NUM UE8

Ida Hönigmann

December 1, 2021

1 Aufgabe 29:

Proof. a) Sei $x_0 \in [a,b]$ eine Nullstelle von f.

$$X := [a,b]^2 \qquad x^* := (x_0, x_0) \qquad \Phi : X \to X$$
$$(a_k, b_k) \mapsto \begin{cases} (a_k, c_k), & \text{falls} f(a_k)f(c_k) \leq 0 \\ (c_k, b_k), & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $c_k := \frac{a_k+b_k}{2}$. Dann ist (X, Φ, x^*) ein abstraktes Iterationsverfahren, dass das Bisektionsverfahren abbildet.

b)

$$d : X^2 \to \mathbb{R}$$
$$((a,b),(x,y)) \mapsto ||a-b|-|x-y||$$

$$\forall (a,b),(x,y) \in X : d((a,b),(x,y)) \geq 0$$
$$\forall (a,b) \in X : d((a,b),(a,b)) = ||a-b|-|a-b|| = 0$$
$$\forall (a,b),(x,y) \in X : d((a,b),(x,y)) = ||a-b|-|x-y|| = ||x-y|-|a-b|| = d((x,y),(a,b))$$
$$\forall (a,b),(x,y),(c,d) \in X : d((a,b),(x,y)) + d((x,y),(c,d)) = ||a-b|-|x-y|| + ||x-y|-|c-d||$$
$$\geq ||a-b|-|x-y|+|x-y|-|c-d|| = ||a-b|-|c-d|| = d((a,b),(c,d))$$

Somit ist d eine Metrik auf X.

Sei $(a,b),(x,y) \in X$ beliebig.

$$d(\Phi(a,b),\Phi(x,y)) = \begin{cases} d_2((a,\frac{a+b}{2}),(x,\frac{x+y}{2})) = \left|\left|a-\frac{a+b}{2}\right|-\left|x-\frac{x+y}{2}\right|\right| = \left|\left|\frac{a+b}{2}-a\right|-\left|\frac{x+y}{2}-x\right|\right| \\ d_2((a,\frac{a+b}{2}),(\frac{x+y}{2},y)) = \left|\left|a-\frac{a+b}{2}\right|-\left|\frac{x+y}{2}-y\right|\right| = \left|\left|\frac{a+b}{2}-a\right|-\left|\frac{x+y}{2}-y\right|\right| \\ d_2((\frac{a+b}{2},b),(x,\frac{x+y}{2})) = \left|\left|\frac{a+b}{2}-b\right|-\left|x-\frac{x+y}{2}\right|\right| = \left|\left|\frac{a+b}{2}-b\right|-\left|\frac{x+y}{2}-x\right|\right| \\ d_2((\frac{a+b}{2},b),(\frac{x+y}{2},y)) = \left|\left|\frac{a+b}{2}-b\right|-\left|\frac{x+y}{2}-y\right|\right| = \left|\left|\frac{a+b}{2}-b\right|-\left|\frac{x+y}{2}-y\right|\right| \end{cases}$$
$$= \left|\left|\frac{a-b}{2}\right|-\left|\frac{x-y}{2}\right|\right| = \frac{1}{2}||a-b|-|x-y||$$

$$d((a,b),(x,y)) = ||a-b|-|x-y||$$

Also $\forall (a,b),(x,y) \in X : d(\Phi(a,b), \Phi(x,y)) \leq q d_2((a,b),(x,y))$ mit $q := \frac{1}{2}$. Somit gilt nach Banach'schem Fixpunktsatz, dass (X, Φ, x^*) für alle Startwerte aus X global und linear mit $q = \frac{1}{2}$ gegen x^* konvergiert.

