ANA ÜM

6.) $p \in \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{R}^p \setminus K_r(0)$ $\quad r > 0$ $\quad (\mathbb{R}^p, \|.\|_{1,2 \text{ oder } \infty})$

Für welche $p$ ist $\mathbb{R}^p \setminus K_r(0)$ ein Gebiet?

$p=1$: $\quad \mathbb{R} \setminus K_r(0) = (-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$ :

Offensichtlich ist $\mathbb{R} \setminus K_r(0)$ offen, aber nicht zusammenhängend

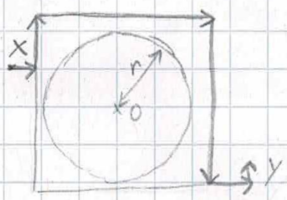
$\Rightarrow \mathbb{R}^1 \setminus K_r(0)$ ist kein Gebiet

$p > 1$: $\quad \mathbb{R}^p \setminus K_r(0)$

offen: Da $K_r(0)$ abgeschlossen ist, ist $\mathbb{R}^p \setminus K_r(0)$ offen.

zusammenhängend: Nach Lemma 11.3.3. ist zusammenhängend äquivalent zu je zwei Punkte aus $\mathbb{R}^p \setminus K_r(0)$ sind durch einen achsenparallelen Polynomzug in $D$ verbindbar.

Sei $x, y \in \mathbb{R}^p \setminus K_r(0)$ bel. $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ $\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$




$$a_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(x_1)(r+1) \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(x_1)(r+1) \\ \operatorname{sgn}(x_2)(r+1) \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \dots$$

$$a_p = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(x_1)(r+1) \\ \operatorname{sgn}(x_2)(r+1) \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(x_p)(r+1) \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(y_1)(r+1) \\ \operatorname{sgn}(x_2)(r+1) \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(x_p)(r+1) \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(y_1)(r+1) \\ \operatorname{sgn}(y_2)(r+1) \\ \operatorname{sgn}(x_3)(r+1) \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(x_p)(r+1) \end{pmatrix} \quad \dots \quad b_p = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(y_1)(r+1) \\ \operatorname{sgn}(y_2)(r+1) \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(y_p)(r+1) \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \operatorname{sgn}(y_2)(r+1) \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(y_p)(r+1) \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \operatorname{sgn}(y_3)(r+1) \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(y_p)(r+1) \end{pmatrix} \quad \dots \quad c_p = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = y$$

$\Rightarrow \overrightarrow{x a_1}, \overrightarrow{a_1 a_2}, \dots, \overrightarrow{a_p b_1}, \overrightarrow{b_1 b_2}, \dots, \overrightarrow{b_p c_1}, \overrightarrow{c_1 c_2}, \dots, \overrightarrow{c_{p-1} y}$ ist ein achsenparalleler Polygonzug von $x$ nach $y$ der nicht durch $K_r(0)$ geht.