ALG Ü7

188) (1) K...Körper R...Unterring mit 1 von K $\quad K' := \left\{ \frac{p}{q} \mid p,q \in R, q \neq 0 \right\}$

zz: K'...Unterkörper von K

$K' \subseteq K$, da $p,q \in R, q \neq 0 \Rightarrow p,q \in K \Rightarrow q^{-1} \in K \Rightarrow p \cdot q^{-1} = \frac{p}{q} \in K$.

R ist kommutativ, da K kommutativ ist. Da $R \subseteq K$ existieren für $p \in R\setminus\{0\}$ $p^{-1} \in K$.

$p,q,r,s \in R$, $q \neq 0 \neq s$ bel. $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \underset{\text{in } K}{=} \frac{ps+rq}{qs}$ $\quad ps+rq \in R$, $qs \in R \subseteq K \Rightarrow qs \neq 0$

$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} \underset{\text{in } K}{=} \frac{pr}{qs}$ $\quad pr \in R$, $qs \in R\setminus\{0\}$ $\Rightarrow K'$...abgeschlossen bzgl. $+$ und $\cdot$

$0 = \frac{0}{1} \in K'$ $\quad 1 = \frac{1}{1} \in K'$ $\quad \Rightarrow 0,1 \in K'$

$\frac{p}{q} + \left(\frac{-p}{q}\right) = \frac{pq-pq}{q^2} = \frac{p-p}{q} = \frac{0}{q} = 0 \in K \Rightarrow -\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{-p}{q}$

$\frac{p}{q} \neq 0 \in K \Rightarrow p \neq 0$ $\quad \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{pq}{pq} = \frac{1}{1} = 1 \in K \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$ $\Rightarrow$ abgeschlossen bzgl $-$ und $^{-1}$

$\Rightarrow K'$... Unterkörper von K

(2) zz: $\forall K''$... Unterkörper von K mit $R \subseteq K''$: $K' \subseteq K''$

Sei $p,q \in R$, $q \neq 0$ bel. $\frac{p}{q} \in K'$. $\quad p,q \in K''$, da $R \subseteq K''$ $\Rightarrow q^{-1} \in K''$, da K'' Körper und $q \neq 0$. $\Rightarrow p \cdot q^{-1} \in K''$, da K'' abgeschlossen bzgl. $\cdot$ $\Rightarrow \frac{p}{q} \in K''$ $\Rightarrow K' \subseteq K''$

(3) K...Quotientenkörper von R $\Longleftrightarrow$ $K = K'$

($\Leftarrow$) K...kommutativer Ring mit 1: klar

$\iota: R \to K$ ... isomorphe Einbettung von R als Ring mit 1 nach K: $\iota(r) = \frac{r}{1} \in K' = K$

$\forall r \in R\setminus\{0\}$: $\iota(r)^{-1} \in K$ $\quad \iota(r)^{-1} = \left(\frac{r}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{r} \in K' = K$

Sei Q'...kommutativer Ring mit 1 ; $\iota': R \to Q'$; $\forall r \in R\setminus\{0\}: (\iota'(r))^{-1}$ existiert

$\varphi \circ \iota(r) = \varphi\left(\frac{r}{1}\right) := \iota'(r)$ $\quad \varphi\left(\frac{q}{q}\right) := \iota'(q)\,\iota'(q)^{-1}$

$\varphi\left(\frac{a}{b}\right) + \varphi\left(\frac{c}{d}\right) = \iota'(a)\iota'(b)^{-1} + \iota'(c)\,\iota'(a)^{-1}$

$\varphi\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \varphi\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = \iota'(ad+bc)\,\iota'(bd)^{-1} = (\iota'(a)\iota'(d) + \iota'(b)\iota'(c))(\iota'(d)^{-1}\iota'(b)^{-1})$

$= \iota'(a)\,\iota'(b)^{-1} + \iota'(c)\,\iota'(d)^{-1}$

$\varphi\left(\frac{a}{b}\right)\varphi\left(\frac{c}{d}\right) = \iota'(a)\,\iota'(b)^{-1}\,\iota'(c)\,\iota'(d)^{-1} = \iota'(ac)\,\iota'(bd)^{-1} = \varphi\left(\frac{ac}{bd}\right)$

$\varphi\left(-\frac{a}{b}\right) = \iota'(-a)\,\iota'(b)^{-1} = -\iota'(a)\,\iota'(b)^{-1} = -\varphi\left(\frac{a}{b}\right)$; $\varphi\left(\frac{a}{b}^{-1}\right) = \iota'(b)\,\iota'(a)^{-1} = \varphi\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$

Sei $\frac{a}{b} \in K'$ mit $\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ bel. $\Rightarrow \varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \iota'(a)\;\iota'(b)^{-1}$, da $b \neq 0 \Rightarrow \iota'(b) \neq 0$

$\Rightarrow \iota'(a)\,\iota'(b)^{-1} \Rightarrow \iota'(a) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 0$ $\quad \Rightarrow \varphi$... Isomorphismus

ALG Ü7

188)... (3) $\Longleftarrow$ K... Quotientenkörper von R bzgl. K

- $K' \subseteq K$ klar, da $\forall k' \in K' : \exists p, q \in R; q \neq 0 : k' = \frac{p}{q}$

  Da $R \subseteq K \Rightarrow p, q \in K \Rightarrow \frac{p}{q} \in K$

  $K \subseteq K'$: Sei $k \in K$ bel.

  Da K... Quotientenkörper: $K = R \setminus \{0\}$