LINAG Ü12

11.1.8. $V \ldots VR/K$ $\quad V \times V^* \ldots VR/K$ mit Addition und Multiplikation mit Skalaren komponentenweise

$$\iota : (V \times V^*) \times (V \times V^*) \to K$$

$$((x, a^*), (y, b^*)) \mapsto b^*(x) - a^*(y)$$

zz: ι ist ein symplektisches Skalarprodukt auf $V \times V^*$

Sei $(x, a^*), (y, b^*), (z, c^*) \in V \times V^*$ bel. Sei $k \in K$ bel.

- $\iota((x, a^*) + (y, b^*), (z, c^*)) = \iota((x+y, a^*+b^*), (z, c^*)) = c^*(x+y) - (a^*+b^*)(z)$
  $= c^*(x) + c^*(y) - a^*(z) - b^*(z) = \iota((x, a^*), (z, c^*)) + \iota((y, b^*), (z, c^*))$
- $\iota(k \cdot (x, a^*), (y, b^*)) = \iota((k \cdot x, k \cdot a^*), (y, b^*)) = b^*(k \cdot x) - (k \cdot a^*)(y)$
  $= k \cdot b^*(x) - k \cdot a^*(y) = k \cdot \iota((x, a^*), (y, b^*))$
- Umgekehrt genauso $\Rightarrow \iota \ldots$ Bilinearform
- $\iota((x, a^*), (x, a^*)) = a^*(x) - a^*(x) = 0$ $\Rightarrow$ alternierend / symplektisch
- Sei $(x, a^*) \in V \times V^*$ bel. $\iota((x, a^*), (0, x^*)) = x^*(x) - a^*(0) = 1$
  $\Rightarrow$ radikalfrei

Also ist ι ein symplektisches Skalarprodukt auf $V \times V^*$