ANA Ü2

2.) ges: maximaler Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und Ableitung bei $x \in D$

•) $\cos(3x)$ $\quad D = \mathbb{R}$ (Da Konvergenzradius $R = \infty$)

$$(\cos(3x))' = -\sin(3x) \cdot 3 = -3\sin(3x)$$

•) $\tan^2(5x^3)$ $\quad$ Da $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ist $\tan(x)$ für alle x mit $\cos(x) \neq 0$ definiert.

$$\cos(5x^3) = 0 \Leftrightarrow 5x^3 = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: x^3 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \sqrt[3]{\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}} \right\}$$

$$(\tan^2(5x^3))' = 2 \cdot \tan(5x^3) \cdot \left(\frac{\sin(5x^3)}{\cos(5x^3)} \right)'$$

$$= 2\tan(5x^3) \cdot \frac{((\sin(5x^3))' \cdot \cos(5x^3) - \sin(5x^3) \cdot (\cos(5x^3))')}{\cos^2(5x^3)}$$

$$= 2\tan(5x^3) \cdot \frac{\cos(5x^3) \cdot 15x^2 \cdot \cos(5x^3) - \sin(5x^3) \cdot (-\sin(5x^3) \cdot 15x^2)}{\cos^2(5x^3)}$$

$$= 2\tan(5x^3) \cdot \frac{\cos^2(5x^3) \cdot 15x^2 + \sin^2(5x^3) \cdot 15x^2}{\cos^2(5x^3)}$$

$$= 2\tan(5x^3) \cdot \frac{15x^2 + \frac{\sin^2(5x^3)}{\cos^2(5x^3)} \cdot 15x^2}{1}$$

$$= 30x^2 \cdot \tan(5x^3) \cdot (1 + \tan^2(5x^3))$$

$$= 30x^2 \cdot \tan(5x^3) + 30x^2 \tan^3(5x^3)$$

•) $\ln|\cos(x)|$ $\quad$ Da $\ln$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ definiert ist, ist

$D = \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi k)$ (da dort $\cos(x) = 0$)

$$(\ln|\cos(x)|)' = \frac{1}{|\cos(x)|} \cdot (|\cos(x)|)'$$

$$= \frac{1}{|\cos(x)|} \cdot \operatorname{sgn}(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)) = -1 \cdot \frac{\operatorname{sgn}(\cos(x)) \cdot \sin(x)}{\operatorname{sgn}(\cos(x)) \cdot \cos(x)}$$

$$= -\tan(x)$$

•) $\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$ $\quad D = \mathbb{R}$

$$\left(\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \right)' = \frac{1}{2} \cdot (\exp(x) - (-1) \cdot \exp(-x)) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

$$= \cosh(x)$$

...

ANA Ü2

2.) ... ·) $\cosh(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$ $D=\mathbb{R}$

$$\left(\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(\exp(x)+(-1)\cdot\exp(-x)\right)$$

$$= \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} = \sinh(x)$$

4.) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+1\right) &, x>0 \\ ax+b &, x\leq 0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+1\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} ax+b = b \qquad \Rightarrow b=0$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+}\frac{x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+1\right)-(ax+b)}{x} = \lim_{x\to 0+} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+1\right) - a = -a$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-}\frac{ax+b-b}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{ax}{x} = a$$

$$\Rightarrow a=-a \quad \Rightarrow a=0$$

ges: f'

$$\left(x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)' = 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+1\right) + x^2\cdot\left(\sin\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)'$$

$$= 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+1\right) + x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot(-1)\cdot x^{-2}$$

$$= 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+1\right) - x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot\frac{1}{x^2} = 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+1\right) - \cos\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+1\right)-\cos\left(\frac{1}{x}+1\right) &, x>0 \\ 0 &, x\leq 0\end{cases}$$

Da f' stetig und differenzierbar ist, ist f stetig differenzierbar und zwei Mal differenzierbar.

ANA Ü2

3.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(t) = \begin{cases} at & , t < 2 \\ b + t^{\frac{3}{2}} & , t \geq 2 \end{cases}$

$$\lim_{t \to 2-} f(t) = \lim_{t \to 2-} at = 2a$$

$$\lim_{t \to 2+} f(t) = \lim_{t \to 2+} b + \sqrt[2]{t^3} = b + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2a = b + 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{t \to 2-} \frac{f(t) - f(2)}{t-2} = \lim_{t \to 2-} \frac{at - 2a}{t-2} = \lim_{t \to 2-} a \cdot \frac{t-2}{t-2} = a$$

$$\lim_{t \to 2+} \frac{f(t) - f(2)}{t-2} = \lim_{t \to 2+} \frac{b + t^{\frac{3}{2}} - (b + 2\sqrt{2})}{t-2} = \lim_{t \to 2+} \frac{\sqrt{t^3} - 2\sqrt{2}}{t-2}$$

$$= \lim_{t \to 2+} \frac{(t^{\frac{3}{2}})' - (2\sqrt{2})'}{t' - 2'} = \lim_{t \to 2+} \frac{\frac{3}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}} - 0}{1 \cdot t^0 - 0} = \lim_{t \to 2+} \frac{3}{2} \cdot \sqrt[2]{t} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$2a = b + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\,\frac{3\sqrt{2}}{2} = b + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 3\sqrt{2} = b + 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow b = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow b = \sqrt{2}$$

