LINAG Ü7

8.6.8. $f \in L(V,V)$ $\quad k \in \mathbb{N}$ $\quad a \in V \setminus \{0\}$

(i) $\exists U \subseteq V, \dim(U)=k, f(U) \subseteq U : a \in U \wedge \nexists \tilde{U} \subseteq V, \dim(\tilde{U})<k, f(\tilde{U}) \subseteq \tilde{U} : a \in \tilde{U}$

(ii) $(a, f(a), \ldots, f^k(a))$ ... l.a $\wedge$ $(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ l.u.

(iii) $\mu_{f,a}(X)$ hat Grad k

zz: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$\forall i \in \{0, \ldots, k\} : f^i(a) \subseteq U$, da $f^i(a) = f^{i-1}(\underbrace{f(a)}_{\in U}) = \ldots = f(\underbrace{f(\ldots f(f(a)))}_{\in U}) \in U$

Da $\dim(U)=k$ können höchstens

k Vektoren von $(a, f(a), \ldots, f^k(a))$ l.u. sein. Da es aber $k+1$ Vektoren sind

muss die Familie l.a. sein.

Wäre $(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ l.a., dann wäre $\hat{U} = [\{a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a)\}]$

ein f-invarianter UR von V mit $\dim(\hat{U}) < k$ und $a \in \hat{U}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$f^k(a) = \sum_{i=0}^{k-1} b_i f^i(a)$ $\quad \Rightarrow P(X) = \sum_{i=0}^{k} -b_i X^i$ mit $b_k = -1$ und b_i sonst wie in der LK

$(P(f))(a) = 0$ $\quad$ grad $(P(X))$ ist k $\quad \Rightarrow P(X)$ ist Annulatorpolynom von grad k und ist normiert

Würde ein Annulatorpolynom von geringerem Grad existieren, wäre

$(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ l.a. $\quad \Rightarrow P(X) = \mu_{f,a}$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

$\exists P(X) \in K[X] : (P(f))(a) = 0$, grad $(P(X)) = k \wedge \nexists Q(X) : (Q(f))(a) = 0$ mit grad $(Q(X)) < k$

$P(X) = \sum_{i=0}^{k} b_i X^i$ $\quad P(f) = \sum_{i=0}^{k} b_i f^i$ $\quad U = [\{\sum_{i=0}^{l} b_i f^i(a) : l \in \{0, \ldots, k\}\}]$

$\dim(U) \leq k$, da $\sum_{i=0}^{k} b_i f^i(a) = 0$ und $\dim(U) \geq k$ da das Minimalpolynom sonst

kleineren Grad hätte. $\Rightarrow \dim(U) = k$

$a \in U$ ist klar; $f(U) \subseteq U$ da $f(\sum_{j=0}^{m} c_j \sum_{i=0}^{j} b_i f^i(a)) = \sum_{j=0}^{m} c_j \sum_{i=0}^{j} b_i f^{i+1}(a) \in U$

LINAG Ü7

8.6.8 ...

Angenommen $\exists \hat{U}$ wie in (i) o.B.d.A. ist $\tilde{U}$ jener mit der geringsten dim

$\Rightarrow$ (aus (i) $\Rightarrow$ (ii)) $(a, f(a), \dots, f^{l-1}(a))$ ist l.u wobei $l = \dim(\tilde{U}) < k$

da die Familie aus l vielen l.u. Vektoren in $\tilde{U}$ besteht

$\Rightarrow (a, f(a), \dots, f^{l-1}(a))$ ist eine Basis von $\tilde{U}$

$f^l(a) = \sum_{i=0}^{l-1} x_i f^i(a)$ $\quad$ $P(X) = \sum_{i=0}^{l} -x_i X^i$ wobei $x_l = -1$ und sonst wie in der LK

$P(X)$ ist ein Annulatorpolynom von a bzgl. f und hat grad $< k$ $\lightning$