Zusammenfassung Heft 2 ANA

Ida Hönigmann

21. November 2020

1 Rationale Zahlen

Definition 1.1. *Ein angeordneter Körper heißt vollständig angeordnet, falls* $\emptyset \neq M \subseteq K$ *und* M *nach oben beschränkt (* $\implies$ M *hat Supremum).*

Lemma 1.1. *vollständig angeordnet* $\implies$ *archimedisch angeordnet*

Satz 1.2. K *und* L*... vollständig angeordnete Körper* $\implies$ $\exists! \phi : L \to K$ *mit* $+$ *und* $*$ *verträglich, bijektiv und mit* $\leq$ *verträglich.*

Schreibweise. $\mathbb{R}$ = *vollständig angeordneter Körper*

Satz 1.3. $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$
Dann $\exists! y \in \mathbb{R}, y \geq 0 : y^n = x$

Definition 1.2. $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$
Sei $\sqrt[n]{x}$ *die eindeutige Zahl* $y \geq 0$ *mit* $y^n = x$.

Bemerkung. $y \mapsto y^n$ *ist bijektiv*

Lemma 1.4.

- $\sqrt[q]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[q]{x}}$
- $\sqrt[q]{xz} = \sqrt[q]{x} * \sqrt[q]{z}$
- $(\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}$

Definition 1.3. $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$ *mit* $p \in \mathbb{Z}$ *und* $q \in \mathbb{N}$
$x^r = (\sqrt[q]{x})^p$

Lemma 1.5.

- $x^{r+s} = x^r * x^s$
- $(x^r)^s = x^{r*s}$
- $x^{-1} = \frac{1}{x^r}$

Bemerkung. $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$, *da* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Definition 1.4. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *heißen irrationale Zahlen, dafür schreibt man auch* $\mathbb{I}$.

Lemma 1.6. M, $N \neq \emptyset$*... Mengen* $f : M \times N \to \mathbb{R}$
Falls $f(M \times N)$ *nach oben beschränkt, so gilt*
$sup(\{f(m,n) : (m,n) \in M \times N\}) = sup(\{s_q : q \in N\}) = sup(\{sup(\{f(m,n) : m \in M\}) : n \in N\})$
Falls $\forall n \in N \{f(m,n) : m \in M\}$ *nach oben beschränkt und falls* $\{sup(\{f(m,n) : m \in M\}) : n \in N\}$ *nach oben beschränkt ist, dann ist* $f(M \times N)$ *nach oben beschränkt.*

Bemerkung. $A, B \subset \mathbb{R} \implies sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$

2 Komplexe Zahlen

Definition 2.1. $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Schreibweise. $(a, b) \in \mathbb{C}$ *werden in der Form* $a + ib$ *geschrieben.* a *nennt man den Realteil,* b *nennt man den Imaginärteil der Zahl.*

Definition 2.2. $a + ib, c + id \in \mathbb{C}$
$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
$(a + ib) * (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Schreibweise. $a + ib \in \mathbb{C}$ *mit* $b = 0$ *heißt rein reell.* $a := (a + ib)$
$a + ib \in \mathbb{C}$ *mit* $a = 0$ *heißt rein imaginär.* $ib := (a + ib)$
$z = (a + ib)$ *dann ist* $Rez = a$ *und* $Imz = b$

Bemerkung. i *ist Lösung von* $x^2 + 1 = 0$.

Satz 2.1. $(\mathbb{C}, +, *)$ *ist Körper. Dabei ist für* $a + ib \in \mathbb{C}$*:*

- $0 + i0$ *ist additiv neutrales Element*
- $-a + i(-b)$ *ist additiv inverses Element*
- $1 + i0$ *ist multiplikativ neutrales Element*
- $a + ib \neq 0 \implies \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{(-b)}{a^2+b^2}$ *ist multiplikativ inverses Element*

Bemerkung. $\mathbb{C}$ *ist kein angeordneter Körper.*

Bemerkung. $\mathbb{C}$ *ist Vektorraum über* $\mathbb{C}$ *mit Dimension* 1.
$\mathbb{C}$ *ist Vektorraum über* $\mathbb{R}$ *mit Dimension* 2.

Definition 2.3. $z := (a + ib) \in \mathbb{C}$
$\bar{z} := a + i(-b)$ *heißt konjugiert komplexe Zahl.*
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *mit* $|z| = 0 \Leftrightarrow (a + ib) = (0 + i0)$

Bemerkung. *"*$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$*"*

Lemma 2.2.

