ANA Ü7

1.) $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$

ges: $\|D\|_2$, $\|D\|_\infty$ $\qquad I := (1,2,\dots,n)^2$

$$\|D\|_2 = \sqrt{\sum_{j,k \in I} |D_{jk}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2} = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2}$$

$$\|D\|_\infty = \max_{j,k \in I} (|D_{jk}|) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

$D \in L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ $\qquad$ ges: $\|D\|$

$$\|D\| = \sup\left\{\frac{\|Dx\|_2}{\|x\|_2} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\} \left(= \sup\{\|Dx\|_2 : \|x\|_2 \leq 1\}\right)$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bel.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$D(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x_1 \\ \lambda_2 \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \cdot x_n \end{pmatrix} \qquad \|Dx\|_2 = \sqrt{(\lambda_1 \cdot x_1)^2 + (\lambda_2 \cdot x_2)^2 + \dots + (\lambda_n \cdot x_n)^2}$

$$= \sqrt{\lambda_1^2 \cdot x_1^2 + \lambda_2^2 \cdot x_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \cdot x_n^2}$$

$$\leq \sqrt{(\|D\|_\infty)^2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} = \|D\|_\infty \cdot \|x\|_2$$

$$\Rightarrow \frac{\|Dx\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\|D\|_\infty \cdot \|x\|_2}{\|x\|_2} = \|D\|_\infty$$

$$\|Dx\|_2 = \sqrt{\lambda_1^2 \cdot x_1^2 + \lambda_2^2 \cdot x_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \cdot x_n^2} \leq \sqrt{(\|x\|_\infty)^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2)}$$

$$= \|x\|_\infty \cdot \|D\|_2$$

$$\frac{\|Dx\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\|D\|_2 \cdot \|x\|_\infty}{\|x\|_2} = \frac{\|D\|_2 \cdot k \cdot \|x\|_2}{\|x\|_2} = k \cdot \|D\|_2$$

$\|.\|_\infty$ und $\|.\|_2$ sind auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent