MAS Ü6

2.) a) $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } A = \emptyset \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$

ist ein äußeres Maß, da $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(A) \geq 0 \; \forall A$

$A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ und $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(B_n)$

(entweder gleichheit oder $0 \leq 1$) (auch klar)

$M = \{\emptyset, \Omega\}$ $\quad \mu^*(B) = \mu^*(B \cap \emptyset) + \mu^*(B \setminus \emptyset)$ klar

$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap \Omega) + \mu^*(B \setminus \Omega)$ klar

Sei $A \neq \emptyset$ und $A \neq \Omega$ $\quad \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = 2$, da $B \cap A \neq \emptyset \neq B \setminus A$

---

b) $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } card(A) \leq \aleph_0 \\ \infty & \text{, falls } card(A) > \aleph_0 \end{cases}$

ist ein äußeres Maß $\quad \mu^*(\emptyset) = 0$ klar $\quad \mu^*(A) \geq 0 \; \forall A$ klar

$A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ klar $\quad A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(B_n)$

falls $card(A) \leq \aleph_0$ klar $\quad$ falls $card(A) > \aleph_0$ muss für zumindest ein B_n die $card(B_n) > \aleph_0$ sein

$M = P(\Omega)$

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } card(A) \leq \aleph_0 \wedge card(B) \leq \aleph_0 \\ \infty & \text{—\,"\,—} \wedge card(B) > \aleph_0 \\ 0 & \text{falls } card(A) > \aleph_0 \wedge card\, B) \leq \aleph_0 \\ \infty & \text{falls —\,"\,—} \wedge card(B) > \aleph_0 \end{cases}\right\} = \mu^*(B)$$

---

c) $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } |A| < \infty \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$

Wenn $card(A) = \aleph_0$ $\quad \exists \, B_n$ mit $card(B_n) < \aleph_0$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = A$

$\mu^*(A) = 1 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(B_n) = 0 \quad \Rightarrow$ kein äußeres Maß

---

d) $\mu^*(A) = \begin{cases} \frac{|A|}{|A|+10} & \text{, falls } |A| < \infty \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$ $\qquad \forall n \in \mathbb{N}: \frac{n}{n+10} \leq 1$

$\mu^*(\emptyset) = \frac{0}{10} = 0$, $\mu^*(A) \geq 0 \; \forall A$ klar, $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$

$\Rightarrow \frac{|A|}{|A|+10} \leq \frac{|B|}{|B|+10}$ falls $|A|$ und $|B| < \infty$ $\quad 1 \leq 1$ falls $|A|$ und $|B| = \infty$

$\frac{|A|}{|A|+10} \leq 1$ falls $|A| < \infty$ und $|B| = \infty$

...

MAS Ü6

2.) d.

$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ Falls $\exists B_n : |B_n| = \infty$ trivial

Falls $|A| = \infty \Rightarrow \exists B_n : |B_n| = \infty$ trivial

oder $\exists$ abzählbar unendlich viele B_n mit

$|B_n| \geq 1 \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+10} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{11} = \infty$

Falls $|A| < \infty$ und $\forall n : |B_n| < \infty$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|B_n|}{|B_n|+10} \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|B_n|}{\sum_{m\in\mathbb{N}} |B_m| + 10} = \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} |B_n|}{\sum_{m\in\mathbb{N}} |B_m| + 10} \geq \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$

da $|A| \leq \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |B_n| \qquad \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n)$

$M = \{\emptyset, \Omega\}$

$$\mu^*(B \cap \Omega) + \underbrace{\mu^*(B \setminus \Omega)}_{0} = \mu^*(B)$$

$$\underbrace{\mu^*(B \cap \emptyset)}_{0} + \mu^*(B \setminus \emptyset) = \mu^*(B)$$

Sei $A \neq \emptyset$ und $A \neq \Omega$

Falls $|\Omega| < \infty$: $\mu^*(\Omega \cap A) + \mu^*(\Omega \setminus A) = \frac{|A|}{|A|+10} + \frac{|\Omega| - |A|}{|\Omega| - |A| + 10}$

$\mu^*(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|+10} \quad \neq$

Falls $|\Omega| = \infty$: Falls $|A| < \infty \rightarrow \mu^*(\Omega \cap A) + \mu^*(\Omega \setminus A)$

$$= \frac{|A|}{|A|+10} + 1 \neq 1 = \mu^*(\Omega)$$

Falls $|A| = \infty \qquad \mu^*(\Omega \cap A) + \underbrace{\mu^*(\Omega \setminus A)}_{>0} \neq 1 = \mu^*(\Omega)$