---

ges: f'

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\, t\right)' = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\sqrt{2} + t^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} \cdot t^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3\sqrt{t}}{2}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{2}}{2} & , t < 2 \\ \frac{3\sqrt{t}}{2} & , t \geq 2 \end{cases}$$

Da f' stetig und differenzierbar ist f stetig differenzierbar und zwei mal differenziabar auf $\mathbb{R}$.

ANA Ü2

5.) Ist arcsin als Umkehrfunktion von sin ableitbar? ($(-1,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bzw. umgekehrt)

Aus dem letzten Übungsblatt bekannt:

$\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist streng monoton wachsend und bijektiv

Weiters ist bekannt, dass sin auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

$(\sin(x))' = \cos(x)$ und ist somit 0 genau wenn $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (\sin(x))' \neq 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Laut Satz 7.1.12 ist nun arcsin auf $\sin((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ differenzierbar.

Da sin stetig ist das Bild ein Intervall, da $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$ folgt, dass

$\forall x \in (-1, 1)$: arcsin ist bei x differenzierbar

$$(\arcsin(y))' = (\arcsin(\sin(x)))' = \frac{1}{(\sin(x))'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}$$

Ist areasinh als Umkehrfunktion von sinh ableitbar? ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Aus letztem Übungsblatt bekannt:

sinh ... streng monoton wachsend, stetig, $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$\sinh^{-1} = \text{areasinh}$

$(\sinh(x))' = \cosh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$ ist dann Null, wenn

$\exp(x) = \exp(-x)$ und da exp streng monoton wachsend ist nur der Fall wenn $x = 0$.

Laut Satz 7.1.12. ist areasinh nun auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh(x) - \sinh(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} - \frac{1-1}{2} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$(\text{areasinh}(y))' = (\text{areasinh}(\sinh(x)))' = \frac{1}{(\sinh(x))'} = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\cosh(\text{areasinh}(y))}$$

ANA Ü2

6.) $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=a\cdot f(x)$ $\quad$ zz: $f(x)=c\cdot e^{ax}$

$(f(x)\cdot e^{-ax})' = f'(x)\cdot e^{-ax} + f(x)\cdot(e^{-ax})'$
$= a\cdot f(x)\cdot e^{-ax} + f(x)\cdot(-a)\cdot e^{-ax} = a\cdot f(x)\cdot e^{-ax} - a\cdot f(x)\cdot e^{-ax}$
$=0$

$\Rightarrow f(x)\cdot e^{-ax} = c$ für ein $c\in\mathbb{R}$

$f(x)\cdot e^{-ax}=c \iff f(x)=\frac{c}{e^{-ax}} = c\cdot e^{ax}$ $\square$

7.) $f:[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R},\ x\mapsto \sin(x)-\exp(-x)$

zz: $\exists!\, x\in[0,\frac{\pi}{2}]: f(x)=0$

$f(x)=0 \iff \sin(x)-\exp(-x)=0$

$\sin(0)-\exp(-0)=0-1=-1$

$\sin(\frac{\pi}{2})-\exp(-\frac{\pi}{2}) = 1-\frac{1}{\exp(\frac{\pi}{2})} > 1-\frac{1}{1}=0$

Da f stetig ist und $f([0,\frac{\pi}{2}])\supseteq[-1,0]$ muss f eine Nullstelle besitzen.

$(\sin(x)-\exp(-x))' = \cos(x)-(-1)\cdot\exp(-x) = \cos(x)+\exp(-x)$

Da $\cos(x)$ $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ größer oder gleich Null ist und auch $\exp(-x)>0$ $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ist $\cos(x)+\exp(-x)>0$ $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

$\Rightarrow \sin(x)-\exp(-x)$ ist auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend.

