LINAG Ü14

12.1.6 $(K^{\langle\mathbb{N}\rangle}, \iota)$ $\quad \iota: K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \times K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K : ((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \cdot y_i$

$f \in L(K^{\langle\mathbb{N}\rangle}, K^{\langle\mathbb{N}\rangle})$ $\quad (a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ mit $\forall i,j \in \mathbb{N}: a_{ij} \ldots$ i-te Koordinate von $f(e_j)$

$(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ als "unendliche Matrix" hat in jeder Spalte fast nur Nullen

a) zz: Falls $\hat{f}$ existiert gilt: i-te Zeile von (a_{ij}) ist genau die Koordinatisierung von $\hat{f}(e_i)$

Wir nehmen an $\hat{f}$ existiert und beschreiben diese (wie auch f) durch eine Familie bzw. "unendliche Matrix" (b_{ij}) so wie oben. Mit a_{*i} und b_{*i} bezeichne ich das Bild $f(e_i)$ bzw. $\hat{f}(e_i)$ (also jeweils die "Spalten")

Da $\hat{f}$ zu f adjungiert folgt

$\forall i,j \in \mathbb{N}: e_j \cdot f(e_i) = e_j \cdot a_{*i} = a_{ji} = b_{ij} = b_{*j} \cdot e_i = \hat{f}(e_j) \cdot e_i$

$\Rightarrow$ In der i-ten Zeile steht das Bild von $\hat{f}(e_i)$ (die "Matrizen transponiert" zueinander)

b)

$$f \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad g \cong \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

zz: $\hat{f}$ existiert und ist nicht surjektiv

Behauptung: $\hat{f} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$ $\qquad$ Sei $i,j \in \mathbb{N}$ bel.

$e_j \cdot f(e_i) = e_j \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i-1 \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i=j \text{ oder } i-1=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ \ sind offensichtlich

$\hat{f}(e_j) \cdot e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow j \\ \leftarrow j+1 \\ \\ \\ \end{matrix} \cdot e_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i=j \text{ oder } i=j+1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ / immer gleich

Man sieht, dass es keine (endliche!) LK $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i e_i$ gibt mit

$\hat{f}\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \cdot e_i\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = e_0$ $\quad \Rightarrow$ nicht surjektiv

zz: $f^{-1} = g$, aber $\nexists \hat{g}$

Sei $i \in \mathbb{N}$ bel. $\quad g(f(e_i)) = g\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i-1 \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix} = g(e_{i-1} + e_i) = \begin{pmatrix} (-1)^i \\ (-1)^{i+1} \\ (-1)^i \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow i-1 \\ \\ \\ \end{matrix} + \begin{pmatrix} (-1)^{i+1} \\ (-1)^i \\ (-1)^{i+1} \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i-1 \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = e_i$

$\Rightarrow f^{-1} = g$

$\forall i \in \mathbb{N}: \hat{g}(e_0) \cdot e_i = g(e_i) \cdot e_0 = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \text{ gerade} \\ -1, & \text{falls } i \text{ ungerade} \end{cases}$ $\quad$ wenn wir annehmen, dass $\hat{g}$ existiert

$\Rightarrow \hat{g}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} \notin K^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ $\quad \Rightarrow \nexists \hat{g}$ zu g

LINAG Ü14

12.1.7. $f, f_1, f_2 \in L(V,W)$ $\quad g \in L(W,X)$ $\quad \hat{f}, \hat{f_1}, \hat{f_2}, \hat{g}$ existieren
$c \in K$

a) zz: $\widehat{f_1+f_2}$ existiert und ist gleich $\hat{f_1} + \hat{f_2}$

Sei $x \in V$ $\quad y \in W$ bel.

$$y \cdot (f_1+f_2)(x) = y \cdot (f_1(x) + f_2(x)) = y \cdot f_1(x) + y \cdot f_2(x)$$
$$= \hat{f_1}(y) \cdot x + \hat{f_2}(y) \cdot x = (\hat{f_1}(y) + \hat{f_2}(y)) \cdot x = (\hat{f_1} + \hat{f_2})(y) \cdot x$$
$$\Rightarrow \widehat{f_1+f_2} = \hat{f_1} + \hat{f_2}$$

zz: $\widehat{cf}$ existiert und ist gleich $\omega(c) \cdot \hat{f}$

Sei $x \in V$ $\quad y \in W$ bel.

