

LINAG Ü6

8.3.6. $P(X) \in K[X] \quad f \in L(V, V)$

a) zz: $t \in K \dots$ Eigenwert von $f \Rightarrow P(t) \dots$ Eigenwert von $P(f)$

$$\exists \alpha \in V \setminus \{0\}: f(\alpha) = t \cdot \alpha$$

$$f^i(\alpha) = f^{i-1}(f(\alpha)) = t \cdot f^{i-1}(\alpha) = \dots = t^i \cdot \alpha$$

$$P(f) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i f^i \quad P(f)(\alpha) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i f^i(\alpha) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i t^i \alpha = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i t^i \right) \cdot \alpha \quad \in K$$

b) $K = \mathbb{C} \quad n := \text{grad}(X) \geq 1$

zz: $\forall v \dots$ Eigenwert von $P(f)$: $\exists t \in \mathbb{C} \dots$ Eigenwert von f : $v = P(t)$

Da der Körper \mathbb{C} ist zerfällt $P(X) - v$ laut dem Fundamentalsatz der Algebra in

$$P(X) - v = a_n \prod_{j=1}^n (X - t_j) \quad \text{mit } a_n \in \mathbb{C}^* \text{ und } t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{C}$$

$$P(f) - v \text{id}_V = a_n (f - t_1 \text{id}_V) \circ (f - t_2 \text{id}_V) \circ \dots \circ (f - t_n \text{id}_V)$$

$\ker(P(f) - v \text{id}_V) \neq \{0\}$, da v EW von $P(f)$ ist (Satz 8.3.5)

$$\Rightarrow \exists x \in V \setminus \{0\}: (P(f) - v \text{id}_V)(x) = a_n (f - t_1 \text{id}_V) \circ \dots \circ (f - t_n \text{id}_V)(x) = 0$$

$a_n (f - t_1 \text{id}_V) \circ \dots \circ (f - t_n \text{id}_V)$ hat Nullstellen bei t_1, \dots, t_n

$\exists i \in \{1, \dots, n\}: (f - t_i \text{id}_V)(x) = 0 \Rightarrow t_i$ ist Eigenwert zum Eigenvektor x (von f)

$(P(f) - v \text{id}_V)(x) = 0 \Rightarrow v$ ist Eigenwert zum Eigenvektor x (von $P(f)$)

Nach a) ist $P(t_i)$ ein Eigenwert von $P(f)$ zum Eigenvektor x . Da ein Eigenvektor den Eigenwert eindeutig bestimmt (Buch Seite 217) gilt

$$v = P(t_i)$$

