LINAG Ü13

11.2.7. b) α) $\mathbb{C}^{2\times 1}$ ι... unitäres Skalarprodukt E... kanonische Basis

$\iota(E,E) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ bel. $a^* \in (\mathbb{C}^{2\times 1})^*$

$a^*(E) = (a_1, a_2)$ ges: Gradient $a \in \mathbb{C}^{2\times 1}$ von a^*

unitär ... positiv definit, hermitesch

Nach Satz 11.2.2. besitzt (da $\dim(\mathbb{C}^{2\times 1}) = 2 < \infty$) a^* genau einen Gradienten $a = \binom{b}{c}$ (mit $b, c \in \mathbb{C}$).

a... Gradient von a^* $\Leftrightarrow \forall x \in V: a^*(x) = a \cdot x$

$a^*(e_1) = a_1$ $\quad a \cdot e_1 = (b \cdot e_1 + c \cdot e_2) \cdot e_1 = \overline{b} \cdot e_1 \cdot e_1 + \overline{c} \cdot e_2 \cdot e_1$

$= \overline{b} \cdot 1 + \overline{c} \cdot i$

$a^*(e_2) = a_2$ $\quad a \cdot e_2 = (b \cdot e_1 + c \cdot e_2) \cdot e_2 = \overline{b}\, e_1 \cdot e_2 + \overline{c}\, e_2 \cdot e_2$

$= -\overline{b}\, i + \overline{c} \cdot 2$

$\Rightarrow a_1 = \overline{b} + i\overline{c}$ $\quad a_2 = -i\overline{b} + 2\overline{c}$

$\overline{b} = a_1 - i\overline{c}$ $\quad a_2 = -i(a_1 - i\overline{c}) + 2\overline{c} = -ia_1 - \overline{c} + 2\overline{c} = -ia_1 + \overline{c}$

$\overline{c} = a_2 + ia_1$

$\overline{b} = a_1 - i\,(\overline{a_2 + ia_1})$ $\quad c = \overline{a_2 + ia_1}$

$\overline{b} = a_1 - i(a_2 + ia_1)$

$\overline{b} = a_1 - ia_2 + a_1 = 2a_1 - ia_2$

$b = \overline{2a_1 - ia_2}$ $\quad a = \overline{2a_1 - ia_2}\, e_1 + \overline{a_2 + ia_1}\, e_2$

Probe: Sei $x \in V$ bel. $x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2$

$a^*(x) = a^*(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2) = x_1 \cdot a^*(e_1) + x_2 \cdot a^*(e_2) = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2$

$a \cdot x = \iota(\overline{2a_1 - ia_2}\, e_1 + \overline{a_2 + ia_1}\, e_2, x) = (2a_1 - ia_2)\,\iota(e_1, x) + (a_2 + ia_1) \cdot \iota(e_2, x)$

$= (2a_1 - ia_2)(x_1 \cdot e_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_1 \cdot e_2) + (a_2 + ia_1) \cdot (x_1 \cdot e_2 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 \cdot e_2)$

$= (2a_1 - ia_2)(x_1 - ix_2) + (a_2 + ia_1)(ix_1 + 2x_2) =$

$= 2a_1x_1 - i2a_1x_2 - ia_2x_1 - a_2x_2 + ia_2x_1 + 2a_2x_2 - a_1x_1 + i2a_1x_2$

$= a_1x_1 + a_2x_2$

LINAG Ü13

11.3.1. $V \ldots VR$ $\quad \langle \ldots$ Skalarprodukt $\quad a,b,c \in V$

a) $(V,\langle) \ldots$ beliebig $\quad$ zz: $a \perp b \wedge c = a-b \Rightarrow a\cdot a + b\cdot b = c \cdot c$

$$a\cdot a + b\cdot b = a\cdot a - \underbrace{a\cdot b}_{=0} + b\cdot b - \underbrace{a\cdot b}_{=0} = a(a-b) + b(b-a)$$

$$= a(a-b) - b(a-b) = (a-b)(a-b) = c\cdot c$$

c) $(V,\langle) \ldots$ euklidisch $\quad$ zz: $a \perp b \Leftrightarrow \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$

euklidisch ... positiv definit, symmetrische Bilinearform

$(\Rightarrow)$ $\|a+b\|^2 = \sqrt{(a+b)(a+b)}^2 \underset{\text{pos def}}{=} (a+b)(a+b) = a\cdot a + \underbrace{a\cdot b}_{=0} + \underbrace{b\cdot a}_{=0} + b\cdot b = \sqrt{a\cdot a}^2 + \sqrt{b\cdot b}^2$

