LINAG Üg

3.4.2. $f_1 = \sin$ $\quad f_2 = \cos$ $\quad f_3 = 1$ $\quad g = 5 + 4 \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x)$

$U = [\{f_1, f_2, f_3\}]$

a) zz: $B = (f_1, f_2, f_3)$ ist eine Basis von U

- B ist trivialerweise ein Erzeugungssystem von U
- Aus einem anderen Beispiel wissen wir sin und cos sind l.u., d.h.

wir müssen nur mehr zeigen $\forall k, l \in \mathbb{R}: k \cdot \sin(x) + l \cdot \cos(x) \neq 1$

$k \cdot \sin(0) + l \cdot \cos(0) = l \quad \Rightarrow l = 1$

$k \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) + l \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) = k \quad \Rightarrow k = 1$

$\sin(\pi) + \cos(\pi) = -1 \neq 1 \quad \Rightarrow f_1, f_2, f_3$ l.u.

(andere Richtung ist trivial)

b) Sei $k, l, m \in \mathbb{R}$ bel.

$\frac{d}{dx}\, k \cdot \sin(x) + l \cdot \cos(x) + m = k \cdot \cos(x) - l \cdot \sin(x) + 1 \quad \in U$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}$ bildet U in U ab

c)
$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -l & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \cdot(k^{-1}) \;\; \cdot(l^{-1}) \;\; (\cdot m^{-1}) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{Matrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \frac{d}{dx} g = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LINAG Ü9

3.4.4.

α)

$$
\begin{pmatrix} 1&2&2\\2&3&4\\3&4&5\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & -\mathrm{I} & -\mathrm{II} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&1&0\\2&1&1\\3&1&1\\1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1 \end{pmatrix} \end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -2\cdot\mathrm{III} & -\mathrm{III} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\1&-1&0\\2&2&-1\\-2&-1&1 \end{pmatrix} \end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -\mathrm{II} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\2&-1&0\\0&2&-1\\-1&-1&1 \end{pmatrix} \end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & -\mathrm{I} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\2&-1&-2\\0&2&-1\\-1&-1&2 \end{pmatrix} \end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{I} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-1&-2&2\\2&-1&0\\-1&2&-1 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$A=\begin{pmatrix} -1&-2&2\\2&-1&0\\-1&2&-1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3&5&3\\2&3&2\\1&1&2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & -1 & -2 & 2\\
 & & & 2 & -1 & 0\\
 & & & -1 & 2 & -1\\
\hline
3 & 5 & 3 & 4 & -5 & 3\\
2 & 3 & 2 & 2 & -3 & 2\\
1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0
\end{array}
$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 4&-5&3\\2&-3&2\\-1&1&0 \end{pmatrix}$$

β)

$$
\begin{pmatrix} 1&2&2\\2&3&4\\3&4&5\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & -\mathrm{I} & -\mathrm{II} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&1&0\\2&1&1\\3&1&1\\1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1 \end{pmatrix} \end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -\mathrm{II} & -\mathrm{III} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&1\\2&0&1\\2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1 \end{pmatrix} \end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -\mathrm{III} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\2&-1&0\\0&2&-1\\-1&-1&1 \end{pmatrix} \end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & -\mathrm{I} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\2&-1&-2\\0&2&-1\\-1&-1&2 \end{pmatrix} \end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{I} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-1&-2&2\\2&-1&0\\-1&2&-1 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$A=\begin{pmatrix} -1&-2&2\\2&-1&0\\-1&2&-1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2&3&1\\1&0&0\\2&0&0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & -1 & -2 & 2\\
 & & & 2 & -1 & 0\\
 & & & -1 & 2 & -1\\
\hline
2 & 3 & 1 & 3 & -5 & 3\\
1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2\\
2 & 0 & 0 & -2 & -4 & 4
\end{array}
$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 3&-5&3\\-1&-2&2\\-2&-4&4 \end{pmatrix}$$

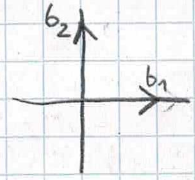
LINAG Ü9

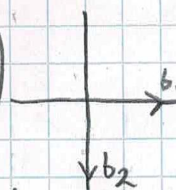
3.5.8. V … Vektorraum über $\mathbb{R}$ $\quad (b_1, b_2)$ … Basis von V

