LINAG Ü6

8.4.1. ges: Eigenwerte und Basen der Eigenräume

α) $A=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ $\quad A-XE_4=\begin{pmatrix} -X&1&0&0\\ 0&-X&1&0\\ 0&0&-X&1\\ 1&0&0&-X \end{pmatrix}$

$\det(A-XE_4)=X^4-1=:\chi_A(X)$

offensichtlich sind 1 und -1 Nullstellen $\quad (X-1)\cdot(X+1)=X^2-1$

$X^4-1:(X^2-1)=X^2+1 \quad \Rightarrow \chi_A(X)=(X-1)(X+1)(X^2+1)$
$-(X^4-X^2)$
X^2-1 $\quad X^2+1$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$
$-(X^2-1)$
0 $\quad \Rightarrow A$ hat Eigenwerte $\{-1,1\}$

$\begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&1\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$ $\quad x_1+x_2=0 \quad x_2+x_3=0 \quad x_3+x_4=0 \quad x_1+x_4=0$

$x_1=-x_2=x_3=-x_4$ $\quad$ Lösung $\left[\begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\-1 \end{pmatrix}\right]$

$\begin{pmatrix} -1&1&0&0\\ 0&-1&1&0\\ 0&0&-1&1\\ 1&0&0&-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$ $\quad -x_1+x_2=0 \quad -x_2+x_3=0 \quad -x_3+x_4=0 \quad x_1-x_4=0$

$x_1=x_2=x_3=x_4$ $\quad$ Lösung $\left[\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}\right]$

γ) $B=\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times2}$ mit $\varphi\in\mathbb{R}$ $\quad B-XE_2=\begin{pmatrix} \cos(\varphi)-X & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)-X \end{pmatrix}$

$\det(B-XE_2)=(\cos(\varphi)-X)^2+(\sin(\varphi))^2=(\cos(\varphi))^2-2\cos(\varphi)X+X^2+(\sin(\varphi))^2$

1. Fall: $\varphi=2\mathbb{Z}\pi$ $\quad \det(B-XE_2)=(1-X)^2=0 \iff X=1$ ... EW von B

$B-1E_n=\begin{pmatrix} 1-1 & 0\\ 0 & 1-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0\\0&0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\0 \end{pmatrix}$ $\quad$ Lösung $\left[\left\{\begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}\right\}\right]$

2. Fall: $\varphi=(2\mathbb{Z}-1)\pi$ $\quad \det(B-XE_2)=(-1-X)^2=(-(X+1))^2=(X+1)^2=0 \iff X=-1$ ... EW von B

$B-(-1)E_n=\begin{pmatrix} -1+1 & 0\\ 0 & -1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0\\0&0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\0 \end{pmatrix}$ $\quad$ Lösung $\left[\left\{\begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}\right\}\right]$

3. Fall: $\varphi\neq\mathbb{Z}\pi$ $\quad \det(B-XE_2)=X^2-2\cos(\varphi)X+(\sin(\varphi))^2+(\cos(\varphi))^2=X^2-2\cos(\varphi)X+1$

$\det(B-XE_2)=0 \iff X^2-2\cos(\varphi)X+1=0 \iff X=\cos(\varphi)\pm\sqrt{(\cos(\varphi))^2-1}$

$\iff x=\cos(\varphi)\pm\sqrt{-(\sin(\varphi))^2} \iff x=\cos(\varphi)\pm i\cdot\sin(\varphi)$ ... Eigenwerte von B

LINAG Ü6

8.4.1...

$$(B-(\cos(\varphi)-i\sin(\varphi))E_2)=\begin{pmatrix} i\sin(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & i\sin(\varphi)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$i\sin(\varphi)\cdot x_1-\sin(\varphi)\,x_2=0$ $\qquad$ $\sin(\varphi)\,x_1+i\sin(\varphi)\cdot x_2=0$

$\underset{\neq 0}{\sin(\varphi)}\cdot(ix_1-x_2)=0$ $\qquad$ $\underset{\neq 0}{\sin(\varphi)}\cdot(x_1+ix_2)=0$

$ix_1=x_2$ $\qquad$ $x_1=-ix_2 \overset{\cdot i}{\Longleftrightarrow} ix_1=x_2$

$$\text{Lösung}\left[\left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\}\right]$$

$$B-(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))E_2)=\begin{pmatrix}-i\sin(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & -i\sin(\varphi)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$-i\sin(\varphi)\,x_1-\sin(\varphi)\,x_2=0$ $\qquad$ $\sin(\varphi)\,x_1-i\sin(\varphi)\,x_2=0$

$-\underset{\neq 0}{\sin(\varphi)}\cdot(ix_1+x_2)=0$ $\qquad$ $\underset{\neq 0}{\sin(\varphi)}\cdot(x_1-ix_2)=0$

$ix_1=-x_2$ $\qquad$ $x_1=ix_2 \overset{\cdot i}{\Longleftrightarrow} ix_1=-x_2$

$$\text{Lösung}\left[\left\{\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\right\}\right]$$