ALG Ü11

355 + 375)

Prop 5.3.2.11 R ... faktorieller Ring $f \in R[x]$ $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$p, q \in R$ ... teilerfremd $\frac{p}{q} \in Q$ ... Quotientenkörper von R

$f(\frac{p}{q}) = 0 \Rightarrow p \mid a_0 \wedge q \mid a_n$

Bew

$f(\frac{p}{q}) = \sum_{i=0}^{n} a_i (\frac{p}{q})^i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{p^i}{q^i} = 0 \iff a_0 = -\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{p^i}{q^i} = -p \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{p^{i-1}}{q^i}$

Da $p \mid (-p \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{p^{i-1}}{q^i})$ gilt auch $p \mid a_0$.

$f(\frac{p}{q}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{p^i}{q^i} = a_n \frac{p^n}{q^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{p^i}{q^i} = 0 \iff a_n \frac{p^n}{q^n} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{p^i}{q^i}$

$\iff a_n p^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-i} = -q \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-i-1}$

Da $q \mid (-q \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-1-i})$ gilt auch $q \mid a_n p^n$.

Seien $q_1, \dots, q_m$ die Primfaktoren und $e_1, \dots, e_m$ die Potenzen von q

also $q = q_1^{e_1} \cdot \dots \cdot q_m^{e_m}$.

$\forall j \in \{1, \dots, m\}: q_j^{e_j} \mid q \mid a_n p^n \Rightarrow q_j^{e_j} \mid a_n \Rightarrow q \mid a_n$

Lemma p ... prim $a, b \in R$ p, b ... teilerfremd $p^k \mid a \cdot b \Rightarrow p^k \mid a$

Bew Vollständige Induktion nach k:

$k = 1$: $p \mid a \cdot b \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$, da p prim $p \mid b$ ↯ zu teilerfremd $\Rightarrow p \mid a$

$k+1$: Induktionsannahme $p^k \mid a \cdot b \Rightarrow p^k \mid a$

$p^{k+1} \mid a \cdot b \Rightarrow p^k \mid a \cdot b \Rightarrow p^k \mid a \Rightarrow \exists x: p^k \cdot x = a$

$p^{k+1} \mid a \cdot b \iff \exists y: p^{k+1} \cdot y = a \cdot b = p^k \cdot x \cdot b \iff \exists y: p \cdot y = x \cdot b$

$\iff p \mid x \cdot b \Rightarrow p \mid x \vee p \mid b \Rightarrow p \mid x$, da sonst p, b nicht teilerfremd

$\Rightarrow p \cdot \hat{x} = x \Rightarrow a = p^k \cdot x = p^k \cdot p \cdot \hat{x} = p^{k+1} \cdot \hat{x} \Rightarrow p^{k+1} \mid a$

...

ALG Ü11

355+375) ... Def $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt ganz algebraisch $:\Longleftrightarrow \exists p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$

mit $a_n = 1$ und $p(\alpha) = 0$

ZZ: $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ist ganz algebraisch

Nehmen wir einmal vielleicht grad 2? $p(x) = x^2 + ax + b$

$$p(\alpha) = \left(\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^2 + a\left(\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right) + b = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} + b \qquad a = -1$$

$$= \frac{3}{2} + \cancel{\frac{\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{5}}{2}} + b = 1 + b = 0 \qquad b = -1$$

$\Rightarrow p(x) = x^2 - x - 1 \quad \Rightarrow \alpha$ ist ganz algebraisch

ZZ: $q \in \mathbb{Q} \quad q$ ... ganz algebraisch $\Longleftrightarrow q \in \mathbb{Z}$

$\Leftarrow$ $q \in \mathbb{Z} \Rightarrow p(x) = x - q$ ist normiert in $\mathbb{Z}[x]$ und erfüllt $p(q) = 0$

$\Rightarrow$ Sei q ... ganz algebraisch $\Rightarrow \exists p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ mit $a_n = 1$ und $p(q) = 0$. Sei $q = \frac{r}{s}$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$ und teilerfremd sowie $s \neq 0$.
Nach 355 gilt $r \mid a_0 \wedge s \mid a_n$. Da $a_n = 1 \Rightarrow s \mid 1 \Rightarrow s = \pm 1$
$\Rightarrow q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Z}$