$= \|a\|^2 + \|b\|^2$

$(\Leftarrow)$ $\|a+b\|^2 = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b \overset{\text{symmetrisch}}{=} \underline{a\cdot a + b\cdot b + 2\cdot a\cdot b = a\cdot a + b\cdot b} = \|a\|^2 + \|b\|^2$

$\Rightarrow 2\cdot a\cdot b = 0 \Rightarrow a\cdot b = 0 \Rightarrow a \perp b$

f) $(V,\langle) \ldots$ unitär $\quad a \perp b \Leftrightarrow \forall x,y \in \mathbb{C}: \|xa+yb\|^2 = \|xa\|^2 + \|yb\|^2$

unitär ... positiv definit, hermitesche Sesquilinearform

$(\Rightarrow)$ $\|xa+yb\|^2 = \sqrt{(xa+yb)(xa+yb)}^2 = (xa+yb)(xa+yb) =$

$= \langle(xa,xa) + \langle(xa,yb) + \langle(yb,xa) + \langle(yb,yb) = \bar{x}x\cdot a\cdot a + \bar{x}y\underbrace{a\cdot b}_{=0} + \bar{y}x\underbrace{b\cdot a}_{=0} + \bar{y}y\, b\cdot b$

$= |x|^2\sqrt{a\cdot a}^2 + |y|^2\sqrt{b\cdot b}^2 = \|xa\|^2 + \|yb\|^2$

$(\Leftarrow)$ $\|xa+yb\|^2 = |x|^2\cdot a\cdot a + \bar{x}y\, a\cdot b + \bar{y}x\,\overline{a\cdot b} + |y|^2 b\cdot b \overset{\text{hermitesch}}{=} |x|^2\cdot a\cdot a + \bar{x}y\,ab + \overline{\bar{x}y\,ab} + |y|^2 b\cdot b$

$= \underline{|x|^2 a\cdot a + |y|^2\cdot b\cdot b} + 2\,\mathrm{Re}(\bar{x}y\,ab) = |x|^2 a\cdot a + |y|^2 b\cdot b = \|xa\|^2 + \|yb\|^2$

$\Rightarrow \forall x,y \in \mathbb{C}: 2\,\mathrm{Re}(\bar{x}y\,ab) = 0 \Rightarrow$ $x=1$ $y=1$: $\mathrm{Re}(a\cdot b) = 0$

$x=1$ $y=-i$: $\mathrm{Im}(a\cdot b) = 0$ $\quad \Rightarrow a\cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$

g) $(V,\langle) \ldots$ unitär $\dim V \geq 1$ $\quad$ zz: $\exists a', b' \in V, a' \not\perp b': \|a'+b'\|^2 = \|a'\|^2 + \|b'\|^2$

Sei $a \in V \setminus \{0\}$ bel. $a\cdot(i\cdot a) = i\underbrace{(a\cdot a)}_{>0} \neq 0$

$\|a+ia\|^2 = (a+ia)(a+ia) = a\cdot a + a\cdot(ia) + (ia)\cdot a + (ia)\cdot(ia) = a\cdot a + a\cdot(ia) + \overline{a\cdot(ia)} + |i|^2\cdot a\cdot a$

$= 2\cdot a\cdot a + 2\,\mathrm{Re}(i\underbrace{(a\cdot a)}_{\in\mathbb{R}}) = 2\cdot a\cdot a = a\cdot a + |i|^2\cdot a\cdot a = \|a\|^2 + \|i\cdot a\|^2$

