ANA Ü4

1.) f... reellwertige Funktion I... Intervall auf dem f definiert ist

zz: $\forall x_1, x_2 \in I \ \forall \lambda \in [0,1]: f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

$\iff \forall x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2 : f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$

Bew Sei $x_1, x_2 \in I$ $\lambda \in [0,1]$ bel.

Setzen wir $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, dann gilt

$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \iff x = \lambda x_1 + x_2 - \lambda x_2 \iff x_2 - x = \lambda x_2 - \lambda x_1$

$\iff x_2 - x = \lambda \cdot (x_2 - x_1) \iff \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$

und $x_1 < x < x_2$, da

bei $\lambda = 0$ ist $x = 0 \cdot x_1 + (1-0) \cdot x_2 = x_2$ Bild eines Intervalls unter

bei $\lambda = 1$ ist $x = 1 \cdot x_1 + (1-1) \cdot x_2 = x_1$ einer stetigen Funktion ist

sowie ein Intervall.

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

$\iff f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$, da

$1 - \lambda = 1 - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1 - x_2 + x}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

Sei $x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ bel.

Setzen wir $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, dann gilt

$\lambda > 0$, da $x_2 - x > 0$ und $x_2 - x_1 > 0$

$\lambda < 1$, da $x_2 - x < x_2 - x_1$ $\Rightarrow \lambda \in [0,1]$

Die Äquivalenz ist schon oben gezeigt.

---

zz: $\forall x_1, x_2 x \in I$ mit $x_1 < x < x_2 : f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$

$\iff \forall x, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2 : \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$

ANA Ü4

1.) ... Sei $x, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ bel.

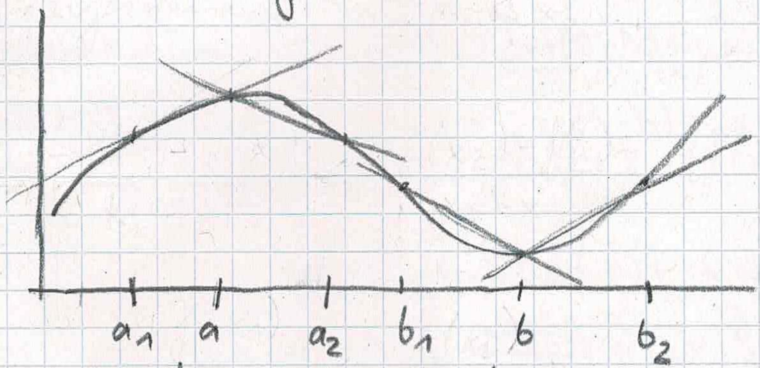
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \iff \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)}{x_2-x} - \frac{f(x)}{x_2-x}$$

$$\iff \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{\frac{x_2-x-x_2+x_1}{x_2-x}}{x-x_1} f(x) + \frac{f(x_2)}{x_2-x}$$

$$\iff f(x)-f(x_1) \leq \left(\frac{x_2-x}{x_2-x_1} - 1\right) \cdot f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

$$\iff f(x) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

Geometrische Bedeutung



$\Rightarrow$ konkav $\Rightarrow$ konvex