LINAG Ü2

6.2.3. A... affiner Raum $A = s + U$ $\dim A = 4$

a) $\forall \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset A$ mit $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ affine Ebenen: $(\mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2) \vee (\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \ldots$ Gerade $) \vee$
$(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \ldots$ Punkt $) \vee (\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset$ und $\exists g \ldots$ Gerade mit $\mathcal{E}_1 \parallel g$ und $\mathcal{E}_2 \parallel g)$

Sei $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \leq A$ mit $\dim(\mathcal{E}_1) = \dim(\mathcal{E}_2) = 2$ bel.

$\mathcal{E}_1 = s_1 + U_1$ $\mathcal{E}_2 = s_2 + U_2$

Fallunterscheidung 1. Fall $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq \emptyset$ $\Rightarrow \exists t \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$

Fallunterscheidung a. Fall $\dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = 2$

Affiner Dimensionssatz: $\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = \dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2)$

$\Rightarrow 2 + 2 = 2 + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) \Rightarrow \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = 2$

Aus $\dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = 2$ folgt $\dim(U_1 (= \mathcal{E}_1 - t) \cap U_2 (= \mathcal{E}_2 - t)) = 2$

$\Rightarrow U_1 = U_2 \Rightarrow \mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2$

b. Fall $\dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = 1$ $\Rightarrow \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ ist eine Gerade

$\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = \dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) \Leftrightarrow 4 = 1 + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2)$

$\Rightarrow \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = 3$

c. Fall $\dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = 0$ $\Rightarrow \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ ist ein Punkt.

$\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = \dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) \Rightarrow \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = 4$

2. Fall $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset$

Fallunterscheidung a. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$

$\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) - 1 \Rightarrow \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = 3$

$\dim(U_1 \cap U_2) = 2 \Rightarrow U_1 = U_2 \Rightarrow \mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2$

b. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$

$\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) - 1 \Rightarrow \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = 4$

Da $g = U_1 \cap U_2$ Dimension 1 hat ist g eine Gerade.

$g \subseteq U_1$ und $g \subseteq U_2 \Rightarrow \mathcal{E}_1 \parallel g$ und $\mathcal{E}_2 \parallel g$

c. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$

$\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) - 1 \Rightarrow \dim(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = 5$ ↯

$\Rightarrow$ Fall kann nicht eintreten

...

LINAG Ü3

... 6.2.3.6) zz: $\forall H_1, H_2 \subseteq A \ldots H_1, H_2 \ldots$ Hyperebenen: $(H_1 \parallel H_2) \vee (H_1 \cap H_2$ ist eine Ebene$)$

$A = s + U$ mit $\dim A = 4$

Sei $H_1, H_2 \subseteq A$ mit $H_1, H_2 \ldots$ Hyperebenen bel. $\Rightarrow \dim(H_1) = \dim(H_2) = 3$

$H_1 = s_1 + U_1 \quad H_2 = s_2 + U_2$

Fallunterscheidung: 1. Fall $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$

Fallunterscheidung: a. Fall $\dim(H_1 \cap H_2) = 3 \quad \Rightarrow U_1 = U_2 \Rightarrow H_1 \parallel H_2$

$\dim(H_1) + \dim(H_2) = \dim(H_1 \cap H_2) + \dim(H_1 \vee H_2)$

$\Rightarrow \dim(H_1 \vee H_2) = 3$

b. Fall $\dim(H_1 \cap H_2) = 2 \quad \Rightarrow H_1 \cap H_2$ ist eine Ebene

$\dim(H_1) + \dim(H_2) = \dim(H_1 \cap H_2) + \dim(H_1 \vee H_2)$

$\Rightarrow \dim(H_1 \vee H_2) = 4$

c. Fall $\dim(H_1 \cap H_2) \leq 1$

$\dim(H_1) + \dim(H_2) = \dim(H_1 \cap H_2) + \dim(H_1 \vee H_2)$

$\Rightarrow \dim(H_1 \vee H_2) \geq 5$ ↯ $\Rightarrow$ dieser Fall kann nicht eintreten

2. Fall $H_1 \cap H_2 = \emptyset$

Fallunterscheidung: a. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 3 \quad \Rightarrow U_1 = U_2 \Rightarrow H_1 \parallel H_2$

$\dim(H_1) + \dim(H_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(H_1 \vee H_2) - 1$

$\Rightarrow \dim(H_1 \vee H_2) = 4$

b. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) \leq 2$

$\dim(H_1) + \dim(H_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(H_1 \vee H_2) - 1$

$\Rightarrow \dim(H_1 \vee H_2) = 5$ ↯ $\Rightarrow$ dieser Fall kann nicht eintreten

...

