# Zusammenfassung Heft 2 LINAG

Ida Hönigmann

7. Dezember 2020

# 1 Vektorraum

**Definition 1.1.** $m_1, m_2, ..., m_n \in V$, $x_1, ..., x_n \in K$
*Dann ist* $x_1 * m_1 + x_2 * m_2 + ... + x_n * m_n$ *eine Linearkombination des Vektors* $m_1, ..., m_n$

**Bemerkung.** *Wenn* $m_1 = m_2$*, dann Linearkombination über* $m_1, ..., m_n$ *auch Linearkombination über* $m_2, ..., m_n$.

**Definition 1.2.** $M \subseteq V$
$[M] := \{v \in V \exists n \geq 0 \exists x_1, ..., x_n \in K \exists m_1, ..., m_n \in M : v = \sum_{i=1}^{n} x_i * m_i\}$ *heißt die Hülle von M.*
*Kurz auch:* $[M] = \{v \in V : v$ *ist Linearkombination von Elementen aus* $M\}$.

**Bemerkung.** $\emptyset \neq M \subseteq V \implies [M]$ *ist Unterraum von* $V$.

**Lemma 1.1.** $(U_i)_{i \in I}$... *Familie von Unterräumen von* $V$
*Dann ist* $\bigcap_{i \in I} U_i$ *ein Unterraum von* $V$.

**Lemma 1.2.** $[M]$ *kann auch als* $\cap\{U : U$ *ist Unterraum von* $V$, $M \in U\}$ *definiert werden.*

**Lemma 1.3.** $V$... *Vektorraum,* $M$... *Menge,* $U$... *Unterraum,* $M \subset U \subset V$

- $M \subseteq [M] \subseteq U$
- $M_1 \subseteq M_2 \subseteq V \implies [M_1] \subseteq [M_2]$
- $[U] = U$
- $[[M]] = [M]$

## 1.1 Basis

**Definition 1.3.** $V$... *Vektorraum*
$M \subseteq V$ *heißt Erzzeugnissystem von* $V \Leftrightarrow [M] = V$

**Definition 1.4.** $V$... *Vektorraum*
$M \subseteq V$ *heißt linear abhängig* $\Leftrightarrow \exists a \in M : a \in [M \setminus \{a\}]$
$M \subseteq V$ *heißt linear unabhängig* $\Leftrightarrow \forall a \in M : a \notin [M \setminus \{a\}]$

**Definition 1.5.** $V$... *Vektorraum,* $M \subseteq V$
$M$ *ist Basis von* $V \Leftrightarrow M$ *ist linear unabhängig* $\wedge M$ *ist Erzzeugnissystem.*

**Lemma 1.4.** $V$... *Vektorraum,* $M \subseteq V$
$M$ *ist linear abhängig* $\Leftrightarrow \exists \sum_{i=1}^{n} x_i * a_i = 0_V$ *nicht trivial*

**Lemma 1.5.** $M \subseteq V$
$m \in [M] \Leftrightarrow [M] = [M \cup \{m\}]$

**Theorem 1.6.** $V$... *Vektorraum,* $B \subseteq V$... *Basis*
$\implies \forall x \in V \setminus \{0_V\} \exists b_1, ..., b_n \in B$ *verschieden,* $\exists x_1, ..., x_n \in K \neq 0 : x = \sum_{i=1}^{n} x_i * b_i$ *mit* $x_i * b_i$ *eindeutig.*

**Theorem 1.7.** $V$... *Vektorraum,* $B \subseteq V$ ... *Teilmenge*
*Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- $B$ *ist Basis*
- $B$ *ist ein minimales Erzzeugnissystem*
- $B$ *ist maximal linear unabhängig*

**Theorem 1.8.** $A \subseteq M \subseteq V$ *mit* $V$... *Vektorraum und* $A$... *linear unabhängig*
$\implies \exists Y(A \subseteq Y \subseteq M$ *mit* $Y$ *maximal linear unabhängig* ).

