ANA Ü14

5.) M ... Menge $\mathcal{F}$ ... Filter auf M $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$

zz: $\mathcal{B}$ ... Filterbasis von $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$

$\mathcal{B}$ ... Filterbasis von $\mathcal{F} \Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{F}\ \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F} \subseteq \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$ klar, da $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$

Sei $X \in \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$ bel.

$\exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq X \subseteq M \overset{(F3)}{\Longrightarrow} X \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$

$\Leftarrow$ Sei $F \in \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$ bel.

$\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F$ also ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis von $\mathcal{F}$

zz: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ ist Filterbasis höchstens eines Filters

Sei $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ zwei Filter auf M und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_1$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_2$

Wenn $\mathcal{B}$ Filterbasis von $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ ist folgt von oben

$\mathcal{F}_1 = \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\} = \mathcal{F}_2$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ ist Filterbasis höchstens eines Filters

zz: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$

zz: $\mathcal{B}$ ... Filterbasis von Filter $\mathcal{F} \Leftrightarrow$ (i) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{B}$

(ii) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

$\Rightarrow$ (i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ nach (F1) und $\forall F \in \mathcal{F}\ \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F \Rightarrow \mathcal{B} \neq \emptyset$

Da $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ und $\emptyset \notin \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{B}$

(ii) Sei $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F} \overset{(F2)}{\Longrightarrow} B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F} \overset{\text{Def. Filterbasis}}{\Longrightarrow} \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

$\Leftarrow$ nach oben müssen wir nur zeigen, dass $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$

(F1) Da $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ und nach (i) $\mathcal{B} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{F} = \emptyset$

Angenommen $\emptyset \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq \emptyset$ ↯ da nach (i) $\emptyset \notin \mathcal{B}$

(F2) Sei $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ bel. $\Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B} : B_1 \subseteq F_1, B_2 \subseteq F_2$

$B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$ und nach (ii) $\exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$

$\Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

(F3) Sei $F_1 \in \mathcal{F}$ und F_2 mit $F_1 \subseteq F_2 \subseteq M$ bel. $\Rightarrow \exists B_1 \in \mathcal{B} : B_1 \subseteq F_1 \subseteq F_2$

$\Rightarrow F_2 \in \mathcal{F}$ $\Rightarrow \mathcal{F}$ ist ein Filter und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis zu $\mathcal{F}$