- $|Rez| \leq |z|$
- $|Imz| \leq |z|$
- $|z * w| = |z| * |w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $z * \bar{z} = |z|^2$
- $z \neq 0 \implies \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{|z|^2} + i\frac{-b}{|z|^2}$

3 Grenzwerte

Definition 3.1. $M = \emptyset$, $d : M \times M \to \mathbb{R}$
(M, d) *heißt metrischer Raum, falls*

- *(M1)* $d(x, y) \geq 0$ *und* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *(M2)* $d(x, y) = d(y, x)$
- *(M3)* $x, y, z \in M \implies d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Lemma 3.1. $p \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_p \in \mathbb{R}$
$(\sum_{j=1}^{n} a_j * b_j)^2 \leq (\sum_{j=1}^{n} a_j^2) * (\sum_{j=1}^{n} b_j^2)$
$(\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{j=1}^{n} a_j^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{j=1}^{n} b_j^2)^{\frac{1}{2}}$

Definition 3.2. X*... Menge mit* $X \neq \emptyset$
Eine Folge x *ist eine Funktion* $x : \mathbb{N} \to X$.
Meist schreibt man $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $x_n = x(n)$.

Definition 3.3. (M, d)*... metrischer Raum,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *... Folge aus* M, $x \in M$
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt konvergent gegen* x *falls*
$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \epsilon$
In diesem Fall schreibt man auch
$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *oder "bei* $n \to \infty$ *geht* $x_n \to x$*" oder* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$.

Bemerkung. $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$

Bemerkung. $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{\geq k} := \{p \in \mathbb{Z} : p \geq k\}$
$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq K}}$*... Folge*
konvergiert $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq K} : d(x_n, x) < \epsilon \forall n \geq N$

Bemerkung. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- $\lim_{n\to\infty} x_n = x$
- $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq \epsilon$
- *Für ein gewisses* $K > 0$ *gilt:* $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : d(x_n, x) < K * \epsilon$
- *Für ein gewisses* $K > 0$ *gilt:* $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq K * \epsilon$

Definition 3.4. *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* M. *Ist* $n : \mathbb{B} \to \mathbb{N}$ *streng monoton wachsend, so heißt* $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *eine Teilfolge von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 3.2. (M, d)*... metrischer Raum,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*... Folge in* M, $x \in M$

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *hat höchstens einen Grenzwert*
- $k \in \mathbb{N}$ *beliebig.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq k}} \to x$
- $k \in \mathbb{N}$ *beliebig.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \Leftrightarrow (x_n + k)_{n\in\mathbb{N}} \to x \Leftrightarrow (x_n - k)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq k+1}} \to x$
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \wedge (x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *ist Teilfolge von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \implies \lim_{j\to\infty} (x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}} = x$

Bemerkung. *Teilfolge konvergiert* $\not\Longrightarrow$ *Folge konvertiert*

Lemma 3.3. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to y$ ... Folgen in (M,d)*
$\implies \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$

Lemma 3.4. *(M,d)... metrischer Raum, $a_1,a_2,b_1,b_2 \in M$*
$|d(a_1,b_1) - d(a_2,b_2)| \le d(a_1,a_2) + d(b_1,b_2)$

Definition 3.5. *(M,d)... metrischer Raum*

- *$Y \subseteq M$ heißt beschränkt, falls $Y \ne \emptyset$ und $\exists z \in M \exists c > 0 \forall y \in Y : d(z,y) \le c$*
- *$f : E \to M$ heißt beschränkt wenn $f(E) \subseteq M$ beschränkt ist.*
- *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$... Folge aus M heißt beschränkt, falls $x : \mathbb{N} \to M$ beschränkt ist.*

Bemerkung. *$\emptyset \ne Y \subseteq M$ ist beschränkt $\Leftrightarrow \forall x \in M : \exists C_x \ge 0 \forall y \in Y : d(y,x) \le C_x$*

Lemma 3.5. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}...Folgein(M,d)$*
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \implies (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist beschränkt.*

Lemma 3.6. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Folgen in $(\mathbb{R},d_2)$ mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$*
Dann gelten folgende Aussagen:

- *$\exists c \in \mathbb{R} : x < c \implies \exists N \in \mathbb{N}; x_n < c \forall n \ge N$.*
- *$x < y \implies \exists N \forall n \ge N : x_n < y_n$*
- *$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \ge N : x_n \le y_n \implies x \le y$*

