MAB Ü1

1.) A, B, C ... Mengen zz: $A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$

Sei $x \in A \setminus C$ bel. $\Rightarrow x \in A \wedge x \notin C$

Fallunterscheidung:
$$\left.\begin{array}{ll} x \notin B: & \Rightarrow x \in A \setminus B \\ x \in B: & \Rightarrow x \in B \setminus C \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$$

2.) $(A_i)_{i \in I}$, $(B_i)_{i \in I}$ ... Familien von Mengen

•) zz: $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} (A_i \setminus B_i)$

Sei $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)$ bel. $\Rightarrow \exists j \in I: x \in A_j$

$\Rightarrow \forall i \in I: x \notin B_i$

$\Rightarrow x \in A_j \setminus B_j \quad \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \setminus B_i)$

•) zz: $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} (A_i \setminus B_i)$

Sei $x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right)$ bel. $\Rightarrow \forall i \in I: x \in A_i$

$\Rightarrow \exists j \in I: x \notin B_j$

$\Rightarrow x \in A_j \setminus B_j \quad \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \setminus B_i)$

•) zz: $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \Delta \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} (A_i \Delta B_i)$

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \Delta \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)\right) \cup \left(\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right)$$

laut dem ersten Punkt ist die rechte Seite Teilmenge von

$$\left(\bigcup_{i \in I} (A_i \setminus B_i)\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} (B_i \setminus A_i)\right) = \bigcup_{i \in I} ((A_i \setminus B_i) \cup (B_i \setminus A_i))$$

$$= \bigcup_{i \in I} (A_i \Delta B_i)$$

•) zz: $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \Delta \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} (A_i \Delta B_i)$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \Delta \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \left(\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right)\right) \cup \left(\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right)$$

laut dem zweiten Punkt ist das eine Teilmenge von

$$\left(\bigcup_{i \in I} (A_i \setminus B_i)\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} (B_i \setminus A_i)\right) = \bigcup_{i \in I} ((A_i \setminus B_i) \cup (B_i \setminus A_i))$$

$$= \bigcup_{i \in I} (A_i \Delta B_i)$$

MAB Ü1 $\quad A \triangle B = A\setminus B \cup B\setminus A$

3.) zz: $(\mathcal{C}, \triangle, \cap)$ bildet einen Ring

- $\mathcal{C}$ unter $\triangle$ abgeschlossen

Sei $A, B \in \mathcal{C}$ bel.

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad (A\setminus B \in \mathcal{C}) \wedge (B\setminus A \in \mathcal{C}) \Rightarrow A \triangle B \in \mathcal{C}$

- $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C) \qquad a \ldots x \in A \quad b \ldots x \in B \quad c \ldots x \in C$

Sei $x \in (A \triangle B) \triangle C$ bel.

$\Rightarrow (x \in (A \triangle B) \wedge x \notin C) \vee (x \notin (A \triangle B) \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \vee (\neg (x \in (A \triangle B)) \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow (((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)) \wedge \neg c) \vee (\neg ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg ((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)) \wedge c)$

$\Leftrightarrow (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg (a \wedge \neg b) \wedge \neg (\neg a \wedge b)) \wedge c)$

$\Leftrightarrow (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee ((\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)) \wedge c)$

$\Leftrightarrow (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee ((\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)) \wedge c)$

$\Leftrightarrow (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

gleiches gilt auf der rechten Seite

- $\emptyset$ ist das neutrale Element, da für ein $A \in \mathcal{C}$ bel.

$A \triangle \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$

- Für jedes $A \in \mathcal{C}$ ist A das inverse Element, da

$A \triangle A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

- Sei $A, B \in \mathcal{C}$ bel. Dann ist $A \triangle B = B \triangle A$, da

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \triangle A$

$\Rightarrow (\mathcal{C}, \triangle)$ ist eine kommutative Gruppe

- $\mathcal{C}$ unter $\cap$ abgeschlossen

Sei $A, B \in \mathcal{C}$ bel.

$A \cap B = (\underbrace{A \cup B}_{\in \mathcal{C}}) \setminus (\underbrace{A \triangle B}_{\in \mathcal{C}}) \in \mathcal{C}$

- $\cap$ assoziativ, da $x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$

MAB Ü1

3.) • zz: $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$

$x\in A$	$x\in B$	$x\in C$	$(A \triangle B) \cap C$		$(A\cap C) \triangle (B \cap C)$		
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1

4.) ges: alle Algebren über $\Omega = \{1,2,3\}$

Algebra $R \iff (R \neq \emptyset) \wedge (A,B \in R) \Rightarrow (A \cup B \in R) \wedge (A \setminus B \in R) \wedge (\Omega \in R)$

1. Fall R enthält keine einelementige Menge

$R = \{\emptyset, \{1,2,3\}\}$

2. Fall R entält eine einelementige Menge

$R = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$R = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

$R = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

3. Fall R enthält mehr als eine einelementige Menge

$R = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

ist die einzige Möglichkeit, da wenn z.B. $\{1\} \in R$ und $\{2\} \in R$

$\Rightarrow \{1,2\} \in R \Rightarrow \{1,2,3\} \setminus \{1,2\} \in R \Rightarrow \{3\} \in R$

MAB

7.) $(R_n, n \in \mathbb{N})$ ... Folge von Ringen über Grundmenge Ω mit
$R_n \subseteq R_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$

zz: R ist ein Ring
- $R \neq \emptyset$, da $R_1 \neq \emptyset$ und $R_1 \subseteq R$
- $\forall A, B \in R: A \cup B \in R$, da
  Sei $A, B \in R$ bel. $\Rightarrow \exists\, i, j \in \mathbb{N}: (A \in R_i) \wedge (B \in R_j)$
  Da R_n aufsteigende Folge ist, folgt $A, B \in R_{max(i,j)}$.
  $\Rightarrow A \cup B \in R_{max(i,j)} \Rightarrow A \cup B \in R$
- $\forall A, B \in R: A \setminus B \in R$, da
  Sei $A, B \in R$ bel. Gleich wie oben folgt $A, B \in R_{max(i,j)}$
  $\Rightarrow A \setminus B \in R_{max(i,j)} \Rightarrow A \setminus B \in R$

Gilt das auch für Sigmaringe?
  Nein, da bei einem Sigmaring R gilt: $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in R \Rightarrow$
  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in R$.

  Wenn nun gilt $\forall n \in \mathbb{N}: R_n \subset R_{n+1}$ und $\forall i \in \mathbb{N}: A_i \in R_{i+1} \setminus R_i$,
  dann ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \notin R$, da $\nexists\, k \in \mathbb{N}: \forall i \in \mathbb{N}: A_i \in R_k$.