

NUM UE4

Ida Hönigmann

November 2, 2021

1 Aufgabe 14:

Wir zeigen $V_n A = D V_n$ indem wir auf jeder Seite den Wert in der j -ten Zeile und k -ten Spalte berechnen.

Wir wissen, dass

$$(V_n)_{jk} = w_n^{j*k}.$$

Durch die Diagonalstruktur der Matrix D wird bei einer Multiplikation mit D von links jede Zeile mit dem entsprechenden Wert aus D skaliert, d.h.

$$(D V_n)_{jk} = p(w_n^j) * w_n^{j*k} = \left(\sum_{l=0}^{n-1} a_l * w_n^{j*l} \right) * w_n^{j*k} = \sum_{l=0}^{n-1} a_l * w_n^{j(l+k)}.$$

Um $(V_n A)_{jk}$ auszurechnen wollen wir uns zunächst die entsprechende Zeile von V_n und Spalte von A ansehen:

$$\begin{aligned} (V_n A)_{jk} &= (w_n^{j*0}, w_n^{j*1}, \dots, w_n^{j*(n-1)}) * (a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-k-1})^T \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} (w_n^{j*l} * a_{n-k+l}) + \sum_{l=0}^{n-k-1} (w_n^{j*(l+k)} * a_l) \\ &= \sum_{l=n-k}^{k-1+n-k} (w_n^{j*(l-n+k)} * a_{n-k+l-n+k}) + \sum_{l=0}^{n-k-1} (w_n^{j*(l+k)} * a_l) \\ &= \sum_{l=n-k}^{n-1} (w_n^{j*(l+k-n)} * a_l) + \sum_{l=0}^{n-k-1} (w_n^{j*(l+k)} * a_l) \end{aligned}$$

Da w_n die n -te Einheitswurzel ist gilt $(w_n)^n = 1$ und somit

$$w_n^{j(l+k-n)} = \frac{w_n^{j(l+k)}}{w_n^{j*n}} = \frac{w_n^{j(l+k)}}{((w_n)^n)^j} = \frac{w_n^{j(l+k)}}{1} = w_n^{j(l+k)}.$$

Insgesamt ergibt das

$$(V_n A)_{jk} = \sum_{l=n-k}^{n-1} (w_n^{j*(l+k)} * a_l) + \sum_{l=0}^{n-k-1} (w_n^{j*(l+k)} * a_l) = \sum_{l=0}^{n-1} (w_n^{j*(l+k)} * a_l) = (D V_n)_{jk}.$$

Somit ist gezeigt, dass $V_n A V_n^{-1} = D$.

2 Aufgabe 15:

Nach Aufgabe 14 gilt $V_n A V_n^{-1} = D$, was uns $A = V_n^{-1} D V_n$ und weiter $A^{-1} = V_n^{-1} D^{-1} V_n$ liefert. Die Inverse von A existiert wegen der Regularität.

Von V_n wissen wir, dass $V_n^{-1} = \frac{1}{n} \bar{V}_n$ und durch die Diagonalform von D gilt $D^{-1} = \bar{D}$.

Um $Ax = b$ zu lösen können wir einfach $x = A^{-1}b = \frac{1}{n} \bar{V}_n \bar{D} V_n b$ berechnen.

Schauen wir uns zuerst die Berechnung von D an.

Es sei a der Vektor aus dem die zirkulante Matrix A aufgebaut ist und v_1 die erste Spalte von V_n . Für v_1 gilt $v_1 = (1)_{j=0}^{n-1}$. Es gilt $V_n A = D V_n$ und somit auch für die erste Spalte $V_n a = D v_1 = D * (1, 1, \dots, 1)^T = (p(1), p(w_n), \dots, p(w_n^{n-1}))$.

Somit berechnet folgender Algorithmus die Lösung von $Ax = b$:

1. Berechnen von $d := V_n a$ mittels FFT
2. Berechnen von \bar{d} komponentenweise
3. Berechnen von $x := V_n b$ mittels FFT
4. Berechnen von $y := \bar{d} * x$ komponentenweise
5. Berechnen von \bar{y} komponentenweise
6. Berechnen von $z := V_n \bar{y}$ mittels FFT
7. Berechnen von \bar{z} komponentenweise
8. Berechnen von $\frac{1}{n} \bar{z}$ komponentenweise

Der Aufwand beträgt 3 FFTs und 5 komponentenweisen Berechnungen, also $3 * (n \log_2 n) + 5n$ bzw. $O(n \log n)$.