NUM UE3

Ida Hönigmann

October 27, 2021

1 Aufgabe 1:

Für $x = x_j$ für ein $j \in \{0, ..., n\}$ ist die Aussage trivial.

Nehmen wir nun an $x \neq x_j \forall j \in \{0, ..., n\}$. Definieren wir das Polynom

$$w(y) = \prod_{j=0}^{n} (y - x_j)^{n_j+1} \in \mathbb{P}_{N+1}$$

und die Funktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, F(y) = (f(x) - p(x)) * w(y) - (f(y) - p(y)) * w(x) \in C^{N+1}[a, b].$$

Die k-te Ableitung berechnet sich durch

$$F^{(k)}(y) = (f(x) - p(x))w^{(k)}(y) - (f^{(k)}(y) - p^{(k)}(y))w(x).$$

Aus den zwei Rechnungen

$$\forall j \in \{0, ..., n\} : F(x_j) = (f(x)-p(x))*w(x_j)-(f(x_j)-p(x_j))*w(x) = (f(x)-p(x))*\prod_{j=0}^{n}(y-x_j)^{n_j+1}$$

und

$$F(x) = (f(x) - p(x))w(x) - (f(x) - p(x))w(x) = 0$$

folgt, dass F die Nullstellen x und $\forall j \in \{0, ..., n\} x_j$ mit Vielfachheit n_j besitzt, also insgesamt $n+2$ viele.

Demnach hat F' zumindest $n + 1$ Nullstellen, wobei auch $\{x_j : n_j \geq 1\}$ Nullstellen mit jeweils Vielfachheit $n_j - 1$ dazukommen. Daraus folgt, dass die Summe der Vielfachheiten von F gleich $n + 1 + \sum_{j=0}^{n}(n_j) + 1 = \sum_{j=0}^{n}(1) - 1 + 1 + \sum_{j=0}^{n}(n_j) + 1 = \sum_{j=0}^{n}(n_j + 1) + 1 = N + 2$ ist.

Das bedeutet, dass $F^{(N+1)}$ eine Nullstelle $\xi \in [a, b]$ besitzt.

$$0 = F^{(N+1)}(\xi) = (f(x) - p(x))w^{(N+1)}(\xi) - (f^{(N+1)}(\xi) - p^{(N+1)}(\xi))w(x)$$

$w^{(N+1)}(\xi) = (N + 1)!$ nach der Definition von w und $p^{(N+1)}(\xi) = 0$ da $p \in \mathbb{P}_N$.

$$\begin{aligned}
0 &= (f(x) - p(x))(N + 1)! - f^{(N+1)}(\xi)w(x) \\
(f(x) - p(x))(N + 1)! &= f^{(N+1)}(\xi)w(x) \\
f(x) - p(x) &= \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N + 1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)^{n_j+1}
\end{aligned}$$

Um die Fehlerabschätzung zu erhalten bilden wir auf beiden Seiten der Gleichung den Betrag.

$$
\begin{aligned}
|f(x)-p(x)| &= \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x-x_j)^{n_j+1} \right| \\
&\leq \frac{\|f^{(N+1)}\|_{L_\infty}}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{n} |x-x_j|^{n_j+1}
\end{aligned}
$$

Für komplexwertige Funktionen teilen wir $f(x)-p(x)$ in Real- und Imaginärteil auf und schätzen beide mit der Fehlerabschätzung für reellwertige Funktionen ab. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|f(x)-p(x)| &= \sqrt{Im(f(x)-p(x))^2 + Re(f(x)-p(x))^2} \\
&\leq \sqrt{2 * \left(\frac{\|f^{(N+1)}\|_{L_\infty}}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{n} |x-x_j|^{n_j+1} \right)^2} \\
&= \sqrt{2} * \left(\frac{\|f^{(N+1)}\|_{L_\infty}}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{n} |x-x_j|^{n_j+1} \right).
\end{aligned}
$$

2 Aufgabe 4:

Wir wollen strikt diagonaldominant $\implies$ regulär zeigen und zeigen dazu $\neg$ regulär $\implies$ $\neg$ strikt diagonaldominant.

