MAS Ü12

4.) X_n... Augenzahl beim n-ten Wurf mit fairen Würfel

ges: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen gilt

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = m \text{... Erwartungswert}$$

$$= 3,5$$

ges: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\cdot \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)\right)$$

$$\mathbb{E}(\ln(X_i)) = \sum_{x} x \cdot \mathbb{P}(\ln(X_i) = x) = \sum_{i=1}^{6} \ln(i)\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\cdot \ln(6!) = \ln\left(\sqrt[6]{6!}\right)$$

$$\exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)\right) = \exp\left(\ln\left(\sqrt[6]{6!}\right)\right) = \sqrt[6]{6!} \approx 2,9938$$