Satz 3.7. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$... Folgen in $(\mathbb{R},d_2)$*
$x_n \to a \wedge y_n \to a \wedge x_n \le a_n \le y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele $\implies a_n \to a$

Satz 3.8. *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen aus $\mathbb{C}$ mit $z_n \to z$ und $w_n \to w$, dann gelten folgende Aussagen:*

- $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z|$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{z_n} = \bar{z}$
- $\lim z_n + w_n = z + w$ *und* $\lim(-z_n) = -z$
- *$z = 0$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$... beschränkte Folge $\implies z_n * u_n \to 0$*
- $\lim z_n * w_n = z * w$
- *$\lim z_n^k = z^k$, falls $k \in \mathbb{N}$ fest*
- *$z \ne 0 \implies \lim \frac{1}{z_n} = \frac{1}{z}$*
- *$z_n \in \mathbb{R}, z_n \ge 0, z \in \mathbb{R}$, $z \ge 0$, $k \in \mathbb{N}$ fest $\implies \sqrt[k]{z_n} \to \sqrt[k]{z}$*

Definition 3.6. *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt*

- *monoton wachsend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \le a_{n+1}$*
- *monoton fallend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \ge a_{n+1}$*
- *streng monoton wachsend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$*
- *streng monoton fallend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$*

Satz 3.9. *Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt (d.h. $\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : x_n \le c$), dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.*
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = sup(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$
Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ ist nach unten beschränkt (d.h. $\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : x_n \ge c$), dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = inf(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$

Definition 3.7. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$*
$y_N := inf(\{x_n : n \ge N\})$
$z_N := inf(\{x_n : n \ge N\})$
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n := \lim\limits_{N\to\infty} y_N = sup\{y_N : N \in \mathbb{N}\}$
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n := \lim\limits_{N\to\infty} z_N = inf\{z_N : N \in \mathbb{N}\}$

Lemma 3.10. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$... beschränkte Folge in $\mathbb{R}$*
$\implies \exists$ *Teilfolge* $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n(j)} = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$
$\implies \exists$ *Teilfolge* $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n(j)} = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

Lemma 3.11. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$... beschränkte Folge in $\mathbb{R}$*

- $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$
- $\forall n : x_n \le y_n \implies \liminf a_n \le \liminf b_n \wedge \limsup a_n \le \limsup b_n$

- $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$ *und* $\liminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup_{n\to\infty} x_n$
- $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n = x \wedge \limsup_{n\to\infty} x_n = x$

3.1 Cauchy-Folgen

Definition 3.8. *(M,d)... metrischer Raum*

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M heißt Cauchy-Folge, falls $\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(x_m, x_n) < \epsilon$

Bemerkung. *Ob ϵ aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$ stammt ist egal.*

$(x_n) \to x \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \in \mathbb{Q} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \epsilon$

Lemma 3.12. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge $\implies$ (x_n) ist beschränkt.*

Lemma 3.13. *(M,d)... metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$... Folge in M*

Falls (x_n) konvergent ist, dann ist (x_n) auch eine Cauchy-Folge.

Bemerkung. *Cauchy-Folge impliziert nicht, das die Folge konvergiert.*

Definition 3.9. *Ein metrischer Raum heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge auch gegen einen Punkt aus diesem metrischen Raum konvergiert.*

Lemma 3.14. *(M,d)... metrischer Raum*

Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und falls $\exists$ Teilfolge $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{j\to\infty} x_{n(j)} = x \in M$

$\implies \lim_{n\to\infty} x_n = x$

Satz 3.15. *$(\mathbb{R}, d_2)$ ist ein vollständig metrischer Raum.*

Lemma 3.16. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Folge aus $\mathbb{R}^p$, $x_n = (\xi_{n,1}, ..., \xi_{n,p})$*

$x = (\xi_1, ..., \xi_p) \in \mathbb{R}^p$

Falls $x_n \to x$ bzgl. d_1, d_2, d_∞, dann gilt $x_n \to x$ bzgl. aller dieser Metriken. Weiters gilt $x_n \to x$ bzgl. $d_1, d_2, d_\infty \Leftrightarrow \forall j \in \{1, ..., p\} : \xi_{n,j} \to \xi_j in (\mathbb{R}, d_2)$.

Lemma 3.17. *$(\mathbb{R}^p, d_{1,2 oder \infty})$ ist vollständig metrischer Raum.*