Zusammenfassung Heft 1 LINAG

Ida Hönigmann

6. November 2020

1 Algebraische Grundlagen

1.1 Gruppen

Definition 1.1. *X...Menge, $*: X^2 \to X$*
Sei $e \in X$.

1. *e heißt linksneutral (bzgl. $*$) $\Leftrightarrow \forall x \in X : e*x = x$*
2. *e heißt rechtsneutral (bzgl. $*$) $\Leftrightarrow \forall x \in X : x*e = x$*
3. *e heißt neutral, wenn e links- und rechtsneutral ist.*

Bemerkung. *Alle Strukturen dieser Art haben genau ein neutrales Element. e ist eindeutig!*

Definition 1.2 (Gruppe)**.** *X...Menge, $*: X^2 \to X$*
$(X, *)$ heißt Gruppe $\Leftrightarrow$

- $\forall x, y, z \in X : x * (y * z) = (x * y) * z$
- $\exists e \in X : e$ *neutral*
- $\forall x \in X : \exists y \in X : (x * y) = (y * x) = e$

Schreibweise. *Wenn $*$ assoziativ ist $x * y * z := (x * y) * z = x * (y * z)$*

Bemerkung. *In einer Gruppe ist das inverse Element jeweils eindeutig.*
$\forall x \forall y, y' : (y, y'$ *invers zu* $x\ ) \implies y = y'$

Definition 1.3. *$(X, *)$...Gruppe*
X heißt kommutativ oder abelsch $\Leftrightarrow \forall x \in X \forall y \in X : x * y = y * x$

Schreibweise. *$(K, *)$...Gruppe, $x \in X$*
x^{-1}... inverses Element von x

Bemerkung. *In einer Gruppe ist das neutrale Element eindeutig.*

Lemma 1.1. *Sei $(X, *)$ eine Gruppe.*

- $\forall x \in X \forall y \in X \forall y' \in X : (x*y = x*y') \Leftrightarrow y = y'$
- $\forall x, y, y' : y * x = y' * x \Leftrightarrow y = y'$
- $\forall u, v \in X \exists! x \in X \exists! y \in X : u * x = v \wedge y * u = v$

Definition 1.4 (Untergruppe)**.** *$(X, *)$...Gruppe*
$U \leq X$ ist eine Untergruppe von $(X, *) \Leftrightarrow$

- $U \neq \emptyset$
- *U ist abgeschlossen bzgl. $* : \forall x, y \in U : x*y \in U$*
- *U ist abgeschlossen bzgl. $x^{-1} : \forall x \in U : x^{-1} \in U$*

Bemerkung. *Wenn $(X, *)$ eine Gruppe ist heißen $(\{e\}, *)$ und $(X, *)$ triviale Untergruppen.*

1.2 Körper

Definition 1.5 (Körper)**.** *$(K, +, *)$ heißt Körper $\Leftrightarrow$ K...Menge, $+ : K^2 \to K$, $* : K^2 \to K$ und $\exists 0, 1 \in K : 0 \neq 1$, sodass*

- *$(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0.*
- *$(K \setminus \{0\}, *)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1.*
- $\forall x, y, z \in K : x(y + z) = xy + xz \wedge (y + z)x = yx + zx$

Schreibweise. $K^x := K \setminus \{0\}$

Bemerkung. *Körper sind Nullteiler frei.*

Lemma 1.2. $(K, +, *)$... *Körper*

- $\forall x \in K : (x * 0) = (0 * x) = 0$
- $1 * 0 = 0 * 1 = 0$ *also* 1 *ist neutral bzgl.* $(K, *)$
- $\forall x, y \in K : -(xy) = (-x)y \wedge -(xy) = x(-y)$
- $(-1)(-1) = 1$
- $\forall x, y \in K : x * y = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$

Definition 1.6. $(K, +, *)$...*Körper*
$U \leq K$ *heißt Unterkörper von* $(K, +, *)$, *wenn*

- $0 \in U \wedge 1 \in U$
- U *abgeschlossen unter* $+$, *additiv Inversen,* $*$ *und multiplikativ Inversen*

Definition 1.7. $(K, +, *)$...*Körper*
$charK :=$ *minimalen* $\in \mathbb{N}^+ : 1 + 1 + ... + 1 = 0$, *falls so ein* n *existiert und* 0 *sonst.*

1.3 Gruppenhomomorphismen

Definition 1.8. *Seien* $(G, *)$ *und* $(G', *)$ *Gruppen.*
$h : G \to G'$ *heißt Homomorphismus* $\Leftrightarrow \forall x, y \in G : h(x * y) = h(x) * h(y)$
Allgemein gilt das bei jeder Algebra.
Wenn h *bijektiv nennt man* h *auch Isomorphismus. Wenn zusätzlich* $(G, *) = (G', *)$ *heißt* h *Automorphismus.*
$(G, *)$ *und* $(G', *)$ *heißen isomorph, wenn* $\exists h : G \to G'$ *mit* h *Isomorphismus.*

Bemerkung. $(G, *)$ *und* $(G', *)$... *Gruppen,* $h : G \to G'$ *Homomorphismus*

- $h(e_G = e_{G'})$
- $\forall x \in G : h(x^{-1}) = h(x)^{-1}$

Definition 1.9. $(G, *)$ *und* $(G', *)$ ... *Gruppen,* $h : G \to G'$ *Homomorphismus*
Bild von $h := h[G] := \{h(x) : x \in G\}$
$h[G]$ *ist Untergruppe von* $(G', *)$.
Kern von $h := kerh := h^{-1}[\{e_G\}] = \{x \in G : h(x) = e_G\}$

