

NUM UE8

Ida Hönigmann

December 3, 2021

1 Aufgabe 29:

Proof. a) Sei $x_0 \in [a, b]$ eine Nullstelle von f .

$$X := \{(a_k, b_k) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{(x_0, x_0)\} \quad x^* := (x_0, x_0) \quad \Phi : X \rightarrow X$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (x, c), & \text{falls } f(x)f(c) \leq 0 \\ (c, y), & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $c := \frac{x+y}{2}$. Dann ist (X, Φ, x^*) ein abstraktes Iterationsverfahren, dass das Bisektionsverfahren abbildet.

b)

$$d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$((a, b), (x, y)) \mapsto ||a - b| - |x - y||$$

$$\begin{aligned} \forall (a, b), (x, y) \in X : d((a, b), (x, y)) &\geq 0 \\ \forall (a, b) \in X : d((a, b), (a, b)) &= ||a - b| - |a - b|| = 0 \\ \forall (a_k, b_k), (a_l, b_l) \in X : d((a_k, b_k), (a_l, b_l)) = 0 &\implies (a_k, b_k) = (a_l, b_l) \text{ da } |a_k - b_k| = |a_l - b_l| \implies k = l \\ \forall (a, b), (x, y) \in X : d((a, b), (x, y)) &= ||a - b| - |x - y|| = ||x - y| - |a - b|| = d((x, y), (a, b)) \\ \forall (a, b), (x, y), (c, d) \in X : d((a, b), (x, y)) + d((x, y), (c, d)) &= ||a - b| - |x - y|| + ||x - y| - |c - d|| \\ &\geq ||a - b| - |x - y| + |x - y| - |c - d|| = ||a - b| - |c - d|| = d((a, b), (c, d)) \end{aligned}$$

Somit ist d eine Metrik auf X .

Sei $(a, b), (x, y) \in X$ beliebig.

$$d(\Phi(a, b), \Phi(x, y)) = \begin{cases} d_2((a, \frac{a+b}{2}), (x, \frac{x+y}{2})) = ||a - \frac{a+b}{2}| - |x - \frac{x+y}{2}|| = ||\frac{a+b}{2} - a| - |\frac{x+y}{2} - x|| \\ d_2((a, \frac{a+b}{2}), (\frac{x+y}{2}, y)) = ||a - \frac{a+b}{2}| - |\frac{x+y}{2} - y|| = ||\frac{a+b}{2} - a| - |\frac{x+y}{2} - y|| \\ d_2((\frac{a+b}{2}, b), (x, \frac{x+y}{2})) = ||\frac{a+b}{2} - b| - |x - \frac{x+y}{2}|| = ||\frac{a+b}{2} - b| - |\frac{x+y}{2} - x|| \\ d_2((\frac{a+b}{2}, b), (\frac{x+y}{2}, y)) = ||\frac{a+b}{2} - b| - |\frac{x+y}{2} - y|| = ||\frac{a+b}{2} - b| - |\frac{x+y}{2} - y|| \end{cases}$$

$$= \left| \left| \frac{a-b}{2} \right| - \left| \frac{x-y}{2} \right| \right| = \frac{1}{2} ||a - b| - |x - y||$$

$$d((a, b), (x, y)) = ||a - b| - |x - y||$$

Also $\forall (a, b), (x, y) \in X : d(\Phi(a, b), \Phi(x, y)) \leq q d_2((a, b), (x, y))$ mit $q := \frac{1}{2}$. Somit gilt nach Banach'schem Fixpunktsatz, dass (X, Φ, x^*) für alle Startwerte aus X global und linear mit $q = \frac{1}{2}$ gegen x^* konvergiert.

Noch einmal nachgerechnet:

- Globale Konvergenz: Wir wollen zeigen, dass $(a_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und somit konvergiert. Da wie oben gezeigt gilt, dass $\forall k \in \mathbb{N} : |a_{k+1} - b_{k+1}| = \frac{1}{2} |a_k - b_k|$ folgt durch vollständige Induktion, dass

$$\forall k \in \mathbb{N} : |a_k - b_k| = \frac{1}{2^k} |a_0 - b_0|$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Sei $k, l \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$d((a_k, b_k), (a_l, b_l)) = ||a_k - b_k| - |a_l - b_l|| = \left| \frac{1}{2^k} |a_0 - b_0| - \frac{1}{2^l} |a_0 - b_0| \right| = \left| \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^l} \right| |a_0 - b_0| < \epsilon$$

für groß genug gewählte k und l . Also handelt es sich um eine Cauchy-Folge und sie ist somit konvergent gegen x^* (laut VO gilt $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, so gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} x_k = x^*$ da es sich um den einzigen Fixpunkt handelt).

- Lineare Konvergenz: Sei $\epsilon > 0$, $(a_0, b_0) \in U_\epsilon(x^*)$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$d((a_{k+1}, b_{k+1}), (x_0, x_0)) = ||a_{k+1} - b_{k+1}| - |x_0 - x_0|| = \frac{1}{2} |a_k - b_k| = \frac{1}{2} d((a_k, b_k), (x_0, x_0))$$

Also ist (X, Φ, x^*) linear mit $q = \frac{1}{2}$ konvergent.

□

2 Aufgabe 32:

Proof. Nenn wir der Lesbarkeit halber die Norm auf \mathbb{K}^n $\|\cdot\|_X$ und die Operator-Norm $\|\cdot\|$.

a) zz: $\|\cdot\|$ ist eine Norm

(N1) zz: $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n} : \|A\| \geq 0 \wedge \|A\| = 0 \iff A = (0)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ beliebig. Da $\|\cdot\|_X$ eine Norm ist gilt $\forall x \in \mathbb{K}^n : \|Ax\|_X \geq 0 \wedge \|x\|_X \geq 0$. Also folgt

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} \geq 0.$$

Für $A = (0)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ gilt $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : \|Ax\|_X = \|(0)_{i \in \{1, \dots, n\}}\|_X = 0$ und somit $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} = 0$.

