LINAG Ü1

7.2.1. $A_t = \begin{pmatrix} 5-9t & -4 & -2 \\ -4 & 5-9t & -2 \\ -2 & -2 & 8-9t \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

ges: Determinante

$$\det A_t = (5-9t)^2 \cdot (8-9t) + (-4)\cdot(-2)\cdot(-2) + (-2)\cdot(-4)\cdot(-2)$$
$$- (-2)\cdot(5-9t)\cdot(-2) - (-2)\cdot(-2)\cdot(5-9t) - (-4)\cdot(-4)\cdot(8-9t)$$
$$= (25-90t+81t^2)(8-9t) - 16 - 16 - 4(5-9t) - 4(5-9t) - 16(8-9t)$$
$$= 200 - 225t - 720t + 810t^2 + 648t^2 - 729t^3 - 32 - 20 + 36t - 20 + 36t$$
$$- 128 + 144t$$
$$= -729t^3 + 1458t^2 - 729t$$

Wann ist A_t singulär (= nicht regulär)?

A_t regulär $\Leftrightarrow \det A_t \neq 0$ $\Rightarrow \det A_t = 0 \Leftrightarrow A_t$ singulär

$\det A_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -729t^3 + 1458t^2 - 729t = 0$

$\Leftrightarrow t \cdot (-729t^2 + 1458t - 729) = 0$

$\Leftrightarrow (t=0) \vee (-729t^2 + 1458t - 729 = 0)$

$\Leftrightarrow (t=0) \vee \left(t_{1,2} = \dfrac{-1458 \pm \sqrt{(1458)^2 - 4(-729)\cdot(-729)}}{2\cdot(-729)} \right)$

$\Leftrightarrow (t=0) \vee \left(t_{1,2} = \dfrac{-1458 \pm \sqrt{2125764 - 2125764}}{-1458} \right)$

$\Leftrightarrow (t=0) \vee (t=1)$

$\Rightarrow A_t$ singulär $\Leftrightarrow (t=0) \vee (t=1)$

ges: Rang aller A_t $t \in \mathbb{R}$

Wenn $t \neq 0 \wedge t \neq 1$ ist $\det(A_t) \neq 0 \Rightarrow rg(A_t) = 3$

Bei $t=0$ $A_t = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 9 & -18 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow rg(A_0) = 2$

Bei $t=1$ $A_t = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow rg(A_1) = 1$