ZZ: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{Z} \vee \sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Angenommen $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Da $p(x) = x^2 - n \in \mathbb{Z}[x]$, normiert und $p(\sqrt{n}) = 0$ ist $\sqrt{n}$ ganz algebraisch $\Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ nach oben.
$\Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \vee \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$

$\square$

ALG Ü11

370 $p \in \mathbb{P}$ $\quad f(x) = x^3 - p$

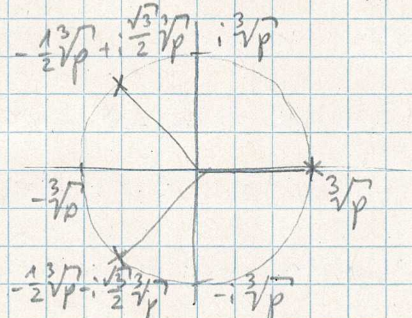
1) ges alle Nullstellen von f in der Form $a+ib$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$ $\quad$ + Skizze

bekannt es gibt 3 Nullstellen: $\sqrt[3]{p} \simeq r_1 = \sqrt[3]{p} \quad \varphi_1 = 0$

$$\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt[3]{p}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \simeq r_2 = \sqrt[3]{p} \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt[3]{p}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \simeq r_3 = \sqrt[3]{p} \quad \varphi_3 = \frac{4\pi}{3}$$

Also Nullstellen $\left\{\sqrt[3]{p},\ -\frac{1}{2}\sqrt[3]{p}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{p},\ -\frac{1}{2}\sqrt[3]{p}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{p}\right\}$



2) zz: $f \in \mathbb{Q}[x]$ ... irreduzibel

In $\mathbb{C}[x]$ ist die Faktorisierung in Linearfaktoren von f die folgende

$$f(x) = (x-\sqrt[3]{p})\left(x-\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

Da $\mathbb{Q}[x] \leq \mathbb{C}[x]$ und alle drei Faktoren nicht in $\mathbb{Q}[x]$ liegen ist $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel.

3) L ... Körper $\quad \mathbb{Q} \leq L \quad \alpha \in L \quad \alpha^3 = p \quad g(x) = \frac{x^3-p}{x-\alpha} = x^2+\alpha x+\alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]$

zz: $g(x)$ ist irreduzibel

Zunächst der Fall $\alpha = \sqrt[3]{p}$: Da $g(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha}$ hat $g(x)$ genau die Nullstellen x mit $f(x)=0 \wedge x-\alpha \neq 0$ also $x = \sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \alpha\left(-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow g(x) = \left(x-\alpha\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\alpha\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ und da beide Faktoren nicht in $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$ liegen ist $g(x)$ in $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$ irreduzibel $(\mathbb{Q}(\alpha)[x] \subsetneq \mathbb{C}[x])$.

Da $\sqrt[3]{p},\ \sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ alle Nullstellen des gleichen Minimalpolynoms $f(x)$ sind ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p})$, $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ und $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ isomorph $(h(r)=r\ \forall r \in \mathbb{Q}\ \ h(\alpha_1)=\alpha_2)$ $\Rightarrow$ Da $g_{\alpha_1}(x)$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p})$ irreduzibel ist, ist $g_{\alpha_2}(r)$ auch in $\mathbb{Q}(\alpha_2)$ und $g_{\alpha_3}(r)$ auch in $\mathbb{Q}(\alpha_3)$ irreduzibel.

