ANA Ü12

4.) Kettenregel

$G \subseteq \mathbb{C}$ ... offen Y... komplexer Banachraum $\phi: D \to \mathbb{C}$ $g: G \to Y$

ϕ, g ... holomorphe Funktionen

$\Rightarrow g \circ \phi : \phi^{-1}(G) \to Y$ ist holomorph mit $(g \circ \phi)'(z) = \phi'(z) \cdot g'(\phi(z)) \; \forall z \in \phi^{-1}(G)$

ges: Beweis wie im Kapitel 7 und Beweis mit mehrdimensionale Kettenregel

ϕ, g ... holomorph $\Rightarrow \forall z \in D$ ϕ ist bei z komplex diffbar und $z \mapsto \phi'(z)$ .. stetig

$\forall h \in G$ g ist bei h komplex diffbar und $h \mapsto g'(h)$ .. stetig

$$\psi(s) = \begin{cases} \frac{g(s) - g(\phi(z))}{s - \phi(z)} & \text{falls } s \neq \phi(z) \\ g'(\phi(z)) & \text{falls } s = \phi(z) \end{cases}$$ ist bei $\phi(z)$ stetig

$\forall t \in D \setminus \{z\}$

$$\psi(\phi(t)) \cdot \frac{\phi(t) - \phi(z)}{t - z} = \frac{g(\phi(t)) - g(\phi(z))}{\phi(t) - \phi(z)} \cdot \frac{\phi(t) - \phi(z)}{t - z} = \frac{g(\phi(t)) - g(\phi(z))}{t - z}$$

$$(g \circ \phi)'(z) = \lim_{t \to z} \psi(\phi(t)) \cdot \frac{\phi(t) - \phi(z)}{t - z} = \psi(\lim_{t \to z} \phi(t)) \cdot \phi'(z) = g'(\phi(z)) \cdot \phi'(z)$$

$\phi: D \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ $g: G_{\subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2} \longrightarrow Y$ Beide stetig diffbar, da holomorph

$\Rightarrow \forall x \in D: \; d(g \circ \phi)(x) = dg(\phi(x))\, d\phi(x)$

$d(g \circ \phi)(x) = (g \circ \phi)'(x)$

$dg(\phi(x))\, d\phi(x) = g'(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$