LINAG Ü8

8.7.10 $K[X]$ ... Polynomalgebra über K

a) $f: K[X] \to K[X]$ zz: f ist ein K-Algebra-Automorphismus

$P(X) \mapsto P(X+1)$

Sei $P(X), Q(X) \in K[X]$ bel. $P(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i$ $Q(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i X^i$

$P(X) \cdot Q(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right) X^i$

$f(P(X) \cdot Q(X)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right)(X+1)^i = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i (X+1)^i \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i (X+1)^i = f(P(X)) \cdot f(Q(X))$

$\Rightarrow$ Homomorphismus

$g: K[X] \to K[X]$

$P(X) \mapsto P(X-1)$ $g \circ f = id \Rightarrow f$ ... bijektiv

b) zz: $\forall n \in \mathbb{N}: U_n = [\{1, X, \dots, X^n\}]$ ist ein f-invarianter UR

Sei $n \in \mathbb{N}$ bel. U_n ist UR von $K[X]$ ist klar.

Sei $u \in U_n$ bel. $u = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ $f(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i (X+1)^i$

$(X+1)^i = \underbrace{(X+1)(X+1) \cdot \ldots \cdot (X+1)}_{i\text{-Mal}} \Rightarrow grad((X+1)^i) = i$

$\Rightarrow f(u)$ hat Grad $\leq i$ $\Rightarrow f(u) \in U_n$, da alle Polynome mit Grad ≤ 1 in U_n liegen

c) ges: EW und ER von $f|_{U_3}: U_3 \to U_3$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ ges: Koordinatenmatrix von $f|_{U_3}$ in Jordan-Normalform

$e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$, $e_4 = X^3$; $f(e_1) = 1$, $f(e_2) = X+1$, $f(e_3) = X^2 + 2X + 1$

char $K > 3$: $f(e_4) = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$

$A := \langle E^*, f|_{U_3}(E) \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_{f|_{U_3}}(X) = (1-X)^4$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow x_4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 \in K$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ ... Eigenraum

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^2$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow x_4 = 0$, $x_3 = 0$ $x_1, x_2 \in K$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^3$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow x_4 = 0$ Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^4$ $\Theta \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Lösungsraum U_3

...

LINAG Ü8

8.7.10 ...

ges: Koordinatenmatrix in J-NF

$r_0 = 4 \quad r_1 = 3 \quad r_2 = 2 \quad r_3 = 1 \quad r_4 = 0 \quad \dots$

$u_1 = r_0 - r_1 = 4 - 3 = 1 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = 1 \quad u_4 = 1 \quad u_5 = 0 \quad \dots$

$k_1 = u_1 - u_2 = 0 \quad k_2 = 0 \quad k_3 = 0 \quad k_4 = 1 \quad k_5 = 0 \quad \dots$

$\Rightarrow$ J-NF ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J_4(1)$

Falls char $K = 2$:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_4 = 0 \quad x_2 = -x_3 = x_3$

Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^2$:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_4 = 0$ Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^3$:

$0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Lösungsraum U_3

$r_0 = 4 \quad r_1 = 2 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = 0 \quad \dots$

$u_1 = 2 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = 1 \quad u_4 = 0 \quad \dots$

$k_1 = 1 \quad k_2 = 0 \quad k_3 = 1 \quad k_4 = 0 \quad \dots$

$\Rightarrow$ J-NF ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Falls char $K = 3$: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)$:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 0 \quad x_2 = -x_4$ Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^2$:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 0$ Lösungsraum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$\ker(A - 1 \cdot E_4)^3$:

$0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow LSG = U_3$

$r_0 = 4 \quad r_1 = 2 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = 0 \quad \dots$

$u_1 = 2 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = 1 \quad u_4 = 0 \quad \dots$

$k_1 = 1 \quad k_2 = 0 \quad k_3 = 1 \quad k_4 = 0 \quad \dots$

$\Rightarrow$ J-NF ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$