LINAG Ü12

9.10.7 Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist q positiv definit?

a) $q: \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto t x_1^2 + 2t x_1 x_2 + 2(t+1) x_2^2 + 2 x_2 x_3 + x_3^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_1 + b x_2 + d x_3 & b x_1 + c x_2 + e x_3 & d x_1 + e x_2 + f x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= a x_1^2 + b x_1 x_2 + d x_1 x_3 + b x_1 x_2 + c x_2^2 + e x_2 x_3 + d x_1 x_3 + e x_2 x_3 + f x_3^2$$

$$= a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + 2d x_1 x_3 + c x_2^2 + 2e x_2 x_3 + f x_3^2 =: g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow a = t \quad b = t \quad d = 0 \quad c = 2t+2 \quad e = 1 \quad f = 1$

$\Rightarrow q$ als symmetrische Matrix ist $\begin{pmatrix} t & t & 0 \\ t & 2t+2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Hauptminoren:

$|t| = t \qquad \begin{vmatrix} t & t \\ t & 2t+2 \end{vmatrix} = 2t^2 + 2t - t^2 = t^2 + 2t \qquad \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ t & 2t+2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2t^2 + 2t - t - t^2 = t^2 + t$

$\Rightarrow$ Damit q positiv definit muss $t > 0$, $t^2 + 2t > 0$ und $t^2 + t > 0$

$t^2 + 2t = 0 \iff t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1} = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow t > 0$ oder $t < -2$

$t^2 + t = 0 \iff t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow t > 0$ oder $t < -1$

$\Rightarrow$ Für $t > 0$ ist q positiv definit. Für $t = 0$ semidefinit (positiv und negativ?)

Damit q negativ definit $t < 0 \quad t^2 + 2t > 0 \quad t^2 + t < 0 \Rightarrow t < -2 \land t > -1$ ↯

$\Rightarrow$ Für $t < 0$ indefinit

b) $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (1-t) x_1^2 - 2t x_1 x_2 + 2 x_1 x_3 - x_2^2 + x_3^2$

$\Rightarrow a = 1-t \quad b = -t \quad c = -1 \quad d = 1 \quad e = 0 \quad f = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1-t & -t & 1 \\ -t & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|1-t| = 1-t \qquad \begin{vmatrix} 1-t & -t \\ -t & -1 \end{vmatrix} = t - 1 - t^2 = -t^2 + t - 1$

$\begin{vmatrix} 1-t & -t & 1 \\ -t & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = t - 1 - 1 + t^2 = t^2 + t - 2 \qquad \Rightarrow$ damit q positiv definit $1 - t > 0$, $-t^2 + t - 1 > 0$ und $t^2 + t - 2 > 0$

$\nexists t \in \mathbb{R}$ mit $-t^2 + t - 1 > 0 \Rightarrow \nexists \in \mathbb{R}$ mit q positiv definit (auch nicht $\geq$ also auch nicht semi pos. def)

Damit q negativ (semi) definit: $1 - t < 0 \quad \underbrace{-t^2 + t - 1 > 0}_{↯} \quad t^2 + t - 2 < 0$ (bzw. $\leq$, $\geq$)

$\Rightarrow q$ ist indefinit