NUM Ü10

39) zz: Alle positiv definiten Matrizen ($\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}: \langle x, Ax \rangle > 0$) und alle strikt diagonaldominaten Matrizen besitzen eine LU-Zerlegung.

Beweis: Aus dem Satz der Existenz und Eindeutigkeit der LU-Zerlegung wissen wir, dass $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ genau dann eine LU-Zerlegung besitzt, wenn $\forall k = 1, \dots, n: A_k := (a_{ij})_{i,j=1}^{k} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär ist.

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ positiv definit und $k \in \{1, \dots, n\}$ bel. Sei A_k wie oben definiert. Angenommen A_k wäre nicht regulär, also $\exists\, x \in \mathbb{K}^k \setminus \{0\}: A_k x = 0$.
Definieren wir $\hat{x} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ durch $\hat{x}_i := x_i$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ und 0 sonst, dann gilt

$$\langle \hat{x}, A\hat{x} \rangle = \hat{x}^H A \hat{x} = \hat{x}^H \begin{pmatrix} A_k & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = (\bar{x} \;\; 0) \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix} = 0$$

Was ein Widerspruch zu A ist positiv definit ist. $\Rightarrow A_k$ ist regulär

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ strikt diagonaldominant und $k \in \{1, \dots, n\}$ bel. Sei A_k wie oben definiert. Wir wollen zeigen, dass auch A_k strikt diagonaldominat und somit regulär ist.

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} |a_{ij}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}| \qquad \forall j \in \{1, \dots, k\}$$

Woraus die strikte Diagonaldominantheit und laut Aufgabe 12 auch die Regularität folgt.

Insgesamt folgt in beiden Fällen die Existenz einer LU-Zerlegung.

$\square$