ANA ÜM

7.) $\Phi: \mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1\times 3}$ Ist Φ ein Gradientenfeld?

Falls ja berechne man die Stammfunktion.

i) $\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (a+c, a+b+c, a+c)$

$\frac{\partial}{\partial a}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (1,1,1)$ $\frac{\partial}{\partial b}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (0,1,0)$ $\frac{\partial}{\partial c}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (1,1,1)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial a}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e_2 \neq \frac{\partial}{\partial b}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e_1$ $\Rightarrow \Phi$ ist kein Gradientenfeld

ii) $\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (2a, 2b, 0)$

$\frac{\partial}{\partial a}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (2,0,0)$ $\frac{\partial}{\partial b}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (0,2,0)$ $\frac{\partial}{\partial c}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (0,0,0)$

$\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}e_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\Phi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}e_i \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}$

$\Rightarrow$ aus Satz 11.4.14 folgt Φ ist ein Gradientenfeld

$\frac{\partial f}{\partial a}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 2a$ $\frac{\partial f}{\partial b}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 2b$ $\frac{\partial f}{\partial c}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0$

$f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \int 2a \, da + c(b,c) = 2\cdot\frac{1}{2}a^2 + c(b,c) = a^2 + c(b,c)$

$\frac{\partial}{\partial b} a^2 + c(b,c) = c'(b,c) = \frac{\partial f}{\partial b}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 2b$ $\Rightarrow c'(b,c) = 2b$ $\Rightarrow c(b,c) = b^2 + c(c)$

$\Rightarrow f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c(c)$ $\frac{\partial}{\partial c} a^2 + b^2 + c(c) = c'(c) = \frac{\partial f}{\partial c}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow c'(c) = 0 \Rightarrow c(c) = d$ $\rightarrow f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = a^2 + b^2 + d \quad d \in \mathbb{R}$

iii) $\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (b\cdot c, a\cdot c, a^2)$

$\frac{\partial}{\partial a}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (0, c, 2a)$ $\frac{\partial}{\partial b}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (c,0,0)$ $\frac{\partial}{\partial c}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (b, a, 0)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial a}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e_3 \neq \frac{\partial}{\partial c}\Phi\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e_1$ $\Rightarrow \Phi$ ist kein Gradientenfeld