LINAG Ü7

8.6.5 K ... Körper $n \in \mathbb{N}$

a) $\forall A \in GL_n(K)\ \exists P(X) \in K[X] : P(A) = A^{-1}$

$$\chi_A(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i \quad \text{mit } \chi_A(A) = 0 \text{ laut Cayley-Hamilton}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i + a_0 \cdot X^0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i + a_0 E$$

$$\Leftrightarrow -a_0 E = \sum_{i=1}^{\infty} a_i A^i \Leftrightarrow E = \sum_{i=1}^{\infty} -\frac{a_i}{a_0} A^i = A \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} -\frac{a_i}{a_0} A^{(i-1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} -\frac{a_{i+1}}{a_0} A^i$$

$$P(X) = \sum_{i=0}^{\infty} -\frac{a_{i+1}}{a_0} X^i \in K[X] \quad \text{mit } P(A) = A^{-1}$$

b) $A = J_2(1) \in GL_2(K)$ zz: $\nexists P(X) \in K[X] : P(A) = A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \chi_A(X) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{pmatrix} = (1-X)^2$$

$$\chi_{A^T}(X) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & 1-X \end{pmatrix} = (1-X)^2$$

$$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2 : A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ... EV von } A$$

$$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K^2 : A^T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \text{ ... EV von } A^T$$

$$P(X) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \qquad P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i A^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i A \quad \text{, da } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c & c \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ wenn } c = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{P(A)}(X) = \det\begin{pmatrix} c-X & c \\ 0 & c-X \end{pmatrix} = (c-X)^2$$

$$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2 : P(A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c(x+y) \\ cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ... EV von } P(A)$$

Da $P(A)$ und A^T verschiedene Eigenvektoren besitzen,

bzw. da $P(A) = \begin{pmatrix} c & c \\ 0 & c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ existiert kein $P(X) \in K[X]$ mit $P(A) = A^T$.