LINAG ÜM

9.5.2. $\sigma$ ... orthosymmetrische $\omega$-Sesquilinearform auf $V$ mit $\omega^2 = id$

$M \subseteq V$ $\quad M^\perp := \{y \in V \mid \forall x \in M : y \perp x\}$ $\quad$ orthosymmetrisch: $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$

a) zz: $M \subseteq M^{\perp\perp}$

$$M^{\perp\perp} = \{z \in V \mid \forall y \in \{y \in V \mid \forall x \in M : y \perp x\} : z \perp y\}$$

Sei $m \in M$ bel. $\quad$ Sei $y \in M^\perp$ bel. $\quad m \perp y$, da $\forall x \in M : x \perp y$

b) zz: $M \subseteq N \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$

Sei $n \in N^\perp$ bel. D.h. $\forall x \in N : n \perp x$, da $M \subseteq N \Rightarrow \forall x \in M : n \perp x \Rightarrow n \in M^\perp$

c) zz: $M \subseteq N \Rightarrow M^{\perp\perp} \subseteq N^{\perp\perp}$

Sei $m \in M^{\perp\perp}$ bel. D.h. $\forall x \in M^\perp : m \perp x$, da $N^\perp \subseteq M^\perp$ (siehe b)

$\Rightarrow \forall x \in N^\perp : m \perp x \Rightarrow m \in N^{\perp\perp}$

d) zz: $M^{\perp\perp\perp} = M^\perp$

($\subseteq$) Sei $m \in M^{\perp\perp\perp}$ bel. D.h. $\forall x \in M^{\perp\perp} : m \perp x$, da $M \subseteq M^{\perp\perp}$ gilt $\forall x \in M : m \perp x$

$\Rightarrow m \in M^\perp$

($\supseteq$) Nach a ist $(M^\perp) \subseteq (M^\perp)^{\perp\perp}$ also $M^\perp \subseteq M^{\perp\perp\perp}$

e) zz: $M^{\perp\perp\perp\perp} = M^{\perp\perp}$

($\subseteq$) Sei $m \in M^{\perp\perp\perp\perp}$ bel. D.h. $\forall x \in M^{\perp\perp\perp} : m \perp x$ $\quad M^\perp \subseteq M^{\perp\perp\perp} \Rightarrow \forall x \in M^\perp : m \perp x$

$\Rightarrow m \in M^{\perp\perp}$

($\supseteq$) Nach a ist $(M^{\perp\perp}) \subseteq (M^{\perp\perp})^{\perp\perp}$

f) zz: $M = M^{\perp\perp} \Leftrightarrow \exists N \subseteq V : M = N^\perp$

($\Rightarrow$) $N = M^{\perp\perp\perp} \Rightarrow N^\perp = M^{\perp\perp\perp\perp} \underset{\text{nach e)}}{=} M^{\perp\perp} \underset{\text{nach Vorraussetzung}}{=} M$

($\Leftarrow$) Nach d) ist $N^\perp = N^{\perp\perp\perp} \Rightarrow M = M^{\perp\perp}$

g) zz: $M \subseteq N^\perp \Leftrightarrow N \subseteq M^\perp$

($\Rightarrow$) $\forall n \in N^\perp \; \forall x \in N : n \perp x$ $\quad$ aus $M \subseteq N^\perp$ folgt $\forall n \in M \; \forall x \in N : n \perp x$

$\Leftrightarrow \forall x \in N \; \forall n \in M : x \perp n \Rightarrow N \subseteq M^\perp$

($\Leftarrow$) genauso