LNAG Ü10

9.2.4 $V \ldots K$-Algebra

a) zz: $\forall a^* \in V^*: V \times V \to K : (x,y) \mapsto \langle a^*, x \cdot y \rangle$ ist eine Bilinearform

Sei $a^* \in V^*$ bel. $\sigma : V \times V \to K \quad (x,y) \longmapsto a^*(x \cdot y)$ Sei $x,y,z \in V$, $c \in K$ bel.

•) $\sigma(x+y, z) = a^*((x+y)\cdot z) = a^*(x \cdot z + y \cdot z) = a^*(x \cdot z) + a^*(y \cdot z) = \sigma(x,z) + \sigma(y,z)$

•) $\sigma(x, y+z) = a^*(x \cdot (y+z)) = a^*(x \cdot y + x \cdot z) = a^*(x \cdot y) + a^*(x \cdot z) = \sigma(x,y) + \sigma(x,z)$

•) $\sigma(c \cdot x, y) = a^*(c \cdot x \cdot y) = c \cdot a^*(x \cdot y) = c \cdot \sigma(x,y)$

•) $\sigma(x, c \cdot y) = a^*(x \cdot c \cdot y) = c \cdot a^*(x \cdot y) = c \cdot \sigma(x,y)$

$\Rightarrow$ Bilinearform

b) $(b_j)_{j \in I} \ldots$ Basis von $V \qquad \sigma_l : V \times V \to K \quad (x,y) \mapsto \langle b_l^*, x \cdot y \rangle$

zz: $x \cdot y = \sum_{l \in I} \sigma_l(x,y)\, b_l$ (für alle $x, y \in V$)

Sei $x,y \in V$ bel. $\sum_{l \in I} \sigma_l(x,y)\, b_l = \sum_{l \in I} b_l^*(x \cdot y) \cdot b_l = x \cdot y$ nach der Definition von $b_l^*$.

zz: $\forall (x_j)_{j \in I}, (y_j)_{j \in I} \in K^{(I)} : \left(\sum_{j \in I} x_j b_j\right)\left(\sum_{k \in I} y_k b_k\right) = \sum_{j,k,l \in I} \sigma_l(b_j, b_k)\, x_j \cdot y_k\, b_l$

Nach oben ist $\overbrace{\left(\sum_{j \in I} x_j b_j\right)}^{x}\overbrace{\left(\sum_{k \in I} y_k b_k\right)}^{y} = \sum_{l \in I} \sigma_l\Big(\overbrace{\sum_{j \in I} x_j b_j}^{x}, \overbrace{\sum_{k \in I} y_k b_k}^{y}\Big)\, b_l$

$= \sum_{l \in I} b_l^*\left(\left(\sum_{j \in I} x_j b_j\right) \cdot \left(\sum_{k \in I} y_k b_k\right)\right) \cdot b_l = \sum_{l \in I} b_l^*\left(\sum_{j,k \in I} x_j b_j y_k b_k\right) b_l$

$= \sum_{l \in I}\left(\sum_{j,k \in I} x_j \cdot y_k \cdot b_l^*(b_j \cdot b_k)\right) b_l = \sum_{l \in I}\left(\sum_{j,k \in I} x_j \cdot y_k \cdot \sigma_l(b_j, b_k) \cdot b_l\right)$

$= \sum_{l,j,k \in I} \sigma_l(b_j, b_k) \cdot x_j \cdot y_k\, b_l$

c) $\beta$) $V = K[X]$ Basis $(X^j)_{j \in \mathbb{N}} \qquad s_{jkl} := (\sigma_l(b_j, b_k))$ heißen Strukturkonstanten

$s_{jkl} = \sigma_l(b_j, b_k) = b_l^*(b_j \cdot b_k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j+k=l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} x_j \cdot X^j\right) \cdot \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} y_k \cdot X^k\right) = \sum_{j,k,l \in \mathbb{N}} s_{jkl} \cdot x_j \cdot y_k \cdot X^l = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} x_j\, y_k \cdot X^{j+k}$ (wie zu erwarten)