Damit $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} = 0$ muss $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : \|Ax\|_X = 0 \implies A = (0)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$.

(N2) zz: $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n} \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$.

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig.

$$\|\lambda A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|\lambda Ax\|_X}{\|x\|_X} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{|\lambda| \cdot \|Ax\|_X}{\|x\|_X} = |\lambda| \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} = |\lambda| \cdot \|A\|$$

(N3) zz: $\forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} : \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Sei $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ beliebig.

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|(A + B)x\|_X}{\|x\|_X} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax + Bx\|_X}{\|x\|_X} \leq \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_X + \|Bx\|_X}{\|x\|_X} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} + \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Bx\|_X}{\|x\|_X} = \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

b) zz: $\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_X = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_X = \inf\{C > 0 : \|Ax\|_X \leq C \|x\|_X \forall x \in \mathbb{K}^n\}$

Wir zeigen zuerst die Gleichheit $\|A\| = \inf\{C > 0 : \|Ax\|_X \leq C \|x\|_X \forall x \in \mathbb{K}^n\}$.

Da $\|A\|$ existiert ist die Menge $\{\frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\}$ beschränkt, d.h. $\exists C > 0 \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : C \geq \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X}$. Für solche C gilt nach Umformen $\|Ax\|_X \leq C \|x\|_X$.

Die Menge $\{C > 0 : \|Ax\|_X \leq C \|x\|_X \forall x \in \mathbb{K}^n\}$ hat $\|A\|$ als obere Schranke. Alle Werte kleiner als $\|A\|$ können keine oberen Schranken mehr sein, da sonst $\|A\|$ nicht das Supremum von $\{\frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\}$ wäre.

$$\implies \|A\| = \inf\{C > 0 : \|Ax\|_X \leq C \|x\|_X \forall x \in \mathbb{K}^n\}$$

Um die Gleichheit $\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_X = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_X$ zu zeigen schauen wir uns die folgende Mengengleichheit an:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\} &= \left\{ \left\| \frac{1}{\|x\|_X} Ax \right\|_X : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\} = \left\{ \left\| A \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\} \\ &= \{\|Ay\|_X : \|y\|_X = 1\} \subseteq \{\|Ay\|_X : \|y\|_X \leq 1\} \end{aligned}$$

$$\implies \|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_X \leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_X$$

Da $\forall x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_X \leq 1 : \|Ax\|_X \leq \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} \leq \|A\|$ folgt $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_X \leq \|A\|$.

$$\implies \|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_X = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_X$$

Da das Matrix-Vektor-Produkt eine stetige Funktion ist folgt aus der Kompaktheit von $\{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_X = 1\}$ und $\{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_X \leq 1\}$ auch die Kompaktheit von $\{\|Ax\|_X : \|x\|_X = 1\} = \{\|Ax\|_X / \|x\|_X : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\}$ und $\{\|Ax\|_X : \|x\|_X \leq 1\}$. Aus der Analysis wissen wir nun, dass Infimum und Supremum auf der Menge angenommen werden.

c) zz: $\|I\| = 1$ und $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär: $\|A^{-1}\| = (\inf_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_X)^{-1}$

$$\|I\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ix\|_X = \sup_{\|x\|_X=1} \|x\|_X = 1$$

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär beliebig. Wir können A als bijektive Abbildung von \mathbb{K}^n nach \mathbb{K}^n auffassen.

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\| &= \sup \left\{ \frac{\|A^{-1}x\|_X}{\|x\|_X} : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\} = \sup \left\{ \frac{\|A^{-1}Ay\|_X}{\|Ay\|_X} : y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|y\|_X}{\|Ay\|_X} : y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\} = \left(\inf \left\{ \frac{\|Ay\|_X}{\|y\|_X} : y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\} \right)^{-1} \\ &= \left(\inf \left\{ \left\| A \frac{y}{\|y\|_X} \right\|_X : y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\} \right)^{-1} = \left(\inf_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_X \right)^{-1} \end{aligned}$$

d) zz: $\forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} : \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. Gilt das auch für andere Normen?

Wir zeigen zuerst $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n} \forall x \in \mathbb{K}^n : \|Ax\|_X \leq \|A\| \cdot \|x\|_X$.

$$\begin{aligned} \|A\| \cdot \|x\|_X &= \|x\|_X \sup \left\{ \frac{\|Ay\|_X}{\|y\|_X} : y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\} = \sup \left\{ \left\| A \frac{y}{\|y\|_X} \|x\|_X \right\|_X : y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\} \\ &= \sup \{ \|Az\|_X : \|z\|_X = \|x\|_X \} \geq \|Ax\|_X \end{aligned}$$

Sei $\forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ beliebig.

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \sup_{\|x\|_X=1} \|(AB)x\|_X = \sup_{\|x\|_X=1} \|A \underbrace{(Bx)}_{\in \mathbb{K}^n}\|_X \leq \sup_{\|x\|_X=1} \|A\| \cdot \|Bx\|_X \\ &= \|A\| \sup_{\|x\|_X=1} \|Bx\|_X = \|A\| \cdot \|B\|\end{aligned}$$

Nein, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ gilt nicht für alle Normen.

Gegenbeispiel:

$$\|A\|_\infty := \max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |A_{i,j}| \qquad A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \implies A \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\|A \cdot A\|_\infty = 8 > 4 = 2 \cdot 2 = \|A\|_\infty \cdot \|A\|_\infty$$

□