

$$6.) \text{ZZ: } \sin(s) - \sin(t) = 2 \cos\left(\frac{s+t}{2}\right) \sin\left(\frac{s-t}{2}\right)$$

$$2 \cos\left(\frac{s+t}{2}\right) \sin\left(\frac{s-t}{2}\right) = 2 \frac{\exp(i \frac{s+t}{2}) + \exp(-i \frac{s+t}{2})}{2} \cdot \frac{\exp(i \frac{s-t}{2}) - \exp(-i \frac{s-t}{2})}{2i}$$

$$= \frac{\exp(i \frac{s+t}{2}) \cdot \exp(i \frac{s-t}{2}) - \exp(i \frac{s+t}{2}) \exp(-i \frac{s-t}{2}) + \exp(-i \frac{s+t}{2}) \exp(i \frac{s-t}{2}) - \exp(-i \frac{s+t}{2}) \exp(-i \frac{s-t}{2})}{2i}$$

$$= \frac{\exp(i \cdot \frac{s+t+s-t}{2}) - \exp(i \cdot \frac{s+t-s+t}{2}) + \exp(i \cdot \frac{-s-t+s-t}{2}) - \exp(-i \cdot \frac{s+t+s-t}{2})}{2i}$$

$$= \frac{\exp(is) - \exp(it) + \exp(-it) - \exp(-is)}{2i}$$

$$= \frac{\exp(is) - \exp(-is)}{2i} - \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i} = \sin(s) - \sin(t)$$

ZZ: $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ streng monoton wachsend

Sei $a, b \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit $a < b$ bel.

$$\sin(b) - \sin(a) = 2 \cdot \cos\left(\frac{b+a}{2}\right) \sin\left(\frac{b-a}{2}\right), \text{ da } \left|\frac{b+a}{2}\right| < \frac{\pi}{2} \text{ und das kleinste}$$

Nullstelle von \cos und $0 < \frac{b-a}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ und \sin dort > 0

$$\Rightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{b+a}{2}\right) \sin\left(\frac{b-a}{2}\right) > 0$$

ANALY

6.) ... zz: $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$... bijektiv

Da streng monoton wachsend folgt injektiv

Da stetig folgt $\sin(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist ein Intervall, da streng monoton wachsend und $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ folgt

$$\sin(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = [-1, 1] \Rightarrow \text{surjektiv} \\ \Rightarrow \text{bijektiv}$$

