LINAG Ü4

6.7.6 a) $f \in GL(\mathbb{R}^{4\times1})$ $\quad P(f) =: K$ $\qquad$ jeweils als Repräsentant des proj. Punkts

$$K\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\2\\1\\0\end{pmatrix} \quad K\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\9\\1\\1\end{pmatrix} \quad K\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\1\\0\end{pmatrix} \quad K\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix} \quad K\begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\14\\1\\1\end{pmatrix}$$

Die projektiven Punkte $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}$ bilden ein Bezugssystem, da beim weglassen jeden einzelnen Punkts eine Basis des $\mathbb{R}^{4\times1}$ entsteht.

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + x_4\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 1,\ x_1 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = -1$$

$$y_1\begin{pmatrix}7\\2\\1\\0\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}9\\9\\1\\1\end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix}4\\5\\1\\0\end{pmatrix} + y_4\begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\14\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow y_2 = 1,\ y_1 = 1,\ y_3 = -1,\ y_4 = 1$$

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\7\\1\\0\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\9\\1\\1\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-5\\-1\\0\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc}1&0&0&1\\1&1&-1&1\\1&0&-1&1\\0&0&0&1\\\hline 7&2&-4&9\\7&3&-5&9\\1&0&-1&1\\0&0&0&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\\hline 3&2&-2&2\\2&3&-2&2\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline 3&2&2&2\\2&3&2&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{cccc}3&2&2&2\\2&3&2&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right\} \text{Matrix von } f$$

b) $A = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ zz: $(A \vee K(A)) \wedge (B \vee K(B))$ besteht aus genau einem Punkt $=: S$ und $S = K(S)$

$$A \vee K(A) = P\left(\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix}\right]\right) = \mathbb{R}\left(x\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix}\right) \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}$$

$$B \vee K(B) = P\left(\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right]\right) = \mathbb{R}\left(a\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix}2y\\x+3y\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2b\\2b\\a+b\\0\end{pmatrix} \Rightarrow b = -a = y = -x \Rightarrow S = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$K(S) = \mathbb{R}\cdot\left(\begin{pmatrix}3\\2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}5\\5\\0\\0\end{pmatrix} = S$$