ANA Ü9

9.) $f : \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \to \mathbb{R}$

$$\binom{x}{y} \mapsto 8x^2 - 2xy + 3y - 1$$

$\frac{\partial}{\partial x} f\binom{x}{y} = 16x - 2y \qquad \frac{\partial}{\partial y} f\binom{x}{y} = -2x + 3$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\binom{x}{y} = 16 \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f\binom{x}{y} = 0 \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f\binom{x}{y} = -2$

$df\binom{x}{y} = (16x - 2y \quad -2x + 3) = (0 \quad 0) \iff x = \frac{3}{2} \wedge y = 12$ Liegt nicht im Einheitskreis

Da der Definitionsbereich beschränkt ist existiert ein globales Maximum und Minimum.

Da im Inneren kein Kandidat für Extrema gibt müssen die Extrema am "Rand" liegen.

$x^2 + y^2 = 1 \iff y^2 = 1 - x^2 \iff y = \sqrt{1 - x^2}$

$\frac{\partial}{\partial x} f\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} = 16x - 2\sqrt{1 - x^2} = 0 \iff 2\sqrt{1-x^2} = 16x$

$\iff \sqrt{1 - x^2} = 8x \iff 1 - x^2 = 64x^2 \iff 65x^2 - 1 = 0$

$\iff x^2 - \frac{1}{65} = 0 \iff x_{1,2} = \pm\sqrt{+\frac{1}{65}} \iff x \pm \frac{1}{\sqrt{65}} \approx \pm \frac{1}{8{,}062}$

oder $-(1 - x^2) = 64x^2 \iff -1 + x^2 = 64x^2 \iff 63x^2 + 1 = 0$

$\iff x^2 + \frac{1}{63} = 0 \iff x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{63}}$ nicht in $\mathbb{R}$

$f\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{65}} \\ \sqrt{\frac{64}{65}} \end{pmatrix} = 8\frac{1}{65} - 2\frac{1}{\sqrt{65}} \cdot \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{65}} + 3\sqrt{\frac{64}{65}} - 1 = \frac{8}{65} - \frac{2\sqrt{64}}{65} + 3\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{65}} = -\frac{8}{65} + \frac{24}{\sqrt{65}}$

$f\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{65}} \\ \sqrt{\frac{64}{65}} \end{pmatrix} = 8\frac{1}{65} + 2\frac{1}{\sqrt{65}} \cdot \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{65}} + 3\sqrt{\frac{64}{65}} - 1 = \frac{8}{65} + \frac{2\sqrt{64}}{65} + 3\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{65}} = \frac{24}{65} + \frac{24}{\sqrt{65}}$

$\Rightarrow f$ hat ein globales Minimum bei $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{65}} \\ \frac{8}{\sqrt{65}} \end{pmatrix}$ und ein

globales Maximum bei $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{65}} \\ \frac{8}{\sqrt{65}} \end{pmatrix}$