LINAG Ü 14

12.2.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

zz: A und B sind ähnlich

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2c \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c-2c \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ für $c = -1$ folgt A und B sind ähnlich

zz: A und B sind nicht orthogonal ähnlich

$\chi_A = (1-x)(2-x)^2$

$\lambda = 1$: $(A - 1 \cdot E_3) \cdot x = 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = 0$ $\Rightarrow$ Lösungsraum $[(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix})]$

$\lambda = 2$: $(A - 2 \cdot E_3) \cdot x = 0$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = 0$ $\Rightarrow$ Lösungsraum $[(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix})]$

$(A - 2 \cdot E_3)^2 \cdot x = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = 0$ $\Rightarrow$ Lösungsraum $[(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix})]$

$\chi_B = (1-x)(2-x)^2$

$\lambda = 1$: $(B - 1 \cdot E_3) \cdot x = 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = 0$ $\Rightarrow$ Lösungsraum $[(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix})]$

$\lambda = 2$: $(B - 2 \cdot E_3) \cdot x = 0$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = 0$ $\Rightarrow$ Lösungsraum $[(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix})]$

$(B - 2 \cdot E_3)^2 \cdot x = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = 0$ $\Rightarrow$ Lösungsraum $[(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix})]$

In A liegen die Haupträume orthogonal (mit normalem Skalarprodukt)

In B hingegen ist $(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}) \cdot (\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}) = 1$ also liegen die HR nicht orthogonal.

Da $\{\langle B^*, f(B) \rangle \mid B \text{ ist ONB von } (\mathbb{R}^3, \cdot)\}$ eine Klasse orthogonal ähnlicher Matrizen ist, folgt A ist nicht zu B orthogonal ähnlich.

ges: reguläre Matrizen Q, R, S mit R und S orthogonal ähnlich und Q nicht orthogonal und $R = Q^{-1} \cdot S \cdot Q$

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Offensichtlich sind Q, S, R regulär und S und R orthogonal ähnlich $(E_2^{-1} \cdot S \cdot E_2 = R)$

Offensichtlich ist Q nicht orthogonal $(Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Q^T)$, aber

$Q^{-1} \cdot S \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R$