Zusammenfassung Heft 2 ANA

Ida Hönigmann

27. November 2020

1 Rationale Zahlen

Definition 1.1. *Ein angeordneter Körper heißt vollständig angeordnet, falls* $\emptyset \neq M \subseteq K$ *und* M *nach oben beschränkt (* $\implies$ M *hat Supremum).*

Lemma 1.1. *vollständig angeordnet* $\implies$ *archimedisch angeordnet*

Satz 1.2. K *und* L*... vollständig angeordnete Körper* $\implies$ $\exists!\phi : L \to K$ *mit* $+$ *und* $*$ *verträglich, bijektiv und mit* $\leq$ *verträglich.*

Schreibweise. $\mathbb{R} =$ *vollständig angeordneter Körper*

Satz 1.3. $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$
Dann $\exists! y \in \mathbb{R}, y \geq 0 : y^n = x$

Definition 1.2. $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$
Sei $\sqrt[n]{x}$ *die eindeutige Zahl* $y \geq 0$ *mit* $y^n = x$.

Bemerkung. $y \mapsto y^n$ *ist bijektiv*

Lemma 1.4.

- $\sqrt[q]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[q]{x}}$
- $\sqrt[q]{xz} = \sqrt[q]{x} * \sqrt[q]{z}$
- $(\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}$

Definition 1.3. $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$ *mit* $p \in \mathbb{Z}$ *und* $q \in \mathbb{N}$
$x^r = (\sqrt[q]{x})^p$

Lemma 1.5.

- $x^{r+s} = x^r * x^s$
- $(x^r)^s = x^{r*s}$
- $x^{-1} = \frac{1}{x^r}$

Bemerkung. $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$, *da* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Definition 1.4. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *heißen irrationale Zahlen, dafür schreibt man auch* $\mathbb{I}$.

Lemma 1.6. M, $N \neq \emptyset$*... Mengen* $f : M \times N \to \mathbb{R}$
Falls $f(M \times N)$ *nach oben beschränkt, so gilt*
$sup(\{f(m,n) : (m,n) \in M \times N\}) = sup(\{s_q : q \in N\}) = sup(\{sup(\{f(m,n) : m \in M\}) : n \in N\})$
Falls $\forall n \in N \{f(m,n) : m \in M\}$ *nach oben beschränkt und falls* $\{sup(\{f(m,n) : m \in M\}) : n \in N\}$ *nach oben beschränkt ist, dann ist* $f(M \times N)$ *nach oben beschränkt.*

Bemerkung. $A, B \subset \mathbb{R} \implies sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$

2 Komplexe Zahlen

Definition 2.1. $\mathbb{C} \coloneqq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Schreibweise. $(a,b) \in \mathbb{C}$ *werden in der Form* $a + ib$ *geschrieben.* a *nennt man den Realteil,* b *nennt man den Imaginärteil der Zahl.*

Definition 2.2. $a + ib, c + id \in \mathbb{C}$
$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
$(a + ib) * (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Schreibweise. $a + ib \in \mathbb{C}$ *mit* $b = 0$ *heißt rein reell.* $a \coloneqq (a + ib)$
$a + ib \in \mathbb{C}$ *mit* $a = 0$ *heißt rein imaginär.* $ib \coloneqq (a + ib)$
$z = (a + ib)$ *dann ist* $Rez = a$ *und* $Imz = b$

Bemerkung. i *ist Lösung von* $x^2 + 1 = 0$.

Satz 2.1. $(\mathbb{C}, +, *)$ *ist Körper. Dabei ist für* $a + ib \in \mathbb{C}$*:*

- $0 + i0$ *ist additiv neutrales Element*
- $-a + i(-b)$ *ist additiv inverses Element*
- $1 + i0$ *ist multiplikativ neutrales Element*
- $a + ib \neq 0 \implies \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{(-b)}{a^2+b^2}$ *ist multiplikativ inverses Element*

Bemerkung. $\mathbb{C}$ *ist kein angeordneter Körper.*

Bemerkung. $\mathbb{C}$ *ist Vektorraum über* $\mathbb{C}$ *mit Dimension* 1.
$\mathbb{C}$ *ist Vektorraum über* $\mathbb{R}$ *mit Dimension* 2.