LINAG Ü13

11.3.2. $(V, \langle\rangle)$ ... euklidischer oder unitärer VR U ... UR von V

$p: V \to U$ ... Projektion

zz: p ... Orthogonalprojektion $\Leftrightarrow \forall a \in V: \|p(a)\| \leq \|a\|$

$\Rightarrow$ $U \oplus U^\perp = V$ $a = s + t$ mit $s \in U$ und $t \in U^\perp$ beliebig

$\|p(a)\|^2 = \|s\|^2 = \sqrt{s \cdot s}^2 = s \cdot s \leq s \cdot s + t \cdot t = s \cdot s + (-t) \cdot (-t) = (s - (-t)) \cdot (s - (-t)) = \|s + t\|^2$

positiv definit $\langle s, -t\rangle = -\langle s, t\rangle = 0$ $\Rightarrow \|p(a)\| \leq \|a\|$

$\Leftarrow$ indirekt angenommen $\forall v \in V: \|p(v)\| \leq \|v\| \wedge \neg p$ ... Orthogonalprojektion

$U \oplus S = V$ mit $\exists u \in U \; \exists s \in S: u \not\perp s$

Falls $Re(u \cdot s) \neq 0$: $\exists c \in \mathbb{R}: \underbrace{s \cdot s}_{\in \mathbb{R}} \leq c \cdot \underbrace{Re(u \cdot s)}_{\in \mathbb{R} \setminus \{0\}} = Re(c \cdot u \cdot s)$

Falls $Re(u \cdot s) = 0 \Rightarrow Im(u \cdot s) \neq 0$ $\exists c \in \mathbb{R}: \underbrace{s \cdot s}_{\in \mathbb{R}} \leq c \cdot \underbrace{Im(u \cdot s)}_{\in \mathbb{R}} = c \cdot Re(-i \cdot u \cdot s)$
$= Re(-i c \cdot u \cdot s)$

$a := \frac{-c}{2}$ im 1. Fall $a := -i \frac{c}{2}$ im 2. Fall

$\|a \cdot u + s\|^2 = (a \cdot u + s)(a \cdot u + s) = a \cdot \bar{a} \cdot u \cdot u + (a \cdot u) \cdot s + \underbrace{s \cdot (a \cdot u)}_{= \overline{(a \cdot u) \cdot s}} + s \cdot s = |a|^2 u \cdot u + 2 Re((a \cdot u) \cdot s) + s \cdot s$

$= |a|^2 \cdot u \cdot u + 2 Re(\bar{a} \cdot (u \cdot s)) + s \cdot s$

1. Fall: $|a|^2 \cdot u \cdot u + 2 Re(\underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} \cdot (u \cdot s)) + s \cdot s = |a|^2 \cdot u \cdot u + \cancel{2} \frac{-c}{\cancel{2}} Re(u \cdot s) + s \cdot s$

$= |a|^2 \cdot u \cdot u \underbrace{- c \cdot Re(u \cdot s) + s \cdot s}_{\leq 0} \geq |a|^2 \cdot u \cdot u = a \cdot \bar{a} \cdot u \cdot u = (a \cdot u)(a \cdot u) = \|a \cdot u\|^2$ ↯

2. Fall: $|a|^2 \cdot u \cdot u + 2 Re(i \cdot \frac{c}{2} (u \cdot s)) + s \cdot s = |a|^2 \cdot u \cdot u + 2 \frac{-c}{2} Re(-i(u \cdot s)) + s \cdot s$

$= |a|^2 \cdot u \cdot u \underbrace{- c \cdot Im(u \cdot s) + s \cdot s}_{\leq 0} \geq |a|^2 \cdot u \cdot u = \|a \cdot u\|^2$ ↯ zu $\forall v \in V: \|p(v)\| \leq \|v\|$

LINAG Ü13

11.5.2. $\mathbb{K}^{n\times 1}$ mit kanonischem euklidischem oder unitärem Skalarprodukt

