DGA Ü8

6) $m \times n$ Gitter Ziel Weg von $(1,1)$ nach (m,n) mit geringsten Kosten

a) zz: optimale Teilstrukturеigenschaft wird erfüllt

Sei (j,k) ein Punkt auf dem optimalen Weg von $(1,1)$ nach (m,n)

Angenommen der Weg von (j,k) nach (m,n) wäre nicht optimal. Zusammengefast gilt also

$w((1,1),(m,n)) = k$ sind die minimalen Kosten von $(1,1)$ nach (m,n)

Sei y die Kosten ab dem Punkt (j,k), da der Weg von (j,k) nach (m,n) nicht optimal ist $\exists$ Weg von (j,k) nach (m,n) mit Kosten $x < y$

$\Rightarrow$ neuer Weg von $(1,1)$ bis (j,k) wie in originalen Weg mit Kosten $k-y$ und von (j,k) nach (m,n) mit neuen Weg und Kosten x

$\Rightarrow w$ war nicht optimal $\lightning$ $\Rightarrow$ Weg (j,k) nach (m,n) ist optimal

b)

$$k(i,j) = \begin{cases} A(m,n) & \text{falls } i=m \wedge j=n \\ A(m,j+1)+k(m,j+1) & \text{falls } i=m \\ A(i+1,n)+k(i+1,n) & \text{falls } j=n \\ \min(A(i+1,j)+k(i+1,j),\ A(i,j+1)+k(i,j+1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

c)
```
Algorithm(i,j){
    if(i==m ∧ j==n){return A(m,n);}
    if(i==m){return A(m,j+1)+Algorithm(m,j+1);}
    if(j==n){return A(i+1,n)+Algorithm(i+1,n);}
    up:=A(i+1,j)+Algorithm(i+1,j);
    right:=A(i,j+1)+Algorithm(i,j+1);
    return min(up,right);
}
```

Der Algorithmus führt Berechnungen für jeden der $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$ möglichen Wege durch das Gitter durch $\Rightarrow$ Aufwand $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$ (erfüllt die Rekursion $A(i,j) = A(i-1,j) + A(i,j-1)$ sowie $A(0,0)=1$ und $A(0,j)=1$).