LINAG Ü6

8.2.9 $\quad V \ldots K$-Algebra

$D \in L(V,V)$ heißt Derivation, falls $\forall a,b \in V$: $D(a\cdot b) = D(a)\cdot b + a\cdot D(b)$.

$P(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i \in K[X] \qquad P'(X) := \sum_{i\in\mathbb{N}} (i+1) a_{i+1} X^i \in K[X]$

a)

$(aX^n)' = n\cdot a\cdot X^{n-1} \qquad \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right)' = \sum_{i\in\mathbb{N}} (a_i X^i)' = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i (X^i)'$

$\Rightarrow$ formale Ableitungsoperator ist linear

$(a\cdot X^n\cdot b\cdot X^m)' = (a\cdot b\cdot X^{n+m})' = a\cdot b\cdot (n+m)\cdot X^{n+m-1}$

$= a\cdot b\cdot n\cdot X^{n+m-1} + a\cdot b\cdot m\cdot X^{n+m-1} = a\cdot n\cdot X^{n-1}\cdot b\cdot X^m + a\cdot X^n\cdot b\cdot m\cdot X^{m-1}$

$= (a\cdot X^n)'\cdot(b\cdot X^m) + (a\cdot X^n)\cdot(b\cdot X^m)'$

$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right)\cdot\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j X^j\right) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}^2} a_i\cdot b_j\cdot X^{i+j}$

Wegen der Liniarität ist nun $\left(\sum_{i,j\in\mathbb{N}^2} a_i\cdot b_j\cdot X^i\cdot X^j\right)' = \sum_{i,j\in\mathbb{N}^2} (a_i\cdot X^i\cdot b_j\cdot X^j)'$

$= \sum_{i,j\in\mathbb{N}^2} (a_i X^i)'\cdot(b_j\cdot X^j) + (a_i X^i)\cdot(b_j X^j)' = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\right)'\cdot\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j X^j\right) + \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i\right)\cdot\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j X^j\right)'$

b) $\operatorname{char} K = 0 \qquad t\in K \qquad k\neq 0$

zz: $t\ldots k$-fache Nullstelle von $P(X) \Rightarrow t\ldots(k-1)$-fache Nullstelle von $P'(X)$

$\exists Q(X)\in K[X]: P(X) = Q(X)\cdot(X-t)^k$

Vollständige Induktion nach k

$k=1$: $\quad P'(X) = (Q(X)\cdot(X-t)^1)' = Q'(X)\cdot(X-t) + Q(X)\cdot(1)$

$P'(t) = Q'(t)\cdot(t-t) + Q(t) = Q(t) \neq 0$ (sonst wäre t eine $(k+1)$-fache Nullstelle)

$k+1$: $\quad P'(X) = Q'(X)\cdot(X-t)^{k+1} + Q(X)\cdot((X-t)^{k+1})'$

$= Q'(X)\cdot(X-t)^{k+1} + Q(X)\cdot((X-t)^{k\,\prime}\cdot(X-t) + (X-t)^k\cdot 1)$

$= Q'(X)\cdot(X-t)^{k+1} + Q(X)\cdot((X-t)^k)'\cdot(X-t) + Q(X)\cdot(X-t)^k$

$= (X-t)^k\cdot(Q'(X)\cdot(X-t) + Q(X)) + Q(X)\cdot((X-t)^k)'\cdot(X-t)$

...

LINAG Ü6

8.2.9. ...

$$(X-t)^k (Q'(X)\cdot(X-t)+Q(X)) + Q(X)\cdot((X-t)^k)'\cdot(X-t)$$

Nach Annahme hat $((X-t)^k)'$ eine $(k-1)$-fache Nullstelle bei t.

$$\Rightarrow \exists S(X) : ((X-t)^k)' = (X-t)^{k-1}\cdot S(X)$$

$$(X-t)^k (Q'(X)\cdot(X-t)+Q(X)) + Q(X)\cdot(X-t)^{k-1}\cdot S(X)\cdot(X-t)$$

$$= (X-t)^k\,(\,Q'(X)\cdot(X-t)+Q(X)+Q(X)\cdot S(X))$$

$\Rightarrow P'(X)$ hat eine k-fache Nullstelle bei t (kann keine $(k+1)$-fache Nullstelle sein, da sonst $Q(X)$ $(X-t)$ teilen müsste)

Falls $\operatorname{char} K \neq 0$ könnte die Summe in der Klammer 0 ergeben.

Bei $\operatorname{char} K = 0$ ist die Summe sicher nicht das Nullpolynom.