ALG Ü8

166) zz: Für die eulersche φ-Funktion und $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $n = \sum_{t|n} \varphi(t)$

$$\varphi(n) := |\{k \in \mathbb{N} : 0 \leq k < n, \, ggT(k,n) = 1\}|$$

Für die zyklische Gruppe $C_t = \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ gibt es $\varphi(t)$ Erzeuger der ganzen Gruppe. Das folgt aus Proposition 3.2.4.10 ($g \in G$ mit $ord(g) < \infty$ $\Rightarrow ord(g^k) = \frac{ord(g)}{ggT(ord(g),k)}$)

$1 \in C_t$, $ord(1) = t < \infty \Rightarrow ord(k \cdot 1) = \frac{ord(1)}{ggT(ord(1),k)} = \frac{t}{ggT(t,k)}$

Für $k \in \{0, \ldots, t-1\}$ gilt

1\. Fall $ggT(t,k) = 1$: $ord(k \cdot 1) = t \Rightarrow \langle k \cdot 1 \rangle = C_t$

2\. Fall $ggT(t,k) \neq 1$: $ord(k \cdot 1) \neq t \Rightarrow \langle k \cdot 1 \rangle \subsetneq C_t$

$\Rightarrow \exists \ \varphi(t)$ verschiedene Erzeuger von C_t

Aus Satz 3.2.4.8. folgt, dass jede Untergruppe $C_x \cong \langle t \cdot 1 \rangle \leq C_n$ von einem Teiler t von n erzeugt wird.

Für jeden Teiler t von n gibt es eine Untergruppe U mit $ord(U) = t$, nämlich $U = \langle \frac{n}{k} \cdot 1 \rangle$ mit $k \in \mathbb{Z} : k \cdot t = n$ (existiert da t Teiler von n).

Da $U \cong C_t$ gibt es nach oben $\varphi(t)$ Erzeuger von U.

Da für alle $t \in \{0, \ldots, n-1\}$: $\langle t \cdot 1 \rangle$ eine Untergruppe erzeugt muss die Summe aller Erzeuger aller Untergruppen von C_n gleich n sein.

$\Rightarrow \sum_{t|n} \varphi(t) = n$ $\square$