LINAG Ü8

8.5.6. $f \in L(V,V)$

a) $f \circ f = f \iff \exists$ Basis aus Eigenvektoren von f $\wedge \forall \lambda$ .. Eigenwert von f: $\lambda \in \{0,1\}$

$\Rightarrow$ f ist Projektion, d.h. $\exists U_1, U_2$ .. UR von V mit $U_1 \oplus U_2 = V$

und $\forall u_1 \in U_1: f(u_1) = u_1 \wedge \forall u_2 \in U_2: f(u_2) = 0$

Sei $B_1 = (b_{1i})_{i \in I}$ eine Basis von U_1 und $B_2 = (b_{2j})_{j \in J}$ eine Basis von U_2.

$\forall i \in I: f(b_{1i}) = b_{1i} \Rightarrow b_{1i}$ ist EV von f zum Eigenwert 1

$\forall j \in J: f(b_{2j}) = 0 \Rightarrow b_{2j}$ ist EV von f zum Eigenwert 0

$B = B_1 \cup B_2$ ist eine Basis von V, die aus EV von f besteht.

Angenommen $\exists \lambda \in K \setminus \{0,1\}$ .. EW von f, d.h.

$\exists x \in V: f(x) = \lambda \cdot x \Rightarrow f(f(x)) = f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

aus $f \circ f = f$ folgt $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ $\lightning$

$\Leftarrow$

Sei B die Basis aus EV von f.

Sei $B_1 (\subseteq B) = \{b \in B : f(b) = 1 \cdot b\}$. Sei $B_2 (\subseteq B) = \{b \in B : f(b) = 0 \cdot b\}$

$B = B_1 \cup B_2$ da es keine anderen EW gibt. $B_1 \cap B_2 = \emptyset$

$U_1 = [B_1]$ $U_2 = [B_2]$ $\Rightarrow U_1 \oplus U_2 = V$

mit $\forall u_1 \in U_1: f(u_1) = u_1 \wedge \forall u_2 \in U_2: f(u_2) = 0$

$\Rightarrow f$ .. Projektion $\iff f \circ f = f$

...

LINAG

8.5.6. ...

b) char $K \neq 2$

zz: $f \circ f = id \iff \exists$ Basis von V aus EV von f $\wedge$ $\forall \lambda$ .. EW von f: $\lambda \in \{-1, 1\}$

($\Rightarrow$) $\forall x \in V$: $f(f(x)) = x$

Angenommen $\exists \lambda$ ... EW von f $\lambda \in K \setminus \{-1, 1\}$, d.h. $\exists x \in V: f(x) = \lambda x$

$\Rightarrow f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda^2 \cdot x \neq x$ für $\lambda \neq \pm 1$ und char $K \neq 2$

$\lightning$

Angenommen $\exists x \in V \setminus \{0\}$: x ist kein EV von f, d.h.

$\nexists \lambda \in K: f(x) = \lambda \cdot x \Rightarrow \nexists \lambda \in K: f(f(x)) = f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda^2 \cdot x$

aber $f(f(x)) = 1^2 \cdot x$ und $1 \in K$ $\lightning$

Sei B eine Basis von V. $\Rightarrow \forall b \in B$: b ist EV von f.

($\Leftarrow$) Sei B die Basis aus EV von f

Sei $B_1 (\subseteq B) = \{b \in B: f(b) = -1 \cdot b\}$ und $B_2 (\subseteq B) = \{b \in B: f(b) = 1 \cdot b\}$.

Da es nur EW -1 und 1 gibt folgt $B = B_1 \cup B_2$

Sei $x \in V$ bel. $\quad x = \sum_{b \in B} y_b \cdot b = \sum_{b_1 \in B_1} y_{b_1} \cdot b_1 + \sum_{b_2 \in B_2} y_{b_2} \cdot b_2$

$$f(f(x)) = f(f(\sum_{b_1 \in B_1} y_{b_1} \cdot b_1 + \sum_{b_2 \in B_2} y_{b_2} \cdot b_2)) = \sum_{b_1 \in B_1} y_{b_1} f(f(b_1)) + \sum_{b_2 \in B_2} y_{b_2} f(f(b_2))$$

$$= \sum_{b_1 \in B_1} y_{b_1} (-1)(-1) b_1 + \sum_{b_2 \in B_2} y_{b_2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot b_2 = \sum_{b_1 \in B_1} y_{b_1} b_1 + \sum_{b_2 \in B_2} y_{b_2} b_2 = x$$

$\Rightarrow f \circ f = id$