# LINAG Ü7

8.5.2. a) zz: $A, B \in K^{n\times n}$, $A \approx B \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: A^k \approx B^k$

Sei $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \approx B$ bel. $\Rightarrow \exists P \in GL_n(K): B = P^{-1}AP$

$$B^k = (P^{-1}AP)^k = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdot\ldots\cdot(P^{-1}AP)}_{k\text{-Mal}} = P^{-1}A^kP$$

$$\Rightarrow A^k \approx B^k$$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ges: B... Diagonalmatrix mit $\exists P \in GL_2(\mathbb{R}): B = P^{-1}AP$

$\chi_A(X) = \det\begin{pmatrix} 4-X & -3 \\ -1 & 2-X \end{pmatrix} = (4-X)(2-X)-3$ hat Nullstellen bei 1 und 5

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $P \cdot B = A \cdot P$

$$\begin{array}{cc|cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & 5b \\ c & 5d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4a-3c & 4b-3d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow a = 4a - 3c$ $5b = 4b - 3d$ $c = -a + 2c$ $5d = -b + 2d$

$\Rightarrow$ z.B. $a = 1$ $b = 3$ $c = 1$ $d = -1$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ \hline 1/4 & 0 \\ 1/4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} = P^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 5/4 & -5/4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$ ... Probe geglückt!

ges: $B^{100}$ und $A^{100}$

$B^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{pmatrix}$ da Diagonalmatrix

$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow PBP^{-1} = A$

$\Rightarrow A^{100} = (PBP^{-1})^{100} \underset{\text{laut a)}}{=} P\, B^{100}\, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$