MAS Ü12

4.) X_n... Augenzahl beim n-ten Wurf mit fairem Würfel

ges: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen gilt

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \overline{X}_n = m$... Erwartungswert

$= 3{,}5$

ges: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)\right)$$

$$\mathbb{E}(\ln(X_i)) = \sum_{x} x \cdot \mathbb{P}(\ln(X_i) = x) = \sum_{i=1}^{6} \ln(i) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \ln(6!) = \ln\left(\sqrt[6]{6!}\right)$$

$$\exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)\right) = \exp\left(\ln\left(\sqrt[6]{6!}\right)\right) = \sqrt[6]{6!} \approx 2{,}9938$$

MAS Ü12

2.) X ... standardnormalverteilt

a) $t \in \mathbb{R}$ ges: $\mathbb{E}(e^{tX})$

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}t^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}t)^2}\,dx$$

$$\left[\begin{aligned} tx - \frac{x^2}{2} &= -\left(\frac{1}{2}x^2 - tx + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^2\right) \\ &= -\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)^2 - \frac{1}{2}t^2\right) \\ &= \frac{1}{2}t^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)^2 \end{aligned}\right.$$

$$u = \frac{x-t}{\sqrt{2}} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad dx = \sqrt{2}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}t^2 - u^2} \sqrt{2}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}t^2 - u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot e^{-u^2}\,du\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot \sqrt{\pi} = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

b) ges: obere Schranke für $P(X \geq x)$ $(x > 0)$

Nach Markov-Ungleichung:

$$P(X \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{c}$$

$$P(e^{tX} \geq e^{tc}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{tc}} = \frac{e^{\frac{1}{2}t^2}}{e^{tc}}$$

ges: kleinste Schranke

$$f(t) = \frac{e^{\frac{1}{2}t^2}}{e^{tc}} = e^{\frac{1}{2}t^2 - tc}$$

$$f'(t) = (t-c) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}t^2 - tc}}_{\text{für kein } t \in \mathbb{R} \text{ wird das Null}} \Rightarrow f'(t) = 0 \iff t = c$$

MAS Ü12

1) (X_n)... Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n=1)=\mathbb{P}(X_n=-1)=\frac{1}{2}$

(a_n)... Folge von reellen Zahlen

zz: $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X_n$ konvergiert fast sicher $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ konvergiert

Nach dem Dreireihensatz gilt:

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X_n$ konvergiert fast sicher $\Leftrightarrow \exists \forall \varepsilon>0$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|a_n X_n|>\varepsilon)$ konvergiert

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(a_n X_n [a_n X_n \le \varepsilon])$ konvergiert

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(a_n X_n [a_n X_n \le \varepsilon])$ konvergiert

$\mathbb{E}(a_n X_n) = \mathbb{P}(X_n=1)\cdot a_n + \mathbb{P}(X_n=-1)\cdot(-a_n)$

$= \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a_n = 0$

$\mathbb{V}(a_n X_n) = \mathbb{E}((a_n X_n - \mathbb{E}(a_n X_n))^2) = \mathbb{E}((a_n X_n)^2) = \mathbb{P}(X_n=1)\cdot a_n^2 + \mathbb{P}(X_n=-1)\cdot(-a_n)^2$

$= \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}a_n^2 = a_n^2$

($\Rightarrow$) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X_n$ konvergiert f.s. $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(a_n X_n [a_n X_n \le \varepsilon])$ konvergiert

$\Rightarrow$ für $\varepsilon < \min_{n\in\mathbb{N}}(|a_n|)$ folgt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(a_n X_n)$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ konvergiert

($\Leftarrow$) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(a_n X_n)$ konvergiert

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(a_n X_n [a_n X_n \le \varepsilon])$ konvergiert

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(a_n X_n [a_n X_n \le \varepsilon])$ konvergiert, da $\mathbb{E}(a_n X_n)=0$

$\mathbb{P}(|a_n X_n - \underbrace{\mathbb{E}(a_n X_n)}_{=0}| \ge \varepsilon) \le \frac{\mathbb{V}(a_n X_n)}{\varepsilon^2}$

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|a_n X_n|>\varepsilon) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{V}(a_n X_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$

Da $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ konvergiert muss also auch $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|a_n X_n|>\varepsilon)$ konvergieren

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X_n$ konvergiert fast sicher