4 102

1. $E := \{\{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{0,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$
   gesucht: Algebra $\mathcal{A}$ auf $A := \{0,1,2,3\}$, sodass $\forall M \in E : M$ ist Unteralgebra von A

$$\mathcal{A} = (A, w_1, w_2, w_3) \text{ (Typ (0,2,2))}$$

$$\begin{array}{lll} w_1 : A^0 \to A & w_2 : A^3 \to A & w_3 : A^3 \to A \\ () \mapsto 0 & (a,b,c) \mapsto \begin{cases} 2 & \text{, falls } \{a,b,c\} = \{0,1,3\} \\ a & \text{, sonst} \end{cases} & (a,b,c) \mapsto \begin{cases} 3 & \text{, falls } \{a,b,c\} = \{0,1,2\} \\ a & \text{, sonst} \end{cases} \end{array}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \begin{array}{rlrlrlrl} \emptyset, & w_1! & \{0\}, & & \{1\}, & w_1! & \{2\}, & w_1! \\ \{3\}, & w_1! & \{0,1\}, & & \{0,2\}, & & \{0,3\}, & \\ \{1,2\}, & w_1! & \{1,3\}, & w_1! & \{2,3\}, & w_1! & \{0,1,2\}, & w_3! \\ \{0,1,3\}, & w_2! & \{0,2,3\}, & & \{1,2,3\}, & w_1! & \{0,1,2,3\} & \end{array} \}$$

   Wobei $w_i!$ bedeutet, dass die Menge nicht unter w_i abgeschlossen ist.

2. Ist 1. für beliebiges $E \subseteq \mathcal{P}(A)$ lösbar?
   Nein, z.B. für $E = \emptyset$ gibt es keine Algebra $\mathcal{A} = (A, (w_i)_{i \in I})$ ohne Unteralgebren, da A immer eine Unteralgebra von sich selbst ist!

3. **gesucht:** Kriterium / Algorithmus um entscheiden zu können ob für gegebenes, endliches A und $E \subseteq \mathcal{P}(A)$ eine Algebra $\mathcal{A} = (A, w_1, w_2, ...)$ existiert mit $Sub(\mathcal{A}) = E$.

`Algorithmus (A ... Menge, E ... gewünschte Unteralgebren)`

(1) `for` $(P \in \mathcal{P}(A) \setminus E)$ `{`

(2) $\quad C := \bigcap_{B \in E, P \subseteq B} B$`;`

(3) $\quad$ `if` $(C \setminus P = \emptyset)$ `{`

(4) $\quad\quad$ `raise Error("nicht lösbar");`

(5) $\quad$ `} else {`

(6) $\quad\quad w_P : A^{|P|} \to A, (x_1, ..., x_{|P|}) \mapsto \begin{cases} y \in C \setminus P & \texttt{, falls } \{x_1, ..., x_{|P|}\} = P \\ x_1 & \texttt{, sonst} \end{cases}$

(7) $\quad\quad$ `füge` w_P `zur Algebra hinzu;`

(8) $\quad$ `}`

(9) `}`

Jede Operation w erreicht (für unsere Zwecke), dass wenn $x_1, ..., x_n$ in einer Unteralgbra U liegen, dass dann auch $y = w(x_1, ..., x_n) \in U$ sein muss.

Damit ein $P \in \mathcal{P}(A) \setminus E$ nicht in $Sub(\mathcal{A})$ liegt muss also ein w_P garantieren, dass wenn $P \subseteq U \implies \exists y \notin P : y \in U$. Natürlich muss das y so gewählt werden, dass $\forall B \in E : P \subset B \implies y \in B$, da sonst $B \notin Sub(\mathcal{A})$. $\implies y \in \left(\bigcap_{B \in E, P \subseteq B} B\right)$.

Falls aber $\left(\bigcap_{B \in E, P \subseteq B} B\right) = \emptyset$ kann nach der Überlegung von oben keine Lösung existieren. Sonst garantiert die Operation wie in (6) beschrieben, dass $P \notin Sub(\mathcal{A})$ für alle $P \notin E$ (wegen der Schleife in (1)).

Für $Q \in E$ hat keine der Funktionen $(w_P)_{P \in \mathcal{P}(A) \setminus E}$ einen Effekt, da immer entweder gilt

- $P \subseteq Q$ und somit

$$\forall q_1, ..., q_{|P|} \in Q : w_P(q_1, ..., q_{|P|}) = \begin{cases} y & \text{, falls } \{q_1, ..., q_{|P|}\} = P \\ q_1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

  Da $Q \in E$ und $P \subseteq Q$ gilt nach Konstruktion, dass $y \in Q$ und $q_1 \in Q$ sowieso.

- $P \setminus Q \neq \emptyset$ und somit $\exists p \in P \setminus Q$ damit kann nicht der Fall $\{q1, ..., q_{|P|}\} = P$ eintreten. Also gilt

$$\forall q_1, ..., q_{|P|} \in Q : w_P(q_1, ..., q_{|P|}) = q_1 \in Q.$$

In beiden Fällen gilt also, dass Q bezüglich allen $(w_P)_{P \in \mathcal{P}(A) \setminus E}$ abgeschlossen ist.