ANA ÜM

3.) $\gamma:[0,1]\to D \quad \gamma(t)=t\cdot x_1+(1-t)\,x_0$ (also gerade Strecke) $\quad \Phi: D\to L_b(\mathbb{R}^n,X)$ ... stetig

zz: $$\int_\gamma \Phi(x)\,dx = \underbrace{\left(\int_0^1 \Phi(t\cdot x_1+(1-t)\,x_0)\,dt\right)}_{\in L_b(\mathbb{R}^n,X)}(x_1-x_0)$$

Offensichtlich ist $\gamma\in C^1[0,1]$. Nach Satz 11.2.5 gilt nun:

$$\int_\gamma \Phi(x)\,dx = \int_0^1 \Phi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \qquad \gamma'(t)=(t\cdot x_1+x_0-t\cdot x_0)'=x_1-x_0$$

$$=\int_0^1 \Phi(t\cdot x_1+(1-t)\,x_0)\cdot(x_1-x_0)\,dt=\int_0^1 \Phi(t\cdot x_1+(1-t)\,x_0)\,dt\,(x_1-x_0)$$

oder alternativ:

$$\int_\gamma \Phi(x)\,dx=\lim_{|R|\to 0}\sum_{j=1}^{n(R)}\Phi(\gamma(\alpha_j))(\gamma(\xi_j)-\gamma(\xi_{j-1}))$$

$$=\lim_{|R|\to 0}\sum_{j=1}^{n(R)}\Phi(\alpha_j\cdot x_1+(1-\alpha_j)\,x_0)\,(\xi_j\cdot x_1+(1-\xi_j)\,x_0-(\xi_{j-1}\cdot x_1+(1-\xi_{j-1})\cdot x_0)$$

$$=\lim_{|R|\to 0}\sum_{j=1}^{n(R)}\Phi(\alpha_j x_1+(1-\alpha_j)x_0)(\xi_j\cdot x_1+\cancel{x_0}-\xi_j x_0-\xi_{j-1}\cdot x_1-\cancel{x_0}+\xi_{j-1}\cdot x_0)$$

$$=\lim_{|R|\to 0}\sum_{j=1}^{n(R)}\Phi(\alpha_j x_1+(1-\alpha_j)x_0)\cdot\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}x_1-x_0\,dt=\lim_{|R|\to 0}\sum_{j=1}^{n(R)}\left(\Phi(\alpha_j\cdot x_1+(1-\alpha_j)x_0\cdot\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}1\,dt\right)(x_1-x_0)$$

$$=\left(\int_0^1\Phi(t\cdot x_1+(1-t)x_0)\cdot 1\,dt\right)(x_1-x_0)=\left(\int_0^1\Phi(t\cdot x_1+(1-t)x_0\,dt\right)(x_1-x_0)$$

Buch Seite 372