LINAG Ü14

12.1.2. V .. VR/K $\dim V = n < \infty$ $f \in L(V,V)$

Wie unterscheiden sich die Koeffizienten von $\chi_f(X)$ und $\chi_{\hat f}(X)$?

Sei B eine Basis von V. Nach Satz 11.4.2. existiert eine reziproke Basis $\hat B$.

Nach Satz 12.1.9 gilt:

$$\underbrace{\omega(\langle B^*, f(B)\rangle^T)}_{\tilde f} = \langle \hat B^*, \hat f(\hat B)\rangle = \langle \hat B^*, \hat B\rangle^{-1} \cdot \langle B^*, f(B)\rangle \cdot \langle B^*, \hat B\rangle$$

$\Rightarrow \chi_{\tilde f}(X) = \chi_{\hat f}(X)$ da die Matrizen ähnlich sind

$$\det(\langle B^*, f(B)\rangle - X \cdot E_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-X & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-X \end{pmatrix} = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})X^{n-1} + \ldots + \det(\langle B^*, f(B)\rangle)$$

$$= \chi_f(X)$$

$$\det(\overset{\omega}{(}\langle B^*, f(B)\rangle) - X \cdot E_n) = \det \begin{pmatrix} \omega(a_{11})-X & \omega(a_{12}) & \cdots & \omega(a_{1n}) \\ \omega(a_{21}) & \omega(a_{22})-X & \cdots & \omega(a_{2n}) \\ \vdots & & \ddots & \\ \omega(a_{n1}) & \cdots & & \omega(a_{nn})-X \end{pmatrix} = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(\omega(a_{11}) + \ldots \omega(a_{nn}))X^{n-1} + \ldots + \det(\omega(\langle B^*, f(B)\rangle))$$

$$= \det(\omega(\langle B^*, f(B)\rangle)^T - X \cdot E_n)$$

$$= \chi_{\tilde f}(X)$$

$\Rightarrow$ Wenn $\chi_f(X) = c_n \cdot X^n + c_{n-1} \cdot X^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot X + c_0$, dann

ist $\chi_{\hat f}(X) = \omega(c_n) \cdot X^n + \omega(c_{n-1}) \cdot X^{n-1} + \ldots + \omega(c_0)$