MAS Ü5

2) Gibt es auf $([0,1], \mathcal{B} \cap [0,1])$ eine Lebesgue-Zerlegung von ν bez. μ?

a) $\nu := \lambda$, $\mu = \delta$

$\nu_c = \lambda$, $\nu_s \equiv 0$ $\Rightarrow \nu = \nu_c + \nu_s$ klar

$\nu_c \ll \mu$: Sei N mit $\mu(N) = 0$ bel. $\Rightarrow N = \emptyset \Rightarrow \nu_c(N) = \lambda(N) = 0$

$\nu_s \perp \mu$: $\delta(\emptyset) = 0$, $\nu_s([0,1]) = 0$, $[0,1]^c = \emptyset$ $\Rightarrow$ Lebesgue Zerlegung $\exists$

b) $\nu := \delta$, $\mu := \lambda$

Angenommen $\exists \nu_s, \nu_c$: $\delta = \nu_c + \nu_s$, $\nu_c \ll \lambda$, $\nu_s \perp \lambda$ Also gilt

$\nu_c \ll \lambda \Rightarrow \forall N: \lambda(N) = 0 \Rightarrow \nu_c(N) = 0$; $\nu_s \perp \lambda \Rightarrow \exists M: \nu_s(M) = 0 = \lambda(M^c)$

$M \neq \emptyset$, da sonst $\lambda(M^c) = \lambda([0,1]) = 0$ ↯

Sei $x \in M$. $\nu_s(\{x\}) \leq \nu_s(M) = 0$ und $\lambda(\{x\}) = 0 \Rightarrow \nu_c(\{x\}) = 0$

$\Rightarrow 1 = \nu(\{x\}) = \nu_s(\{x\}) + \nu_c(\{x\}) = 0$ ↯ $\Rightarrow \nexists$ Lebesgue Zerlegung

c) $A \in \mathcal{B} \cap [0,1]$, $\nu(B) = |B \cap A|$, $\mu(B) = |B \cap A^c|$

$\nu_c \equiv 0$, $\nu_s = \nu$ $\Rightarrow \nu = \nu_c + \nu_s$ klar

$\nu_c \ll \mu$: Sei N mit $\mu(N) = 0$ bel. $\Rightarrow \nu_c(N) = 0$ klarerweise

$\nu_s \perp \mu$: $\mu(A) = |A \cap A^c| = 0$ $\nu_s(A^c) = |A^c \cap A| = 0$ $\Rightarrow$ Lebesgue Zerlegung $\exists$

d) $A \notin \mathcal{B} \cap [0,1]$, $\nu(B) = |B \cap A|$, $\mu(B) = |B \cap A^c|$

Angenommen $\exists \nu_c, \nu_s$: $\nu = \nu_c + \nu_s \wedge \nu_c \ll \mu \wedge \nu_s \perp \mu$

Aus $\nu_s \perp \mu$ folgt $\exists M \in \mathcal{B} \cap [0,1]$: $\nu_s(M^c) = 0 = \mu(M)$

$\mu(B) = 0 \Leftrightarrow |B \cap A^c| = 0 \Leftrightarrow B \cap A^c = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A$ und

$\nu(B) = 0 \Leftrightarrow B \subseteq A^c$ und da $\nu(B) = 0 \Rightarrow \nu_s(B) = 0 \Rightarrow B \subseteq A^c \Rightarrow \nu_s(B) = 0$

Insgesamt kann wegen $\mu(B) = 0 \Leftrightarrow B \subseteq A$ nur $M \subseteq A$ und falls $A \nsubseteq M$ gilt $\exists x \in A \setminus M$

$1 = \nu(\{x\}) = \nu_c(\{x\}) + \nu_s(\{x\}) = 0 + 0 = 0$, weil gilt $\mu(\{x\}) = 0$, da $x \in A$ also $\nu_c(\{x\}) = 0$

und $x \notin M \Rightarrow x \in M^c \Rightarrow \nu_s(\{x\}) = 0$ ↯ $\Rightarrow A \subseteq M$ also $A = M$

Das liefert einen Widerspruch, da $A = M \in \mathcal{B} \cap [0,1]$, aber nach Angabe $A \notin \mathcal{B} \cap [0,1]$ ↯

$\Rightarrow \nexists$ Lebesgue-Zerlegung

MAS Ü5

3) μ_F ... Lebesgue-Stieltjes Maß mit VF $F(x)=\begin{cases}0 & ,x<1\\ \ln(x) & ,1\leq x<e\\ \frac{x+6-3e}{3-e} & ,e\leq x<3\\ 4 & ,x\geq 3\end{cases}$

ges: Lebesgue-Zerlegung von μ_F bezüglich λ

ν_c,ν_s ist Lebesgue-Zerlegung von μ_F bzgl. $\lambda \Leftrightarrow \mu_F=\nu_c+\nu_s \ \wedge\ \nu_c \ll \lambda \ \wedge\ \nu_s \perp \lambda$

