8.) $f(x) = x^3 \cdot e^x$ ges: $f^{(1000)}(x)$

$$(x^3 \cdot e^x)^{(1000)} = \sum_{k=0}^{1000} \binom{1000}{k} (x^3)^{(k)} (e^x)^{(1000-k)} = \sum_{k=0}^{3} \binom{1000}{k} \cdot (x^3)^{(k)} \cdot e^x$$

$$= x^3 \cdot e^x + \binom{1000}{1} \cdot 3 \cdot x^2 \cdot e^x + \binom{1000}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot x \cdot e^x + \binom{1000}{3} \cdot 6 \cdot e^x$$

$$= x^3 \cdot e^x + 3000\, x^2 \cdot e^x + \binom{1000}{2} \cdot 6 \cdot x \cdot e^x + \binom{1000}{3} \cdot 6 \cdot e^x$$

$h(x) = \frac{1}{2+\exp(4ix)}$ ges: $h'(x)$

$$\left(\frac{1}{2+\exp(4ix)}\right)' = \frac{-(2+\exp(4ix))'}{(2+\exp(i4x))^2} = \frac{-4i \cdot \exp(4ix)}{(2+\exp(4ix))^2}$$

$g(x) = \exp(x^{999})$ ges: $g^{(1000)}(0)$

$$((\exp(x^{999})))'^{(999)} = (\exp(x^{999}) \cdot 999 \cdot x^{998})^{(999)} = 999 \cdot \sum_{k=0}^{999} \binom{999}{k} (\exp(x^{999}))^{(k)} (x^{998})^{(999-k)}$$

Behauptung: $(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k}$

vollständig Induktion nach k:

$k=1$: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} \cdot x^{n-1}$

$k+1$: $(x^n)^{(k+1)} = ((x^n)^{(k)})' = \left(\frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k}\right)' = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (n-k) \cdot x^{n-k-1}$

$$= \frac{n!(n-k)}{(n-k)!} \cdot x^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!} \cdot x^{n-(k+1)} = \frac{n!}{(n-(k+1))!} x^{n-(k+1)}$$

Sei $k \in \{0, 1, \dots, 999\}$ bel. $(x^{998})^{(999-k)} = \frac{999!}{(999-(998-k))!} \cdot x^{999-(998-k)}$

$= \frac{998!}{(k+1)!} \cdot x^{k+1}$ wenn $x=0$ ist jeder Summand 0

$$\Rightarrow g^{(1000)}(0) = 0$$