1.10.5 a) $(G, \cdot)$ ... Gruppe $\quad \odot : G \times G \to G$

$$(a,b) \odot (a',b') := (a \cdot a', b \cdot b')$$

Frage: ist $(G \times G, \odot)$ eine Gruppe?

<u>Bew</u>: (assoziativ) Sei (a,b), (c,d) und $(e,f) \in G \times G$ beliebig.

$$((a,b) \odot (c,d)) \odot (e,f) = (a \cdot c, b \cdot d) \odot (e,f) = (a \cdot c \cdot e, b \cdot d \cdot f)$$

$$= (a,b) \odot (c \cdot e, d \cdot f) = (a,b) \odot ((c,d) \odot (e,f)) \checkmark$$

(links-neutrales Elem.) Sei $(a,b) \in G$ beliebig. $(1,1) \odot (a,b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a,b) \checkmark$

LINAG Ü3

1.10.5... (Links-inverses Elem.) Sei $a \in G$ beliebig. Dann ist $(a,0) \in G \times G$.

$\nexists y \in G: (a,0) \odot (x,y) = (1,1)$ mit beliebigem x. $\Rightarrow \exists (x,y) \in K \times K: \nexists$ Inverses

Da bei $(G \times G, \odot)$ ein Element existiert, das kein Inverses besitzt

ist $(G \times G, \odot)$ keine Gruppe.

b) $(K,+,\cdot)$ .. Körper $\quad \oplus : G \times G \to G$ wie oben $\quad \odot : G \times G \to G$ wie oben

Warum ist $(K \times K, \oplus, \odot)$ kein Körper?

Multiplikativ inverses Element

$(a,0) \cdot (x,y) = (1,1) \qquad \nexists y \in K: 0 \cdot y = 1$

oder

weil $(G \times G \setminus \{0\}, \odot)$ keine kommutative Gruppe bildet.