$F_c(x):=\begin{cases}0 & ,x<1\\ \ln(x) & ,1\leq x<e\\ \frac{x+6-3e}{3-e}-1 & ,e\leq x<3\\ 4-2 & ,x\geq 3\end{cases}$ $\qquad F_s(x):=\begin{cases}0 & ,x<e\\ 1 & ,e\leq x<3\\ 2 & ,x\geq 3\end{cases}$

$\nu_c((a,b])=F_c(b)-F_c(a)$ $\qquad \nu_s((a,b])=F_s(b)-F_s(a)$

Da $F_c+F_s=F$ gilt $\mu_F=\nu_c+\nu_s$ $\quad \big(\mu_F((a,b])=F(b)-F(a)=F_c(b)-F_c(a)+F_s(b)-F_s(a)$

$=\nu_c((a,b])+\nu_s((a,b])\big)$

i) zz: $\nu_c \ll \lambda$:

ν_c ist σ-endlich, da $(-\infty,1)\cup[1,e)\cup[e,3)\cup[3,\infty)=\mathbb{R}$ und

$\nu_c(-\infty,1)=F_c(1)=0$ $\qquad \nu_c[1,e)=F_c(e)-F_c(1)=1-0=1$

$\nu_c[e,3)=F_c(3)-F_c(e)=2-1=1$ $\qquad$ alle $<\infty$ $\qquad \lambda$ ist sowieso σ-endlich

$\Rightarrow$ aus Satz von Radon-Nikodym: $\nu_c \ll \lambda \Leftrightarrow \exists f: \nu_c(A)=\int_A f\,d\lambda$

$f(x):=\begin{cases}0 & ,x<1\\ \frac{1}{x} & ,1\leq x<e\\ \frac{1}{3-e} & ,e\leq x<3\\ 0 & ,x\geq 3\end{cases}$ $\qquad$ da $\frac{dF}{dx}=f$ gilt $\nu_c(A)=\int_A f\,d\lambda$

$\Rightarrow \nu_c \ll \lambda$

ii) zz: $\nu_s \perp \lambda$:

$\nu_s((-\infty,e)\cup(e,3)\cup(3,\infty))=\nu_s((-\infty,e))+\nu_s((e,3))+\nu_s((3,\infty))=$

$=\lim_{x\to e^-}F_s(e)-\lim_{x\to-\infty}F_s(x)+\lim_{x\to 3^-}F_s(x)-F_s(e)+\lim_{x\to\infty}F_s(x)-F_s(3)=0-0+1-1+2-2=0$

$\lambda(\{e,3\})=0$

$\Rightarrow \nu_s \perp \lambda$

MAS Ü5

4) $\mathcal{S} := \{B \times \mathbb{R} : B \in \mathcal{B}\}$ $\nu(B\times\mathbb{R}) := \lambda(B)$ $\mu(B\times\mathbb{R}) := \lambda_2(B\times\mathbb{R})$

zz: $\nu \ll \mu$, aber $\nexists$ Dichte $\frac{d\nu}{d\mu}$ Widerspruch zu Radon-Nikodym?

i) $\nu \ll \mu$: Sei N mit $\mu(N)=0$ bel. Da $N \in \mathcal{S}$: $\exists B \in \mathcal{B}$: $N = B\times\mathbb{R}$

$$\mu(N) = \lambda_2(B\times\mathbb{R}) = 0 \Rightarrow \int_{B\times\mathbb{R}} d\lambda_2 = \int_B\int_{\mathbb{R}} d\lambda\, d\lambda = \int_B d\lambda \int_{\mathbb{R}} d\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \int_B d\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(B) = 0 \Rightarrow \nu(B\times\mathbb{R}) = 0$$

ii) $\nexists$ Dichte $\frac{d\nu}{d\mu}$

Angenommen $\exists f \neq 0$ sodass $\nu(M) = \int_M f\, d\mu$

$$\int_B 1\, d\lambda(x) = \lambda(B) = \nu(B\times\mathbb{R}) = \int_{B\times\mathbb{R}} f\, d\mu = \int_{B\times\mathbb{R}} f\, d\lambda_2 = \int_B\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(y)\, d\lambda(x)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(y) = 1 + c \text{ für } c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow f(x,y) = \frac{d}{d\lambda(y)} 1 + c = 0 \quad ↯ \Rightarrow \nexists f$$

iii) Widerspruch zu Radon-Nikodym

Natürlich nicht, da μ nicht σ-endlich ist

$\forall [a,b)\times\mathbb{R}$: $\mu([a,b)\times\mathbb{R}) = \lambda_2([a,b)\times\mathbb{R}) = \infty$

$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}\setminus\emptyset$: $\mu(B\times\mathbb{R}) = \infty$ $\Rightarrow \mu$ kann nicht σ-endlich sein.

