ANA Ü11

1.) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad V_x^y(f) := l(f|_{[x,y]})$ mit $a \leq x \leq y \leq b$

i) f, g ... von beschränkter Variation (also rektifizierbar) $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

zz: $f+g$, $\lambda \cdot f$ sind von beschränkter Variation und

$V_x^y(f+g) \leq V_x^y(f) + V_x^y(g)$ und $V_x^y(\lambda \cdot f) = |\lambda| \cdot V_x^y(f)$

- $l(f+g) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} L(Z) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} \|(f+g)(\xi_j) - (f+g)(\xi_{j-1})\|_2 \right)$

$= \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} \| f(\xi_j) - f(\xi_{j-1}) + g(\xi_j) - g(\xi_{j-1}) \|_2 \right) \leq \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} \| f(\xi_j) - f(\xi_{j-1}) \|_2 + \right.$

$\left. \| g(\xi_j) - g(\xi_{j-1}) \|_2 \right) \leq \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} \| f(\xi_j) - f(\xi_{j-1}) \|_2 \right) + \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} \| g(\xi_j) - g(\xi_{j-1}) \|_2 \right)$

$= l(f) + l(g) < \infty$

- gleiche Rechnung mit $f|_{[x,y]}$ und $g|_{[x,y]}$ ergibt: $V_x^y(f+g) \leq V_x^y(f) + V_x^y(g)$
- $l(\lambda \cdot f) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} \|(\lambda \cdot f)(\xi_j) - (\lambda \cdot f)(\xi_{j-1})\|_2 \right) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} \| \lambda \cdot (f(\xi_j) - f(\xi_{j-1})) \|_2 \right)$

$= \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} |\lambda| \cdot \| f(\xi_j) - f(\xi_{j-1}) \|_2 \right) = |\lambda| \cdot \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} \| f(\xi_j) - f(\xi_{j-1}) \|_2 \right) = |\lambda| \cdot l(f)$

- gleiche Rechnung mit $f|_{[x,y]}$ ergibt: $V_x^y(\lambda \cdot f) = |\lambda| \cdot V_x^y(f)$

ii) f ... monoton wachsend $\quad$ zz: $V_x^y(f) = f(y) - f(x)$

$V_x^y(f) = l(f|_{[x,y]}) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} \| f(\xi_j) - f(\xi_{j-1}) \|_2 \right) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} \underbrace{| f(\xi_j) - f(\xi_{j-1}) |}_{\geq 0 \text{, da monoton wachsend}} \right)$

$= \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(f(\xi_1) - f(x) + f(\xi_1) - f(\xi_2) + \ldots + f(y) - f(\xi_{n-1}) \right) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(f(y) - f(x) \right) = f(y) - f(x)$

iii) g, h ... monoton wachsende Funktionen $\quad f := g - h \quad$ zz: f ist von beschränkter Variation

$l(f) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} \|(g-h)(\xi_j) - (g-h)(\xi_{j-1})\|_2 \right) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} | g(\xi_j) - h(\xi_j) - g(\xi_{j-1}) + h(\xi_{j-1}) | \right)$

$\leq \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} | g(\xi_j) - g(\xi_{j-1}) | + | -h(\xi_j) + h(\xi_{j-1}) | \right) \leq \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} | g(\xi_j) - g(\xi_{j-1}) | \right) + \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{j=1}^{n(Z)} | h(\xi_j) - h(\xi_{j-1}) | \right)$

$= g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty$, wenn g und h von beschränkter Variation

Für $g(t) = \tan(t)$, $h(t) = 0$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ und $f(t) = g(t) - h(t) = \tan(t)$

ist zwar f Differenz monoton wachsender Funktionen (im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$), jedoch

ist $V_0^{\frac{\pi}{2}}(f) = \lim_{y \to \frac{\pi}{2}} (f(y)) - f(0) = +\infty$ also nicht von beschränkter Variation. (da auch

g nicht von beschränkter Variation ist).

...

ANA Ü11

1) iv) ...

zz: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ...von beschränkter Variation $\Rightarrow \exists g, h:[a,b] \to \mathbb{R}$, monoton wachsend:

$f = g - h$

Sei f bel.

$g(t) := V_a^t(f)$ offensichtlich ist g monoton wachsend

$f = g - h \Leftrightarrow h = g - f$; $h(t) := g(t) - f(t) = V_a^t(f) - f(t)$

Aus Punkt ii) folgt $h(t) = f(t) - f(a) - f(t) = f(a)$

$\Rightarrow h(t)$ ist konstant und damit monoton wachsend.

Nach der Konstruktion von g und h ist f die Differenz monoton wachsender Funktionen.