ANA Ü2

5.) Ist arcsin als Umkehrfunktion von sin ableitbar? $((-1,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bzw. umgekehrt)

Aus dem letzten Übungsblatt bekannt:

$\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist streng monoton wachsend und bijektiv

Weiters ist bekannt, dass sin auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

$(\sin(x))' = \cos(x)$ und ist somit 0 genau wenn $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (\sin(x))' \neq 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Laut Satz 7.1.12 ist nun arcsin auf $\sin((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ differenzierbar.

Da sin stetig ist das Bild ein Intervall, da $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$ folgt, dass

$\forall x \in (-1, 1)$: arcsin ist bei x differenzierbar

$$(\arcsin(y))' = (\arcsin(\sin(x)))' = \frac{1}{(\sin(x))'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}$$

Ist areasinh als Umkehrfunktion von sinh ableitbar? $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$

Aus letztem Übungsblatt bekannt:

sinh ... streng monoton wachsend, stetig, $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$\sinh^{-1} = \text{areasinh}$

$(\sinh(x))' = \cosh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$ ist dann Null, wenn

$\exp(x) = \exp(-x)$ und da exp streng monoton wachsend ist nur der Fall wenn $x = 0$.

Laut Satz 7.1.12. ist areasinh nun auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x) - \sinh(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} - \frac{1-1}{2} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$(\text{areasinh}(y))' = (\text{areasinh}(\sinh(x)))' = \frac{1}{(\sinh(x))'} = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\cosh(\text{areasinh}(y))}$$