MAS Ü12

1) (X_n) ... Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n=1)=\mathbb{P}(X_n=-1)=\frac{1}{2}$

(a_n) ... Folge von reellen Zahlen

ZZ: $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X_n$ konvergiert fast sicher $\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ konvergiert

Nach dem Dreireihensatz gilt:

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X_n$ konvergiert fast sicher $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|a_n X_n|>\varepsilon)$ konvergiert

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(a_n X_n [a_n X_n \leq \varepsilon])$ konvergiert

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(a_n X_n [a_n X_n \leq \varepsilon])$ konvergiert

$\mathbb{E}(a_n X_n) = \mathbb{P}(X_n=1)\cdot a_n + \mathbb{P}(X_n=-1)\cdot(-a_n)$

$= \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a_n = 0$

$\mathbb{V}(a_n X_n) = \mathbb{E}((a_n X_n - \mathbb{E}(a_n X_n))^2) = \mathbb{E}((a_n X_n)^2) = \mathbb{P}(X_n=1)\cdot a_n^2 + \mathbb{P}(X_n=-1)\cdot(-a_n)^2$

$= \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}a_n^2 = a_n^2$

$\Rightarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X_n$ konvergiert f.s. $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(a_n X_n [a_n X_n \leq \varepsilon])$ konvergiert

$\Rightarrow$ für $\varepsilon < \min_{n\in\mathbb{N}}(|a_n|)$ folgt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(a_n X_n)$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ konvergiert

$\Leftarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(a_n X_n)$ konvergiert

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(a_n X_n [a_n X_n \leq \varepsilon])$ konvergiert

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(a_n X_n [a_n X_n \leq \varepsilon])$ konvergiert, da $\mathbb{E}(a_n X_n)=0$

$\mathbb{P}(|a_n X_n - \underbrace{\mathbb{E}(a_n X_n)}_{=0}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(a_n X_n)}{\varepsilon^2}$

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|a_n X_n|>\varepsilon) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{V}(a_n X_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$

Da $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ konvergiert muss also auch $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|a_n X_n|>\varepsilon)$ konvergieren

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X_n$ konvergiert fast sicher