ANA Ü12:

6.) $k \in \mathbb{Z}$ $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ $r > 0$ $a \in \mathbb{C}$

$t \mapsto a + r \cdot \exp(it)$

ges: $\int_\gamma (z-a)^k \, dz$

$\gamma'(t) = r \cdot i \cdot \exp(it)$ ist stetig $(z-a)^k$ ist für alle $k \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$ stetig

Nach Satz 11.2.5 folgt

$$\int_\gamma (z-a)^k \, dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t) - a)^k \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (a + r \cdot \exp(it) - a)^k \cdot r \cdot i \cdot \exp(it) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r^k \cdot \exp(it)^k \cdot r \cdot i \cdot \exp(it) \, dt = r^{k+1} \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} \exp(it)^{k+1} \, dt$$

$$= r^{k+1} \cdot i \cdot \left(-\frac{1}{k+1} \cdot i \cdot \exp(it)^{k+1}\right)\Big|_0^{2\pi} = r^{k+1} \cdot i \left(-\frac{i}{k+1} \exp(2\pi i)^{k+1} + \frac{1}{k+1} \cdot i \cdot \exp(0)^{k+1}\right)$$

$$= r^{k+1} \cdot i \left(-\frac{i}{k+1} + \frac{i}{k+1}\right) = 0$$