ANA Ü3

1.) $n \in \mathbb{N}$ $\quad g: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad$ ges: $\|g\|_\infty$

$$x \mapsto x^n (1-x)^2$$

$$x^n \cdot (1-x)^2 = x^n - 2x \cdot x^n + x^2 \cdot x^n = x^{n+2} - 2x^{n+1} + x^n$$

$$(x^{n+2} - 2x^{n+1} + x^n)' = (n+2)x^{n+1} - (2n+2)x^n + n \cdot x^{n-1}$$

$$x^{n-1} \cdot ((n+2) \cdot x^2 - (2n+2) \cdot x + n) = 0 \quad \Rightarrow x^{n-1} = 0 \text{ oder}$$

$$x_{1,2} = \frac{(2n+2) \pm \sqrt{(2n+2)^2 - 4(n+2)n}}{2(n+2)} = \frac{2n+2 \pm \sqrt{\cancel{4n^2} + \cancel{8n} + 4 - \cancel{4n^2} - \cancel{8n}}}{2n+4}$$

$$= \frac{2n+2 \pm 2}{2n+4} \begin{cases} \to 1 \\ \to \frac{2n}{2n+4} = \frac{n}{n+2} \end{cases}$$

Bei $x=0$: $\quad g(0) = 0^n (1-0)^2 = 0$

Bei $x=1$: $\quad g(1) = 1^n (1-1)^2 = 1^n \cdot 0^2 = 0$

Bei $x = \frac{n}{n+2}$ $\quad g\left(\frac{n}{n+2}\right) = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+2}\right)^2 = \frac{n^2}{(n+2)^n} \left(\frac{n+2-n}{n+2}\right)^2$

$$= \frac{n^2}{(n+2)^n} \frac{4}{(n+2)^2} = \frac{4n^2}{(n+2)^{n+2}} > 0$$

Da g auf $[0,1]$ ein Minimum und Maximum haben muss und für das Maximum nur $g\left(\frac{n}{n+2}\right)$ in Frage kommt

$$\Rightarrow \|g\|_\infty = g\left(\frac{n}{n+2}\right) = \frac{4n^2}{(n+2)^{n+2}}$$