ANA Ü4

4.) $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ $\quad x \neq 0 \quad f(0)=0$

•) Nullstellen

$f(x) = 0 \iff x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \iff x^2 = 0$ oder $\exp(-\frac{1}{x^2}) = 0$

$\iff x = 0$, da $\exp(x)$ für keine reelle Zahl $= 0$ ist.

$\Rightarrow 0$ ist einzige Nullstelle

•) lokale (globale) Extrema

$f'(x) = 2x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (x + x^2 \cdot \frac{1}{x^3}) = 2 e^{-\frac{1}{x^2}} (x + \frac{1}{x})$

$f'(x) = 0 \iff 2 \cdot \exp(-\frac{1}{x^2}) \cdot (x + \frac{1}{x}) = 0 \iff 2 \cdot \exp(-\frac{1}{x^2}) = 0$ oder $(x + \frac{1}{x}) = 0$

$\iff \frac{1}{x} = -x \iff 1 = -x^2 \iff x = i$ $\quad \Rightarrow$ keine reellen Extrema

•) Wendepunkte

$f''(x) = 2\left(e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (x + \frac{1}{x})' + (e^{-\frac{1}{x^2}})' \cdot (x + \frac{1}{x})\right) = 2\left(e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (1 - \frac{1}{x^2}) + e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot (x + \frac{1}{x})\right)$

$= 2e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \frac{x^2+1}{x}\right) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2} + \frac{2(x^2+1)}{x^4}\right) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{x^2 \cdot (x^2-1) + 2(x^2+1)}{x^4}\right)$

$= 2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^4 - x^2 + 2x^2 + 2}{x^4} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^4 + x^2 + 2}{x^4}$

$f''(x) = 0 \iff 2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ oder $\frac{x^4 + x^2 + 2}{x^4} = 0 \iff x^4 + x^2 = -2$

$\iff x^2 \cdot (x^2 + 1) = -2 \iff x^2 = -2$ oder $x^2 + 1 = -2 \iff x = i\sqrt{2}$ oder $x = i\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ keine reellen Wendepunkte

•) (streng) monoton wachsend / fallend

Falls $x > 0$: $f'(x) = 2 \cdot \exp(-\frac{1}{x^2})(x + \frac{1}{x}) > 0$, da $\exp(y) > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$

Falls $x < 0$: $f'(x) = 2 \cdot \exp(-\frac{1}{x^2})(x + \frac{1}{x})$ $\quad 2 \cdot \exp(-\frac{1}{x^2}) > 0$

$x^2 + 1 > 0 \iff x + \frac{1}{x} < 0$, da $\frac{1}{x} < 0$ $\quad \Rightarrow f'(x) < 0$

$\Rightarrow$ bei $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend, bei $(0, +\infty)$ streng monoton wachsend

•) konvex, konkav

laut letzten Bsp konvex $\iff f'$ monoton wachsend

$f''(x) = 2 \cdot \exp(-\frac{1}{x^2}) \cdot \frac{x^4 + x^2 + 2}{x^4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\Rightarrow f'$ streng monoton wachsend (außer bei 0)

$\Rightarrow f$ konvex (außer bei 0)