LINAG Ü7

8.5.D $\quad A \in K^{n\times n}$

zz: A... diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ χ_A ... zerfällt in Linearfaktoren $\wedge$ $\forall \lambda$... EW von A: geometrische Vielfachheit = algebraische Vielfachheit

$\Leftarrow$ $\chi_A(X) = (\lambda_1 - X)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - X)^{\alpha_k}$

$U_1 = \{x \in K^n : (A - \lambda_1 E)\cdot x = 0\}$ $\quad \dim(U_1) = \alpha_1$ $\quad B_1$ ... Basis des U_1

$\vdots$

$U_k = \{x \in K^n : (A - \lambda_k E)\cdot x = 0\}$ $\quad \dim(U_k) = \alpha_k$ $\quad B_k$ ... Basis des U_k

$B = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} B_i$ $\quad$ damit B eine Basis des K^n ist muss $\forall_j \in \{1,\ldots,k\}$: $\dot{\bigcup}_{i=1}^{j} B_i$ l.u.

Vollständige Induktion nach j:

$j=1$ $\quad \dot{\bigcup}_{i=1}^{1} B_i = B_1$ ist offensichtlich l.u.

$j+1$ $\quad$ Angenommen $\dot{\bigcup}_{i=1}^{j} B_i$ ist l.u.

Wäre $\dot{\bigcup}_{i=1}^{j+1} B_i$ l.a. würde $\exists x_i \in K\ \exists b_{k_i} \in \dot{\bigcup}_{i=1}^{j+1} B_i : \overbrace{\sum_{i=1}^{} x_i b_{k_i}}^{\dim(U_1)+\ldots+\dim(U_{j+1})} = 0$

$$\sum_{i=1}^{\dim U_1+\ldots+\dim U_j} x_i b_{k_i} + \sum_{i=1}^{\dim U_{j+1}} x_i b_{j+1_i} = 0$$

$\Rightarrow f_A(\quad) = 0$ und $\lambda_{j+1}(\quad) = 0$

$$\sum_{i=1}^{\dim U_1+\ldots+\dim U_j} x_i f_A(b_{k_i}) + \sum_{i=1}^{\dim U_{j+1}} x_i f(b_{j+1_i}) - \sum_{i=1}^{\dim\ldots\dim} x_i \lambda_{j+1} b_{k_i} - \sum_{i=1}^{\dim U_{j+1}} x_i \lambda_{j+1} b_{j+1_i}$$

$$= \sum x_i \lambda_k b_{k_i} + \cancel{\sum x_i \lambda_{j+1} b_{j+1_i}} - \sum x_i \lambda_{j+1} b_{k_i} - \cancel{\sum x_i \lambda_{j+1} b_{j+1_i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{\dim\ldots\dim} \underbrace{x_i(\lambda_k - \lambda_{j+1})}_{\neq 0} b_{k_i} = 0 \quad ↯ \text{ zu } \dot{\bigcup}_{i=1}^{j} B_i \text{ l.u.}$$

$\Rightarrow B$ ... Basis des K^n, da l.u. und $|B| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = \operatorname{grad} \chi_A = n$

$$\langle B^*, f_A(B)\rangle = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_k$

$\exists \tilde{B}$ ... Basis des K^n: $A = \langle \tilde{B}, f_A(\tilde{B})\rangle$

$A = \langle \tilde{B}^*, B\rangle \cdot \langle B^*, f_A(B)\rangle \cdot \langle B^*, \tilde{B}\rangle$ $\quad \Rightarrow A$ ist diagonalisierbar

$\langle \tilde{B}^*, B\rangle = \langle B^*, \tilde{B}\rangle^{-1}$

...

LINAG Ü7

8.5.D ...

($\Rightarrow$) $\exists P \in GL_n(K): A = P^{-1} D P$ mit D... diagonalmatrix

$\chi_A(x) = \chi_D(x) = (d_1 - x)^{\alpha_1} (d_2 - x)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (d_k - x)^{\alpha_k}$ wenn $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_k \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \chi_A(x)$ zerfällt in Linearfaktoren und $d_1, \ldots, d_k$ sind EW von A

$\exists \tilde{B}$... Basis von K^n: $A = \langle \tilde{B}^*, f_A(\tilde{B}) \rangle$

B... Basis so dass $P = \langle B^*, \tilde{B} \rangle$

$\Rightarrow \exists \alpha_i$ viele Basisvektoren von B mit $f_A(b_j) = \alpha_i b_j$

$\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit von $d_i = \alpha_i =$ algebraische Vielfachheit