$\Rightarrow$ Es gibt maximal eine Nullstelle

ANA Ü2

10.) $f_1 : I \to \mathbb{C}$, $f_2 : I \to \mathbb{C}$ ... beide differenzierbar

zz: $f_1'(x) = f_2'(x) \implies \exists w \in \mathbb{C} : f_2(x) = f_1(x) + w$

$$\lim_{t \to x} \frac{f_1(t) - f_1(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{f_2(t) - f_2(x)}{t - x}$$

8.) $f(x) = x^3 \cdot e^x$ ges: $f^{(1000)}(x)$

$$(x^3 \cdot e^x)^{(1000)} = \sum_{k=0}^{1000} \binom{1000}{k} (x^3)^{(k)} (e^x)^{(1000-k)} = \sum_{k=0}^{3} \binom{1000}{k} \cdot (x^3)^{(k)} \cdot e^x$$

$$= x^3 \cdot e^x + \binom{1000}{1} \cdot 3 \cdot x^2 \cdot e^x + \binom{1000}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot x \cdot e^x + \binom{1000}{3} \cdot 6 \cdot e^x$$

$$= x^3 \cdot e^x + 3000\, x^2 \cdot e^x + \binom{1000}{2} \cdot 6 \cdot x \cdot e^x + \binom{1000}{3} \cdot 6 \cdot e^x$$

$h(x) = \frac{1}{2 + \exp(4ix)}$ ges: $h'(x)$

$$\left(\frac{1}{2 + \exp(4ix)}\right)' = \frac{-(2 + \exp(4ix))'}{(2 + \exp(i4x))^2} = \frac{-4i \cdot \exp(4ix)}{(2 + \exp(4ix))^2}$$

$g(x) = \exp(x^{999})$ ges: $g^{(1000)}(0)$

$$((\exp(x^{999}))')^{(999)} = (\exp(x^{999}) \cdot 999 \cdot x^{998})^{(999)} = 999 \cdot \sum_{k=0}^{999} \binom{999}{k} (\exp(x^{999}))^{(k)} (x^{998})^{(999-k)}$$

Behauptung: $(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k}$

vollständig Induktion nach k:

$k=1$: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} \cdot x^{n-1}$

$k+1$: $(x^n)^{(k+1)} = ((x^n)^{(k)})' = \left(\frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k}\right)' = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (n-k) \cdot x^{n-k-1}$

$$= \frac{n!(n-k)}{(n-k)!} \cdot x^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!} \cdot x^{n-(k+1)} = \frac{n!}{(n-(k+1))!}\, x^{n-(k+1)}$$

Sei $k \in \{0, 1, \dots, 999\}$ bel. $(x^{998})^{(999-k)} = \frac{999!}{(999-(998-k))!} \cdot x^{999-(998-k)}$

$= \frac{998!}{(k+1)!} \cdot x^{k+1}$ wenn $x = 0$ ist jeder Summand 0

$\implies g^{(1000)}(0) = 0$

ANA Ü2

9.) $f(x) = 4 - x^2 \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad a>0 \quad b>0$

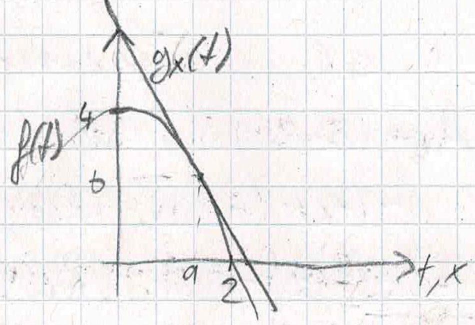
$g_x(t) = k \cdot t + d = f'(x) \cdot t + d$

$g_x(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow f'(x) \cdot x + d = f(x)$

$\Leftrightarrow -2x \cdot x + d = 4 - x^2$

$\Leftrightarrow -2x^2 + d = 4 - x^2 \quad \Leftrightarrow d = x^2 + 4$



$\underline{g_x(t) = -2xt + x^2 + 4}$

$g_x(0) = -2x \cdot 0 + x^2 + 4 = x^2 + 4$

$g_x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow -2xt + x^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow t = \frac{-x^2 - 4}{-2x}$

$\Leftrightarrow t = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

$A(x) = \frac{(x^2+4)\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{2} + 2x + 2x + \frac{8}{x}\right)$

$= \frac{x^3}{4} + 2x + \frac{4}{x}$

$A'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 + 2 - 4 \cdot \frac{1}{x^2}$

$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - 4 \cdot \frac{1}{x^2} + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{x^2} = -2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x^4 - 4 = -2x^2 \quad \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^4 + 2x^2 - 4 = 0 \qquad (y = x^2)$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}y^2 + 2y - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - (-3 \cdot 4)}}{\frac{3}{2}} \quad \Leftrightarrow y_{1,2} = \pm \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow x^2 = \pm \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow A(x)$ hat bei $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ein Extremum (und sonst im oberen Quadranten nicht)

$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{4}{\sqrt{3}} + 4 \cdot \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}$

$= \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} \approx 6{,}1584 \qquad (a,b) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\right)$

$A(2) = \frac{2^3}{4} + 2 \cdot 2 + \frac{4}{2} = 2 + 4 + 2 = 8$

Da $A(2) > A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ kann $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ kein Maximum sein.

$\Rightarrow A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ ist ein lokales Minimum