MAS Ü10

6.) $f_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \le \omega \le \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

zz: f_n konvergiert in $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ im Maß

$n=0 \quad \sqrt{0} - \lfloor\sqrt{0}\rfloor \le \omega \le \sqrt{1} - \lfloor\sqrt{0}\rfloor \iff 0 \le \omega \le 1$

$n=1 \quad \sqrt{1} - \lfloor\sqrt{1}\rfloor \le \omega \le \sqrt{2} - \lfloor\sqrt{1}\rfloor \iff 0 \le \omega \le \sqrt{2} - 1$

$n=2 \quad \sqrt{2} - \lfloor\sqrt{2}\rfloor \le \omega \le \sqrt{3} - \lfloor\sqrt{2}\rfloor \iff \sqrt{2} - 1 \le \omega \le \sqrt{3} - 1$

$n=3 \quad \sqrt{3} - \lfloor\sqrt{3}\rfloor \le \omega \le \sqrt{4} - \lfloor\sqrt{3}\rfloor \iff \sqrt{3} - 1 \le \omega \le \sqrt{4} - 1$

$\forall n \in \mathbb{N}: \lambda([\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]) = \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor - (\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)$

$= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda([\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

im Maß konvergent: $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\{\omega \in [0,1] : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\}) = 0$

$f(\omega) = 0$ Sei $\varepsilon > 0$ bel.

$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\{\omega \in [0,1] : |f_n(\omega)| > \varepsilon\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\{\omega \in [\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\})$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \lambda([\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]) = 0$

$\Rightarrow f_n$ konvergiert im Maß

zz: f_n konvergiert nicht fast überall

fast überall konvergent: $\exists N$.. Nullmenge : f_n auf N^c punktweise gegen f konvergiert

Zwischen $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ und $\sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ liegen für alle $n \in \mathbb{N}$ überabzählbar viele Werte. (Für diese gilt $f_n(\omega) = 1$) Da N eine Nullmenge ist (also nur abzählbar viele Elemente enthält) kann N nicht ganz $[\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]$ enthalten.

$\Rightarrow f_n$ konvergiert nicht fast überall