MAS Ü5

5) P_1, P_2, P ... W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $P \ll P_1$, $P \ll P_2$ mit Dichten $f_i = \frac{dP}{dP_i}$, $i = 1,2$

zz: $P \ll P_1 + P_2$ mit Dichte $\frac{dP}{d(P_1+P_2)} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$

$\forall N: P_1 + P_2(N) = 0 \Rightarrow P_1(N) = P_2(N) = 0$, da $P_1, P_2: \mathcal{A} \to [0,1]$ $\overset{P \ll P_1}{\Longrightarrow}$ $P(N) = 0$

$\Rightarrow P \ll P_1 + P_2$

Da $P_1, P_2, P, P_1 + P_2$ alle σ-endlich sind folgt aus Radon Nikodym, dass die Dichte $\frac{dP}{d(P_1+P_2)}$ existiert.

$$\int_A \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} \, d(P_1 + P_2) = \int_A f_1 \frac{f_2}{f_1+f_2} \, dP_1 + \int_A f_2 \frac{f_1}{f_1+f_2} \, dP_2 \overset{*}{=} \int_A \frac{f_2}{f_1+f_2} \, dP + \int_A \frac{f_1}{f_1+f_2} \, dP$$

$$= \int_A \frac{f_1+f_2}{f_1+f_2} \, dP = \int_A dP = P(A)$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d(P_1+P_2)} = \frac{f_1 f_2}{f_1+f_2}$$

$*$, da $i = 1,2$: $\int_A f_i \, dP_i = P(A)$

□

MAS Ü5

6) ν_i, μ_i ... σ-endliche Maße auf $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ mit $\nu_i \ll \mu_i$ für $i=1,2$.

zz: $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$ und RN-Dichte $\frac{d\nu_1 \otimes \nu_2}{d\mu_1 \otimes \mu_2}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2)$

Sei $f(x_1, x_2) := \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2)$, $\Pi := \{A \times B : A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathcal{A}_2\}$ ... Pfeiler, $\nu = \nu_1 \otimes \nu_2$, $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$

Sei $\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : \nu_1 \otimes \nu_2(A) = \int_A f \, d\mu_1 \otimes \mu_2\}$

Für $A \times B \in \Pi$ gilt $\nu_1 \otimes \nu_2(A \times B) = \nu_1(A)\nu_2(B) = \int_A \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) d\mu_1(x_1) \int_B \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2) d\mu_2(x_2)$

$= \int_A \int_B f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1) = \int_{A \times B} f(x_1, x_2) d\mu_1 \otimes \mu_2(x_1, x_2)$ nach Fubini-Tonelli

$\Rightarrow \Pi \subseteq \mathcal{C}$ wobei Π ein durchschnittsstabiles Erzeugenden System ist.

zz: $\mathcal{C}$ ist Dynkin-System: für $\nu(\Omega_1 \times \Omega_2) < \infty$

-) $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \Pi \subseteq \mathcal{C}$ ✓

•) $A, B \in \mathcal{C}$, $A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{C}$: $\nu(B \setminus A) \overset{\nu(B) \leq \nu(\Omega_1 \times \Omega_2) < \infty}{=} \nu(B) - \nu(A) = \int_B f \, d\mu - \int_A f \, d\mu = \int_{B \setminus A} f \, d\mu$ ✓

•) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ in $\mathcal{C}$: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$: Da $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \nu(A_n)$ für $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ ist

gilt $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f \, d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu$ ✓

$\Rightarrow \mathcal{C} = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

Für $\nu(\Omega_1 \times \Omega_2) = \infty$:

Sei $\{F_n = F_{1,n} \times F_{2,n} \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 : n \geq 1\} \subseteq \Pi \subseteq \mathcal{C}$ mit $\nu(F_n) < \infty \; \forall n$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Für alle n gilt nach oben $\{E \in \mathcal{C} : E \subseteq F_n\} = \{E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : E \subseteq F_n\}$

$\Rightarrow \forall n : E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $E \cap F_n \in \mathcal{C}$ $\Rightarrow E \in \mathcal{C} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

$\Rightarrow \forall E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : \nu(E) = \int_E f \, d\mu$

$\Rightarrow$ folgt aus dem Satz von Radon-Nikodym $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$ $\square$

MAS Ü5

7) $F \geq 0$ ... VF des LS-Maßes μ_F. $G := F^2$

zz: G ist VF eines LS-Maßes μ_G mit $\mu_G \ll \mu_F$ ges: Dichte $\frac{d\mu_G}{d\mu_F}$

$T: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$ $\quad T^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$ also ist T bijektiv

$|\det \frac{\partial T_i^{-1}}{\partial x_i}| = |\frac{dT^{-1}}{dx}| = \frac{1}{2} \neq 0$ $\qquad G = T \circ F \Rightarrow T^{-1} \circ G = F$

$\Rightarrow f_G(x) = f_F(T^{-1}(x)) \, |\det (\frac{\partial T_i^{-1}}{\partial y_j})(x)| = f_F(\sqrt{x}) \frac{1}{2} = \frac{d\mu_G}{d\mu_F}$

$G(x) = \mu_G(-\infty, x] = \mu_{F^2}(-\infty, x] = \mu_F(-\infty, \sqrt{x}) = F(\sqrt{x})$

wodurch μ_G festgelegt wird $\mu_G(a, b] = F(\sqrt{b}) - F(\sqrt{a}) = G(b) - G(a)$

LS-Maß $\Rightarrow$ σ-endlich $\Rightarrow$ aus Radon Nikodym : $\mu_G \ll \mu_F$

$\square$