Nicht regulär zu sein ist äquivalent zu

$$\exists x_1, ..., x_n : \sum_{k=1}^{n} x_k (a_{1k} a_{2k} \cdots a_{nk})^T = 0$$

Wobei zumindest ein x_k ungleich 0 sein muss. Da die Operationen komponentenweise zu verstehen sind können wir folgende Umformulierung finden

$$\forall j = 1, ..., n : \sum_{k=1}^{n} x_k a_{jk} = 0.$$

Definieren wir nun m als den Index mit maximalem x_m. Dann gilt

$$\sum_{k=1, k\neq m}^{n} x_k a_{jk} = -x_m a_{jm}$$

und durch Betrag bilden und Abschätzen erhalten wir

$$|x_m| \sum_{k=1,k\neq m}^{n} |a_{jk}| = \sum_{k=1,k\neq m}^{n} |x_m||a_{jk}| \geq \sum_{k=1,k\neq m}^{n} |x_k||a_{jk}| \geq \left| \sum_{k=1,k\neq m}^{n} x_k a_{jk} \right| = |x_m a_{jm}| = |x_m||a_{jm}|$$

Da die Gleichung für alle $j = 1, ..., n$ gilt, haben wir nun durch

$$\sum_{k=1,k\neq m}^{n} |a_{mk}| \geq |a_{mm}|$$

gezeigt, dass die Matrix nicht strikt diagonaldominant ist.

$$A := \begin{pmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & h_{n-1} \\ & & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) \end{pmatrix}$$

Nach dem eben gezeigten reicht es zu zeigen, dass die Matrix A strikt diagonaldominant ist, da das die Regularität und somit die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems zeigt.

$$\sum_{k=1,k\neq m}^{n} |a_{jk}| = |h_j| + |h_{j+1}| = |h_j + h_{j+1}| < 2|h_j + h_{j+1}| = |a_{jj}|$$

Da $h_j > 0$ für alle j.

NUM Ü3

3.) $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ ... Zerlegung von $[a,b]$ $h_j := x_j - x_{j-1}$ $\forall j = 1, \dots, n$

$s \in S^3(\Delta)$ ... interpolierender kubische Spline von $f \in C^0[a,b]$

mit natürlichen Randbedingungen $(s \in C^2([a,b]),\ s(x_j) = f(x_j) = y_j,\ s''(a) = 0 = s''(b))$

$\forall j = 1, \dots, n\ \exists a_0^{(j)}, \dots, a_3^{(j)}: s(x) = a_0^{(j)} + a_1^{(j)}(x - x_j) + a_2^{(j)}(x - x_j)^2 + a_3^{(j)}(x - x_j)^3$

für $x \in [x_{j-1}, x_j]$ ... lokale Darstellung von s

i) $a_2^{(0)} := 0$ zz: $a_0^{(j)} = y_j$, $a_1^{(j)} = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} + \frac{h_j}{3}(2a_2^{(j)} + a_2^{(j-1)})$, $a_3^{(j)} = \frac{a_2^{(j)} - a_2^{(j-1)}}{3h_j}$

für alle $j = 1, \dots, n$

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ bel.

$$y_j = s(x_j) = a_0^{(j)} + a_1^{(j)}(x_j - x_j) + a_2^{(j)}(x_j - x_j)^2 + a_3^{(j)}(x_j - x_j)^3 = a_0^{(j)} \quad \checkmark$$

$$y_{j-1} = s(x_{j-1}) = a_0^{(j)} + a_1^{(j)}(x_{j-1} - x_j) + a_2^{(j)}(x_{j-1} - x_j)^2 + a_3^{(j)}(x_{j-1} - x_j)^3$$

$$y_{j-1} = a_0^{(j)} - a_1^{(j)} h_j + a_2^{(j)} h_j^2 - a_3^{(j)} h_j^3$$

$$y_{j-1} = y_j - a_1^{(j)} h_j + a_2^{(j)} h_j^2 - \frac{a_2^{(j)} - a_2^{(j-1)}}{3h_j} h_j^3$$

$$a_1^{(j)} h_j = y_j - y_{j-1} + h_j^2\left(a_2^{(j)} - \tfrac{1}{3}(a_2^{(j)} - a_2^{(j-1)})\right)$$

$$a_1^{(j)} = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} + h_j\left(\frac{3a_2^{(j)} - a_2^{(j)} + a_2^{(j-1)}}{3}\right)$$

$$a_1^{(j)} = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} + \frac{h_j}{3}(2a_2^{(j)} + a_2^{(j-1)}) \quad \checkmark$$

$$s'(x) = a_1^{(j)} + a_2^{(j)}(2x - 2x_j) + a_3^{(j)}(3x^2 - 6x x_j + 3x_j^2) \text{ in } [x_{j-1}, x_j]$$

$$s''(x) = a_2^{(j)} \cdot 2 + a_3^{(j)}(6x - 6x_j) = 2a_2^{(j)} + 6a_3^{(j)}(x - x_j) \text{ in } [x_{j-1}, x_j]$$

$$2a_2^{(j-1)} = s''(x_{j-1}) = 2a_2^{(j)} + 6a_3^{(j)}(x_{j-1} - x_j) = 2a_2^{(j)} - 6a_3^{(j)} h_j$$

