PDGL Üg

1) $\varepsilon>0$ $\quad f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ $\quad \hat f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\quad -\varepsilon\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f$ in $\mathbb{R}^n$

zz: $u_\varepsilon \to f$ für $\varepsilon\to 0$ in welchem Sinn?

$$\hat f(k) = \widehat{-\varepsilon\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon}(k) = -\varepsilon\,\widehat{\Delta u_\varepsilon}(k) + \hat u_\varepsilon(k) = \varepsilon|k|^2\hat u_\varepsilon(k) + \hat u_\varepsilon(k) = (\varepsilon|k|^2+1)\,\hat u_\varepsilon(k)$$

$$\Rightarrow \hat u_\varepsilon(k) = \frac{1}{\varepsilon|k|^2+1}\hat f(k) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \hat f(k)$$

$$f(x) = F^{-1}[\hat f(k)](x) = F^{-1}[\lim_{\varepsilon\to 0}\hat u_\varepsilon(k)] = F^{-1}[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon|k|^2+1}\hat f(k)]$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\hat u_\varepsilon(k)|\,dk = \int_{\mathbb{R}^n}\underbrace{\left|\frac{1}{\varepsilon|k|^2+1}\right|}_{\in(0,1]}|\hat f(k)|\,dk \le \int_{\mathbb{R}^n} 1\cdot|\hat f(k)|\,dk = \|\hat f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

$$\Rightarrow \hat u_\varepsilon(k)\in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Mit dominierter Konvergenz ($\frac{1}{\varepsilon|k|^2+1}\hat f(k)e^{ikx} \le \hat f(k)$ ... integrierbar) folgt

$$F^{-1}[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon|k|^2+1}\hat f(k)] = \lim_{\varepsilon\to 0} F^{-1}[\frac{1}{\varepsilon|k|^2+1}\hat f(k)]$$

$\phi\in D(\mathbb{R}^n)$ bel.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle u_\varepsilon,\phi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle F^{-1}[\hat u_\varepsilon],\phi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle F^{-1}[\frac{1}{\varepsilon|k|^2+1}\hat f(k)],\phi\rangle \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=}\langle \lim_{\varepsilon\to 0}F^{-1}[\frac{1}{\varepsilon|k|^2+1}\hat f(k)],\phi\rangle = \langle f,\phi\rangle$$

* dominierte Konvergenz

$$F^{-1}[g(k)](x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} g(k)e^{ikx}\,dk$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|F^{-1}[g(k)](x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|g(k)|\underbrace{|e^{ikx}|}_{=1}\,dk = (2\pi)^{-n}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|g\|_{L^1} = (2\pi)^{-n}\|g\|_{L^1}$$

$$\Rightarrow F^{-1}[g(k)](x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ für } g(k)\in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$F^{-1}[\hat u_\varepsilon(k)](x)\,\phi(x) \le 1\!\!1_{\operatorname{supp}\phi}(x)\,\|F^{-1}[\hat u_\varepsilon(k)]\|_{L^\infty}$ ... integrierbar, da $\operatorname{supp}\phi$ kompakt

Insgesamt also $u_\varepsilon\to f$ distributionell. $\square$

hinten nochmals

PDGL Ü3

1) $\varepsilon > 0$ $\quad f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ $\quad \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\quad -\varepsilon \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f$ in $\mathbb{R}^n$

zz: $u_\varepsilon \to f$ für $\varepsilon \to 0$ in welchem Sinn?

$$F(f) = F(-\varepsilon \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon) \overset{\text{linear}}{=} -\varepsilon F(\Delta u_\varepsilon) + F(u_\varepsilon) \overset{\text{linear}}{=} -\varepsilon \sum_{j=1}^{n} F\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_\varepsilon\right) + F(u_\varepsilon) =$$

$$= -\varepsilon \sum_{j=1}^{n} \left((-1) k_j^2 F(u_\varepsilon)\right) + F(u_\varepsilon) = F(u_\varepsilon)\left(\varepsilon \sum_{j=1}^{n} k_j^2 + 1\right) = F(u_\varepsilon)\left(\varepsilon |k|^2 + 1\right)$$

$$\Rightarrow F(u_\varepsilon) = \frac{F(f)}{\varepsilon |k|^2 + 1} = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon |k|^2 + 1}}_{\in [0,1]} \underbrace{\hat{f}}_{\in L^1} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \quad u_\varepsilon = F^{-1}\left[\frac{\hat{f}}{\varepsilon |k|^2 + 1}\right] = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{f}(k)}{\varepsilon |k|^2 + 1} e^{ikx} \, dk$$

