LINAG Ü3

1.12.3. K, K' ... Körper $f: K \to K'$ ... Homomorphismus

zz: $f(1) = 0'$ oder $f(1) = 1'$

Fallunterscheidung: $\forall x \in K: f(x) = 0'$ $\Rightarrow f(1) = 0'$ $\Rightarrow f(K) = \{0'\}$

oder

$\exists x \in K: f(x) \neq 0'$ $\Rightarrow$ $f(x) = f(1 \cdot x) = f(1) \cdot f(x)$ und da $f(x) \neq 0'$ $\Rightarrow$ $f(1)$ ist $1'$ (neutrales Element bzgl. $\cdot$)

zz: Im zweiten Fall: f ist injektiv

Sei $x \in K$ mit $f(x) \neq 0'$ Sei $a \in K$ mit $a \neq 0$ bel.

$0' \neq f(x) = f(x \cdot a \cdot a^{-1}) = f(x) \cdot f(a) \cdot f(a^{-1})$ $\Rightarrow f(a) \neq 0'$

$\Rightarrow \ker(f) = \{0\}$

Sei $a, b \in K$ mit $f(a) = f(b)$ bel.

$\Rightarrow f(a) - f(b) = 0'$ $\Leftrightarrow f(a-b) = 0'$ $\Rightarrow a - b = 0$ $\Leftrightarrow a = b$

$\Rightarrow$ injektiv

zz: Im zweiten Fall: $f(K)$ ist ein zu K isomorpher Unterkörper von K'

Offensichtlich ist K zu $f(K)$ isomorph (injektiv von oben, surjektiv klar).

$0' \in f(K)$, da $f(0) = 0'$ $1' \in f(K)$, da $f(1) = 1'$

Sei $a', b' \in f(K)$ bel. $\exists a, b \in K: f(a) = a', f(b) = b'$

$a' + b' = f(a) + f(b) = f(a+b) \in f(K)$

$a' \cdot b' = f(a) \cdot f(b) = f(ab) \in f(K)$

$\Rightarrow f(K)$ ist ein Unterkörper von K'