ANA Ü7

2.) wie in 1.) $D \in L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$

$$\|D\| = \sup\left\{ \frac{\|Dx\|_\infty}{\|x\|_\infty} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bel. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

$$\|Dx\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i \cdot x_i| \le \max_{i=1,\dots,n} |\|D\|_\infty \cdot x_i| = \|D\|_\infty \cdot \|x\|_\infty$$

$$\|Dx\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i \cdot x_i| \le \max_{i=1,\dots,n} |\|x\|_\infty \cdot \lambda_i| = \|x\|_\infty \cdot \|D\|_\infty$$

$$\frac{\|Dx\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \frac{\|D\|_\infty \cdot \|x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \|D\|_\infty$$

$$\|D\| = \sup\{\|Dx\|_\infty : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty \le 1\}$$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ hat $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |1| = 1$

$$\|Dx\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| = \|D\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|D\| = \|D\|_\infty$$