ALG Ü10

357!) zz: $K$... Körper $\qquad f \in K[x] \qquad grad(f) \in \{2,3\}$

$f$... irreduzibel $\Longleftrightarrow$ $f$ hat keine Nullstelle in $K$

$(\Rightarrow)$ zz: $f$ hat Nullstelle $x_0$ in $K$ $\Rightarrow f$... reduzibel

$$f(x_0)=0 \overset{\text{Prop 5.3.3.1}}{\Longleftrightarrow} (x-x_0) \mid f(x)$$

$$\Rightarrow \exists g \in K[x]: f(x) = (x-x_0)\cdot g(x) \quad \Rightarrow f\text{... reduzibel}$$

grad$(g) \in \{1,2\}$

$(\Leftarrow)$ ① grad$(f)=2$

zz: $f$...reduzibel $\Rightarrow$ $f$ hat eine Nullstelle in $K$

$f$...reduzibel $\Rightarrow \exists\, q,r \in K[x]: f = q\cdot r \wedge \text{grad}(q), \text{grad}(r) = 1$

$\Rightarrow q = b_1 x + b_0 = b_1\left(x + \frac{b_0}{b_1}\right) \qquad b_1 \neq 0$, da grad$(q)=1$

$\overset{\text{Prop 5.3.3.1}}{\Longrightarrow} -\frac{b_0}{b_1}$ ist Nullstelle von $q$ also auch von $f$ und liegt in $K$

② grad$(f) = 3$

$f$...reduzibel $\Rightarrow \exists\, q,r \in K[x]: f = q\cdot r \wedge \text{grad}(q) = 1, \text{grad}(r) = 2$

$\Rightarrow$ wie oben $q$ hat Nullstelle $x_0$ in $K$ $\Rightarrow f(x_0) = 0$

ges: alle irreduziblen Polynome vom Grad höchstens 4 über $\mathbb{Z}_2$.

Für die $(\Rightarrow)$ Richtung haben wir nicht verwendet, dass der grad 2 oder 3 sein muss.

Alle Polynome in denen nur $x, x^2, x^3$ und $x^4$ vorkommen haben die Nullstelle 0 und alle mit gerade vielen Summanden die Nullstelle 1.

grad 0: $\quad$ 0... reduzibel $\quad$ 1... Einheit

grad 1: $\quad$ $x$... Einheit $\quad$ $x+1$... irreduzibel

grad 2+3: nach oben sind irreduzibel: $x^2+x+1$, $x^3+x+1$, $x^3+x^2+1$,

grad 4: Polynome ohne Nullstellen sind: $\{x^4+x+1,\ x^4+x^2+1,\ x^4+x^3+1,\ x^4+x^3+x^2+x+1\} = M$

$\forall m \in M: x \nmid m$; $(x+1)(x^3+x+1) = x^4+x^3+x^2+1 \notin M$; $(x+1)(x^3+x^2+1) = x^4+x^2+x+1 \notin M$

$(x^2+x+1)^2 = x^4+x^2+1 \in M \quad \Rightarrow x^4+x+1,\ x^4+x^3+1,\ x^4+x^3+x^2+x+1$ ... irreduzibel