LINAG Ü1

7.2.1. $A_t = \begin{pmatrix} 5-9t & -4 & -2 \\ -4 & 5-9t & -2 \\ -2 & -2 & 8-9t \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

ges: Determinante

$$\det A_t = (5-9t)^2 \cdot (8-9t) + (-4)\cdot(-2)\cdot(-2) + (-2)\cdot(-4)\cdot(-2)$$
$$- (-2)\cdot(5-9t)\cdot(-2) - (-2)\cdot(-2)\cdot(5-9t) - (-4)\cdot(-4)\cdot(8-9t)$$
$$= (25-90t+81t^2)(8-9t) - 16 - 16 - 4(5-9t) - 4(5-9t) - 16(8-9t)$$
$$= \cancel{200} - \cancel{225t} - \cancel{720t} + \cancel{810t^2} + \cancel{648t^2} - \cancel{729t^3} - \cancel{32} - \cancel{20} + \cancel{36t} - \cancel{20} + \cancel{36t}$$
$$- \cancel{128} + \cancel{144t}$$
$$= -729t^3 + 1458t^2 - 729t$$

Wann ist A_t singulär (= nicht regulär)?

A_t regulär $\Leftrightarrow \det A_t \neq 0 \quad \Rightarrow \det A_t = 0 \Leftrightarrow A_t$ singulär

$\det A_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -729t^3 + 1458t^2 - 729t = 0$

$\Leftrightarrow t \cdot (-729t^2 + 1458t - 729) = 0$

$\Leftrightarrow (t=0) \vee (-729t^2 + 1458t - 729 = 0)$

$\Leftrightarrow (t=0) \vee \left(t_{1,2} = \dfrac{-1458 \pm \sqrt{(1458)^2 - 4(-729)\cdot(-729)}}{2\cdot(-729)} \right)$

$\Leftrightarrow (t=0) \vee \left(t_{1,2} = \dfrac{-1458 \pm \sqrt{2125764 - 2125764}}{-1458} \right)$

$\Leftrightarrow (t=0) \vee (t = 1)$

$\Rightarrow A_t$ singulär $\Leftrightarrow (t=0) \vee (t=1)$

ges: Rang aller A_t $t \in \mathbb{R}$

Wenn $t \neq 0 \wedge t \neq 1$ ist $\det(A_t) \neq 0 \Rightarrow rg(A_t) = 3$

Bei $t=0$ $A_t = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 9 & -18 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow rg(A_0) = 2$

Bei $t=1$ $A_t = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow rg(A_1) = 1$

LINAG Ü1

7.4.2. K... Körper $n \in \mathbb{N}$ $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in K^{n+1}$

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \in K^{(n+1)\times(n+1)}$$

zz: $\det V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$

Vollständige Induktion nach n:

$n=0$: $V(x_0) := (1)$ $\det(V(x_0)) = 1$ $\prod_{i<j}(x_i - x_j) = 1$

$n+1$: $V(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{pmatrix} x_0^{n+1} & x_0^n & \cdots & x_0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_{n+1}^{n+1} & x_{n+1}^n & \cdots & x_{n+1} & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(V(x_0, \dots, x_{n+1})) = \det\left(\begin{pmatrix} x_0^{n+1} & x_0^n & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n+1}^{n+1} & x_{n+1}^n & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} x_0^{n+1} - x_0^n \cdot x_{n+1} & x_0^n - x_0^{n-1} \cdot x_{n+1} & \cdots & x_0 - x_{n+1} \cdot 1 & 1 \\ x_1^{n+1} - x_1^n \cdot x_{n+1} & x_1^n - x_1^{n-1} \cdot x_{n+1} & \cdots & x_1 - x_{n+1} \cdot 1 & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_{n+1}^{n+1} - x_{n+1}^n \cdot x_{n+1} & x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} \cdot x_{n+1} & \cdots & x_{n+1} - x_{n+1} \cdot 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} x_0^n \cdot (x_0 - x_{n+1}) & x_0^{n-1} \cdot (x_0 - x_{n+1}) & \cdots & x_0^0 \cdot (x_0 - x_{n+1}) & 1 \\ x_1^n \cdot (x_1 - x_{n+1}) & x_1^{n-1} \cdot (x_1 - x_{n+1}) & \cdots & x_1^0 \cdot (x_1 - x_{n+1}) & 1 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (-1)^{(n+1)+(n+1)} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} x_0^n (x_0 - x_{n+1}) & \cdots & x_0^0 \cdot (x_0 - x_{n+1}) \\ \vdots & & \\ x_n^n \cdot (x_n - x_{n+1}) & \cdots & x_n^0 \cdot (x_n - x_{n+1}) \end{pmatrix}\right)$$

