MAS Ü10

5.) $F(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{wenn } x>0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ges: $\int x \, d\mu_F(x)$

$$\int x \, d\mu_F(x) = \int_0^\infty \mu_F([x>y])dy - \int_0^\infty \mu_F([x<-y])dy$$

$$= \int_0^\infty \mu_F(\{x\in\mathbb{R} : x>y\})\, dy - \int_0^\infty \mu_F(\{x\in\mathbb{R} : x<-y\})\, dy$$

$$\int_0^\infty \mu_F(]y, +\infty[)\, dy = \lim_{z\to+\infty} \int_0^\infty F(z)-F(y) = \lim_{z\to+\infty} \int_0^\infty 1-e^{-z}-1+e^{-y}\, dy$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \int_0^\infty \frac{1}{e^y} - \underbrace{\frac{1}{e^z}}_{\to 0}\, dy = \int_0^\infty \frac{1}{e^y}\, dy = -e^{-y}\Big|_0^\infty = 0-(-1) = 1$$

$$\int_0^\infty \mu_F(]-\infty, -y[)\, dy = \lim_{z\to-\infty} \int_0^\infty \underbrace{F(-y)}_{=0} - \underbrace{F(z)}_{=0}\, dy = \int_0^\infty 0\, dy = 0$$

$$\Rightarrow \int x \, d\mu_F(x) = 1$$

MAS Ü10

6.) $f_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \le \omega \le \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

zz: $f_n$ konvergiert in $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ im Maß

$n=0$ $\quad \sqrt{0} - \lfloor\sqrt{0}\rfloor \le \omega \le \sqrt{1} - \lfloor\sqrt{0}\rfloor \iff 0 \le \omega \le 1$

$n=1$ $\quad \sqrt{1} - \lfloor\sqrt{1}\rfloor \le \omega \le \sqrt{2} - \lfloor\sqrt{1}\rfloor \iff 0 \le \omega \le \sqrt{2} - 1$

$n=2$ $\quad \sqrt{2} - \lfloor\sqrt{2}\rfloor \le \omega \le \sqrt{3} - \lfloor\sqrt{2}\rfloor \iff \sqrt{2} - 1 \le \omega \le \sqrt{3} - 1$

$n=3$ $\quad \sqrt{3} - \lfloor\sqrt{3}\rfloor \le \omega \le \sqrt{4} - \lfloor\sqrt{3}\rfloor \iff \sqrt{3} - 1 \le \omega \le \sqrt{4} - 1$

$\forall n \in \mathbb{N}: \lambda([\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]) = \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor - (\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)$

$= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda([\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

im Maß konvergent: $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\{\omega \in [0,1] : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\}) = 0$

$f(\omega) = 0$ $\quad$ Sei $\varepsilon > 0$ bel.

$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\{\omega \in [0,1] : |f_n(\omega)| > \varepsilon\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\{\omega \in [\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\})$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \lambda([\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]) = 0$

$\Rightarrow f_n$ konvergiert im Maß

zz: $f_n$ konvergiert nicht fast überall

fast überall konvergent: $\exists N$ .. Nullmenge : $f_n$ auf $N^c$ punktweise gegen $f$ konvergiert

Zwischen $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ und $\sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ liegen für alle $n \in \mathbb{N}$ überabzählbar viele Werte. (Für diese gilt $f_n(\omega) = 1$) Da $N$ eine Nullfolge ist (also nur abzählbar viele Elemente enthält) kann $N$ nicht ganz $[\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]$ enthalten.

$\Rightarrow f_n$ konvergiert nicht fast überall

MAS Ü10

7.) $(\Omega, S, \mathbb{P})$ ... Wahrscheinlichkeitsraum $A_n \in S$ $n \in \mathbb{N}$

a) $A_n()$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen 0 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$

$A_n()$ konvergiert in W. gegen 0 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}([|A_n - 0| > \varepsilon|]) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}([A_n > \varepsilon]) = 0$ $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$

b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ $\Rightarrow$ $A_n()$ konvergiert fast sicher gegen 0

fast sicher: $\exists N$ mit $\mathbb{P}(N) = 0$ $\forall w \in N^c$: $A_n(w)$ konvergiert gegen 0

Indirekt: Angenommen $\forall N, \mathbb{P}(N) = 0$ $\exists w \in N^c$: $A_n(w)$ nicht gegen 0 konvergiert
(also 1 ist)

Sei $N = \{x \in \Omega : \mathbb{P}(\{x\}) = 0\}$ $\Rightarrow \mathbb{P}(N) = 0$ Nun $\exists w \in N^c$ (also $\mathbb{P}(\{w\}) > 0$)

mit $A_n(w) \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$ (also $A_n(w) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{P}(\{w\})}_{>0} = +\infty$

c) $A_n$ ... unabhängig ZZ: $A_n()$ konvergiert fast sicher gegen 0 $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$

Indirekt: Angenommen $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$

Nach Satz 2.21 gilt dann $\mathbb{P}(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$

$\lightning$ zu $A_n()$ konvergiert fast sicher gegen 0