ANAÜ14

6.) $f: M \to N$ $\mathcal{F}$... Filter auf M

$\mathcal{G} := \{ G \subseteq N : f^{-1}(G) \in \mathcal{F} \}$ $f(\mathcal{F}) := \{ f(F) : F \in \mathcal{F} \}$

zz: $\mathcal{G}$ ist ein Filter auf N

(F1) Da $\mathcal{F} \neq \emptyset$ $\exists F \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ $f(F) \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \neq \emptyset$

$f^{-1}(G) = \{ f^{-1}(g) : g \in G \} \Rightarrow f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{G}$

(F2) Sei $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ bel. $\Rightarrow f^{-1}(G_1) = F_1 \in \mathcal{F} \wedge f^{-1}(G_2) = F_2 \in \mathcal{F}$

$f^{-1}(G_1 \cap G_2) = \{ f^{-1}(g) : g \in G_1 \cap G_2 \} = f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2) = F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

(F3) Sei $G_1 \in \mathcal{G}$ bel. Sei G_2 mit $G_1 \subseteq G_2 \subseteq N$ bel.

$f^{-1}(G_1) = F_1 \in \mathcal{F}$ $f^{-1}(N) \subseteq M$

$\Rightarrow F_1 = f^{-1}(G_1) \subseteq f^{-1}(G_2) \subseteq f^{-1}(N) \subseteq M$

$\Rightarrow f^{-1}(G_2) \in \mathcal{F}$ $\Rightarrow G_2 \in \mathcal{G}$

zz: $f(\mathcal{F})$ ist eine Filterbasis von $\mathcal{G}$

Sei $G \in \mathcal{G}$ bel. $\Rightarrow f^{-1}(G) = F \in \mathcal{F}$

$f(F) \in f(\mathcal{F})$ und $f(F) \subseteq G$ $\Rightarrow f(\mathcal{F})$ ist eine Filterbasis von $\mathcal{G}$

ges: Beispiel wo $f(\mathcal{F})$ eine Filterbasis, aber kein Filter ist

$M = \{1,2,3\}$ $N = \{1,2,3\}$ $f(1) = 1$ $f(2) = 2$ $f(3) = 1$

$\mathcal{F} = \{ \{1,2\}, \{1,2,3\} \}$ $f(\mathcal{F}) = \{ \{1,2\} \}$

$f(\mathcal{F})$ verletzt (F3), da $\underbrace{\{1,2\}}_{\in \mathcal{F}} \subseteq \{1,2,3\} \subseteq \underbrace{\{1,2,3\}}_{= N}$

und $\{1,2,3\} \notin f(\mathcal{F})$