LINAG Ü9

8.8.4 $V \ldots VR/\mathbb{C}$ mit den Operationen aus $(V, \mathbb{C})$ ist V ein $VR/\mathbb{R}$

$B = (b_j)_{j \in I} \ldots$ Basis von $(V, \mathbb{C})$

ges: Basis von $(V, \mathbb{R})$ und zz: $2 \cdot \dim(V, \mathbb{C}) = \dim(V, \mathbb{R})$

$\tilde{B} = (b_1, i \cdot b_1, b_2, i \cdot b_2, \ldots)$

l.u: Indirekt Angenommen $(b_1, i \cdot b_1, b_2, i b_2, \ldots)$ ist l.a in $(V, \mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists x_j, y_j \in \mathbb{R}$ (zumindest eines $\neq 0$) $\sum_{j \in I} x_j b_j + i \sum_{j \in I} y_j b_j = \theta$

$\Rightarrow \sum_{j \in I} (x_j + i y_j) b_j = \theta$ ↯ zu B ist in $(V, \mathbb{C})$ l.u.

ES: Sei $v \in (V, \mathbb{R})$ bel. $\Rightarrow v \in (V, \mathbb{C})$

$\Rightarrow \exists x_j, y_j \in \mathbb{R} : \sum_{i \in I} (x_j + i y_j) b_i = v$

$\Rightarrow \sum_{j \in I} x_j b_j + \sum_{j \in I} y_j (i \cdot b_j) = v$ also kann v als LK von $\tilde{B}$ dargestellt werden

$\Rightarrow \tilde{B}$ ist eine Basis von $(V, \mathbb{R})$

In einem VR über einen Körper ist jede Basis gleich mächtig.

$\Rightarrow$ jede Basis von $(V, \mathbb{R})$ ist im endlich dimensionalen Fall "doppelt so mächtig" wie $(V, \mathbb{C})$ aka. $\dim(V, \mathbb{R}) = 2 \cdot \dim(V, \mathbb{C})$

Wenn $V = \mathbb{C}$ z.B: $B = (1) \ldots$ Basis von $(V, \mathbb{C})$

$\Rightarrow \tilde{B} = (1, i) \ldots$ Basis von $(V, \mathbb{R})$ wie zu erwarten