NUM UE8

Ida Hönigmann

December 1, 2021

1 Aufgabe 29:

Proof. a) Sei $x_0 \in [a,b]$ eine Nullstelle von f.

$$X := [a,b]^2 \qquad x^* := (x_0, x_0) \qquad \begin{aligned} \Phi : X &\to X \\ (a_k, b_k) &\mapsto \begin{cases} (a_k, c_k), & \text{falls} f(a_k)f(c_k) \leq 0 \\ (c_k, b_k), & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $c_k := \frac{a_k+b_k}{2}$. Dann ist (X, Φ, x^*) ein abstraktes Iterationsverfahren, dass das Bisektionsverfahren abbildet.

b)

$$\begin{aligned} d : X^2 &\to \mathbb{R} \\ ((a,b),(x,y)) &\mapsto ||a-b| - |x-y|| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall (a,b),(x,y) \in X : d((a,b),(x,y)) \geq 0 \\ \forall (a,b) \in X : d((a,b),(a,b)) = ||a-b| - |a-b|| = 0 \\ \forall (a,b),(x,y) \in X : d((a,b),(x,y)) = ||a-b| - |x-y|| = ||x-y| - |a-b|| = d((x,y),(a,b)) \\ \forall (a,b),(x,y),(c,d) \in X : d((a,b),(x,y)) + d((x,y),(c,d)) = ||a-b| - |x-y|| + ||x-y| - |c-d|| \\ \geq ||a-b| - |x-y| + |x-y| - |c-d|| = ||a-b| - |c-d|| = d((a,b),(c,d)) \end{aligned}$$

Somit ist d eine Metrik auf X.

Sei $(a,b),(x,y) \in X$ beliebig.

$$d(\Phi(a,b), \Phi(x,y)) = \begin{cases} d_2((a, \frac{a+b}{2}),(x, \frac{x+y}{2})) = \left|\left|a - \frac{a+b}{2}\right| - \left|x - \frac{x+y}{2}\right|\right| = \left|\left|\frac{a+b}{2} - a\right| - \left|\frac{x+y}{2} - x\right|\right| \\ d_2((a, \frac{a+b}{2}),(\frac{x+y}{2}, y)) = \left|\left|a - \frac{a+b}{2}\right| - \left|\frac{x+y}{2} - y\right|\right| = \left|\left|\frac{a+b}{2} - a\right| - \left|\frac{x+y}{2} - y\right|\right| \\ d_2((\frac{a+b}{2}, b),(x, \frac{x+y}{2})) = \left|\left|\frac{a+b}{2} - b\right| - \left|x - \frac{x+y}{2}\right|\right| = \left|\left|\frac{a+b}{2} - b\right| - \left|\frac{x+y}{2} - x\right|\right| \\ d_2((\frac{a+b}{2}, b),(\frac{x+y}{2}, y)) = \left|\left|\frac{a+b}{2} - b\right| - \left|\frac{x+y}{2} - y\right|\right| = \left|\left|\frac{a+b}{2} - b\right| - \left|\frac{x+y}{2} - y\right|\right| \end{cases}$$

$$= \left|\left|\frac{a-b}{2}\right| - \left|\frac{x-y}{2}\right|\right| = \frac{1}{2}||a-b| - |x-y||$$

$$d((a,b),(x,y)) = ||a-b| - |x-y||$$

Also $\forall (a,b),(x,y) \in X : d(\Phi(a,b),\Phi(x,y)) \leq q d_2((a,b),(x,y))$ mit $q := \frac{1}{2}$. Somit gilt nach Banach'schem Fixpunktsatz, dass (X,Φ,x^*) für alle Startwerte aus X global und linear mit $q = \frac{1}{2}$ gegen x^* konvergiert.

Noch einmal nachgerechnet:

- Globale Konvergenz: Wir wollen zeigen, dass $(a_k,b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und somit konvergiert. Da wie oben gezeigt gilt, dass $\forall k \in \mathbb{N} : |a_{k+1} - b_{k+1}| = \frac{1}{2}|a_k - b_k|$ folgt durch vollständige Induktion, dass

  $$\forall k \in \mathbb{N} : |a_k - b_k| = \frac{1}{2^1}|a_{k-1} - b_{k-1}| = \frac{1}{2^2}|a_{k-2} - b_{k-2}| = ... = \frac{1}{2^k}|a_0 - b_0|.$$

  Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Sei $k,l \in \mathbb{N}$ beliebig.

  $$d((a_k,b_k),(a_l,b_l)) = ||a_k - b_k| - |a_l - b_l|| = \left|\frac{1}{2^k}|a_0 - b_0| - \frac{1}{2^l}|a_0 - b_0|\right| = \left|\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^l}\right| |a_0 - b_0| < \epsilon$$

  für groß genug gewählte k und l. Also handelt es sich um eine Cauchy-Folge und sie ist somit konvergent gegen x^* (laut VO gilt $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, so gilt $\lim\limits_{x\to\infty} x_k = x^*$ da es sich um den einzigen Fixpunkt handelt).
- Lineare Konvergenz: Sei $\epsilon > 0$, $(a_0,b_0) \in U_\epsilon(x^*)$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

  $$d((a_{k+1},b_{k+1}),(x_0,x_0)) = ||a_{k+1} - b_{k+1}| - |x_0 - x_0|| = \frac{1}{2}|a_k - b_k| = \frac{1}{2}d((a_k,b_k),(x_0,x_0))$$

  Also ist (X,Φ,x^*) linear mit $q = \frac{1}{2}$ konvergent.

$\square$

2 Aufgabe 32: