LINAG Ü1

6.1.1. $A = r + X$, $r \in V$ $X \subseteq V$... Unterraum $A_1 = s + U$

a) zz: $A_1 \subset A$ .. affiner Unterraum $\Leftrightarrow (A_1 \neq \emptyset) \wedge (\forall a, b, c \in A_1 \Rightarrow c + [a-b] \subseteq A_1)$

$\Rightarrow$ A_1... affiner Unterraum $\Rightarrow (\exists s \in A_1 : s \in A) \wedge (U \subseteq X)$ laut Def.

Da $s \in A_1$ gilt $A_1 \neq \emptyset$.

Sei $a, b, c \in A_1$ bel. Da $A_1 = s + U$ gibt es Vektoren $u_a, u_b, u_c \in U$ mit $a = s + u_a$ $b = s + u_b$ $c = s + u_c$.

$[a - b] = [(s + u_a) - (s + u_b)] = [s - s + u_a - u_b] = [u_a - u_b]$

Nachdem $u_a, u_b \in U$ und U abgeschlossen, da UR, ist $[u_a - u_b] \subseteq U$. Da $c \in A_1$ ist $c + [a - b] \subseteq A_1$.

$\Leftarrow$ Da $A_1 \neq \emptyset$ muss gelten $\exists s \in A_1$. Da gilt $A_1 \subseteq A$ muss auch gelten $s \in A$. Da $A_1 \subseteq A$ gilt auch

$s - A_1 \subseteq s - A \Leftrightarrow s - s + U \subseteq s - s + X \Leftrightarrow U \subseteq X$

b) $A_1, A_2 \subset A$... affine UR $A = a + U$

zz: $A_1 \parallel A_2 \Leftrightarrow \forall g_1 \subseteq A_1$... Gerade $\exists g_2 \subseteq A_2$... Gerade : $g_1 \parallel g_2$

$\Rightarrow$ $A_1 \parallel A_2 \Rightarrow (U_1 \subseteq U_2) \vee (U_2 \subseteq U_1)$ laut Def. oder umgekehrt

o.B.d.A. $U_1 \subseteq U_2$

$\forall g \subseteq U_1$... Gerade : $g \subseteq U_2$, da $A_1 = a_1 + U_1$ und $A_2 = a_2 + U_2$ ist $g_1 = a_1 + g$ parallel zu $g_2 = a_2 + g$.

$\Leftarrow$ o.B.d.A. $\forall g_1 \subseteq A_1$... Gerade $\exists g_2 \subseteq A_2$... Gerade : $g_1 \parallel g_2$

$g_1 = a_1 + X_1$ für ein $X_1 \subseteq U_1$... UR $g_2 = a_2 + X_2$ für $X_2 \subseteq U_2$... UR

Aus $g_1 \parallel g_2$ folgt $X_1 \subseteq X_2$ oder $X_2 \subseteq X_1$. Da $\dim(X_1) = 1 = \dim(X_2)$ gilt $X_1 = X_2$. Da $\forall g_1 \subseteq A_1$... gerade $X_1 (\subseteq U_1)$ gleich $X_2 (\subseteq U_2)$ ist, muss $U_1 \subseteq U_2$ gelten.

$\square$