$\square$

ALG Ü11

384+385) Prop 6.2.2.2. K.. Körper D.s.f.A.ä:

(1) $\forall p(x) \in K[x] \setminus K : \exists a \in K : p(a) = 0$

(2) $\forall p(x) \in K[x] \setminus K$ ... irreduzibel: $\exists a \in K : p(a) = 0$

(3) $\forall p(x) \in K[x] \setminus K$ ... irreduzibel : $\text{grad}(p) = 1$

(4) $\forall p(x) \in K[x] \setminus K$: $p(x)$ zerfällt in Linearfaktoren

(5) $\forall L \geq K$ ... algebraische Erweiterung : $L = K$

Bew (1) $\Rightarrow$ (2): klar

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $p(x) \in K[x] \setminus K$ ... irreduzibel bel. $\Rightarrow \exists a \in K : p(a) = 0$

$\xRightarrow{\text{Prop. 5.3.3.1.}} p(x) = (x-a) \cdot q(x)$ Da $p(x)$ ... irreduzibel ist gilt

$q(x)$ ist eine Einheit von $K[x]$. $E(K[x]) = K \setminus \{0\}$ $\Rightarrow \text{grad}(q) = 0$

$\Rightarrow \text{grad}(p) = \text{grad}(x-a) + \text{grad}(q) = 1$

(3) $\Rightarrow$ (4) Sei $p(x) \in K[x] \setminus K$ bel. Sei $q_1, \dots, q_n \in K[x]$ ... irreduzibel mit

$p = q_1 \cdot \ldots \cdot q_n$. $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \text{grad}(q_i) = 1 \Rightarrow p$ zerfällt in Linearfaktoren

(4) $\Rightarrow$ (5) Sei $L \geq K$ eine algebraische Erweiterung. Sei $\alpha \in L$ bel.

$\Rightarrow \exists p(x) \in K[x]^{\setminus\{0\}} : p(\alpha) = 0$ offenbar gilt $p(x) \in K[x] \setminus K$

$\Rightarrow p(x)$ zerfällt in Linearfaktoren $p(x) = q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_n(x)$

$0 = p(\alpha) = q_1(\alpha) \cdot \ldots \cdot q_n(\alpha) \xRightarrow{\text{da } K \text{.. Körper}} \exists i \in \{1, \dots, n\} : q_i(\alpha) = 0$, da q_i Linearfaktor

$\exists a \in K \setminus \{0\}, b \in K : q_i(x) = ax + b$ $\hat{q}_i(x) := x + \frac{b}{a} \in K[x] \setminus K$

$0 = q_i(\alpha) = a \cdot \hat{q}_i(\alpha) \xRightarrow{a \neq 0} 0 = \hat{q}_i(\alpha) = \alpha + \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{a} \in K$

$\Rightarrow L \leq K \Rightarrow L = K$

(5) $\Rightarrow$ (1) Sei $p(x) \in K[x] \setminus K$ bel. Sei L eine algebraische Erweiterung in der

$p(\alpha) = 0$ mit $\alpha \in L$. $\Rightarrow L = K \Rightarrow \alpha \in K \Rightarrow \exists \alpha \in K : p(\alpha) = 0$

...

ALG ÜM

384+385) ... Prop 6.2.2.4. $K \leq L$ D.s.f.A.ä:

(1) L ist ein algebraischer Abschluss von K

(2) L ist Nullstellenkörper von $K[x]$ und L ist algebraisch über K

(3) L ist algebraisch über K und $\forall L' \geq L: L'$...algebraisch über $K \Rightarrow L = L'$

Bew (1) $\Rightarrow$ (2)

L...algebraischer Abschluss von K $:\Longleftrightarrow$ L...Zerfällungskörper von $K[x]$

$:\Longleftrightarrow L$... minimaler Nullstellenkörper von $K[x]$ $\Rightarrow L$... Nullstellenkörper von $K[x]$

L wird von K und allen Nullstellen von $K[x]$ erzeugt $\Rightarrow L$ ist algebraisch über K

(2) $\Rightarrow$ (3)

L ist algebraisch über K nach Vorgabe. Sei $L' \geq L$ mit L' algebraisch über K bel.

