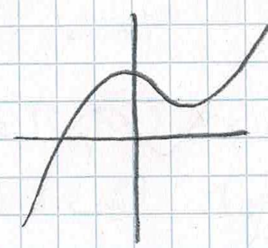
ANA Ü12

2.) $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ mit $\forall i \in \mathbb{N}, i \leq n: a_i \in \mathbb{R}$ $a_n \neq 0$

zz: $\exists k \in \mathbb{N}: n = 2k-1 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: f(c) = 0$



1. Fall $a_n > 0$:

Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$

Das heißt $\exists p, n \in \mathbb{R}: f(p) > 0 \wedge f(n) < 0$

Da p als Polynom stetig ist gilt, dass $f((p,n))$ ein Intervall ist und das (laut Zwischenwertsatz) $\forall x \in f((p,n)) \exists c \in (p,n)$: $f(c) = x$

Da $x = 0 \in (f(n), f(p))$ ist

$\exists c \in (n,p) (\subseteq \mathbb{R}): f(c) = 0.$

2. Fall $a_n < 0$:

genauso mit $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = +\infty$

zz: $(\exists k \in \mathbb{N}: n = 2k) \wedge (a_0 \cdot a_n < 0) \Rightarrow \exists c', c'' \in \mathbb{R}, c' \neq c'': f(c') = 0 = f(c'')$

$(a_0 \cdot a_n < 0) \Leftrightarrow (a_0 < 0)$ xor $(a_n < 0)$

1. Fall $(a_0 < 0) \wedge (a_n > 0)$:

Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = +\infty$, $p(0) = a_0 < 0$

$\Rightarrow \exists p', p'' \in \mathbb{R}, p' < 0 < p'': f(p') > 0 \wedge f(p'') > 0$

$\exists c' \in (p', 0): f(c') = 0$ $\exists c'' \in (0, p''): f(c'') = 0$

$c' \neq c''$, da $(p', 0) \cap (0, p'') = \emptyset$

2. Fall $(a_0 > 0) \wedge (a_n < 0)$:

genauso mit $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$, $p(0) = a_0 > 0$

$\square$