

NUM UE8

Ida Hönigmann

December 1, 2021

1 Aufgabe 29:

Proof. a) Sei $x_0 \in [a, b]$ eine Nullstelle von f .

$$X := [a, b]^2 \quad x^* := (x_0, x_0) \quad \Phi : X \rightarrow X$$

$$(a_k, b_k) \mapsto \begin{cases} (a_k, c_k), & \text{falls } f(a_k)f(c_k) \leq 0 \\ (c_k, b_k), & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $c_k := \frac{a_k + b_k}{2}$. Dann ist (X, Φ, x^*) ein abstraktes Iterationsverfahren, dass das Bisektionsverfahren abbildet.

b)

$$d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$((a, b), (x, y)) \mapsto ||a - b| - |x - y||$$

$$\forall (a, b), (x, y) \in X : d((a, b), (x, y)) \geq 0$$

$$\forall (a, b) \in X : d((a, b), (a, b)) = ||a - b| - |a - b|| = 0$$

$$\forall (a, b), (x, y) \in X : d((a, b), (x, y)) = ||a - b| - |x - y|| = ||x - y| - |a - b|| = d((x, y), (a, b))$$

$$\begin{aligned} \forall (a, b), (x, y), (c, d) \in X : d((a, b), (x, y)) + d((x, y), (c, d)) &= ||a - b| - |x - y|| + ||x - y| - |c - d|| \\ &\geq ||a - b| - |x - y| + |x - y| - |c - d|| = ||a - b| - |c - d|| = d((a, b), (c, d)) \end{aligned}$$

Somit ist d eine Metrik auf X .

Sei $(a, b), (x, y) \in X$ beliebig.

$$\begin{aligned} d(\Phi(a, b), \Phi(x, y)) &= \begin{cases} d_2((a, \frac{a+b}{2}), (x, \frac{x+y}{2})) = ||a - \frac{a+b}{2}| - |x - \frac{x+y}{2}|| = ||\frac{a+b}{2} - a| - |\frac{x+y}{2} - x|| \\ d_2((a, \frac{a+b}{2}), (\frac{x+y}{2}, y)) = ||a - \frac{a+b}{2}| - |\frac{x+y}{2} - y|| = ||\frac{a+b}{2} - a| - |\frac{x+y}{2} - y|| \\ d_2((\frac{a+b}{2}, b), (x, \frac{x+y}{2})) = ||\frac{a+b}{2} - b| - |x - \frac{x+y}{2}|| = ||\frac{a+b}{2} - b| - |\frac{x+y}{2} - x|| \\ d_2((\frac{a+b}{2}, b), (\frac{x+y}{2}, y)) = ||\frac{a+b}{2} - b| - |\frac{x+y}{2} - y|| = ||\frac{a+b}{2} - b| - |\frac{x+y}{2} - y|| \end{cases} \\ &= \left| \left| \frac{a-b}{2} \right| - \left| \frac{x-y}{2} \right| \right| = \frac{1}{2} ||a - b| - |x - y|| \end{aligned}$$

$$d((a, b), (x, y)) = ||a - b| - |x - y||$$

Also $\forall (a, b), (x, y) \in X : d(\Phi(a, b), \Phi(x, y)) \leq q d_2((a, b), (x, y))$ mit $q := \frac{1}{2}$. Somit gilt nach Banach'schem Fixpunktsatz, dass (X, Φ, x^*) für alle Startwerte aus X global und linear mit $q = \frac{1}{2}$ gegen x^* konvergiert.

Noch einmal nachgerechnet:

- Globale Konvergenz: Wir wollen zeigen, dass $(a_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und somit konvergiert. Da wie oben gezeigt gilt, dass $\forall k \in \mathbb{N} : |a_{k+1} - b_{k+1}| = \frac{1}{2} |a_k - b_k|$ folgt durch vollständige Induktion, dass

$$\forall k \in \mathbb{N} : |a_k - b_k| = \frac{1}{2^k} |a_0 - b_0| = \frac{1}{2^k} |a_0 - b_0| = \dots = \frac{1}{2^k} |a_0 - b_0|.$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Sei $k, l \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$d((a_k, b_k), (a_l, b_l)) = ||a_k - b_k| - |a_l - b_l|| = \left| \frac{1}{2^k} |a_0 - b_0| - \frac{1}{2^l} |a_0 - b_0| \right| = \left| \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^l} \right| |a_0 - b_0| < \epsilon$$

für groß genug gewählte k und l . Also handelt es sich um eine Cauchy-Folge und sie ist somit konvergent gegen x^* (laut VO gilt $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, so gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} x_k = x^*$ da es sich um den einzigen Fixpunkt handelt).

- Lineare Konvergenz: Sei $\epsilon > 0$, $(a_0, b_0) \in U_\epsilon(x^*)$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$d((a_{k+1}, b_{k+1}), (x_0, x_0)) = ||a_{k+1} - b_{k+1}| - |x_0 - x_0|| = \frac{1}{2} |a_k - b_k| = \frac{1}{2} d((a_k, b_k), (x_0, x_0))$$

Also ist (X, Φ, x^*) linear mit $q = \frac{1}{2}$ konvergent.

□

2 Aufgabe 32:

Proof. Nenn wir der Lesbarkeit halber die Norm auf \mathbb{K}^n $\|\cdot\|_X$ und die Operator-Norm $\|\cdot\|$.

a) zz: $\|\cdot\|$ ist eine Norm

(N1) zz: $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n} : \|A\| \geq 0 \wedge \|A\| = 0 \iff A = (0)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ beliebig. Da $\|\cdot\|_X$ eine Norm ist gilt $\forall x \in \mathbb{K}^n : \|Ax\|_X \geq 0 \wedge \|x\|_X \geq 0$. Also folgt

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} \geq 0.$$

Für $A = (0)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ gilt $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : \|Ax\|_X = \|(0)_{i \in \{1, \dots, n\}}\|_X = 0$ und somit $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} = 0$.

Damit $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} = 0$ muss $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : \|Ax\|_X = 0 \implies A = (0)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$.

(N2) zz: $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n} \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$.

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig.

$$\|\lambda A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|\lambda Ax\|_X}{\|x\|_X} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{|\lambda| \cdot \|Ax\|_X}{\|x\|_X} = |\lambda| \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} = |\lambda| \cdot \|A\|$$

(N3) zz: $\forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} : \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Sei $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ beliebig.

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|(A + B)x\|_X}{\|x\|_X} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax + Bx\|_X}{\|x\|_X} \leq \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_X + \|Bx\|_X}{\|x\|_X} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} + \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Bx\|_X}{\|x\|_X} = \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

b) zz: $\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_X = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_X = \inf\{C > 0 : \|Ax\|_X \leq C\|x\|_X \forall x \in \mathbb{K}^n\}$

□