ANA Ü 11

8.) $G = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : b > 0, c > 0 \}$ $\quad K: G \longrightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1\times 3}$

$\beta \in \mathbb{R}$ $\quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto (\ln(b\cdot c), \frac{a}{b}, \beta \cdot \frac{a}{c})$

Für welche β ist K ein Gradientenfeld?

$\frac{\partial}{\partial a} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (0, \frac{1}{b}, \beta \cdot \frac{1}{c})$ $\quad \frac{\partial}{\partial b} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (\frac{1}{b\cdot c}\cdot c, a\cdot(-1)\cdot\frac{1}{b^2}, 0) = (\frac{1}{b}, -\frac{a}{b^2}, 0)$

$\frac{\partial}{\partial c} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (\frac{1}{b\cdot c}\cdot b, 0, \beta\cdot a\cdot(-1)\cdot\frac{1}{c^2}) = (\frac{1}{c}, 0, -\beta\cdot\frac{a}{c^2})$

$\frac{\partial}{\partial a} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot e_2 = \frac{1}{b}$ $\quad \frac{\partial}{\partial b} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot e_1 = \frac{1}{b}$ $\quad \frac{\partial}{\partial a} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e_3 = \beta\cdot\frac{1}{c}$ $\quad \frac{\partial}{\partial c} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e_1 = \frac{1}{c}$

$\frac{\partial}{\partial b} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot e_3 = 0$ $\quad \frac{\partial}{\partial c} K\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot e_2 = 0$ $\quad \Rightarrow$ für $\beta = 1$ ist K ein Gradientenfeld

(offensichtlich ist $G = (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty) \times (0, +\infty)$)

$\gamma(t) = t \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} + (1-t)\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ ges: $\int_\gamma K(x)\,dx$ $\quad$ für $\beta = 1$

Offensichtlich ist γ sssd. Da K ein Gradientenfeld ist (mit Stammfunktion f) ist

$\int_\gamma K(x)\,dx = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$

$\frac{\partial f}{\partial a}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \ln(b\cdot c)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial b}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{b}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial c}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{c}$

$\Rightarrow f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \int \ln(b\cdot c)\,da = \ln(b\cdot c)\cdot a + c(b,c)$

$\frac{\partial}{\partial b} \ln(b\cdot c)\cdot a + c(b,c) = a\cdot\frac{1}{b\cdot c}\cdot c + c'(b,c) = \frac{a}{b} + c'(b,c) = \frac{\partial f}{\partial b}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow c'(b,c) = 0$ $\quad \Rightarrow c(b,c) = c(c)$ $\quad \Rightarrow f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\cdot\ln(b\cdot c) + c(c)$

$\frac{\partial}{\partial c} a\cdot\ln(bc) + c(c) = a\cdot\frac{1}{b\cdot c}\cdot b + c'(c) = \frac{a}{c} + c'(c) = \frac{\partial f}{\partial c}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{c}$

$\Rightarrow c'(c) = 0$ $\quad \Rightarrow c(c) = 0$ $\quad \Rightarrow f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\cdot\ln(b\cdot c)$

$\Rightarrow \int_\gamma K(x)\,dx = f\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_0\cdot\ln(b_0\cdot c_0) - 0\cdot\ln(1) = a_0\cdot\ln(b_0\cdot c_0)$

$\beta = 2$: $\quad K$ ist auf G stetig $\quad \gamma \in C^1[0,1]$ mit $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nach Satz 11.2.5 gilt nun

$\int_\gamma K(x)\,dx = \int_0^1 K(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \left(\ln((t\cdot b_0 + 1 - t)\cdot(t\cdot c_0 + 1 - t)), \frac{t\cdot a_0}{t\cdot b_0 + 1 - t}, 2\cdot\frac{t\cdot a_0}{t\cdot c_0 + 1 - t}\right)\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 - 1 \\ c_0 - 1 \end{pmatrix} dt$

$= \int_0^1 a_0\cdot\ln(b_0\cdot c_0\cdot t^2 + b_0 t - b_0\cdot t^2 + c_0\cdot t + 1 - t - c_0\cdot t^2 - t + t^2) + (b_0 - 1)\frac{t\cdot a_0}{t\cdot b_0 + 1 - t} + 2\cdot(c_0 - 1)\frac{t\cdot a_0}{t\cdot c_0 + 1 - t}\,dt$

$= a_0\cdot\left(\int_0^1 \ln(t\cdot b_0 + 1 - t)\,dt + \int_0^1 \ln(t\cdot c_0 + 1 - t)\,dt\right) + a_0\cdot(b_0 - 1)\cdot\int_0^1 \frac{t}{t\cdot b_0 + 1 - t}\,dt + 2(c_0 - 1)\cdot a_0\cdot\int_0^1 \frac{t}{t\cdot c_0 + 1 - t}\,dt$

...

