NUM UE9

Ida Hönigmann

December 7, 2021

1 Aufgabe 33:

Proof. a) Wie letzte Woche gezeigt gilt $||A||_\infty = \sup_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty$.

Sei $x \in \mathbb{K}^n$ mit $||x||_\infty = 1$ beliebig. Also gilt $\max_{j=1,...,n} |x_j| = 1$.

$$||Ax||_\infty = \max_{j=1,...,m} |(Ax)_j| = \max_{j=1,...,m} \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right| \leq \max_{j=1,...,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \cdot |x_k| \leq \max_{j=1,...,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

Sei $j \in \{1, ..., m\}$ mit $\sum_{k=1}^n |a_{jk}|$ maximal. Falls $\sum_{k=1}^n |a_{jk}| = 0$ folgt $\forall k = 1, ..., n \forall j = 1, ..., m :$ $a_{jk} = 0$ und somit ist die Aussage klar. Sonst gilt für

$$x = \begin{pmatrix} sgn(a_{j1}) \\ sgn(a_{j2}) \\ \cdots \\ sgn(a_{jn}) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \qquad\qquad ||x||_\infty = 1$$

$$||Ax||_\infty = \max_{l=1,...,m} \left| \sum_{k=1}^n a_{lk} x_k \right| = \max_{l=1,...,m} \left| \sum_{k=1}^n a_{lk} \cdot sgn(a_{jk}) \right| = \left| \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right| = \sum_{k=1}^n |a_{jk}| = \max_{j=1,...,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

Also folgt $||A||_\infty = \max_{j=1,...,m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$.

b) Um $||A||_1 = \max_{k=1,...,n} \sum_{j=1}^m |a_{jk}|$ zu zeigen schauen wir uns zunächst folgendes an:

Sei $x \in \mathbb{K}^n$ mit $||x||_1 = 1$ beliebig. Also gilt $\sum_{j=1}^n |x_j| = 1$.

$$\begin{aligned} |(Ax)_j| &= \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| x_k \right| = \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \\ &\leq \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| \sum_{k=1}^n |x_k| = \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| \cdot ||x||_1 = \max_{l=1,...,n} |a_{jl}| \\ \implies ||Ax||_1 &= \sum_{j=1}^m |(Ax)_j| \leq \sum_{j=1}^m \max_{k=1,...,n} |a_{jk}| = \max_{k=1,...,n} \sum_{j=1}^m |a_{jk}| \end{aligned}$$

Wähle $j \in \{1, ..., n\}$ so, dass $\sum_{k=1}^m |a_{kj}|$ maximal ist. Sei $x \in \mathbb{K}^n$ mit $x_j = 1$ und $\forall l \neq j : x_l = 0$.

Dann gilt

$$|(Ax)_l| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{lk}x_k\right| = |a_{lj}|$$
$$||Ax||_1 = \sum_{k=1}^{m} |(Ax)_k| = \sum_{k=1}^{m} |a_{kj}| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{k=1}^{m} |a_{kj}|$$

Also folgt $||A||_1 = \max_{k=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|$.

$\square$

2 Aufgabe 34:

Proof. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ... irreduzibel und diagonaldominant beliebig.

zz: A ist regulär

Angenommen A wäre nicht regulär, also $\exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : Ax = 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 = (Ax)_j &= \sum_{l=1}^{n} a_{jl}x_l \\ \implies -a_{jj}x_j &= \sum_{l=1, l\neq j}^{n} a_{jl}x_l \\ \implies |a_{jj}|\cdot|x_j| = |a_{jj}x_j| &= \left|\sum_{l=1,l\neq j}^{n} a_{jl}x_l\right| \leq \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}|\cdot|x_l|. \end{aligned}$$

Definieren wir nun $J := \{j \in \{1,...,n\} : |x_j| = ||x||_\infty\}$ und $K := \{k \in \{1,...,n\} : |x_k| < ||x||_\infty\}$. Offensichtlich gilt $J \cup K = \{1,...,n\}$ und $J \cap K = \emptyset$.

Fallunterscheidung:

1. Fall: $K = \emptyset$

   Also gilt $|x_1| = |x_2| = ... = |x_n|$.

$$\begin{aligned} |a_{jj}|\cdot|x_j| &\leq \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}|\cdot|x_l| \\ \implies |a_{jj}| &\leq \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}| \end{aligned}$$

   Was ein Widerspruch zu $\forall j \in \{1,...,n\} : |a_{jj}| \geq \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}| \wedge \exists j \in \{1,...,n\} : |a_{jj}| > \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}|$ ist.

2. Fall: $K \neq \emptyset$

   Da A irreduzibel ist $\exists k \in K \exists j \in J : a_{jk} \neq 0$

$$|a_{jj}| \leq \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}|\frac{|x_l|}{|x_j|} = \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}| \underbrace{\frac{|x_l|}{||x||_\infty}}_{\leq 1 \wedge \exists l : <1} < \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}|$$

   Was ein Widerspruch zu $\forall j \in \{1,...,n\} : |a_{jj}| \geq \sum_{l=1,l\neq j}^{n} |a_{jl}|$ ist.

