LINAG Ü14

12.3.1. $(\mathbb{R}^{3\times 1}, \iota)$ ... pseudoeuklidisch $\iota(E,E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$f \in L(\mathbb{R}^{3\times 1}, \mathbb{R}^{3\times 1})$ $\quad \langle E^*, f(E)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

ges: $\langle E^*, \hat{f}(E)\rangle$

$\iota(E,E)$ ist die zu E reziproke Basis, da $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ 1, & \text{falls } i = j \end{cases}$

Nach A 12.1.4. gilt

$$\langle E^*, \hat{f}(E)\rangle = \iota(E,E)^{-1} \cdot \langle E^*, f(E)\rangle^T \cdot \iota(E,E)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \iota(E,E) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -1 \cdot \langle E^*, f(E)\rangle$$

Ist f normal?

$\forall x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$: $\hat{f}(x) = -f(x)$, da $\hat{f}(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3) = x_1 \cdot \hat{f}(e_1) + x_2 \cdot \hat{f}(e_2) + x_3 \cdot \hat{f}(e_3)$

$$= -x_1 f(e_1) - x_2 \cdot f(e_2) - x_3 \cdot f(e_3) = -f(x)$$

$\Rightarrow \forall x,y \in \mathbb{R}^{3\times 1}$: $\hat{f}(x) \cdot \hat{f}(y) = (-f(x)) \cdot (-f(y)) = (-1)(-1) \cdot f(x) \cdot f(y) = f(x) \cdot f(y)$

$\Rightarrow f$ ist normal

$(f \circ \hat{f})(x) = f(\hat{f}(x)) = f(-f(x)) = -f(f(x))$

$(\hat{f} \circ f)(x) = \hat{f}(f(x)) = -f(f(x))$