## 1.2 Maximalitätsprinzip

**Definition 1.6.** *$K$ ist eine Kette, wenn gilt $\forall x, y \in K : x \leq y \vee y \leq x$*

**Definition 1.7.** *$K$ ist eine maximale Kette, wenn gilt $\forall K' \supset K : K'$ ist keine Kette*

**Theorem 1.9.** *$(H, \leq)$... Halbordung*
*$\implies \exists K \subseteq H : K$ ist eine maximale Kette.*

## 1.3 Basis

**Theorem 1.10.** *$V$... Vektorraum*
*$\implies \exists B \subseteq V : B$ ist Basis*

**Lemma 1.11.** *Sei $A \subseteq V$ linear unabhängig $\implies \exists B \supseteq A : B$ ist Basis.*
*Sei $M \subset V$ ein Erzeugungssystem $\implies \exists B \subset M : B$ ist Basis*

**Theorem 1.12.** *Jeder Vektorraum $V$ hat eine Basis $B$.*
*Wenn $A \subseteq V$ linear unabhängig ist $\implies \exists B \supset A$ mit $B$ ist Basis von $V$.*
*Wenn $M \subseteq V$ Erzeugungssystem von $V$, dann $\exists B \supseteq M$ mit $B$ ist Basis.*

**Lemma 1.13.** *$V$... Vektorraum über $K$, $M \subseteq V$, $m \in V$, $m = \sum_{i=1}^{n} x_i * m_i$ mit $x_1, ..., x_n \in K^\times$ und $m_1, ..., m_n \in M$ verschieden*

- *$M$ Erzeugungssystem $\implies \forall i (M \setminus \{m_i\}) \cup \{m\}$ ist Erzeugungssystem*
- *$M$ linear unabhängig $\implies \forall i (M \setminus \{m_i\}) \cup \{m\}$ ist linear unabhängig*
- *$M$ Basis $\implies \forall i (M \setminus \{m_i\}) \cup \{m\}$ ist Basis*

**Theorem 1.14** (Austauschsatz von Steinitz)**.** *Sei $M$ ein Erzeugungssystem von $V$. Sei $A$ eine linear unabhängige Teilmenge von V. Dann gilt:*
*$\exists \phi : A \to M$ injektiv, sodass $(M \setminus \phi(A)) \cup A$ ein Erzeugungssystem ist.*

**Lemma 1.15.** *$V$... Vektorraum über $K$, $B, B'$... Basen von $V$*
*$\implies \exists \phi : B \to B'$ injektiv $\wedge \exists \phi' : B' \to B$ injektiv*
*Alle Basen zu einem Vektorraum sind gleich groß: $|B| = |B'|, d.h. \exists \psi : B \to B'$ bijektiv*

**Theorem 1.16** (Satz von Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *$C$, $D$... Mengen, $\exists \phi : C \to D$ injektiv, $\exists \phi' : D \to C$ injektiv*
*$\implies \exists \psi : C \to D$ bijektiv*

**Definition 1.8.** *$dimV :=$ Größe einer beliebigen Basis von $V$*

**Bemerkung.** *$dimV = \infty \Leftrightarrow \neg(dimV endlich)$*

**Lemma 1.17.** *Sei $V$, $V'$... Vektorräume über $K$*
*$dimV = dimV' \Leftrightarrow V \cong V'$, wobei $\cong$ bedeutet, dass $V$ und $V'$ isomorph sind*

**Theorem 1.18.** *$V$... Vektorraum über $K$*
*$V \cong K^{<B>}$, wobei $B \supseteq V$ eine beliebige Basis ist.*

**Definition 1.9.** *$V$... Vektorraum über $K$ heißt endlich erzeugt*

- *$\Leftrightarrow \exists M \subseteq V : [M] = V$*
- *$\Leftrightarrow V$ hat endliches Erzeugungssystem*
- *$\Leftrightarrow V$ hat endliche Basis*
- *$dimV$ ist endlich*

**Lemma 1.19.** *$V$ endlich erzeugt*

- *$M \subseteq V$ Erzeugungssystem $\implies |M| \geq dimV$*
- *$M \subseteq V$ linear unabhängig $\implies |M| \leq dimV$*

*Wenn Gleichheit gilt ist $M$ sogar eine Basis.*

**Lemma 1.20.** *$V$... Vektorraum, $U_1 \subseteq U_2 \subseteq V$, $U_2$... endlich erzeugt*

- *$dimU_1 \leq dimU_2$*
- *$U_1 \neq U_2 \Leftrightarrow dimU_1 < dimU_2$*

## 1.4 Elementare Spaltenumformungen

**Definition 1.10.** *Es gibt folgende elementare Spaltenumformungen:*

- *Multiplikation einer Spalte mit $c \in K^\times$*
- *Vertauschen zweier beliebiger Spalten*

