NUM Ü1

1) $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ... Basis $t \in \mathbb{N}$ ... Mantissenlänge $e_{min}, e_{max} \in \mathbb{Z}$ mit $e_{min} < 0 < e_{max}$
... Exponentialschranken

$$\mathbb{F}(b,t,e_{min},e_{max}) = \{0\} \cup \Big\{\Big(\sigma \sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}\Big) b^{e} : \sigma \in \{\pm 1\},$$
$$a_k \in \{0,\dots,b-1\}, a_1 \neq 0, e \in \mathbb{Z}, e_{min} \le e \le e_{max}\Big\}$$

a) zz: Darstellung aller $x \in \mathbb{F}$ ist eindeutig

Da $\{(\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}) b^{e} : a_k \in \{0,\dots,b-1\}, a_1 \neq 0, e \in \mathbb{Z}, e_{min} \le e \le e_{max}\}$ nur aus Zahlen > 0 besteht (da $a_0 \neq 0$) ist für $x = 0$ die Darstellung klar.

Falls $x < 0$ muss $\sigma = -1$ sein, sonst $\sigma = +1$, daher o.B.d.A. $x > 0$

Wir zeigen $\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}$ für $a_k \in \{0,\dots,b-1\}, a_1 \neq 0$ immer in $[b^{-1}, 1-b^{-t}]$ liegt durch vollständige Induktion nach t:

$t=1$ $x := \sum_{k=1}^{1} a_k b^{-k} = a_1 \cdot b^{-1}$ Da $a_1 \in \{1,\dots,b-1\}$ gilt $1 \cdot b^{-1} \le x \le (b-1)\cdot b^{-1} = 1 - b^{-1}$

$t+1$ $x := \sum_{k=1}^{t+1} a_k b^{-k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}}_{\in [b^{-1}, 1-b^{-t}]} + \underbrace{a_{t+1} \cdot b^{-(t+1)}}_{\in [0, (b-1)\cdot b^{-t-1}]}$

$\Rightarrow x \in [b^{-1}, 1 - \cancel{b^{-t}} + \cancel{b^{-t-1+1}} - b^{-(t+1)} = 1 - b^{-(t+1)}]$

Seien $x_1,\dots,x_t, y_1,\dots,y_t \in \{0,\dots,b-1\}$, $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, $e_x \in \mathbb{Z}$, $e_{min} \le e_x \le e_{max}$, $e_y \in \mathbb{Z}$, $e_{min} \le e_y \le e_{max}$ zwei Darstellungen mit $(\sum_{k=1}^{t} x_k b^{-k}) b^{e_x} = (\sum_{k=1}^{t} y_k b^{-k}) b^{e_y} =: z$

Da $\sum_{k=1}^{t} x_k b^{-k}, \sum_{k=1}^{t} y_k b^{-k} \in [b^{-1}, 1-b^{-t}]$ gilt

$(\sum_{k=1}^{t} x_k b^{-k}) \cdot b^{e_x} \in [b^{e_x-1}, b^{e_x} - b^{e_x-t}] \subseteq [b^{e_x-1}, b^{e_x})$ und

$(\sum_{k=1}^{t} y_k b^{-k}) \cdot b^{e_y} \in [b^{e_y-1}, b^{e_y} - b^{e_y-t}] \subseteq [b^{e_y-1}, b^{e_y})$

Für $e_x \neq e_y$ gilt $z \in [b^{e_x-1}, b^{e_x})$ und $z \in [b^{e_y-1}, b^{e_y})$, aber auch $[b^{e_x-1}, b^{e_x}) \cap [b^{e_y-1}, b^{e_y}) = \emptyset$

$\Rightarrow e_x = e_y =: e$ also ist nun zu zeigen $\sum_{k=1}^{t} x_k b^{-k} = \sum_{k=1}^{t} y_k b^{-k} \Rightarrow x_k = y_k \ \forall k$

