DGL Ü10

1) a) $x' = x\sin(t)$ $\quad \frac{dx}{dt} = x\cdot\sin(t) \Leftrightarrow \int\frac{1}{x}dx = \int\sin(t)\,dt \Leftrightarrow \ln(x) = -\cos(t)+c$

$\Rightarrow x(t) = e^{-\cos(t)}\cdot d \quad x(0) = d\cdot e^{-1} = a \Rightarrow d = e\cdot a \quad \Rightarrow x(t) = e^{a-\cos(t)}, a\neq 0$

$\|x(t,a)-x(t,0)\| = \|e^{a-\cos(t)} - 0\| = \|e^{a}\frac{1}{e^{\cos(t)}}\| \leq e^{a}\cdot e = e^{a+1}$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\quad \delta := \ln(\varepsilon)-1$. Sei $|a|\leq\delta$ bel.

$\Rightarrow \|x(t,a)-x(t,0)\| \leq e^{a+1} \leq e^{\delta+1} = e^{\ln(\varepsilon)-1+1} = \varepsilon \quad \Rightarrow$ stabil

$\|x(t,a)-x(t,0)\| \overset{t\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow$ nicht asymptotisch stabil

b) $x' = \sin(x) \quad df(x) = \cos(x) \quad y' = df(\bar{x})y = \cos(0)y = 1y$

$\Rightarrow Re(\lambda) = Re(1) > 0 \quad \Rightarrow$ instabil

c) $x' = -\sin(x) \quad df(x) = -\cos(x) \quad y' = df(\bar{x})y = -\cos(0)y = -1y$

$\Rightarrow Re(\lambda) = Re(-1) < 0 \quad \Rightarrow$ asymptotisch stabil

d) $x' = -t\sin(x) \quad \frac{dx}{dt} = -t\sin(x) \Leftrightarrow \int\frac{1}{\sin(x)}dx = \int -t\,dt \Leftrightarrow \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = -\frac{t^2}{2}+c$

$\Rightarrow x(t) = 2\arctan\left(e^{-\frac{t^2}{2}+c}\right) \quad x(0) = 2\arctan(e^{c}) = a \Rightarrow c = \ln\left(\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right), a\neq 0$

$\Rightarrow x(t,a) = 2\arctan\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right), a\neq 0; \quad x(t,a) = 0,\ a = 0$

$\|x(t,a)-x(t,0)\| = \|2\arctan(\underbrace{e^{-\frac{t^2}{2}}}_{\overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0}\tan(\frac{a}{2}))\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow$ asymptotisch stabil

e) $x' = -x^2\sin(t) \quad \frac{dx}{dt} = -x^2\sin(t) \Leftrightarrow \int -\frac{1}{x^2}dx = \int\sin(t)dt \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -\cos(t)+c$

$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{c-\cos(t)} \quad x(0) = \frac{1}{c-1} = a \Rightarrow c = \frac{1}{a}+1 \quad \Rightarrow x(t,a) = \frac{1}{\frac{1}{a}+1-\cos(t)}, a\neq 0$

$\|x(t,a)-x(t,0)\| = \|\frac{1}{\frac{1}{a}+\underbrace{1-\cos(t)}_{\in[0,2]}} - 0\| \leq \left|\frac{1}{\frac{1}{a}}\right| = |a|$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\quad \delta := \frac{\varepsilon}{2} \quad$ Sei $|a|\leq\delta$ bel.

