ANA ÜG

8.) $(X, \|.\|_X)$ ... normierter Raum $\quad (Y, \|.\|_Y)$ ... Banachraum

$T: X \to Y$ ... linear, beschränkt, bijektiv $\quad T^{-1}: Y \to X$ ... beschränkt

zz: $(X, \|.\|_X)$ ... Banachraum

Da Y ein Banachraum ist gilt $\forall (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Cauchy-Folge aus Y mit der Metrik $d_{\|.\|_Y}$, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} y \in Y$.

Aus der Beschränktheit von T und T^{-1} folgt deren (gleichmäßige) Stetigkeit. (Satz 9.2.6.), d.h. $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall a,b\in X: d(a,b)_{\|.\|_X}<\delta \Rightarrow d(T(a),T(b))_{\|.\|_Y}<\varepsilon$

und $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall a,b\in Y: d(a,b)_{\|.\|_Y}<\delta \Rightarrow d(T^{-1}(a),T^{-1}(b))_{\|.\|_X}<\varepsilon$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X, d.h.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m\geq N: d(x_n,x_m)_{\|.\|_X}<\varepsilon$$

$(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in Y

Sei $\varepsilon>0$ bel. Wähle $\delta>0$, so dass $\forall a,b\in X: d(a,b)_{\|.\|_X}<\delta \Rightarrow d(T(a),T(b))_{\|.\|_Y}<\varepsilon$

Wähle N, so dass $\forall n,m\geq N: d(x_n,x_m)_{\|.\|_X}<\delta$

Dann ist $\forall n,m\geq N: d(T(x_n),T(x_m))_{\|.\|_Y}<\varepsilon$

$\Rightarrow (T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge

Das heißt $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $y\in Y$.

$x := T^{-1}(y) \in X$

Da T^{-1} (gleichmäßig) stetig ist konvergiert $T^{-1}(T(x_n))$ gegen $T^{-1}(T(x))=x$

$\Rightarrow (X, \|.\|_X)$ ist ein Banachraum