Sei $\alpha \in L'$ bel. Da L' algebraisch über K $\exists p(x) \in K[x] \setminus \{0\}: p(\alpha) = 0$

Da L Nullstellenkörper von $K[x]$ ist zerfällt $p(x)$ in Linearfaktoren aus $L[x]$

$p(x) = c\,(x-a_1)(x-a_2) \cdot \ldots \cdot (x-a_n)$ Da $p(\alpha)=0$ $\exists j \in \{1,\ldots,n\}: \alpha - a_j = 0$

$\Rightarrow \alpha = a_j \in L$ $\Rightarrow L = L'$

(3) $\Rightarrow$ (1) zz: L ist minimaler Nullstellenkörper von $K[x]$

Sei $p(x) \in K[x]$ bel. $\Rightarrow \exists \alpha_1 \in L: p(\alpha_1) = 0$, da L algebraisch über K

$\Rightarrow p(x) = (x-\alpha_1)\, p_1(x) = \ldots = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n)\, c$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ $c \in K$

$\Rightarrow L$ ist Nullstellenkörper

(3) $\Rightarrow$ $\forall L' \geq L: L'$... algebraisch über $K \Rightarrow L = L'$

(384)
$\Longleftrightarrow \forall p(x) \in L[x] \setminus L: p(x)$ zerfällt in Linearfaktoren über L

$\Longleftrightarrow L$ ist Nullstellenkörper von $L[x]$

$\Rightarrow L$ ist algebraisch abgeschlossen $\wedge$ L ist algebraisch über K

$\Rightarrow L$ ist algebraischer Abschluss von K

$\square$

ALG Ü11

393) $L := \mathbb{Q}(x)$ ... Körper der gebrochenen rationalen Funktionen über $\mathbb{Q}$

(1) $K := \mathbb{Q}(x^3) \leq L$ ges: $[L:K]$ indem Minimalpolynom von x über K gefunden wird

$K \leq L$ $\quad x \in L$ ...algebraisch über K $\quad m(y)$... Minimalpolynom von x über K

$k := \text{grad}(m(y)) \Rightarrow [K(x):K] = k$ $\quad$ Nach Satz 6.1.3.4.

$K(x) = \mathbb{Q}(x^3)(x) = \mathbb{Q}(x, x^3) = \mathbb{Q}(x) = L$

$$\mathbb{Q}(x^3) = \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^{3i}}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^{3j}} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}, \forall a_i, b_j \in \mathbb{Q} \right\}$$

$m(y) = y^3 - x^3$ ist normiert und erfüllt $m(x) = 0$

$$p = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^{3i}}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^{3j}} \in \mathbb{Q}(x^3) \Rightarrow p \sum_{j=0}^{m} b_j x^{3j} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{3i}$$

$$\Rightarrow \text{grad}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^{3i}\right) = \text{grad}(p) + \text{grad}\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^{3j}\right)$$

$$\Rightarrow 3n = \text{grad}(p) + 3m \quad \Rightarrow \text{grad}(p) = 3n - 3m \in 3\mathbb{Z}$$

$x \cdot p$ hat $\text{grad}(x \cdot p) = 1 + \text{grad}(p) \in 1 + 3\mathbb{Z}$

Angenommen es gäbe ein Minimalpolynom mit kleineren Grad:

$\tilde{m}(y) = y^2 + py + q$ mit $p, q \in \mathbb{Q}(x^3)$

$\tilde{m}(x) = x^2 + xp + q = 0 \Leftrightarrow x^2 = -xp + q$ aber $\text{grad}(x^2) = 2 \wedge \text{grad}(-xp+q) \in 1+3\mathbb{Z}$

Da $2 \notin 1 + 3\mathbb{Z}$ kann es kein kleineres Minimalpolynom geben.

$\Rightarrow [L:K] = 3$

(2) $K := \mathbb{Q}(x + \frac{1}{x})$ ges: $[L:K]$

$x + \frac{1}{x}$ ist algebraisch über $L = \mathbb{Q}(x)$, da $p(y) = x \cdot y - x^2 - 1 \in \mathbb{Q}(x)[y]$ hat

$p(x + \frac{1}{x}) = x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0$

$m(y) = y^2 - (x + \frac{1}{x})y + 1 \in K[y]$ und $m(x) = x^2 - (x + \frac{1}{x})x + 1 = x^2 - x^2 - 1 + 1 = 0$

$x \notin K$ aber $x \in L$ $\Rightarrow [L:K]$ kann nicht 1 sein.

