ANA Ü4

3.) $f: I \to \mathbb{R}$ ... stetig, im Inneren von I ableitbar

zz: f... konvex $\Leftrightarrow$ f'... monoton wachsend

$\Rightarrow$ Sei $a, b \in I$ mit $a < b$ bel. $(a,b) \subseteq I$ Sei $x \in (a,b)$ bel.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \text{ , da } f \text{ konvex}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \lim_{x \to b} \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

$$f'(a) \leq f'(b) \qquad \Rightarrow f' \text{... monoton wachsend}$$

$\Leftarrow$ Sei $a, b \in I$ mit $a < b$. $(a,b) \subseteq I$ Sei $x \in (a,b)$ bel.

Laut dem Mittelwertsatz $\exists y_1 \in (a,x)$ mit $f'(y_1) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

und $\exists y_2 \in (x,b)$ mit $f'(y_2) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$

Da $y_1 < y_2$ und f' monoton wachsend

$$\Rightarrow f'(y_1) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(y_2)$$

$$\Rightarrow f \text{... konvex}$$