LINAG Ü8

8.7.3. $B \ldots$ Basis von V $\quad f \in L(V,V)$ $\quad \langle B^*, f(B) \rangle = J_n(t)$

zz: $\forall i \in \{0,1,\ldots,n\}$ $\exists!$ $U_i \ldots$ i-dimensionaler f-invarianter UR

$$\langle B^*, f(B) \rangle = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & t & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t \end{pmatrix} \qquad B = (b_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$$

Für $i=0$ $\quad U_0 := \{\theta\}$ ist 0-dimensional und f-invariant $(f(\theta)=\theta)$

Eindeutigkeit: U_0 ist der einzige 0-dimensionale UR

Sonst: Sei $i \in \{1,\ldots,n\}$ bel.

$U_i := [(b_i)_{i \in \{1,\ldots,i\}}]$

U_i ist i-dimensional (da Basis aus i Vektoren besteht)

f-invariant: Sei $v \in U_i$ bel. $\quad v = \sum_{j=1}^{i} x_j b_j$

$$f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{i} x_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{i} x_j f(b_j) = \sum_{j=1}^{i} x_j (b_{j-1} + t \cdot b_j)$$

(wobei $b_0 = \theta$) $\quad = \sum_{j=1}^{i} x_j b_{j-1} + t \cdot \sum_{j=1}^{i} x_j b_j \in U_i$

$\Rightarrow U_i$ ist i-dimensional und f-invariant

Eindeutigkeit: Sei W_i ein i-dimensionaler UR mit $W_i \neq U_i$

Sei $C = (c_i)_{i \in \{1,\ldots,i\}}$ eine Basis von W_i

$\exists j \in \{1,\ldots,i\}: c_j \notin U_i \qquad c_j = \sum_{l=1}^{n} x_l b_l$

o.B.d.A $\exists l \in \{i+1,\ldots,n\}$ $\exists m \in \{1,\ldots,i\}: c_j = b_l + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l \\ k \neq m}}^{n} x_k b_k$

$$f(c_j) = f\left(b_l + \sum_{k=1}^{m-1} x_k b_k + \sum_{k=m+1}^{l-1} x_k b_k + \sum_{k=l+1}^{n} x_k b_k\right)$$

$$= f(b_l) + \sum_{k=1}^{m-1} x_k f(b_k) + \sum_{k=m+1}^{l-1} x_k f(b_k) + \sum_{k=l+1}^{n} x_k f(b_k)$$

$$= b_{l-1} + t \cdot b_l + \sum_{k=1}^{m-1} x_k (b_{k-1} + t b_k) + \sum_{k=m+1}^{l-1} x_k (b_{k-1} + t \cdot b_k) + \sum_{k=l+1}^{n} x_k (b_{k-1} + t \cdot b_k)$$

verwendet Vektoren b_{l-1}, b_m, b_l in der LK

$\Rightarrow f(c_j) \notin W_i$

Offensichtlich gilt: $\{\theta\} = U_0 \subseteq U_1 \subseteq \ldots \subseteq U_n = V$