Definition 2.3. $z \coloneqq (a + ib) \in \mathbb{C}$
$\bar{z} \coloneqq a + i(-b)$ *heißt konjugiert komplexe Zahl.*
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *mit* $|z| = 0 \Leftrightarrow (a + ib) = (0 + i0)$

Bemerkung. *"*$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$*"*

Lemma 2.2.
- $|Rez| \leq |z|$
- $|Imz| \leq |z|$
- $|z * w| = |z| * |w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $z * \bar{z} = |z|^2$
- $z \neq 0 \implies \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{|z|^2} + i\frac{-b}{|z|^2}$

3 Grenzwerte

Definition 3.1. $M = \emptyset$, $d : M \times M \to \mathbb{R}$
(M, d) *heißt metrischer Raum, falls*

- *(M1)* $d(x, y) \geq 0$ *und* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *(M2)* $d(x, y) = d(y, x)$
- *(M3)* $x, y, z \in M \implies d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Lemma 3.1. $p \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_p \in \mathbb{R}$
$(\sum_{j=1}^n a_j * b_j)^2 \leq (\sum_{j=1}^n a_j^2) * (\sum_{j=1}^n b_j^2)$
$(\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{j=1}^n a_j^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{j=1}^n b_j^2)^{\frac{1}{2}}$

Definition 3.2. X... *Menge mit* $X \neq \emptyset$
Eine Folge x *ist eine Funktion* $x : \mathbb{N} \to X$.
Meist schreibt man $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $x_n = x(n)$.

Definition 3.3. (M, d)... *metrischer Raum,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... *Folge aus* M, $x \in M$
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt konvergent gegen* x *falls*
$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \epsilon$
In diesem Fall schreibt man auch
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *oder "bei* $n \to \infty$ *geht* $x_n \to x$*" oder* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$.

Bemerkung. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$

Bemerkung. $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{\geq k} \coloneqq \{p \in \mathbb{Z} : p \geq k\}$
$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq K}}$... *Folge*
konvergiert $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq K} : d(x_n, x) < \epsilon \forall n \geq N$

Bemerkung. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$
- $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq \epsilon$
- *Für ein gewisses* $K > 0$ *gilt:* $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : d(x_n, x) < K * \epsilon$
- *Für ein gewisses* $K > 0$ *gilt:* $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq K * \epsilon$

Definition 3.4. *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* M. *Ist* $n : \mathbb{B} \to \mathbb{N}$ *streng monoton wachsend, so heißt* $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *eine Teilfolge von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 3.2. (M, d)... *metrischer Raum,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$... *Folge in* M, $x \in M$

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *hat höchstens einen Grenzwert*
- $k \in \mathbb{N}$ *beliebig.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq k}} \to x$
- $k \in \mathbb{N}$ *beliebig.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \Leftrightarrow (x_n + k)_{n\in\mathbb{N}} \to x \Leftrightarrow (x_n - k)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq k+1}} \to x$
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \wedge (x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *ist Teilfolge von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \implies \lim\limits_{j\to\infty} (x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}} = x$

Bemerkung. *Teilfolge konvergiert* $\not\Longrightarrow$ *Folge konvertiert*

Lemma 3.3. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to y$ ... *Folgen in* (M,d)
$\implies \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$

Lemma 3.4. (M,d)... *metrischer Raum*, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in M$
$|d(a_1,b_1) - d(a_2,b_2)| \leq d(a_1,a_2) + d(b_1,b_2)$

Definition 3.5. (M,d)... *metrischer Raum*

- $Y \subseteq M$ *heißt beschränkt, falls* $Y \neq \emptyset$ *und* $\exists z \in M \exists c > 0 \forall y \in Y : d(z,y) \leq c$
- $f : E \to M$ *heißt beschränkt wenn* $f(E) \subseteq M$ *beschränkt ist.*
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$... *Folge aus* M *heißt beschränkt, falls* $x : \mathbb{N} \to M$ *beschränkt ist.*