$$\Leftrightarrow 6a_3^{(j)} h_j = 2a_2^{(j)} - 2a_2^{(j-1)}$$

$$a_3^{(j)} = \frac{2(a_2^{(j)} - a_2^{(j-1)})}{6h_j} = \frac{a_2^{(j)} - a_2^{(j-1)}}{3h_j} \quad \checkmark$$

für $j = 1$ gilt: $0 = s''(x_{j-1}) = s''(a) = 2a_2^{(j)} + 6a_3^{(j)}(x_{j-1} - x_j)$

$$\Leftrightarrow 6a_3^{(j)} h_j = 2a_2^{(j)} \Leftrightarrow a_3^{(j)} = \frac{a_2^{(j)}}{3h_j} = \frac{a_2^{(j)} - \overbrace{a_2^{(j-1)}}^{=0}}{3h_j} \quad \checkmark$$

...

NUM Ü3

3.)... ii) zz: $a_2^{(n)} = 0$

$$0 = s''(b) = 2\ a_2^{(n)} + 6\ a_3^{(n)}(b - x_n) = 2a_2^{(n)} + 6\ a_3^{(n)}(b-b) = 2a_2^{(n)}$$

$$\Rightarrow a_2^{(n)} = 0$$

iii) zz: $a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(n-1)}$ lösen

$$\begin{pmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & h_{n-1} \\ & & h_{n-1} & 2(h_{n-1}-h_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_2^{(n-1)} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \frac{y_2-y_1}{h_2} - \frac{y_1-y_0}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$s'(x) = a_1^{(j)} + 2a_2^{(j)}(x-x_j) + 3\,a_3^{(j)}(x-x_j)^2 \quad \text{in } [x_{j-1}, x_j]$$

$$\Rightarrow a_1^{(j-1)} = s'(x_{j-1}) = a_1^{(j)} + 2a_2^{(j)}(x_{j-1}-x_j) + 3a_3^{(j)}(x_{j-1}-x_j)^2$$

$$\Leftrightarrow a_1^{(j)} - a_1^{(j-1)} = +2a_2^{(j)}h_j - 3a_3^{(j)}h_j^2$$

$$a_1^{(j)} - a_1^{(j-1)} = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} + \frac{h_j}{3}(2a_2^{(j)} + a_2^{(j-1)}) - \frac{y_{j-1}-y_{j-2}}{h_{j-1}} - \frac{h_{j-1}}{3}(2a_2^{(j-1)} + a_2^{(j-2)})$$

$$\Rightarrow \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{y_{j-1}-y_{j-2}}{h_{j-1}} = 2a_2^{(j)}h_j - 3a_3^{(j)}h_j^2 - \frac{h_j}{3}(2a_2^{(j)} + a_2^{(j-1)}) + \frac{h_{j-1}}{3}(2a_2^{(j-1)} + a_2^{(j-2)})$$

$$= 2a_2^{(j)}h_j - \cancel{3}\frac{a_2^{(j)} - a_2^{(j-1)}}{\cancel{3h_j}}h_j^{\cancel{2}} - \frac{2}{3}h_j a_2^{(j)} - \frac{1}{3}h_j a_2^{(j-1)} + \frac{2}{3}h_{j-1}a_2^{(j-1)} + \frac{1}{3}h_{j-1}a_2^{(j-2)}$$

$$= a_2^{(j)}(2h_j - h_j - \tfrac{2}{3}h_j) + a_2^{(j-1)}(h_j - \tfrac{1}{3}h_j + \tfrac{2}{3}h_{j-1}) + a_2^{(j-2)}(\tfrac{1}{3}h_{j-1})$$

$$= \frac{1}{3}h_j a_2^{(j)} + \frac{2}{3}a_2^{(j-1)}(h_j + h_{j-1}) + \frac{1}{3}h_{j-1}a_2^{(j-2)}$$

$$= \frac{1}{3}(h_j \cdot a_2^{(j)} + 2(h_j + h_{j-1})a_2^{(j-1)} + h_{j-1}\,a_2^{(j-2)})$$

$$\Rightarrow h_j \cdot a_2^{(j)} + 2(h_j + h_{j-1})a_2^{(j-1)} + h_{j-1}\,a_2^{(j-2)} = 3\left(\frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{y_{j-1}-y_{j-2}}{h_{j-1}}\right)$$

für $j = 2$: $a_2^{(j-2)} = a_2^{(0)} = 0$

für $j = n$: $a_2^{(n)} = 0$ $\quad\Rightarrow$ gilt auch für erste und letzte Zeile

$\square$