

ANA Ü12

6.) $E \neq \emptyset$ $\lambda \in \mathbb{C}$ $f, g: E \rightarrow \mathbb{C} \dots$ beschränkt

$$\text{zz: } \|f+g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$$

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{\infty} &= \sup \{|f(x)+g(x)| : x \in E\} \leq \sup \{|f(x)| + |g(x)| : x \in E\} \\ &\leq \sup \{|f(x)| : x \in E\} + \sup \{|g(x)| : x \in E\} = \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} \end{aligned}$$

$$\text{zz: } \|\lambda \cdot f\|_{\infty} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\infty}$$

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot f\|_{\infty} &= \sup \{|\lambda \cdot f(x)| : x \in E\} = \sup \{|\lambda| \cdot |f(x)| : x \in E\} \\ &= |\lambda| \cdot \sup \{|f(x)| : x \in E\} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\infty} \end{aligned}$$

$$\text{zz: } \|f \cdot g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \cdot \|g\|_{\infty}$$

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_{\infty} &= \sup \{|f(x) \cdot g(x)| : x \in E\} = \sup \{|f(x)| \cdot |g(x)| : x \in E\} \\ &\leq \sup \{|f(x)| : x \in E\} \cdot \sup \{|g(x)| : x \in E\} = \|f\|_{\infty} \cdot \|g\|_{\infty} \end{aligned}$$