

2.4.6

Für welches  $t \in \mathbb{Q}$  sind die Vektoren  $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$  l.u.?

Für  $t=0$  sind die Vektoren l.a., da

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Sonst l.u., da

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} t & 0 & 2 \\ 0 & t & 2t \\ 2 & 1 & t \end{array} \right) \xrightarrow{-2 \cdot II} \left( \begin{array}{ccc} t & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & t-2 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot t} \left( \begin{array}{ccc} t & 0 & 2t \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & (t-2)t \end{array} \right) \xrightarrow{-2 \cdot I} \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & t^2-2t-4 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\cdot (t^2-2t-4)^{-1}} \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-III} \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot (t)^{-1}} \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2 \cdot III} \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\cdot (t)^{-1}} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Division durch  $t$  erlaubt, da  $t \neq 0$ . Da man mit elementaren Spaltenumformungen die Einheitsmatrix erreichen kann (und keine Nullvektoren auftauchen) sind die Vektoren (für  $t \neq 0$ ) l.u. □