LINAG Ü6

2.4.10 $\quad b \in \mathbb{R}^\times \quad \forall x \in \mathbb{R}: f''(x) + b^2 \cdot f(x) = 0$

a) $g_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(b \cdot x)$ $\qquad g_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(b \cdot x)$

$\sin'(b \cdot x) = b \cdot \cos(b \cdot x)$ $\qquad \cos'(b \cdot x) = -b \cdot \sin(b \cdot x)$

$\sin''(b \cdot x) = -b^2 \cdot \sin(b \cdot x)$ $\qquad \cos''(b \cdot x) = -b^2 \cdot \cos(b \cdot x)$

$\sin''(b \cdot x) + b^2 \cdot \sin(b \cdot x)$ $\qquad \cos''(b \cdot x) + b^2 \cdot \cos(b \cdot x) =$

$= -b^2 \cdot \sin(b \cdot x) + b^2 \cdot \sin(b \cdot x) = 0$ $\qquad = -b^2 \cdot \cos(b \cdot x) + b^2 \cdot \cos(b \cdot x) = 0$

ZZ: g_1, g_2 sind l.u.

$$a \cdot g_1 + c \cdot g_2 = a \cdot \sin(b \cdot x) + c \cdot \cos(b \cdot x)$$

Indirekt angenommen g_1, g_2 l.a $\qquad$ Bei $x = 0$ folgt

$$0 = a \cdot \sin(b \cdot 0) + c \cdot \cos(b \cdot 0) = a \cdot \sin(0) + c \cdot \cos(0)$$

$$= a \cdot 0 + c \cdot 1 = c$$

Bei $x = \frac{\pi}{2b}$ folgt:

$$0 = a \cdot \sin\left(b \cdot \frac{\pi}{2b}\right) + c \cdot \cos\left(b \cdot \frac{\pi}{2b}\right) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= a \cdot 1 + c \cdot 0 = a$$

$\lightning$, da nur die triviale LK für den 0_V existiert.

$\Rightarrow g_1, g_2$ sind l.u.

b) $\{ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto r \cdot \sin(b \cdot x) \text{ mit } r \in \mathbb{R} \}$

$$g''(x) + b^2 \cdot g(x) = -b^2 \cdot r \cdot \sin(b \cdot x) + b^2 \cdot r \cdot \sin(b \cdot x) = 0$$