Bemerkung. $\emptyset \neq Y \subseteq M$ *ist beschränkt* $\Leftrightarrow \forall x \in M : \exists C_x \geq 0 \forall y \in Y : d(y,x) \leq C_x$

Lemma 3.5. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}...Folgein(M,d)$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \implies (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist beschränkt.*

Lemma 3.6. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... *Folgen in* $(\mathbb{R}, d_2)$ *mit* $x_n \to x$ *und* $y_n \to y$
Dann gelten folgende Aussagen:

- $\exists c \in \mathbb{R} : x < c \implies \exists N \in \mathbb{N}; x_n < c \forall n \geq N.$
- $x < y \implies \exists N \forall n \geq N : x_n < y_n$
- $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \leq y_n \implies x \leq y$

Satz 3.7. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$... *Folgen in* $(\mathbb{R}, d_2)$
$x_n \to a \land y_n \to a \land x_n \leq a_n \leq y_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *bis auf endlich viele* $\implies a_n \to a$

Satz 3.8. *Sei* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen aus* $\mathbb{C}$ *mit* $z_n \to z$ *und* $w_n \to w$, *dann gelten folgende Aussagen:*

- $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z|$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{z_n} = \bar{z}$
- $\lim z_n + w_n = z + w$ *und* $\lim(-z_n) = -z$
- $z = 0$ *und* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$... *beschränkte Folge* $\implies z_n * u_n \to 0$
- $\lim z_n * w_n = z * w$
- $\lim z_n^k = z^k$, *falls* $k \in \mathbb{N}$ *fest*
- $z \neq 0 \implies \lim \frac{1}{z_n} = \frac{1}{z}$
- $z_n \in \mathbb{R}, z_n \geq 0, z \in \mathbb{R}$, $z \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ *fest* $\implies \sqrt[k]{z_n} \to \sqrt[k]{z}$

Definition 3.6. *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}$ *heißt*

- *monoton wachsend, falls* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- *monoton fallend, falls* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- *streng monoton wachsend, falls* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- *streng monoton fallend, falls* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

Satz 3.9. *Falls* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende Folge in* $\mathbb{R}$ *ist nach oben beschränkt (d.h.* $\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq c$*), dann ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent.*
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = sup(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$
Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Folge in* $\mathbb{R}$ *ist nach unten beschränkt (d.h.* $\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq c$*), dann ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent.*
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = inf(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$

Definition 3.7. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... *beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$
$y_N := inf(\{x_n : n \geq N\})$
$z_N := inf(\{x_n : n \geq N\})$
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n := \lim\limits_{N\to\infty} y_N = sup\{y_N : N \in \mathbb{N}\}$
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n := \lim\limits_{N\to\infty} z_N = inf\{z_N : N \in \mathbb{N}\}$

Lemma 3.10. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$... *beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$
$\implies \exists$ *Teilfolge* $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n(j)} = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$
$\implies \exists$ *Teilfolge* $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n(j)} = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

Lemma 3.11. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$... *beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$

- $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$
- $\forall n : x_n \leq y_n \implies \liminf a_n \leq \liminf b_n \land \limsup a_n \leq \limsup b_n$

- $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$ *und* $\liminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup_{n\to\infty} x_n$
- $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n = x \wedge \limsup_{n\to\infty} x_n = x$

3.1 Cauchy-Folgen

Definition 3.8. (M,d)... *metrischer Raum*

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* M *heißt Cauchy-Folge, falls* $\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(x_m, x_n) < \epsilon$

Bemerkung. *Ob* ϵ *aus* $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{Q}$ *stammt ist egal.*

$(x_n) \to x \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \in \mathbb{Q} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \epsilon$

Lemma 3.12. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist Cauchy-Folge* $\implies (x_n)$ *ist beschränkt.*

Lemma 3.13. (M,d)... *metrischer Raum,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$... *Folge in* M

