ANA Ü10

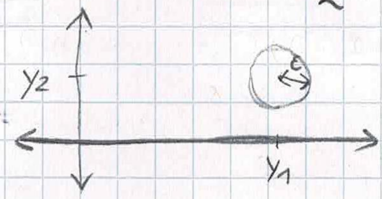
2) ges: $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit A, B ... abgeschlossen, disjunkt und $d(A,B)=0$

$A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}^+\}$ $\quad$ $B = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}^+\}$

Die Mengen A, B sind disjunkt, da Elemente aus A in der zweiten Komponente 0 sind, und Elemente aus B in der zweiten Komponente $\frac{1}{x} \neq 0$ sind.

$HP(A) \subseteq A$, da $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \ \exists \varepsilon > 0$ (nämlich $\frac{|y_2|}{2}$)

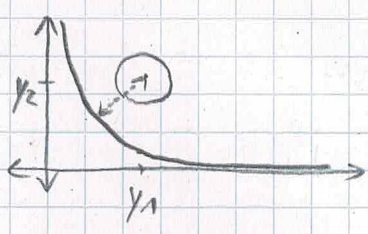
$U_\varepsilon((y_1,y_2)) \cap A = \emptyset$



$\Rightarrow A$ ist abgeschlossen

$HP(B) \subseteq B$, da $\forall y \in \mathbb{R}^2 \setminus B : d(x,B) > 0$

bei $\varepsilon = \frac{d(x,B)}{2}$ ist $U_\varepsilon(x) \cap B = \emptyset$



$\Rightarrow B$ ist abgeschlossen

$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$

Folge $(d((x,0),(x,\frac{1}{x})))_{x \in \mathbb{R}^+}$

$$\sqrt{(x-x)^2 + (0-\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \to \infty} 0$$

$\Rightarrow d(A,B) = 0$

ANA Ü10

5) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^n}\right)$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{m^n}\right)=\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m^n}\right)-1-\frac{1}{m})=\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{n=0}\left(\frac{1}{m}\right)^n\right)-1-\frac{1}{m})$$

da $\frac{1}{m}<1$

$$=\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{m}{m-1}-1-\frac{1}{m}\right)=\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{m^2-m^2+m-m+1}{m^2-m}\right)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^2-m}$$

$$=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m\cdot(m-1)}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)\cdot m}\overset{\text{Teleskopreihe}}{=}1$$

$\Rightarrow \sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{m^n}\right)$ konvergiert gegen 1

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^n}\right)$ konvergiert gegen 1

6) $|z|<1$ zz: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=(1-z)^{-2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}1\right)\cdot z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}z^k\cdot z^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-z)^2}=(1-z)^{-2}$$

ANA Ü10

g) $\alpha \in \mathbb{R}$ $|z| < 1$ zz: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$ konvergiert

Quotientenkriterium mit $q = |z|$

$$\frac{\left|\binom{\alpha}{k+1} \cdot z^{k+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{k} \cdot z^k\right|} = \left| \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(k+1)+1)}{(k+1)!} \cdot z^{k+1}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \cdot z^k} \right|$$

$$= \left| z \cdot \frac{k! \cdot \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k)}{k! \cdot (k+1) \cdot \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)} \right| = |z| \cdot \left| \frac{\alpha - k}{k+1} \right|$$

$$= |z| \cdot \left| \frac{\frac{\alpha}{k} - 1}{1 + \frac{1}{k}} \right|$$

$$\lim_{k\to\infty} |z| \cdot \left| \frac{\frac{\alpha}{k} - 1}{1 + \frac{1}{k}} \right| = |z| \cdot \left| \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{k} - 1}{1 + \frac{1}{k}} \right| = |z| \cdot \left| \frac{-1}{1} \right| = |z|$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: \frac{\binom{\alpha}{k+1} \cdot z^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} \cdot z^k} \leq q = |z|$$

$\Rightarrow$ bei $|z| < 1$ konvergiert die Reihe

bei $|z| > 1$ divergiert die Reihe

ANA Ü10

1) $K, A \in \mathbb{R}^p$ $K \neq \emptyset$ $A \neq \emptyset$ K...kompakt A...abgeschlossen

zz: $\exists x \in K \; \exists y \in A : d(x,y) = d(A,K)$

$d(A,K) = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in K\}$

$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus K: $d(A,K) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$

$\forall C_0 > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |d(x_n, y_n) - d(A,K)| < C_0$

Da K beschränkt: $\forall x \in K \; \exists C_1 > 0 \; \forall y \in K : d(x,y) < C_1$

Da K kompakt ist konvergiert $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y' \in K$.

