NUM UE9

Ida Hönigmann

December 6, 2021

1 Aufgabe 33:

Proof. a) Wie letzte Woche gezeigt gilt $||A||_\infty = \sup_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty$.
Sei $x \in \mathbb{K}^n$ mit $||x||_\infty = 1$ beliebig. Also gilt $\max_{j=1,...,n} |x_j| = 1$.

$$||Ax||_\infty = \max_{j=1,...,m} |(Ax)_j| = \max_{j=1,...,m} \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right| \leq \max_{j=1,...,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \cdot |x_k| \leq \max_{j=1,...,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

Sei $j \in \{1, ..., m\}$ mit $\sum_{k=1}^n |a_{jk}|$ maximal. Falls $\sum_{k=1}^n |a_{jk}| = 0$ folgt $\forall k = 1, ..., n \forall j = 1, ..., m$: $a_{jk} = 0$ und somit ist die Aussage klar. Sonst gilt für

$$x = \begin{pmatrix} sgn(a_{j1}) \\ sgn(a_{j2}) \\ \cdots \\ sgn(a_{jn}) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \qquad ||x||_\infty = 1$$

$$||Ax||_\infty = \max_{l=1,...,m} \left| \sum_{k=1}^n a_{lk} x_k \right| = \max_{l=1,...,m} \left| \sum_{k=1}^n a_{lk} \cdot sgn(a_{jk}) \right| = \left| \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right| = \sum_{k=1}^n |a_{jk}| = \max_{j=1,...,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

Also folgt $||A||_\infty = \max_{j=1,...,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$.

b) Um $||A||_1 = \max_{k=1,...,n} \sum_{j=1}^m |a_{jk}|$ zu zeigen schauen wir uns zunächst folgendes an:
Sei $x \in \mathbb{K}^n$ mit $||x||_1 = 1$ beliebig. Also gilt $\sum_{j=1}^n |x_j| = 1$.

$$\begin{aligned} |(Ax)_j| &= \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| x_k \right| = \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \\ &\leq \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| \sum_{k=1}^n |x_k| = \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| \cdot ||x||_1 = \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| \\ \implies ||Ax||_1 &= \sum_{j=1}^m |(Ax)_j| \leq \sum_{j=1}^m \max_{k=1,...,n} |a_{jk}| = \max_{k=1,...,n} \sum_{j=1}^m |a_{jk}| \end{aligned}$$

Wähle $j \in \{1, ..., n\}$ so, dass $\sum_{k=1}^m |a_{kj}|$ maximal ist. Sei $x \in \mathbb{K}^n$ mit $x_j = 1$ und $\forall l \neq j : x_l = 0$.

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|(Ax)_l| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_{lk} x_k\right| = |a_{lj}| \\
||Ax||_1 = \sum_{k=1}^{m} |(Ax)_k| &= \sum_{k=1}^{m} |a_{kj}| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{k=1}^{m} |a_{kj}|
\end{aligned}
$$

Also folgt $||A||_1 = \max_{k=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|$.

$\square$