ANA Ü8

5.) $f\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{\xi\eta}{\xi^2+\eta^2} & \text{falls } \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

ges: partielle Ableitungen bei $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(f\begin{pmatrix}s\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\,\frac{s\cdot 0}{s^2+0^2} = \lim_{s\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(f\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\,\frac{0\cdot s}{0^2+s^2} = 0$$

zz: $f$ ist bei $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ nicht differenzierbar

$$f\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\\ \frac{1}{n}\end{pmatrix} = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{n\to\infty} f\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\\ \frac{1}{n}\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \text{ aber } f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow f$ ist nicht stetig bei $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow f$ ist nicht differenzierbar bei $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

ges: partielle Ableitungen zweiter Ordnung an $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

- $\frac{\partial}{\partial x_1} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{d}{d\xi} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\eta\cdot(\xi^2+\eta^2) - \xi\eta 2\xi}{(\xi^2+\eta^2)^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\xi^2\eta+\eta^3-2\xi^2\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$

- $\frac{\partial}{\partial x_2} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{d}{d\eta} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\xi\cdot(\xi^2+\eta^2) - \xi\eta\cdot 2\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\xi^3+\xi\eta^2-2\xi\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

- $\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{d}{dx}\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2yx(x^2+y^2)^2 - (y^3-x^2y)2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}$

$= \frac{-2xy(x^2+y^2)^2 - 4x(y^3-x^2y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$

- $\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{d}{dy}\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)^2 - (y^3-x^2y)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$

$= \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)^2 - 4y(y^3-x^2y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{3x^2y^2+3y^4-x^4-x^2y^2-4y^3+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$ $*$

- $\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy(x^2+y^2)^2 - (x^3-xy^2)(2(x^2+y^2)\cdot 2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy(x^2+y^2)^2 - 4y(x^3-xy^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

- $\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)^2 - (x^3-xy^2)(2(x^2+y^2)2x)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2) - 4x(x^3-xy^2)}{(x^2+y^2)^3}$

$= \frac{3x^4+3x^2y^2-x^2y^2-y^4-4x^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-x^4-y^4+6x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$

$* = \frac{-x^4-y^4+6x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$ wie zu erwarten: $\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} f = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f$