$\Rightarrow \|x(t,a)-x(t,0)\| \leq |a| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \Rightarrow$ stabil

$\|x(t,a)-x(t,0)\| = \|\frac{1}{\frac{1}{a}+1-\cos(t)}\| \overset{t\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow$ nicht asymptotisch stabil

DGL Ü10

4) $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} x \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ t \in [0,\pi]$

$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \alpha^2 = 0 \iff \lambda = \pm i\alpha$

$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\alpha^2 x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} \pm i\alpha x \\ \pm i\alpha y \end{matrix} \quad \Rightarrow y = \pm i\alpha x;\ -\alpha^2 x = \pm i\alpha y = \mp \alpha^2 x$

$\Rightarrow y = 1; \quad 1 = \pm i\alpha x \quad \Rightarrow x = \pm i \frac{1}{\alpha}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha} & -\frac{i}{\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\alpha & 0 \\ 0 & i\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha} & -\frac{i}{\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha} & -\frac{i}{\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha} e^{-i\alpha t} & -\frac{i}{\alpha} e^{i\alpha t} \\ e^{-i\alpha t} & e^{i\alpha t} \end{pmatrix}$

Satz 6.1. $Y(t)$ ... FM von $x' = Ax$

(1) RWP ist $\forall b: I \to \mathbb{R}^n\ \forall \rho \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar

(2) $B := R_1 Y(t_1) + R_2 Y(t_2)$ ist regulär

(3) homogene RWP hat nur triviale Lösung $x(t) = 0$

$B := R_1 Y(t_1) + R_2 Y(t_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha} & -\frac{i}{\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha} e^{-i\alpha\pi} & -\frac{i}{\alpha} e^{i\alpha\pi} \\ e^{-i\alpha\pi} & e^{i\alpha\pi} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha} & -\frac{i}{\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{i}{\alpha} e^{-i\alpha\pi} & \frac{i}{\alpha} e^{i\alpha\pi} \\ -e^{i\alpha\pi} & -e^{i\alpha\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha}(1 - e^{i\alpha\pi}) & \frac{i}{\alpha}(-1 + e^{i\alpha\pi}) \\ 1 - e^{i\alpha\pi} & 1 - e^{i\alpha\pi} \end{pmatrix}$

$\det(B) = \frac{i}{\alpha}(1 - e^{i\alpha\pi})^2 + \frac{i}{\alpha}(1 - e^{i\alpha\pi})^2 = 2\frac{i}{\alpha}(1 - e^{i\alpha\pi})^2 = 0$

$\iff (1 - e^{i\alpha\pi}) = 0 \iff i\alpha\pi = \ln(1) = 0 \iff \alpha = 0$

$\Rightarrow$ RWP ist eindeutig lösbar wenn $\alpha \neq 0$

für $\alpha = 0$ $\qquad x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \qquad \begin{matrix} x_1' = x_2 \\ x_2' = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow x_2 = c \in \mathbb{R} \quad x_1 = ct + d,\ c, d \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\pi + d \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c\pi - d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c\pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow x_2 = 0,\ x_1 = d \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

DGL Ü10

5) a) $u'' + u = 0 \qquad u(0) = 0 = u(\pi)$

$x_1 = u, \quad x_1' = x_2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$x_2 = u', \quad x_2' = -x_1$

$\Rightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ie^{-it} & -ie^{it} \\ e^{-it} & e^{it} \end{pmatrix}$

$Re \begin{pmatrix} ie^{-it} \\ e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \qquad Im \begin{pmatrix} ie^{-it} \\ e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow u(t) = c \cdot \sin(t) + d \cdot \cos(t) \quad , c, d \in \mathbb{R}$

$u(0) = d = 0 \qquad u(\pi) = -d = 0 \qquad \Rightarrow u(t) = c \cdot \sin(t) \quad c \in \mathbb{R}$

b) $u'' - u = 1 \qquad u(0) = 0 = u'(0)$

$x_1 = u, \quad x_1' = x_2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_2 = u', \quad x_2' = 1 + x_1$

$\Rightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{t} \\ e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow u(t) = -ce^{-t} + de^{t} \quad c, d \in \mathbb{R} \qquad u'(t) = ce^{-t} + de^{t}$

$u(0) = -c + d = 0 \qquad u'(0) = c + d = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = d = 0$