$$y \cdot (cf)(x) = y \cdot (c \cdot f(x)) = c \cdot (y \cdot f(x)) = c(\hat{f}(y) \cdot x)$$
$$= \omega(\omega(c))(\hat{f}(y) \cdot x) = (\omega(c)\hat{f}(y)) \cdot x = (\omega(c) \cdot \hat{f})(y) \cdot x$$
$$\Rightarrow \widehat{c \cdot f} = \omega(c) \cdot \hat{f}$$

b) zz: $\widehat{g \circ f}$ existiert und ist gleich $\hat{f} \circ \hat{g}$

$$y \cdot (g \circ f)(x) = y \cdot g(f(x)) = \hat{g}(y) \cdot f(x) = \hat{f}(\hat{g}(y)) \cdot x$$
$$= (\hat{f} \circ \hat{g})(y) \cdot x$$
$$\Rightarrow \widehat{g \circ f} = \hat{f} \circ \hat{g}$$

<u>LINAG Ü14</u>

12.2.2. $A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ -2 & 1 & c \\ -2 & b & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & w \\ 1 & -1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$

ges: alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ und alle $w, x, y, z \in \mathbb{C}$ sodass $A \in O_3$ und $B \in U_4$ ist

Nach Beobachtung 12.2.11 ist A genau dann orthogonal, wenn die Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ bilden.

$$\mathrm{I}\cdot\mathrm{I} = \begin{pmatrix} \frac{a}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{a^2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{a^2+8}{9} \overset{\text{ONB}}{=} 1 \Rightarrow a^2+8=9 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\mathrm{I}\cdot\mathrm{II} = \begin{pmatrix} \frac{a}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{b}{3} \end{pmatrix} = \frac{2a}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2b}{9} = \frac{2\cdot(a-1-b)}{9} \overset{\text{ONB}}{=} 0 \Rightarrow a-1-b=0 \Rightarrow a = b+1 \Rightarrow b=0 \lor b=-2$$

$$\mathrm{II}\cdot\mathrm{II} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{b}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{b}{3} \end{pmatrix} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{b^2}{9} = \frac{b^2+5}{9} = 1 \Rightarrow b^2+5=9 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow a = -1$$

$$\mathrm{I}\cdot\mathrm{III} = \begin{pmatrix} \frac{a}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{c}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{2a}{9} - \frac{2c}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2\cdot(a-c-1)}{9} = 0 \Rightarrow a-c-1=0 \Rightarrow c = a-1 \Rightarrow c=0 \lor c=-2$$

$$\mathrm{III}\cdot\mathrm{III} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{c}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{c}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{4}{9} + \frac{c^2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{c^2+5}{9} = 1 \Rightarrow c^2+5=9 \Rightarrow c^2=4 \Rightarrow c=-2$$

$$\mathrm{II}\cdot\mathrm{III} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{b}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{c}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{4}{9} + \frac{c}{9} + \frac{b}{9} = \frac{b+c+4}{9} = 0 \Rightarrow b+c+4=0 \Rightarrow b+c=-4 \checkmark$$

Probe: $A^{-1} = \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A^T$ (mit Wolfram Alpha gerechnet)

...

LINAG Ü14

12.2.2. ...

$$\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}=\frac14\cdot4=1\ \checkmark\qquad \begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}=\frac14\cdot4=1\ \checkmark\qquad \begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\-\frac12\\\frac12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\-\frac12\\\frac12\end{pmatrix}=1\ \checkmark$$

$$\begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\bar w w+\bar x x+\bar y y+\bar z z=|w|^2+|x|^2+|y|^2+|z|^2=1$$

$$\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}=2\cdot\left(-\frac12\right)\frac12+2\cdot\frac12\cdot\frac12=0\ \checkmark\qquad \begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\-\frac12\\\frac12\end{pmatrix}=2\cdot\frac12\cdot\frac12-2\cdot\frac12\cdot\frac12=0\ \checkmark\qquad \begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\-\frac12\\\frac12\end{pmatrix}=2\cdot\frac14-2\cdot\frac14=0\ \checkmark$$

