LINAG Ü3

6.4.15. $\alpha: \mathbb{R}^{3\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1}$ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1-2x_3+7\\x_2+1\\-x_3+6\end{pmatrix}$

a) zz: $\forall x \in \mathbb{R}^{3\times1}: x \neq \alpha(x)$

Sei $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}$ bel. Da $x_3 \neq -x_3+6 \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \neq \alpha\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}8\\1\\6\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}7\\2\\6\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}5\\1\\5\end{pmatrix}$ Mittelpunkt zw. x und y $M = \frac{1}{2}(x+y)$

$m1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}9\\1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4,5\\0,5\\3\end{pmatrix}$ $m2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}7\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3,5\\1,5\\3\end{pmatrix}$ $m3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2,5\\0,5\\3\end{pmatrix}$

$\mathcal{E} = H(\{m1, m2, m3\})$ oder auch $\mathcal{E} = \begin{pmatrix}4,5\\0,5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4,5-3,5\\0,5-1,5\\3-3\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}4,5-2,5\\0,5-0,5\\3-3\end{pmatrix}y$

$= \begin{pmatrix}4,5\\0,5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}y$ oder auch $\begin{matrix}4,5+1x+2y = x_1\\0,5-x = x_2\\3 = x_3\end{matrix}$

Sei $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}$ bel. $m = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1+x_1-2x_3+7\\x_2+x_2+1\\x_3-x_3+6\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2x_1-2x_3+7\\2x_2+1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1-x_3+3,5\\x_2+0,5\\3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4,5\\0,5\\3\end{pmatrix} + (-x_2)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{x_1+x_2-x_3-1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4,5-x_2+x_1+x_2-x_3-1\\0,5+x_2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1-x_3+3,5\\x_2+0,5\\3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow m \in \mathcal{E}$

b) zz: $\alpha(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ ① $\alpha(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}$ ② $\mathcal{E} \subseteq \alpha(\mathcal{E})$

① Sei $\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ bel. $\alpha\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1-2e_3+7\\e_2+1\\-e_3+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1-6+7\\e_2+1\\-3+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1+1\\e_2+1\\3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}4,5+x+2y+1\\0,5-x+1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4,5\\0,5\\3\end{pmatrix} + (x-1)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + (y+1)\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4,5+x-1+2y+2\\0,5-x+1\\3\end{pmatrix} \in \mathcal{E}$

② Sei $\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ bel. $\exists \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}$ mit $\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$, da α eine Bijektion ist. zz: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathcal{E}$

$\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1-2x_3+7\\x_2+1\\-x_3+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}x_2+1 = e_2 \Rightarrow x_2 = e_2-1\\-x_3+6 = e_3 \Rightarrow x_3 = -e_3+6\end{matrix}$

$e_1 = x_1-2x_3+7 = x_1-2(-e_3+6)+7 = x_1+2e_3-12+7 = x_1+2e_3-5 = e_1$

$\Rightarrow x_1 = e_1-2e_3+5$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1-2e_3+5\\e_2-1\\-e_3+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1-1\\e_2-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4,5+x+2y-1\\0,5-x-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4,5\\0,5\\3\end{pmatrix} + (x+1)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + (y-1)\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

da $e_3 = 3$ $\Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathcal{E}$

LINAG Ü3

6.4.15. ...

c) zz: $\exists t \in \mathbb{R}^{3\times 1}\ \forall x \in \mathcal{E} : \alpha(x) = t + x$

$$\begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \qquad \alpha\begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 - 2\cdot 3 + 7 \\ 0,5 + 1 \\ -3 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ 1,5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 - 4,5 \\ 1,5 - 0,5 \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: t$$

Sei $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ bel.

$$\alpha\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 - 2e_3 + 7 \\ e_2 + 1 \\ -e_3 + 6 \end{pmatrix} \underset{e_3 = 3}{=} \begin{pmatrix} e_1 + 1 \\ e_2 + 1 \\ 3 \end{pmatrix} \underset{e_3 = 3}{=} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + t$$

$\square$