

MAS 06

4.) $\mathcal{C} \dots$ Mengensystem $\emptyset \in \mathcal{C}$ $f: \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$ $f(\emptyset) = 0$

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} f(B_n) : B_n \in \mathcal{C}, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right\}$$

zz: μ^* ist eine äußere Maßfunktion

1.) $\mu^*(\emptyset) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} f(B_n) : B_n \in \mathcal{C}, \emptyset \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right\} = 0 \quad (B_n = \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N})$

2.) $\mu^*(A) \geq 0$ klar, da $f(A) \geq 0$

3.) $A \subseteq B \quad \mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} f(B_n) : B_n \in \mathcal{C}, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right\}$
 $\leq \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} f(B_n) : B_n \in \mathcal{C}, B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right\} = \mu^*(B)$

4.) $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

$$\exists E_{nk} \in \mathcal{C} : \sum_{k \in \mathbb{N}} f(E_{nk}) \leq \mu^*(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad B_n \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{nk} \quad (\text{wie S. 31/S. 32})$$

$$A \subseteq \bigcup_{n, k \in \mathbb{N}} E_{nk} \quad \mu^*(A) \leq \sum_{n, k \in \mathbb{N}} f(E_{nk}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\mu^*(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(B_n) + \varepsilon$$

Da ε beliebig gewählt war folgt $\mu^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(B_n)$