ANA Ü8.

9.) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \cos\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \frac{\eta^3}{\xi^2+\eta^2} & \text{, falls } \eta \neq 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

ges: partielle Ableitungen an $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(g\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} - g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \cdot 0 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(g\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} - g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \cos\left(\frac{0}{s}\right) \frac{s^3}{0^2+s^2} = \lim_{s\to 0} \cos(0) = 1$$

ges: Richtungsableitung bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in Richtung $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial g}{\partial v}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(g\begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix} - g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \cos\left(\frac{2s}{s}\right) \frac{s^3}{(2s)^2+s^2}$$

$$= \lim_{s\to 0} \cos(2) \frac{s^2}{s^2(4+1)} = \frac{\cos(2)}{5}$$

Ist g auf $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar? $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\sum_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \neq \frac{\cos(2)}{5}$$ aus der Kontraposition von

Lemma 10.1.6 folgt g ist nicht stetig partiell differenzierbar.