Noch einmal nachgerechnet:

- Globale Konvergenz: Wir wollen zeigen, dass $(a_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und somit konvergiert. Da wie oben gezeigt gilt, dass $\forall k \in \mathbb{N} : |a_{k+1} - b_{k+1}| = \frac{1}{2}|a_k - b_k|$ folgt durch vollständige Induktion, dass

  $$\forall k \in \mathbb{N} : |a_k - b_k| = \frac{1}{2^1}|a_{k-1} - b_{k-1}| = \frac{1}{2^2}|a_{k-2} - b_{k-2}| = ... = \frac{1}{2^k}|a_0 - b_0|.$$

  Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Sei $k, l \in \mathbb{N}$ beliebig.

  $$d((a_k, b_k), (a_l, b_l)) = ||a_k - b_k| - |a_l - b_l|| = \left| \frac{1}{2^k}|a_0 - b_0| - \frac{1}{2^l}|a_0 - b_0| \right| = \left| \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^l} \right| |a_0 - b_0| < \epsilon$$

  für groß genug gewählte k und l. Also handelt es sich um eine Cauchy-Folge und sie ist somit konvergent gegen x^* (laut VO gilt $\exists \lim_{k \to \infty} x_k$, so gilt $\lim_{x \to \infty} x_k = x^*$ da es sich um den einzigen Fixpunkt handelt).

- Lineare Konvergenz: Sei $\epsilon > 0$, $(a_0, b_0) \in U_\epsilon(x^*)$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

  $$d((a_{k+1}, b_{k+1}), (x_0, x_0)) = ||a_{k+1} - b_{k+1}| - |x_0 - x_0|| = \frac{1}{2}|a_k - b_k| = \frac{1}{2} d((a_k, b_k), (x_0, x_0))$$

  Also ist (X, Φ, x^*) linear mit $q = \frac{1}{2}$ konvergent.

$\square$

2 Aufgabe 32:

Proof. Nenn wir der Lesbarkeit halber die Norm auf $\mathbb{K}^n$ $||.||_X$ und die Operator-Norm $||.||$.

a) zz: $||.||$ ist eine Norm

(N1) zz: $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n} : ||A|| \geq 0 \wedge ||A|| = 0 \iff A = (0)_{i,j\in\{1,...,n\}}$
Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ beliebig. Da $||.||_X$ eine Norm ist gilt $\forall x \in \mathbb{K}^n : ||Ax||_X \geq 0 \wedge ||x||_X \geq 0$. Also folgt

$$||A|| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{||Ax||_X}{||A||_X} \geq 0.$$

Für $A = (0)_{i,j\in\{1,...,n\}}$ gilt $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : ||Ax||_X = \left|\left|(0)_{i\in\{1,...,n\}}\right|\right|_X = 0$ und somit $||A|| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{||Ax||_X}{||x||_X} = 0$.
Damit $||A|| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{||Ax||_X}{||x||_X} = 0$ muss $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : ||Ax||_X = 0 \implies A = (0)_{i,j\in\{1,...,n\}}$.

(N2) zz: $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n} \forall \lambda \in \mathbb{K} : ||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||$.
Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig.

$$||\lambda A|| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{||\lambda Ax||_X}{||x||_X} = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{|\lambda| \cdot ||Ax||_X}{||x||_X} = |\lambda| \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\cdot ||Ax||_X}{||x||_X} = |\lambda| \cdot ||A||$$

(N3) zz: $\forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n} : ||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
Sei $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ beliebig.

$$\begin{aligned} ||A + B|| &= \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{||(A + B)x||_X}{||x||_X} = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{||Ax + Bx||_X}{||x||_X} \leq \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{||Ax||_X + ||Bx||_X}{||x||_X} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{||Ax||_X}{||x||_X} + \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{||Bx||_X}{||x||_X} = ||A|| + ||B|| \end{aligned}$$

b) zz: $||A|| = \sup_{||x||_X=1} ||Ax||_X = \sup_{||x||_X\leq 1} ||Ax||_X = \inf\{C > 0 : ||Ax||_X \leq C\, ||x||_X \,\forall x \in \mathbb{K}^n\}$
Wir zeigen zuerst die Gleichheit $||A|| = \inf\{C > 0 : ||Ax||_X \leq C\, ||x||_X \,\forall x \in \mathbb{K}^n\}$.
Da $||A||$ existiert ist die Menge $\{\frac{||Ax||_X}{||x||_X} : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\}$ beschränkt, d.h. $\exists C > 0 \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : C \geq \frac{||Ax||_X}{||x||_X}$. Für solche C gilt nach Umformen $||Ax||_X \leq C\, ||x||_X$.
Die Menge $\{C > 0 : ||Ax||_X \leq C\, ||x||_X \,\forall x \in \mathbb{K}^n\}$ hat $||A||$ als untere Schranke. Alle Werte kleiner als $||A||$ können keine unteren Schranken mehr sein, da sonst $||A||$ nicht das Supremum von $\{\frac{||Ax||_X}{||x||_X} : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\}$ wäre.

