MAS Ü4

3.) (Ω, σ, P). Wahrscheinlichkeitsraum $\qquad A, B, C \in \sigma$

$P(A) = 0{,}7 \qquad P(B) = 0{,}6 \qquad P(C) = 0{,}5$

$P(A \cap B) = 0{,}4 \qquad P(A \cap C) = 0{,}3 \qquad P(B \cap C) = 0{,}2 \qquad P(A \cap B \cap C) = 0{,}1$

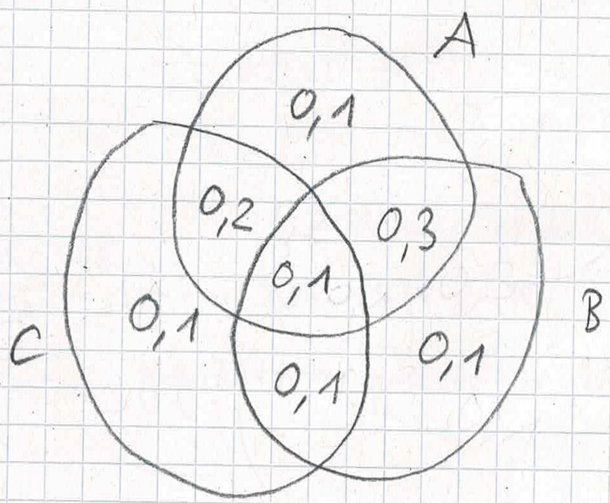
ges: $\quad P(A \mid B \cup C) \qquad P(A \mid B \setminus C)$

$$\boxed{\begin{aligned} &P(X \cup Y) + P(X \cap Y) \\ &= P(X) + P(Y) \end{aligned}}$$

$$P(A \mid B \cup C) = \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} = \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(B \cup C)}$$

$$= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C))}{P(B) + P(C) - P(B \cap C)} = \frac{0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1}{0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}2} = \frac{0{,}6}{0{,}9} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \mid B \setminus C) = \frac{P(A \cap (B \setminus C))}{P(B \setminus C)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4}$$



MAS Ü4

4.) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ Ein Würfel wird zweimal geworfen

a) A ... die erste Augenzahl ist 6

B ... die zweite Augenzahl ist 6

C ... die Summe der Augenzahlen ist 7

$A = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$B = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}$

$C = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

b) zz: A, B, C sind paarweise unabhängig und nicht vollständig unabhängig

$P(A \cap B) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$ $\qquad P(A) \cdot P(B) = \frac{6}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{36}{36^2} = \frac{1}{36}$

$P(A \cap C) = \frac{1}{36}$ $\qquad P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{36}$

$P(B \cap C) = \frac{1}{36}$ $\qquad P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{36}$

$\Rightarrow$ A, B, C sind paarweise unabhängig

$P(A \cap B \cap C) = 0$ $\qquad P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{6^3}$

$\Rightarrow$ A, B, C sind nicht vollständig unabhängig

MAS Ü4

5.) zz: A, B, C ... unabhängig $\Rightarrow A^c, B^c, C^c$ ... unabhängig

A, B, C ... unabhängig $\Leftrightarrow P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

$$P(A^c\cap B^c\cap C^c) = 1 - P((A^c\cap B^c\cap C^c)^c) = 1 - P(A\cup B\cup C)$$

$$= 1 - (P(A) + P(B\cup C) - P(A\cap(B\cup C))) = 1 - (P(A) + P(B) + P(C) - P(B\cap C)$$

$$- P((A\cap B)\cup(A\cap C))) = 1 - (P(A) + P(B) + P(C) - P(B\cap C) - P(A\cap B) - P(A\cap C)$$

$$+ P((A\cap B)\cap(A\cap C))) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A\cap B) + P(A\cap C) + P(B\cap C)$$

$$- P(A\cap B\cap C) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A)\cdot P(B) + P(A)\cdot P(C) + P(B)\cdot P(C)$$

$$- P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = (1 - P(B) - P(A) + P(A)\cdot P(B))(1 - P(C))$$

$$= (1 - P(A))\cdot(1 - P(B))\cdot(1 - P(C)) = P(A^c)\cdot P(B^c)\cdot P(C^c)$$

$\square$

MAS Ü4

6.) (Ω, σ, P)... Wahrscheinlichkeitsraum I... höchstens abzählbar

$(B_i)_{i\in I}$ $\forall i\in I: B_i \in \sigma$ $\sum_{i\in I} B_i = \Omega$ $\forall i \in I: P(B_i) > 0$

$A \in \sigma$ $P(A|B_i)$ zz: $P(A) = \sum_{i\in I} P(B_i)\cdot P(A|B_i)$

wissen B_i sind paarweise disjunkt

$$P(A) = P(A\cap\Omega) = P(A\cap \sum_{i\in I} B_i) = P(\sum_{i\in I} A\cap B_i) = \sum_{i\in I} P(A\cap B_i)$$

$$= \sum_{i\in I} P(B_i)\cdot \frac{P(A\cap B_i)}{P(B_i)} = \sum_{i\in I} P(B_i)\cdot P(A|B_i) \qquad \square$$

7.) zz: $P(B_i|A) = \dfrac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_{j\in I} P(B_j)\cdot P(A|B_j)}$

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i\cap A)}{\sum_{j\in I} P(B_j)\cdot P(A|B_j)} = \frac{P(B_i)\cdot \frac{P(A\cap B_i)}{P(B_i)}}{\sum_{j\in I} P(B_j)\cdot P(A|B_j)}$$

$$= \frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_{j\in I} P(B_j)\cdot P(A|B_j)} \qquad \square$$