LINAG Ü8

3.2.5. $V, W \ldots VR/K$ $f \in L(V, W)$ $U_1, U_2 \subseteq V \ldots$ Unterräume mit $U_1 \subseteq U_2$

zz: $f(U_1) = f(U_2) \Rightarrow \exists T \subseteq \ker f \ldots$ UR von $V$ mit $T \oplus U_1 = U_2$

$\ker f$ ist ein UR von $V$. $\ker f|_{U_1}$ ist ein UR von $\ker f|_{U_2}$, da $U_1$ ein UR von $U_2$ ist.

Sei $T$ ein Komplementärraum zu $\ker f|_{U_1}$ in $\ker f|_{U_2}$, also

$T \oplus \ker f|_{U_1} = \ker f|_{U_2}$

Offensichtlich ist $T$ ein UR von $\ker f$.

zz: $T \cap U_1 = \{0\}$

Sei $v \in T \cap U_1$ bel. $\Rightarrow f(v) = 0$, da $v \in T \subseteq \ker f$

Da auch $v \in U_1 \Rightarrow v \in \ker f|_{U_1}$

$T \cap \ker f|_{U_1} = \{0\}$ da $T \oplus \ker f|_{U_1}$ $(= \ker f|_{U_2})$

$v \in T \cap \ker f|_{U_1} \Rightarrow v = 0$

zz: $\forall u_2 \in U_2 \; \exists t \in T \; \exists u_1 \in U_1 : u_2 = t + u_1$

Sei $u_2 \in U_2$ bel. Da $f(U_1) = f(U_2)$ $\exists u_1 \in U_1 : f(u_1) = f(u_2)$

$u_2 - u_1 =: t \in U_2$ $\quad 0 = f(u_2) - f(u_1) = f(u_2 - u_1) = f(t)$

$\Rightarrow t \in \ker f|_{U_2}$

$\exists t_1 \in \ker f|_{U_1} \; \exists t_2 \in T : t = t_1 + t_2$ da $T \oplus \ker f|_{U_1} = \ker f|_{U_2}$

$u_2 - u_1 = t_1 + t_2 \iff u_2 = \underbrace{u_1 + t_1}_{\in U_1} + \underbrace{t_2}_{\in T}$

$\Rightarrow T \oplus U_1 = U_2$