ANA Ü14

7.) $X = \{1,2,3\}$ $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, X\}$

zz: $(X, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum

(O1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ $X \in \mathcal{T}$ nach Definition von $\mathcal{T}$

(O2) Sei $T \in \mathcal{T}$ bel. $\emptyset \cap T = \emptyset \in \mathcal{T}$ Sei $T \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset, \{1\}\}$ bel. $\{1,2\} \cap T = \{1,2\}$

Sei $T \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ bel. $\{1\} \cap T = \{1\} \in \mathcal{T}$ Sei $T \in \mathcal{T}$ bel. $X \cap T = T \in \mathcal{T}$

(O3) Sei $(T_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{T}$ bel.

Falls $\exists i \in I : T_i = X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} T_i = X \in \mathcal{T}$

Falls sonst $\exists i \in I : T_i = \{1,2\} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} T_i = \{1,2\} \in \mathcal{T}$

Falls sonst $\exists i \in I : T_i = \{1\} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} T_i = \{1\} \in \mathcal{T}$

Sonst $\forall i \in I : T_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} T_i = \emptyset \in \mathcal{T}$

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum?

Nein da für $x = 3$ $y = 1$ gibt es keine disjunkten Mengen $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ mit $x \in T_1$ und $y \in T_2$. ($T_1 = X$, da keine andere offene Menge 3 enthält)

ges: Umgebungsfilter und möglichst kleine Filterbasis um jeden Punkt $x \in X$.

$\mathcal{U}(1) = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ $\mathcal{B}_1 = \{\{1\}\}$

$\mathcal{U}(2) = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ $\mathcal{B}_2 = \{\{1,2\}\}$

$\mathcal{U}(3) = \{\{1,2,3\}\}$ $\mathcal{B}_3 = \{\{1,2,3\}\}$

ges: Abschluss von jeder Teilmenge von X

$\mathcal{A} = \{X, \{2,3\}, \{3\}, \emptyset\}$

$\overline{\emptyset} = X \cap \{2,3\} \cap \{3\} \cap \emptyset = \emptyset$ $\overline{\{1\}} = X$

$\overline{\{2\}} = X \cap \{2,3\} = \{2,3\}$ $\overline{\{3\}} = X \cap \{2,3\} \cap \{3\} = \{3\}$

$\overline{\{1,2\}} = X$ $\overline{\{1,3\}} = X$

$\overline{\{2,3\}} = X \cap \{2,3\} = \{2,3\}$ $\overline{\{1,2,3\}} = X$