DGA Ü3

6.) zz: Algorithmus gibt alle m-elementigen Teilmengen mit gleicher Wahrscheinlichkeit zurück $\Leftrightarrow$ jedes Element $x \in \{1, \dots, n\}$ hat gleiche Wahrscheinlichkeit in S zu liegen.

Bei fairer Verteilung gilt $\forall x \in \{1, \dots, n\}: P(x \in S) = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}$

$$= \frac{\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-(m-1))!}}{\frac{n!}{m!(n-m)!}} = \frac{m!(n-1)!\cancel{(n-m)!}}{n!(m-1)!\cancel{(n-m)!}} = \frac{m(m-1)!(n-1)!}{n(n-1)!(m-1)!} = \frac{m}{n}$$

Zeigen wir nun, dass bei jedem rekursiven Funktionsaufruf gilt $\forall x \in \{1, \dots, n\}: P(x \in S)$ (wobei S eine m-elementige Teilmenge ist) mit vollständiger Induktion nach m:

$m=0$: $\emptyset$ ist die einzige 0-elementige Teilmeng $\Rightarrow P(x \in S) = 0 = \frac{0}{n}$

$m+1$: Nach Induktionsannahme gilt nach dem rekursiven Funktionsaufruf $\forall x \in \{1, \dots, n\}: P(x \in S) = \frac{m}{n}$. Nach der Zeile $i := \text{Random}(1, \dots, n+1)$; und dem if-statement gilt nun

$$\forall x \in \{1, \dots, n\}: P(x \in S_{neu}) = P(x \in S_{alt}) + P(i \notin S_{neu}) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{m}{n} + \left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{n+1-m-1}{n(n+1)} = \frac{mn \cancel{+m} + n \cancel{-m}}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n(m+1)}{n(n+1)} = \frac{m+1}{n+1}$$

Für $n+1$ gilt $P(n+1 \in S_{neu}) = \frac{1}{n+1} \cdot P(n+1 \notin S_{neu}) + P(i \in S_{alt})$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot 1 + \frac{m}{n+1} = \frac{m+1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \{1, \dots, n+1\}: P(x \in S_{neu}) = \frac{m+1}{n+1}$$