LINAG Ü15

8.8.3. $V \dots VR/\mathbb{C}$ $\quad B=(b_j)_{j\in J} \dots$ Basis von V

$[B]_{\mathbb{R}} := \{ \sum_{j\in J} x_j b_j : x_j \in \mathbb{R}$ für alle $j \in J \}$

a) zz: $[B]_{\mathbb{R}}$ ist (mit den Operationen aus $(V,\mathbb{C})$) ein VR über $\mathbb{R}$

- Abgeschlossenheit bzgl. $+$ ist klar
- $\forall x,y\in\mathbb{R}\ \forall a,b\in[B]_{\mathbb{R}}: x(a+b)=xa+xb \quad (x+y)a = xa+ya$ klar
- $\forall x,y\in\mathbb{R}\ \forall a\in[B]_{\mathbb{R}}: (x\cdot y)a = x\cdot(y\cdot a)$ klar $\quad 1\cdot a = a$ klar

B ist (offensichtlich) eine Basis von $[B]_{\mathbb{R}}$

b) ges: lineare Bijektion von $([B]_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ nach V

$([B]_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = ([B]_{\mathbb{R}} \times [B]_{\mathbb{R}}, \mathbb{C})$

$f: [B]_{\mathbb{R}} \times [B]_{\mathbb{R}} \to V$

$(x,y) \longmapsto x+iy$

linear: $(x,y)+(a,b) = (x+a, y+b)$

$f((x,y)+(a,b)) = x+a+i(y+b) = x+iy+a+ib = f((x,y))+f((a,b))$

$c\cdot(x,y) = (c\cdot x, c\cdot y)$

$f(c\cdot(x,y)) = c\cdot x + icy = c\cdot(x+iy) = c\cdot f((x,y))$

bijektiv: Behauptung $f^{-1}(v) = f^{-1}(\sum_{j\in J} x_j b_j) = (\sum_{j\in J} \mathrm{Re}(x_j) b_j, \sum_{j\in J} \mathrm{Im}(x_j) b_j)$

Sei $(x,y) \in ([B]_{\mathbb{R}} \times [B]_{\mathbb{R}})$ bel. $\quad x = \sum_{j\in J} x_j b_j \quad y = \sum_{j\in J} y_j b_j \quad x_j, y_j \in \mathbb{R}$

$f((x,y)) = x+iy = \sum_{j\in J} x_j b_j + i \sum_{j\in J} y_j b_j = \sum_{j\in J} (x_j + iy_j) b_j$

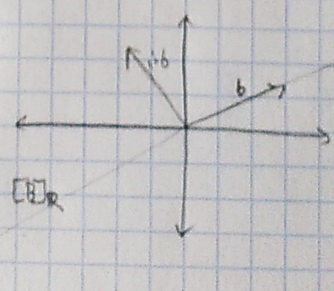
$f^{-1}(f((x,y))) = f^{-1}(\sum_{j\in J} (x_j+iy_j) b_j) = (\sum_{j\in J} x_j b_j, \sum_{j\in J} y_j b_j) = (x,y)$

$\Rightarrow f$ ist eine lineare Bijektion

c) $V = \mathbb{C}$ $\quad B = (z) \dots$ Basis von V $\quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$[B]_{\mathbb{R}} = \{x\cdot z : x \in \mathbb{R}\}$

durch f $\quad \underbrace{x\cdot z + i\cdot y\cdot z}_{\in V}$ mit $x,y\in\mathbb{R}$



LINAG Ü15

B.9.8. $\frac{d}{dx} \in L(C^\infty(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R}))$

(i) $\forall t \in \mathbb{R}: t$ ist EW von $\frac{d}{dx}$ mit Eigenraum $x \mapsto e^{tx}$

(ii) $\forall v = a+ib \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$: v ist EW der komplexen Fortsetzung von $\frac{d}{dx}$ mit ER $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $x \mapsto e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}\sin(bx)$

(iii) $x \mapsto e^{tx}$, $x \mapsto xe^{tx} \in \ker P(\frac{d}{dx}) = \ker f \mapsto f'' - 2tf' + t^2 f$ mit $t \in \mathbb{R}$

a) $U := \ker P(\frac{d}{dx})$ zz: U ist $\frac{d}{dx}$ - invariant (also $\forall f \in U: \frac{d}{dx} f \in U$)

Sei $f \in U$ bel. $f'' - 2tf' + t^2 f = 0$ (Nullfunktion)

$(f''' - 2tf'' + t^2 f')(x) = (f'' - 2tf' + t^2 f)'(x) = (0)'(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} f \in U$

b) zz: $x \mapsto e^{tx}$ $x \mapsto x \cdot e^{tx}$ sind l.u.