$\exists C_1 > 0 \; \forall y_n : d(y_n, y') < C_1$

$\exists C > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N_0 : d(x_n, y') < C$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Folge in $K_C(y') \cap A$

$K_C(y') \cap A$ ist kompakt, da abgeschlossen und beschränkt

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einer kompakten Menge ist $\exists x' \in K_C(y') \cap A : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x'$

$\Rightarrow d(x', y') = d(A,K)$

zz: $A \cap K \neq \emptyset \Leftrightarrow d(A,K) = 0$

$A \cap K \neq \emptyset \overset{?}{\Rightarrow} d(A,K) = 0$

$\exists x' \in A \cap K$ $d(A,K) = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in K\} \ni d(x', x') = 0$

Da eine Metrik immer ≥ 0 sein muss ist $d(A,K) = 0$

$d(A,K) = 0 \Rightarrow A \cap K \neq \emptyset$

oben gezeigt $\exists x \in A \; \exists y \in K : d(x,y) = d(A,K) = 0$

da $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow x \in A \cap K \Rightarrow A \cap K \neq \emptyset$

ANA Ü10

3) i) $(I, \preceq)$... gerichtete Menge $\quad \exists j \in I\ \forall i \in I: i \preceq j$

zz: $\lim_{i \in I} (x_i) = x_j \iff \forall k \in I$, k... maximales Element: $x_j = x_k$

$\Rightarrow$ Indirekt $\quad$ Angenommen $\exists k \in I$, k...maximales Element: $x_j \neq x_k$

$\Rightarrow \delta := d(x_j, x_k) > 0$

$(x_i)_{i \in I}$ ist kein Cauchy-Netz. (Cauchy-Netz $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists i_0 \in I\ \forall i, j \succeq i_0 \Rightarrow d(x_i, x_j) < \varepsilon$)

$\varepsilon := \frac{\delta}{2} \quad \forall i_0 \in I: i_0 \preceq j \wedge i_0 \preceq k$

$d(x_j, x_k) = \delta > \varepsilon$

$\Rightarrow (x_i)_{i \in I}$ ist kein Cauchy-Netz

$\Rightarrow (x_i)_{i \in I}$ konvergiert nicht $\quad ↯$

$\Leftarrow$ $\quad (\lim_{i \in I} (x_i) = x_j \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists i_0 \in I\ \forall i \succeq i_0: d(x_i, x_j) < \varepsilon)$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $i_0 = j$ $\quad$ Nun gilt $\forall i \succeq i_0: x_i = x_j$

$\Rightarrow d(x_i, x_j) = 0 < \varepsilon$

Da für alle maximalen Elemente gilt $x_k = x_j$ ist der Grenzwert eindeutig.

ii) zz: $\#I = n < \infty \Rightarrow \exists j \in I\ \forall i \in I: i \preceq j$

vollständige Induktion nach n:

n = 1: Die Menge besteht nur aus einem Element x, da $x \preceq x$ (durch die Reflexivität) ist x das maximale Element.

n+1: Zu einer Menge mit maximalem Element wird ein neues Element x hinzugefügt.

1. Fall $\quad \forall i \in I: i \preceq x \quad \Rightarrow$ x ist ein maximales Element

2. Fall $\quad \exists i \in I: x \preceq i \quad \Rightarrow$ x ist kleiner als zumindest ein maximales Element, dieses bleibt maximal.

