ANA Ü7

10.) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ der Form $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ ges: $\exp(A)$

$\exp(A) = \exp(B + C)$ mit $B = \lambda \cdot I$ $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{pmatrix}$

$B \cdot C = \lambda \cdot I \cdot C = \lambda \cdot C = C \cdot \lambda I = C \cdot B \quad \Rightarrow B, C$ sind kommutierend

Aus 9. folgt nun $\exp(B+C) = \exp(B) \cdot \exp(C)$

$\exp(B) = \mathrm{diag}(\exp(\lambda), \exp(\lambda), \dots, \exp(\lambda)) = \exp(\lambda) \cdot I$ nach Beispiel 8

$\exp(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} C^k$

$= \frac{1}{0!} C^0 + \frac{1}{1!} C^1 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} C^{(n-1)}$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right.$$

Multiplizieren mit C "verschiebt" die Nebendiagonale nach rechts

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(B) \cdot \exp(C) = \exp(\lambda) \cdot I \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\exp(\lambda)}{0!} & \frac{\exp(\lambda)}{1!} & \frac{\exp(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{\exp(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & \frac{\exp(\lambda)}{0!} & \frac{\exp(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{\exp(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & \frac{\exp(\lambda)}{0!} & \cdots & \frac{\exp(\lambda)}{(n-3)!} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\exp(\lambda)}{0!} \end{pmatrix}$$