Zusammenfassung Heft 2 LINAG

Ida Hönigmann

23. November 2020

1 Vektorraum

Definition 1.1. *$m_1, m_2, ..., m_n \in V$, $x_1, ..., x_n \in K$*

Dann ist $x_1 * m_1 + x_2 * m_2 + ... + x_n * m_n$ eine Linearkombination des Vektors $m_1, ..., m_n$

Bemerkung. *Wenn $m_1 = m_2$, dann Linearkombination über $m_1, ..., m_n$ auch Linearkombination über $m_2, ..., m_n$.*

Definition 1.2. *$M \subseteq V$*

$[M] \coloneqq \{v \in V \exists n \geq 0 \exists x_1, ..., x_n \in K \exists m_1, ..., m_n \in M : v = \sum_{i=1}^{n} x_i * m_i\}$ heißt die Hülle von M.

Kurz auch: $[M] = \{v \in V : v$ ist Linearkombination von Elementen aus $M\}$.

Bemerkung. *$\emptyset \neq M \subseteq V \implies [M]$ ist Unterraum von V.*

Lemma 1.1. *$(U_i)_{i \in I}$... Familie von Unterräumen von V*

Dann ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ ein Unterraum von V.

Lemma 1.2. *$[M]$ kann auch als $\cap\{U : U$ ist Unterraum von V, $M \in U\}$ definiert werden.*

Lemma 1.3. *V... Vektorraum, M... Menge, U... Unterraum, $M \subset U \subset V$*

- $M \subseteq [M] \subseteq U$
- $M_1 \subseteq M_2 \subseteq V \implies [M_1] \subseteq [M_2]$
- $[U] = U$
- $[[M]] = [M]$

1.1 Basis

Definition 1.3. *V... Vektorraum*

$M \subseteq V$ heißt Erzzeugnissystem von $V \Leftrightarrow [M] = V$

Definition 1.4. *V... Vektorraum*

$M \subseteq V$ heißt linear abhängig $\Leftrightarrow \exists a \in M : a \in [M \setminus \{a\}]$

$M \subseteq V$ heißt linear unabhängig $\Leftrightarrow \forall a \in M : a \notin [M \setminus \{a\}]$

Definition 1.5. *V... Vektorraum, $M \subseteq V$*

M ist Basis von $V \Leftrightarrow M$ ist linear unabhängig $\wedge M$ ist Erzzeugnissystem.

Lemma 1.4. *V... Vektorraum, $M \subseteq V$*

M ist linear abhängig $\Leftrightarrow \exists \sum_{i=1}^{n} x_i * a_i = 0_V$ nicht trivial

Lemma 1.5. *$M \subseteq V$*

$m \in [M] \Leftrightarrow [M] = [M \cup \{m\}]$

Theorem 1.6. *V... Vektorraum, $B \subseteq V$... Basis*

$\implies \forall x \in V \setminus \{0_V\} \exists b_1, ..., b_n \in B$ verschieden, $\exists x_1, ..., x_n \in K \neq 0 : x = \sum_{i=1}^{n} x_i * b_i$ mit $x_i * b_i$ eindeutig.

Theorem 1.7. *V... Vektorraum, $B \subseteq V$ ... Teilmenge*

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- *B ist Basis*
- *B ist ein minimales Erzzeugnissystem*
- *B ist maximal linear unabhängig*

Theorem 1.8. *$A \subseteq M \subseteq V$ mit V... Vektorraum und A... linear unabhängig*

$\implies \exists Y(A \subseteq Y \subseteq M$ mit Y maximal linear unabhängig).

1.2 Maximalitätsprinzip

Definition 1.6. *K ist eine Kette, wenn gilt $\forall x, y \in K : x \leq y \vee y \leq x$*

Definition 1.7. *K ist eine maximale Kette, wenn gilt $\forall K' \supset K : K'$ ist keine Kette*

Theorem 1.9. *$(H, \leq)$... Halbordung*
$\implies \exists K \subseteq H : K$ ist eine maximale Kette.

1.3 Basis

Theorem 1.10. *V... Vektorraum*
$\implies \exists B \subseteq V : B$ ist Basis

Lemma 1.11. *Sei $A \subseteq V$ linear unabhängig $\implies \exists B \supseteq A : B$ ist Basis.*
Sei $M \subset V$ ein Erzeugungssystem $\implies \exists B \subset M : B$ ist Basis

Theorem 1.12. *Jeder Vektorraum V hat eine Basis B.*
Wenn $A \subseteq V$ linear unabhängig ist $\implies \exists B \supset A$ mit B ist Basis von V.
Wenn $M \subseteq V$ Erzeugungssystem von V, dann $\exists B \supseteq M$ mit B ist Basis.

