LINAG ÜM

9.2.3. $K^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ ... VR. $\quad \sigma_1 : K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \times K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K : ((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_j)_{j\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i y_i$

$\sigma_2 : K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \times K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K : ((x_i), (y_j)) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i\, y_{i+1}$

$\sigma_3 : K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \times K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K : ((x_i), (y_j)) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} x_{i+1}\, y_i$

a) ges: Bilder der kanonischen Basisvektoren unter Abbildung $d_k := d_{\sigma_k}$ $\quad k \in \{1,2,3\}$

$B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ... kanonische Basis

$d_1(B) = \{\sigma_1(b_j, .) : j\in\mathbb{N}\} = \{f : K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} (b_j)_i \cdot x_i = x_j\}$

$d_2(B) = \{\sigma_2(b_j, .) : j\in\mathbb{N}\} = \{f : K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} (b_j)_i \cdot x_{i+1} = x_{j+1}\}$

$d_3(B) = \{\sigma_3(b_j, .) : j\in\mathbb{N}\} = \{f : K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} (b_j)_{i+1} \cdot x_i = \begin{cases} x_{j-1} & \text{falls } j>1 \\ 0 & \text{falls } j=1 \end{cases}\}$

b) zz: $\sigma_1$ ist nicht ausgeartet $\quad (\forall x\in K^{\langle\mathbb{N}\rangle}\setminus\{0\}\ \exists b\in K^{\langle\mathbb{N}\rangle} : \sigma_1(x,b)\neq 0$
$\forall y\in K^{\langle\mathbb{N}\rangle}\setminus\{0\}\ \exists a\in K^{\langle\mathbb{N}\rangle} : \sigma_1(a,y)\neq 0)$

Sei $x\in K^{\langle\mathbb{N}\rangle}\setminus\{0\}$ bel.

$\sigma_1(x,x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \cdot x_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} (x_i)^2 > 0$, da $\exists\, i\in\mathbb{N} : x_i \neq 0$ sonst $x = 0$

Gleich für $y\in K^{\langle\mathbb{N}\rangle}\setminus\{0\}$ $\quad \Rightarrow \sigma_1$ ist nicht ausgeartet

- zz: $\sigma_2$ erfüllt genau eine der beiden Eigenschaften von nicht ausgearteten Bilinearformen

Sei $x\in K^{\langle\mathbb{N}\rangle}\setminus\{0\}$ bel. $\quad \forall i\in\mathbb{N}\quad b_i := x_{i-1}$ falls $i>1$ $\;0$ sonst

$\sigma_2(x,b) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \cdot b_{i+1} = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \cdot x_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} (x_i)^2 > 0$

Für $y_i = 1$ falls $i=1$ sonst $0$ ist für alle $a\in K^{\langle\mathbb{N}\rangle}$

$\sigma_2(a,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \cdot y_{i+1} = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \cdot 0 = 0$ $\quad$ aber $y \neq 0$

- zz: $\sigma_3$ erfüllt genau eine der beiden Eigenschaften von nicht ausgearteten Bilinearformen

Sei $y\in K^{\langle\mathbb{N}\rangle}\setminus\{0\}$ bel. $\quad \forall i\in\mathbb{N}\quad a_i := y_{i-1}$ falls $i>1$ $\;0$ sonst

$\sigma_3(a,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{i+1} \cdot y_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} y_i \cdot y_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} (y_i)^2 > 0$

Für $x_i = 1$ falls $i=1$ sonst $0$ ist für alle $b\in K^{\langle\mathbb{N}\rangle}$

$\sigma_3(x,b) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_{i+1} \cdot b_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} 0 \cdot b_i = 0$ $\quad$ aber $x \neq 0$

LINAG ÜM

9.8.2 α)

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\2&0&1&1\\1&2&0&1\\2&2&2&0\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3^{4\times4}$$

ges: $B\in\mathbb{Z}_3^{4\times4}$ zu $A$ kongruente Matrix in Normalform

$$\left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&1&2&1\\2&0&1&1\\1&2&0&1\\2&2&2&0\end{array}\right)\overset{S}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cccc}\cdot2&&&\\2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&1&2&1\\1&0&1&1\\2&2&0&1\\1&2&2&0\end{array}\right)\overset{Z}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cccc}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&1&2\\1&0&1&1\\2&2&0&1\\1&2&2&0\end{array}\right)\overset{S}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cccc}&&+II&\\2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&2\\1&0&1&1\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{array}\right)$$

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

$$\overset{Z}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cccc}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&2\\1&0&1&1\\0&2&0&2\\1&2&1&0\end{array}\right)\overset{S}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cccc}&&+2\cdot I&\\2&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&2\\1&0&0&1\\0&2&0&2\\1&2&0&0\end{array}\right)\overset{Z}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cccc}2&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&2\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\1&2&0&0\end{array}\right)\overset{S}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cccc}&&&+2\cdot II\\2&0&1&0\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\1&2&0&1\end{array}\right)\overset{Z}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cccc}2&0&1&0\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&2&0&0\end{array}\right)$$

$$\overset{S}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cccc}&&&+2\cdot I\\2&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2&0&0\end{array}\right)\overset{Z}{\rightsquigarrow}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{cccc}2&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right\}=P\\\left.\begin{array}{cccc}0&2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right\}=\operatorname{diag}(\square,0,0)\end{array}$$

$$P^T=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\\1&2&0&1\end{pmatrix}$$

$$P^T A P=\operatorname{diag}(\square,0,0)$$

Probe:

$$\begin{array}{ccc}&\begin{pmatrix}0&1&2&1\\2&0&1&1\\1&2&0&1\\2&2&2&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}2&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\\1&2&0&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&2&1&2\\2&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

LINAG ÜM

9.10.1. $\alpha$) $A=\begin{pmatrix}-5&1&-1\\1&-2&2\\-1&2&-2\end{pmatrix}$. ges: kongruente reelle Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix}-5&1&-1\\1&-2&2\\-1&2&-2\end{pmatrix}\overset{s}{\rightsquigarrow}\overset{+\mathrm{II}}{\begin{pmatrix}-5&1&0\\1&-2&0\\-1&2&0\end{pmatrix}}\overset{z}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}-5&1&0\\1&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{s}{\rightsquigarrow}\overset{+\frac{1}{5}\mathrm{I}}{\begin{pmatrix}-5&0&0\\1&-\frac{9}{5}&0\\0&0&0\end{pmatrix}}\overset{z}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-\frac{9}{5}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ negativ semidefinit

$\beta$) $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\overset{s}{\rightsquigarrow}\overset{-\mathrm{II}}{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}}\overset{z}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&-2\end{pmatrix}\overset{s}{\rightsquigarrow}\overset{-\mathrm{I}}{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&-2\end{pmatrix}}\overset{z}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\overset{s}{\rightsquigarrow}\overset{+\mathrm{II}}{\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}}\overset{z}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\overset{s}{\rightsquigarrow}\overset{+\mathrm{I}}{\begin{pmatrix}2&3&0\\1&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}}\overset{z}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}2&3&0\\3&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\overset{s}{\rightsquigarrow}\overset{-\frac{3}{2}\mathrm{I}}{\begin{pmatrix}2&0&0\\3&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-2\end{pmatrix}}\overset{z}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ indefinit

$\gamma$) $C=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&2&3\\2&3&14\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}4&2&2\\2&2&3\\2&3&14\end{pmatrix}\overset{s}{\rightsquigarrow}\overset{-\mathrm{II}}{\begin{pmatrix}4&2&0\\2&2&1\\2&3&11\end{pmatrix}}\overset{z}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&2&1\\0&1&10\end{pmatrix}\overset{s}{\rightsquigarrow}\overset{-\frac{1}{10}\mathrm{III}}{\begin{pmatrix}4&2&0\\2&\frac{19}{10}&1\\0&0&10\end{pmatrix}}\overset{z}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&\frac{19}{10}&0\\0&0&10\end{pmatrix}\overset{s}{\rightsquigarrow}\overset{-\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\begin{pmatrix}4&0&0\\2&\frac{9}{10}&0\\0&0&10\end{pmatrix}}\overset{z}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&\frac{9}{10}&0\\0&0&10\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ positiv definit

$\delta$) $D=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

$\sigma\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=-1$ $\quad$ $\sigma\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=1$ $\Rightarrow \dim U^{+}\geq 1$ $\quad$ $\dim U^{-}\geq 1$

$\Rightarrow$ indefinit

LINAG ÜM

9.4.6. α) $b: \mathbb{R}^{3\times 1} \times \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$ ... symmetrische Bilinearform  E.. kanonische Basis

$$b(E,E) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = (c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$c_1 = e_1 - e_3$  $b(c_1, c_1) = b(e_1 - e_3, e_1 - e_3) = b(e_1, e_1) - b(e_1, e_3) - b(e_3, e_1) + b(e_3, e_3)$

$= 0 + 0 = 0$

$c_2 = e_1 + 2e_2$  $b(c_2, c_2) = b(e_1 + 2e_2, e_1 + 2e_2) = b(e_1, e_1) + 2b(e_1, e_2) + 2b(e_2, e_1) + 4b(e_2, e_2)$

$= 0 + 4(-3) + 4 \cdot 1 = -8$

$c_3 = e_1 + e_2 + e_3$  $b(c_3, c_3) = b(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3) = b(e_1, e_1) + 2b(e_1, e_2) + 2b(e_1, e_3)$

$+ b(e_2, e_2) + 2b(e_2, e_3) + b(e_3, e_3) = 0 + 2(-3) + 2 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 1 + 0 = 1$

$b(c_1, c_2) = b(e_1 - e_3, e_1 + 2e_2) = b(e_1, e_1) + 2b(e_1, e_2) - b(e_1, e_3) - 2b(e_2, e_3)$

$= 0 + 2(-3) - 2 - 2 \cdot 1 = -10$

$b(c_1, c_3) = b(e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3) = b(e_1, e_1) + b(e_1, e_2) + b(e_1, e_3) - b(e_1, e_3) - b(e_2, e_3) - b(e_3, e_3)$

$= 0 + (-3) + 1 + 0 = -2$

$b(c_2, c_3) = b(e_1 + 2e_2, e_1 + e_2 + e_3) = b(e_1, e_1) + b(e_1, e_2) + b(e_1, e_3) + 2b(e_1, e_2) + 2b(e_2, e_2) + 2b(e_2, e_3)$

$= 0 + 3(-3) + 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -1$

$$\Rightarrow b(C,C) = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -2 \\ -10 & -8 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$