}^{2\times 2}$, L...abgeschlossen bzgl + und · und $L\cong\mathbb{C}$ mit Isomorphismus φ

$L=\left\{\begin{pmatrix}x&-y\\y&x\end{pmatrix} : x,y\in\mathbb{R}\right\}$ ist offensichtlich abgeschlossen bzgl. +

$$\begin{pmatrix}x&-y\\y&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xa-yb&-xb-ya\\ya+xb&-yb+xa\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xa-yb&-(ya+xb)\\ya+xb&xa-yb\end{pmatrix}$$

und somit abgeschlossen bzgl. ·

$$\varphi : L\to\mathbb{C} \qquad\qquad \varphi^{-1} : \mathbb{C}\to L$$

$$\begin{pmatrix}x&-y\\y&x\end{pmatrix}\mapsto x+iy \qquad\qquad x+iy\mapsto\begin{pmatrix}x&-y\\y&x\end{pmatrix}$$

LINAG Ü5

8.2.1. α) $P(X) = X^4 - X^3 - X^2 + X$ in $\mathbb{Z}_3$

$P(0) = 0 \quad P(1) = 1-1-1+1 = 0 \quad P(2) = 1-2-1+2 = 0$

$(X-0) = X \quad (X-1) = (X+2) \quad (X-2) = (X+1)$

$X \cdot (X-1)^2 (X+1) = (X^2+X)(X^2-2X+1) = X^4 - 2X^3 + X^2 + X^3 - 2X^2 + X$

$= X^4 - X^3 - X^2 + X = P(X)$

$\Rightarrow$ Nullstelle 0 mit Vielfachheit 1, Nullstelle 1 mit Vielfachheit 2 und Nullstelle 2 mit Vielfachheit 1

β) $P(X) = X^3 - 2$ in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

$X^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow X^3 = 2 \Leftrightarrow X = \sqrt[3]{2} \Rightarrow$ keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$

$(X^3 - 2) : (X - \sqrt[3]{2}) = X^2 + \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{4}$

$-(X^3 - \sqrt[3]{2}X^2)$

$\sqrt[3]{2}X^2 - 2$

$-(\sqrt[3]{2}X^2 - \sqrt[3]{4}X)$

$\sqrt[3]{4}X - 2$

$-(\sqrt[3]{4}X - \sqrt[3]{8})$

0

$: (X - \sqrt[3]{2}) = X + 2\sqrt[3]{2}$

$-(X^2 - \sqrt[3]{2}X)$

$2\sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{4}$

$-(2\sqrt[3]{2}X - 2\sqrt[3]{4})$

$3\sqrt[3]{4}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{2}$ ist Nullstelle mit Vielfachheit 1 in $\mathbb{R}$

$\sqrt[3]{2}$ hat in $\mathbb{C}$ folgende 3 Lösungen $(\sqrt[3]{2}, 0) = \sqrt[3]{2}$

$(\sqrt[3]{2}, \frac{2\pi}{3}) = \sqrt[3]{2} \cdot \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sqrt[3]{2} \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{2}$

$(\sqrt[3]{2}, \frac{4\pi}{3}) = \sqrt[3]{2} \cdot \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sqrt[3]{2} \cdot \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{2}$

Da Vielfachheiten immer ≥ 1 und Summe der Vielfachheiten ≤ 3 folgt:

In $\mathbb{C}$ ist $\sqrt[3]{2}$ mit Vielfachheit 1, $-\frac{\sqrt[3]{2}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{2}$ mit Vielfachheit 1 und $-\frac{\sqrt[3]{2}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{2}$ mit Vielfachheit 1 Nullstellen.

ς) $P(X) = X^5 - X$ in $\mathbb{Z}_5$ da $\forall x \in \mathbb{Z}_5 : x^5 = x$ ist

$P(0) = 0 \quad P(1) = 0 \quad P(2) = 0 \quad P(3) = 0$ und $P(4) = 0$

Da die Vielfachheiten immer ≥ 1 und Summe der Vielfachheiten ≤ 5 folgt:

Nullstelle bei 0 mit Vielfachheit 1

—— " —— 1 —— " ——

—— " —— 2 —— " ——

—— " —— 3 —— " ——

—— " —— 4 —— " ——