laut Satz 7.4.5 und Beweis von Satz 7.4.6.

$$= (x_0 - x_{n+1}) \cdot (x_1 - x_{n+1}) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n+1}) \cdot \det\left(\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0^0 \\ \vdots & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n^0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \prod_{i<n+1} (x_i - x_{n+1}) \cdot \det\left(\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \prod_{i<n+1} (x_i - x_{n+1}) \cdot \prod_{i<j} (x_i - x_j) = \prod_{i<k} (x_i - x_k)$$

$i \in \{1, \dots, n\}$
$j \in \{1, \dots, n\}$
$k \in \{1, \dots, n+1\}$

LINAG Ü1

6.1.1. $A = r + X$, $r \in V$ $X \subseteq V$... Unterraum $A_1 = s + U$

a) zz: $A_1 \subset A$ ... affiner Unterraum $\Leftrightarrow (A_1 \neq \emptyset) \wedge (\forall a, b, c \in A_1 \Rightarrow c + [a-b] \subseteq A_1)$

$\Rightarrow$ A_1... affiner Unterraum $\Rightarrow (\exists s \in A_1: s \in A) \wedge (U \subseteq X)$ laut Def.

Da $s \in A_1$ gilt $A_1 \neq \emptyset$.

Sei $a, b, c \in A_1$ bel. Da $A_1 = s + U$ gibt es Vektoren $u_a, u_b, u_c \in U$

mit $a = s + u_a$ $b = s + u_b$ $c = s + u_c$.

$[a - b] = [(s + u_a) - (s + u_b)] = [s - s + u_a - u_b] = [u_a - u_b]$

Nachdem $u_a, u_b \in U$ und U abgeschlossen, da UR, ist

$[u_a - u_b] \subseteq U$. Da $c \in A_1$ ist $c + [a - b] \subseteq A_1$.

$\Leftarrow$ Da $A_1 \neq \emptyset$ muss gelten $\exists s \in A_1$. Da gilt $A_1 \subseteq A$ muss auch gelten $s \in A$. Da $A_1 \subseteq A$ gilt auch

$s - A_1 \subseteq s - A \Leftrightarrow s - s + U \subseteq s - s + X \Leftrightarrow U \subseteq X$

b) $A_1, A_2 \subset A$ ... affine UR $A = a + U$

zz: $A_1 \parallel A_2 \Leftrightarrow \forall g_1 \subseteq A_1$ ... Gerade $\exists g_2 \subseteq A_2$ ... Gerade : $g_1 \parallel g_2$

$\Rightarrow$ $A_1 \parallel A_2 \Rightarrow (U_1 \subseteq U_2) \vee (U_2 \subseteq U_1)$ laut Def. oder umgekehrt

o.B.d.A. $U_1 \subseteq U_2$

$\forall g \subseteq U_1$ ... Gerade : $g \subseteq U_2$, da $A_1 = a_1 + U_1$ und $A_2 = a_2 + U_2$

ist $g_1 = a_1 + g$ parallel zu $g_2 = a_2 + g$.

