LINAG Ü7

8.6.4 $\quad f \in L(V,V) \qquad \dim(V) =: n$

a) zz: f hat n verschiedene EW $\Rightarrow \mu_f(X) = (-1)^n \chi_f(X)$

$$\chi_f(X) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - X) \qquad \text{, da } \operatorname{grad}(\chi_f(X)) \leq n$$

$\forall P(X) \in K[X]$ mit $P(f) = 0 : \exists k \in \mathbb{N}: P(X) = \mu_f^k(X)$

$\chi_f(f) = 0 \qquad \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: \chi_f(X) = \mu_f^k(X)$

$(\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - X) = \mu_f^k(X) \qquad \Rightarrow k = 1$

$\Rightarrow \mu_f(X) = (-1)^n \chi_f(X) \qquad$ [$(-1)^n$ entsteht durch Normierung]

b) ges: Gegenbsp zu $\mu_f(X) = (-1)^n \chi_f(X) \Rightarrow f$ hat n verschiedene EW

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{pmatrix} = (1-X)^2 = 1 - 2X + X^2$

$\mu_A(X) = X^2 - 2X + 1$

$\Rightarrow \chi_A(X) = \mu_A(X)$

aber A hat nur einen verschiedenen Eigenwert (nämlich 1).