NUM Ü2

5.) X ... endlich-dimensionaler, normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ $\quad n := \dim X$

zz: Satz von Bolzano-Weierstrass: jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

Beweis: 1. Schritt: X ist linear isomorph zu $\mathbb{R}^n$

Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von X.

$\forall x \in X \; \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} : x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$

$f: X \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T$ ist eine lineare Bijektion (Nachrechnen)

2. Schritt: Satz von Bolzano-Weierstrass für $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

Wir zeigen, dass beschränkte Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen eine Teilfolge besitzen, die gegen $\liminf_{n \to \infty} x_n$ konvergieren.

Sei $N \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Wegen $\inf\{x_k : k \geq N\} \leq \liminf_{n \to \infty} x_n < \liminf_{n \to \infty} x_n + \varepsilon$ ist $\liminf_{n \to \infty} x_n + \varepsilon$ keine untere Schranke von $\{x_k : k \geq N\}$. Also $\exists\, l_{N,\varepsilon} \geq N$, sodass $\inf\{x_k : k \geq N\} \leq x_{l_{N,\varepsilon}} < \liminf_{n \to \infty} x_n + \varepsilon$.

Wir definieren nun rekursiv eine Teilfolge $(x_{m(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ indem wir $m(1) = 1$ setzen und für definierte $m(j) \in \mathbb{N}$ $m(j+1) = l_{m(j)+1, \frac{1}{j+1}} \geq m(j) + 1 > m(j)$ setzen. Monotonie von $(m(j))_{j \in \mathbb{N}}$ ist damit gezeigt. Weiters gilt

$$\underbrace{\inf\{x_k : k \geq m(j+1)\}}_{\xrightarrow{j \to \infty} \liminf_{n \to \infty} x_n} \leq x_{m(j+1)} < \underbrace{\liminf_{n \to \infty} x_n + \frac{1}{j+1}}_{\xrightarrow{j \to \infty} \liminf_{n \to \infty} x_n}$$

Nach dem Sandwich-Satz gilt also $(x_{m(j)})_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{j \to \infty} \liminf_{n \to \infty} x_n$

3. Schritt: Vollständige Induktion nach n:

$n = 1$: wurde in Schritt 2 gezeigt

$n+1$: Sei $\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ \vdots \\ x_{j,n+1} \end{pmatrix}_{j \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^{n+1}$. Somit sind auch $\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ \vdots \\ x_{j,n} \end{pmatrix}_{j \in \mathbb{N}}$ und $(x_{j,n+1})_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkte Folgen.

...

NUM Ü2

5.) ... Nach Induktionsvoraussetzung hat $\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ \vdots \\ x_{j,n} \end{pmatrix}_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\begin{pmatrix} x_{m(j),1} \\ \vdots \\ x_{m(j),n} \end{pmatrix}_{j \in \mathbb{N}}$.

Nach Schritt 2 hat $(x_{m(j),n+1})_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k(m(j))})_{j \in \mathbb{N}}$.

Als Teilfolge von $\begin{pmatrix} x_{m(j),1} \\ \vdots \\ x_{m(j),n} \end{pmatrix}_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert auch $\begin{pmatrix} x_{k(m(j)),1} \\ \vdots \\ x_{k(m(j)),n} \end{pmatrix}_{j \in \mathbb{N}}$.

Daraus folgt, dass $\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ \vdots \\ x_{j,n+1} \end{pmatrix}_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt, nämlich $\begin{pmatrix} x_{k(m(j)),1} \\ \vdots \\ x_{k(m(j)),n+1} \end{pmatrix}_{j \in \mathbb{N}}$.

$\square$

NUM Ü2

7.) ges: Verfahren um $p'(x)$ auszuwerten, wobei $p \in \mathbb{P}_n$ ein Polynom ist.

Um $p(x)$ auszuwerten, können wir das Neville-Verfahren anwenden:

$$p_{j,m}(x) = \begin{cases} y_j & \text{für } m=0 \\ \dfrac{(x-x_j)\,p_{j+1,m-1}(x) - (x-x_{j+m})\,p_{j,m-1}(x)}{x_{j+m}-x_j} & \text{für } m>0 \end{cases}$$

Dann gilt $p(x) = p_{0,n}(x)$

Um nun $p'(x)$ auszuwerten, können wir $p_{j,m}'(x)$ durch ableiten der obigen Formel berechnen:

$$p_{j,m}'(x) = (y_j)' = 0 \quad \text{für } m=0$$

$$p_{j,m}'(x) = \frac{1}{x_{j+m}-x_j} \cdot \Big(\big((x-x_j)\,p_{j+1,m-1}(x)\big)' - \big((x-x_{j+m})\,p_{j,m-1}(x)\big)' \Big)$$

$$= \frac{1}{x_{j+m}-x_j} \Big((x-x_j)\,p_{j+1,m-1}'(x) + p_{j+1,m-1}(x) - (x-x_{j+m})\,p_{j,m-1}'(x) - p_{j,m-1}(x) \Big)$$

Nun berechnet folgender Algorithmus $p'(x)$

```
Algorithm(x_0,...,x_n, y_0,...,y_n, x):
  y_0' = 0, ..., y_n' = 0;
  for m = 1,...,n:
    for j = 0,...,n-m:
      y_j' = ((x-x_j) y_{j+1}' + y_{j+1} - (x-x_{j+m}) y_j' - y_j) / (x_{j+m} - x_j);
      y_j = ((x-x_j) y_{j+1} - (x-x_{j+m}) y_j) / (x_{j+m} - x_j);
  return y_0'
```

Aufwand des Algorithmus ist $\sum_{m=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-m} c = \sum_{m=1}^{n} (n-m+1)\,c = \sum_{m=1}^{n} (nc - mc + c)$

$$= n^2 c - c \cdot \sum_{m=1}^{n} m + nc = n^2 c - c\,\frac{n^2+n}{2} + nc$$

$$= \frac{c}{2} n^2 + \frac{c}{2} n \qquad \Rightarrow O(n^2)$$