ANA Ü1

1.) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{1}} = \frac{1}{1} = 1$

Behauptung: bei $|z| = 1$ divergent

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Nullfolge

$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent

Bei $|z| = 1$ ist z^k für jedes z keine Nullfolge, da

$\lim_{k\to\infty} |z^k| = \lim_{k\to\infty} |z|^k = \lim_{k\to\infty} 1 = 1 \neq 0$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \qquad R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\frac{1}{k}|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}} = \frac{1}{1} = 1$

Behauptung: bei $z = 1$ divergent sonst bei $|z| = 1$ konvergent

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent gegen $+\infty$

Dirichletsches Kriterium mit $C = 2 \qquad a_n = \frac{1}{k} \qquad b_n = z^k$

$|\sum_{k=1}^{n} z^k| = |-1 + \sum_{k=0}^{n} z^k| \leq |-1| + |\frac{z^{k+1} - 1}{z-1}| \leq 1 + \frac{|z^{k+1}| + |-1|}{|z-1|} = 1 + \frac{1+1}{|z-1|}$

$= \frac{|z-1| + 2}{|z-1|} \leq \frac{|z| + |-1| + 2}{|z| + |-1|} = \frac{4}{2} = 2 = C \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ konvergent

---

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \qquad R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|\frac{1}{k^2}|}} = \frac{1}{\limsup \frac{1}{\sqrt[k]{k^2}}} = \frac{1}{1} = 1$

Behauptung: bei $|z| = 1$ absolut konvergent

$\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{z^k}{k^2}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2$

---

als Funktionenreihe absolut konvergent?

$\sum_{k=1}^{\infty} \| \frac{z^k}{k^2} \|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{z\in K_R(0)} |\frac{z^k}{k^2}| = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{z\in K_R(0)} \frac{|z|^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2 < +\infty$

Stetigkeit der Grenzfunktion

Laut Korollar 6.8.4 ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ gleichmäßig konvergent. Für alle $z \in K_R(0)$ ist die Reihe beschränkt. Jede Partialsumme ist als Potenzreihe stetig.

Aus Korollar 6.6.14 folgt die Stetigkeit der Grenzfunktion.