LINAG Ü6

8.4.3. a) $t \in K$ $\quad f \in L(V,V)$ $\quad t \ldots$ Eigenwert von f

zz: algebraische Vielfachheit von $t \geq$ geometrische Vielfachheit von t

Definition algebraische Vielfachheit: Vielfachheit der Nullstelle t in χ_f

Definition geometrische Vielfachheit: dim des Eigenraums von t

$k :=$ geometrische Vielfachheit von t

$\exists b_1, b_2, \ldots, b_k \in V \ldots$ l.u., EV zu t also Basis des Eigenraums von t

Erweitern wir nun $(b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots)$ zu einer Basis von V, dann ist

$$\langle B^*, f(B) \rangle = \left(\begin{array}{cc|c} t & 0 & * \; * \cdots \\ 0 & t \; \cdots & * \; * \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \end{array}\right) \quad \text{da } f(b_1) = t \cdot b_1 \quad f(b_2) = t \cdot b_2 \; \ldots$$

k Spalten

$$\chi_f(x) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} t-x & 0 & \cdots & \\ 0 & t-x & & * \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \end{array}\right) = (t-x)^k \cdot \; ?$$

k Spalten

$\Rightarrow$ algebraische Vielfachheit ist zumindest k

b) $$J_n(t) := \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & t & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & t \end{pmatrix}$$

ges: geometrische und algebraische Vielfachheiten aller Eigenwerte von $J_n(t)$

$$\chi_{J_n(t)} = \det(J_n(t) - xE_n) = \det \begin{vmatrix} t-x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t-x & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & t-x & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & & t-x \end{vmatrix} = (t-x)^n, \text{ da obere Dreiecksmatrix}$$

$\Rightarrow \chi_{J_n(t)}$ hat eine Nullstelle bei t

mit algebraischer Vielfachheit n

$(\underbrace{J_n(t) - t E_n}) \cdot (x_j) = (0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2 = 0,\; x_3 = 0, \ldots, x_n = 0$

$\Rightarrow$ Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ $\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit $= 1$