Lemma 1.3. $(G, *)$ *und* $(G', *)$... *Gruppen,* $h : G \to G'$... *Homomorphismus*

- $kerh \leq (G, *)$
- $\forall a, b \in G : h(a) = h(b) \Leftrightarrow a^{-1}b \in kerh$
- $\forall a, b \in G : h(a) = h(b) \Leftrightarrow ab^{-1} \in kerh$
- $\forall a, b \in G : h(a) = h(b) \Leftrightarrow b^{-1}a \in kerh$
- $\forall a, b \in G : h(a) = h(b) \Leftrightarrow ba^{-1} \in kerh$
- h *injektiv* $\Leftrightarrow kerh = \{e_G\}$

Definition 1.10. $(G, *)$... *Gruppe,* U... *Untergruppe von* G, $a \in G$
$a * U := \{a * u : u \in U\}$ *heißt Linksnebenklasse von* U.
$U * a := \{u * a : u \in U\}$ *heißt Rechtsnebenklasse von* U.

Bemerkung. $(G, *)$... *Gruppe,* U... *Untergruppe von* G, $a, b \in G$
$b \in aU \Leftrightarrow aU = bU \Leftrightarrow a \in bU$
Wenn $u \in U \implies uU = U$

Bemerkung. *Linksnebenklassen bilden Partition von* $(G, *)$.

Definition 1.11. $(G, *)$... *Gruppe,* U... *Untergruppe von* G
U *heißt Normalteiler der Gruppe, wenn* $\forall a \in G : aU \subseteq Ua$.
Dabei stimmt immer auch $aU \supseteq Ua$ *und somit* $aU = Ua$.
Wenn $(G, *)$ *kommutativ ist, ist jede Untergruppe Normalteiler.*
Mit G/U *bezeichnet man die Menge aller Linksnebenlassen, also* $G/U := \{aU : a \in G\}$

Lemma 1.4. $(G, *)$... *Gruppe,* U... *Untergruppe,* G/U... *Menge aller Linksnebenklassen*
$\forall aU, bU \in G/U : (aU) * (bU) := (ab)U$

Lemma 1.5. $(G, *)$... *Gruppe,* $U \leq (G, *)$... *Normalteiler*
$* : G/U \to G/U$ *definiert durch* $aU * bU := (ab)U$
$(G/U, *)$ *bildet eine Gruppe.*

Bemerkung. *$(G,*)$ und $(G',*)$... Gruppen, $h: G \to G'$ Homomorphismus*

Dann ist $ker h$ Normalteiler von $(G,*)$.

Lemma 1.6. *$(G,*)$... Gruppe, $U \leq (G,*)$... Normalteiler*

Dann existiert ein $h: G \to G/U$ definiert durch $a \mapsto aU$. h ist Homomorphismus von $(G,*)$ nach $(G/U,*)$ und $ker h = U$.

Bemerkung. *Jeder Normalteiler ist Kern eines Homomorphismus.*

Theorem 1.7 (Homomorphiesatz für Gruppen)**.** *$(G,*)$ und $(G',*)$... Gruppen, $h: G \to G'$... Homomorphismus*

$\tilde{h}: G/_{ker h} \to G'$ mit $a * ker h \mapsto h(a) \implies \tilde{h}$ Homomorphismus, injektiv und $ker \tilde{h} = \{ker h\}$

1.4 Vektorräume

Definition 1.12. *M... Menge*

Ein n-tupel wird definiert als $M^n := \{f : f$ ist Funktion von $\{1,2,...,n\}$ nach $M\}$.

Definition 1.13. *$(K,+,*)$... Körper*

Ein Vektorraum über $(K,+,*)$ ist definiert als $(V,+,(\phi_c)_{c\in K})$ wobei V eine Menge ist, $+ : V^2 \to V$ und $\forall c \in K : \phi_c : V \to V$ definiert durch $x \mapsto \phi_c(x) =: c * x$. Weiters muss folgendes gelten:

- *$(V,+)$ ist eine Gruppe.*
- $\forall c \in K \forall x,y \in V : c*(x+y) = cx + cy$
- $\forall c,d \in K \forall x \in V : (c+d)*x = cx + dx$
- $\forall c,x \in K \forall x \in V : (c*d)*x = c*(d*x)$
- $\forall x \in V : 1 * x = x$

Bemerkung. *$(K^n,+,*)$ ist kein Körper, sondern ein Vektorraum. Dabei ist $(0,0,...,0)^T$ das neutrale Element bzgl. $+$, $(-a_1,...,-a_n)$ ist das inverse Element und $+$ ist assoziativ.*

Bemerkung. *$(V,+)$... Vektorraum über $(K,+,*)$*

- *$(V,+)$ ist kommutativ*
- $\forall a \in V : 0 * a = 0$
- $\forall a \in V : (-1) * a = -a$
- $\forall c \in K : c * 0 = 0$

Definition 1.14. *$(V,+)$... Vektorraum über $(K,+,*)$*

$U \leq V$ heißt Unterraum von $V \Leftrightarrow$

- *$U \neq \emptyset$*
- *U abgeschlossen unter $+$*
- *U abgeschlossen unter $*$*

Bemerkung. *$x \in U \implies -x \in U$, da $-x = (-1) * x \in U$*

Statt $U \neq \emptyset$ kann man auch $0 \in U$ verwenden.

Ein Unterraum ist selbst wieder ein Vektorraum.

$\{0\}$ und V nennt man auch triviale Unterräume von V.