Falls (x_n) *konvergent ist, dann ist* (x_n) *auch eine Cauchy-Folge.*

Bemerkung. *Cauchy-Folge impliziert nicht, das die Folge konvergiert.*

Definition 3.9. *Ein metrischer Raum heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge auch gegen einen Punkt aus diesem metrischen Raum konvergiert.*

Lemma 3.14. (M,d)... *metrischer Raum*

Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchy-Folge ist und falls* $\exists$ *Teilfolge* $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim_{j\to\infty} x_{n(j)} = x \in M$

$\implies \lim_{n\to\infty} x_n = x$

Satz 3.15. $(\mathbb{R}, d_2)$ *ist ein vollständig metrischer Raum.*

Lemma 3.16. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... *Folge aus* $\mathbb{R}^p$, $x_n = (\xi_{n,1}, ..., \xi_{n,p})$

$x = (\xi_1, ..., \xi_p) \in \mathbb{R}^p$

Falls $x_n \to x$ *bzgl.* d_1, d_2, d_∞, *dann gilt* $x_n \to x$ *bzgl. aller dieser Metriken. Weiters gilt* $x_n \to x$ *bzgl.* $d_1, d_2, d_\infty \Leftrightarrow \forall j \in \{1, ..., p\} : \xi_{n,j} \to \xi_j in (\mathbb{R}, d_2)$.

Lemma 3.17. $(\mathbb{R}^p, d_{1,2oder\infty})$ *ist vollständig metrischer Raum.*

$(\mathbb{C}^p, d_{1,2oder\infty})$ *ist vollständig metrischer Raum.*

Lemma 3.18. *Eine komplexe Folge konvergiert, wenn ihr Realteil und Imaginärteil konvergieren.*

Definition 3.10. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... *Folge in* $\mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n > M$

$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n < M$

Bemerkung. *Eine Folge kann nicht gleichzeitig gegen* $x \in \mathbb{R}$ *und gegen* $+\infty$ *oder* $-\infty$ *konvergieren.*

Satz 3.19. $(x_n), (y_n)$ ... *Folgen in* $\mathbb{R}$, *wobei* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

Dann gelten folgende Aussagen:

- $\lim_{n\to\infty} -x_n = -\infty$
- $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ ... *nach unten beschränkt* $\implies \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$
- $\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} : y_n \geq C$, *dann* $\lim_{n\to\infty}(x_n * y_n) = +\infty$
- *Falls* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \implies \lim_{n\to\infty} +\infty$
- $\forall n \in \mathbb{N} : y_n > 0 \implies \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = 0$
- *Wenn* y_n *monoton wachsend ist, dann gilt*
  - $\lim_{n\to\infty} = sup(y_n)$, *falls* $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ *nach oben beschränkt.*
  - $\lim_{n\to\infty} +\infty$, *falls* $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ *nicht nach oben beschränkt ist.*

Bemerkung. *Gleicher Satz gilt in gleicher Form auch für* $-\infty$.

3.2 Reihen

Definition 3.11. a_k ... *Folge aus* $\mathbb{R}$ *oder aus* $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ *heißt die j-te Partialsumme*

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt Reihe mit Summanden* a_n.

Falls $\lim_{n\to\infty} S_n$ *existiert, so heißt die Reihe konvergent.*

Schreibweise. *Wenn eine Reihe konvergent ist schreiben wir für* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = x$ *auch* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = x$.

Für $\lim\limits_{n\to\infty} S - n = +\infty$ *schreiben wir auch* $\sum_{k=1}^{\infty} = +\infty$. *Gleiches für* $-\infty$.

Für (S_n) *schreibt man auch* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Lemma 3.20. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ... *konvergente Reihen in* $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$.

Dann gilt:

- $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$... *konvergiert gegen* $(\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{k=1}^{\infty} b_k)$
- $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda * a_k) = \lambda * \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$

Lemma 3.21. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$... *Reihen, wobei* $\exists l \in \mathbb{N} \forall k \geq l : a_k = a'_k$

$\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent* $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ *konvergiert*