- *Addition eines vielfachen einer Spalte zu einer anderen.*

**Lemma 1.21.** *$(a_1, ..., a_m)$ lässt sich durch elementare Spaltenumformungen zu $(a'_1, ...a'_m)$ umformen $\Leftrightarrow [\{a_1, ..., a_m\}] = [\{a'_1, ..., a'_m\}]$*

**Definition 1.11.** *$n \geq 1$*

$$Er := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in K^{r \times r}$$

**Lemma 1.22.** *$A \in K^{n \times m}$ beliebig.*

*$\Longrightarrow$ $\exists r \leq min(n, m)$, sodass $A$ durch elementare Spaltenumformungen zu $\begin{pmatrix} Er & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ umgeformt werden kann (bis auf die Reihenfolge der Zeilen).*

*Die entstandene Matrix nennt man auch Normalform.*

**Bemerkung.** *$K$... Körper, $n \geq 1$, $a_1, ..., a_n \in K^n$ verschieden*

*$b = \sum_{i=1}^{n} x_i * a_i$ mit $x_1, ..., x_m \in K$*

*Sei $j$ mit $1 \leq j \leq n$, sodass $x_j \neq 0$.*

*$\Longrightarrow$ $(a_1, ..., a_n)$ lässt sich durch elementare Spaltenumformungen nach $(a_1, ..., a_{j-1}, b, a_{j+1}, ..., a_n)$ umformen.*

**Lemma 1.23.** *$K$... Körper, $n \geq 1$, $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in K^n$*

*Falls $[\{a_1, ..., a_n\}] = [\{b_1, ..., b_n\}]$, dann lässt sich $(a_1, ..., a_n)$ durch elementare Spaltenumformungen zu $(b_1, ..., b_n)$ umformen.*

### 1.5 Dimenssionssatz

**Definition 1.12.** *$V$... Vektorraum, $(U_i | i \in I)$... Familie von Unterräumen von $V$*

*$\sum_{i \in I} U_i = \{\sum_{i \in I} u_i | \forall i \in I : (u_i \in U_i) u_i = 0$ für fast alle $i \in I\}$*

**Bemerkung.** $\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq [\bigcup_{i \in I} U_i] = \sum_{i \in I} U_i$

**Definition 1.13.** *$\sum_{i \in I} U_i$ heißt direkt $\Leftrightarrow \forall j \in I : U_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i = \{0\}$*

**Schreibweise.** *Für direkte Summen schreibt man auch $\bigoplus$.*

**Lemma 1.24.** *$(U_i)_{i \in I}$... Unterraume von $V$*

*$S := \sum_{i \in I} U_i$ direkt $\Leftrightarrow \forall s \in S \exists!$ Darstellung $s = \sum_{i \in I} u_i$ wobei $\forall i \in I (u_i \in U_i)$*

**Definition 1.14.** *$U$ ... Unterraum von $V$*

*$T \subseteq V$ heißt komplementärer Unterraum zu $U \Leftrightarrow V = U \bigoplus T$ also $U \cap T = \{0\}$.*

**Bemerkung.** *$V \setminus U$ ist kein Unterraum von $V$., da $0_V \notin V \setminus U$.*

**Theorem 1.25.** *$\forall U$ ... Unterraum von $V$, $\exists T$ komplementär zu $U$ (im Allgemeinen nicht eindeutig).*

**Theorem 1.26.** *(Dimenssionssatz) $U$, $T$ ... Unterraum von $V$ mit $dim(U) < \infty \wedge dim(T) < \infty$*

*$\Longrightarrow$ $dim(U+T) = dim(U) + dim(T) - dim(U \cap T)$*

**Lemma 1.27.** *$U$... Unterraum von $V$, $dim(V) < \infty$, $T$ ... Komplementärraum von $U$*

*$dim(T) = dim(V) - dim(U)$*

# 2 Lineare Abbildungen

**Definition 2.1.** *$V$, $W$... Vektorräume*

*$f : V \to W$ heißt linear $\Leftrightarrow$*

- $\forall x, y \in V : f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall c \in K \forall x \in V : f(c * x) = c * f(x)$