$B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \dots$ Basis

α) $n=3 \quad \mathbb{K}=\mathbb{R} \quad b_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ ges: Orthogonal-/Orthonormalbasis

$$a_1 = b_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$a_2 = b_2 - \sum_{j=1}^{1} \frac{a_j \cdot b_2}{a_j \cdot a_j} a_j = b_2 - \frac{a_1 \cdot b_2}{a_1 \cdot a_1} a_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} - \frac{-2}{14}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{9}{7}\\-\frac{11}{7}\\\frac{15}{7}\end{pmatrix}$$

$$a_3 = b_3 - \sum_{j=1}^{2} \frac{a_j \cdot b_3}{a_j \cdot a_j} a_j = b_3 - \left(\frac{a_1 \cdot b_3}{a_1 \cdot a_1} a_1 + \frac{a_2 b_3}{a_2 a_2} a_2\right) = b_3 - \left(\frac{11}{14} a_1 + \frac{\frac{11}{7}}{\frac{61}{7}} a_2\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - \left(\frac{11}{14} \cdot 2 + \frac{11}{61} \cdot \frac{9}{7}\right) \\ 2 - \left(\frac{11}{14} \cdot 3 + \frac{11}{61} \cdot \left(-\frac{11}{7}\right)\right) \\ 1 - \left(\frac{11}{14} \cdot 1 + \frac{11}{61} \cdot \frac{15}{7}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{61}\\-\frac{9}{122}\\-\frac{21}{122}\end{pmatrix}$$

$\|a_1\| = \sqrt{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{14}$ $\qquad c_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)^T$

$\|a_2\| = \sqrt{\frac{61}{7}}$ $\qquad c_2 = \left(\frac{9}{\sqrt{427}}, -\frac{11}{\sqrt{427}}, \frac{15}{\sqrt{427}}\right)^T$

$\|a_3\| = \sqrt{\frac{9}{122}} = \frac{3}{\sqrt{122}}$ $\qquad c_3 = \left(\frac{4\sqrt{122}}{61}, -\frac{3}{\sqrt{122}}, -\frac{7}{\sqrt{122}}\right)^T$

γ) $n=3 \quad K=\mathbb{C} \quad b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix}0\\i\\0\end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}$

$$a_1 = b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$a_2 = b_2 - \frac{a_1 \cdot b_2}{a_1 \cdot a_1} \cdot a_1 = b_2 - \frac{i}{3} a_1 = \begin{pmatrix}0 - \frac{i}{3}\\ i - \frac{i}{3}\\ 0 - \frac{i}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{i}{3}\\ \frac{2i}{3}\\ -\frac{i}{3}\end{pmatrix}$$

$$a_3 = b_3 - \left(\frac{a_1 b_3}{a_1 a_1} a_1 + \frac{a_2 b_3}{a_2 a_2} a_2\right) = b_3 - \left(\frac{i}{3} a_1 + \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} a_2\right) = b_3 - \frac{i}{3} a_1 + \frac{1}{2} a_2$$

$$= \begin{pmatrix} i - \frac{i}{3} + \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{3}\right) \\ 0 - \frac{i}{3} + \frac{1}{2} \frac{2i}{3} \\ 0 - \frac{i}{3} + \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{i}{2}\\0\\-\frac{i}{2}\end{pmatrix}$$

$\|a_1\| = \sqrt{3}$ $\qquad c_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

$\|a_2\| = \sqrt{-\frac{1}{9} - \frac{4}{9} - \frac{1}{9}} = i \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ $\qquad c_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$

$\|a_3\| = \sqrt{-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{i}{\sqrt{2}}$ $\qquad c_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Dann ist (a_1, a_2, a_3) immer eine Orthogonalbasis und (c_1, c_2, c_3) sogar eine Orthonormalbasis. (Proberechnungen $a_1 \cdot a_2 = 0 \quad a_1 \cdot a_3 = 0 \quad a_2 \cdot a_3 = 0$

$\|c_1\| = 1 \quad \|c_2\| = 1 \quad \|c_3\| = 1$ mit Taschenrechner)

LINAG Ü13

11.5.7. $\mathbb{C}^{3\times 1}$ mit kanonischem unitären Skalarprodukt $\quad a=\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}$

U ... zu a orthogonaler UR

a) ges: Gleichung von U und Orthonormalbasis von U

$$U = a^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 1} : \begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x - iy = 0 \right\} \Rightarrow x = iy \text{ ... Gleichung von } U$$

$\bar{b}_1 := \begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix} \in U$, da $1 + i\cdot i = 1 - 1 = 0 \qquad \bar{b}_2 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in U$, da $0 - i\cdot 0 = 0$

$(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ sind offensichtlich l. u.

