MAS Üg

7.) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ $\quad \mu(A) = \sum_{w\in A} \frac{1}{2^w}$

a) Was muss (f_n) erfüllen, damit sie fast überall konvergiert?

[Def: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt fast überall konvergent gegen f, wenn
$\exists A : \mu(A) = 0 \ \wedge\ f_n(A^c)$ .. konvergiert punktweise gegen f

$\mu(\emptyset) = 0$ (leere Summe) $\quad A := \emptyset \quad A^c = \mathbb{N}$

$\Rightarrow (f_n)$ muss auf $\mathbb{N}$ punktweise konvergieren

b) Was muss (f_n) erfüllen, damit sie fast gleichmäßig konvergiert?

[Def: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt fast gleichmäßig konvergent, wenn
$\forall \varepsilon > 0\ \exists A$ mit $\mu(A) < \varepsilon : f_n(A^c)$ ist gleichmäßig konvergent

Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\quad A := \emptyset \quad \mu(A) = 0 < \varepsilon \quad A^c = \mathbb{N}$

$\Rightarrow (f_n)$ muss auf $\mathbb{N}$ gleichmäßig konvergieren

c) Was muss (f_n) erfüllen, damit sie im Maß konvergiert?

[Def: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent im Maß gegen f, falls
$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$

Sei w bel. Wähle δ, sodass $0 < \delta < 2^{-w}$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \delta$

$\Rightarrow \forall n \geq N : \ w \notin \{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$

$\Rightarrow \forall n \geq N : \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (f_n)$ muss gegen f punktweise konvergieren