ANA Ü15

1.) G ... Gruppe $\mathcal{T}$ ... Topologie auf G $\forall g \in G: h \mapsto gh$ $h \mapsto hg$ stetig

Wenn: $g\,id(a) = g\,id(b)$

$g\,a = g\,b$

$g^{-1}g\,a = g^{-1}g\,b$

$e\,a = e\,b$

dann folgt $a = b$ $\Rightarrow g \cdot id$ injektiv

Sei $a \in G$ bel.

$(g \cdot id) \circ (g^{-1} \cdot id)(a) = g \cdot g^{-1} a = a$ $\Rightarrow g^{-1} \cdot id$ Umkehrabbildung ... stetig

$\Rightarrow$ Homöomorphismus (umgekehrt genauso)

zz: $\forall H \leq G: H \in \mathcal{T} \Rightarrow H^c \in \mathcal{T}$

$a \sim b \Leftrightarrow \exists h \in H: b = a \cdot h$

reflexiv: $a = a \cdot e \Rightarrow a \sim a$ symmetrie: $a = b \cdot h \Rightarrow a \cdot h^{-1} = b$

transitivität: $a = b \cdot h$ $b = c \cdot g$ $a = c \cdot h \cdot g$

$\Rightarrow$ Äquivalenzrelation $\Rightarrow \{gH : g \in G\}$ ... Partition

Nach Satz 12.4.7 $\Rightarrow [g]_\sim \in \mathcal{T}$

H bel. $\exists (g_i)_{i \in I} \in G^I: H^c = \bigcup_{i \in I} [g_i]_\sim$

$\Rightarrow$ (O3) folgt $H^c \in \mathcal{T}$

ANA Ü 15

2.) $X = \mathbb{R}^2$ d_2 $Y = (-1,1) \times (-1,1)$ ges: Homöomorphismus von X nach Y

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan(\frac{\pi}{2}x) \\ \tan(\frac{\pi}{2}y) \end{pmatrix} \qquad f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi}\arctan(x) \\ \frac{2}{\pi}\arctan(y) \end{pmatrix}$$

$f \circ f^{-1} = id$

$\Rightarrow$ f ... bijektiv und stetig

f^{-1} ... bijektiv und stetig

$\Rightarrow f$ ist Homöomorphismus

ANA Ü15

3.) $(X,\mathcal{T})$ ... top. Raum $\lambda \geq 0$

zz: f ... halbstetig $\Rightarrow$ $\lambda \cdot f$ ... halbstetig

$$g: [-\infty, \infty) \to [-\infty, \infty)$$
$$x \mapsto \begin{cases} \lambda x & x \in (-\infty, \infty) \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\lambda = 0$ klar

für $\lambda > 0$ g^{-1} ... stetig $g(f(x)) = \lambda \cdot f$ $\Rightarrow \lambda \cdot f$ halbstetig

andere ähnlich

#

ANA Ü15

4.) $(X, \mathcal{T})$ $\quad C \subseteq X$

zz: $1\!\!1_C$ halbstetig von oben $\Leftrightarrow$ C abgeschlossen

$\Rightarrow$ $1\!\!1_C^{-1}([-\infty, \frac{1}{2}))$ ist offen $\Rightarrow$ $1\!\!1_C^{-1}([-\infty, \frac{1}{2})) = \{x \in X : x \notin C\} = C^c$ offen

$\Rightarrow$ C abgeschlossen

$\Leftarrow$ $\quad O \in \mathcal{T}^c$ bel. $\quad a := \sup O$

$a \leq 0 \Rightarrow 1\!\!1_C^{-1}(O) = \emptyset \in \mathcal{T}$

$0 < a \leq 1 \Rightarrow 1\!\!1_C^{-1}(O) = C^c \in \mathcal{T}$ $\quad \Rightarrow$ stetig bzgl. $\mathcal{T}^<$

