LINAG Ü6

8.3.6. $P(X) \in K[X]$ $\quad f \in L(V,V)$

a) zz: $t \in K$... Eigenwert von $f \Rightarrow P(t)$ ... Eigenwert von $P(f)$

$\exists a \in V \setminus \{0\}: f(a) = t \cdot a \qquad f^i(a) = f^{i-1}(t \cdot a) = t \cdot f^{i-1}(a) = \ldots = t^i \cdot a$

$P(f) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i f^i \qquad P(f)(a) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i f^i(a) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \cdot t^i \cdot a = \underbrace{\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \cdot t^i\right)}_{\in K} \cdot a$

b) $K = \mathbb{C} \qquad n := \operatorname{grad}(X) \geq 1$

zz: $\forall v$... Eigenwert von $P(f)$: $\exists t \in \mathbb{C}$... Eigenwert von f: $v = P(t)$

Da der Körper $\mathbb{C}$ ist zerfällt $P(X) - v$ laut dem Fundamentalsatz der Algebra in

$P(X) - v = a_n \prod_{j=1}^{n} (X - t_j)$ mit $a_n \in \mathbb{C}^{\times}$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$

$P(f) - v\, id_V = a_n (f - t_1 id_V) \circ (f - t_2 id_V) \circ \ldots \circ (f - t_n id_V)$

$\ker(P(f) - v\, id_V) \neq \{0\}$, da v EW von $P(f)$ ist (Satz 8.3.5)

$\Rightarrow \exists x \in V \setminus \{0\}: (P(f) - v\, id_V)(x) = (a_n (f - t_1 id_V) \circ \ldots \circ (f - t_n id_V))(x) = 0$

$a_n (f - t_1 id_V) \circ \ldots \circ (f - t_n id_V)$ hat Nullstellen bei $t_1, \ldots, t_n$

$\exists i \in \{1, \ldots, n\}: (f - t_i id_V)(x) = 0 \quad \Rightarrow t_i$ ist Eigenwert zum Eigenvektor x (von f)

$(P(f) - v\, id_V)(x) = 0 \quad \Rightarrow v$ ist Eigenwert zum Eigenvektor x (von $P(f)$)

Nach a) ist $P(t_i)$ ein Eigenwert von $P(f)$ zum Eigenvektor x. Da ein Eigenvektor den Eigenwert eindeutig bestimmt (Buch Seite 217) gilt

$v = P(t_i)$

□