LINAG Ü13

11.3.2. $(V, \langle\ \rangle)$... euklidischer oder unitärer VR $\quad U$... UR von V

$p: V \to U$ ... Projektion

zz: p... Orthogonalprojektion $\Leftrightarrow \forall a \in V: \|p(a)\| \leq \|a\|$

$\Rightarrow$ $\quad U \oplus U^\perp = V \quad a = s + t$ mit $s \in U$ und $t \in U^\perp$ beliebig

$$\|p(a)\|^2 = \|s\|^2 = \sqrt{s \cdot s}^2 = s \cdot s \leq s \cdot s + t \cdot t = s \cdot s + (-t) \cdot (-t) = (s - (-t)) \cdot (s - (-t)) = \|s + t\|^2$$

positiv definit $\qquad \langle s, -t\rangle = -\langle s, t\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \|p(a)\| \leq \|a\|$

$\Leftarrow$ indirekt angenommen $\forall v \in V: \|p(v)\| \leq \|v\| \wedge \neg p$... Orthogonalprojektion

$U \oplus S = V$ mit $\exists u \in U\ \exists s \in S: u \not\perp s$

Falls $\mathrm{Re}(u \cdot s) \neq 0$: $\exists c \in \mathbb{R}: \underbrace{s \cdot s}_{\in \mathbb{R}} \leq c \cdot \underbrace{\mathrm{Re}(u \cdot s)}_{\in \mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathrm{Re}(c \cdot u \cdot s)$

Falls $\mathrm{Re}(u \cdot s) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(u \cdot s) \neq 0 \quad \exists c \in \mathbb{R}: \underbrace{s \cdot s}_{\in \mathbb{R}} \leq c \cdot \underbrace{\mathrm{Im}(u \cdot s)}_{\in \mathbb{R}} = c \cdot \mathrm{Re}(-i \cdot u \cdot s) = \mathrm{Re}(-i c \cdot u \cdot s)$

$a := \frac{-c}{2}$ im 1. Fall $\quad a := -i \frac{c}{2}$ im 2. Fall

$$\|a \cdot u + s\|^2 = (a \cdot u + s)(a \cdot u + s) = a \cdot \bar{a} \cdot u \cdot u + (a \cdot u) \cdot s + \underbrace{s \cdot (a \cdot u)}_{= \overline{(a \cdot u) \cdot s}} + s \cdot s = |a|^2 u \cdot u + 2\mathrm{Re}((a \cdot u) \cdot s) + s \cdot s$$

$$= |a|^2 \cdot u \cdot u + 2\,\mathrm{Re}(\bar{a} \cdot (u \cdot s)) + s \cdot s$$

1. Fall: $|a|^2 \cdot u \cdot u + 2\,\mathrm{Re}(\underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} \cdot (u \cdot s)) + s \cdot s = |a|^2 \cdot u \cdot u + \cancel{2} \frac{-c}{\cancel{2}} \mathrm{Re}(u \cdot s) + s \cdot s$

$$= |a|^2 \cdot u \cdot u \underbrace{- c \cdot \mathrm{Re}(u \cdot s) + s \cdot s}_{\leq 0} \geq |a|^2 \cdot u \cdot u = a \cdot \bar{a} \cdot u \cdot u = (a \cdot u)(a \cdot u) = \|a \cdot u\|^2 \ \lightning$$

2. Fall: $|a|^2 \cdot u \cdot u + 2\,\mathrm{Re}(i \cdot \frac{c}{2} (u \cdot s)) + s \cdot s = |a|^2 \cdot u \cdot u + 2 \frac{-c}{2} \mathrm{Re}(-i (u \cdot s)) + s \cdot s$

$$= |a|^2 \cdot u \cdot u \underbrace{- c \cdot \mathrm{Im}(u \cdot s) + s \cdot s}_{\leq 0} \geq |a|^2 \cdot u \cdot u = \|a \cdot u\|^2 \ \lightning$$

zu $\forall v \in V: \|p(v)\| \leq \|v\|$