$\Rightarrow u(t) = 0$

DGL Ü10

6) $x' = f(x)$ $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $f(0) = 0 = f(1)$ $f(x) > 0$, $x \in (0,1)$

ges: ω-Limes $\omega(x_0)$ für $x_0 \in [0,1]$

$\omega(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : \exists t_k \to \infty, \text{ mit } \lim_{k\to\infty} x(t_k, x_0) = x\}$

Fall $x_0 = 0$ $\Rightarrow$ $x(t,0)$ ist Ruhelage, da $f(x_0) = f(0) = 0$

$\Rightarrow \omega(x_0) = \{0\}$

Fall $x_0 \in (0,1)$ $\Rightarrow$ $x(t,x_0)$ ist streng monoton $\nearrow$ bis zu t

mit $x(t,x_0) \geq 1$

Falls $\exists t \in \mathbb{R}^+ : x(t,x_0) = 1$ $\Rightarrow$ ab t Ruhelage, da $f(x) = f(1) = 0$

$\Rightarrow \omega(x_0) = \{1\}$

Falls $\forall t \in \mathbb{R}^+ : x(t,x_0) < 1$

Sei $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ mit $\lim_{n\to\infty} x(t_n, x_0) = y < 1$ bel.

$\Rightarrow$ Nach Hinweis y ist Ruhelage, aber $f(y) > 0$ ↯

$\Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}^+ : x(t,x_0) \geq 1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ mit $t_n > t$ gilt $x(t_n, x_0) = 1$, da ab t gilt $f(x(t,x_0)) = f(1) = 0$ also ab t Ruhelage

$\Rightarrow \omega(x_0) = \{1\}$

Fall $x_0 = 1$ $\Rightarrow$ $x(t,1)$ ist Ruhelage, da $f(1) = 0$

$\Rightarrow \omega(x_0) = \{1\}$

Insgesamt also $\omega(0) = \{0\}$ sonst $\omega(x_0) = \{1\}$ $\forall x_0 \in (0,1]$

$\square$

DGL Ü10

7) $x' = f(x) \quad x(t_0) = x_0 \qquad \gamma_+(x_0) = \{x(t, x_0), t \geq 0\}$ ... beschränkt

zz: $\omega(x_0)$ ist abgeschlossen

Behauptung: $\omega(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty, x(t_k, x_0) \xrightarrow{k\to\infty} x\}$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{R}} \overline{\{x(t, x_0) \mid t \geq n\}}$$

Falls Behauptung wahr $\Rightarrow$ $\omega(x_0)$ ist als Durchschnitt abgeschlossener Mengen, selbst abgeschlossen.

$\subseteq$ Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\exists t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, $x(t_k, x_0) \xrightarrow{k\to\infty} x$ bel.

Sei $n \in \mathbb{R}$ bel. zz: $\exists$ Folge y_ℓ in $\{x(t, x_0) \mid t \geq n\}$ mit $y_\ell \to x$

$\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : t_k \geq n$

$\Rightarrow (x(t_{k_0+k}, x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ erfüllt $\forall k \in \mathbb{N}\ t_{k_0+k} \geq n$ und

$\lim_{k\to\infty} x(t_{k_0+k}, x_0) = \lim_{k\to\infty} x(t_k, x_0) = x$

$\Rightarrow x \in \overline{\{x(t, x_0) \mid t \geq n\}} \quad \forall n \in \mathbb{R}$ also auch im Durchschnitt

$\supseteq$ Sei $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{R}} \overline{\{x(t, x_0) \mid t \geq n\}}$ bel.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{R}\ \exists$ Folge y_k in $\{x(t, x_0) \mid t \geq n\}$ mit $y_k \to x$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \exists y_\ell$ in $\{x(t, x_0) \mid t \geq k\}$ mit $y_\ell \to x$

$\Rightarrow \exists t_k$ mit $t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ und $x(t_k, x_0) \xrightarrow{k\to\infty} x$

$\square$