MAS ÜG

1.) R ... Ring μ, ν ... Maße auf R

a) zz: $(\mu+\nu)^* = \mu^* + \nu^*$

Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in R mit $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ bel.

$E_1 := B_1 \quad E_2 := B_2 \setminus B_1 \quad E_3 := B_3 \setminus (B_1 \cup B_2) \quad \dots$

$\Rightarrow A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n \left(= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \qquad \mu(E_i) \leq \mu(B_i) \ \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) : E_n \in R, A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n\}$

ist eine äquivalente Definition

$(\mu+\nu)^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu+\nu)(E_n) : E_n \in R, A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n\}$ wobei $(\mu+\nu)(A) = \mu(A) + \nu(A)$

$= \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) + \nu(E_n) : E_n \in R, A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n\} \geq \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) : E_n \in R, A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n\}$

$+ \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n) : E_n \in R, A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n\} = \mu^*(A) + \nu^*(A)$

$\underline{\Rightarrow (\mu+\nu)^*(A) \geq \mu^*(A) + \nu^*(A)}$

Sei $A_n \in R$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq A$ mit $\mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$.

Sei $B_n \in R$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n \supseteq A$ mit $\nu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(B_n) \leq \nu^*(B) + \varepsilon$

$\Rightarrow \sum_{n,m\in\mathbb{N}^2} A_n \cap B_m \supseteq A$

$\sum_{n,m\in\mathbb{N}^2} \mu(A_n \cap B_m) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \qquad \sum_{n,m\in\mathbb{N}^2} \nu(A_n \cap B_m) \leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \nu(B_m)$

$(\mu+\nu)^*(A) \leq \sum_{n,m\in\mathbb{N}^2} (\mu+\nu)(A_n \cap B_m) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(B_n) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) + 2\varepsilon$

$\underline{\Rightarrow (\mu+\nu)^*(A) \leq \mu^*(A) + \nu^*(A)}$

---

b) $M_{\mu^*} \cap M_{\nu^*} \subseteq M_{\mu^* + \nu^*} = M_{(\mu+\nu)^*}$

Sei $A \in M_{\mu^*} \cap M_{\nu^*}$ bel. Sei B mit $(\mu+\nu)^*(B) < \infty$ bel.

$(\mu+\nu)^*(B) = \mu^*(B) + \nu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) + \nu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$

$= (\mu+\nu)^*(B \cap A) + (\mu+\nu)^*(B \setminus A)$

$\Rightarrow A \in M_{\mu^* + \nu^*}$

...