LINAG Ü11

9.8.2 α)

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\2&0&1&1\\1&2&0&1\\2&2&2&0\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3^{4\times4}$$

ges: $B\in\mathbb{Z}_3^{4\times4}$ zu A kongruente Matrix in Normalform

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$$\left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&1&2&1\\2&0&1&1\\1&2&0&1\\2&2&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{S}\overset{\cdot 2}{\left(\begin{array}{cccc}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&1&2&1\\1&0&1&1\\2&2&0&1\\1&2&2&0\end{array}\right)}\xrightarrow{Z}\left(\begin{array}{cccc}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&1&2\\1&0&1&1\\2&2&0&1\\1&2&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{S}\overset{+\mathrm{II}}{\left(\begin{array}{cccc}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&2\\1&0&1&1\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{array}\right)}$$

$$\xrightarrow{Z}\left(\begin{array}{cccc}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&2\\1&0&1&1\\0&2&0&2\\1&2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{S}\overset{+2\cdot\mathrm{I}}{\left(\begin{array}{cccc}2&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&2\\1&0&0&1\\0&2&0&2\\1&2&0&0\end{array}\right)}\xrightarrow{Z}\left(\begin{array}{cccc}2&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&2\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\1&2&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{S}\overset{+2\cdot\mathrm{II}}{\left(\begin{array}{cccc}2&0&1&0\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\1&2&0&1\end{array}\right)}\xrightarrow{Z}\left(\begin{array}{cccc}2&0&1&0\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&2&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{S}\overset{+2\cdot\mathrm{I}}{\left(\begin{array}{cccc}2&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2&0&0\end{array}\right)}\xrightarrow{Z}\left(\begin{array}{cccc}2&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline0&2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\}=P\\[3em]\}=\mathrm{diag}(\square,0,0)\end{array}$$

$$P^T=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\\1&2&0&1\end{pmatrix}$$

$$P^T A P=\mathrm{diag}(\square,0,0)$$

Probe:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix}0&1&2&1\\2&0&1&1\\1&2&0&1\\2&2&2&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\\1&2&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&2&1&2\\2&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$