

$$1) (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\text{zz: } ]-\infty, a[ \subseteq \liminf_{n \in \mathbb{N}} ]-\infty, a_n] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} ]-\infty, a_k]$$

$$\text{Sei } x \in ]-\infty, a[ \text{ bel. Sei } \varepsilon = \frac{a-x}{2}. \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N: x < a_n$$

$$\bigcap_{n \geq N} ]-\infty, a_n] = ]-\infty, a_N] \cap ]-\infty, a_{N+1}] \cap \dots = ]-\infty, \inf_{n \geq N} (a_n)] \ni x$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} ]-\infty, a_k]$$

$$\text{zz: } \liminf_{n \in \mathbb{N}} ]-\infty, a_n] \subseteq \limsup_{n \in \mathbb{N}} ]-\infty, a_n]$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} ]-\infty, a_k] \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} ]-\infty, a_k]$$

$$\text{Sei } x \text{ bel. } \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq n_0: x \in ]-\infty, a_{k_0}]$$

$$\text{Sei } n \in \mathbb{N} \text{ bel. Wähle } k = \max(n_0, n) \Rightarrow x \in ]-\infty, a_k]$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} ]-\infty, a_k]$$

$$\text{zz: } \forall n \in \mathbb{N} \exists k \geq n: x \in ]-\infty, a_k]$$

$$\text{zz: } \limsup_{n \in \mathbb{N}} ]-\infty, a_n] \subseteq ]-\infty, a]$$

$$\text{Sei } x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} ]-\infty, a_k] \text{ bel. d.h. } \forall n \in \mathbb{N} \exists k \geq n: x \in ]-\infty, a_k]$$

$$\text{Angenommen } x \notin ]-\infty, a] \Rightarrow a < x$$

$$\text{Sei } \varepsilon = \frac{x-a}{2} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\text{Für } N_0 \exists k \geq N_0: x \in ]-\infty, a_k], \text{ da } |a_k - a| < \frac{x-a}{2} \text{ kann } x \text{ nicht gleichzeitig } > a \text{ und in } ]-\infty, a_k] \text{ liegen. } \downarrow$$

$$\Rightarrow x \in ]-\infty, a]$$

