LINAG Ü9

8.8.2. $\mathbb{R}^{6\times 1}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{6\times 1}$ $\quad U \dots$ UR von $\mathbb{R}^{6\times 1}_{\mathbb{C}}$ $\quad \bar{U} = \overline{(id)}_{\mathbb{C}}(U)$

$\dim U = 3: \quad \Rightarrow \dim \bar{U} = 3$ $\qquad$ Dimensionssatz: $\dim(U \cap \bar{U}) + \dim(U + \bar{U}) = \dim U + \dim \bar{U}$

- $\dim(U \cap \bar{U}) = 0 \quad \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 6$

  Also sind U und $\bar{U}$ nicht reell (da $U \neq \bar{U}$) und $\bar{U}$ ist ein Komplementärraum von U (da $U \oplus \bar{U} = \mathbb{C}^{6\times 1}$). Außerdem ist $U \cap \mathbb{R}^{6\times 1} = \{0\} = \bar{U} \cap \mathbb{R}^{6\times 1}$, da

  für $a \in U \cap \mathbb{R}^{6\times 1}$, $\overline{(id)}_{\mathbb{C}}(a + i0) = a - i0 = a$ und somit $a \in U \cap \bar{U} \Rightarrow a = 0$

  Bsp: $U = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2+i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5+i7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11+i13 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}}$ $\qquad \bar{U} = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2-i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5-i7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11-i13 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]$

- $\dim(U \cap \bar{U}) = 1 \quad \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 5$

  $U, \bar{U}$ nicht reell (da $U \neq \bar{U}$) $\qquad \dim(U \cap \mathbb{R}^{6\times 1}) = 1 = \dim(\bar{U} \cap \mathbb{R}^{6\times 1})$

  Für $x \in U \cap \mathbb{R}^{6\times 1}$ gilt $\overline{(id)}_{\mathbb{C}}(x) = x - i0 = x$

  Bsp: $U = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2+i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5+i7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}}$ $\qquad \bar{U} = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2-i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5-i7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}}$

- $\dim(U \cap \bar{U}) = 2 \quad \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 4$

  $U, \bar{U}$ nicht reell $\quad \dim(U \cap \mathbb{R}^{6\times 1}) = 2 = \dim(\bar{U} \cap \mathbb{R}^{6\times 1})$

  Bsp: $U = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2+i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}}$ $\qquad \bar{U} = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2-i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}}$

- $\dim(U \cap \bar{U}) = 3 \quad \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 3$

  $U, \bar{U}$ sind reell, da $U = \bar{U}$ $\qquad U = \mathbb{R}^{6\times 1} \cap U$

  Bsp: $U = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}}$ $\qquad \bar{U} = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}}$

...

LINAG Ü9

8.8.2. ... $\dim U = 4 \quad \Rightarrow \dim \bar{U} = 4$

- $\dim(U \cap \bar{U}) = 0 \quad \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 8$ ↯ $\dim(U+\bar{U}) \leq 6$

- $\dim(U \cap \bar{U}) = 1 \quad \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 7$ ↯

- $\dim(U \cap \bar{U}) = 2 \quad \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 6$

  $U, \bar{U}$ sind nicht reell $\qquad \mathbb{R}^{6\times 1} \cap U = \mathbb{R}^{6\times 1} \cap \bar{U}$ mit $\dim(\;) = 2$

  Bsp: $U = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2+i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5+i7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}} \quad \bar{U} = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2-i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5-i7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}}$

- $\dim(U \cap \bar{U}) = 3 \quad \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 5$

  $U, \bar{U}$ nicht reell $\qquad \mathbb{R}^{6\times 1} \cap U = \mathbb{R}^{6\times 1} \cap \bar{U}$ mit $\dim(\;) = 3$

  Bsp: $U = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2+i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}} \quad \bar{U} = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2-i3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}}$

- $\dim(U \cap \bar{U}) = 4 \quad \Rightarrow \dim(U + \bar{U}) = 4$

  $U, \bar{U}$ sind reell mit $U = \bar{U} \qquad \mathbb{R}^{6\times 1} \cap U = U$

  Bsp: $U = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}} \quad \bar{U} = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right]_{\mathbb{C}}$

