NUM UE9

Ida Hönigmann

December 6, 2021

1 Aufgabe 33:

Proof. a) Wie letzte Woche gezeigt gilt $||A||_\infty = \sup_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty$.
Sei $x \in \mathbb{K}^n$ mit $||x||_\infty = 1$ beliebig. Also gilt $\max_{j=1,...,n} |x_j| = 1$.

$$||Ax||_\infty = \max_{j=1,...,m} |(Ax)_j| = \max_{j=1,...,m} \left| \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k \right| \leq \max_{j=1,...,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \cdot |x_k| \leq \max_{j=1,...,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

Sei $j \in \{1, ..., m\}$ mit $\sum_{k=1}^n |a_{jk}|$ maximal. Falls $\sum_{k=1}^n |a_{jk}| = 0$ folgt $\forall k = 1, ..., n \forall j = 1, ..., m :$ $a_{jk} = 0$ und somit ist die Aussage klar. Sonst gilt für

$$x = \begin{pmatrix} sgn(a_{j1}) \\ sgn(a_{j2}) \\ \cdots \\ sgn(a_{jn}) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \qquad ||x||_\infty = 1$$

$$||Ax||_\infty = \max_{l=1,...,m} \left| \sum_{k=1}^n a_{lk}x_k \right| = \max_{l=1,...,m} \left| \sum_{k=1}^n a_{lk} \cdot sgn(a_{jk}) \right| = \left| \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right| = \sum_{k=1}^n |a_{jk}| = \max_{j=1,...,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

Also folgt $||A||_\infty = \max_{j=1,...,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$.

b) Um $||A||_1 = \max_{k=1,...,n} \sum_{j=1}^m |a_{jk}|$ zu zeigen schauen wir uns zunächst folgendes an:
Sei $x \in \mathbb{K}^n$ mit $||x||_1 = 1$ beliebig. Also gilt $\sum_{j=1}^n |x_j| = 1$.

$$|(Ax)_j| = \left| \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| x_k \right| = \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| \left| \sum_{k=1}^n x_k \right|$$
$$\leq \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| \sum_{k=1}^n |x_k| = \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| \cdot ||x||_1 = \max_{l=1,...,n} |a_{jl}|$$
$$\implies ||Ax||_1 = \sum_{j=1}^m |(Ax)_j| \leq \sum_{j=1}^m \max_{k=1,...,n} |a_{jk}| = \max_{k=1,...,n} \sum_{j=1}^m |a_{jk}|$$

Wähle $j \in \{1, ..., n\}$ so, dass $\sum_{k=1}^m |a_{kj}|$ maximal ist. Sei $x \in \mathbb{K}^n$ mit $x_j = 1$ und $\forall l \neq j : x_l = 0$.

Dann gilt

$$|(Ax)_l| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{lk} x_k\right| = |a_{lj}|$$

$$||Ax||_1 = \sum_{k=1}^{m} |(Ax)_k| = \sum_{k=1}^{m} |a_{kj}| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{k=1}^{m} |a_{kj}|$$

Also folgt $||A||_1 = \max_{k=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|$.

$\square$

2 Aufgabe 34:

Proof. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ... irreduzibel und diagonaldominant beliebig.
zz: A ist regulär
Angenommen A wäre nicht regulär, also $\exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : Ax = 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
0 = (Ax)_j &= \sum_{l=1}^{n} a_{jl}x_l \\
\implies -a_{jj}x_j &= \sum_{l=1,l\neq j}^{n} a_{jl}x_l \\
\implies |a_{jj}| \cdot |x_j| = |a_{jj}x_j| = \left|\sum_{l=1,l\neq j}^{n} a_{jl}x_l\right| &\leq \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}| \cdot |x_l|.
\end{aligned}$$

Definieren wir nun $J := \{j \in \{1,...,n\} : |x_j| = ||x||_\infty\}$ und $K := \{k \in \{1,...,n\} : |x_k| < ||x||_\infty\}$. Offensichtlich gilt $J \cup K = \{1,...,n\}$ und $J \cap K = \emptyset$.

Fallunterscheidung:

1. Fall: $K = \emptyset$

   Also gilt $|x_1| = |x_2| = ... = |x_n|$.

   $$\begin{aligned}
   |a_{jj}| \cdot |x_j| &\leq \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}| \cdot |x_l| \\
   \implies |a_{jj}| &\leq \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}|
   \end{aligned}$$

   Was ein Widerspruch zu $\forall j \in \{1,...,n\} : |a_{jj}| \geq \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}| \wedge \exists j \in \{1,...,n\} : |a_{jj}| > \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}|$ ist.

2. Fall: $K \neq \emptyset$

   Da A irreduzibel ist $\exists k \in K \exists j \in J : a_{jk} \neq 0$

   $$|a_{jj}| \leq \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}| \frac{|x_l|}{|x_j|} = \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}| \underbrace{\frac{|x_l|}{||x||_\infty}}_{\leq 1 \wedge \exists l : < 1} < \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}|$$

   Was ein Widerspruch zu $\forall j \in \{1,...,n\} : |a_{jj}| \geq \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}|$ ist.

In beiden Fällen folgt aus dem Widerspruch, dass A regulär ist.
zz: $\forall j = 1,...,n : a_{jj} \neq 0$
Angenommen $\exists j \in \{1,...,n\} : a_{jj} = 0$. Da A diagonaldominant ist folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}| &\leq |a_{jj}| = 0 \\
\implies \forall k \in \{1,...,n\} : |a_{jk}| &= 0
\end{aligned}$$

Was im Widerspruch zur Regularität von A steht.
Also folgt, dass A regulär und $\forall j \in \{1,...,n\} : a_{jj} \neq 0$. □