LINAG ÜM

9.2.3. $K^{\langle\mathbb{N}\rangle}$ ... VR. $\quad 6_1 : K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \times K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K : ((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_j)_{j\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i y_i$

$6_2 : K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \times K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K : ((x_i), (y_j)) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \, y_{i+1}$

$6_3 : K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \times K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K : ((x_i), (y_j)) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} x_{i+1} y_i$

a) ges: Bilder der kanonischen Basisvektoren unter Abbildung $d_k := d_{6_k}$ $\quad k \in \{1,2,3\}$

$B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ... kanonische Basis

$d_1(B) = \{6_1(b_j, .) : j \in \mathbb{N}\} = \{f : K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} (b_j)_i \cdot x_i = x_j\}$

$d_2(B) = \{6_2(b_j, .) : j \in \mathbb{N}\} = \{f : K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} (b_j)_i \cdot x_{i+1} = x_{j+1}\}$

$d_3(B) = \{6_3(b_j, .) : j \in \mathbb{N}\} = \{f : K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \to K : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} (b_j)_{i+1} \cdot x_i = \begin{cases} x_{j-1} & \text{falls } j > 1 \\ 0 & \text{falls } j = 1 \end{cases}\}$

b) zz: 6_1 ist nicht ausgeartet $\quad (\forall x \in K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \setminus \{0\} \, \exists b \in K^{\langle\mathbb{N}\rangle} : 6_1(x,b) \neq 0$
$\forall y \in K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \setminus \{0\} \, \exists a \in K^{\langle\mathbb{N}\rangle} : 6_1(a,y) \neq 0)$

Sei $x \in K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \setminus \{0\}$ bel.

$6_1(x,x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \cdot x_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} (x_i)^2 > 0$, da $\exists i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0$ sonst $x = 0$

Gleich für $y \in K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \setminus \{0\}$ $\quad \Rightarrow 6_1$ ist nicht ausgeartet

- zz: 6_2 erfüllt genau eine der beiden Eigenschaften von nicht ausgearteten Bilinearformen

Sei $x \in K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \setminus \{0\}$ bel. $\quad \forall i \in \mathbb{N} \quad b_i := x_{i-1}$ falls $i > 1$ $\;0$ sonst

$6_2(x,b) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \cdot b_{i+1} = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \cdot x_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} (x_i)^2 > 0$

Für $y_i = 1$ falls $i = 1$ sonst 0 ist für alle $a \in K^{\langle\mathbb{N}\rangle}$

$6_2(a,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \cdot y_{i+1} = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \cdot 0 = 0 \quad$ aber $y \neq 0$

- zz: 6_3 erfüllt genau eine der beiden Eigenschaften von nicht ausgearteten Bilinearformen

Sei $y \in K^{\langle\mathbb{N}\rangle} \setminus \{0\}$ bel. $\quad \forall i \in \mathbb{N} \quad a_i := y_{i-1}$ falls $i > 1$ $\;0$ sonst

$6_3(a,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{i+1} \cdot y_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} y_i \cdot y_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} (y_i)^2 > 0$

Für $x_i = 1$ falls $i = 1$ sonst 0 ist für alle $b \in K^{\langle\mathbb{N}\rangle}$

$6_3(x,b) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_{i+1} \cdot b_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} 0 \cdot b_i = 0 \quad$ aber $x \neq 0$