LINAG Ü9

8.8.2. $\mathbb{R}^{6\times1}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{6\times1}$ $\quad U \ldots$ UR von $\mathbb{R}^{6\times1}_{\mathbb{C}}$ $\quad \overline{U} = \overline{(id)}_{\mathbb{C}}(U)$

$\dim U = 3$: $\Rightarrow \dim \overline{U} = 3$ $\qquad$ Dimensionssatz: $\dim(U \cap \overline{U}) + \dim(U + \overline{U}) = \dim U + \dim \overline{U}$

- $\dim(U \cap \overline{U}) = 0 \quad \Rightarrow \dim(U + \overline{U}) = 6$

  Also sind U und $\overline{U}$ nicht reell (da $U \neq \overline{U}$) und $\overline{U}$ ist ein Komplementärraum von U (da $U \oplus \overline{U} = \mathbb{C}^{6\times1}$). Außerdem ist $U \cap \mathbb{R}^{6\times1} = \{0\} = \overline{U} \cap \mathbb{R}^{6\times1}$, da

  für $a \in U \cap \mathbb{R}^{6\times1}$, $\overline{(id)}_{\mathbb{C}}(a + i0) = a - i0 = a$ und somit $a \in U \cap \overline{U} \Rightarrow a = 0$

  Bsp: $U = [\{\begin{pmatrix}2+i3\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5+i7\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\11+i13\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}]_{\mathbb{C}}$ $\qquad \overline{U} = [\{\begin{pmatrix}2-i3\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5-i7\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\11-i13\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}]$

- $\dim(U \cap \overline{U}) = 1 \quad \Rightarrow \dim(U + \overline{U}) = 5$

  $U, \overline{U}$ nicht reell (da $U \neq \overline{U}$) $\qquad \dim(U \cap \mathbb{R}^{6\times1}) = 1 = \dim(\overline{U} \cap \mathbb{R}^{6\times1})$

  Für $x \in U \cap \mathbb{R}^{6\times1}$ gilt $\overline{(id)}_{\mathbb{C}}(x) = x - i0 = x$

  Bsp: $U = [\{\begin{pmatrix}2+i3\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5+i7\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\11\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}]_{\mathbb{C}}$ $\qquad \overline{U} = [\{\begin{pmatrix}2-i3\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5-i7\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\11\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}]_{\mathbb{C}}$

- $\dim(U \cap \overline{U}) = 2 \quad \Rightarrow \dim(U + \overline{U}) = 4$

  $U, \overline{U}$ nicht reell $\quad \dim(U \cap \mathbb{R}^{6\times1}) = 2 = \dim(\overline{U} \cap \mathbb{R}^{6\times1})$

  Bsp: $U = [\{\begin{pmatrix}2+i3\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\11\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}]_{\mathbb{C}}$ $\qquad \overline{U} = [\{\begin{pmatrix}2-i3\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\11\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}]_{\mathbb{C}}$

- $\dim(U \cap \overline{U}) = 3 \Rightarrow \dim(U + \overline{U}) = 3$

  $U, \overline{U}$ sind reell, da $U = \overline{U}$ $\qquad U = \mathbb{R}^{6\times1} \cap U$

  Bsp: $U = [\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\11\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}]_{\mathbb{C}}$ $\qquad \overline{U} = [\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\11\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}]_{\mathbb{C}}$

...

LINAG Ü9

8.8.2. ... $\dim U = 4 \Rightarrow \dim \bar{U} = 4$

- $\dim(U \cap \bar{U}) = 0 \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 8$ ↯ $\dim(U+\bar{U}) \leq 6$
- $\dim(U \cap \bar{U}) = 1 \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 7$ ↯
- $\dim(U \cap \bar{U}) = 2 \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 6$

  $U, \bar{U}$ sind nicht reell $\quad \mathbb{R}^{6\times 1} \cap U = \mathbb{R}^{6\times 1} \cap \bar{U}$ mit $\dim(\;) = 2$

  Bsp: $U = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2+i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5+i7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}} \quad \bar{U} = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2-i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5-i7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}}$

- $\dim(U \cap \bar{U}) = 3 \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 5$

  $U, \bar{U}$ nicht reell $\quad \mathbb{R}^{6\times 1} \cap U = \mathbb{R}^{6\times 1} \cap \bar{U}$ mit $\dim(\;) = 3$

  Bsp: $U = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2+i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}} \quad \bar{U} = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2-i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}}$

- $\dim(U \cap \bar{U}) = 4 \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 4$

  $U, \bar{U}$ sind reell mit $U = \bar{U} \quad \mathbb{R}^{6\times 1} \cap U = U$

  Bsp: $U = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}} \quad \bar{U} = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}}$

- $\dim(U \cap \bar{U}) \geq 5$ ↯ $\dim(U \cap \bar{U}) \leq \dim(U)$