ANA Ü3

3.) $n \in \mathbb{N}$

•) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} \cdot \exp(-\frac{1}{x^2}) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n \cdot \exp(\frac{1}{x^2})}$

$\lim\limits_{x\to 0} x^n \cdot \exp(\frac{1}{x^2}) = \lim\limits_{x\to 0} \exp(\ln(x^n)) \cdot \exp(\frac{1}{x^2}) = \lim\limits_{x\to 0} \exp(n \cdot \ln(x) + \frac{1}{x^2})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} + n \cdot \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 + n \cdot \ln(x) \cdot x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \cdot (1 + n \cdot \ln(x) \cdot x^2)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \cdot (\lim\limits_{x\to 0} 1 + \lim\limits_{x\to 0} n \cdot \ln(x) \cdot x^2) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \cdot (1 + n \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}})$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \cdot (1 + n \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-2 \cdot \frac{1}{x^3}})$ (, da $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$)

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \cdot (1 + n \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{-2x}) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \cdot (1 + n \cdot 0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \exp(\frac{1}{x^2} + n \cdot \ln(x)) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n \cdot \exp(\frac{1}{x^2})} = 0$

•) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x \cdot \ln(x)}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}}{2x}$ (, da $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 - 1 = +\infty$)

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x) + 1}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2}$ (, da $\lim\limits_{x\to\infty} 2x = +\infty$)

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0$

•) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos(nx)}{\sin(n^2 x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0 + \sin(nx) \cdot n}{\cos(n^2x^2) \cdot n^2 \cdot 2 \cdot x}$ (, da $\lim\limits_{x\to 0} 1 - \cos(nx) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} \sin(n^2x^2) = 0$)

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{2nx \cdot \cos(n^2x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(nx) \cdot n}{2n(1 \cdot \cos(n^2x^2) + x \cdot (-\sin(n^2x^2)) \cdot n^2 \cdot 2 \cdot x)}$

(, da $\lim\limits_{x\to 0} \sin(nx) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} 2nx \cdot \cos(n^2x^2) = 0$ (Nullfolge mal beschränkte Folge))

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(nx)}{2 \cdot \cos(n^2x^2) - 4n^2x^2 \cdot \sin(n^2x^2)} = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2}$