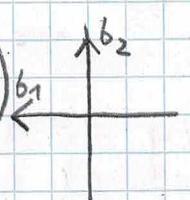
a) Da man festlegt wohin $-x$ abgebildet wird, wenn man festlegt wohin x abgebildet wird (da $f(-x) = f((-1)\cdot x) = (-1)\cdot f(x) = -f(x)$) gibt es nur folgende Möglichkeiten:

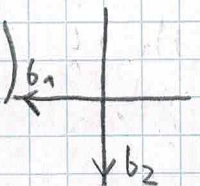
$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & -b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & -b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}$$

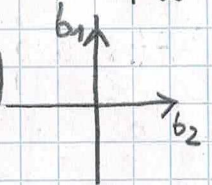
b) In $\mathbb{R}^2$ mit b_1, b_2 als kanonische Basis

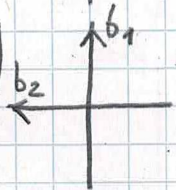
$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ 

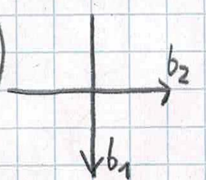
$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & -b_2 \end{pmatrix}$ 

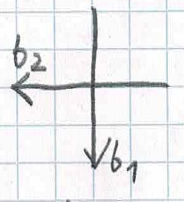
$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & -b_2 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}$ 

c) offensichtlich bleibt man in der Untergruppe wenn man Elemente miteinander verknüpft.

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = id \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & -b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & -b_2 \end{pmatrix} = id \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & b_2 \end{pmatrix} = id$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & -b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 & -b_2 \end{pmatrix} = id \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} = id \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix} = id$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} = id$$, d.h. $\exists$ Inverse

$\Rightarrow$ bildet eine Untergruppe

LINAG Ü9

3.5.15 $t \in \mathbb{Q}$ ges: alle t sodass Matrix A_t regulär ist

1. Fall $t = 1$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, da der Spaltenrang nur 3 ist gibt es sicher keine lineare Bijektion zu $\mathbb{Q}^4$
$\Rightarrow$ nicht regulär

2. Fall $t \neq 1$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -t\cdot II & & & -t\cdot III \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-t^2 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & -t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \cdot(1-t^2)^{-1} & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & -t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{1-t^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-t}{1-t^2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & -t\cdot I & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & -t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & 0 & 0 \\ \frac{-t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & -t\,II & +t^2\cdot II \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} & \frac{-t^3}{1-t^2} \\ \frac{-t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_t^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} & \frac{-t^3}{1-t^2} \\ \frac{-t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & \frac{-t}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Divison durch $1-t^2$ ok, da $t=1$)

, da eine Inverse Matrix existiert ist bei $t \neq 1$ die Matrix regulär.

LINAG Ü9

3.6.1 $f \in L(V,V)$ $f \circ f = f$ (idempotent)

a) zz $g := id - f$ ist idempotent

$g(x) = (id - f)(x) = id(x) - f(x) = x - f(x)$

$g \circ g(x) = (id-f)(id-f)(x) = (id-f)(id(x) - f(x)) = id(id(x) - f(x))$
$- f(id(x) - f(x)) = id(x - f(x)) - f(x - f(x)) = x - f(x) - f(x - f(x))$
$= x - f(x) - (f(x) - f(f(x))) = x - f(x) - f(x) + f(f(x))$
$= x - f(x) - f(x) + f(x) = x - f(x) = g(x)$

$\Rightarrow g \circ g = g$

b) $g \circ f = g(f(x)) = id(f(x)) - f(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$
$f \circ g = f(id(x) - f(x)) = f(id(x)) - f(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$

c) Sei $x \in V$ mit $g(x) = 0$ bel.
$0 = g(x) = id(x) - f(x) = x - f(x) \Leftrightarrow x = f(x)$
d.h. $x \in f(V)$

Sei $x \in V$ mit $x \in f(V)$ bel.
$\exists z \in V: f(z) = x$ $g(x) = id(x) - f(x) = x - f(x) = f(z) - f(f(z)) =$
$= f(z) - f(z) = 0$
$\Rightarrow \ker(g) = f(V)$

Sei $x \in V$ mit $f(x) = 0$ bel.
$0 = f(x) \Leftrightarrow g(x) = f(x) + g(x) = f(x) + id(x) - f(x) = id(x) = x$
d.h. $x \in g(V)$

Sei $x \in V$ mit $x \in g(V)$ bel.
$\exists z \in V: g(z) = x$ $f(x) = f(g(z)) = f(id(z) - f(z)) = f(z) - f(f(z))$
$= f(z) - f(z) = 0$
$\Rightarrow \ker(f) = g(V)$