ANA Ü7

5.) $f: [0,1] \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ $f \ldots$ stetig, beschränkt $(C_b[0,1], \|.\|_\infty)$

$(T(f))(t) = f\left(\frac{t+1}{3}\right)$

zz: $T(f) \in C_b[0,1]$

- Sei $t \in [0,1]$ bel. Dann ist $\frac{t+1}{3} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \subseteq [0,1]$

  $\Rightarrow T(f): [0,1] \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ Definitionsbereich macht Sinn
- $t \mapsto \frac{t+1}{3}$ ist stetig. Da auch f stetig ist, ist $f(\frac{t+1}{3})$ stetig
- Da f beschränkt ist, ist auch $f|_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}$ beschränkt

  $\Rightarrow T(f) \in C_b[0,1]$

zz: T... linear

- Sei $f, g \in C_b[0,1]$ bel.

  $(T(f+g))(t) = (f+g)(\frac{t+1}{3}) = f(\frac{t+1}{3}) + g(\frac{t+1}{3}) = (T(f))(t) + (T(g))(t)$
- Sei $f \in C_b[0,1]$ bel. Sei $c \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ bel.

  $(T(c \cdot f))(t) = (c \cdot f)(\frac{t+1}{3}) = c \cdot f(\frac{t+1}{3}) = c \cdot (T(f))(t)$

ges: $\|T\|$

$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|Tf\|_\infty}{\|f\|_\infty} : f \in C_b[0,1] \setminus \{0\} \right\}$

Sei $f \in C_b[0,1] \setminus \{0\}$

$\|Tf\|_\infty = \|f(\frac{t+1}{3})\|_\infty = \sup\{\|f(\frac{t+1}{3})\| : t \in [0,1]\} = \sup\{\|f(x)\| : x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]\}$

$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : x \in [0,1]\}$ $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

$\frac{\|Tf\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_\infty} = 1$

Falls $f(x)$ die konstante 1 Funktion, dann ist $\frac{\|Tf\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow \|T\| = 1$

injektiv und/oder surjektiv?

- Sei $f, g \in C_b[0,1]$ mit $T(f) = T(g)$ bel., d.h. $f(\frac{t+1}{3}) = g(\frac{t+1}{3})\ \forall t \in [0,1]$

  $\Rightarrow f(x) = g(x)\ \forall t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ Da f und g auf $[0, \frac{1}{3})$ und $(\frac{2}{3}, 1]$ nicht übereinstimmen müssen ist T nicht injektiv.
- Sei $f \in C_b[0,1]$ bel. $g(x) := f(3x-1)$ $(T(g))(t) = g(\frac{t+1}{3}) = f(3\frac{t+1}{3} - 1) = f(t)$

  allerdings ist $f(3x-1)$ mit $x \in [0,1]$ nicht in $C_b[0,1] \Rightarrow$ T ist nicht surjektiv