LINAG Üg

3.5.15 $t \in \mathbb{Q}$ ges: alle t sodass Matrix A_t regulär ist

1.Fall $t = 1$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, da der Spaltenrang nur 3 ist gibt es sicher keine lineare Bijektion zu $\mathbb{Q}^4$

$\Rightarrow$ nicht regulär

2.Fall $t \neq \pm 1$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} -t\cdot II & \quad & \quad & -t\cdot III \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1-t^2 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & -t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} \cdot(1-t^2)^{-1} & \quad & \quad & \quad \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & -t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{1-t^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-t}{1-t^2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad & -t\cdot I & \quad & \quad \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & -t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & 0 & 0 \\ \frac{-t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad & \quad & -t\,II & +t^2\cdot II \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} & \frac{-t^3}{1-t^2} \\ \frac{-t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_t^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} & \frac{-t^3}{1-t^2} \\ \frac{-t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Divison durch $1-t^2$ ok, da $t \neq \pm 1$)

, da eine Inverse Matrix existiert ist bei $t \neq \pm 1$ die Matrix regulär.

3.Fall $t = -1$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat einen Spaltenrang < 4

$\Rightarrow$ nicht regulär

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} +II & \quad & \quad & \quad \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$