ANA Ü10

3)... iii) M ... endliche Menge

zz: $\lim\limits_{A \in \mathcal{E}(M)} \sum\limits_{m \in A} a_m = \sum\limits_{m \in M} a_m$

$\Updownarrow$

$\underbrace{\lim\limits_{A \in \mathcal{E}(M)} \sum\limits_{m \in A} a_m}_{} = S$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A_0 \subseteq M \; (A_0 \ldots \text{endlich}) \; \forall A \supseteq A_0 \; (A \ldots \text{endlich}) \Rightarrow \left| \sum\limits_{j \in A} a_j - S \right| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $A_0 = M$ $\quad \forall A \supseteq A_0 : A = M$

$\left| \sum\limits_{j \in A} a_j - S \right| = \left| \sum\limits_{j \in M} a_j - S \right|$

Wenn $S = \sum\limits_{m \in M} a_m$ gilt $\left| \sum\limits_{j \in M} a_j - \sum\limits_{m \in M} a_m \right| = 0 < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Die Summen stimmen überein.

$\square$

ANA Ü10

8) i) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2}\right)}$$

$$= \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} + \frac{x}{x}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}$$

ii) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x| + x^2}$

$$\frac{x^2}{|x|+x^2} = \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{|x|}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \frac{1}{\frac{|x|}{|x^2|} + 1} = \frac{1}{\left|\frac{x}{x^2}\right| + 1} = \frac{1}{\frac{1}{|x|} + 1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{|x|} + 1} = 0, \quad \text{da} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

iii) $\lim_{x \to \xi} \frac{x^k - \xi^k}{x - \xi} \overset{?}{=} k \cdot \xi^{k-1}$ für $\xi \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$

$$x^k - \xi^k = (x-\xi) \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} \xi^j$$

$$\Rightarrow \frac{x^k - \xi^k}{x - \xi} = \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} \xi^j$$

$$\lim_{x \to \xi} \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} \xi^j = \sum_{j=0}^{k-1} \xi^{k-1-j} \xi^j = \sum_{j=0}^{k-1} \xi^{k-1-j+j} = k \cdot \xi^{k-1}$$

$\square$

ANA Ü10

4.) $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \qquad q(x) = b_m x^m + \ldots + b_0 \qquad a_n \neq 0 \quad b_m \neq 0$

ges: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim\limits_{x \in \mathbb{R}} \frac{p(x)}{q(x)}$ $\qquad (\mathbb{R}, \leq)$ ... gerichtete Menge

Behauptung: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{falls } n = m \\ +\infty, & \text{falls } n > m, \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty, & \text{falls } n > m, \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$

Beweis: 1. Fall $n < m$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} = \frac{a_n x^{n-m} + \ldots + a_0 x^{-m}}{b_m + \ldots + b_0 x^{-m}} \xrightarrow{x \to \infty} \frac{0}{b_m} = 0$$

da Hochzahlen im Zähler immer negativ und Hochzahlen im Nenner negativ bis auf b_m das übrig bleibt und $\neq 0$ ist.

2. Fall $n = m$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0} = \frac{a_n + \ldots + a_0 x^{-n}}{b_n + \ldots + b_0 x^{-n}} \xrightarrow{x \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

3. Fall $n > m$, $\frac{a_n}{b_m} > 0$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = x^{n-m} \cdot \left(\frac{a_n + \ldots + a_0 x^{-m}}{b_m + \ldots + b_0 x^{-n}} \right)$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(x^{n-m} \cdot \left(\frac{a_n + \ldots + a_0 x^{-m}}{b_m + \ldots + b_0 x^{-n}} \right) \right) = \lim_{x \to \infty} \left(x^{n-m} \right) \cdot \frac{a_n}{b_m} = +\infty$$

da $n - m > 1$ geht $x^{n-m} \xrightarrow{x \to \infty} +\infty$, die Multiplikation mit einer Konstanten ändert das Konvergenzverhalten nicht.

4. Fall $n > m$, $\frac{a_n}{b_m} < 0$

gleich wie 3. Fall nur durch die Multiplikation dreht sich das Vorzeichen um, daher $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = -\infty$