DGA Ü2

6) $m, n \in \mathbb{N}^+$ $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ ... Folge paarweise verschiedener Zahlen

zz: (a_j) enthält eine monoton wachsende Teilfolge der Länge $m+1$ oder eine monoton fallende Teilfolge der Länge $n+1$

Beweis indirekt:

Für alle $x \in (a_i)_{i \in \{1,\dots,mn+1\}}$ definieren wir (k, l) als jeweils die Längen der längsten aufsteigenden bzw. absteigenden Teilfolge, die mit x beginnt bzw. endet.

Da wir annehmen, dass es keine monoton wachsenden Teilfolgen der Länge $\geq m+1$ oder monoton fallende Teilfolge der Länge $\geq n+1$ gibt gilt: $\forall x \in (a_i)_{i \in \{1,\dots,mn+1\}} : 1 \leq k \leq m \wedge 1 \leq l \leq n$

Da es $mn+1$ unterschiedliche $x \in (a_i)_{i \in \{1,\dots,mn+1\}}$, aber nur mn unterschiedliche Möglichkeiten für das Paar (k, l) gibt muss nach dem Schubfachprinzip gelten $\exists\, i, j \in \{1, \dots, mn+1\}, i \neq j$:

$(k_{x_i}, l_{x_i}) = (k_{x_j}, l_{x_j}) =: (s, t)$ o.B.d.A. $i < j$

Falls $x_i < x_j \Rightarrow x_i$ und die längste aufsteigende Teilfolge, die mit x_j beginnt, bilden eine aufsteigende Teilfolge der Länge $s+1$. Das widerspricht, dass die längste aufsteigende TF, die mit x_i beginnt Länge s hat. ↯

Falls $x_i > x_j \Rightarrow$ die längste absteigende Teilfolge, die mit x_i endet, und x_j, bilden eine absteigende TF der Länge $t+1$. Das widerspricht, dass die längste absteigende TF, die mit x_j endet Länge t hat. ↯

$\Rightarrow (a_i)_{i \in \{1,\dots,mn+1\}}$ hat eine monoton wachsende Teilfolge der Länge $m+1$ oder eine monoton fallende Teilfolge der Länge $n+1$. $\square$