ANA Ü14

4.) $X \neq \emptyset$ $\quad \mathcal{T}, \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\quad \mathcal{T} := \{A \subseteq X : A = \emptyset$ oder $X \setminus A$ endlich$\}$

$\mathcal{O} := \{A \subseteq X : A = X$ oder A endlich$\}$

Für welche X sind $\mathcal{T}, \mathcal{O}$ Topologien?

(O1) •) $\emptyset \in \mathcal{T}$ nach Definition $\quad X \in \mathcal{T}$, da für $A = X$ gilt $X \setminus A = \emptyset$ ist endlich

•) $\emptyset \in \mathcal{O}$ da für $A = \emptyset$ ... endlich $\quad X \in \mathcal{O}$ nach Definition

(O2) •) Sei $A, B \in \mathcal{T}$ bel. Falls $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ $\Rightarrow A \cap B = \emptyset \in \mathcal{T}$

Sonst gilt $A^c = X \setminus A$ ... endlich $\quad B^c = X \setminus B$ ... endlich

$A \cap B = ((A \cap B)^c)^c = (A^c \cup B^c)^c$ da $A^c \cup B^c$ endlich ist folgt $A \cap B \in \mathcal{T}$

•) Sei $A, B \in \mathcal{O}$ bel. Falls $A = X \Rightarrow A \cap B = B \in \mathcal{O}$ umgekehrt genauso

Sonst gilt A ... endlich und B ... endlich $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{O}$, da endlich

(O3) •) Sei $(A_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{T}$ bel. Da $\emptyset$ nichts zur Vereinigung beiträgt, können wir o.B.d.A. $\forall i \in I: X \setminus A_i$ ... endlich annehmen

$\bigcup_{i \in I} A_i = ((\bigcup_{i \in I} A_i)^c)^c = (\bigcap_{i \in I} A_i^c)^c = X \setminus (\bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)) \in \mathcal{T}$, da $\bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$ endlich ist

•) Gegenbsp für unendliches X: $\quad X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}: A_n = \{n\}$

$\forall n \in \mathbb{N}: A_n$ ist endlich, aber $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N} \notin \mathcal{O}$, da weder $\mathbb{N} = X$, noch $\mathbb{N}$ endlich

Für endliches X: $\quad \mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$, da $\forall M \subseteq X$ gilt M endlich

Sei $(A_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{O}$ bel. $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq X$ und somit endlich

$\Rightarrow \mathcal{T}, \mathcal{O}$ sind für endliche X Topologien. Für unendliche X ist nur $\mathcal{T}$ eine Topologie.