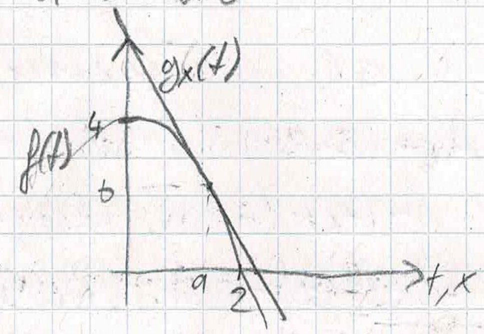
ANA Ü2

9.) $f(x) = 4 - x^2$ $\quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad a>0 \quad b>0$

$g_x(t) = k \cdot t + d = f'(x) \cdot t + d$

$g_x(x) = f(x)$



$\Leftrightarrow f'(x) \cdot x + d = f(x)$

$\Leftrightarrow -2x \cdot x + d = 4 - x^2$

$\Leftrightarrow -2x^2 + d = 4 - x^2 \quad \Leftrightarrow d = x^2 + 4$

$\underline{g_x(t) = -2xt + x^2 + 4}$

$g_x(0) = -2x \cdot 0 + x^2 + 4 = x^2 + 4$

$g_x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow -2xt + x^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow t = \frac{-x^2 - 4}{-2x}$

$\Leftrightarrow t = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

$A(x) = \frac{(x^2+4)\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{2} + 2x + 2x + \frac{8}{x}\right)$

$= \frac{x^3}{4} + 2x + \frac{4}{x}$

$A'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 + 2 - 4 \cdot \frac{1}{x^2}$

$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - 4 \cdot \frac{1}{x^2} + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{x^2} = -2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x^4 - 4 = -2x^2 \quad \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^4 + 2x^2 - 4 = 0 \quad (y = x^2)$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}y^2 + 2y - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - (-3 \cdot 4)}}{\frac{3}{2}} \quad \Leftrightarrow y_{1,2} = \pm \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow x^2 = \pm \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow A(x)$ hat bei $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ein Extremum (und sonst im oberen Quadranten nicht)

$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{4}{\sqrt{3}} + 4 \cdot \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}$

$= \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} \approx 6{,}1584 \qquad (a,b) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\right)$

$A(2) = \frac{2^3}{4} + 2 \cdot 2 + \frac{4}{2} = 2 + 4 + 2 = 8$

Da $A(2) > A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ kann $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ kein Maximum sein.

$\Rightarrow A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ ist ein lokales Minimum