MAS Ü6

3.) $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5\}\}$ $\quad \Omega = \{1,2,3,4,5\}$

$\mu(\emptyset) = 0 \quad \mu(\{1,2\}) = 0 \quad \mu(\{3,4\}) = 2 \quad \mu(\{5\}) = 1$

erzeugter Ring: $\{\emptyset, \{5\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,5\}, \{3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\} =: R$

$\mu(\{1,2,5\}) = 1 \quad \mu(\{3,4,5\}) = 3 \quad \mu(\{1,2,3,4\}) = 2 \quad \mu(\Omega) = 3$

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } A \subseteq \{1,2\} \\ 1 & \text{, falls } 5 \in A \wedge \neg(3 \in A \vee 4 \in A) \\ 2 & \text{, falls } \neg(5 \in A) \wedge (3 \in A \vee 4 \in A) \\ 3 & \text{, falls } 5 \in A \wedge (3 \in A \vee 4 \in A) \end{cases}$$

(Def $\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) : E_n \in R, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\}$)

M... System der messbaren Mengen

Aus Satz 2.26: M ist eine Sigmaalgebra und $R \subseteq M$

(Def $M = \{A \subseteq \Omega : \forall B \subseteq \Omega : \mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(B \setminus A)\}$)

$\{1\}$ $\quad \underbrace{\mu^*(\{1\} \cap B)}_{=0} + \mu^*(B \setminus \{1\}) = \mu^*(B \setminus \{1\}) = \mu^*(B)$ messbar

$\{2\}$ —— 11 —— messbar

$\{3\}$ $\quad \mu^*(\{3\} \cap \{3,4,5\}) + \mu^*(\{3,4,5\} \setminus \{3\}) = 2 + 3 = 5$

$\mu^*(\{3,4,5\}) = 3$ nicht messbar

$\{4\}$ —— 11 —— nicht messbar

$\{1,3\}$ $\mu^*(\{1,3\} \cap \{3,4,5\}) + \mu^*(\{3,4,5\} \setminus \{1,3\}) = 2 + 3 = 5$ nicht messbar

$\{1,4\}$ — 11 — $\quad \{2,3\}$ — 11 — $\{2,4\}$ — 11 — nicht messbar

$\{1,2,3\}$ $\mu^*(\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\}) + \mu^*(\{3,4,5\} \setminus \{1,2,3\}) = 2 + 3 = 5$ nicht messbar

$\{1,2,4\}$ — 11 — nicht messbar

⋮

Alle Mengen die entweder (nicht 3 und nicht 4) oder (3 und 4) enthalten ist klar, dass sie in M liegen, da M eine Sigmaalgebra ist.

Mengen, die entweder 3 oder 4 enthalten:

$\mu^*(A \cap \Omega) + \mu^*(\Omega \setminus A) \geq 2 + 2 = 4 > \mu^*(\Omega)$