ANA Ü4

6.) $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ $\quad \mathcal{R}$ ... Menge aller Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$

$(f(R))_{R \in \mathcal{R}}$ $\quad$ zz: Äquivalenz von (i), (ii), (iii) mit

(i) $\lim_{R \in \mathcal{R}} f(R) = y$ also $\forall \varepsilon > 0 \, \exists R_0 \in \mathcal{R} \, \forall R \succcurlyeq R_0 : d(f(R), y) < \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall R \in \mathcal{R}, |R| \leq \delta : d(f(R), y) < \varepsilon$

(iii) $\forall (R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \to \infty} |R_n| = 0$ gilt $\lim_{n \to \infty} f(R_n) = y$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\varepsilon > 0$ bel. Dann $\exists R_0 \in \mathcal{R}$, sodass (i) gilt. Wähle $\delta = |R_0|$, dann gilt (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\varepsilon > 0$ bel. Dann $\exists \delta > 0$, sodass (ii) gilt. Sei $M = \{R \in \mathcal{R} : |R| \leq \delta\}$
Offensichtlich ist $M \neq \emptyset$ Wähle $R_0 \in M$ bel. Dann gilt (i).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \to \infty} |R_n| = 0$ bel. Sei $\varepsilon > 0$ bel.
Dann $\exists \delta > 0$, sodass (ii) gilt. Wähle N, so dass $\forall n \geq N : |R_n| < \delta$
Sei $n \geq N$ bel. $\Rightarrow d(f(R_n), y) < \varepsilon$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : d(f(R_n), y) < \varepsilon$
Sei $M = \{R_n \in \mathcal{R} : n \geq N\}$ Wähle R_0, so dass $|R_0| \geq |R| \; \forall R \in M$
$\Rightarrow \forall R \succcurlyeq R_0 : d(f(R), y) < \varepsilon$

---

zz: $(f(R))_{R \in \mathcal{R}}$ ... Cauchy-Netz $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall R_1, R_2 \in \mathcal{R}, |R_1| \leq \delta, |R_2| \leq \delta :$
$d(f(R_1), f(R_2)) < \varepsilon$

($\Rightarrow$) Cauchy-Netz bedeutet
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists R_0 \in \mathcal{R} \, \forall R_1, R_2 \succcurlyeq R_0 : d(f(R_1), f(R_2)) < \varepsilon$
Sei $\varepsilon > 0$ bel. Sei $R_0 \in \mathcal{R}$, sodass $\uparrow$ gilt. Wähle $\delta = |R_0|$, dann gilt $\uparrow$.

($\Leftarrow$) Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $\delta > 0$, sodass die rechte Seite gilt. Wähle R_0, so dass $|R_0| < \delta$. Dann gilt für $\forall R_1, R_2 \succcurlyeq R_0$, dass
$d(f(R_1), f(R_2)) < \varepsilon$

$\square$