LINAG Ü8

8.7.1 (B) V... VR/$\mathbb{R}$ B... Basis von V $f \in L(V,V)$

$$A := \langle B^*, f(B) \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) ges: $\chi_f(X)$

$$\chi_f(X) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2-X & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2-X \end{pmatrix} = (1-X) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 0 & 2-X & 0 \\ -1 & 1 & 2-X \end{pmatrix} + 0 \cdot \det(\dots) + 0 \cdot \det(\dots) + 0 \cdot \det(\dots)$$

$$= (1-X)^2 (2-X)^2$$

b)

$$(\langle B^*, f(B) \rangle - 1 \cdot E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ hat Rang } 3$$

$$(\langle B^*, f(B) \rangle - 1 \cdot E_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ hat Rang } 2 = \text{algebraische VF von } 1$$

$$(\langle B^*, f(B) \rangle - 2 \cdot E_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ hat Rang } 2 = \text{algebraische VF von } 2$$

(siehe weiter unten)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist ähnlich zu } \langle B^*, f(B) \rangle \text{, da } \chi_C(X) = \chi_f(X)$$

c) ges: Basis D von V mit $\langle D^*, f(D) \rangle = C$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_3 = 0,\ x_1 = 0,\ x_4 = x_2$$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_1 = 0,\ x_3 = x_2,\ x_4 \in \mathbb{R}$$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_3 = x_1,\ x_4 = x_2$$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Familie über $I = \{1,2,3,4\}$

...

LINAG Ü8

8.7.1. ...

d) ges: $\mu_f(X)$

$$(1-A)(2-A)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\1&0&-1&0\\0&1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$$

$$(1-A)^2(2-A)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&1&0\\-1&-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mu_f(X)=(1-X)^2(2-X)$$

$\lambda=1$

$r_0=4 \quad r_1=3 \quad r_2=2 \quad r_3=2 \quad r_4=2 \quad \dots$

$u_1=r_0-r_1=4-3=1 \quad u_2=r_1-r_2=3-2=1 \quad u_3=r_2-r_3=2-2=0 \quad \dots$

$k_1=u_1-u_2=1-1=0 \quad k_2=u_2-u_3=1-0=1$

$\Rightarrow$ für $\lambda=1$ gibt es 1 J-Kästchen mit Größe 2

$\lambda=2$

$r_0=4 \quad r_1=2 \quad r_2=2 \quad \dots$

$u_1=r_0-r_1=4-2=2 \quad u_2=r_1-r_2=2-2=0 \quad \dots$

$k_1=u_1-u_2=2-0=2 \quad k_2=u_2-u_3=0-0=0$

$\Rightarrow$ für $\lambda=2$ gibt es 2 J-Kästchen mit jeweils Größe 1