LINAG Ü10

9.3.2. K... Körper $x,y \in K$ heißen quadratisch äquivalent $:\Leftrightarrow \exists\, c \in K^\times : y = c^2 \cdot x$

Äquivalenzklassen heißen Quadratklassen von K

a) $A,B \in K^{n\times n}$ zz: A,B... kongruent $\Rightarrow$ $\det A$, $\det B$ liegen in gleicher Quadratklasse

A,B... kongruent $\Rightarrow$ A kann durch elementare Kongruenzumformungen nach B gebracht werden.

Also untersuchen wir wie sich die Determinante durch el. Kongruenzumformungen verändert:

- Vertauschen der i-ten mit der j-ten Spalte + Vertauschen i-ter mit j-ter Zeile

  Wenn $\tilde{A}$ die resultierende Matrix ist, dann gilt:

  $\det \tilde{A} = \det A$, da Spalten vertauschen ($\det A_{neu} = -\det A$), transponieren ($\det A^T = \det A$), nochmals Spalten vertauschen ($\det A_{neu} = -\det A$) und nochmals transponieren ($\det A^T = \det A$)

- Multiplikation der i-ten Spalte mit $y \neq 0$ + Multiplikation i-ter Zeile mit $y \neq 0$

  $\det \tilde{A} = y^2 \cdot \det(A)$, da Multiplikation einer Spalte mit $y \neq 0$ ($\det A_{neu} = y \cdot \det A$), transponieren, nochmals Multiplizieren und zurück transponieren

- Addition des y-fachen der i-ten Spalte zur j-ten Spalte + Addition des y-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile

  $\det \tilde{A} = \det(A)$, da Multiplizieren von Vielfachen anderer Spalten und Transponieren beides die Determinante nicht verändert

$\Rightarrow$ $\det A$ und $\det B$ liegen in gleicher Quadratklasse

b) $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$ $B = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$ $C = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$

Welche Matrix (B oder C) ist zu A kongruent?

$\det(A) = \bar{1}$ $\det(B) = \bar{2}$ $\det(C) = \bar{1}$

c	c^2
$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\Rightarrow \nexists\, c \in K^\times : \det(B) = c^2 \cdot \det(A) \Rightarrow A,B$ sind nicht kongruent

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{s} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{z,\ +II} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{s} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[+I]{z} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A und C sind kongruent