Lemma 1.13. *V... Vektorraum über K, $M \subseteq V$, $m \in V$, $m = \sum_{i=1}^{n} x_i * m_i$ mit $x_1, ..., x_n \in K^\times$ und $m_1, ..., m_n \in M$ verschieden*

- *M Erzeugungssystem $\implies \forall i (M \setminus \{m_i\}) \cup \{m\}$ ist Erzeugungssystem*
- *M linear unabhängig $\implies \forall i (M \setminus \{m_i\}) \cup \{m\}$ ist linear unabhängig*
- *M Basis $\implies \forall i (M \setminus \{m_i\}) \cup \{m\}$ ist Basis*

Theorem 1.14 (Austauschsatz von Steinitz)**.** *Sei M ein Erzeugungssystem von V. Sei A eine linear unabhängige Teilmenge von V. Dann gilt:*
$\exists \phi : A \to M$ injektiv, sodass $(M \setminus \phi(A)) \cup A$ ein Erzeugungssystem ist.

Lemma 1.15. *V... Vektorraum über K, B, B'... Basen von V*
$\implies \exists \phi : B \to B'$ injektiv $\wedge \exists \phi' : B' \to B$ injektiv
Alle Basen zu einem Vektorraum sind gleich groß: $|B| = |B'|$, d.h. $\exists \psi : B \to B'$ bijektiv

Theorem 1.16 (Satz von Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *C, D... Mengen, $\exists \phi : C \to D$ injektiv, $\exists \phi' : D \to C$ injektiv*
$\implies \exists \psi : C \to D$ bijektiv

Definition 1.8. *$dimV :=$ Größe einer beliebigen Basis von V*

Bemerkung. *$dimV = \infty \Leftrightarrow \neg(dimV endlich)$*

Lemma 1.17. *Sei V, V'... Vektorräume über K*
$dimV = dimV' \Leftrightarrow V \cong V'$, wobei $\cong$ bedeutet, dass V und V' isomorph sind

Theorem 1.18. *V... Vektorraum über K*
$V \cong K^{<B>}$, wobei $B \supseteq V$ eine beliebige Basis ist.

Definition 1.9. *V... Vektorraum über K heißt endlich erzeugt*

- *$\Leftrightarrow \exists M \subseteq V : [M] = V$*
- *$\Leftrightarrow V$ hat endliches Erzeugungssystem*
- *$\Leftrightarrow V$ hat endliche Basis*
- *$dimV$ ist endlich*

Lemma 1.19. *V endlich erzeugt*

- *$M \subseteq V$ Erzeugungssystem $\implies |M| \geq dimV$*
- *$M \subseteq V$ linear unabhängig $\implies |M| \leq dimV$*

Wenn Gleichheit gilt ist M sogar eine Basis.

Lemma 1.20. *V... Vektorraum, $U_1 \subseteq U_2 \subseteq V$, U_2... endlich erzeugt*

- *$dimU_1 \leq dimU_2$*
- *$U_1 \neq U_2 \Leftrightarrow dimU_1 < dimU_2$*

1.4 Elementare Spaltenumformungen

Definition 1.10. *Es gibt folgende elementare Spaltenumformungen:*

- *Multiplikation einer Spalte mit $c \in K^\times$*
- *Vertauschen zweier beliebiger Spalten*

- *Addition eines vielfachen einer Spalte zu einer anderen.*

Lemma 1.21. $(a_1, ..., a_m)$ *lässt sich durch elementare Spaltenumformungen zu* $(a'_1, ...a'_m)$ *umformen* $\Leftrightarrow [\{a_1, ..., a_m\}] = [\{a'_1, ..., a'_m\}]$

Definition 1.11. $n \geq 1$

$$Er := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in K^{r \times r}$$

Lemma 1.22. $A \in K^{n \times m}$ *beliebig.*

$\implies \exists r \leq min(n, m)$, *sodass* A *durch elementare Spaltenumformungen zu* $\begin{pmatrix} Er & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ *umgeformt werden kann (bis auf die Reihenfolge der Zeilen).*

Die entstandene Matrix nennt man auch Normalform.