$$\implies ||A|| = \inf\{C > 0 : ||Ax||_X \leq C\, ||x||_X \,\forall x \in \mathbb{K}^n\}$$

Um die Gleichheit $||A|| = \sup_{||x||_X=1} ||Ax||_X = \sup_{||x||_X\leq 1} ||Ax||_X$ zu zeigen schauen wir uns die folgende Mengengleichheit an:

$$\left\{\frac{||Ax||_X}{||x||_X} : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\} = \left\{\left|\left|\frac{1}{||x||_X} Ax\right|\right|_X : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\} = \left\{\left|\left|A\frac{x}{||x||_X}\right|\right|_X : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\}$$
$$= \{||Ay||_X : ||y||_X = 1\} \subseteq \{||Ay||_X : ||y||_X \leq 1\}$$

$$||A|| = \sup_{||x||_X=1} ||Ax||_X \leq \sup_{||x||_X \leq 1} ||Ax||_X$$

Da $\forall x \in \mathbb{K}^n, ||x||_X \leq 1 : ||Ax||_X \leq \frac{||Ax||_X}{||x||_X} \leq ||A||$ folgt $\sup_{||x||_X \leq 1} ||Ax||_X \leq ||A||$.

$$\implies ||A|| = \sup_{||x||_X=1} ||Ax||_X = \sup_{||x||_X \leq 1} ||Ax||_X$$

c) zz: $||I|| = 1$ und $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$regulär : $\left|\left|A^{-1}\right|\right| = \left(\inf_{||x||_X=1} ||Ax||_X\right)^{-1}$

$$||I|| = \sup_{||x||_X=1} ||Ix||_X = \sup_{||x||_X=1} ||x||_X = 1$$

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär beliebig. Wir können A als bijektive Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^n$ auffassen.

$$\left|\left|A^{-1}\right|\right| = \sup\left\{\frac{\left|\left|A^{-1}x\right|\right|_X}{||x||_X} : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\} = \sup\left\{\frac{\left|\left|A^{-1}Ay\right|\right|_X}{||Ay||_X} : y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\}$$
$$= \sup\left\{\frac{||y||_X}{||Ay||_X} : y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\} = \left(\inf\left\{\frac{||Ay||_X}{||y||_X} : y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\}\right)^{-1}$$
$$= \left(\inf\left\{\left|\left|A\frac{y}{||y||_X}\right|\right|_X : y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\}\right)^{-1} = \left(\inf_{||x||_X=1} ||Ax||_X\right)^{-1}$$

d) zz: $\forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n} : ||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$. Gilt das auch für andere Normen?
Wir zeigen zuerst $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n} \forall x \in \mathbb{K}^n : ||Ax||_X \leq ||A|| \cdot ||x||_X$.

$$||A|| \cdot ||x||_X = ||x||_X \sup\left\{\frac{||Ay||_X}{||y||_X} : y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\} = \sup\left\{\left|\left|A\frac{y}{||y||_X}\, ||x||_X\right|\right|_X : y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\}$$
$$= \sup\{||Az||_X : ||z||_X = ||x||_X\} \geq ||Ax||_X$$

Sei $\forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ beliebig.

$$||AB|| = \sup_{||x||_X=1} ||(AB)x||_X = \sup_{||x||_X=1} ||A\underbrace{(Bx)}_{\in\mathbb{K}^n}||_X \leq \sup_{||x||_X=1} ||A|| \cdot ||Bx||_X$$
$$= ||A|| \sup_{||x||_X=1} ||Bx||_X = ||A|| \cdot ||B||$$

Nein, $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$ gilt nicht für alle Normen.
Gegenbeispiel:

$$||A||_\infty := \max_{i,j \in \{1,\dots,n\}} |A_{i,j}| \qquad A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow A \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$||A \cdot A||_\infty = 8 > 4 = 2 \cdot 2 = ||A||_\infty \cdot ||A||_\infty$$

$\square$