LINAG Ü2

6.2.3. c) $A = s + U \quad \dim(A) = 4$

zz: $\forall g \ldots$ Gerade $\forall \mathcal{E} \ldots$ Ebene : $(g \parallel \mathcal{E}) \vee (g \cap \mathcal{E} \ldots \text{Punkt}) \vee (g \cap \mathcal{E} = \emptyset$ und $\neg g \parallel \mathcal{E})$

Sei $g, \mathcal{E}$ bel. mit $\dim(g) = 1$ und $\dim(\mathcal{E}) = 2 \quad g = s_1 + U_1 \quad \mathcal{E} = s_2 + U_2$

1. Fall $g \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$

a. Fall $\dim(g \cap \mathcal{E}) = 1 \quad \Rightarrow U_1 \cap U_2 = U_1 \Rightarrow g \parallel \mathcal{E}$

$\dim(g) + \dim(\mathcal{E}) = \dim(g \cap \mathcal{E}) + \dim(g \vee \mathcal{E}) \Rightarrow \dim(g \vee \mathcal{E}) = 2$

b. Fall $\dim(g \cap \mathcal{E}) = 0 \quad \Rightarrow g \cap \mathcal{E} \ldots$ Punkt

$\dim(g) + \dim(\mathcal{E}) = \dim(g \cap \mathcal{E}) + \dim(g \vee \mathcal{E}) \Rightarrow \dim(g \vee \mathcal{E}) = 3$

2. Fall $g \cap \mathcal{E} = \emptyset$

a. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 1 \quad \Rightarrow U_1 \cap U_2 = U_1 \Rightarrow g \parallel \mathcal{E}$

$\dim(g) + \dim(\mathcal{E}) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(g \vee \mathcal{E}) - 1 \Rightarrow \dim(g \vee \mathcal{E}) = 3$

b. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 0 \quad \Rightarrow \neg(U_1 \subseteq U_2) \wedge \neg(U_2 \subseteq U_1) \Rightarrow \neg(g \parallel \mathcal{E})$

$\dim(g) + \dim(\mathcal{E}) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(g \vee \mathcal{E}) - 1 \Rightarrow \dim(g \vee \mathcal{E}) = 4$

---

d) $\forall g \ldots$ Gerade $\forall H \ldots$ Hyperebene : $(g \parallel H) \vee (g \cap H \ldots \text{Punkt})$

Sei g, H bel mit $\dim(g) = 1$ und $\dim(H) = 3 \quad g = s_1 + U_1 \quad H = s_2 + U_2$

1. Fall $g \cap H \neq \emptyset$

a. Fall $\dim(g \cap H) = 1 \quad \Rightarrow U_1 \cap U_2 = U_1 \Rightarrow g \parallel H$

$\dim(g) + \dim(H) = \dim(g \cap H) + \dim(g \vee H) \Rightarrow \dim(g \vee H) = 3$

b. Fall $\dim(g \cap H) = 0 \quad \Rightarrow g \cap H \ldots$ Punkt

$\dim(g) + \dim(H) = \dim(g \cap H) + \dim(g \vee H) \Rightarrow \dim(g \vee H) = 4$

2. Fall $g \cap H = \emptyset$

a. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 1 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = U_1 \Rightarrow g \parallel H$

$\dim(g) + \dim(H) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(g \vee H) - 1 \Rightarrow \dim(g \vee H) = 4$

b. Fall $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$

$\dim(g) + \dim(H) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(g \vee H) - 1 \Rightarrow \dim(g \vee H) = 5 \ \lightning$

$\Rightarrow$ dieser Fall kann nicht eintreten