7.

$\Omega \neq \emptyset$ $\quad \mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega : |A| < \infty \lor |A^c| < \infty\}$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } |A| < \infty \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

zz: μ ist Inhalt

·) $\mu(\emptyset) = 0$ folgt aus Definition

·) Sei $A \in \mathcal{A}$ bel. $\mu(A) \geq 0$ folgt aus Definition

·) Sei $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt bel.

zz: $\mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_n) = \mu(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i)$

1. Fall $\forall i \in \{1, \dots, n\}: |A_i| < \infty$ trivial

2. Fall $\exists! i \in \{1, \dots, n\}: |A_i^c| < \infty$ trivial

$\mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_i) + \dots + \mu(A_n)$

$0 + 0 + \dots + 1 + \dots 0 = 1$ $\quad \mu(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i) = 1$

3. Fall $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j : |A_i^c| < \infty, |A_j^c| < \infty$

o.B.d.A $\neg(|A_i| < \infty \lor |A_j| < \infty)$

Da A_i und A_j disjunkt, muss $A_i \cap A_j = \emptyset$

$\Rightarrow A_i \subseteq A_j^c$, da $|A_j^c| < \infty \Rightarrow A_i$ endlich $\lightning$

$\Rightarrow$ dieser Fall kann nicht eintreten

Wann ist μ ein Maß?

Falls $|\Omega| < \infty$ ist μ trivialerweise auch ein Maß.

Falls "$|\Omega| = \infty$":

$\mu(\Omega) = 1$ $\quad \mu(\dot{\bigcup}_{x \in \Omega} \{x\}) = \sum_{x \in \Omega} \mu(\{x\}) = \sum_{x \in \Omega} 0 = 0$ $\lightning$