ANA Ü10

4.) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

zz: γ ... stetig und stückweise stetig differenzierbar $\Longleftrightarrow \exists (s_i)_{i\in\{0,\dots,m\}}$ Zerlegung von $[a,b]$ mit

$$\gamma|_{[s_{j-1},s_j]} \in C^1[s_{j-1},s_j] \quad \forall j=\{1,\dots,m\}$$

$\Rightarrow$

Def stückweise stetig diffbar: $\exists (s_i)_{i\in\{0,\dots,m\}}$ Zerlegung von $[a,b]$ mit

$\gamma|_{(s_{j-1},s_j)}$ besitzt stetig diffbare Fortsetzung auf $[s_{j-1},s_j]$

Sei $(s_i)_{i\in\{0,\dots,m\}}$ diese Zerlegung von γ. Sei $i\in\{1,\dots,m\}$ bel.

$\gamma|_{(s_{j-1},s_j)}$ besitzt eine stetig diffbare Fortsetzung auf $[s_{j-1},s_j]$

Da γ stetig ist, ist $\lim\limits_{x\to s_{j-1}^+} \gamma(x) = \gamma(s_{j-1})$ und $\lim\limits_{x\to s_j^-} \gamma(x) = \gamma(s_j)$

$\Rightarrow$ die stetig diffbare Fortsetzung ist $\gamma|_{[s_{j-1},s_j]}$

$\Rightarrow \forall i\in\{1,\dots,m\}: \gamma|_{[s_{j-1},s_j]} \in C^1[s_{j-1},s_j]$

$\Leftarrow$

Sei $(s_i)_{i\in\{0,\dots,m\}}$ die Zerlegung wie auf der rechten Seite

$\Rightarrow \forall i\in\{1,\dots,m\}: \gamma|_{(s_{j-1},s_j)}$ besitzt eine stetig diffbare Fortsetzung auf $[s_{j-1},s_j]$

nämlich $\gamma|_{[s_{j-1},s_j]}$ $\Rightarrow \gamma$ ist stückweise stetig diffbar

γ ist in jedem Intervall (s_{j-1},s_j) stetig (da aus $C^1[s_{j-1},s_j]$)

Sei $i\in\{1,\dots,m-1\}$ bel. $\lim\limits_{x\to s_i^-} \gamma(x) = \gamma(s_i)$ da $\gamma|_{[s_{j-1},s_j]} \in C^1[s_{j-1},s_j]$

und $\lim\limits_{x\to s_i^+} \gamma(x) = \gamma(s_i)$ da $\gamma|_{[s_j,s_{j+1}]} \in C^1[s_j,s_{j+1}]$

$\Rightarrow \gamma$ ist bei s_i stetig

Für $i\in\{0,m\}$ gleich nur mit jeweils einer der beiden Limiten.

$\Rightarrow \gamma$ ist auf ganz $[a,b]$ stetig

$\square$