LINAG Ü4 6.5.6.

$K = GF(q)$ $\qquad P(V)$ ... n-dimensionaler projektiver Raum über K

a) zz: Anzahl der Punkte in $P(V) = q^n + q^{n-1} + \ldots + q + 1$

$n = \dim(P(V)) = \dim(V) - 1 \quad \Rightarrow \dim(V) = n+1$

Punkte von $P(V)$ sind eindimensionale Unterräume von V.

V besteht aus $q^{n+1} - 1$ Vektoren ungleich dem Nullvektor. In K gibt es $q-1$ verschiedene Skalare ungleich 0. $\Rightarrow$ $q-1$ Vektoren liegen in der gleichen Gerade / proj. Punkt. $\Rightarrow$ Es gibt $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ Punkte im $P(V)$.

Behauptung $\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = q^n + q^{n-1} + \ldots + q + 1$ durch vollständige Induktion nach n

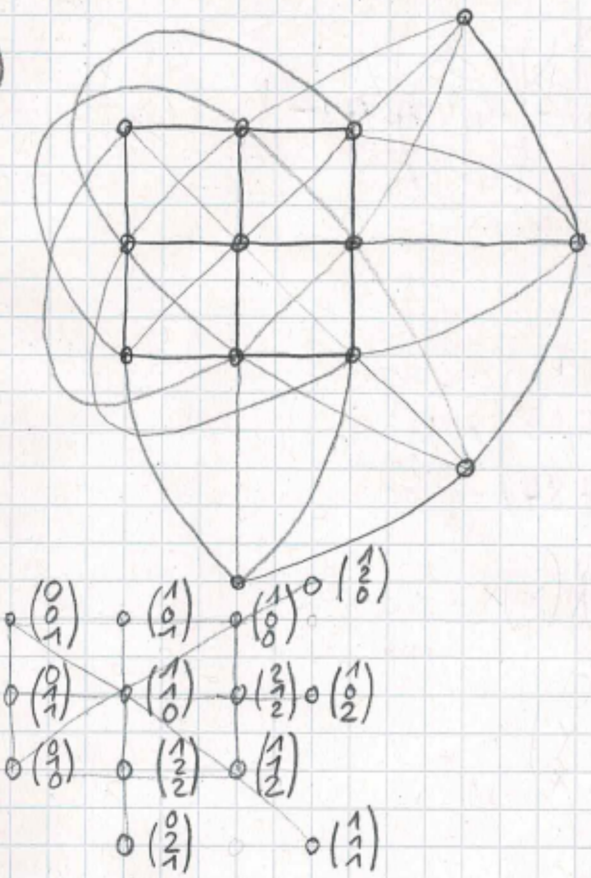
$n=0$: $\frac{q^{0+1}-1}{q-1} = \frac{q-1}{q-1} = 1 = q^0$

$n+1$: $\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + (q-1)\cdot q^{n+1}}{q-1}$

$= \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$

$\Rightarrow$ $P(V)$ besteht aus $q^n + q^{n-1} + \ldots + q + 1$ Punkten.

b)



$\mathbb{Z}_3^{3\times 1}$

$x \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\y\\x\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

$x \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\0\\x\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

$x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\2y\\x+y\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$x \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + y \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\x\\x+2y\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

$x \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + y \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\2y+x\\2y\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

$x \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + y \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\y\\x\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$x \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + y \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\x\\0\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$