LINAG Ü7

8.6.5 K... Körper $n \in \mathbb{N}$

a) $\forall A \in GL_n(K)\ \exists P(X) \in K[X] : P(A) = A^{-1}$

$\chi_A(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i$ mit $\chi_A(A) = 0$ laut Cayley-Hamilton

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i + a_0 \cdot X^0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i + a_0 E$$

$$\Leftrightarrow -a_0 E = \sum_{i=1}^{\infty} a_i A^i \Leftrightarrow E = \sum_{i=1}^{\infty} -\frac{a_i}{a_0} A^i = A \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} -\frac{a_i}{a_0} A^{(i-1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} -\frac{a_{i+1}}{a_0} A^i$$

$$P(X) = \sum_{i=0}^{\infty} -\frac{a_{i+1}}{a_0} X^i \in K[X] \quad \text{mit } P(A) = A^{-1}$$

b) $A = J_2(1) \in GL_2(K)$ zz: $\nexists P(X) \in K[X] : P(A) = A^T$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_A(X) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{pmatrix} = (1-X)^2$

$\chi_{A^T}(X) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & 1-X \end{pmatrix} = (1-X)^2$

$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2 : A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ... EV von A

$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K^2 : A^T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ ... EV von A^T

$P(X) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ $P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i A^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}$ wenn $c = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$

$\chi_{P(A)}(X) = \det\begin{pmatrix} c-X & d \\ 0 & c-X \end{pmatrix} = (c-X)^2$

$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2 : P(A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c(x+y) \\ cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ... EV von $P(A)$

Da $P(A)$ und A^T verschiedene Eigenvektoren besitzen,

bzw. da $P(A) = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ existiert kein $P(X) \in K[X]$ mit

$P(A) = A^T$.