DGA Ü2

5.) a) A, B ... Mengen $\quad r := |A| \quad s := |B|$

zz: $s > r \Rightarrow \nexists$ surjektive Abbildung von A nach B

Angenommen $\exists f: A \to B$ .. surjektiv

$\Rightarrow |f(A)| \leq |A| < |B|$ $\quad \lightning$ zu surjektiv, da dann $|f(A)| = |B|$

zz: $s = r \Rightarrow \exists s!$ verschiedene surjektive Abbildungen von A nach B

Vollständige Induktion nach s:

$s = 1$: $\Rightarrow A = \{x\} \quad B = \{y\} \Rightarrow f: A \to B$ muss $x \mapsto y$ und ist surj.

$s+1$: Wählen wir ein $x \in A$. f kann x auf $s+1 = r+1$ verschiedene Elemente aus B abbilden. Für $\forall y \in A \setminus \{x\}: f(y) \neq f(x)$, da sonst $|f(A)| < |B| \Rightarrow$ nicht surjektiv gilt.

Für surjektive Funktionen von $A \setminus \{x\}$ nach $B \setminus \{f(x)\}$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung $|A \setminus \{x\}|! = (s+1-1)!$ Möglichkeiten.

$\Rightarrow$ Insgesamt gibt es $(s+1)!$ verschiedene surjektive Funktionen von A nach B

zz: $s < r \Rightarrow \exists \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} (s-k)^r$ verschiedene surjektive $f: A \to B$

$B = \{y_1, y_2, \ldots, y_s\} \quad F := \{f: A \to B\} \quad F_i := \{f \in F: y_i \notin f(A)\}$

$$\left| F \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i \right| = |F| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,s\}} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} F_i \right|$$

$$|F| = |B|^{|A|} = s^r \qquad \left| \bigcap_{i \in I} F_i \right| = (|B| - |I|)^{|A|} = (s - |I|)^r$$

$$\left| F \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i \right| = s^r + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,s\}} (-1)^{|I|} (s - |I|)^r = s^r + \sum_{k=1}^{s} (-1)^k (s-k)^r \cdot \binom{s}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} (s-k)^r$$

$$F \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i = \{f \in F: \forall i \in \{1,\ldots,s\}\ \exists x \in A: f(x) = y_i\} = \{f \in F: \forall y \in B: y \in f(A)\}$$

... Menge aller surjektiven Funktionen von A nach B

DGA Ü2

5) b) ges: Anzahl Surjektionen von einer 5-elementigen Menge in eine 3-elementige Menge

$r = 5 \quad s = 3$

$\sum_{k=0}^{3} (-1)^k \binom{3}{k} (3-k)^5 = \binom{3}{0} 3^5 - \binom{3}{1} 2^5 + \binom{3}{2} 1^5 - \binom{3}{3} 0^5$

$= 243 - 3 \cdot 32 + 3 = 150$

c) ges: Algorithmus für Anzahl Surjektionen von A nach B mit $|A| =: r$ und $|B| =: s$

```
Algorithm (r, s):
    res = 0
    for k=0 to s:
        tmp = s! / (k! (s-k)!) * (s-k) ** r;
        if k % 2 == 1:
            res = res - tmp;
        else:
            res = res + tmp;
    return res;
```