LINAG Ü5

2.4.8. a) Frage: Eine Menge $M \subset V$ ist l.u. $\iff$ jede endliche Teilmenge von M ist l.u.

1) M ist l.u. $\Rightarrow \forall B \in \mathcal{P}(M): B$ ist l.u.

Behauptung: wahr

Bew: Sei B eine bel. Teilmenge von M, die nicht leer ist.

Angenommen $\exists b \in B: \exists v_1, v_2, \ldots, v_n \in B\ \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in K: b = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$

Dann gilt aber auch $b \in M: \exists v_1, v_2, \ldots, v_n \in M\ \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in K: b = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$,

also wäre M l.a. $\lightning$

$\Rightarrow$ jede Teilmenge von M ist l.u.

2) $\forall B \in \mathcal{P}(M): B$ ist l.u. $\Rightarrow M$ ist l.u.

Behauptung: wahr

Bew: Angenommen M ist l.a., d.h. $\exists u \in M: \exists n \in \mathbb{N}:$

$\exists u \in M: \exists n \in \mathbb{N}: \exists v_1, v_2, \ldots, v_n \in M\ \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in K: u = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i$

Nun bilden die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine endliche Teilmenge B von M.

Dann gilt aber

$\exists u \in B \cup \{u\}: \exists n \in \mathbb{N}: \exists v_1, v_2, \ldots, v_n \in B \cup \{u\}\ \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in K: u = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i$

also wäre B nicht l.u. $\lightning$

$\Rightarrow M$ ist l.u.

b) Frage: Eine unendliche Menge $M \subset V$ ist l.u. $\iff \forall n \in \mathbb{N}\ \exists T \subset M: T$ l.u. $\wedge \# T = n$

1) M ist. l.u $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists T \subset M: T$ l.u. $\wedge \# T = n$

Behauptung: wahr

Bew: von oben wissen wir: jede Teilmenge von M ist l.u. und da jede unendliche Menge für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit $\#$ Teilmenge $= n$ besitzt gilt die Aussage.

2) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists T \subset M: T$ l.u. $\wedge \# T = n \Rightarrow M$ ist l.u.

Behauptung: falsch

Gegenbsp: $K = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $M = \{(1,0,0,\ldots), (0,1,0,\ldots), (0,0,1,0,\ldots)\} \cup \{(2,0,0,\ldots)\}$

Offensichtlich existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge T, die l.u. ist mit $\# T = n$,

nämlich aus $M \setminus \{(2,0,0,\ldots)\}$.

LINAG Ü5

2.4.8 ... b) 2) Aber M ist nicht l.u., da

$(2,0,0,\dots) = 2\cdot(1,0,0,\dots)$

c) Eine endliche Menge M ist l.u $\Leftrightarrow \forall n \in \{0,1,\dots,\#M\}\ \exists T \subset M: T$ ist l.u. $\wedge\ \#T = n$

1) M l.u. $\Rightarrow \forall n \in \{0,1,\dots,\#M\}\ \exists T \subset M: T$ ist l.u. $\wedge\ \#T = n$

Behauptung: wahr

Bew: Sei $n \in \{0,1,\dots,\#M\}$ beliebig. Wählen wir nun n Vektoren aus M, so erhalten wir eine Teilmenge T für die gilt $\#T = n$. Oben haben wir gezeigt, dass alle Teilmengen von M l.u sind also ist auch T l.u.

2.) $\forall n \in \{0,1,\dots,\#M\}\ \exists T \subset M: T$ ist l.u. $\wedge\ \#T = n \Rightarrow M$ ist l.u.

Behauptung: wahr

Bew: Es gilt $M \subset M$ und $\#M = \#M$. Da M endlich ist existiert offensichtlich keine andere Teilmenge mit Mächtigkeit M. Aus der linken Seite folgt, dass M l.u. sein muss. $\square$