

LINAG Ü10

9.2.2. $\phi: V \times V \rightarrow K$... ξ -Sesquilinearform

$$1) \forall x \in V \setminus \{0\} \exists b \in V: \phi(x, b) \neq 0$$

$$2) \forall y \in V \setminus \{0\} \exists a \in V: \phi(a, y) \neq 0$$

ϕ heißt nicht ausgeartet falls 1) und 2) erfüllt sind.

a) zz: 1) $\Leftrightarrow d_\phi: V \rightarrow V^*$... injektiv

$$1) \Leftrightarrow \forall x \in V \setminus \{0\}: d_\phi(x) \neq 0 (= \text{Nullabbildung}) \Leftrightarrow \ker d_\phi = \{0\} \Leftrightarrow d_\phi \dots \text{injektiv}$$

b) zz: 2) $\Leftrightarrow \bigcap_{x \in V} \ker d_\phi(x) = \{0\}$

$$\Rightarrow \text{Sei } y \in \bigcap_{x \in V} \ker d_\phi(x) \text{ bel. Falls } y \neq 0 \exists a \in V: \phi(a, y) \neq 0 \downarrow$$

$$\Rightarrow \bigcap_{x \in V} \ker d_\phi(x) = \{0\}$$

$$\Leftarrow \text{Sei } y \in V \setminus \{0\} \text{ bel. Angenommen } \forall a \in V: \phi(a, y) = 0$$

$$\Rightarrow y \in \bigcap_{x \in V} \ker d_\phi(x) \downarrow \Rightarrow \exists a \in V: \phi(a, y) \neq 0$$

c) $\dim V < \infty$ zz: 1) $\Leftrightarrow d_\phi \dots$ bijektiv 1) 2) $\Leftrightarrow d_\phi \dots$ bijektiv

$$1) \Rightarrow d_\phi \dots \text{bijektiv} : d_\phi \text{ ist nach Satz 9.2.3. eine } \xi\text{-semilineare Abbildung.}$$

Nach Satz 9.2.9. ist d_ϕ bijektiv (da injektiv nach a).

$$d_\phi \dots \text{bijektiv} \Rightarrow 1) : \text{bijektiv} \Rightarrow \text{injektiv} \stackrel{a)}{\Rightarrow} 1)$$

$$(2) \Leftrightarrow d_\phi \dots \text{bijektiv} \Leftrightarrow (d_\phi \text{ nicht bijektiv} \Leftrightarrow \neg 2))$$

$$d_\phi \dots \text{nicht bijektiv} \Leftrightarrow d_\phi(V) \subsetneq V^* \Leftrightarrow \exists y \in V \setminus \{0\}: d_\phi(y) = 0_{V^*}$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in V \setminus \{0\} \forall x \in V: \phi(y, x) = 0 \Leftrightarrow \bigcap_{y \in V} \ker d_\phi(y) \neq \{0\} \Leftrightarrow \neg 2) \quad \text{nach b)}$$