$$\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac12(w+x+y+z)=0 \Rightarrow w+x+y+z=0$$

$$\begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac12(y+z-w-x)=0 \Rightarrow y+z=w+x$$

$$\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\-\frac12\\\frac12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac12\cdot(w+z-x-y)=0 \Rightarrow w+z=x+y$$

$$\begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}=\frac12\cdot(\bar w+\bar x+\bar y+\bar z)=0 \Rightarrow \overline{w+x+y+z}=0\ \checkmark$$

$$\begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}=\frac12(\bar y+\bar z-\bar w-\bar x)=0 \quad \overline{y+z}=\overline{x+w}\ \checkmark$$

$$\begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\-\frac12\\\frac12\end{pmatrix}=\frac12(\bar w+\bar z-\bar x-\bar y)=0 \Rightarrow \overline{w+z}=\overline{x+y}\ \checkmark$$

$\Rightarrow |w|^2+|x|^2+|y|^2+|z|^2=1$

$w+x+y+z=0 \qquad y+z=w+x \qquad w+z=x+y$

$y+z=w+x \Leftrightarrow x=y+z-w \qquad w+z=x+y=y+z-w+y \Leftrightarrow 2w=2y \Leftrightarrow w=y$

$y+z=\underline{w}+x=y+x \Leftrightarrow x=z \qquad w+x+\underline{y}+\underline{z}=2w+2x=0 \Leftrightarrow x=-w$

$|\underline{w}|^2+|x|^2+|\underline{y}|^2+|\underline{z}|^2=1 \Leftrightarrow 4|x|^2=1 \Leftrightarrow |x|^2=\frac14 \Leftrightarrow |x|=\frac12$

$\Rightarrow w=-x=y=-z \ \wedge\ |w|=\frac12 \Rightarrow w=\frac12\cdot(\cos(\vartheta)+i\sin(\vartheta))$

Sei $\vartheta\in\mathbb{R}$ bel. $\quad w:=\frac12(\cos(\vartheta)+i\sin(\vartheta))$

$$B^T=\frac12\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&-1&1&1\\1&-1&-1&1\\w&-w&w&-w\end{pmatrix}\qquad B^{-1}=\frac12\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&-1&1&1\\1&-1&-1&1\\\bar w&-\bar w&\bar w&-\bar w\end{pmatrix}$$

LINAG Ü14

12.3.1. $(\mathbb{R}^{3\times 1}, \iota)$ ... pseudoeuklidisch $\iota(E,E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$f \in L(\mathbb{R}^{3\times 1}, \mathbb{R}^{3\times 1})$ $\quad \langle E^*, f(E)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

ges: $\langle E^*, \hat{f}(E)\rangle$

$\iota(E,E)$ ist die zu E reziproke Basis, da $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ 1, & \text{falls } i = j \end{cases}$

Nach A 12.1.4. gilt

$$\langle E^*, \hat{f}(E)\rangle = \iota(E,E)^{-1} \cdot \langle E^*, f(E)\rangle^T \cdot \iota(E,E)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \iota(E,E) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -1 \cdot \langle E^*, f(E)\rangle$$

Ist f normal?

$\forall x \in \mathbb{R}^{3\times 1}: \hat{f}(x) = -f(x)$, da $\hat{f}(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3) = x_1 \cdot \hat{f}(e_1) + x_2 \cdot \hat{f}(e_2) + x_3 \cdot \hat{f}(e_3)$

$= -x_1 f(e_1) - x_2 \cdot f(e_2) - x_3 \cdot f(e_3) = -f(x)$

$\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^{3\times 1}: \quad \hat{f}(x) \cdot \hat{f}(y) = (-f(x)) \cdot (-f(y)) = (-1)(-1) \cdot f(x) \cdot f(y) = f(x) \cdot f(y)$

$\Rightarrow f$ ist normal

$(f \circ \hat{f})(x) = f(\hat{f}(x)) = f(-f(x)) = -f(f(x))$

$(\hat{f} \circ f)(x) = \hat{f}(f(x)) = -f(f(x))$