MAS Ü9

1.) $C = \{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{3^n} : a_n \in \{0,2\} \}$

zz: C ist überabzählbar

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\cdots$
s_1	0	0	0	0	0	$\cdots$
s_2	2	2	2	2	2	$\cdots$
s_3	0	2	0	2	0	$\cdots$
s_4	2	0	2	0	2	$\cdots$
s_5	2	2	0	2	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Angenommen C ist abzählbar, dann $\exists$ Auflistung aller Elemente wie links (wobei $s_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{3^n}$ mit a_n wie angegeben).

s wird so definiert, dass die a_n die umgekehrten der eingekreisten a_n sind (also 2 0222 ...)

s ist nicht in der Auflistung enthalten, da sich s von jedem s_n in der n-ten Stelle unterscheidet. $\lightning$, da $s \in C$ aber s nicht in der Auflistung enthalten $\Rightarrow$ C ist überabzählbar.

ges: $\lambda(C)$

$C_n = \{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{3^k} : a_k \in \begin{cases} \{0,2\} & \text{für } k \leq n \\ \{0,1,2\} & \text{sonst} \end{cases} \}$ $\lim_{n \to \infty} C_n = C$

$\lambda(C_0) = \lambda([0,1]) = 1$

$\lambda(C_n) = \frac{2}{3} \cdot \lambda(C_{n-1})$ da das mittlere Drittel jedes Teilintervalles entfernt wird.

$\Rightarrow \lambda(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\lim_{n \to \infty} \lambda(C_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

MAS Ü9

2.) C... Cantormenge

$$c(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} & \text{wenn } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in C \ (a_n \in \{0,2\}) \\ \sup\{c(y) : y \in C, y \leq x\} & \text{wenn } x \in [0,1] \setminus C \end{cases}$$

zz: c ist monoton und surjektiv

Sei $x, y \in [0,1]$ bel. $x < y$

1. Fall: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in C \wedge y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} \in C$

$c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$ $\quad c(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}}$ $\quad$ da $x < y \Rightarrow c(x) \leq c(y)$

2. Fall: $x \in C \wedge y \notin C$

$c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$ $\quad c(y) = \sup\{c(z) : z \in C, z \leq y\}$

$x \in \{z \in C, z \leq y\} \Rightarrow c(x) \in \{c(z) : z \in C, z \leq y\}$

$\Rightarrow c(x) \leq c(y)$

3. Fall: $x \notin C \wedge y \in C$

$c(x) = \sup\{c(z) : z \in C, z \leq x\}$ $\quad c(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}}$

$\forall z \in C, z < y : c(z) < c(y) \Rightarrow c(x) \leq c(y)$

4. Fall $x \notin C \wedge y \notin C$

$c(x) = \sup\{c(z) : z \in C, z \leq x\}$ $\quad c(y) = \sup\{c(z) : z \in C, z \leq y\}$

$\Rightarrow c(x) \leq c(y)$

Sei $y \in [0,1]$ bel. $\exists a_n \in \{0,1\} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = y$

$x := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot a_n}{3^n} \in C$ mit $c(x) = y$ $\quad \Rightarrow$ monoton, surjektiv und stetig

ges: $c'(x)$ für $x \in [0,1] \setminus C$

Sei $x \in [0,1] \setminus C$ bel. $\exists \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(x) \cap C = \emptyset$

$\Rightarrow c|_{U_\varepsilon(x)}$ ist konstant $\Rightarrow (c|_{U_\varepsilon(x)})'(x) = 0 \Rightarrow c'(x) = 0$

MAS Ü9

3.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ... überall differenzierbar

zz: f' ist borelmessbar

f überall diffbar $\Rightarrow$ f überall stetig $\Rightarrow$ f borelmessbar

$$f_n(x) := \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$: f_n ist stetig, da aus stetigen Funktionen zusammengesetzt

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$: f_n ist borelmessbar

$\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f' ist borelmessbar (Satz 4.8)