LINAG Ü10

9.2.1. Welche Abbildungen sind Sesquilinearformen oder Bilinearformen?

Falls ja: ges: Kern der zugehörigen Abbildung $d_\sigma : V \to V^*$

α) $\sigma : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto x\cdot y$

Ist eine Bilinearform, da

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \quad \sigma(x,y) = x\cdot y = y\cdot x = \sigma(y,x)$ (also muss nur die Hälfte der Bedingungen überprüft werden)

$\sigma(x+y,z) = (x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z = \sigma(x,z) + \sigma(y,z)$

$\sigma(z\cdot x,y) = z\cdot x\cdot y = z\cdot(x\cdot y) = z\cdot\sigma(x,y)$

$d_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* \quad x \mapsto \sigma(x,\cdot)$ also $x \mapsto (\mathbb{R}\to\mathbb{R} : y \mapsto x\cdot y)$

Offensichtlich ist $\ker d_\sigma$ gleich $\{0\}$, da nur für $x=0$ $\sigma(x,\cdot) \equiv 0$ (Nullabbildung)

γ) $\sigma : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad (x,y) \mapsto \overline{x}\cdot y$

Ist eine $\overline{\cdot}$-Sesquilinearform, da

Lemma: $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}: \quad \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{(a+ib)}\,\overline{(c+id)}$

$\overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} = (ac-bd) - i(ad+bc)$

$\overline{(a+ib)}\,\overline{(c+id)} = (a-ib)(c-id) = (ac-bd) - i(ad+bc)$

Lemma: $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \overline{(a+ib)+(c+id)} = \overline{(a+ib)} + \overline{(c+id)}$

$\overline{(a+ib)+(c+id)} = \overline{(a+c)+i(b+d)} = (a+c) - i(b+d)$

$\overline{(a+ib)} + \overline{(c+id)} = (a-ib) + (c-id) = (a+c) - i(b+d)$

$\forall x,y,z \in \mathbb{C}: \quad \sigma(x+y,z) = \overline{(x+y)}\cdot z = (\overline{x}+\overline{y})\cdot z = \overline{x}\cdot z + \overline{y}\cdot z = \sigma(x,z) + \sigma(y,z)$

$\sigma(x,y+z) = \overline{x}\cdot(y+z) = \overline{x}y + \overline{x}z = \sigma(x,y) + \sigma(x,z)$

$\sigma(z\cdot x,y) = \overline{z\cdot x}\cdot y = \overline{z}\cdot\overline{x}\cdot y = \overline{z}\cdot\sigma(x,y)$

$\sigma(x,z\cdot y) = \overline{x}\cdot z\cdot y = z\cdot\overline{x}\cdot y = z\cdot\sigma(x,y)$

$d_\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \quad x \mapsto \sigma(x,\cdot)$ also $x \mapsto (\mathbb{C}\to\mathbb{C} : y \mapsto \overline{x}\cdot y)$

Offensichtlich ist $\ker d_\sigma$ gleich $\{0\}$, da nur für $x=0$ $\sigma(x,\cdot) \equiv 0$ $(x=0 \Leftrightarrow \overline{x}=0)$

...

LINAG Ü10

9.2.1. ...

5) $\sigma: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad (x,y) \mapsto \overline{xy}$

Ist keine Sesquilinearform, da

$\sigma(x, c\cdot y) = c \cdot \sigma(x,y)$ verletzt wird. Beispiel: $x=1 \quad c=i \quad y=1$

$\sigma(x, c\cdot y) = \sigma(1, i) = \overline{i} = \underline{\underline{-i}}$ aber $c \cdot \sigma(x,y) = i \cdot \sigma(1,1) = i \cdot \overline{1} = \underline{\underline{i}}$

vi) $\sigma: C^1(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad (f,g) \mapsto f(0) \cdot g'(1)$

Ist eine Bilinearform, da

$\forall f,g,h \in C^1(\mathbb{R})\ \forall c \in \mathbb{R}: \sigma(f+g, h) = (f+g)(0) \cdot h'(1) = (f(0)+g(0)) \cdot h'(1)$

$= f(0) \cdot h'(1) + g(0) \cdot h'(1) = \sigma(f,h) + \sigma(g,h)$

$\sigma(f, g+h) = f(0) \cdot (g+h)'(1) = f(0) \cdot (g'(1) + h'(1))$

$= f(0) \cdot g'(1) + f(0) \cdot h'(1) = \sigma(f,g) + \sigma(f,h)$

$\sigma(c \cdot f, g) = (c \cdot f)(0) \cdot g'(1) = c \cdot f(0) \cdot g'(1) = c \cdot \sigma(f,g)$

$\sigma(f, c \cdot g) = f(0) \cdot (c \cdot g)'(1) = f(0) \cdot c \cdot g'(1) = c \cdot \sigma(f,g)$

$d_\sigma: C^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* \quad f \mapsto \sigma(f, .)$ also $f \mapsto (C^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad g \mapsto f(0) \cdot g'(1))$

Offensichtlich ist $\ker d_\sigma = \{f \in C^1(\mathbb{R}): f(0) = 0\}$, da dann $\sigma(f, .) \equiv 0$