In beiden Fällen folgt aus dem Widerspruch, dass A regulär ist.

zz: $\forall j = 1,...,n : a_{jj} \neq 0$

Angenommen $\exists j \in \{1,...,n\} : a_{jj} = 0$. Da A diagonaldominant ist folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}| &\leq |a_{jj}| = 0 \\ \implies \forall k \in \{1,...,n\} : |a_{jk}| &= 0 \end{aligned}$$

Was im Widerspruch zur Regularität von A steht.

Also folgt, dass A regulär und $\forall j \in \{1,...,n\} : a_{jj} \neq 0$. $\square$

3 Aufgabe 35:

Proof. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ irreduzibel und diagonaldominant beliebig.

1. Jacobi-Verfahren:

$$M := -D^{-1}(A - D) \text{ mit } D := \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nach 34 gilt $\forall j \in \{1.,,,.n\} : a_{jj} \neq 0$ also gilt D ist regulär und somit existiert D^{-1}.
Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig mit $|\lambda| \geq 1$.
Da wir bei der Irreduzibarkeit nur Werte m_{ij} mit $i \neq j$ beachten gilt

$$M - \lambda I \text{ ist irreduzibel } \iff M = -D^{-1}(A - D) \text{ ist irreduzibel}$$

Da eine Multiplikation mit $-D^{-1}$ nur die Zeilen skaliert gilt

$$\begin{aligned} -D^{-1}(A - D) \text{ ist irreduzibel } &\iff A - D \text{ ist irreduzibel} \\ &\iff A \text{ ist irreduzibel (aus dem gleichen Grund wie oben)} \end{aligned}$$

Also folgt, dass $M - \lambda I$ irreduzibel ist.
Wir beobachten folgendes:

$$\begin{aligned} \forall i \neq j : M_{ij} = (-D^{-1}(A - D))_{ij} = (-D^{-1}A)_{ij} = -\frac{a_{ij}}{d_{ii}} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \\ \forall i : M_{ii} = (-D^{-1} \underbrace{(A - D)}_{(A-D)_{ii}=0})_{ii} = 0 \end{aligned}$$

Nun folgt

$$\sum_{k=1,k\neq j}^{n} |(M - \lambda I)_{jk}| = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |M_{jk}| = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \left| -\frac{a_{jk}}{a_{jj}} \right| = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|}$$

Da A diagonaldominant ist folgt

$$\sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}| \leq |a_{jj}| \implies \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} \leq 1 \leq |\lambda|$$

Da $|(M - \lambda I)_{jj}| = |\lambda|$ folgt, dass $\sum_{k=1,k\neq j}^{n} |(M - \lambda I)_{jk}| \leq |(M - \lambda I)_{jj}|$. Für ein j gilt sogar $\sum_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} < 1$ also existiert ein j mit $\sum_{k=1,k\neq j}^{n} |(M - \lambda I)_{jk}| < |(M - \lambda I)_{jj}|$. Somit ist $M - \lambda I$ diagonaldominant.

Insgesamt können wir folgern, dass $M - \lambda I$ für alle λ mit $|\lambda| \geq 1$ regulär ist. Also ist λ kein Eigenwert von M. Daraus folgt $\rho(M) < 1$ und aus dem Satz über globale Konvergenz, dass das Jacobi-Verfahren konvergiert.

2. Gauss-Seidel-Verfahren:

$$M := -L^{-1}U \qquad \text{mit} \qquad L_{jk} = \begin{cases} A_{jk} & \text{für } j \geq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad U_{jk} = \begin{cases} A_{jk} & \text{für } j < k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $L + U = A$ und L ist regulär, da $\forall i \in \{1, ..., n\} : A_{ii} \neq 0$. Also existiert L^{-1}.

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \geq 1$ beliebig.

$M - \lambda I = -L^{-1}U - \lambda I$ ist regulär genau dann wenn $(-L)(-L^{-1}U - \lambda I) = U + \lambda L$ regulär ist.

Da $A = L + U$ irreduzibel ist folgt, dass auch $\lambda L + U$ irreduzibel ist (folgt aus der Definition von irreduzibel).

Weiters gilt unter anderem wegen der Diagonaldominantheit von A, dass

$$\sum_{k=1, k\neq j}^{n} |(\lambda L + U)_{jk}| \leq |\lambda| \sum_{k=1, k\neq j}^{n} |A_{jk}| \leq |\lambda| \cdot |a_{jj}| = |(\lambda L + U)_{jj}|$$

Wobei ein j existiert für dass sogar $|\lambda| \sum_{k=1, k\neq j}^{n} |A_{jk}| < |\lambda| \cdot |a_{jj}|$. Also ist $\lambda L + U$ diagonaldominant und somit regulär. Das impliziert die Regularität von $M - \lambda I$ was gleich wie beim Jacobi-Verfahren die Konvergenz impliziert.

$\square$