MAS Ü10

2.) a) $f_n \to f$ fast überall $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ... stetig

zz: $g \circ f_n \to g \circ f$ fast überall

$f_n \to f$ fast überall bedeutet $\exists N$.. Nullmenge : $f_n \to f$ auf N^c punktweise

Auf N^c konvergiert (durch Stetigkeit von g) $g(f_n) \to g(f)$ punktweise

$\Rightarrow \exists N$ (nämlich die gleiche wie für f_n) : $g \circ f_n \to g \circ f$ auf N^c punktweise

$\Rightarrow g \circ f_n \to g \circ f$ fast überall

b) ges: f_n ... im Maß konvergent g.. stetig mit $g \circ f_n$ ... konvergiert nicht im Maß

$f_n \to f$ im Maß bedeutet $\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n \to \infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$

$f_n(x) := x + \frac{1}{n}$ $g(x) := x^2$ $f_n \to f := x \mapsto x$

$g \circ f_n(x) - g \circ f(x) = (x + \frac{1}{n})^2 - x^2 = \cancel{x^2} + 2x\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - x^2 = 2\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}$

$\lambda(\{x : |\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}| > \varepsilon\}) = \infty$

$\Rightarrow g \circ f_n$ konvergiert nicht im Maß

c) zz: $f_n \to f$ im Maß g ... gleichmäßig stetig $\Rightarrow g \circ f_n \to g \circ f$ im Maß

g .. gleichmäßig stetig $\exists \delta > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\mu(\{x : |g(f_n(x)) - g(f(x))| \geq \varepsilon\})$

Da $f_n \to f$ im Maß : $\lim_{n \to \infty} \mu(\underbrace{\{x : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}}_{=:M}) = 0$

$M^c = \{x : |f_n(x) - f(x)| \leq \delta\}$ $x \in M^c \Rightarrow |g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq \varepsilon$

$\lim_{n \to \infty} \mu(\{x : |g \circ f_n(x) - g \circ f(x)| > \varepsilon\}) = 0$

d) $\mu(\Omega) < \infty$ zz: $f_n \to f$ im Maß $\wedge$ g.. stetig $\Rightarrow g \circ f_n \to g \circ f$ im Maß

Da $\mu(\Omega) < \infty$ $\Rightarrow \exists N$ mit $\mu(N) = 0$ $\forall x \in N^c : f_n(x) \to f(x)$

$\Rightarrow g \circ f_n \to g \circ f$ fast überall $\underset{\text{Satz von Egorov}}{\Rightarrow}$ $g \circ f_n \to g \circ f$ fast gleichmäßig

$\Rightarrow g \circ f_n \to g \circ f$ im Maß

MAS Ü10

4.) $(\Omega, 2^{\Omega}, \varsigma)$ ... Maßraum $\varsigma(A) = |A|$

zz: $$\int f \, d\varsigma = \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)$$

$M = \{x \in \Omega : f(\omega) \geq 0\}$

$$\sum_{\omega \in M} f(\omega) = \sup\left\{\sum_{\omega \in E} f(\omega) : E \subseteq M, \ |E| < \infty\right\}$$

$$\overset{\text{Satz 4.6.}}{=} \sup\left\{\sum_{\omega \in E} \phi(\omega) : 0 \leq \phi \leq f \text{ mit } \phi \text{... Treppenfunktion}\right\}$$

$$\overset{\text{Satz 5.2}}{=} \sup\left\{\int \phi \, d\varsigma : 0 \leq \phi \leq f \text{ mit } \phi \text{... Treppenfunktion}\right\}$$

$$= \int f \, d\varsigma$$

Für $N = \{x \in \Omega : f(\omega) < 0\}$ genauso

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = \sum_{\omega \in M} f(\omega) - \sum_{\omega \in N} f(\omega) = \int f^+ d\varsigma - \int f^- d\varsigma = \int f \, d\varsigma$$

MASÜ10

5.) $F(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{wenn } x>0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ges: $\int x \, d\mu_F(x)$

$$\int x \, d\mu_F(x) = \int_0^\infty \mu_F([x>y])dy - \int_0^\infty \mu_F([x<-y])dy$$

$$= \int_0^\infty \mu_F(\{x \in \mathbb{R}: x>y\})\, dy - \int_0^\infty \mu_F(\{x \in \mathbb{R}: x<-y\})\, dy$$

$$\int_0^\infty \mu_F(]y, +\infty[)\, dy = \lim_{z \to +\infty} \int_0^\infty F(z) - F(y) = \lim_{z \to +\infty} \int_0^\infty 1 - e^{-z} - 1 + e^{-y}\, dy$$

$$= \lim_{z \to +\infty} \int_0^\infty \frac{1}{e^y} - \underbrace{\frac{1}{e^z}}_{\to 0}\, dy = \int_0^\infty \frac{1}{e^y}\, dy = -e^{-y}\Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

$$\int_0^\infty \mu_F(]-\infty, -y[)\, dy = \lim_{z \to -\infty} \int_0^\infty \underbrace{F(-y)}_{=0} - \underbrace{F(z)}_{=0}\, dy = \int_0^\infty 0 \, dy = 0$$

$$\Rightarrow \int x \, d\mu_F(x) = 1$$

MAS Ü10

6.) $f_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \le \omega \le \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

zz: f_n konvergiert in $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ im Maß

