LINAG Ü1

5.3.4. $\int(.)(x)\,dx : C^0(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})/U$

$$g \mapsto \int g(x)dx$$

ges: U... UR von $C^1(\mathbb{R})$, sodass $\int(.)(x)dx$ linear und bijektiv.

$U = \{f(x) \in C^1(\mathbb{R}) : \exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = a\}$

- U ist UR, da abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation mit Skalaren und da $f(x)=0$ ($\equiv$ Nullvektor) in U liegt.
- $\int(.)(x)dx$ ist linear, da $\int(f+g)(x)dx = \int f(x) + \int g(x)$ und $\int(c\cdot f)(x) = c\cdot\int f(x)$ wie aus der Analysis bekannt.
- Sei $[f]_U \in C^1(\mathbb{R})/U$ bel. Dann ist $f' \in C^0(\mathbb{R})$ und $\int f'(x)dx = [f]_U$

  $\Rightarrow \int$ ist surjektiv

  Sei $f,g \in C^0(\mathbb{R})$ bel. mit $\int f(x)dx = \int g(x)dx$. Dann ist

  $\int f(x)dx = \int g(x)dx + a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. $(\int f(x)dx)' = (\int g(x)dx + a)'$

  $\Leftrightarrow f(x) = g(x) + 0 \quad \Rightarrow \int$ ist injektiv

  $\Rightarrow \int$ ist bijektiv

ges: Nullvektor von $C^1(\mathbb{R})/U$

θ von $C^0(\mathbb{R})$ ist $f(x)=0 \qquad \int \theta\, dx$ ist θ von $C^1(\mathbb{R})/U$

$\int f(x)dx = 0 + a$ für ein $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow U$ ist Nullvektor von $C^1(\mathbb{R})/U$