LINAG Ü6

8.3.5. $f \in L(V,V)$

a) $\exists r \in \mathbb{N}: \ker f^r = \ker f^{r+1} \Longrightarrow \forall i \in \mathbb{N}: \ker f^r = \ker f^{r+i}$

Indirekter Beweis: Angenommen $\exists i \in \mathbb{N}: \ker f^r \neq \ker f^{r+i}$

o.B.d.A. ist i die kleinste solche natürliche Zahl

Offensichtlich ist $\ker(f^r) \subseteq \ker(f^{r+i})$, d.h.

$\exists a \in f^{r+i-1}(V): a \neq 0 \wedge f(a) = 0$ (da $\ker(f^{r+i-1}) = \ker(f^r)$)

$\Rightarrow \exists b \in f^{i-1}(V): f^r(b) = a$

$b \in V$ und $f^r(b) = a \neq 0 \wedge f^{r+1}(b) = f(a) = 0$

$\Rightarrow \ker(f^r) \neq \ker(f^{r+1})$ ↯

b) $\dim V = n < \infty$ zz: $\exists r \in \mathbb{N}: \ker(f^r) = \ker(f^{r+1})$

$I = \{1, 2, \dots, n\}$ $B = (b_i)_{i \in I}$ ... Basis von V

$n = rg\, f^0 \geq rg\, f^1 \geq rg\, f^2 \geq \dots$ dabei kann maximal n-mal ein echtes > stehen und sonst nur =

Sei $r \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall s \geq r: rg\, f^r = rg\, f^s$

$\Rightarrow def(f^r) = \dim(V) - rg(f^r) = \dim(V) - rg(f^{r+1}) = def(f^{r+1})$

Da $\ker(f^r) \subseteq \ker(f^{r+1})$ und der Kern immer ein UR ist folgt

$\ker(f^r) = \ker(f^{r+1})$

c) $\dim V = \infty$ zz: muss kein $r \in \mathbb{N}$ mit $\ker f^r = \ker f^{r+1}$ geben

$\dim(V) > |\mathbb{N}|$ $B = (b_i)_{i \in I}$ ... Basis von V $\Rightarrow \mathbb{N} \subset I$

$f \in L(V,V)$, so dass $b_0 \mapsto 0$, $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}: b_i \mapsto b_{i-1}$ und $\forall i \in I \setminus \mathbb{N}: b_i \mapsto b_i$

$\Rightarrow \forall r \in \mathbb{N}: f^r(b_r) = b_0 \neq 0 \wedge f^{r+1}(b_r) = 0$

$\Rightarrow \forall r \in \mathbb{N}: \ker(f^r) \neq \ker(f^{r+1})$