MAS Ü5

2.) Ω_1, Ω_2 .. Mengen mit $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$

S_1 .. Sigmaalgebra über Ω_1 S_2 ... Sigmalgebra über Ω_2

$S = \{ A_1 \cup A_2 : A_1 \in S_1 , A_2 \in S_2 \}$

zz: S ist Sigmalgebra über $\Omega_1 \cup \Omega_2 =: \Omega$

•) $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \in S$

•) Sei $A, B \in S$ bel. $A \setminus B = (A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) = (A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2)^c$

$= (A_1 \cup A_2) \cap B_1^c \cap B_2^c = (\underline{A_1} \cap B_1^c \cap \underline{B_2}^c) \cup (\underline{A_2} \cap \underline{B_1}^c \cap B_2^c) = (A_1 \cap B_1^c) \cup (A_2 \cap B_2^c)$

$= (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2) \in S$

•) Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S$ bel. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n1} \cup A_{n2} = \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n1}}_{\in S_1} \cup \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n2}}_{\in S_2} \in S$

MAS Ü5

4.) S... Sigmaalgebra μ, ν... endliche Maße auf S

$D = \{A \in S : \mu(A) = \nu(A)\}$

zz: D... Dynkin-System (im weiteren Sinn)

Sei $A, B \in D$ mit $B \subseteq A$ bel. $\Rightarrow A, B \in S \Rightarrow A \setminus B \in S$

$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) = \nu(A) - \nu(B) = \nu(A \setminus B) \Rightarrow A \setminus B \in D$

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D, paarweise disjunkt bel.

$\mu(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) = \nu(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n) \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \in D$

$\Rightarrow$ D ist ein Dynkin-System (im weiteren Sinn)

zz: μ, ν... Wahrscheinlichkeitsmaße $\Rightarrow$ D... Dynkin-System im engeren Sinn

Da μ und ν auch "normale" Maße sind ist D ein Dynkin-System im weiteren Sinn.

Da $\Omega \in S$ (da Sigmaalgebra) und $\mu(\Omega) = 1 = \nu(\Omega)$ folgt, das auch $\Omega \in D$ und somit ist D ein Dynkin-System im engeren Sinn.

MAS Ü5

6.) Corona-Antikörpertest mit Sensitivität von 93,5% und Spezifität von 98,7%. Angenommen 2% der Bevölkerung haben Antikörper

a) Wahrscheinlichkeit, das eine zufällige Person positiv getestet wird.

$$0,02 \cdot 0,935 + 0,98 \cdot (1-0,987) = 0,03144 = 3,144\%$$

b) Wahrscheinlichkeit, das positive Test auch Antikörper bedeutet.

$$P(\text{Antikörper} \mid \text{Positiver Test}) = \frac{P(\text{Positiver Test} \mid \text{Antikörper}) \cdot P(\text{Antikörper})}{P(\text{Positiver Test})}$$

$$= \frac{0,935 \cdot 0,02}{0,03144} \approx 0,5948 = 59,48\%$$

c) Wahrscheinlichkeit, das negative Test auch keine Antikörper bedeutet

$$P(\neg \text{Antikörper} \mid \text{Negativer Test}) = \frac{P(\text{Negativer Test} \mid \neg \text{Antikörper}) \cdot P(\neg \text{Antikörper})}{P(\text{Negativer Test})}$$

$$= \frac{0,987 \cdot (1-0,02)}{(1-0,03144)} \approx 0,9987 = 99,87\%$$

7.) wie 6. nur mit 30% der Bevölkerung haben Antikörper.

a) $0,3 \cdot 0,935 + 0,7 \cdot (1-0,987) = 0,2896 = 28,96\%$

b) $\dfrac{0,935 \cdot 0,3}{0,2896} \approx 0,9686 = 96,86\%$

c) $\dfrac{0,987 \cdot (1-0,3)}{(1-0,2896)} \approx 0,9726 = 97,26\%$