LINAG Ü9

8.9.10 $V \ldots VR/\mathbb{R}$ $B = (b_1, b_2) \ldots$ Basis von V $f \in L(V,V)$

$\langle B^*, f(B)\rangle = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $b > 0$

a) ges: alle Basen $C = (c_1, c_2)$ von $V_{\mathbb{C}}$ mit $\langle C^*, f_{\mathbb{C}}(C)\rangle$ ist J-NF

$\chi_f(X) = \chi_{f_{\mathbb{C}}}(X) = (a-X)^2 + b^2$ hat Nullstellen $a+ib$ und $a-ib$ (=Eigenwerte)

Wie in 8.9.3. ist $\langle C^*, B\rangle = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ eine Transformationsmatrix zwischen B und einer Basis des $V_{\mathbb{C}}$ mit $\langle C^*, f_{\mathbb{C}}(C)\rangle = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$

$\Rightarrow c_1 = i(b_2 - b_1)$ $c_2 = b_1 + b_2$ sind Eigenvektoren von $f_{\mathbb{C}}$

Auch alle komplexen Vielfachen sind EV und es gilt somit

$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\langle z\cdot C^*, f(z\cdot C)\rangle = \begin{pmatrix} z\cdot(a+ib) & 0 \\ 0 & z\cdot(a-ib) \end{pmatrix}$ wobei $z\cdot C := (z\cdot c_1, z\cdot c_2)$

Zusätzlich kann die Reihenfolge der Diagonaleinträge in der J-NF umgedreht werden (d.h. $\langle C^*, f_{\mathbb{C}}(C)\rangle = \begin{pmatrix} a-ib & 0 \\ 0 & a+ib \end{pmatrix}$).

Dann sieht die Transformationsmatrix so aus: $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow c_1 = b_1 + b_2$ $c_2 = i(b_2 - b_1)$ (wie zu erwarten)

Also haben alle Basen C mit $\langle C^*, f_{\mathbb{C}}(C)\rangle = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$ die Form

$(z\cdot c_1, z\cdot c_2)$ oder $(z\cdot c_2, z\cdot c_1)$

Alle anderen Basen bestehen nicht nur aus EV und haben somit nicht die gewünschte J-NF.

b) ges: alle Basen $D = (d_1, d_2)$ von V mit $\langle D^*, f(D)\rangle$ ist reelle J-NF

Jede in a) gefundene Basis lässt sich durch die Transformationsmatrix $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ in eine Basis D mit $\langle D^*, f(D)\rangle = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ umwandeln.

$\langle D^*, C\rangle \cdot \langle C^*, B\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -iz & z \\ iz & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$

bzw.

$\langle D^*, C\rangle \cdot \langle C^*, B\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z & -iz \\ z & iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow d_1 = z\cdot b_1$ $d_2 = z\cdot b_2$ für $z \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$