LINAG Ü14

12.1.6 $(K^{\langle \mathbb{N} \rangle}, \iota)$ $\quad \iota : K^{\langle \mathbb{N} \rangle} \times K^{\langle \mathbb{N} \rangle} \to K : ((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \cdot y_i$

$f \in L(K^{\langle \mathbb{N} \rangle}, K^{\langle \mathbb{N} \rangle})$ $\quad (a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ mit $\forall i,j \in \mathbb{N} : a_{ij}$ ... i-te Koordinate von $f(e_j)$

$(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ als „unendliche Matrix" hat in jeder Spalte fast nur Nullen

a) zz: Falls $\hat{f}$ existiert gilt: i-te Zeile von (a_{ij}) ist genau die Koordinatisierung von $\hat{f}(e_i)$

Wir nehmen an $\hat{f}$ existiert und beschreiben diese (wie auch f) durch eine Familie bzw. „unendliche Matrix" (b_{ij}) so wie oben. Mit a_{*i} und b_{*i} bezeichne ich das Bild $f(e_i)$ bzw. $\hat{f}(e_i)$ (also jeweils die „Spalten")

Da $\hat{f}$ zu f adjungiert folgt

$\forall i,j \in \mathbb{N} : e_j \cdot f(e_i) = e_j \cdot a_{*i} = a_{ji} = b_{ij} = b_{*j} \cdot e_i = \hat{f}(e_j) \cdot e_i$

$\Rightarrow$ In der i-ten Zeile steht das Bild von $\hat{f}(e_i)$ (da „Matrizen transponiert" zueinander)

b)

$$f \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad g \cong \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

zz: $\hat{f}$ existiert und ist nicht surjektiv

Behauptung: $\hat{f} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots \\ & \vdots & & \end{pmatrix}$ $\qquad$ Sei $i,j \in \mathbb{N}$ bel.

$$e_j \cdot f(e_i) = e_j \cdot \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i-1 \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i=j \text{ oder } i-1=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\hat{f}(e_j) \cdot e_i = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j \\ \leftarrow j+1 \\ \\ \\ \end{array} \cdot e_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i=j \text{ oder } i=j+1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

sind offensichtlich immer gleich

Man sieht, dass es keine (endliche!) LK $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \cdot e_i$ gibt mit

$\hat{f}\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \cdot e_i\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = e_0$ $\quad \Rightarrow$ nicht surjektiv

zz: $f^{-1} = g$, aber $\nexists \hat{g}$

Sei $i \in \mathbb{N}$ bel. $\quad g(f(e_i)) = g\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i-1 \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}\right) = g(e_{i-1} + e_i) = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} (-1)^i \\ (-1)^{i+1} \\ (-1)^i \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow i-1 \\ \\ \\ \end{array} + \begin{array}{c}\begin{pmatrix} (-1)^{i+1} \\ (-1)^i \\ (-1)^{i+1} \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i-1 \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = e_i$$

$\Rightarrow f^{-1} = g$

$\forall i \in \mathbb{N} : \hat{g}(e_0) \cdot e_i = g(e_i) \cdot e_0 = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \text{ gerade} \\ -1, & \text{falls } i \text{ ungerade} \end{cases}$ $\quad$ wenn wir annehmen, dass $\hat{g}$ existiert

$\Rightarrow \hat{g}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} \notin K^{\langle \mathbb{N} \rangle}$ $\quad \Rightarrow \nexists \hat{g}$ zu g