

$$7.) f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x) - \exp(-x)$$

$$\text{zz: } \exists! x \in [0, \frac{\pi}{2}] : f(x) = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) - \exp(-x) = 0$$

$$\sin(0) - \exp(-0) = 0 - 1 = -1$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}) - \exp(-\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{\exp(\frac{\pi}{2})} > 1 - \frac{1}{1} = 0$$

Da f stetig ist und $f([0, \frac{\pi}{2}]) \supseteq [-1, 0]$ muss f eine Nullstelle besitzen.

$$(\sin(x) - \exp(-x))' = \cos(x) - (-1) \cdot \exp(-x) = \cos(x) + \exp(-x)$$

Da $\cos(x) \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ größer oder gleich Null ist und auch $\exp(-x) > 0 \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist $\cos(x) + \exp(-x) > 0 \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$\Rightarrow \sin(x) - \exp(-x)$ ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend.

\Rightarrow Es gibt maximal eine Nullstelle