ALG Ü6

2.14) Geben Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen an, deren Ordnung ein Teiler von 75 ist. $(1,3,5,15,25,75 \mid 75)$

$\{C_1, C_3, C_5, C_3 \times C_5, C_5 \times C_5, C_{25}, C_3 \times C_5 \times C_5, C_3 \times C_{25}\}$

Alle Elemente sind bekanntermaßen abelsche Gruppen, deren Ordnung ein Teiler von 75 ist (nämlich 1,3,5,15,25 bzw. 75). Da die Ordnungen verschiedener Elemente unterschiedlich sind, bzw. wegen Bsp 2.16 sind alle jeweils nicht isomorph.
Wir müssen überprüfen ob jede Gruppe, deren Ordnung ein Teiler von 75 ist, isomorph zu einem der Elemente der Liste ist.
Sei G eine abelsche Gruppe mit Ordnung $o \in \{1,3,5,15,25,75\}$.
$\Rightarrow G$ ... endlich $\Longrightarrow$ (aus Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen) $G \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{n=1}^{\infty} C_{p^n}^{e_{p,n}}$
$\Rightarrow |G| = \left| \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \bigoplus_{n=1}^{\infty} C_{p^n}^{e_{p,n}} \right| = \prod_{p \in \mathbb{P}} \prod_{n=1}^{\infty} |C_{p^n}^{e_{p,n}}| = \prod_{p \in \mathbb{P}} \prod_{n=1}^{\infty} (p^n)^{e_{p,n}}$
Für $|G| \in \{1,3,5,15\}$ gibt es eine eindeutige Darstellung als Produkt.
$1 = (2^1)^0 \cdot (2^2)^0 \cdot (2^3)^0 \cdot \ldots (3^1)^0 \cdot (3^2)^0 \cdot (3^3)^0 \cdot \ldots$ " $=$ leeres Produkt" $\Rightarrow G \cong C_1$
$3 = (3^1)^1 \Rightarrow G \cong C_3$ $\quad 5 = (5^1)^1 \Rightarrow G \cong C_5$ $\quad 15 = (3^1)^1 \cdot (5^1)^1 \Rightarrow G \cong C_3 \times C_5$
Für $|G| = 25$ gilt entweder G ... zyklisch und somit $G \cong C_{25}$ oder G ist nicht zyklisch, wird also zumindest von 2 Elementen x, y mit $\langle x \rangle \setminus \langle y \rangle \neq \{0\} \neq \langle y \rangle \setminus \langle x \rangle$ erzeugt
$\Rightarrow \langle x \rangle \leq G$ und $\langle y \rangle \leq G$ und $\mathrm{ord}\langle x \rangle, \mathrm{ord}\langle y \rangle \in \{1,5,25\}$.
$\mathrm{ord}\langle x \rangle = 25$ können wir ausschließen, da sonst x alleine ganz G erzeugt.
$\mathrm{ord}\langle x \rangle = 1 \Rightarrow \langle x \rangle = \{0\} \Rightarrow \langle x \rangle \setminus \langle y \rangle = \{0\}$ ↯ $\Rightarrow \mathrm{ord}\langle x \rangle = 5 = \mathrm{ord}\langle y \rangle$
Da $25 = \mathrm{ord}\, G = \mathrm{ord}\langle x \rangle \cdot \mathrm{ord}\langle y \rangle = 5 \cdot 5$ wird G nur von x, y erzeugt.
$\langle x \rangle \cong C_5 \cong \langle y \rangle \Rightarrow G \cong C_5 \times C_5$
Für $|G| = 75$ ist wieder entweder G zyklisch $\Rightarrow G \cong C_3 \times C_{25}$ oder mit der gleichen Argumentation wie bei $|G| = 25$ gilt für $G \cong C_3 \times U$ mit $\mathrm{ord}\, U = 25$, dass $G \cong C_3 \times C_5 \times C_5$.