$n=0$ $\quad \sqrt{0} - \lfloor\sqrt{0}\rfloor \le \omega \le \sqrt{1} - \lfloor\sqrt{0}\rfloor \iff 0 \le \omega \le 1$

$n=1$ $\quad \sqrt{1} - \lfloor\sqrt{1}\rfloor \le \omega \le \sqrt{2} - \lfloor\sqrt{1}\rfloor \iff 0 \le \omega \le \sqrt{2} - 1$

$n=2$ $\quad \sqrt{2} - \lfloor\sqrt{2}\rfloor \le \omega \le \sqrt{3} - \lfloor\sqrt{2}\rfloor \iff \sqrt{2} - 1 \le \omega \le \sqrt{3} - 1$

$n=3$ $\quad \sqrt{3} - \lfloor\sqrt{3}\rfloor \le \omega \le \sqrt{4} - \lfloor\sqrt{3}\rfloor \iff \sqrt{3} - 1 \le \omega \le \sqrt{4} - 1$

$\forall n \in \mathbb{N}: \lambda([\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]) = \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor - (\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)$

$= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda([\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

im Maß konvergent: $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\{\omega \in [0,1] : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\}) = 0$

$f(\omega) = 0$ $\quad$ Sei $\varepsilon > 0$ bel.

$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\{\omega \in [0,1] : |f_n(\omega)| > \varepsilon\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\{\omega \in [\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\})$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \lambda([\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]) = 0$

$\Rightarrow f_n$ konvergiert im Maß

zz: f_n konvergiert nicht fast überall

fast überall konvergent: $\exists N$ .. Nullmenge : f_n auf N^c punktweise gegen f konvergiert

Zwischen $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ und $\sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ liegen für alle $n \in \mathbb{N}$ überabzählbar viele Werte. (Für diese gilt $f_n(\omega) = 1$) Da N eine Nullmenge ist (also nur abzählbar viele Elemente enthält) kann N nicht ganz $[\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]$ enthalten.

$\Rightarrow f_n$ konvergiert nicht fast überall

MAS Ü10

7.) $(\Omega, S, \mathbb{P})$ ... Wahrscheinlichkeitsraum $A_n \in S$ $n \in \mathbb{N}$

a) $A_n()$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$

$A_n()$ konvergiert in W. gegen 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}([|A_n - 0| > \varepsilon|]) = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}([A_n > \varepsilon]) = 0 \quad \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$

b) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow A_n()$ konvergiert fast sicher gegen 0

fast sicher: $\exists N$ mit $\mathbb{P}(N) = 0$ $\quad \forall w \in N^c : A_n(w)$ konvergiert gegen 0

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0 \qquad$ Sei $A := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{\mathbb{P}(A_n)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \geq \mathbb{P}(A) \geq 0 \qquad \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$

Sei $w \in A^c$ bel. $\quad \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : w \in \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\right)^c$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_n(w) = 0$

c) A_n ... unabhängig $\quad$ zz: $A_n()$ konvergiert fast sicher gegen 0 $\Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$

Indirekt: Angenommen $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$

Nach Satz 2.21 gilt dann $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$

zz: $\forall N$ mit $\mathbb{P}(N) = 0$ $\exists w \in N^c : A_n(w) \longrightarrow 1$

Sei N mit $\mathbb{P}(N) = 0$ bel.

Wenn $N^c \cap \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset \Rightarrow \exists w \in N^c \cap \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow A_n(w) \longrightarrow 1$

also nicht $A_n() \to 0$ fast sicher

Wenn $N^c \cap \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \Rightarrow \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq N$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \mathbb{P}(N)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(N) = 1$ ↯ zu $\mathbb{P}(N) = 0$

MAS Ü10

3.) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad f \ldots$ stetig

zz: $\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx$

$n \in \mathbb{N}$ $\quad t_k = a + k\frac{b-a}{n}$ $\quad \overline{f_n}(x) = \max\left(f_n\left(\left[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]\right)\right)$ für $x \in \left[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]$

also Ober- und Untersummen: $\underline{f_n}(x) = \min($ —— " —— $)$

$\lim_{n\to\infty} \underline{f_n} =: \underline{f}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \overline{f_n} =: \overline{f}$ $\quad \underline{f_n} \le f \le \overline{f_n}$

$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \underline{f_n}\, d\lambda = \int_{[a,b]} \underline{f}\, d\lambda$ $\quad \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \overline{f_n}\, d\lambda = \int_{[a,b]} \overline{f}\, d\lambda$

Da f stetig $\Rightarrow \underline{f} = f = \overline{f}$

Also $\lim_{n\to\infty} \int \underline{f_n}\, d\lambda = \int_{[a,b]} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \overline{f_n}\, d\lambda$

$$\begin{array}{ccccc} \lim_{n\to\infty} \int \underline{f_n}\, d\lambda & = & \int_{[a,b]} f\, d\lambda & = & \lim_{n\to\infty} \int \overline{f_n}\, d\lambda \\ \| & & & & \| \\ \lim_{n\to\infty} \int_a^b \underline{f_n}(x)\,dx & = & \int_a^b f(x)\,dx & = & \int_a^b \overline{f_n}(x)\,dx \end{array}$$