ALG Ü10

365) Gradsatz $K \leq E \leq L$ ... Körper zz: $[L:K] = [L:E]\cdot[E:K]$

Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine Basis von E über K und $(b_j)_{j\in J}$ eine Basis von L über E.

zz: $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ ... Basis von L über K

Sei $l \in L$ bel. $\Rightarrow \exists (y_j)_{j\in J}$ in E mit $l = \sum_{j\in J} y_j b_j$, da $(b_j)_{j\in J}$ Basis.

$\forall j\in J \ \exists (x_i)_{i\in I}$ in K mit $y_j = \sum_{i\in I} x_i a_i$, da $(a_i)_{i\in I}$ Basis von E über K.

$$\Rightarrow l = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} x_i a_i\Big) b_j = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} x_i a_i b_j\Big) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i a_i b_j$$

$\Rightarrow (a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ erzeugt ganz L

Sei $(z_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ in K mit $\sum_{(i,j)\in I\times J} z_{i,j}\cdot a_i b_j = 0$ bel.

$0 = \sum_{(i,j)\in I\times J} z_{i,j}\cdot a_i\cdot b_j = \sum_{j\in J}\underbrace{\Big(\sum_{i\in I} z_{i,j}\, a_i\Big)}_{\in E} b_j$, da $(b_j)_{j\in J}$ eine Basis ist muss

$\forall j\in J: \sum_{i\in I} \underbrace{z_{i,j}}_{\in K} a_i = 0$ gelten, da auch $(a_i)_{i\in I}$ eine Basis ist muss

$\forall j\in J\ \forall i\in I: z_{i,j} = 0$ gelten. $\Rightarrow (a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ ist linear unabhängig.

$\Rightarrow (a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ ist eine Basis von L über K

$\Rightarrow [L:E]\cdot[E:K] = \dim((b_j)_{j\in J})\cdot\dim((a_i)_{i\in I}) = \dim((a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}) = [L:K]$

$\square$