Majorisierte Konvergenz

da $\left| \frac{1}{\varepsilon |k|^2 + 1} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| = \underbrace{\left| \frac{1}{\varepsilon |k|^2 + 1} \right|}_{\in [0,1]} |\hat{f}| \underbrace{|e^{ikx}|}_{=1} \leq |\hat{f}(k)|$ ... Integrierbar, da $\hat{f} \in L^1$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{f}(k)}{\varepsilon |k|^2 + 1} e^{ikx} \, dk = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\hat{f}(k)}{\varepsilon |k|^2 + 1} e^{ikx} \, dk =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) \, e^{ikx} \, dk = f(x)$$

also sogar punktweise Konvergenz.

$\square$

2) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit glattem Rand, u klassische Lsg von
$$u_{tt} - d u_t - \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \times (0,\infty)$$
$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times (0,\infty)$$
$$u(\cdot,0) = u_0 \text{ in } \Omega$$
$$u_t(\cdot,0) = u_1 \text{ in } \Omega$$

$d > 0$ konstant $\quad u_0 \in H_0^1(\Omega) \quad u_1 \in L^2(\Omega)$

(i) $E(t) := \int_\Omega u_t^2 + |\nabla u|^2 dx$ $\quad$ z.z.: $E(t)$ ist in $t \in (0,\infty)$ glm. beschränkt

$$0 = u_{tt} - d u_t - \Delta u \iff 0 = u_t \cdot u_{tt} - d u_t^2 - u_t \Delta u$$

$$\iff 0 = \int_\Omega u_t u_{tt} dx - d \int_\Omega u_t^2 dx - \int_\Omega u_t \Delta u \, dx$$

$$\iff 0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 dx + d\int_\Omega u_t^2 dx + \int_\Omega \nabla u_t \cdot \nabla u \, dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \nu) \overbrace{u_t}^{=0} ds}_{=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 dx - d\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx -$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 + |\nabla u|^2 dx - d\int_\Omega u_t^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} E(t) + d\int_\Omega u_t^2 dx$$

Vorzeichen fehler?

$\iff \frac{d}{dt} E(t) = -2d \int_\Omega u_t^2 dx \leq 0$ $\quad$ also monoton fallend

$$E(0) = \int_\Omega (u_t(x,0))^2 + |\nabla u(x,0)|^2 dx = \int_\Omega u_1(x)^2 + |\nabla u_0(x)|^2 dx = \|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 < \infty$$

$$\Rightarrow 0 \leq E(t) \leq \|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{H^1(\Omega)}$$

(ii) ges: formale Lsg

ONB v_k von $-\Delta$ mit EW $\lambda_k > 0$ $\quad$ Ansatz $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(t) v_n(x)$

$$0 = \langle u_{tt} - d u_t - \Delta u, v_n \rangle = \langle \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k'' v_k - d \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k' v_k + \lambda_k u_k v_k, v_n \rangle = u_n'' - d u_n' + \lambda_n u_n$$

lösen diese gewöhnliche DGL ergibt

$$u_n(t) = c_1 e^{\left(\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_n}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_n}\right)t}$$

Anfangswerte bestimmen

$$u_n(0) = \langle u(\cdot,0), v_n \rangle = \langle u_0, v_n \rangle \Rightarrow c_1 + c_2 = \langle u_0, v_n \rangle$$

$$u_n'(0) = \langle u_t(\cdot,0), v_n \rangle = \langle u_1, v_n \rangle \Rightarrow c_1\left(\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_n}\right) + c_2\left(\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_n}\right) = \langle u_1, v_n \rangle$$

$$\Rightarrow u_n(t) = -\frac{\left(\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_n}\right)\langle u_0, v_n \rangle - \langle u_1, v_n \rangle}{2\sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_n}} e^{\left(\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_n}\right)t} + \frac{\langle u_1, v_n \rangle - \langle u_0, v_n \rangle \left(\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_n}\right)}{2\sqrt{\frac{d^2}{4} - \lambda_n}}$$

dann könnte man das in u einsetzen um zu einem finalen Ergebnis zu kommen.

