LINAG Ü4

2.3.6 a) Ist $\mathbb{Z}^{2\times 1}$ ein UR von $\mathbb{R}^{2\times 1}$?

- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 1} \Rightarrow \mathbb{Z}^{2\times 1} \neq \emptyset$

- Sei $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 1}$ bel.

$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 1}$, da $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+y \in \mathbb{Z}$

- zz: $c \cdot \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 1}$ ist Element von $\mathbb{Z}^{2\times 1}$

Gegenbsp: $c = 0{,}1$ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{Z}$ $0{,}1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}1\\0{,}1\end{pmatrix} \notin \mathbb{Z}^{2\times 1}$

b) $\forall a \in \mathbb{R}$ $U_a := \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} : x_1 + x_2 + x_3 = a \right\}$

Frage: Wann ist U_a UR von $\mathbb{R}^{3\times 1}$?

- U_a muss $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ enthalten. $0+0+0=0 \Rightarrow a = 0$

- Sei $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \in U_0$ bel., d.h. $x_1+x_2+x_3=0$ $y_1+y_2+y_3=0$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{pmatrix}$ $\quad x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+y_3 \overset{\text{kommutativ}}{=}$

$= x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+y_3 = 0+0 = 0$

- Sei $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in U_0$ bel. Sei $c \in \mathbb{R}$ bel.

$c \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\cdot x_1\\c\cdot x_2\\c\cdot x_3\end{pmatrix}$ $\quad c\cdot x_1 + c\cdot x_2 + c\cdot x_3 \overset{\text{distributiv}}{=} c\cdot(x_1+x_2+x_3)$

$= c \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow U_0$ ist UR von $\mathbb{R}^{3\times 1}$

- Wenn $a \neq 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \vee x_3 \neq 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \notin U_a$ $\quad$ 0 muss aber Element von jedem UR sein, d.h. es gibt keinen anderen UR.

2.3.3 h) [illegible]