ANA Ü6

3.) $Q[a,b]$ ... Menge aller stückweise stetigen Funktionen auf $[a,b]$

N ... Menge aller Funktionen auf $[a,b]$ mit $f(t)=0$ für fast alle $t\in[a,b]$

zz: $Q[a,b]$ ist ein $VR/_{\mathbb{R}}$

Sei $f,g \in Q[a,b]$ und $c,d \in \mathbb{R}$ bel.

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ ist eine stückweise stetige Funktion auf $[a,b]$

$(c\cdot f)(x) = c\cdot f(x)$ —— " ——

$\Rightarrow (f+g), (c\cdot f) \in Q[a,b]$

$c(f+g)(x) = c\cdot f(x) + c\cdot g(x)$ $\quad ((c+d)f)(x) = c\cdot f(x) + d\cdot f(x)$

$((c\cdot d)\cdot f)(x) = c\cdot d\cdot f(x)$ $\quad (1\cdot f)(x) = f(x)$

zz: N ist UR von $Q[a,b]$

$\forall x \in N: x \in Q[a,b]$, da:

$\exists c_1, c_2, \dots, c_n \in [a,b]: f(c_i) \neq 0 \quad \forall c \notin \{c_1, c_2, \dots, c_n\}: f(c) = 0$

Dann ist $a, c_1, c_2, \dots, c_n, b$ eine Zerlegung, sodass sich $f|_{(c_i, c_{i+1})}$ stetig auf $[c_i, c_{i+1}]$ fortsetzen lässt (als konstante Nullfunktion).

Sei $f,g \in N$ und $c \in \mathbb{R}$ bel.

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ und ist somit auch fast immer gleich 0

$(c\cdot f)(x) = c\cdot f(x)$ —— " ——

zz: $h: (c, f+N) \longmapsto c + \int_a^x f(t)\,dt$ ist wohldefiniert, linear und bijektiv als Abbildung von $\mathbb{R}\times(Q[a,b]/N)$ nach $\{F\in C[a,b]: F$ ist stückweise stetig differenzierbar auf $[a,b]\}$

wohldefiniert also zz jeder Repräsentant von N liefert selben Funktionswert

Sei $c\in\mathbb{R}$ $f\in Q[a,b]$ und $g\in N$ bel.

$h(c, f+g) = c + \int_a^x (f+g)(t)\,dt = c + \int_a^x f(t)\,dt + \int_a^x g(t)\,dt = c + \int_a^x f(t)\,dt$

da $g(t)$ fast immer 0 ist. Offensichtlich liegt das Bild in $\{F\in C[a,b]: \dots\}$

linear also zz: $h(c+d, (f+f')+N) = h(c, f+N) + h(d, f'+N)$

$h(c+d, (f+f')+N) = c+d+\int_a^x f(x)\,dx + \int_a^x f'(x)\,dx = h(c, f+N) + h(d+f'+N)$

...

ANA Ü6

3.) ... bijektiv zz: $\exists h^{-1}: \{F \in C[a,b] : \ldots\} \longrightarrow \mathbb{R} \times (Q[a,b]/N) : h \circ h^{-1} = id$

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f \in Q[a,b]$ bel.

$(h(c, f+N))' = (c + \int_a^x f(t)\,dt)' = (c + F(x) - F(a))' = F(x)' = f(+N)$

$h(c, f+N) - \int_a^x f(t)dt = c + \int_a^x f(t)dt - \int_a^x f(t)\,dt = c$

$\Rightarrow h^{-1}: g(x) \longmapsto (g - \int_a^x g'(t)\,dt,\ g'(t))$ $\Rightarrow h \ldots$ bijektiv