LINAG Ü5

8.2.7. K... Körper $\quad \operatorname{char}(K) \neq 2 \qquad P(X) = X^2 + a_0 \in K[X]$

$P(X)$... hat keine Nullstelle in K

a) zz: $L = \left\{ \begin{pmatrix} x & -a_0 y \\ y & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in K \right\}$ bildet mit der Matrixaddition und -multiplikation einen Körper

1) $(L, +)$ ist eine Gruppe

Sei $A, B, C \in L$ bel.

$$(A+B)+C = \begin{pmatrix} x_a + x_b & -a_0 y_a - a_0 \cdot y_b \\ y_a + y_b & x_a + x_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_c & -a_0 y_c \\ y_c & x_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b + x_c & -a_0 \cdot (y_a + y_b + y_c) \\ y_a + y_b + y_c & x_a + x_b + x_c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_a & -a_0 y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b + x_c & -a_0 (y_b + y_c) \\ y_b + y_c & x_b + x_c \end{pmatrix} = A + (B + C)$$

$\Rightarrow$ assoziativ

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_0 \cdot 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A = A = A + \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \cdot 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ neutrales Element

$$A + \begin{pmatrix} -x_a & -a_0 \cdot (-y_a) \\ -y_a & -x_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_a & -a_0 \cdot y_a + a_0 y_a \\ y_a - y_a & x_a - x_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ inverses Element

2) Multiplikation kommutativ und assoziativ

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x_a & -a_0 \cdot y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b & -a_0 \cdot y_b \\ y_b & x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \cdot x_b - a_0 y_a y_b & -a_0 y_b x_a - a_0 \cdot y_a x_b \\ y_a x_b + x_a y_b & -a_0 y_b y_a + x_a x_b \end{pmatrix}$$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \parallel$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} x_b & -a_0 y_b \\ y_b & x_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a & -a_0 y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a x_b - a_0 y_b \cdot y_a & -a_0 y_a x_b - a_0 y_b x_a \\ y_b x_a + x_b y_a & -a_0 y_a y_b + x_a x_b \end{pmatrix}$$

assoziativ, da Matrixmultiplikation assoziativ

3) neutrales Element bzgl. multiplikation

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a & -a_0 y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a & -a_0 y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} = A$$

4) inverses Element bzgl. multiplikation

$$A \cdot \frac{1}{x_a^2 + y_a^2 a_0} \begin{pmatrix} x_a & y_a a_0 \\ -y_a & x_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a & -a_0 y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_a}{x_a^2 + y_a^2 a_0} & \frac{y_a a_0}{x_a^2 + y_a^2 a_0} \\ \frac{-y_a}{x_a^2 + y_a^2 a_0} & \frac{x_a}{x_a^2 + y_a^2 a_0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_a^2 + a_0 y_a^2}{x_a^2 + y_a^2 a_0} & \frac{x_a y_a a_0 - x_a y_a a_0}{x_a^2 + y_a^2 a_0} \\ \frac{x_a y_a - x_a y_a}{x_a^2 + y_a^2 a_0} & \frac{y_a^2 a_0 + x_a^2}{x_a^2 + y_a^2 a_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_a^2 + y_a^2 a_0 = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} x = -a_0 k y \\ y = k x \end{matrix} \Leftrightarrow x = -a_0 k^2 x$

$\Leftrightarrow k^2 = -\frac{1}{a_0} \Leftrightarrow k = \sqrt{-\frac{1}{a_0}}$

LINAG Ü5

… 8.2.7

5.) Linksdistributivgesetz Sei $A, B, C \in L$ bel.

