LINAG Ü1

7.4.2. K... Körper $n \in \mathbb{N}$ $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in K^{n+1}$

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix} \in K^{(n+1)\times(n+1)}$$

zz: $\det V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$

Vollständige Induktion nach n:

$n=0$: $V(x_0) := (1)$ $\det(V(x_0)) = 1$ $\prod_{i<j} (x_i - x_j) = 1$

$n+1$: $V(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{pmatrix} x_0^{n+1} & x_0^n & \dots & x_0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ x_{n+1}^{n+1} & x_{n+1}^n & \dots & x_{n+1} & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(V(x_0, \dots, x_{n+1})) = \det\left(\begin{pmatrix} x_0^{n+1} & x_0^n & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n+1}^{n+1} & x_{n+1}^n & \dots & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} x_0^{n+1} - x_0^n \cdot x_{n+1} & x_0^n - x_0^{n-1} \cdot x_{n+1} & \dots & x_0 - x_{n+1} \cdot 1 & 1 \\ x_1^{n+1} - x_1^n \cdot x_{n+1} & x_1^n - x_1^{n-1} \cdot x_{n+1} & \dots & x_1 - x_{n+1} \cdot 1 & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_{n+1}^{n+1} - x_{n+1}^n \cdot x_{n+1} & x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} \cdot x_{n+1} & \dots & x_{n+1} - x_{n+1} \cdot 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} x_0^n \cdot (x_0 - x_{n+1}) & x_0^{n-1} \cdot (x_0 - x_{n+1}) & \dots & x_0^0 \cdot (x_0 - x_{n+1}) & 1 \\ x_1^n \cdot (x_1 - x_{n+1}) & x_1^n \cdot (x_1 - x_{n+1}) & \dots & x_1^0 \cdot (x_1 - x_{n+1}) & 1 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (-1)^{(n+1)+(n+1)} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} x_0^n (x_0 - x_{n+1}) & \dots & x_0^0 \cdot (x_0 - x_{n+1}) \\ \vdots & & \\ x_n^n \cdot (x_n - x_{n+1}) & \dots & x_n^0 \cdot (x_n - x_{n+1}) \end{pmatrix}\right)$$

laut Satz 7.4.5 und Beweis von Satz 7.4.6.

$$= (x_0 - x_{n+1}) \cdot (x_1 - x_{n+1}) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n+1}) \cdot \det\left(\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0^0 \\ \vdots & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n^0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \prod_{i<n+1} (x_i - x_{n+1}) \cdot \det\left(\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \prod_{i<n+1} (x_i - x_{n+1}) \cdot \prod_{i<j} (x_i - x_j) = \prod_{i<k} (x_i - x_k)$$

$i \in \{1, \dots, n\}$
$j \in \{1, \dots, n\}$
$k \in \{1, \dots, n+1\}$