$\hat{b}_1 := \bar{b}_1 \qquad \hat{b}_2 := \bar{b}_2 - \frac{\hat{b}_1\cdot \bar{b}_2}{\hat{b}_1\cdot\hat{b}_1}\hat{b}_1 = \bar{b}_2 - \frac{0}{1-i\cdot i}\hat{b}_1 = \bar{b}_2 - \frac{0}{2}\hat{b}_1 = \bar{b}_2$

$b_1 := \frac{\hat{b}_1}{\|\hat{b}_1\|} = \frac{\hat{b}_1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right)^T \qquad b_2 := \frac{\hat{b}_2}{\|\hat{b}_2\|} = \frac{\hat{b}_2}{\sqrt{1}} = \hat{b}_2 = (0, 0, 1)^T$

b) ges: $p: \mathbb{C}^{3\times 1} \to U$ ... Orthogonalprojektion in Form $\langle E^*, p(E)\rangle$

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac12\\\frac{i}{2}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac12\\-\frac{i}{2}\\0\end{pmatrix} = \frac12 a + \frac{1}{\sqrt2} b_1 \qquad p(e_1) = \frac{1}{\sqrt2} b_1 = \left(\frac12, -\frac{i}{2}, 0\right)^T$

$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{i}{2}\\\frac12\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{i}{2}\\\frac12\\0\end{pmatrix} = -\frac{i}{2} a + \frac{i}{\sqrt2} b_1 \qquad p(e_2) = \frac{i}{\sqrt2} b_1 = \left(\frac{i}{2}, \frac12, 0\right)^T$

$e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = b_2 \qquad p(e_3) = b_2 = (0, 0, 1)^T$

$$\Rightarrow \langle E^*, p(E)\rangle = \begin{pmatrix}\frac12 & \frac{i}{2} & 0\\ -\frac{i}{2} & \frac12 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

c) ges: $p(c)$ mit $c = \begin{pmatrix}i\\i\\i\end{pmatrix}$ $\qquad$ ges: Länge von $c - p(c)$

$c = i\cdot e_1 + i\cdot e_2 + i\cdot e_3 \Rightarrow p(c) = i\cdot p(e_1) + i\cdot p(e_2) + i\, p(e_3) = i\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac{i}{2}\\0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}\frac{i}{2}\\\frac12\\0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\frac{i}{2} - \frac12\\ \frac12 + \frac{i}{2}\\ i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac12(i-1)\\ \frac12(1+i)\\ i\end{pmatrix}$

$$\|c - p(c)\| = \left\|\begin{pmatrix}i - (\frac{i}{2} - \frac12)\\ i - (\frac12 + \frac{i}{2})\\ i - i\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}\frac{i}{2} + \frac12\\ \frac{i}{2} - \frac12\\ 0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{i}{2}+\frac12\right)\left(-\frac{i}{2}+\frac12\right) + \left(\frac{i}{2}-\frac12\right)\left(-\frac{i}{2}-\frac12\right) + 0\cdot 0}$$

$= \sqrt{\frac12 + \frac12} = \sqrt{1} = 1$ ... Länge von $c - p(c)$

LINAG Ü13

11.5.6 $\quad I = [-1, 1] \quad C^0(I)$ mit Skalarprodukt $(f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$

a) $U_3 := [\{f_i : x \mapsto x^i \mid i \in \{0,1,2,3\}\}]$ ges: Orthonormalbasis

$a_0\ (x \mapsto 1)$, $a_1\ (x \mapsto x)$, $a_2\ (x \mapsto x^2)$, $a_3\ (x \mapsto x^3)$ bilden eine Basis von U_3

