LINAG Ü6

2.4.2 K... Körper

a) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ... Vektoren aus $K^{2\times 1}$

zz: Familie (x,y) l.u. $\Longleftrightarrow$ $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$

1) (x,y) l.u. $\Rightarrow$ $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$

$\Longleftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Rightarrow (x,y)$ l.a.

Wähle $a = y_2$ und $b = -x_2$. Dann ist

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 y_2 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 y_1 \\ -x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ x_2 y_2 - x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (x,y)$ ist l.a.

2) $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0 \Rightarrow (x,y)$ l.u.

$\Longleftrightarrow (x,y)$ l.a. $\Rightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a x_1 + b \cdot y_1 \\ a x_2 + b y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a x_1 + b y_1 &= 0 \\ a x_2 + b y_2 &= 0 \end{aligned}$$

$a x_2 + b y_2 = 0 \Longleftrightarrow a x_2 = -b y_2 \Longleftrightarrow a = -\frac{b y_2}{x_2}$

$a x_1 + b y_1 = 0 \Longleftrightarrow -\frac{b y_2}{x_2} \cdot x_1 + b y_1 = 0$

$\Longleftrightarrow b \cdot \left(y_1 - \frac{y_2}{x_2} \cdot x_1\right) = 0 \Longleftrightarrow y_1 - \frac{y_2}{x_2} \cdot x_1 = 0$

$\Longleftrightarrow -\frac{y_2 \cdot x_1}{x_2} = -y_1 \Longleftrightarrow -y_2 \cdot x_1 = -x_2 \cdot y_1$

$\Longleftrightarrow 0 = -x_2 \cdot y_1 + x_1 y_2$

$\square$

LINAG Ü6

2.4.2 b) K ... Körper $\quad K^{n\times 1}$ ... VR über K $\quad n \geq 2$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

zz: (x,y) l.u. $\Leftrightarrow \exists i,j \in \{1,2,\dots,n\} : i \neq j \wedge x_i y_j - x_j y_i \neq 0$

1.) (x,y) l.u $\Rightarrow \exists i,j \in \{1,2,\dots,n\} : i \neq j \wedge x_i y_j - x_j y_i \neq 0$

$\Leftrightarrow (\forall i,j \in \{1,2,\dots,n\} : i = j \vee x_i y_j - x_j y_i = 0) \Rightarrow (x,y)$ ist l.a.

[wenn $i=j$, dann gilt $x_i y_j - x_j y_i = x_i y_i - x_i y_i = 0$
Also gilt $\forall i,j \in \{1,2,\dots,n\} : x_i y_j - x_j y_i = 0$]

Wähle nun $a = y_1$ und $b = -x_1$, dann gilt

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (-x_1) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cdot x_1 \\ y_1 \cdot x_2 \\ \vdots \\ y_1 \cdot x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \cdot y_1 \\ -x_1 \cdot y_2 \\ \vdots \\ -x_1 \cdot y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 \\ \vdots \\ x_n \cdot y_1 - x_1 \cdot y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$, da laut Vorbedingung gilt $\forall i \in \{1,2,\dots,n\} : x_i \cdot y_1 - x_1 \cdot y_i = 0$

2.) $(\exists i,j \in \{1,2,\dots,n\} : i \neq j \wedge x_i y_j - x_j y_i \neq 0) \Rightarrow (x,y)$ l.u.

$\Leftrightarrow (x,y)$ l.a $\Rightarrow \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\} : i = j \vee x_i y_j - x_j y_i = 0$

Sei $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ bel.

1. Fall $i=j$: trivial

2. Fall $i \neq j$: Da (x,y) l.a ist existiert eine nicht triviale LK, sodass

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also gilt $a \cdot x_i + b \cdot y_i = 0$ und $a \cdot x_j + b \cdot y_j = 0$. Aus a) wissen wir, das nun gilt: $0 = -x_j y_i + x_i y_j$ $\square$