NUM UE8

Ida Hönigmann

November 30, 2021

1 Aufgabe 29:

a) Sei $x_0 \in [a, b]$ eine Nullstelle von f.

$$X := [a, b]^2 \qquad x^* := (x_0, x_0) \qquad \begin{aligned} \Phi &: X \to X \\ (a_k, b_k) &\mapsto \begin{cases} (a_k, c_k), & \text{falls} f(a_k)f(c_k) \leq 0 \\ (c_k, b_k), & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $c_k := \frac{a_k+b_k}{2}$. Dann ist (X, Φ, x^*) ein abstraktes Iterationsverfahren, dass das Bisektionsverfahren abbildet.

b)

$$\begin{aligned} d_1 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto |a - b| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_2 &: (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R} \\ ((a, b), (x, y)) &\mapsto |d_1(a, b) - d_1(x, y)| \end{aligned}$$

sind beides Metriken auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

Sei $(a, b), (x, y) \in X^2$ beliebig.

$$d_2(\Phi(a, b), \Phi(x, y)) = \begin{cases} d_2((a, \frac{a+b}{2}), (x, \frac{x+y}{2})) \\ d_2((a, \frac{a+b}{2}), (\frac{x+y}{2}, y)) \\ d_2((\frac{a+b}{2}, b), (x, \frac{x+y}{2})) \\ d_2((\frac{a+b}{2}, b), (\frac{x+y}{2}, y)) \end{cases} = \left| \frac{a+b}{2} - \frac{x+y}{2} \right| = \frac{1}{2}|a + b - (x + y)|$$

$$d_2((a, b), (x, y)) = ||a - b| - |x - y|| = ||b - a| - |x - y|| \leq |b - a + x - y| = ... = |a + b - (x + y)|$$

Also $\forall (a, b), (x, y) \in X : d_2(\Phi(a, b), \Phi(x, y)) \leq q d_2((a, b), (x, y))$ mit $q := \frac{1}{2}$. Somit gilt nach Banach'schem Fixpunktsatz, dass (X, Φ, x^*) für alle Startwerte aus X global und linear mit $q = \frac{1}{2}$ gegen x^* konvergiert.

Globale Konvergenz: Wir wollen zeigen, dass $(a_k, b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und somit konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Sei $k, l \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$d_2((a_k, b_k), (a_l, b_l)) = |d_1(a_k, b_k) - d_1(a_l, b_l)|$$

O.b.d.A gilt $k < l$. Da $\forall k \in \mathbb{N} : d_1(a_{k+1}, b_{k+1}) = \frac{1}{2} d_1(a_k, b_k)$ folgt durch vollständige Induktion, dass

$$\forall k \in \mathbb{N} : d_1(a_k, b_k) = \frac{1}{2^k} d_1(a_0, b_0) = \frac{1}{2^k} |a_0 - b_0|.$$

Somit gilt

$$|d_1(a_k, b_k) - d_1(a_l, b_l)| = \left| \frac{1}{2^k} |a_0 - b_0| - \frac{1}{2^l} |a_0 - b_0| \right| = \left| \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^l} \right| |a_0 - b_0| = \left| \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^l} \right| |a_0 - b_0| < \epsilon$$

für groß genug gewählte k und l. Also handelt es sich um eine Cauchy-Folge und ist somit konvergent gegen x^*.

Lineare Konvergenz: Sei $\epsilon > 0$, $(a_0, b_0) \in U_\epsilon(x^*)$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$\begin{aligned} d_2(x_{k+1}, x^*) = d_2((a_{k+1}, b_{k+1}), (x_0, x_0)) = d_2(d_1(a_{k+1}, b_{k+1}) - \underbrace{d_1(x_0, x_0)}_{=0}) &= |a_{k+1} - b_{k+1}| \\ d_2(x_k, x^*) = |a_k - b_k| &= 2|a_{k+1} - b_{k+1}| \\ \implies d_2(x_{k+1}, x^*) &= \frac{1}{2} d_2(x_k, x^*) \end{aligned}$$

Also ist (X, Φ, x^*) linear konvergent.