$\Leftarrow$ o.B.d.A. $\forall g_1 \subseteq A_1$... Gerade $\exists g_2 \subseteq A_2$... Gerade : $g_1 \parallel g_2$

$g_1 = a_1 + X_1$ für ein $X_1 \subseteq U_1$ ... UR $g_2 = a_2 + X_2$ für $X_2 \subseteq U_2$ ... UR

Aus $g_1 \parallel g_2$ folgt $X_1 \subseteq X_2$ oder $X_2 \subseteq X_1$. Da $\dim(X_1) = 1 = \dim(X_2)$

gilt $X_1 = X_2$. Da $\forall g_1 \subseteq A_1$ ... gerade $X_1 (\subseteq U_1)$ gleich $X_2 (\subseteq U_2)$ ist,

muss $U_1 \subseteq U_2$ gelten.

$\square$

LINAG Ü1

7.3.3. $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $B = (b_1, b_2, b_3)$ .. Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$

$f \in GL(\mathbb{R}^{3\times 1})$ $f(b_1) = b_2$ $f(b_2) = b_3$ $f(b_3) = b_1$

a) ges: $\langle E^*, f(E)\rangle$, $\langle E^*, f^3(E)\rangle$ sowie jeweils Determinante

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle E^*, f(E)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\langle E^*, f(E)\rangle) = (-2) + 0 + 0 - 0 - 0 - (-3) = 3 - 2 = 1$

$\langle E^*, f^3(E)\rangle = (\langle E^*, f(E)\rangle)^3$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & -3 & 5 \\ & & & 1 & -2 & 3 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & -3 & 5 \\ & & & 1 & -2 & 3 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$\boxed{\text{oder auch } \langle E^*, f^3(E)\rangle \text{ muss gleich } E_3 \text{ sein, da } f^3 = id}$

$\Rightarrow \langle E^*, f^3(E)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(\langle E^*, f^3(E)\rangle) = 1$

b) $f, f^3 \in SL(\mathbb{R}^{3\times 1})$, da $f, f^3 \in GL(\mathbb{R}^{3\times 1})$ und $\det(f) = 1$ und $\det(f^3) = 1$.

$\langle B^*, f(B)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\langle B^*, f^3(B)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(\langle B^*, f(B)\rangle) = 1$ $\det(\langle B^*, f^3(B)\rangle) = 1$

$\Rightarrow f, f^3 \in SL(\mathbb{R}^{3\times 1})$

LINAG Ü1

5.3.4. $\int (.)(x)\,dx : C^0(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})/U$

$$g \mapsto \int g(x)dx$$

ges: U... UR von $C^1(\mathbb{R})$, sodass $\int(.)(x)dx$ linear und bijektiv.

$U = \{ f(x) \in C^1(\mathbb{R}) : \exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = a \}$

- U ist UR, da abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation mit Skalaren und da $f(x)=0$ (= Nullvektor) in U liegt.
- $\int(.)(x)dx$ ist linear, da $\int (f+g)(x)dx = \int f(x) + \int g(x)$ und $\int (c\cdot f)(x) = c\cdot \int f(x)$ wie aus der Analysis bekannt.
- Sei $[f]_U \in C^1(\mathbb{R})/U$ bel. Dann ist $f' \in C^0(\mathbb{R})$ und $\int f'(x)dx = [f]_U$

  $\Rightarrow \int$ ist surjektiv

  Sei $f,g \in C^0(\mathbb{R})$ bel. mit $\int f(x)dx = \int g(x)dx$. Dann ist $\int f(x)dx = \int g(x)dx + a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. $(\int f(x)dx)' = (\int g(x)dx + a)'$

  $\Leftrightarrow f(x) = g(x) + 0 \quad \Rightarrow \int$ ist injektiv

  $\Rightarrow \int$ ist bijektiv

ges: Nullvektor von $C^1(\mathbb{R})/U$

Θ von $C^0(\mathbb{R})$ ist $f(x)=0$ $\quad \int \Theta\, dx$ ist Θ von $C^1(\mathbb{R})/U$

$\int f(x)dx = 0 + a$ für ein $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow U$ ist Nullvektor von $C^1(\mathbb{R})/U$