$\Rightarrow [L:K] = 2$

...

ALG Ü11

393) ... (3) $\alpha \in \mathbb{Q}(x) \setminus \mathbb{Q}$ zz: $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(\alpha)] < \infty$

$\mathbb{Q}(\alpha)(x) = \mathbb{Q}(x)$

$\alpha = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}$ $\alpha \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow \neg(n = m \wedge \exists c \in \mathbb{Q} : \forall i \in \{0, \dots, n\} : a_i \cdot c = b_i)$

$\Leftrightarrow n \neq m \vee \forall c \in \mathbb{Q} : \exists i \in \{0, \dots, n\} : a_i \cdot c \neq b_i$

$B := \{x^{-m}, \dots, x^n\}$

Sei $p(x) \in \mathbb{Q}(x)$ bel. ges: $q_1(x), \dots, q_k(x) \in \mathbb{Q}(\alpha) : p(x) = b_1 q_1(x) + \dots + b_k q_k(x)$

$p(x) = \alpha(x) \cdot \tilde{p}(x) + r(x)$ grad$(r) <$ grad(α)

ALG Ü11

394+395) $R := (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[t]$ $U \subseteq R$ ... kleinster Unterring mit 1, der t^5 enthält

Da $1 \in U \Rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \in U$ und Da $t^5 \in U \Rightarrow t^{5n} \in U \; \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i t^{5i} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, \forall i : a_i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \right\} \subseteq U$

Behauptung $U = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i t^{5i} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, \forall i : a_i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \right\}$

zz: $U \subseteq R$ ... Unterring mit 1 $\quad$ 0, 1, +, − klar

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{5i}\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j t^{5j}\right) = \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}\right) t^{5k} \in U$$

zz: $t^5 \in U$ klar

zz: kleinster Unterring mit diesen Eigenschaften

Sei $V \subseteq U$ ... Unterring mit 1, der t^5 enthält bel.

Sei $u \in U$ bel. $\Rightarrow u = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{5i}$

$\forall i \in \{0, \dots, n\} : a_i t^{5i} \in V$, da $1 \in V \Rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subseteq V$ und

$t^5 \in V \Rightarrow t^{5N} \subseteq V$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i t^{5i} \in V \Leftrightarrow u \in V \Rightarrow U \subseteq V \Rightarrow U = V$

---

ges: $p(x) \in U[x] \setminus \{0\}$ mit $p(t) = 0$

$p(x) = x^5 + 4t^5 \in U[x] \setminus \{0\}$ und $p(t) = t^5 + 4t^5 = 5t^5 = 0$

ALG Ü11

387) (1) zz: $\forall \alpha$ ...algebraische Zahl $\exists f \in \mathbb{Z}[x]\setminus\{0\}: f(\alpha)=0$

α ...algebraische Zahl $:\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{A} = \overline{\mathbb{Q}}$

$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Q}[x]\setminus \mathbb{Q} : p(\alpha)=0$

$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{b_i} x^i$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \neq 0$ $\forall i \in \{0,\dots,n\}$

$b := \prod_{i=0}^{n} b_i$ $\quad \tilde{b}_i := \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} b_j$ $\quad \Rightarrow b p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{b_i} b x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \tilde{b}_i x^i \in \mathbb{Z}[x]\setminus\{0\}$

$b p(\alpha) = b \cdot 0 = 0$

(2) $f \in \mathbb{Z}[x]$ $\quad$ grad$(f)=n$ $\quad r=\frac{p}{q}$ $\quad p,q$ ...teilerfremd $\quad f(r)\neq 0$ $\quad$ zz: $|f(r)| \geq \frac{1}{q^n}$

(3) $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\quad \alpha$ ...algebraisch vom Grad n $\Rightarrow \exists c>0 : \forall p,q \in \mathbb{N}, q\neq 0 : |\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^n}$

Da α algebraisch vom Grad n $\exists f(x) \in \mathbb{Z}[x]$: grad$(f)=n$ $\wedge$ $f(\alpha)=0$

nach Punkt (1). Sei $p,q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ bel.

Falls