NUM Ü2

7.) ges: Verfahren um $p'(x)$ auszuwerten, wobei $p \in \mathbb{P}_n$ ein Polynom ist.

Um $p(x)$ auszuwerten, können wir das Neville-Verfahren anwenden:

$$p_{j,m}(x) = \begin{cases} y_j & \text{für } m=0 \\ \dfrac{(x-x_j)\,p_{j+1,m-1}(x) - (x-x_{j+m})\,p_{j,m-1}(x)}{x_{j+m}-x_j} & \text{für } m>0 \end{cases}$$

Dann gilt $p(x) = p_{0,n}(x)$

Um nun $p'(x)$ auszuwerten, können wir $p_{j,m}'(x)$ durch ableiten der obigen Formel berechnen:

$$p_{j,m}'(x) = (y_j)' = 0 \quad \text{für } m=0$$

$$p_{j,m}'(x) = \frac{1}{x_{j+m}-x_j} \cdot \left(\left((x-x_j)\,p_{j+1,m-1}(x)\right)' - \left((x-x_{j+m})\,p_{j,m-1}(x)\right)' \right)$$

$$= \frac{1}{x_{j+m}-x_j}\left((x-x_j)\,p_{j+1,m-1}'(x) + p_{j+1,m-1}(x) - (x-x_{j+m})\,p_{j,m-1}'(x) - p_{j,m-1}(x) \right)$$

Nun berechnet folgender Algorithmus $p'(x)$

```
Algorithm(x_0, ..., x_n, y_0, ..., y_n, x):
    y_0' = 0, ..., y_n' = 0;
    for m = 1, ..., n:
        for j = 0, ..., n-m:
            y_j' = ((x - x_j) y_{j+1}' + y_{j+1} - (x - x_{j+m}) y_j' - y_j) / (x_{j+m} - x_j);
            y_j = ((x - x_j) y_{j+1} - (x - x_{j+m}) y_j) / (x_{j+m} - x_j);
    return y_0'
```

Aufwand des Algorithmus ist $\sum_{m=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-m} c = \sum_{m=1}^{n} (n-m+1)\,c = \sum_{m=1}^{n} (nc - mc + c)$

$$= n^2 c - c \cdot \sum_{m=1}^{n} m + nc = n^2 c - c\,\frac{n^2+n}{2} + nc$$

$$= \frac{c}{2} n^2 + \frac{c}{2} n \qquad \Rightarrow O(n^2)$$