

2.4.6

Für welches $t \in \mathbb{Q}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$ l.u.?

Für $t=0$ sind die Vektoren l.a., da

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Sonst l.u., da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t & 0 & 2 \\ 0 & t & 2t \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} &\xrightarrow{-2 \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} t & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & t-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} t & 0 & 2t \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & (t-2)t \end{pmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot \text{I}} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & t^2-2t-4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\cdot (t^2-2t-4)^{-1}} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\text{III}} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot (t)^{-1}} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot \text{III}} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\cdot (t)^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Division durch t erlaubt, da $t \neq 0$. Da man mit elementaren Spaltenumformungen die Einheitsmatrix erreichen kann (und keine Nullvektoren auftauchen) sind die Vektoren (für $t \neq 0$) l.u. \square