Nach Schmidt: $b_0 = a_0 = 1$

$$b_1 = a_1 - \frac{b_0 \cdot a_1}{b_0 \cdot b_0} b_0 = a_1 - \frac{0}{2} b_0 = a_1 = x \qquad \left[\begin{array}{l} b_0 \cdot a_1 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x\,dx = 0 \\ b_0 \cdot b_0 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \end{array}\right.$$

$$b_2 = a_2 - \left(\frac{b_0 \cdot a_2}{b_0 \cdot b_0} b_0 + \frac{b_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_1} b_1\right) \qquad \left[\begin{array}{l} b_0 \cdot a_2 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2\,dx = \frac{2}{3} \\ b_1 \cdot a_2 = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2\,dx = 0 \\ b_1 \cdot b_1 = \int_{-1}^{1} x \cdot x\,dx = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

$$= a_2 - \left(\frac{\frac{2}{3}}{2} b_0 + \frac{0}{\frac{2}{3}} b_1\right)$$

$$= a_2 - \frac{1}{3} b_0 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$b_3 = a_3 - \left(\frac{b_0 \cdot a_3}{b_0 \cdot b_0} b_0 + \frac{b_1 \cdot a_3}{b_1 \cdot b_1} b_1 + \frac{b_2 \cdot a_3}{b_2 \cdot b_2} b_2\right) \qquad \left[\begin{array}{l} b_0 \cdot a_3 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^3\,dx = 0 \\ b_1 \cdot a_3 = \int_{-1}^{1} x \cdot x^3\,dx = \frac{2}{5} \\ b_2 \cdot a_3 = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3}) x^3\,dx = 0 \\ b_2 \cdot b_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{3})\,dx = \frac{8}{45} \end{array}\right.$$

$$= a_3 - \left(\frac{0}{2} b_0 + \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} b_1 + \frac{0}{\frac{8}{45}} b_2\right)$$

$$= a_3 - \frac{3}{5} b_1 = x^3 - \frac{3}{5} x$$

$$\|b_0\| = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1\,dx} = \sqrt{2}$$

$$\|b_1\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x \cdot x\,dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|b_2\| = \sqrt{(x^2 - \frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{3})} = \sqrt{\frac{8}{45}}$$

$$\|b_3\| = \sqrt{(x^3 - \frac{3}{5}x)(x^3 - \frac{3}{5}x)} = \sqrt{\int_{-1}^{1} (x^3 - \frac{3}{5}x)(x^3 - \frac{3}{5}x)\,dx} = \sqrt{\frac{8}{175}}$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad c_1 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \qquad c_2 = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}} \qquad c_3 = \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{\sqrt{\frac{8}{175}}} \qquad (c_0, c_1, c_2, c_3) \ldots \text{ONB}$$

(mit Wolfram Alpha Probegerechnet)

b) $U_2 := [\{f_0, f_1, f_2\}] \qquad p: C^0(I) \to U_2 \qquad$ ges: $p(\exp|_I)$

$$p(\exp) = \frac{c_0 \cdot \exp}{c_0 \cdot c_0} \cdot c_0 + \frac{c_1 \cdot \exp}{c_1 \cdot c_1} \cdot c_1 + \frac{c_2 \cdot \exp}{c_2 \cdot c_2} c_2 \qquad c_0 \cdot \exp = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \exp(x)\,dx \approx 1{,}6620$$

$$= (c_0 \cdot \exp) \cdot c_0 + (c_1 \cdot \exp) c_1 + (c_2 \cdot \exp) \cdot c_2 \qquad c_1 \cdot \exp = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \exp(x)\,dx \approx 0{,}90112$$

$$\approx 1{,}662 \cdot c_0 + 0{,}90112\, c_1 + 0{,}2263\, c_2 \qquad c_2 \cdot \exp = \int_{-1}^{1} \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}} \exp(x)\,dx \approx 0{,}22630$$

$$\approx 1{,}175 + 1{,}10364x + 0{,}536718(x^2 - \tfrac{1}{3})$$

$$= 0{,}536718x^2 + 1{,}10364x + 0{,}996094$$