DGA Ü2

2) asymptotischer Vergleich von Folgen

a) $f(n) = n! \qquad g(n) = (n+3)!$

$f(n) \in o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 0$

b) $f(n) = n^3 \qquad g(n) = 3^{\ln(n)} = \exp(\ln(n)\cdot\ln(3)) = n^{\ln(3)}$

$g(n) \in o(f(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\ln(3)}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} n^{\ln(3)-3} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{n\to\infty} n^{3-\ln(3)}}_{\to\infty}} = 0$

c) f, g ... positive Funktionen zz: $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n)+g(n))$

$a_n = \Theta(b_n) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \cdot |b_n| \le |a_n| \le c_2 \cdot |b_n|$

$\frac{1}{2}\cdot|f(n)+g(n)| = \frac{f(n)+g(n)}{2} \le \max(f(n), g(n)) \le f(n)+g(n) = |f(n)+g(n)|$

d) gilt c) auch für min statt max?

Nein für $f(n) = \frac{1}{n}$, $g(n) = 1$ gilt $\min(f(n), g(n)) = \Theta(f(n)+g(n))$ nicht

$c(f(n)+g(n)) = c\cdot(1+\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} c$ und $\min(f(n), g(n)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\nexists c > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : c(f(n)+g(n)) \le \min(f(n); g(n))$

e) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$?

gilt nicht, da für $f(n) = n^2+n$ $g(n) = n^2$ zwar gilt, dass $f(n) = O(g(n))$ $(|n^2+n| \le |n^2+n^2| = 2\cdot|n^2|)$, aber für kein $c \in \mathbb{R}$ gilt, dass $|2^{n^2+n}| = |2^{n^2}\cdot 2^n| = |2^{n^2}|\cdot 2^n \le c\cdot|2^{n^2}|$, da $2^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

f) gilt $f(n) = O(f(n)^2)$?

gilt nicht für $f(n) = \frac{1}{n}$

$|f(n)| = \frac{1}{n} \le c\cdot\frac{1}{n^2} = c\cdot|f(n)^2| \Rightarrow c \ge n$ ↯, da $n\to\infty$, $c \in \mathbb{R}$

g) ges: $f(n)$ mit $\neg f(n) = O(n) \wedge \neg f(n) = \Omega(n)$

für $f(n) = \tan(n)$ gilt $|f(n)| = |\tan(n)| \le c\cdot|n|$ nicht, da $\tan(n) \xrightarrow{n\to\frac{\pi}{2}} \infty$

und $|n| \le c\cdot|\tan(n)|$ gilt nicht, da $\tan(n) \xrightarrow{n\to k\cdot\pi} 0$

$\Rightarrow \neg f(n) = O(n) \wedge \neg n = O(f(n)) \Rightarrow \neg f(n) = O(n) \wedge \neg f(n) = \Omega(n)$