LINAG Ü5

8.1.7. K... Körper I... Menge

a) zz: K' mit multiplikation wie $(x_i)_{i\in I}\cdot(y_i)_{i\in I} = (x_i\cdot y_i)_{i\in I}$
ist eine kommutative + assoziative K-Algebra mit Einselement

K' ist ein VR. Sei $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I} \in K'$ bel. Sei $x\in K$ bel.

∘) $(a_i)_{i\in I}\cdot((b_i)_{i\in I}+(c_i)_{i\in I}) = (a_i)_{i\in I}(b_i+c_i)_{i\in I} = (a_i(b_i+c_i))_{i\in I}$
$= ((a_i\cdot b_i)+(a_i\cdot c_i))_{i\in I} = (a_i b_i)_{i\in I} + (a_i\cdot c_i)_{i\in I} = (a_i)_{i\in I}\cdot(b_i)_{i\in I} + (a_i)_{i\in I}\cdot(c_i)_{i\in I}$

∘) $((a_i)_{i\in I}+(b_i)_{i\in I})\cdot(c_i)_{i\in I} = ((a_i+b_i)\cdot c_i)_{i\in I} = ((a_i\cdot c_i)+(b_i\cdot c_i))_{i\in I}$
$= ((a_i)_{i\in I}\cdot (c_i)_{i\in I}) + ((b_i)_{i\in I}\cdot(c_i)_{i\in I})$

∘) $x((a_i)_{i\in I}\cdot(b_i)_{i\in I}) = x(a_i\cdot b_i)_{i\in I} = (x\cdot a_i\cdot b_i)_{i\in I} = (x(a_i)_{i\in I})\cdot(b_i)_{i\in I}$
$\quad \| $
$(a_i\cdot x\cdot b_i)_{i\in I} = (a_i)_{i\in I}\cdot(x\cdot(b_i)_{i\in I})$

∘) $((a_i)_{i\in I}\cdot(b_i)_{i\in I})\cdot(c_i)_{i\in I} = (a_i\cdot b_i\cdot c_i)_{i\in I} = (a_i)_{i\in I}\cdot((b_i)_{i\in I}\cdot(c_i)_{i\in I})$

∘) $(a_i)_{i\in I}\cdot(b_i)_{i\in I} = (a_i\cdot b_i)_{i\in I} = (b_i\cdot a_i)_{i\in I} = (b_i)_{i\in I}\cdot(a_i)_{i\in I}$

∘) $(a_i)_{i\in I}\cdot(1_K)_{i\in I} = (a_i)_{i\in I} = (1)_{i\in I}\cdot(a_i)_{i\in I}$

b) zz: $K^{\langle I\rangle}$ ... kommutative, assoziative K-Algebra Einselement?

$K^{\langle I\rangle}$ ist UR von K'. Sei $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I}\in K^{\langle I\rangle}$ bel.

∘) $(a_i)_{i\in I}\cdot(b_i)_{i\in I} = (a_i\cdot b_i)_{i\in I}$ ist fast immer 0 $\Rightarrow (a_i)_{i\in I}\cdot(b_i)_{i\in I}\in K^{\langle I\rangle}$

∘) kommutativ und assoziativ von oben

∘) besitzt kein Einselement, da Einselement e ab einem Index $n\in I$
Null sein muss und eine Folge $a_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i\leq n+1 \\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$
ist aus $K^{\langle I\rangle}$, jedoch ist $(a_i)_{i\in I}\cdot e$
am Index $n+1$ unterschiedlich von $(a_i)_{i\in I}$.

c) $I=\{1,2\}$ Sei $(a_i)_{i\in I}$ bel. $(a_i)_{i\in I}\cdot(1)_{i\in I} = (a_i)_{i\in I} \Rightarrow e=(1)_{i\in I}$

$U=\{(x_1,0)\mid x_1\in K\}$ ist eine assoziative K-Algebra mit Einselement $(1,0)$, da
für bel. $(x_1,0), (x_2,0)\in U$: $(x_1,0)\cdot(x_2,0) = (x_1\cdot x_2, 0)\in U$
assoziativ von oben $(x_1,0)\cdot(1,0) = (x_1,0)$

Das Einselement von K^2 ist $(1,1)$ und somit ungleich $(1,0)$ (= Einselement von U).