LINAG Ü13

11.3.1. $V \ldots$ VR $\quad \langle \ldots$ Skalarprodukt $\quad a,b,c \in V$

a) $(V,\langle)\ldots$ beliebig $\quad$ zz: $a \perp b \wedge c = a-b \Rightarrow a\cdot a + b\cdot b = c \cdot c$

$$a\cdot a + b\cdot b = a\cdot a - \underbrace{a\cdot b}_{=0} + b\cdot b - \underbrace{a\cdot b}_{=0} = a(a-b) + b(b-a)$$

$$= a(a-b) - b(a-b) = (a-b)(a-b) = c\cdot c$$

c) $(V,\langle)\ldots$ euklidisch $\quad$ zz: $a \perp b \Leftrightarrow \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$

euklidisch ... positiv definit, symmetrische Bilinearform

$$(\Rightarrow)\ \|a+b\|^2 = \sqrt{(a+b)(a+b)}^2 \underset{\text{pos def}}{=} (a+b)(a+b) = a\cdot a + \underbrace{a\cdot b}_{=0} + \underbrace{b\cdot a}_{=0} + b\cdot b = \sqrt{a\cdot a}^2 + \sqrt{b\cdot b}^2$$

$$= \|a\|^2 + \|b\|^2$$

$$(\Leftarrow)\ \|a+b\|^2 = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b \overset{\text{symmetrisch}}{=} \underline{a\cdot a + b\cdot b + 2\cdot a\cdot b = a\cdot a + b\cdot b} = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

$$\Rightarrow 2\cdot a\cdot b = 0 \Rightarrow a\cdot b = 0 \Rightarrow a \perp b$$

f) $(V,\langle)\ldots$ unitär $\quad a \perp b \Leftrightarrow \forall x,y \in \mathbb{C}: \|xa+yb\|^2 = \|xa\|^2 + \|yb\|^2$

unitär ... positiv definit, hermitesche Sesquilinearform

$$(\Rightarrow)\ \|xa+yb\|^2 = \sqrt{(xa+yb)(xa+yb)}^2 = (xa+yb)(xa+yb) =$$

$$= \langle(xa,xa) + \langle(xa,yb) + \langle(yb,xa) + \langle(yb,yb) = \bar{x}x\cdot a\cdot a + \bar{x}y\underbrace{a\cdot b}_{=0} + \bar{y}x\underbrace{b\cdot a}_{=0} + \bar{y}y\, b\cdot b$$

$$= |x|^2\sqrt{a\cdot a}^2 + |y|^2\sqrt{b\cdot b}^2 = \|xa\|^2 + \|yb\|^2$$

$$(\Leftarrow)\ \|xa+yb\|^2 = |x|^2\cdot a\cdot a + \bar{x}y\, a\cdot b + \bar{y}x\,\overline{a\cdot b} + |y|^2\, b\cdot b \overset{\text{hermitesch}}{=} |x|^2\cdot a\cdot a + \bar{x}y\, ab + \overline{\bar{x}y\, ab} + |y|^2\, b\cdot b$$

$$= \underline{|x|^2\cdot a\cdot a + |y|^2\cdot b\cdot b} + 2\,\mathrm{Re}(\bar{x}y\, ab) = |x|^2 a\cdot a + |y|^2\, b\cdot b = \|xa\|^2 + \|yb\|^2$$

$$\Rightarrow \forall x,y \in \mathbb{C}: 2\,\mathrm{Re}(\bar{x}y\, ab) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x=1\ y=1: \mathrm{Re}(a\cdot b) = 0 \\ x=1\ y=-i: \mathrm{Im}(a\cdot b) = 0 \end{array} \Rightarrow a\cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$$

g) $(V,\langle)\ldots$ unitär $\quad \dim V \geq 1 \quad$ zz: $\exists a',b' \in V, a' \not\perp b': \|a'+b'\|^2 = \|a'\|^2 + \|b'\|^2$

Sei $a \in V\setminus\{0\}$ bel. $\ a\cdot(i\cdot a) = i\underbrace{(a\cdot a)}_{>0} \neq 0$

$$\|a+ia\|^2 = (a+ia)(a+ia) = a\cdot a + a\cdot(ia) + (ia)\cdot a + (ia)\cdot(ia) = a\cdot a + a\cdot(ia) + \overline{a\cdot(ia)} + |i|^2\cdot a\cdot a$$

$$= 2\cdot a\cdot a + 2\,\mathrm{Re}(i\underbrace{(a\cdot a)}_{\in\mathbb{R}}) = 2\cdot a\cdot a = a\cdot a + |i|^2\cdot a\cdot a = \|a\|^2 + \|i\cdot a\|^2$$