ANA Ü1

5.) zz: $\sinh|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ bel. mit $a < b$.

$a < b \iff \exp(a) < \exp(b)$

$a < b \iff -a > -b \iff \exp(-a) > \exp(-b)$

$\iff -\exp(-a) < -\exp(-b)$

$\Rightarrow \exp(a) - \exp(-a) < \exp(b) - \exp(-b)$

$\iff \frac{\exp(a) - \exp(-a)}{2} < \frac{\exp(b) - \exp(-b)}{2} \iff \sinh(a) < \sinh(b)$

zz: $\operatorname{areasinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} := \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ ist $\sinh|_{\mathbb{R}}^{-1}$

$$\sinh(\ln(x+\sqrt{x^2+1})) = \frac{\exp(\ln(x+\sqrt{x^2+1})) - \exp(-\ln(x+\sqrt{x^2+1}))}{2}$$

$$= \frac{(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})}}{2} = \frac{\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2 - 1}{(x+\sqrt{x^2+1})}}{2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 - 1}{2x + 2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x\,(x+\sqrt{x^2+1})}{2\,(x+\sqrt{x^2+1})} = x$$

Da inverse Funktion existiert $\Rightarrow \sinh|_{\mathbb{R}}$ ist bijektiv $\Rightarrow \sinh|_{\mathbb{R}}$ ist surjektiv

zz: $\operatorname{areasinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig

x^2+1 ist als Polynomfunktion stetig. Wurzelfunktion ist stetig

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1}$ ist stetig

x ist als Polynomfunktion stetig. $\ln$ ist stetig

$\Rightarrow x + \sqrt{x^2+1}$ ist stetig $\Rightarrow \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ist stetig