Angenommen l.a. $\exists c \in \mathbb{R}$ $c \cdot (\underbrace{x \mapsto e^{tx}}_{f}) = \underbrace{x \mapsto x \cdot e^{tx}}_{g}$

Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$ bel. $c \cdot f(y) = c \cdot e^{ty}$

$g(y) = y \cdot e^{ty}$, da $y \neq c \Rightarrow c \cdot f(y) \neq g(y)$ $\lightning$ zu $cf = g$

$\Rightarrow f, g$ l.u.

$T := [f, g]$

c) zz: $\forall f \in U$: $[\{f, f'\}]$ ... $\frac{d}{dx}$-invariant und in T enthalten

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ bel. $\frac{d}{dx}$ $a \cdot f'(x) + b \cdot f(x) = a \cdot f''(x) + b \cdot f'(x)$

$=$

LINAG 015

12.2.1. a) $f \in L(V,W)$ $\quad \forall x \in V: x \cdot x = f(x) \cdot f(x)$

(i) $w = id$ $\quad \operatorname{char} K \neq 2$

zz: $\forall x, y \in V: x \cdot y = f(x) \cdot f(y)$

$(x+y)\cdot(x+y) = f(x+y) \cdot f(x+y)$

$(x+y)\cdot(x+y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y = x \cdot x + 2 \cdot x \cdot y + y \cdot y$

$f(x+y)\cdot f(x+y) = f(x)\cdot f(x) + f(x)\cdot f(y) + f(y)\cdot f(x) + f(y) \cdot f(y)$

$= f(x)\cdot f(x) + 2 \cdot f(x) f(y) + f(y) \cdot f(y)$

$\Rightarrow x \cdot x + 2 \cdot x \cdot y + y \cdot y = \underbrace{f(x)\cdot f(x)}_{= x \cdot x} + 2 \cdot f(x) \cdot f(y) + \underbrace{f(y) \cdot f(y)}_{= y \cdot y}$

$\Rightarrow 2 \cdot x \cdot y = 2 \cdot f(x) \cdot f(y) \quad \Rightarrow x \cdot y = f(x) \cdot f(y)$

(ii) $K = \mathbb{C}$ $\quad w = \overline{}$

zz: $\forall x, y \in V: x \cdot y = f(x) \cdot f(y)$

$(x+y)\cdot(x+y) = f(x+y) \cdot f(x+y)$

$(x+y)\cdot(x+y) = x \cdot x + x \cdot y + \overline{x \cdot y} + y \cdot y = x \cdot x + 2 \operatorname{Re}(x \cdot y) + y \cdot y$

$f(x+y)\cdot f(x+y) = \underbrace{f(x)\cdot f(x)}_{x \cdot x} + f(x)\cdot f(y) + \overline{f(x) \cdot f(y)} + \underbrace{f(y) \cdot f(y)}_{y \cdot y} = x \cdot x + 2 \operatorname{Re}(f(x) \cdot f(y)) + y \cdot y$

$\Rightarrow$ (so wie oben) $\quad \operatorname{Re}(x \cdot y) = \operatorname{Re}(f(x) \cdot f(y))$

$(x+iy)(x+iy) = f(x+iy) \cdot f(x+iy) = x \cdot x + i f(x) \cdot f(y) - i f(y) f(x) + (-i) \cdot i \cdot y \cdot y$

$\parallel$

$x \cdot x + i x \cdot y - i y \cdot x - i \cdot i \cdot y \cdot y \qquad = x \cdot x + i(f(x) \cdot f(y) - \overline{f(x) f(y)}) + y \cdot y$

$\parallel$

$x \cdot x + i(x \cdot y - \overline{x \cdot y}) + y \cdot y \qquad = x \cdot x + i 2 \operatorname{Im}(f(x) \cdot f(y)) + y \cdot y$

$\parallel$

$x \cdot x + i 2 \operatorname{Im}(x \cdot y) + y \cdot y \qquad \Rightarrow \operatorname{Im}(x \cdot y) = \operatorname{Im}(f(x) \cdot f(y))$

$\Rightarrow x \cdot y = f(x) \cdot f(y)$

...

LINAG Ü15

12.2.1.6)... $f: V \to W$, ς-semilinear $\forall x, y \in V: x \cdot y = f(x) \cdot f(y)$

zz: f ... linear

Falls $V = \{0\}$ eh klar

Sonst $\exists x, y \in V: f(x) \cdot f(y) \neq 0$, da radikalfrei

Sei $k \in K$ bel.

$$k \cdot (f(x) \cdot f(y)) = k \cdot (x \cdot y) = x \cdot (k \cdot y) = f(x) \cdot f(k \cdot y) = f(x) \cdot (\varsigma(k) f(y))$$
$$= \varsigma(k) (f(x) \cdot f(y))$$

$\Rightarrow \forall k \in K: k = \varsigma(k) \rightarrow f$ ... linear