$\square$

PDGL Ü9

3) $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ $\quad \varepsilon > 0$ $\quad$ viskose Burgers-Gleichung $\quad u_t + u u_x - \varepsilon u_{xx} = 0$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$

$u(x,0) = g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

Cole-Hopf-Transformation $\quad u := -2\varepsilon \frac{v_x}{v}$

zz: man erhält eine Variante der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = -2\varepsilon\left(\frac{v_{tx} v - v_t v_x}{v^2}\right) \qquad u_x = -2\varepsilon\left(\frac{v_{xx} v - v_x v_x}{v^2}\right)$$

$$u_{xx} = -2\varepsilon\left(\frac{(v_{xxx} v + \cancel{v_{xx} v_x} - \cancel{v_{xx} v_x} - v_x v_{xx})v^2 - (v_{xx} v - v_x v_x)(v_x v + v v_x)}{v^4}\right) =$$

$$= -2\varepsilon \frac{1}{v^4}\left(v_{xxx} v^3 - v_{xx} v_x v^2 - v_{xx} v_x v^2 - v_{xx} v_x v^2 + v_x^3 v + v_x^3 v\right) =$$

$$= -2\varepsilon \frac{1}{v^4}\left(v_{xxx} v^3 - 3 v_{xx} v_x v^2 + 2 v_x^3 v\right) = -2\varepsilon \frac{v_{xxx} v^2 - 3 v_{xx} v_x v + 2 v_x^3}{v^3}$$

$$0 = u_t + u u_x - \varepsilon u_{xx} = -2\varepsilon\left(\frac{v_{tx} v - v_t v_x}{v^2}\right) + \left(-2\varepsilon \frac{v_x}{v}\right)\left(-2\varepsilon \frac{v_{xx} v - v_x v_x}{v^2}\right) - \varepsilon\left(-2\varepsilon \frac{v_{xxx} v^2 - 3 v_{xx} v_x v + 2 v_x^3}{v^3}\right) =$$

$$= -\frac{2\varepsilon v_{tx}}{v} + \frac{2\varepsilon v_t v_x}{v^2} + 4\varepsilon^2\left(\frac{v_{xx} v_x v - v_x^3}{v^3}\right) + 2\varepsilon^2 \frac{v_{xxx} v^2 - 3 v_{xx} v_x v + 2 v_x^3}{v^3} =$$

$$= \frac{2\varepsilon}{v}\left(-v_{tx} + \frac{v_t v_x}{v} + 2\varepsilon \frac{v_{xx} v_x}{v} - \cancel{2\varepsilon \frac{v_x^3}{v^2}} + \varepsilon v_{xxx} - 3\varepsilon \frac{v_{xx} v_x}{v} + \cancel{2\varepsilon \frac{v_x^3}{v^2}}\right) =$$

$$= \frac{2\varepsilon}{v}\left(\varepsilon v_{xxx} - \varepsilon \frac{v_{xx} v_x}{v} + \frac{v_x v_t}{v} - v_{tx}\right) = 2\varepsilon\left(\varepsilon\left(\frac{\Delta(v_x) v}{v^2} - \frac{v_x \Delta v}{v^2}\right) + \frac{v_x v_t}{v^2} - \frac{v_{tx} v}{v^2}\right)$$

$$= 2\varepsilon\left(\varepsilon \frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta v}{v}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{v_t}{v}\right)\right) = 2\varepsilon\left(\frac{d}{dx} \frac{\varepsilon \Delta v - v_t}{v}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \frac{\varepsilon \Delta v - v_t}{v} = 0$$

v ... Lsg von $\quad \varepsilon \Delta v - v_t = 0$ ... Wärmeleitungsgleichung

$\Rightarrow$ löst auch $\frac{d}{dx} \frac{\varepsilon \Delta v - v_t}{v} = 0$

$\square$

hinten nochmals

3) $\varepsilon > 0$ $\quad g \in L^\infty(\mathbb{R})$ $\quad u_t + u u_x - \varepsilon u_{xx} = 0$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ $\quad u(x,0) = g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

$u := -2\varepsilon \frac{v_x}{v}$ $\qquad$ zz: es entsteht Variante der Wärmeleitungsgleichung

$$u = \frac{\partial}{\partial x}(-2\varepsilon \ln(v))$$

$$u_t = \frac{d}{dt} u = \frac{d}{dt}\frac{d}{dx}(-2\varepsilon \ln(v)) \qquad u_x = \frac{d^2}{dx^2}(-2\varepsilon \ln(v)) \qquad u_{xx} = \frac{d^3}{dx^3}(-2\varepsilon \ln(v))$$

$$0 = u_t + u u_x - \varepsilon u_{xx} = \frac{d^2}{dt\,dx}(-2\varepsilon \ln(v)) + \frac{d}{dx}(-2\varepsilon \ln(v)) \cdot \frac{d^2}{dx^2}(-2\varepsilon \ln(v)) - \varepsilon \frac{d^3}{dx^3}(-2\varepsilon \ln(v)) =$$

$$= \frac{d^2}{dt\,dx}(-2\varepsilon \ln(v)) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}(-2\varepsilon \ln(v))\right)^2 - \varepsilon \frac{d^3}{dx^3}(-2\varepsilon \ln(v)\right) =$$

$$= 2\varepsilon \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dt}(-\ln(v)) + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx} 2\varepsilon(-\ln(v)\right)^2 + \varepsilon \frac{d^2}{dx^2}(\ln(v))\right) =$$

$$= 2\varepsilon \frac{d}{dx}\left(-\frac{d}{dt}\ln(v) + \varepsilon\left(\frac{d}{dx}\ln(v)\right)^2 + \varepsilon \frac{d^2}{dx^2}(\ln(v))\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dt}(\ln(v)) + \varepsilon\left(\left(\frac{d}{dx}\ln(v)\right)^2 + \frac{d^2}{dx^2}\ln(v)\right) = c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt}\ln(v) = \frac{1}{v} v_t \qquad \frac{d}{dx}\ln(v) = \frac{1}{v} v_x \qquad \frac{d^2}{dx^2}\ln(v) = \frac{d}{dx}\frac{v_x}{v} = \frac{v_{xx} v - v_x^2}{v^2} = \frac{v_{xx}}{v} - \left(\frac{v_x}{v}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad c = -\frac{v_t}{v} + \varepsilon\left(\left(\frac{v_x}{v}\right)^2 + \frac{v_{xx}}{v} - \left(\frac{v_x}{v}\right)^2\right) = -\frac{v_t}{v} + \varepsilon \frac{v_{xx}}{v} = -\frac{v_t - \varepsilon v_{xx}}{v}$$

$$\Rightarrow -cv = v_t - \varepsilon v_{xx}$$

Für die Wahl $c = 0$ erhalten wir die Wärmeleitungsgleichung.

$\square$

PDGL Ü9

4) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ... beschr. Gebiet mit glattem Rand

$u_t - \Delta u = f(u)$ in $\Omega \times (0, T^*]$, $\quad u = 0$ auf $\partial\Omega \times (0, T^*]$, $\quad u(\cdot, 0) = u_0$ in Ω

mit $u_0 \in L^2(\Omega)$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ... Lipschitz-stetig

(i) $X := C([0, T^*], L^2(\Omega))$ $\quad v \in X$ fest

$u_t - \Delta u = f(v)$ in $\Omega \times (0, T^*]$, $\quad u = 0$ auf $\partial\Omega \times (0, T^*]$, $\quad u(\cdot, 0) = u_0$ in Ω

$A: X \to X$, $\quad A(v) = u$ ... nicht-lin $\qquad$ zz: A ... wohldef

Theorem 6.17 $\quad u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in C^0([0,\infty), L^2(\Omega))$

$\Rightarrow u(t) = e^{-Lt} u_0 + \int_0^t e^{-L(t-s)} f(s)\, ds$, $t \geq 0$ ist eindeutige Lsg von $u_t + L(u) = f(\cdot, t)$ in $\Omega \times (0, \infty)$, $u(\cdot, 0) = u_0$ in Ω
$u = 0$ auf $\partial\Omega \times (0, \infty)$

- $u_0 \in L^2(\Omega)$ nach Angabe
- $v \in X$ bel. Nach Fortsetzungssatz $\exists$ stetige Fortsetzung auf $[0, \infty)$. Nennen wir diese $\overline{v}: [0,\infty) \to L^2(\Omega)$
- $f(\overline{v}) \in C^0([0,\infty), L^2(\Omega))$ da Lipschitz nach Angabe.

