ANA Ü6

7.) $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ ... normierte Räume über $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

$\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$ $\quad \|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y$

$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}$

zz: $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ sind Normen auf $X \times Y$

(N1) zz: $\forall (x,y) \in X \times Y: \|(x,y)\|_1 \geq 0, \|(x,y)\|_2 \geq 0$ und

$\|(x,y)\|_1 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$ und $\|(x,y)\|_2 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

Sei $x \in X$, $y \in Y$ bel.

$\|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y \geq 0$, da $\|x\|_X$ und $\|y\|_Y$ beide $\geq 0$

$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2} \geq 0$ genauso klar

Falls $x = 0$ und $y = 0$ gilt

$\|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y = \|0\|_X + \|0\|_Y = 0$

$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2} = \sqrt{\|0\|_X^2 + \|0\|_Y^2} = \sqrt{0} = 0$

Falls $\|(x,y)\|_1 = 0$ bzw. $\|(x,y)\|_2 = 0$

$0 = \|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y \iff x = 0$ und $y = 0$

$0 = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2} \iff \|x\|_X = 0 \wedge \|y\|_Y = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0$

(N2) zz: $\forall (x,y) \in X \times Y \ \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}): \|\lambda(x,y)\|_{1,2} = |\lambda| \cdot \|(x,y)\|_{1,2}$

Sei $x \in X$, $y \in Y$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) bel.

$\|\lambda(x,y)\|_1 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_1 = \|\lambda x\|_X + \|\lambda y\|_Y = |\lambda| \cdot \|x\|_X + |\lambda| \cdot \|y\|_Y = |\lambda| \cdot \|(x,y)\|_1$

$\|\lambda(x,y)\|_2 = \sqrt{\|\lambda x\|_X^2 + \|\lambda y\|_Y^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \cdot (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)} = |\lambda| \cdot \|(x,y)\|_2$

(N3) zz: $\forall (x,y), (a,b) \in X \times Y: \|(x,y) + (a,b)\|_{1,2} \leq \|(x,y)\|_{1,2} + \|(a,b)\|_{1,2}$

Sei $x, a \in X$, $y, b \in Y$ bel.

$\|(x,y) + (a,b)\|_1 = \|(x+a, y+b)\|_1 = \|x+a\|_X + \|y+b\|_Y \leq \|x\|_X + \|a\|_X + \|y\|_Y + \|b\|_Y$

$= \|(x,y)\|_1 + \|(a,b)\|_1$

$\|(x+a, y+b)\|_2 = \sqrt{\|x+a\|_X^2 + \|y+b\|_Y^2} \leq \sqrt{(\|x\|_X + \|a\|_X)^2 + (\|y\|_Y + \|b\|_Y)^2}$

$\leq \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2} + \sqrt{\|a\|_X^2 + \|b\|_Y^2} = \|(x,y)\|_2 + \|(a,b)\|_2$

Minkowskische Ungleichung (Buch Lemma 3.1.4) ...

ANA Ü6

7.) ... zz: $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ sind paarweise äquivalent

Sei $(x,y) \in X \times Y$ bel.

$$\max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \le \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2} \le \|x\|_X + \|y\|_Y \le p \cdot \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$$

$$\Leftrightarrow \|(x,y)\|_\infty \le \|(x,y)\|_2 \le \|(x,y)\|_1 \le p \cdot \|(x,y)\|_\infty \; (\le p \cdot \|(x,y)\|_2 \le p \cdot \|(x,y)\|_1)$$

Also $1 \cdot \|(x,y)\|_\infty \le \|(x,y)\|_1 \le p \cdot \|(x,y)\|_\infty \Rightarrow \|.\|_\infty \sim \|.\|_1$

$1 \cdot \|(x,y)\|_\infty \le \|(x,y)\|_2 \le p \cdot \|(x,y)\|_\infty \Rightarrow \|.\|_\infty \sim \|.\|_2$

$1 \cdot \|(x,y)\|_2 \le \|(x,y)\|_1 \le p \cdot \|(x,y)\|_2 \Rightarrow \|.\|_2 \sim \|.\|_1$