MAS Ü10

7.) $(\Omega, S, \mathbb{P})$ ... Wahrscheinlichkeitsraum $A_n \in S \quad n \in \mathbb{N}$

a) $A_n()$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen $0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$

$A_n()$ konvergiert in W. gegen $0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}([|A_n - 0| > \varepsilon]) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}([A_n > \varepsilon]) = 0 \quad \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$

b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty \quad \Rightarrow A_n()$ konvergiert fast sicher gegen 0

fast sicher: $\exists N$ mit $\mathbb{P}(N) = 0 \quad \forall \omega \in N^c : A_n(\omega)$ konvergiert gegen 0

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0 \qquad$ Sei $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{\mathbb{P}(A_n)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \geq \mathbb{P}(A) \geq 0 \qquad \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$

Sei $\omega \in A^c$ bel. $\quad \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \omega \in \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n(\omega) = 0$

c) A_n.. unabhängig $\quad$ zz: $A_n()$ konvergiert fast sicher gegen $0 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$

Indirekt: Angenommen $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$

Nach Satz 2.21 gilt dann $\mathbb{P}(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$

zz: $\forall N$ mit $\mathbb{P}(N) = 0 \quad \exists \omega \in N^c : A_n(\omega) \longrightarrow 1$

Sei N mit $\mathbb{P}(N) = 0$ bel.

Wenn $N^c \cap \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset \quad \Rightarrow \exists \omega \in N^c \cap \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow A_n(\omega) \longrightarrow 1$

also nicht $A_n() \to 0$ fast sicher

Wenn $N^c \cap \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \quad \Rightarrow \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq N$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \mathbb{P}(N)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(N) = 1 \; ↯ \;$ zu $\mathbb{P}(N) = 0$