ANA Ü8

2.) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ $\quad f: [a; b) \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

zz: $f'(a)^+$ existiert $\iff \exists y \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\ \exists \delta > 0\ \exists \varepsilon: [0, \delta) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ... bei 0 stetig und verschwindend:

$$f(x) = f(a) + (x-a)y + (x-a) \cdot \varepsilon(x-a) \quad \forall x \in [a, b) \cap [a, a+\delta)$$

($\Rightarrow$)

$y := \lim_{t \to a^+} \frac{f(t) - f(a)}{t-a}$ existiert $\quad \Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall t \in [a, b) \cap [a, a+\delta): \frac{f(t)-f(a)}{t-a}\ \exists$

$$\varepsilon(t-a) := \frac{f(t)-f(a)}{t-a} - y \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = \lim_{t \to a^+} (t-a) = 0$$

$$\varepsilon(t-a) = \frac{f(t) - f(a) - (t-a)y}{t-a} \iff f(t) = \varepsilon(t-a) \cdot (t-a) + f(a) + (t-a)y$$

($\Leftarrow$)

$$f(t) = f(a) + (t-a)y + (t-a) \cdot \varepsilon(t-a)$$

$$\iff \varepsilon(t-a) = \frac{f(t) - f(a) - (t-a)y}{t-a} = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} - y$$

$$\iff \frac{f(t)-f(a)}{t-a} - \varepsilon(t-a) = y \qquad \text{da } \varepsilon(t-a) \xrightarrow{t \to a^+} 0 \text{ folgt}$$

$$f'(a)^+ = \lim_{t \to a^+} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = y \quad \text{existiert}$$

Für die linksseitige Ableitung ist $\varepsilon: (-\delta, 0] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, da $t - b \leq 0$ und $\forall t \in [a, b) \cap (b-\delta, b]$, sonst gleich.

Für die Ableitung ist $\varepsilon: (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\forall t \in [a, b) \cap (x-\delta, x+\delta)$ sonst auch gleich.