NUM UE5

Ida Hönigmann

November 10, 2021

1 Aufgabe 17:

Wir wollen zeigen, dass genau ein

$$p(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k exp(ikx) \text{ mit } c_{-n}, ..., c_n \in \mathbb{C}$$

existiert, dass $\forall k = -n, ..., n : p(x_k) = y_k$ erfüllt.

Sei $P := \{p(x) = \sum_{-n}^{n} c_k exp(ikx) : c_{-n}, ..., c_n \in \mathbb{C}\}$. Offensichtlich ist P ein Vektorraum der Dimension $2n + 1$.

Sei $A : P \to \mathbb{C}^{2n+1}, p \mapsto (p(x_{-n}), ..., p(x_n))^T$ der lineare Auswertungsoperator.

Wir wollen die Bijektivität von A zeigen, da diese impliziert, dass auch A^{-1} linear und bijektiv ist und somit für $2n + 1$ bestimmte Stützwerte genau ein $p \in P$ mit der geforderten Eigenschaft existiert.

Um die Bijektivität von A zu zeigen, reicht es Injektivität zu zeigen, da $dimP = 2n+1 = dim\mathbb{C}^{2n+1}$ und dadurch injektiv surjektiv impliziert.

Zeigen wir nun die Injektivität durch $A(p) = (0, ..., 0)^T \implies p = 0$:
$A(p) = (0, ..., 0)^T \implies \forall k = -n, .., n : p(x_k) = 0$
Wenn wir

$$f(z) := \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} z^k \in \mathbb{P}_{2n}$$

setzen gilt

$$exp(-inz)f(exp(iz)) = exp(-inz) \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} exp(iz)^k = \sum_{k=-n}^{n} c_k exp(-inz) exp(iz)^{k+n}$$
$$= \sum_{-n}^{n} c_k exp(iz(-n + k + n)) = p(z).$$

Also gilt

$$p(z) = \underbrace{exp(-inz)}_{\neq 0} \underbrace{f(exp(iz))}_{\in \mathbb{P}_{2n}}.$$

Da p laut Annahme $2n + 1$ Nullstellen besitzt $(x_n, .., x_n)$, aber nur vom Grad $2n$ ist folgt $p = 0$.

2 Aufgabe 18:

(i) $zz : \forall k \geq 2 : B_k(0) = B_k(1)$

$$\forall k \geq 2 : 0 = \int_0^1 B_{k-1}(t)dt = \int_0^1 B_k'(t)dt = B_k(1) - B_k(0)$$
$$\implies B_K(1) = B_K(0)$$

(ii) $zz : \forall t \in \mathbb{R} : B_k(t) = (-1)^k B_k(1-t)$
Für $k = 0$ gilt: $B_0(t) = 1 = (-1)^0 B_0(1-t)$.
Sei nun $k > 0$. Wir zeigen

$$A_k(t) := (-1)^k B_k(1-t)$$

erfüllt $A_k'(t) = A_{k-1}(t)$ und $\int_0^1 A_k(t)dt = 0$, sowie die Eindeutigkeit der Bernoulli-Polynome. Insgesamt ergibt das $A_k = B_k$.

$$A_k'(t) = ((-1)^k B_k(1-t))' = (-1)^k B_k'(1-t)(1-t)' = (-1)^{k-1} B_{k-1}(1-t) = A_{k-1}(t)$$

$$\int_0^1 A_k(t)dt = \int_0^1 (-1)^k B_k(1-t)dt = (-1)^k \int_0^1 B_{k+1}'(1-t)dt$$
$$= (-1)^k (B_{k+1}(1-1) - B_{k+1}(1-0)) = (-1)^k (B_{k+1}(0) - B_{k+1}(1)) = 0$$

Um die Eindeutigkeit der Bernoulli-Polynome zu zeigen machen wir vollständige Induktion nach k:
Induktionsanfang: $k = 0$: $B_0(t) = 1$ und daher eindeutig
Induktionsvorraussetzung: $B_k(t) = b_k t^k + ... + b_1 t + b_0$ mit eindeutigen $b_k, ..., b_0$.
Induktionsschritt:

$$B_{k+1} = \int B_k = \frac{b_k}{k+1} t^{k+1} + ... + \frac{b_1}{2} t^2 + b_0 t + c$$

$$\int_0^1 B_{k+1}(t)\, dt = 0$$
$$\implies \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} t^{k+2} + ... + \frac{b_1}{6} t^3 + \frac{b_0}{2} t^2 + ct\Big|_0^1 = 0$$
$$\implies \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} + ... + \frac{b_1}{6} + \frac{b_0}{2} + c - 0 = 0$$

Also ist c eindeutig bestimmt.
(iii) $zz : \forall k \geq 1 : B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = B_{2k+1}(1) = 0$
Aus (ii) folgt
$B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = (-1)^{2k+1} B_{2k+1}(1 - \frac{1}{2}) = -B_{2k+1}(\frac{1}{2})$
sowie
$B_{2k+1}(1) = (-1)^{2k+1} B_{2k+1}(1-1) = -B_{2k+1}(0)$.
Aus (i) folgt zusätzlich
$B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1)$.
Insgesamt ergibt das

$$B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) \land -B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) \implies B_{2k+1}(0) = 0 = B_{2k+1}(1)$$
$$B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = -B_{2k+1}(\frac{1}{2}) \implies B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = 0$$