ANA Ü8

1.) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\quad A = T^{-1} J T$ (Jordansche Normalform) $\quad$ ges: $\exp(A)$

$\exp(A) = \exp(T^{-1} J T) = T^{-1} \cdot \exp(J) \cdot T$ laut Ü7 Nr 8

J hat Form $\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_n \end{pmatrix}$ mit $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$K_i := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ & & J_i & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Stelle $\qquad \Rightarrow J = \sum_{i=1}^{n} K_i$

$\uparrow$ i-te Stelle

$\exp(J) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} K_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(K_i)$ laut Ü7 Nr 9

$$K_i = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \}\, a \\ \}\, b \\ \}\, c \end{matrix} \\ \quad \underbrace{\quad}_{a} \quad \underbrace{\qquad}_{b} \quad \underbrace{\quad}_{c} \end{array}$$

$$\exp(K_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot K_i^n = E_n + K_i + \frac{1}{2} K_i^2 + \dots$$

$$K_i^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_i^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \exp(K_i) = \begin{pmatrix} E_a & 0 & 0 \\ 0 & \exp(J_i) & 0 \\ 0 & 0 & E_c \end{pmatrix}$$

$\prod_{i=1}^{n} \exp(K_i) = \begin{pmatrix} \exp(J_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(J_n) \end{pmatrix}$ da sich die Spalten und Zeilen der einzelnen Blöcke nicht überschneiden, siehe Beispiel:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} E_a & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}}^{n=a+b} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & E_b \end{pmatrix} \Big\} n = a+b \qquad \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \exp(A) = T^{-1} \begin{pmatrix} \exp(J_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(J_n) \end{pmatrix} \cdot T$$

mit $\exp(J_i) = \begin{pmatrix} \frac{\exp(\lambda_i)}{0!} & \frac{\exp(\lambda_i)}{1!} & \cdots & \frac{\exp(\lambda_i)}{(k-1)!} \\ 0 & \frac{\exp(\lambda_i)}{0!} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\exp(\lambda_i)}{0!} \end{pmatrix}$ laut Ü7 Nr 10