NUM Ü2

5.) $X$ ... endlich-dimensionaler, normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ $n := \dim X$

zz: Satz von Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

Beweis: 1. Schritt: $X$ ist linear isomorph zu $\mathbb{R}^n$

Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von $X$.

$\forall x \in X \ \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} : x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$

$f : X \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T$ ist eine lineare Bijektion (Nachrechnen)

2. Schritt: Satz von Bolzano-Weierstrass für $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

Wir zeigen, dass beschränkte Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen eine Teilfolge besitzen, die gegen $\liminf_{n\to\infty} x_n$ konvergieren.

Sei $N \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Wegen $\inf\{x_k : k \geq N\} \leq \liminf_{n\to\infty} x_n < \liminf_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$ ist $\liminf_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$ keine untere Schranke von $\{x_k : k \geq N\}$. Also $\exists\, l_{N,\varepsilon} \geq N$, sodass $\inf\{x_k : k \geq N\} \leq x_{l_{N,\varepsilon}} < \liminf_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$.

Wir definieren nun rekursiv eine Teilfolge $(x_{m(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ indem wir $m(1) = 1$ setzen und für definierte $m(j) \in \mathbb{N}$

$m(j+1) = l_{m(j)+1, \frac{1}{j+1}} \geq m(j) + 1 > m(j)$ setzen. Monotonie von $(m(j))_{j\in\mathbb{N}}$ ist damit gezeigt. Weiters gilt

$$\underbrace{\inf\{x_k : k \geq m(j+1)\}}_{\xrightarrow{j\to\infty} \liminf_{n\to\infty} x_n} \leq x_{m(j+1)} < \underbrace{\liminf_{n\to\infty} x_n + \frac{1}{j+1}}_{\xrightarrow{j\to\infty} \liminf_{n\to\infty} x_n}$$

Nach dem Sandwich-Satz gilt also $(x_{m(j)})_{j\in\mathbb{N}} \xrightarrow{j\to\infty} \liminf_{n\to\infty} x_n$

3. Schritt: Vollständige Induktion nach $n$:

$n = 1$: wurde in Schritt 2 gezeigt

$n+1$: Sei $\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ \vdots \\ x_{j,n+1} \end{pmatrix}_{j\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^{n+1}$. Somit sind auch $\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ \vdots \\ x_{j,n} \end{pmatrix}_{j\in\mathbb{N}}$ und $(x_{j,n+1})_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen.

...

NUM Ü2

5.)... Nach Induktionsvoraussetzung hat $\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ \vdots \\ x_{j,n} \end{pmatrix}_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\begin{pmatrix} x_{m(j),1} \\ \vdots \\ x_{m(j),n} \end{pmatrix}_{j\in\mathbb{N}}$.

Nach Schritt 2 hat $(x_{m(j),n+1})_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k(m(j))})_{j\in\mathbb{N}}$.

Als Teilfolge von $\begin{pmatrix} x_{m(j),1} \\ \vdots \\ x_{m(j),n} \end{pmatrix}_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert auch $\begin{pmatrix} x_{k(m(j)),1} \\ \vdots \\ x_{k(m(j)),n} \end{pmatrix}_{j\in\mathbb{N}}$.

Daraus folgt, dass $\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ \vdots \\ x_{j,n+1} \end{pmatrix}_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt, nämlich $\begin{pmatrix} x_{k(m(j)),1} \\ \vdots \\ x_{k(m(j)),n+1} \end{pmatrix}_{j\in\mathbb{N}}$.

$\square$