ANA Ü10

8.) $f \in C^1 \qquad \gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} f(t) \cdot \cos(t) \\ f(t) \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

ges: $l(\gamma)$

Da $f \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$ und sin und cos $\in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$ ist auch $\gamma \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$.

Aus Satz 11.1.8. folgt nun

$$l(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\| \begin{pmatrix} f'(t) \cdot \cos(t) - f(t) \cdot \sin(t) \\ f'(t) \cdot \sin(t) + f(t) \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \right\|_2 dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(f'(t) \cdot \cos(t) - f(t) \cdot \sin(t))^2 + (f'(t) \cdot \sin(t) + f(t) \cdot \cos(t))^2} \, dt$$

$$(f'(t) \cdot \cos(t) - f(t) \cdot \sin(t))^2 + (f'(t) \cdot \sin(t) + f(t) \cdot \cos(t))^2$$

$$= (f'(t))^2 \cdot \cos^2(t) - 2 f'(t) \cdot \cos(t) \cdot f(t) \cdot \sin(t) + (f(t))^2 \cdot \sin^2(t) + (f'(t))^2 \sin^2(t) + 2 f'(t) \sin(t) \cdot f(t) \cdot \cos(t) + (f(t))^2 \cdot \cos^2(t)$$

$$= (f'(t))^2 \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t)) + (f(t))^2 \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t))$$

$$= (f'(t))^2 + (f(t))^2$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(f'(t))^2 + (f(t))^2} \, dt$$

ges: Bogenlänge für Archimedische Spirale $(f(t) = t)$

$$f'(t) = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1^2 + t^2} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t^2 + 1} \, dt$$

$$\int \sqrt{t^2+1} \, dt = \int \sqrt{(\tan(u))^2 + 1} \cdot (t^2+1) du \quad \left[t = \tan(u),\ u = \arctan(t),\ \frac{du}{dt} = \frac{1}{t^2+1},\ dt = (t^2+1) du \right.$$

$$\left[\tan^2(t) + 1 = \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} + \sin^2(t) + \cos^2(t) = \frac{\sin^2(t) + \sin^2(t) \cdot \cos^2(t) + \cos^4(t)}{\cos^2(t)} = \frac{1}{\cos^2(t)} \right.$$

$$= \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2(u)}} \cdot (\tan^2(u) + 1) \, du = \int \frac{1}{\cos(u)} \cdot \frac{1}{\cos^2(u)} \, du = \int \frac{1}{\cos^3(u)} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \left(\tan(u) \cdot \sec(u) - \ln\left(\cos\left(\frac{u}{2}\right) - \sin\left(\frac{u}{2}\right)\right) + \ln\left(\sin\left(\frac{u}{2} + \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{t^2+1} \, t + \operatorname{areasinh}(t) \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t^2+1} \, dt = \frac{1}{8} \left(\pi \sqrt{4 + \pi^2} + 4 \operatorname{areasinh}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \approx 2{,}0792$$