NUM UE3

Ida Hönigmann

October 27, 2021

1 Aufgabe 1:

Für $x = x_j$ für ein $j \in \{0, ..., n\}$ ist die Aussage trivial.

Nehmen wir nun an $x \neq x_j \forall j \in \{0, ..., n\}$. Definieren wir das Polynom

$$w(y) = \prod_{j=0}^{n} (y - x_j)^{n_j+1} \in \mathbb{P}_{N+1}$$

und die Funktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, F(y) = (f(x) - p(x)) * w(y) - (f(y) - p(y)) * w(x) \in C^{N+1}[a, b].$$

Die k-te Ableitung berechnet sich durch

$$F^{(k)}(y) = (f(x) - p(x))w^{(k)}(y) - (f^{(k)}(y) - p^{(k)}(y))w(x).$$

Aus den zwei Rechnungen

$$\forall j \in \{0, ..., n\} : F(x_j) = (f(x)-p(x))*w(x_j)-(f(x_j)-p(x_j))*w(x) = (f(x)-p(x))*\prod_{j=0}^{n}(y-x_j)^{n_j+1}$$

und

$$F(x) = (f(x) - p(x))w(x) - (f(x) - p(x))w(x) = 0$$

folgt, dass F die Nullstellen x und $\forall j \in \{0, ..., n\} x_j$ mit Vielfachheit n_j besitzt, also insgesamt $n+2$ viele.

Demnach hat F' zumindest $n + 1$ Nullstellen, wobei auch $\{x_j : n_j \geq 1\}$ Nullstellen mit jeweils Vielfachheit $n_j - 1$ dazukommen. Daraus folgt, dass die Summe der Vielfachheiten von F gleich $n + 1 + \sum_{j=0}^{n}(n_j) + 1 = \sum_{j=0}^{n}(1) - 1 + 1 + \sum_{j=0}^{n}(n_j) + 1 = \sum_{j=0}^{n}(n_j + 1) + 1 = N + 2$ ist.

Das bedeutet, dass $F^{(N+1)}$ eine Nullstelle $\xi \in [a, b]$ besitzt.

$$0 = F^{(N+1)}(\xi) = (f(x) - p(x))w^{(N+1)}(\xi) - (f^{(N+1)}(\xi) - p^{(N+1)}(\xi))w(x)$$

$w^{(N+1)}(\xi) = (N + 1)!$ nach der Definition von w und $p^{(N+1)}(\xi) = 0$ da $p \in \mathbb{P}_N$.

$$\begin{aligned} 0 &= (f(x) - p(x))(N + 1)! - f^{(N+1)}(\xi)w(x) \\ (f(x) - p(x))(N + 1)! &= f^{(N+1)}(\xi)w(x) \\ f(x) - p(x) &= \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N + 1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)^{n_j+1} \end{aligned}$$

Um die Fehlerabschätzung zu erhalten bilden wir auf beiden Seiten der Gleichung den Betrag.

$$
\begin{aligned}
|f(x)-p(x)| &= \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x-x_j)^{n_j+1} \right| \\
&\leq \frac{\|f^{(N+1)}\|_{L_\infty}}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{n} |x-x_j|^{n_j+1}
\end{aligned}
$$

Für komplexwertige Funktionen teilen wir $f(x)-p(x)$ in Real- und Imaginärteil auf und schätzen beide mit der Fehlerabschätzung für reellwertige Funktionen ab. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|f(x)-p(x)| &= \sqrt{Im(f(x)-p(x))^2 + Re(f(x)-p(x))^2} \\
&\leq \sqrt{2 * \left(\frac{\|f^{(N+1)}\|_{L_\infty}}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{n} |x-x_j|^{n_j+1} \right)^2} \\
&= \sqrt{2} * \left(\frac{\|f^{(N+1)}\|_{L_\infty}}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{n} |x-x_j|^{n_j+1} \right).
\end{aligned}
$$

2 Aufgabe 4:

Wir wollen strikt diagonaldominant $\implies$ regulär zeigen und zeigen dazu $\neg$ regulär $\implies$ $\neg$ strikt diagonaldominant.

Nicht regulär zu sein ist äquivalent zu

$$\exists x_1, ..., x_n : \sum_{k=1}^{n} x_k (a_{1k} a_{2k} \cdots a_{nk})^T = 0$$

Wobei zumindest ein x_k ungleich 0 sein muss. Da die Operationen komponentenweise zu verstehen sind können wir folgende Umformulierung finden

$$\forall j = 1, ..., n : \sum_{k=1}^{n} x_k a_{jk} = 0.$$

Definieren wir nun m als den Index mit maximalem x_m. Dann gilt

$$\sum_{k=1, k\neq m}^{n} x_k a_{jk} = -x_m a_{jm}$$

und durch Betrag bilden und Abschätzen erhalten wir

$$|x_m| \sum_{k=1,k\neq m}^{n} |a_{jk}| = \sum_{k=1,k\neq m}^{n} |x_m||a_{jk}| \geq \sum_{k=1,k\neq m}^{n} |x_k||a_{jk}| \geq \left| \sum_{k=1,k\neq m}^{n} x_k a_{jk} \right| = |x_m a_{jm}| = |x_m||a_{jm}|$$

Da die Gleichung für alle $j = 1, ..., n$ gilt, haben wir nun durch

$$\sum_{k=1, k\neq m}^{n} |a_{mk}| \geq |a_{mm}|$$

gezeigt, dass die Matrix nicht strikt diagonaldominant ist.

$$A := \begin{pmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & h_{n-1} \\ & & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) \end{pmatrix}$$

Nach dem eben gezeigten reicht es zu zeigen, dass die Matrix A strikt diagonaldominant ist, da das die Regularität und somit die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems zeigt.

$$\sum_{k=1, k\neq m}^{n} |a_{jk}| = |h_j| + |h_{j+1}| = |h_j + h_{j+1}| < 2|h_j + h_{j+1}| = |a_{jj}|$$

Da $h_j > 0$ für alle j.