Zusammenfassung Heft 2 LINAG

Ida Hönigmann

14. November 2020

1 Vektorraum

Definition 1.1. *$m_1, m_2, ..., m_n \in V$, $x_1, ..., x_n \in K$*
Dann ist $x_1 * m_1 + x_2 * m_2 + ... + x_n * m_n$ eine Linearkombination des Vektors $m_1, ..., m_n$

Bemerkung. *Wenn $m_1 = m_2$, dann Linearkombination über $m_1, ..., m_n$ auch Linearkombination über $m_2, ..., m_n$.*

Definition 1.2. *$M \subseteq V$*
$[M] := \{v \in V \exists n \geq 0 \exists x_1, ..., x_n \in K \exists m_1, ..., m_n \in M : v = \sum_{i=1}^{n} x_i * m_i\}$ heißt die Hülle von M.
Kurz auch: $[M] = \{v \in V : v$ ist Linearkombination von Elementen aus $M\}$.

Bemerkung. *$\emptyset \neq M \subseteq V \implies [M]$ ist Unterraum von V.*

Lemma 1.1. *$(U_i)_{i \in I}$... Familie von Unterräumen von V*
Dann ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ ein Unterraum von V.

Lemma 1.2. *$[M]$ kann auch als $\cap\{U : U$ ist Unterraum von V, $M \in U\}$ definiert werden.*

Lemma 1.3. *V... Vektorraum, M... Menge, U... Unterraum, $M \subset U \subset V$*

- *$M \subseteq [M] \subseteq U$*
- *$M_1 \subseteq M_2 \subseteq V \implies [M_1] \subseteq [M_2]$*
- *$[U] = U$*
- *$[[M]] = [M]$*

Definition 1.3. *V... Vektorraum*
$M \subseteq V$ heißt Erzzeugnissystem von $V \Leftrightarrow [M] = V$

Definition 1.4. *V... Vektorraum*
$M \subseteq V$ heißt linear abhängig $\Leftrightarrow \exists a \in M : a \in [M \setminus \{a\}]$
$M \subseteq V$ heißt linear unabhängig $\Leftrightarrow \forall a \in M : a \notin [M \setminus \{a\}]$

Definition 1.5. *V... Vektorraum, $M \subseteq V$*
M ist Basis von $V \Leftrightarrow M$ ist linear unabhängig $\wedge M$ ist Erzzeugnissystem.

Lemma 1.4. *V... Vektorraum, $M \subseteq V$*
M ist linear abhängig $\Leftrightarrow \exists \sum_{i=1}^{n} x_i * a_i = 0_V$ nicht trivial

Lemma 1.5. *$M \subseteq V$*
$m \in [M] \Leftrightarrow [M] = [M \cup \{m\}]$

Theorem 1.6. *V... Vektorraum, $B \subseteq V$... Basis*
$\implies \forall x \in V \setminus \{0_V\} \exists b_1, ..., b_n \in B$ verschieden, $\exists x_1, ..., x_n \in K \neq 0 : x = \sum_{i=1}^{n} x_i * b_i$ mit $x_i * b_i$ eindeutig.

Theorem 1.7. *V... Vektorraum, $B \subseteq V$ ... Teilmenge*
Folgende Aussagen sind äquivalent:

- *B ist Basis*
- *B ist ein minimales Erzzeugnissystem*
- *B ist maximal linear unabhängig*

Theorem 1.8. *$A \subseteq M \subseteq V$ mit V... Vektorraum und A... linear unabhängig*
$\implies \exists Y(A \subseteq Y \subseteq M$ mit Y maximal linear unabhängig).

1.1 Maximalitätsprinzip

Definition 1.6. *K ist eine Kette, wenn gilt $\forall x, y \in K : x \leq y \vee y \leq x$*

Definition 1.7. *K ist eine maximale Kette, wenn gilt $\forall K' \supset K : K'$ ist keine Kette*

Theorem 1.9. *$(H, \leq)\dots$ Halbordung*
$\implies \exists K \subseteq H : K$ *ist eine maximale Kette.*

Theorem 1.10. *$V\dots$ Vektorraum*
$\implies \exists B \subseteq V : B$ *ist Basis*

Lemma 1.11. *Sei $A \subseteq V$ linear unabhängig $\implies \exists B \supseteq A : B$ ist Basis.*
Sei $M \subset V$ ein Erzeugungssystem $\implies \exists B \subset M : B$ ist Basis