ALG Ü4

2006) a) $(H,\cdot)$ ... Halbgruppe

ges: S ... Menge und $\iota: H \to S^S$ ... isomorphe Einbettung

$S = H \cup \{e\}$ wobei e das neutrale Element ist also $\forall h \in H: eh := h = he$

$\iota(h) := f_h: S \to S \quad , s \mapsto h\cdot s$

ι ist ein Homomorphismus, da $\forall h,g \in H$ gilt

$\iota(h\cdot g) = f_{h\cdot g} = s \mapsto (h\cdot g)\cdot s = s \mapsto h\cdot(g\cdot s) = s \mapsto h\cdot f_g(s) = s \mapsto f_h \circ f_g(s)$

$= f_h \circ f_g = \iota(h) \circ \iota(g)$

ι ist injektiv, da $\forall h,g \in H$ mit $\iota(g) = \iota(h)$ bel. gilt

$\forall s \in S = H \cup \{e\}: g\cdot s = f_g(s) = \iota(g)(s) = \iota(h)(s) = f_h(s) = h\cdot s$

$\Rightarrow g = g\cdot e = h \cdot e = h$ (für die Wahl $s = e$)

$\Rightarrow \iota: H \to \iota(H) \subseteq S^S$ ist ein Isomorphismus

b) ges: H ... Halbgruppe sodass $\varphi: H \to H^H$, $a \mapsto f_a$ wobei $f_a(x) = ax$ ist nicht injektiv ist.

$H = \mathbb{Z}$ mit Operation $(x,y) \mapsto |x\cdot y|$

(i) $(\mathbb{Z}, (x,y) \mapsto |x\cdot y|)$ ist eine Halbgruppe, da unter der Operation abgeschlossen und assoziativ $||x\cdot y|\cdot z| = |x\cdot y\cdot z| = |x\cdot|y\cdot z||$

(ii) φ ist nicht injektiv, da

$\varphi(1) = a \mapsto |1\cdot x| = |x| \qquad \varphi(-1) = a \mapsto |-1\cdot x| = |x|$