LINAG Ü14

12.1.7. $f, f_1, f_2 \in L(V,W)$ $g \in L(W,X)$ $\hat{f}, \hat{f_1}, \hat{f_2}, \hat{g}$ existieren
$c \in K$

a) zz: $\widehat{f_1+f_2}$ existiert und ist gleich $\hat{f_1}+\hat{f_2}$

Sei $x \in V$ $y \in W$ bel.

$$y \cdot (f_1+f_2)(x) = y \cdot (f_1(x)+f_2(x)) = y \cdot f_1(x) + y \cdot f_2(x)$$
$$= \hat{f_1}(y) \cdot x + \hat{f_2}(y) \cdot x = (\hat{f_1}(y)+\hat{f_2}(y)) \cdot x = (\hat{f_1}+\hat{f_2})(y) \cdot x$$
$$\Rightarrow \widehat{f_1+f_2} = \hat{f_1}+\hat{f_2}$$

zz: $\widehat{cf}$ existiert und ist gleich $\omega(c) \cdot \hat{f}$

Sei $x \in V$ $y \in W$ bel.

$$y \cdot (cf)(x) = y \cdot (c \cdot f(x)) = c \cdot (y \cdot f(x)) = c(\hat{f}(y) \cdot x)$$
$$= \omega(\omega(c))(\hat{f}(y) \cdot x) = (\omega(c)\hat{f}(y)) \cdot x = (\omega(c) \cdot \hat{f})(y) \cdot x$$
$$\Rightarrow \widehat{c \cdot f} = \omega(c) \cdot \hat{f}$$

b) zz: $\widehat{g \circ f}$ existiert und ist gleich $\hat{f} \circ \hat{g}$

$$y \cdot (g \circ f)(x) = y \cdot g(f(x)) = \hat{g}(y) \cdot f(x) = \hat{f}(\hat{g}(y)) \cdot x$$
$$= (\hat{f} \circ \hat{g})(y) \cdot x$$
$$\Rightarrow \widehat{g \circ f} = \hat{f} \circ \hat{g}$$