$\Rightarrow$ Mit Theorem 6.17. $\exists u$ ... Lsg und $u|_{[0,T^*]} \in X$.

- Eindeutig: $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ zwei Fortsetzungen von v bel. Mit Darstellung aus Theorem 6.17. folgt, dass da $\overline{v}_1|_{[0,T^*]} = v = \overline{v}_2|_{[0,T^*]} \Rightarrow u_1|_{[0,T^*]} = u_2|_{[0,T^*]}$

Also ist A wohldefiniert.

ii) zz: $\exists T^* > 0$: A .. Kontraktion auf X

$\|A(v) - A(w)\|_X^2 = \sup_{x \in [0,T^*]} \| \underbrace{A(v)(\cdot,t)}_{=:u_1(\cdot,t)} - \underbrace{A(w)(\cdot,t)}_{=:u_2(\cdot,t)} \|_{L^2(\Omega)}^2 = \sup_t \|u_1(\cdot,t) - u_2(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 =$ (wobei u_1, u_2 .. Lsg

$= \sup_t \int_\Omega (u_1 - u_2)^2(x,t)\, dx = \sup_t \int_0^t \frac{d}{ds} \int_\Omega (u_1 - u_2)^2(x,s)\, dx\, ds = \sup_t \int_0^t \int_\Omega 2(u_1 - u_2)(u_{1s} - u_{2s})(x,s)\, dx\, ds =$

$= \sup_t \int_0^t \int_\Omega (2(u_1 - u_2)(\Delta u_1 + f(v) - \Delta u_2 - f(w)))(x,s)\, dx\, ds = \sup_t \int_0^t \int_\Omega (u_1 - u_2)\Delta(u_1 - u_2)\, dx\, ds + \int_0^t \int_\Omega (u_1 - u_2)(f(v) - f(w))\, dx\, ds =$

$\overset{\text{Gauß}}{=} \sup_t \int_0^t \int_{\partial\Omega} \nabla(u_1 - u_2)\nu \underbrace{(u_1 - u_2)}_{=0}\, d\mathcal{H}^{n-1} - \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2}^2\, ds + \int_0^t \int_\Omega (u_1 - u_2)(f(v) - f(w))\, dx\, ds \leq \sup_t \int_0^t \int_\Omega (u_1 - u_2)(f(v) - f(w))\, dx\, ds \leq$

$\leq \sup_t \int_0^t \int_\Omega |u_1 - u_2|\, |f(v) - f(w)|\, dx\, ds \overset{\text{Lipschitz}}{\leq} \sup_t \int_0^t \int_\Omega |u_1 - u_2|\, L\, |v - w|\, dx\, ds \overset{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \sup_t L \int_0^t \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 \|v - w\|_{L^2}^2\, ds \leq$

$\leq \sup_t L t \sup_{s \in (0,t)} \|(u_1 - u_2)(\cdot,s)\|_{L^2}^2 \sup_{s \in (0,t)} \|(v - w)(\cdot,s)\|_{L^2}^2 = L T^* \sup_{s \in (0,T^*]} \|(u_1 - u_2)(\cdot,s)\|_{L^2}^2 \sup_{s \in (0,T^*]} \|(v - w)(\cdot,s)\|_{L^2}^2 =$

$= L T^* \|A(v) - A(w)\|_X \|v - w\|_X \qquad \Rightarrow \|A(v) - A(w)\|_X \leq L T^* \|v - w\|_X$ also Kontraktion

für $T^* \leq \frac{1}{L}$ und damit wegen Hahn-Banach Fixpunkt eindeutige Lsg, d.h. $\exists u: A(u) = u$ $\qquad \square$