ALG Ü12

399 + 400)

400) Geben Sie einen unendlichen Körper K der Charakteristik p an, für den die Abbildung $a \mapsto a^p$ keinen Automorphismus von K definiert.

$K := GF(p)(x)$ hat Charakteristik p $\qquad \varphi: K \to K,\ a \mapsto a^p$

Wir wollen zeigen, dass φ nicht surjektiv ist und somit kein Automorphismus sein kann.

$x \in K \qquad$ Sei $z = \frac{a}{b} \in K$ bel. mit $\varphi(z) = x$

$\Rightarrow x = \varphi(z) = \varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^p}{b^p} \iff x b^p = a^p$

$a = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{grad}(a^p) = np. \qquad b = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \quad \text{grad}(b^p) = mp$

$\Rightarrow \text{grad}(x) + \text{grad}(b^p) = \text{grad}(a^p) \Rightarrow 1 + mp = np \iff 1 = p(n-m)$

Widerspruch zu $p \in \mathbb{P}$ und $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

399) Geben Sie einen unendlichen Körper K der Charakteristik p an, für den die Abbildung $a \mapsto a^p$ einen Automorphismus von K definiert.

Auf jedem Körper K mit char p ist $\varphi: K \to K,\ a \mapsto a^p$ ein Endomorphismus:

$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1,\ \forall a, b \in K: \varphi(ab) = (ab)^p = a^p b^p = \varphi(a)\varphi(b)$ klar

$\forall a, b \in K: \varphi(a+b) = (a+b)^p = \binom{p}{0}a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}b + \ldots + \binom{p}{p-1}ab^{p-1} + \binom{p}{p}b^p$

$= a^p + \underbrace{pa^{p-1}b + \ldots + pab^{p-1}}_{} + b^p = a^p + b^p = \varphi(a) + \varphi(b)$

$\Rightarrow$ Endomorphismus $\qquad$ enthalten alle den Faktor p (= 0 da char p)

(inj) Sei $a \in K$ mit $\varphi(a) = 0$ bel. $\Rightarrow a^p = 0 \Rightarrow a = 0$ da K nullteilerfrei

Def $\tilde{K} := GF(p) \times GF(p^2) \times GF(p^3) \times \ldots \qquad (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (b_i)_{i\in\mathbb{N}} :\iff a_i = b_i$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$

$\sim$ ist eine Kongruenzrelation $\qquad$ Dann ist $K := \tilde{K}/\sim$ ein Körper mit char p.

(surj) Sei $[(a_i)_{i\in\mathbb{N}}]_\sim \in K = \tilde{K}/\sim$ bel. In 397 1. haben wir gezeigt, dass $\varphi_i: GF(p^i) \to GF(p^i),\ a \mapsto a^p$ ein Automorphismus ist also surjektiv.

$\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}\ \exists b_i: \varphi_i(b_i) = b_i^p = a_i \qquad \Rightarrow \varphi(b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (b_i^p)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$