LINAG Ü13

11.2.7. b) α) $\mathbb{C}^{2\times 1}$ $\quad \iota$... unitäres Skalarprodukt $\quad E$... kanonische Basis

$\iota(E,E) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ $\quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ bel. $\quad a^* \in (\mathbb{C}^{2\times 1})^*$

$a^*(E) = (a_1, a_2)$ $\quad$ ges: Gradient $a \in \mathbb{C}^{2\times 1}$ von a^*

unitär ... positiv definit, hermitesch

Nach Satz 11.2.2. besitzt (da $\dim(\mathbb{C}^{2\times 1}) = 2 < \infty$) a^* genau einen Gradienten $a = \binom{b}{c}$ (mit $b, c \in \mathbb{C}$).

a... Gradient von $a^* \iff \forall x \in V: a^*(x) = a \cdot x$

$a^*(e_1) = a_1 \qquad a \cdot e_1 = (b \cdot e_1 + c \cdot e_2) \cdot e_1 = \bar{b} \cdot e_1 \cdot e_1 + \bar{c} \cdot e_2 \cdot e_1$

$= \bar{b} \cdot 1 + \bar{c} \cdot i$

$a^*(e_2) = a_2 \qquad a \cdot e_2 = (b \cdot e_1 + c \cdot e_2) \cdot e_2 = \bar{b}\, e_1 \cdot e_2 + \bar{c}\, e_2 \cdot e_2$

$= -\bar{b}\, i + \bar{c} \cdot 2$

$\Rightarrow a_1 = \bar{b} + i\bar{c} \qquad a_2 = -i\bar{b} + 2\bar{c}$

$\bar{b} = a_1 - i\bar{c} \qquad a_2 = -i(a_1 - i\bar{c}) + 2\bar{c} = -ia_1 - \bar{c} + 2\bar{c} = -ia_1 + \bar{c}$

$\bar{c} = a_2 + ia_1$

$\bar{b} = a_1 - i\,\overline{(a_2 + ia_1)} \qquad c = \overline{a_2 + ia_1}$

$\bar{b} = a_1 - i(a_2 + ia_1)$

$\bar{b} = a_1 - ia_2 + a_1 = 2a_1 - ia_2$

$b = \overline{2a_1 - ia_2} \qquad a = \overline{2a_1 - ia_2}\, e_1 + \overline{a_2 + ia_1}\, e_2$

Probe: Sei $x \in V$ bel. $x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2$

$a^*(x) = a^*(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2) = x_1 \cdot a^*(e_1) + x_2 \cdot a^*(e_2) = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2$

$a \cdot x = \iota(\overline{2a_1 - ia_2}\, e_1 + \overline{a_2 + ia_1}\, e_2, x) = (2a_1 - ia_2)\,\iota(e_1, x) + (a_2 + ia_1) \cdot \iota(e_2, x)$

$= (2a_1 - ia_2)(x_1 \cdot e_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_1 \cdot e_2) + (a_2 + ia_1) \cdot (x_1 \cdot e_2 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 \cdot e_2)$

$= (2a_1 - ia_2)(x_1 - ix_2) + (a_2 + ia_1)(ix_1 + 2x_2) =$

$= 2a_1x_1 - i2a_1x_2 - ia_2x_1 - a_2x_2 + ia_2x_1 + 2a_2x_2 - a_1x_1 + i2a_1x_2$

$= a_1x_1 + a_2x_2$