ANA Ü11

4.) $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ t \end{pmatrix}$ $\qquad \Phi: \mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ x & y \end{pmatrix}$

ges: $\int_\gamma \Phi(x)\,dx$

$\tilde{\gamma}: [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ ist zu γ äquivalent, da für $\alpha(t) = \sqrt{t}$ $\tilde{\gamma} \circ \alpha = \gamma$ und α monoton wachsend und bijektiv ist.

$\Rightarrow \int_\gamma \Phi(x)\,dx = \int_{\tilde{\gamma}} \Phi(x)\,dx$

Da $\tilde{\gamma}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar und Φ stetig ist folgt

$\int_{\tilde{\gamma}} \Phi(x)\,dx = \int_0^1 \Phi(\tilde{\gamma}(t))\,\tilde{\gamma}'(t)\,dt$

$\tilde{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

$\int_{\tilde{\gamma}} \Phi(x)\,dx = \int_0^1 \Phi\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} e^t & e^{(t^2)} \\ t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} e^t + 2t \cdot e^{(t^2)} \\ t + 2t^3 \end{pmatrix} dt$

$\int e^t + 2 \cdot t \cdot e^{t^2}\,dt = e^t + 2 \cdot \int t \cdot e^{t^2}\,dt$ $\qquad u = t^2 \quad \frac{du}{dt} = 2t \quad dt = \frac{1}{2t} \cdot du$

$= e^t + \cancel{2} \int \cancel{t} \cdot e^u \cdot \frac{1}{\cancel{2t}}\,du = e^t + e^u = e^t + e^{t^2}$

$\int t + 2t^3\,dt = \int t\,dt + 2 \int t^3\,dt = \frac{1}{2}t^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}t^4 = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4$

$\Rightarrow \int_{\gamma} \Phi(x)\,dx = \begin{pmatrix} e^1 + e^{(1^2)} - e^0 - e^{(0^2)} \\ \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e - 2 \\ 1 \end{pmatrix}$