$1 < a \Rightarrow 1\!\!1_C^{-1}(O) = X \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow$ $1\!\!1_C$ ist halbstetig von oben

zz: $1\!\!1_C$ halbstetig von unten $\Leftrightarrow$ C offen

$\Rightarrow$ $-1\!\!1_C^{-1}([-\infty, -\frac{1}{2}))$ ist offen:

$1\!\!1_C^{-1}((\frac{1}{2}, \infty]) = \{x \in X : 1\!\!1_C(x) > \frac{1}{2}\} = C$ ... offen

$\Leftarrow$ C ... offen $\quad V \in \mathcal{T}^<$ bel. $\sup O =: a$

$a \leq -1$: $1\!\!1_C^{-1}(V) = \emptyset \in \mathcal{T}$

$-1 < a \leq 0$ $\quad 1\!\!1_C^{-1}(V) = C \in \mathcal{T}$

$0 \leq a$ $\quad 1\!\!1_C^{-1}(V) = X \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow$ $1\!\!1_C$ ist halbstetig von unten

ANA Ü15

5.) I .. gerichtete Menge $\infty \notin I$

ges: Topologie mit $\overset{(i)}{x_i \to x, i \in I} \Leftrightarrow \overset{(ii)}{f: I \cup \{\infty\} \to X}$ stetig

$f(i) = x_i \quad f(\infty) = x$

$\mathcal{T} = \{\{I_0 : I_0 \subseteq I\}\} \cup \{\{I_0 : I_0 \subseteq I\} \cup \{i \succeq i_0 : i_0 \in I\} \cup \{\infty\}\}$

$\emptyset \in \mathcal{T} \quad I \cup \{\infty\} \in \mathcal{T} \quad T_1 \cup T_2 \in \mathcal{T} \quad T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$ nachprüfen

(i) $\Rightarrow$ (ii) $x_i \to x \quad \forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists i_0 \in I \cdot \forall i \succeq i_0 : x_i \in U$

zz: $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists V \in \mathcal{U}(\infty) : f(V) \subseteq U$ (klar da konvergent)

$\forall i \in I\ \forall U \in \mathcal{U}(x_i)\ \exists V \in \mathcal{U}(i) : f(V) \subseteq U$

$\forall U : V = \{i\} \in \mathcal{T} \quad f(V) = \{x_i\} \subseteq U$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$V \in \mathcal{U}(\infty)$ mit $f(V) \subseteq U$ enthält alle $i \succeq i_0$

$V' = V \cap \{i \succeq i_0\} \quad i \in V' : f(i) = x_i \in U$

ANA Ü15

6.) B .. Basis der Topologie $\mathcal{T}$ $\quad X = \{1,2,3\}$

$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, X\}$

zz: $B = \mathcal{T}$ oder $B = \underbrace{\{\{1\}\{1,2\}, X\}}_{\tilde{B}}$

$\mathcal{T}$, $\tilde{B}$ .. Basis durch nachrechnen zeigen

$X \in B$ da sonst $3 \notin B$

$\{1,2\} \in B$, da sonst $2 \notin B$

$\{1\} \in B$, da $1 \in B \subseteq \{1\}$

zz: $V \subseteq \mathcal{T}$ .. Subbasis von $\mathcal{T}$ $\Longleftrightarrow$ ... $V \supseteq \{\{1\}, \{1,2\}\}$

($\Rightarrow$) angenommen $V \subseteq \{\emptyset, X\}$ (Umkehrung von 9))

$O = \{1\}$ $\quad \nexists\, (C_i)_{i=1,\dots,n}$ $C_i \in V : x \in \bigcap_{i=1}^{n} C_i \subseteq O$

$\Rightarrow V$ keine Subbasis

($\Leftarrow$) nachrechnen

ANA Ü15

7.) M .. dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$

zz: $S = \{(-\infty, q) : q \in M\} \cup \{(q, \infty) : q \in M\}$ .. Subbasis von der

euklidischen Metrik erzeugte Topologie $\mathcal{T}^1$

$O \in \mathcal{T}$ $\quad O \neq \mathbb{R}$ $\quad O \neq \emptyset$ $\quad \Rightarrow O = (a, b)$

