LINAG Ü3

5.2.7 $f \in \mathcal{G}\text{-}L(V,W)$ bel. zz: $\exists p: V \to V$ ... Projektion $\exists g \in \mathcal{G}\text{-}L(p(V),W)$:

g ... injektiv und $f(x) = g(p(x))$

$\exists U$ ... UR von V mit $\ker f \oplus U = V$ $\quad \forall x \in V\ \exists x_1 \in \ker f\ \exists x_2 \in U: x_1 + x_2 = x$

$p: V \to V$ ist eine Projektion. $\quad g = f|_{p(V)}$ ist semi-linear.

$x = x_1 + x_2 \longmapsto x_2$

•) zz: $\forall x \in V: f(x) = g(p(x))$

Sei $x \in V$ bel. $\exists x_1 \in \ker f\ \exists x_2 \in U: x_1 + x_2 = x$

$f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + f(x_2) = f(x_2)$

$g(p(x)) = g(p(x_1 + x_2)) = g(x_2) = f(x_2)$, da $g = f|_{p(V)}$

•) zz: g ist injektiv $\Leftrightarrow \ker g = \{0_V\}$

Sei $x \in p(V)$ mit $g(x) = 0_W$ bel. Da $x \in p(V) \Rightarrow (x = 0_V) \vee (x \notin \ker f)$

$\ker f \supseteq \ker g \quad \Rightarrow (x = 0_V) \vee (x \notin \ker g) \Rightarrow x = 0_V$

•) Eindeutigkeit

Bei gegebenem p ist g (offensichtlich) eindeutig. Allgemein ist p und g, aber nicht eindeutig, wie z.B. bei

$V = \mathbb{R}^{3\times1} \quad W = \mathbb{R}^{2\times1} \quad f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$p_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad p_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad p_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \quad g_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad g_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Dann ist p_1 eine Projektion und $f(x) = g_1(p_1(x))$ für alle $x \in V$.

$p_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0{,}5\end{pmatrix} \quad p_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad p_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad g_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad g_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

Auch p_2 ist eine Projektion und $f(x) = g_2(p_2(x))$ für alle $x \in V$.

$\Rightarrow$ p und g sind nicht eindeutig.