LINAG Ü5

G7 V, W ... Vektorräume über K

a) B... Basis von V $f \in L(V,W)$ f injektiv $\Leftrightarrow f(B)$ ... Basis von W

falsch Gegenbeispiel:

$K = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}^2$ $W = \mathbb{R}^1$ $B = \{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$

f, so dass $\binom{1}{0} \mapsto (1)$ $\binom{0}{1} \mapsto (1)$

$f(B) = \{(1)\}$ ist Basis von W, f ist jedoch nicht injektiv

b) B... Basis von V $f \in L(V,W)$ f injektiv $\Leftrightarrow f(B)$ ... l.u. in W

falsch gleiches Gegenbeispiel wie in a)

c) $B = (b_i : i \in I)$ ... Basis von V $f \in L(V,W)$

f ... injektiv $\Leftrightarrow (f(b_i) : i \in I)$ ... Basis von W

falsch Gegenbeispiel:

$K = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}^1$ $W = \mathbb{R}^2$ $b_1 = (1)$

f, so dass $(1) \mapsto \binom{1}{0}$

$f(b_1) = \binom{1}{0}$ ist keine Basis von W, obwohl f injektiv ist

d) $B = (b_i : i \in I)$ ... Basis von V $f \in L(V,W)$

f ... injektiv $\Leftrightarrow (f(b_i) : i \in I)$ ... l.u. in W wahr

$\Rightarrow$ $\ker f = \{0\}$, da f ... injektiv

$$0 = \sum_{i \in I} x_i \cdot f(b_i) = f\Big(\sum_{i \in I} x_i b_i\Big) \Leftrightarrow \sum_{i \in I} x_i b_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in I: x_i = 0$$

$\Rightarrow f(b_i)$ sind l.u.

$\Leftarrow$ $\sum_{i \in I} x_i \underbrace{f(b_i)}_{=}$ $= 0 \Leftrightarrow \forall i \in I: x_i = 0$

$f\Big(\sum_{i \in I} x_i b_i\Big)$ $\Rightarrow \ker f = \{0\} \Rightarrow f$ ... injektiv

e) $\exists$ $(b_i : i \in I)$ ... Basis von V $\forall f \in L(V,W)$

f ... injektiv $\Leftrightarrow (f(b_i) : i \in I)$ ... l.u. in W wahr

Beweis gleich wie d mit z.B. kanonischer Basis von V