$x \in O$ bel. $\Rightarrow a < x < b$ $\quad$ [M .. dicht $\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} : O \cap M \neq \emptyset$

$\Rightarrow (a, x), (x, b)$ offen $\quad \Rightarrow (a, x) \cap M \neq \emptyset \wedge (x, b) \cap M \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\ a < c < x < d < b \quad c, d \in M$

$\Rightarrow (-\infty, d), (c, +\infty) \in S$

$\Rightarrow (-\infty, c) \cap (d, +\infty) = [c, d] \subseteq (a, b) \wedge x \in [c, d]$

ANA Ü15

8) $(Y,\mathcal{T})$ $\quad X\subseteq Y$ $\quad (X,\mathcal{T}_X)$ Spurtopologie

z.z. $U\subseteq X$ $x\in X$ $U\in\mathcal{U}(x)_{\text{bzgl. }\mathcal{T}_X} \Leftrightarrow U=X\cap V$ $\quad V\in\mathcal{U}(x)$ bzgl. $\mathcal{T}$

$\Rightarrow U\subseteq X \Rightarrow U\subseteq Y$ $\quad U$.. Umgebung bzgl $\mathcal{T}_X \Rightarrow U$: Umgebung bzgl. $\mathcal{T}$

$\Leftarrow$ $U=X\cap V$ Umgebung von $x\in X$ $\Rightarrow \exists O\in\mathcal{T}: x\in O\subseteq V$

$\Rightarrow x\in O\cap X\subseteq U\cap X=U \Rightarrow U$.. Umgebung bzgl. $\mathcal{T}_X$

z.z. $\underset{\text{bzgl. }\mathcal{T}}{\bar{A}}\cap X=\bar{A}$ bzgl. $\mathcal{T}_X$

$\bar{A}_{\mathcal{T}_X}=\bigcap\{B\cap X: B\supseteq A,\ B$ abgeschlossen in $(Y,\mathcal{T})\}$

$=X\cap\{B: B\supseteq A,\ B$ abgeschlossen in $(Y,\mathcal{T})\}=X\cap\bar{A}$

ANA Ü15

9.) $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{O})$ $f: X \to Y$ ... Homöomorphismus

$Z \subseteq X$

zz: $f|_Z : Z \to f(Z)$ Homöomorphismus

f bijektiv $\Rightarrow$ f injektiv $\Rightarrow f|_Z$ injektiv

surjektiv klar

zz: $\forall x \in Z \; \forall V \in \mathcal{U}(f|_Z(x)) \; \exists U \in \mathcal{U}(x) : f|_Z(U) \subseteq V$

$x \in Z$ bel. $V \in \mathcal{U}(f|_Z(x))$

$\Rightarrow \exists O \in \mathcal{T}_{f(Z)} : f|_Z(x) \in O \subseteq V \subseteq f(Z)$

$\overset{Bsp\,8}{\Rightarrow} \exists V' \in Y$ bzgl $\mathcal{T}|_Y : V = f(Z) \cap V'$

$\Rightarrow \exists U' \in \mathcal{U}(x) : f(U') \subseteq V'$

$\exists O' \in \mathcal{T}_X : x \in O' \subseteq U' \subseteq X$

$U := O' \cap f(Z) \in \mathcal{T}_Z$

$\Rightarrow x \in U \subseteq U \subseteq f(Z)$

$\Rightarrow U$ ist Umgebung bzgl $\mathcal{T}_Z$

$f(O') \subseteq f(U') \subseteq V'$

$\Rightarrow f(\underbrace{O' \cap Z}_{=U}) \subseteq f(U' \cap Z) \subseteq \underbrace{V' \cap f(Z)}_{=V}$

$\Rightarrow f(U) \subseteq V$

$\Rightarrow f|_Z$ stetig

gleich mit f^{-1} $\Rightarrow f|_Z^{-1}$ stetig

$\Rightarrow f|_Z$ Homöomorphismus