ANA Ü14

8.) $(X, \mathcal{J})$ ... Hausdorff-Raum

zz: $\forall x \in X: \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} U = \{x\}$

$\{x\} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} U$ ist klar, da nach Definition $\forall U \in \mathcal{U}(x): x \in U$

Angenommen $\exists y \neq x: \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} U = \{x, y\}$

$\Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x): x, y \in U$ $\lightning$ zu (T_2), da $\forall x, y$ mit $x \neq y$

$\exists T_1, T_2 \in \mathcal{U}(x): x \in T_1, y \in T_1, T_1 \cap T_2 = \emptyset$

zz: $\forall x \in X: \{x\} \subseteq X$ ist abgeschlossen

$\overline{\{x\}} = \bigcap \{A \subseteq X, A \text{...abgeschlossen}, A \supseteq \{x\}\}$

$= \bigcap \{O^c, O \in \mathcal{J}, x \in O^c\} = \bigcap \{O^c, O \in \mathcal{J}, x \notin O\}$

$\Rightarrow x \in \overline{\{x\}}$ Sei $y \in X \setminus \{x\}$ bel.

Aus (T_2) folgt $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{J}, x \in O_1, y \in O_2: O_1 \cap O_2 = \emptyset$

$\Rightarrow x \notin O_2 \Rightarrow y \in O_2 \in \{O \in \mathcal{J}, x \notin O\} \Rightarrow y \notin \bigcap \{O^c, O \in \mathcal{J}, x \notin O\}$

$\Rightarrow \overline{\{x\}} = \{x\}$ $\Rightarrow \{x\}$ ist abgeschlossen