DGA Ü10

1) zz: folgendes lineares Programm ist unbeschränkt

$x_1 - x_2$ max! NB: $-2x_1 + x_2 \leq -1$

$-x_1 - 2x_2 \leq -2$

$x_1, x_2 \geq 0$

$f(x) = x_1 - x_2$

Sei $C > 0$ bel.

$x := (C+2, 0)$ ist eine gültige Lösung, da

$-2x_1 + x_2 = -2(C+2) + 0 = -2C - 4 \leq -1$ (da $2C+4 \geq 1$)

$-x_1 - 2x_2 = -(C+2) - 2 \cdot 0 = -C - 2 \leq -2$ (da $C+2 \geq 2$)

$x_1, x_2 \geq 0$ klar

$f(x) = x_1 - x_2 = C+2-0 = C+2 > C$

Da C beliebig war ist das lineare Programm nach oben nicht beschränkt.

$\square$

Alternative Lösung mittels SIMPLEX Algorithmus zeigt $\Delta g = \infty$ und somit, dass unbeschränkt. Das ist allerdings für mich aufwendiger als der obere Beweis.

DGA Ü10

2) $5x_1 + 2x_2 + x_3$ max!

NB: $x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 6$

$x_2 + x_3 \leq 4$

$3x_1 + x_2 \leq 7$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

ist in Standardform

Schlupfform: $z = 5x_1 + 2x_2 + x_3$

$x_4 = 6 - x_1 - 3x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - x_2 - x_3$

$x_6 = 7 - 3x_1 - x_2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

hat Basislösung $x = (0,0,0,6,4,7)$ mit $f(x) = 0$

Als Matrix:

z	x_4	x_5	x_6	konst.	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0	0	5	2	1
0	1	0	0	6	-1	-3	1
0	0	1	0	4	0	-1	-1
0	0	0	1	7	-3	-1	0

wähle x_1: aus NB gilt

$0 \leq 6 - x_1 \Rightarrow x_1 \leq 6$

$0 \leq 7 - 3x_1 \Rightarrow x_1 \leq \frac{7}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{7}{3} \quad x_6 = 0$

$x_6 = 7 - 3x_1 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6$

z	x_1	x_4	x_5	konst.	x_2	x_3	x_6
1	0	0	0	$\frac{35}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$
0	1	0	0	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
0	0	1	0	$\frac{11}{3}$	$-\frac{8}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
0	0	0	1	4	-1	-1	0

Basislösung $x' = (\frac{7}{3}, 0, 0, \frac{11}{3}, 4)$ $f(x') = \frac{35}{3}$

$z = 5(\frac{7}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6) + 2x_2 + x_3$

$x_4 = 6 - (\frac{7}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6) - 3x_2 + x_3$

Wähle x_3: aus NB gilt $0 \leq \frac{11}{3} + x_3 \Rightarrow x_3 \geq -\frac{11}{3}$ $\quad 0 \leq 4 - x_3 \Rightarrow x_3 \leq 4$

$\Rightarrow x_3 = 4 \quad x_5 = 0 \quad x_5 = 4 - x_2 - x_3 \Leftrightarrow x_3 = 4 - x_2 - x_5$

Basislösung $x'' = (\frac{7}{3}, 0, 4, \frac{23}{3}, 0, 0)$

$f(x'') = \frac{47}{3}$

z	x_1	x_3	x_4	konst.	x_2	x_5	x_6
1	0	0	0	$\frac{47}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{5}{3}$
0	1	0	0	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
0	0	1	0	4	-1	-1	0
0	0	0	1	$\frac{23}{3}$	$-\frac{11}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$

$z = \frac{35}{3} + \frac{1}{3}x_2 + (4 - x_2 - x_5) - \frac{5}{3}x_6$

$x_4 = \frac{11}{3} - \frac{8}{3}x_2 + (4 - x_2 - x_5) + \frac{1}{3}x_6$

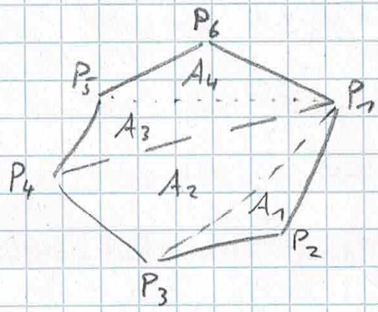
Da x_2, x_5, x_6 negativ, ist $x'' = (\frac{7}{3}, 0, 4, \frac{23}{3}, 0, 0)$ mit $f(x'') = \frac{47}{3}$ optimal.

DGA Ü10

3) P ... konvexes Polygon $P_1, \dots, P_n$ Eckpunkte (geordnet)

ges: Algorithmus zur Flächenberechnung

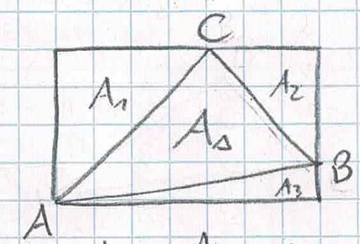
Idee: Zerteile Polygon in Dreiecke und addiere Fläche dieser Dreiecke




```
Algorithm (P = [P_1, P_2, ..., P_n]) {
    if (n ≤ 2) return 0;
    A = 0;
    for i = 2, ..., n-1 {
        A += triangle_area(P_1, P_i, P_{i+1});
    }
    return A;
}
```

```
triangle_area (A, B, C) {
    return ½ |(B.x-A.x)(C.y-A.y) - (C.x-A.x)(B.y-A.y)|;
}
```

Beweis durch Nachrechnen:



$A_\square = A_\Delta + A_1 + A_2 + A_3$

$A_\square = (B.x - A.x)(C.y - A.y)$

$A_1 = \frac{1}{2}(C.x - A.x)(C.y - A.y)$

$A_2 = \frac{1}{2}(B.x - C.x)(C.y - B.y)$

$A_3 = \frac{1}{2}(B.x - A.x)(B.y - A.y)$

$A_\Delta = A_\square - A_1 - A_2 - A_3 = \frac{1}{2}(A.x \cdot B.y - A.x\,C.y - A.y\,B.x + A.y\,C.x + B.x\,C.y - B.y\,C.x)$

$= \frac{1}{2}((B.x - A.x)(C.y - A.y) - (C.x - A.x)(B.y - A.y))$

Betrag ist notwendig, falls Punkte im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ) geordnet sind. $\square$