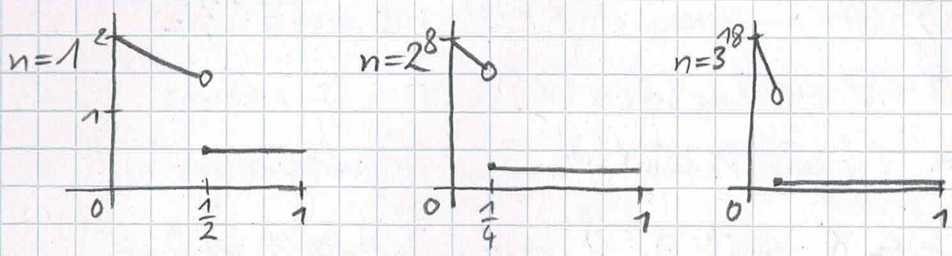
ANA Ü12

3) $n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n(x): (0,1) \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \begin{cases} -n^3 x + 2n^2, & \text{falls } 0 < x < \frac{1}{2n} \\ \frac{n}{n+1}, & \text{falls } \frac{1}{2n} \le x < 1 \end{cases}$

Skizze:



Punktweise Konvergenz: $\quad f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$

$\forall x \in (0,1): \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$, da $\frac{1}{2n} \to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1 \quad \Rightarrow (f_n) \xrightarrow[\text{punktweise}]{n\to\infty} f$

Gleichmäßige Konvergenz:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $N = \sqrt{\frac{\varepsilon+1}{2}}$ Sei $n \geq N$ bel.

$d_\infty(f_n, f) = \sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in (0,1)\}$

$= \sup(\{|-n^3 \cdot x + 2n^2 - 1| : x \in (0, \frac{1}{2n})\} \cup \{|\frac{n}{n+1} - 1| : x \in [\frac{1}{2n}, 1)\})$

Da $\frac{n}{n+1}$ monoton fallend ist $\sup\{|\frac{n}{n+1} - 1|\} = \frac{N}{N+1} - 1$

$|-n^3 \cdot x + 2n^2 - 1| \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$ und ist monoton fallend, daher ist $\sup\{|-n^3 x + 2n^2 - 1|\} = |-N^3 \cdot x + 2N^2 - 1|$

Je größer x, desto kleiner $-N^3 \cdot x + 2N^2 - 1$, daher $\sup\{|-N^3 x + 2N^2 - 1|\} = 2N^2 - 1$.

Offensichtlich ist $2N^2 - 1 > \frac{N}{N+1} - 1$ ab einem Index.

$2N^2 - 1 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{2}}^2 - 1 = 2\,\frac{\varepsilon+1}{2} - 1 = \varepsilon + 1 - 1 = \varepsilon$

$\Rightarrow$ konvergiert gleichmäßig gegen f

Fläche a_n unter f_n:

$a_n = (1 - \frac{1}{2n}) \cdot f(\frac{1}{2n}) + \frac{1}{2n} \cdot \lim\limits_{x \to \frac{1}{2n}-} f(x) + \frac{\frac{1}{2n} \cdot (\lim\limits_{x\to 0+} f(x) - \lim\limits_{x\to\frac{1}{2n}-} f(x))}{2} = \ldots$

$= \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{8} + n + \frac{n}{8}$

$(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$, da $(f_n) \xrightarrow{n\to\infty} f$ und Fläche unter $f = 1$