MAS Ü10

2.) a) $f_n \to f$ fast überall $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ... stetig

zz: $g \circ f_n \to g \circ f$ fast überall

$f_n \to f$ fast überall bedeutet $\exists N$.. Nullmenge : $f_n \to f$ auf N^c punktweise

Auf N^c konvergiert (durch Stetigkeit von g) $g(f_n) \to g(f)$ punktweise

$\Rightarrow \exists N$ (nämlich die gleich wie für f_n) : $g \circ f_n \to g \circ f$ auf N^c punktweise

$\Rightarrow g \circ f_n \to g \circ f$ fast überall

b) ges: f_n ... im Maß konvergent g.. stetig mit $g \circ f_n$ ... konvergiert nicht im Maß

$f_n \to f$ im Maß bedeutet $\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$

$f_n(x) := x + \frac{1}{n}$ $g(x) := x^2$ $f_n \to f := x \mapsto x$

$g \circ f_n(x) - g \circ f(x) = (x+\frac{1}{n})^2 - x^2 = \cancel{x^2} + 2x\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - x^2 = 2\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}$

$\lambda(\{x : |\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}| > \varepsilon\}) = \infty$

$\Rightarrow g \circ f_n$ konvergiert nicht im Maß

c) zz: $f_n \to f$ im Maß g... gleichmäßig stetig $\Rightarrow g \circ f_n \to g \circ f$ im Maß

g... gleichmäßig stetig $\exists \delta > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\mu(\{x : |g(f_n(x)) - g(f(x))| \geq \varepsilon\})$

Da $f_n \to f$ im Maß: $\lim_{n\to\infty} \mu(\underbrace{\{x : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}}_{=:M}) = 0$

$M^c = \{x : |f_n(x) - f(x)| \leq \delta\}$ $x \in M^c \Rightarrow |g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |g \circ f_n(x) - g \circ f(x)| > \varepsilon\}) = 0$

d) $\mu(\Omega) < \infty$ zz: $f_n \to f$ im Maß $\wedge$ g.. stetig $\Rightarrow g \circ f_n \to g \circ f$ im Maß

Da $\mu(\Omega) < \infty$ $\Rightarrow \exists N$ mit $\mu(N) = 0$ $\forall x \in N^c : f_n(x) \to f(x)$

$\Rightarrow g \circ f_n \to g \circ f$ fast überall $\Rightarrow$ $g \circ f_n \to g \circ f$ fast gleichmäßig

Satz von Egorov

$\Rightarrow g \circ f_n \to g \circ f$ im Maß