LINAG Ü13

11.3.6 (V, ι) ... euklidischer oder unitärer VR $\qquad a \in V \setminus \{0\}$

$a_1 := \frac{1}{\|a\|} a \qquad$ Austausch von a durch normierten Vektor aus $[a]$ heißt Normierung

a) ges: alle normierten Vektoren aus $[a]$ (als skalare Vielfache von a_1)

Sei $v \in [a] \setminus \{0\}$ bel. $\exists c \in K: v = c \cdot a$

$\|v\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(c \cdot a)(c \cdot a)} = 1 \Leftrightarrow \bar{c} \cdot c (a \cdot a) = 1 \Leftrightarrow |c|^2 a \cdot a = 1$

Da ι positiv definit $\Rightarrow a \cdot a > 0$

Nach Hinweis $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ $\exists \vartheta \in \mathbb{R}: z = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = k$ $\exists \vartheta \in \mathbb{R}: z = k \cdot (\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta))$

$\|v\| = 1 \Leftrightarrow |c|^2 = \frac{1}{a \cdot a} \Leftrightarrow |c| = \sqrt{\frac{1}{a \cdot a}}$

$k := \sqrt{\frac{1}{a \cdot a}} \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = k$ $\exists \vartheta \in \mathbb{R}: z = k \cdot (\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta))$

Lösung: $\{ \frac{1}{\sqrt{a \cdot a}} (\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)) a : \vartheta \in \mathbb{R}$ (bzw $\vartheta \in [0, 2\pi]$), da periodisch)

Für V ... VR$/\mathbb{R}$ muss Imaginärteil Null sein (also sin bei ϑ eine Nullstelle haben)

$\frac{1}{\sqrt{a \cdot a}} (\cos(0) + i \sin(0)) \cdot a = \frac{a}{\sqrt{a \cdot a}} = \frac{a}{\|a\|} \qquad$ und

$\frac{1}{\sqrt{a \cdot a}} (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) \cdot a = -\frac{a}{\sqrt{a \cdot a}} = -\frac{a}{\|a\|}$

b) zz: a_1 ist einziger normierter Vektor aus $[a]$ mit der Form $a_1 = x \cdot a$, $x \in \mathbb{R}^+$

Da $x \in \mathbb{R}$ ist muss wie oben der Imaginärteil Null sein.

Also gibt es nur die zwei Kandidaten von oben. Beim zweiten Kandidaten ist $x = -\underbrace{\frac{1}{\|a\|}}_{>0} < 0$ also nicht $x \in \mathbb{R}^+$

Der erste Kandidat ist genau a_1 mit $x = \frac{1}{\|a\|} \in \mathbb{R}^+$