ANA Ü11

8.) ...

$$\int \ln(t\cdot b_0 + 1 - t)\,dt = \int \ln(t\cdot(b_0-1)+1)\,dt \qquad u = t\cdot(b_0-1) \quad \frac{du}{dt} = (b_0-1) \quad dt = \frac{1}{b_0-1}du$$

$$= \int \ln(u+1)\frac{1}{b_0-1}\,du = \frac{1}{b_0-1}\int \ln(u+1)\,du \qquad s = u+1 \quad \frac{ds}{du} = 1 \quad du = ds$$

$$= \frac{1}{b_0-1}\int \ln(s)\,ds = \frac{1}{b_0-1}\, s(\ln(s)-1) = \frac{1}{b_0-1}(u+1)(\ln(u+1)-1)$$

$$= \frac{1}{b_0-1}(t\cdot(b_0-1)+1)(\ln(t\cdot(b_0-1)+1)-1)$$

$$\int_0^1 \ln(t\cdot b_0 + 1 - t)\,dt = \frac{1}{b_0-1}(b_0-1+1)(\ln(b_0-1+1)-1) - \left(\frac{1}{b_0-1}(0+1)(\ln(1)-1)\right)$$

$$= \frac{1}{b_0-1}\,b_0(\ln(b_0)-1) + \frac{1}{b_0-1} = \frac{b_0\ln(b_0)-b_0+1}{b_0-1}$$

$$\int \frac{t}{t\cdot b_0+1-t}\,dt = \int \frac{1}{(1-b_0)(b_0t-t+1)} + \frac{1}{b_0-1}\,dt = \frac{1}{1-b_0}\int\frac{1}{b_0t-t+1}\,dt + \frac{1}{b_0-1}\int 1\,dt$$

$$= \frac{1}{1-b_0}\int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{b_0-1}\,du + \frac{1}{b_0-1}t \qquad \Big[\, u = b_0t - t + 1 \quad \frac{du}{dt} = b_0 - 1 \quad dt = \frac{1}{b_0-1}du$$

$$= \frac{1}{(1-b_0)(b_0-1)}\int \frac{1}{u}\,du + \frac{1}{b_0-1}t = \frac{1}{(1-b_0)(b_0-1)}\ln(b_0t-t+1) + \frac{1}{b_0-1}t$$

$$= -\frac{\ln(b_0t-t+1) + t(b_0-1)}{(b_0-1)^2} = \frac{t(b_0-1) - \ln(b_0t-t+1)}{(b_0-1)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{t}{t\cdot b_0+1-t}\,dt = \frac{(b_0-1)-\ln(b_0)}{(b_0-1)^2} - \frac{-\ln(1)}{(b_0-1)^2} = \frac{(b_0-1)-\ln(b_0)}{(b_0-1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \dots\, dt = a_0\left(\frac{b_0\ln(b_0)-b_0+1}{b_0-1} + \frac{c_0\ln(c_0)-c_0+1}{c_0-1}\right) + a_0(b_0-1)\frac{(b_0-1)-\ln(b_0)}{(b_0-1)^2} + 2(c_0-1)a_0\frac{(c_0-1)-\ln(c_0)}{(c_0-1)^2}$$

$$= a_0\left(\frac{b_0\ln(b_0)-b_0+1}{b_0-1} + \frac{c_0\ln(c_0)-c_0+1}{c_0-1}\right) + a_0\frac{(b_0-1)-\ln(b_0)}{(b_0-1)} + 2a_0\frac{(c_0-1)-\ln(c_0)}{(c_0-1)}$$

Falls $b_0 = 1 \wedge c_0 = 1$: $\int_0^1 \ln(t+1-t) = \int_0^1 \ln(1)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$

$$\int_0^1 \frac{t}{t+1-t}\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \dots\, dt = a_0(0+0) + a_0\underbrace{(b_0-1)}_{=0}\cdot\frac{1}{2} + 2\underbrace{(c_0-1)}_{=0}\cdot a_0\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Falls $b_0 = 1 \wedge c_0 \neq 1$ oder $b_0 \neq 1 \wedge c_0 = 1$:

$$\Rightarrow \int_0^1 \dots\, dt = a_0\left(0 + \frac{c_0\ln(c_0)-c_0+1}{c_0-1}\right) + a_0\underbrace{(b_0-1)}_{=0}\cdot\dots + 2(c_0-1)a_0\frac{(c_0-1)\ln(c_0)}{(c_0-1)^2}$$

$$= a_0\frac{c\ln(c_0)-c_0+1}{(c_0-1)} + 2a_0\frac{(c_0-1)\ln(c_0)}{(c_0-1)}$$

oder

$$\int_0^1 \dots\, dt = a_0\frac{b_0\ln(b_0)-b_0+1}{b_0-1} + a_0(b_0-1)\cdot\frac{(b_0-1)-\ln(b_0)}{(b_0-1)^2} = a_0\frac{b_0\ln(b_0)-b_0+1}{b_0-1} + a_0\frac{(b_0-1)-\ln(b_0)}{b_0-1}$$