NUM Ü1

2) $\mathbb{F} = \mathbb{F}(b, t, e_{min}, e_{max})$

a) $e \in \mathbb{Z}$, $e_{min} \le e \le e_{max}$ $\quad M := b^t - b^{t-1} \in \mathbb{N}$

zz: $\mathbb{F} \cap [b^{e-1}, b^e) = \{(b^{-1} + j \cdot b^{-t})\, b^e : j = 0, \dots, M-1\}$

Von 1) wissen wir $\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k} \in [b^{-1}, 1 - b^{-t}]$

$\Rightarrow \{(\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}) \cdot b^e : a_k \in \{0, \dots, b-1\}, a_1 \neq 0\} \subseteq [b^{e-1}, b^e - b^{e-t}]$

Für alle $f \neq e$ gilt $\{(\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}) \cdot b^f : \dots\} \subseteq [b^{f-1}, b^f)$

und somit nicht Elemente aus $[b^{e-1}, b^e)$

$\Rightarrow \mathbb{F} \cap [b^{e-1}, b^e) = \{(\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}) \cdot b^e : \dots\}$

Nun ist nur mehr zu zeigen $\{\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k} : \dots\} = \{b^{-1} + j \cdot b^{-t} : j = 0, \dots, M-1\}$

Vollständige Induktion nach t:

$t = 1$: $\{\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k} : \dots\} = \{a_1 \cdot b^{-1} : a_1 \in \{1, \dots, b-1\}\}$

$\{b^{-1} + j \cdot b^{-t} : \dots\} = \{b^{-1} + j \cdot b^{-1} : j \in \{0, \dots, b^1 - b^0 - 1\}\} = \{b^{-1}(j+1) : j \in \{0, \dots, b-2\}\}$

$= \{b^{-1} j : j \in \{1, \dots, b-1\}\}$

$t \Rightarrow t+1$: Angenommen $\{\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k} : \dots\} = \{b^{-1} + j \cdot b^{-t} : j = 0, \dots, b^t - b^{t-1} - 1\}$

$\{\sum_{k=1}^{t+1} a_k b^{-k} : \dots\} = \{\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k} + a_{t+1} b^{-(t+1)} : \dots\}$

$= \{x + y : x \in \{\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k} : \dots\}, y \in \{a_{t+1} b^{-(t+1)} : a_{t+1} \in \{0, \dots, b-1\}\}\}$

$= \{x + y : x \in \{b^{-1} + j b^{-t} : j \in \{0, \dots, b^t - b^{t-1} - 1\}\}, y \in \{a_{t+1} b^{-(t+1)} : a_{t+1} \in \{0, \dots, b-1\}\}\}$

$= \{b^{-1} + b^{-(t+1)}(x + y) : x \in \{j \cdot b : j \in \{0, \dots, b^t - b^{t-1} - 1\}\}, y \in \{0, \dots, b-1\}\}$

$= \{b^{-1} + b^{-(t+1)}(x + y) : x \in \{0, b, 2b, 3b, \dots, b^{t+1} - b^t - b\}, y \in \{0, \dots, b-1\}\}$

$= \{b^{-1} + b^{-(t+1)} x : x \in \{0, 1, 2, \dots, b-1, b, b+1, \dots, 2b-1, 2b, \dots, b^{t+1} - b^t \cancel{- b + b} - 1\}\}$

$= \{b^{-1} + b^{-(t+1)} x : x \in \{0, \dots, b^{t+1} - b^t - 1\}\}$

NUM Ü1

2) b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Rundung $rd(x) \in \mathbb{F}$ definiert durch $|x - rd(x)| = \min_{z \in \mathbb{F}} |x - z|$
wobei rd(x) das betragsgrößere Element ist falls nicht eindeutig

$x_{min} \leq |x| \leq x_{max}$

zz: $\frac{|x - rd(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2} b^{1-t} =: eps$ ... heißt Maschinengenauigkeit

$\exists e \in \mathbb{Z}, e_{min} \leq e \leq e_{max}: x \in [b^{e-1}, b^e)$, da o.B.d.A. $x > 0$

Die Zahl $z \in \mathbb{F}$, die $|x - z|$ minimiert muss in $[b^{e-1}, b^e]$ liegen.

Wie in a) gezeigt gilt $\mathbb{F} \cap [b^{e-1}, b^e] = \{b^e\} \cup \{(b^{-1} + j b^{-t}) \cdot b^e : j = 0, \dots, b^t - b^{t-1} - 1\}$

Also gibt es $b^t - b^{t-1} + 1$ Werte mit equidistanten Abstand b^{e-t} zueinander.

$\Rightarrow |x - rd(x)| \leq \frac{1}{2} b^{e-t}$, da auch $|x| \geq |b^{e-1}| > 0$ gilt folgt

$$\frac{|x - rd(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2} b^{e-t} \cdot |b^{-(e-1)}| = \frac{1}{2} b^{e-t-e+1} = \frac{1}{2} b^{1-t}$$

$\square$