Angenommen $\exists j \in \{1,\dots,t\}$ mit $x_j \neq y_j$ o.B.d.A. $\forall k < j: x_k = y_k$ (also Minimal)

o.B.d.A. $x_j > y_j$ $\Rightarrow \sum_{k=1}^{t} x_k b^{-k} = \sum_{k=1}^{j-1} x_k b^{-k} + x_j b^{-j} + \sum_{k=j+1}^{t} x_k b^{-k} = \sum_{k=1}^{j-1} y_k b^{-k} + x_j b^{-j} + \sum_{k=j+1}^{t} x_k b^{-k}$

$\dots = \sum_{k=1}^{j-1} y_k b^{-k} + y_j b^{-j} + (x_j - y_j) b^{-j} + \sum_{k=j+1}^{t} x_k b^{-k}$

$\sum_{k=1}^{t} y_k b^{-k} = \sum_{k=1}^{j-1} y_k b^{-k} + y_j b^{-j} + \sum_{k=j+1}^{t} y_k b^{-k}$ $\Rightarrow \sum_{k=j+1}^{t} y_k b^{-k} = \underbrace{(x_j - y_j) b^{-j}}_{\ge b^{-j}} + \sum_{k=j+1}^{t} x_k b^{-k}$

$\sum_{k=j+1}^{t} y_k b^{-k} \le b^{-(j+2)} - b^{-(t+1)} < b^{-(j+2)}$ und $(x_j - y_j) b^{-j} + \sum_{k=j+1}^{t} x_k b^{-k} \ge b^{-j}$ ↯ $\Rightarrow$ Darstellung ist eindeutig

NUM Ü1

1) b) zz: $x_{min} = \min\{x \in \mathbb{F} : x > 0\} = b^{e_{min}-1}$

$x_{max} = \max\{x \in \mathbb{F} : x > 0\} = b^{e_{max}}(1-b^{-t})$

Von vorher wissen wir $\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k} \in [b^{-1}, 1-b^{-t}]$

$\Rightarrow (\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}) \cdot b^e \in [b^{e-1}, b^e(1-b^{-t})]$

Offensichtlich gilt also $b^{e_{min}-1} \leq x_{min}$ und $b^{e_{max}}(1-b^{-t}) \geq x_{max}$

Wählen wir $a_1 = 1$, $a_j = 0 \ \forall j > 1$, $e = e_{min}$

$\Rightarrow (\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}) \cdot b^e = b^{-1} \cdot b^{e_{min}} = b^{e_{min}-1}$

Wählen wir $a_j = (b-1) \ \forall j \geq 1$, $e = e_{max}$

$\Rightarrow (\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}) \cdot b^e = (\sum_{k=1}^{t} (b-1) b^{-k}) \cdot b^{e_{max}} = (b-1) \cdot b^{e_{max}} \cdot \sum_{k=1}^{t} b^{-k}$

$= b^{e_{max}} \cdot \cancel{(b-1)} \cdot \frac{b^{-t}(b^t-1)}{\cancel{(b-1)}} = b^{e_{max}} \cdot (1-b^{-t})$

c) ges: $\#\mathbb{F}$ abhängig von b, t, e_{min}, e_{max}

Da die Darstellung eindeutig ist Frage äquivalent zu:

Wie viele Arten gibt es a_k, e und σ zu wählen?

σ ... zwei Möglichkeiten $\qquad e$ ... $(e_{max} - e_{min} + 1)$ Möglichkeiten

a_1 ... $b-1$ Möglichkeiten $\qquad a_j, j \neq 1$ ... b Möglichkeiten

$$\Rightarrow \#\mathbb{F} = \underbrace{1}_{\text{für } 0} + \underbrace{2}_{\sigma} \cdot \underbrace{(e_{max} - e_{min} + 1)}_{e} \cdot \underbrace{(b-1)}_{a_1} \cdot \underbrace{b^{t-1}}_{a_j}$$

$\square$