

NUM UE4

Ida Hönigmann

November 2, 2021

1 Aufgabe 14:

Wir zeigen $V_n A = D V_n$ indem wir auf jeder Seite den Wert in der j-ten Zeile und k-ten Spalte berechnen.

Wir wissen, dass

$$(V_n)_{jk} = w_n^{j*k}.$$

Durch die Diagonalstruktur der Matrix D wird bei einer Multiplikation mit D von links jede Zeile mit dem entsprechenden Wert aus D skaliert, d.h.

$$(D V_n)_{jk} = p(w_n^j) * w_n^{j*k} = \left(\sum_{l=0}^{n-1} a_l * w_n^{j*l} \right) * w_n^{j*k} = \sum_{l=0}^{n-1} a_l * w_n^{j(l+k)}.$$

Um $(V_n A)_{jk}$ auszurechnen wollen wir uns zunächst die entsprechende Zeile von V_n und Spalte von A ansehen:

$$\begin{aligned} (V_n A)_{jk} &= (w_n^{j*0}, w_n^{j*1}, \dots, w_n^{j*(n-1)}) * (a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-k-1})^T \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} (w_n^{j*l} * a_{n-k+l}) + \sum_{l=0}^{n-k-1} (w_n^{j*(l+k)} * a_l) \\ &= \sum_{l=n-k}^{k-1+n-k} (w_n^{j*(l-n+k)} * a_{n-k+l-n+k}) + \sum_{l=0}^{n-k-1} (w_n^{j*(l+k)} * a_l) \\ &= \sum_{l=n-k}^{n-1} (w_n^{j*(l+k-n)} * a_l) + \sum_{l=0}^{n-k-1} (w_n^{j*(l+k)} * a_l) \end{aligned}$$

Da w_n die n-te Einheitswurzel ist gilt $(w_n)^n = 1$ und somit

$$w_n^{j(l+k-n)} = \frac{w_n^{j(l+k)}}{w_n^{j*n}} = \frac{w_n^{j(l+k)}}{((w_n)^n)^j} = \frac{w_n^{j(l+k)}}{1} = w_n^{j(l+k)}.$$

Insgesamt ergibt das

$$(V_n A)_{jk} = \sum_{l=n-k}^{n-1} (w_n^{j*(l+k)} * a_l) + \sum_{l=0}^{n-k-1} (w_n^{j*(l+k)} * a_l) = \sum_{l=0}^{n-1} (w_n^{j*(l+k)} * a_l) = (D V_n)_{jk}.$$

Somit ist gezeigt, dass $V_n A V_n^{-1} = D$.