ALG Ü1

52) $(P, \leq)$ ... Halbordnung $\forall M \subseteq P$: M hat Infimum

zz: $\forall M \subseteq P$: M hat Supremum

Sei $M \subseteq P$ bel. $S := \{x \in P : x$ ist obere Schranke von $M\} \subseteq P$

$s := \inf S$, dass existiert nach Vorgabe.

Indirekt angenommen $s \notin S$ also s ist keine obere Schranke von M

$\Leftrightarrow \neg(\forall m \in M : m \leq s) \Leftrightarrow \exists m \in M : m \nleq s$

Da $\leq$ reflexiv ist gilt $m \neq s$.

Fallunterscheidung: 1. Fall $m > s$:

$\forall x \in S : s < m \leq x$, da $m \in M$ und x obere Schranke von M

$\lightning$ zu s ist größte untere Schranke von S

2. Fall m, s sind nicht vergleichbar

Da $\forall x \in S : m \leq x$ also m eine untere Schranke von S ist folgt der Widerspruch, dass s nicht die größte untere Schranke sein kann da nicht $m \leq s$ gilt.

$\Rightarrow s \in S$ und dadurch s ist kleinste obere Schranke von M also $s = \sup M$.

$\square$

$(\mathbb{N}, \leq)$ ist kein Gegenbeispiel, da $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ und

$I := \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in \emptyset : x \leq y\} = \mathbb{N}$ ... Menge der unteren Schranken von $\mathbb{N}$

hat kein größtes Element.