- $\dim(U \cap \bar{U}) \geq 5$ ↯ $\dim(U \cap \bar{U}) \leq \dim(U)$

LINAG 09

8.8.9. α) $R_{\mathbb{C}}^{3\times 1} = \mathbb{C}^{3\times 1}$

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \\ 3+2i \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ 3+i \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 2-i \\ 4+i \\ 6+3i \end{pmatrix} \qquad T := [\{a, b, c\}]_{\mathbb{C}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2-i \\ 2+i & 2 & 4+i \\ 3+2i & 3+i & 6+3i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} -\mathrm{II} & -\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III} & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} i & -0{,}5i & 2-i \\ i & -0{,}5i & 4+i \\ i & -0{,}5i & 6+3i \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} \cdot(-i) & +0{,}5\cdot\mathrm{I} & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-i \\ 1 & 0 & 4+i \\ 1 & 0 & 6+3i \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} & & -(2-i)\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2+2i \\ 1 & 0 & 4+4i \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} & & \cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4i \\ 1 & 0 & 8i \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} & & \cdot(-\frac{1}{4}i) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von V

$\Rightarrow$ T ist ein reeller UR $\quad (\overline{T} = T)$

LINAG Ü9

8.9.5. α) $V \ldots VR/\mathbb{R}$ $\quad f \in L(V,V)$ $\quad B \ldots$ Basis von V

$$A := \langle B^*, f(B) \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ges: $\chi_f(X)$, $\mu_f(X)$, $\chi_{f_\mathbb{C}}(X)$, $\mu_{f_\mathbb{C}}(X)$

$$\det \begin{pmatrix} 0-X & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0-X & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0-X & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0-X & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0-X & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0-X \end{pmatrix} = (X^2+1)^3 = \chi_f(X)$$

Da $\mu_f(X)$ ein Teiler von $\chi_f(X)$ ist und $\chi_f(X)$ ein Annulatorpolynom ist, kann $\mu_f(X)$ nur (X^2+1), $(X^2+1)^2$ oder $(X^2+1)^3$ sein.

$$A^2+1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (A^2+1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \underbrace{(A^2+1)^3}_{\mu_f(X)} = 0$$

Aus Satz 8.9.2 folgt $\chi_f(X) = \chi_{f_\mathbb{C}}(X) = (X^2+1)^3 = (X-i)^3(X+i)^3$

$\mu_{f_\mathbb{C}}(X)$ kann nur $(X-i)^l(X+i)^m$ mit $l, m \in \{1,2,3\}$ sein. Durch nachrechnen liefert nur $(X-i)^3(X+i)^3 = 0$ $\Rightarrow \mu_{f_\mathbb{C}}(X) = (X-i)^3(X+i)^3$

b) ges: A in J-NF und A in reeller J-NF

$rg(A-(-i)\cdot E) = 5 \qquad rg((A-(-i)\cdot E)^2) = 4 \qquad rg((A-(-i)\cdot E)^3) = 3$

$rg(A-i\cdot E) = 5 \qquad rg((A-i\cdot E)^2) = 4 \qquad rg((A-i\cdot E)^3) = 3$

$\pm i$:	0	1	2	3	4	
r	6	5	4	3	3	…
u		1	1	1	0	…
k		0	0	1	0	…

$$\Rightarrow \text{J-NF von } A = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\text{reelle J-NF von } A = \begin{pmatrix} J_3(0) & -i\cdot E_3 \\ i\cdot E_3 & J_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ laut 8.9.4 im Buch

(siehe auch Python Code)

LINAG Ü9

8.7.15. β)

$V \ldots VR/\mathbb{R} \quad f \in L(V,V) \quad B \ldots$ Basis von V

$$A := \langle B^*, f(B) \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a)

$$\det \begin{pmatrix} 1-X & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2-X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X \end{pmatrix} = (2-X) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & 0 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 1 & 2-X \end{pmatrix} = (2-X) \cdot (1-X)^2 \cdot (2-X) = (1-X)^2 (2-X)^2$$

$$\Rightarrow \chi_f(X) = (1-X)^2 (2-X)^2$$

b) ges: J-NF

$$\operatorname{rg}(A - 1 \cdot E_4) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \qquad \operatorname{rg}((A - 1 \cdot E_4)^2) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\operatorname{rg}(A - 2E_4) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$\lambda = 1$:

	0	1	2	3	
r	4	3	2	2	…
u		1	1	0	…
k		0	1	0	…

$\lambda = 2$:

	0	1	2	
r	4	2	2	…
u		2	0	…
k		2	0	…

$$\Rightarrow \text{J-NF von } A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{2} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

c) ges: Basis C von V mit $\langle C^*, f(C) \rangle =$ J-NF von A

$$(A - 1 \cdot E_4) x = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_2 = 0$$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$$(A - 1 \cdot E_4)^2 x = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_4 = 0,\ x_2 = -x_3$$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$$(A - 2 \cdot E_4) \cdot x = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff x_2 = -x_4 \quad x_1 = -x_3 \quad$ LSG $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) ges: $\mu_f(X)$

$$(1-A)(2-A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1-A)(2-A)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1-A)^2(2-A) = 0$$

$\Rightarrow (1-A)^2(2-A) = \mu_f(X)$ (siehe Python Code)