LINAG Ü2

7.4.8. $V \dots VR/K$ $\dim(V) = n \in \mathbb{N}^\times$ $\Delta: V^n \to K \dots$ nicht triviale Determinantenform

$(a_1, \dots, a_{n-1}) \in V^{n-1}$

a) $a^*: V \to K$ $U := [\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}]$

$x \mapsto \Delta(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x)$

zz: a^* ist eine Linearform und $U \subseteq \ker(a^*)$

-) Sei $x, y \in V$ bel. Sei $c \in K$ bel.

$a^*(x+y) = \Delta(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x+y) = \Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, x) + \Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, y)$

$= a^*(x) + a^*(y)$

$a^*(c \cdot x) = \Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, c \cdot x) = c \cdot \Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$

-) Sei $x \in U$ bel.

$a^*(x) = \Delta(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x) = 0$, da $x = a_i$ für ein $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

b) (1) $U \dots$ Hyperebene von V (2) $\dim(U) = n-1$

(3) $(a_1, \dots, a_{n-1})$ ist Basis von U (4) $(a_1, \dots, a_{n-1})$ ist l.u.

(5) $a^* \neq 0$ (6) $\ker(a^*) \neq V$

(7) $\dim(\ker(a^*)) \leq n-1$ (8) $\ker(a^*) = U$

zz: Äquivalenz der Aussagen (1) – (8)

(1) $\Leftrightarrow$ (2) laut Beobachtung auf Seite 100 (wegen Rangformel)

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Wenn ein von k Vektoren aufgespannter Vektorraum Dimension k hat sind die Vektoren l.u. (und ES sowieso).

(3) $\Leftrightarrow$ (4) ($\Rightarrow$) offensichtlich ($\Leftarrow$), da $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ ES sind

(5) $\Leftrightarrow$ (6) $a^* = 0 \Rightarrow \ker(a^*) = V$ und $\ker(a^*) = V \Rightarrow a^* = 0$ $\leftarrow$ (Kontrapositionen)

(6) $\Leftrightarrow$ (7) $\ker(a^*) = V \Rightarrow \dim(\ker(a^*)) = n > n-1$; $\dim(\ker(a^*)) > n-1 \Rightarrow \ker(a^*) = V$

(8) $\Rightarrow$ (5) Da $\dim(V) = n$ $\exists x \in V: x \notin U$ Dann gilt $a^*(x) \neq 0$

(4) $\Rightarrow$ (5) $\exists x \in V: x \notin U$ Da Δ nicht trivial ist $a^*(x) \neq 0$

(2) $\wedge$ (7) $\Rightarrow$ (8) $\ker(a^*) \neq U \overset{\text{wegen a)}}{\Rightarrow} U \subsetneq \ker(a^*) \Rightarrow \underset{\overset{\|}{n-1}}{\dim}(U) < \dim(\ker(a^*))$ (Kontraposition)

(5) $\Rightarrow$ (4) $a^* \neq 0 \Rightarrow \exists x \in V: a^*(x) \neq 0$ Falls $(a_1, \dots, a_{n-1})$ l.a. wären würde $a^*(x) = 0$