ANA Ü10

7.) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ $\quad \gamma(0) = \binom{0}{0}$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \cos(\frac{\pi}{t^2}) \end{pmatrix}$ für $t > 0$

zz: γ ist stetig, aber nicht rektifizierbar

γ ist in jeder Komponente als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig in $(0,1]$.

$\lim_{t \to 0+} t = 0 \qquad \lim_{t \to 0+} t^2 \cdot \cos(\frac{\pi}{t^2}) = 0$ (beschränkt mal Nullfunktion)

$\Rightarrow \gamma$ ist auch in 0 stetig.

$\Rightarrow \gamma$ ist auf ganz $[0,1]$ stetig

$$\hat{Z} = \{0, \tfrac{1}{\sqrt{n}}, \tfrac{1}{\sqrt{n-1}}, \dots, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\}$$

$$\left\|\gamma\left(\tfrac{1}{\sqrt{n-i}}\right) - \gamma\left(\tfrac{1}{\sqrt{n-i+1}}\right)\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n-i}} - \frac{1}{\sqrt{n-i+1}} \\ \frac{1}{n-i}\cos(\pi(n-i)) - \frac{1}{n-i+1}\cos(\pi(n-i+1)) \end{pmatrix}\right\|_2$$

$$= \sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{n-i}} - \tfrac{1}{\sqrt{n-i+1}}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{n-i}\cos(\pi(n-i)) - \tfrac{1}{n-i+1}\cos(\pi(n-i+1))\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{n-i}} - \tfrac{1}{\sqrt{n-i+1}}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{n-i} - \tfrac{1}{n-i+1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{n-i} - \tfrac{2}{\sqrt{n-i}\sqrt{n-i+1}} + \tfrac{1}{n-i+1} + \tfrac{1}{(n-i)^2} - \tfrac{2}{(n-i)(n-i+1)} + \tfrac{1}{(n-i+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{(n-i)+1}{(n-i)^2} + \tfrac{n-i+1+1}{(n-i+1)^2} - \tfrac{2\sqrt{n-i}\sqrt{n-i+1}+2}{(n-i)(n-i+1)}}$$

$$\geq \sqrt{\tfrac{n-i+1}{(n-i)^2} + \tfrac{n-i+2}{(n-i+1)^2} - 2\cdot\tfrac{(\sqrt{n-i})^2+1}{(n-i+1)^2}} = \sqrt{\tfrac{n-i+1}{(n-i)^2} + \tfrac{n-i+2-2n+2i-2}{(n-i+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{n-i+1}{(n-i)^2} - \tfrac{n-i}{(n-i+1)^2}} \geq \sqrt{\tfrac{n-i+1}{(n-i)^2} - \tfrac{n-i}{(n-i)^2}} = \sqrt{\tfrac{n-i+1-n+i}{(n-i)^2}} = \tfrac{1}{n-i}$$

$$l(\gamma) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} L(Z)$$

$$L(\hat{Z}) = \sum_{j=1}^{n(\hat{Z})} \|\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})\|_2 \geq \sum_{i=1}^{n(\hat{Z})-1} \frac{1}{n-i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} = +\infty$ also existiert ein $Z \in \mathcal{Z}$ mit $L(Z) = +\infty$

$\Rightarrow l(\gamma) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} L(Z) = +\infty$

also ist γ nicht rektifizierbar