$$A\cdot(B+C) = \begin{pmatrix} x_a & -a_0 y_a \\ y_a & x_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b+x_c & -a_0(y_b+y_c) \\ y_b+y_c & x_b+x_c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_a(x_b+x_c) - a_0 y_a(y_b+y_c) & -x_a a_0(y_b+y_c) - a_0 y_a(x_b+x_c) \\ y_a(x_b+x_c) + x_a(y_b+y_c) & -y_a a_0(y_b+y_c) + x_a(x_b+x_c) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_a x_b - a_0 y_a y_b) + (x_a x_c - a_0 y_a y_c) & (-x_a a_0 y_b - a_0 y_a x_c) + (-x_a a_0 y_c - a_0 y_a x_c) \\ (y_a x_b + x_a y_b) + (y_a x_c + x_a y_c) & (-y_a a_0 y_b + x_a x_b) + (-y_a a_0 y_c + x_a x_c) \end{pmatrix}$$

$$= (A\cdot B) + (A\cdot C)$$

b) zz: $\exists\, U \subseteq L$ … Unterkörper mit $\varphi: x \mapsto \mathrm{diag}(x,x)$ ist $U \cong K$

Offensichtlich ist $U := \{\mathrm{diag}(x,x) : x \in K\}$ ein Unterkörper von L (indem man $y=0$ setzt).

Sei $x, y \in K$ bel. $\varphi(x) + \varphi(y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{pmatrix} = \varphi(x+y)$

$\varphi(x)\cdot\varphi(y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cdot y & 0 \\ 0 & x\cdot y \end{pmatrix} = \varphi(x\cdot y)$

$$i := \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) zz: $L = \{x + yi \mid x, y \in K\}$ ges: $\dim(L)$

$\subseteq$ Sei $A \in L$ bel. $A = \begin{pmatrix} x & -a_0 y \\ y & x \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}}_{= x} + \underbrace{\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}}_{= y} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= i} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_0 y \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -a_0 y \\ y & x \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow A \in \{x + yi \mid x, y \in K\}$

$\supseteq$ Sei $B \in \{x + yi \mid x, y \in K\}$ bel.

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -a_0 y \\ y & x \end{pmatrix} \in L$$

$\dim(L) = 2$, da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eine Basis bilden

LINAG Ü5

8.2.7. ... d)

zz: X^2+a_0 hat genau Nullstellen i und $-i$

$$i^2+a_0 = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_0 & 0 \\ 0 & -a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(-i)^2+a_0 = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_0 & 0 \\ 0 & -a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ i und $-i$ sind Nullstellen, da X^2+a_0 grad 2 hat gibt es keine anderen Nullstellen

zz: $\exists!\, \varrho \in \mathrm{Aut}(L): \varrho(i) = -i \wedge \varrho(-i) = i \wedge \forall k \in K: \varrho(k) = k$

$\forall x,y: \varrho(x+iy) = x-iy \quad \Rightarrow \varrho(x) = x \quad \varrho(i) = -i \quad \varrho(-i) = i$

Der Automorphismus ist eindeutig da für $x,y \in K$ mit $\varrho(x) = x$, $\varrho(y) = y$ und $\varrho(i) = -i$ schon $\varrho(x+iy) = \varrho(x) + \varrho(i)\cdot\varrho(y)$ festgelegt ist.
(linear + $\dim(L) = 2$ $\Rightarrow$ durch $\varrho(1)$ + $\varrho(i)$ festlegen alles festgelegt)

e) In $\mathbb{Z}_3$ bildet $\{aX^2+bX : a,b \in \mathbb{Z}_3\}$ einen Körper, da

$(aX^2+bX)+(cX^2+dX) = (a+c)X^2+(b+d)X$ und

$(aX^2+bX)\cdot(cX^2+dX) = acX^4+adX^3+bcX^3+bdX^2$

$= acX^2+adX+bcX+bdX^2 = (ac+bd)X^2+(ad+bc)X$

(da $\forall x \in \mathbb{Z}_3: x^3 = x$)

Der Körper enthält 9 Elemente, da $a \in \{0,1,2\}$ und $b \in \{0,1,2\}$
(also jeweils 3 Optionen $3\cdot3=9$).