

## LINAG Ü6

### 8.3.5. $f \in L(V, V)$

$$a) \exists r \in \mathbb{N}: \ker f^r = \ker f^{r+1} \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}: \ker f^r = \ker f^{r+i}$$

Indirekter Beweis: Angenommen  $\exists i \in \mathbb{N}: \ker f^r \neq \ker f^{r+i}$

o.B.d.A. ist  $i$  die kleinste solche natürliche Zahl

Offensichtlich ist  $\ker(f^r) \subseteq \ker(f^{r+i})$ , d.h.

$$\exists a \in f^{r+i-1}(V): a \neq 0 \wedge f(a) = 0 \quad (\text{da } \ker(f^{r+i-1}) = \ker(f^r))$$

$$\Rightarrow \exists b \in f^{r-1}(V): f^r(b) = a$$

$$b \in V \text{ und } f^r(b) = a \neq 0 \wedge f^{r+1}(b) = f(a) = 0$$

$$\Rightarrow \ker(f^r) \neq \ker(f^{r+1}) \quad \downarrow$$

$$b) \dim V = n < \infty \quad \text{zz: } \exists r \in \mathbb{N}: \ker(f^r) = \ker(f^{r+1})$$

$$I = \{1, 2, \dots, n\} \quad B = (b_i)_{i \in I} \dots \text{Basis von } V$$

$$n = \text{rg } f^0 \geq \text{rg } f^1 \geq \text{rg } f^2 \geq \dots$$

dabei kann maximal  $n$ -mal ein echtes  $>$  stehen und sonst nur  $=$

$$\text{Sei } r \in \mathbb{N} \text{ so, dass } \forall s \geq r: \text{rg } f^r = \text{rg } f^s$$

$$\Rightarrow \dim(f^r) = \dim(V) - \text{rg}(f^r) = \dim(V) - \text{rg}(f^{r+1}) = \dim(f^{r+1})$$

Da  $\ker(f^r) \subseteq \ker(f^{r+1})$  und der Kern immer ein UR ist folgt

$$\ker(f^r) = \ker(f^{r+1})$$

$$c) \dim V = \infty \quad \text{zz: muss kein } r \in \mathbb{N} \text{ mit } \ker f^r = \ker f^{r+1} \text{ geben}$$

$$\dim(V) > |\mathbb{N}| \quad B = (b_i)_{i \in I} \dots \text{Basis von } V \quad \Rightarrow I \subset \mathbb{N}$$

$f \in L(V, V)$ , so dass  $b_0 \mapsto 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}: b_i \mapsto b_{i-1}$  und  $\forall i \in I \setminus \mathbb{N}: b_i \mapsto b_i$

$$\Rightarrow \forall r \in \mathbb{N}: f^r(b_r) = b_0 \neq 0 \wedge f^{r+1}(b_r) = 0$$

$$\Rightarrow \forall r \in \mathbb{N}: \ker(f^r) \neq \ker(f^{r+1})$$