ALG Ü1

5) gegeben: (1) $\forall x: x+0=x$ (2) $0+1=1$ (3) $\forall x,y: (x+y)+1 = x+(y+1)$

a) zz: $\forall y: 0+y=y$

vollständige Induktion $M:=\{y: 0+y=y\}$

$0\in M$, da für $y:=0$ gilt $0+y=0+0 \overset{(1)}{=} 0=y$

M ist unter Nachfolgern abgeschlossen:

(IV) $y\in M$ also $0+y=y$ zz: $y+1\in M$ also $0+(y+1)=y+1$

$0+(y+1) \overset{(3)}{=} (0+y)+1 \overset{(IV)}{=} y+1$

$\Rightarrow M=\mathbb{N}$ also $\forall y: 0+y=y$

b) zz: $\forall x \forall y: x+y=y+x$

* Wir zeigen zuerst $\forall a \forall b: a+(1+b)=(a+1)+b$ durch vollständige Induktion: $S:=\{b \mid \forall a: a+(1+b)=(a+1)+b\}$

$0\in S$, da für $b:=0$ gilt $a+(1+0) \overset{(1)}{=} a+1 \overset{(1)}{=} (a+1)+0$

S ist unter Nachfolgern abgeschlossen:

(IV) $\forall a: a+(1+b)=(a+1)+b$ zz: $a+(1+(b+1))=(a+1)+(b+1)$

Sei a bel. $a+(1+(b+1)) \overset{(3)}{=} a+((1+b)+1) \overset{(3)}{=} (a+(1+b))+1$

$\overset{(IV)}{=} ((a+1)+b)+1 \overset{(3)}{=} (a+1)+(b+1)$

$\Rightarrow S=\mathbb{N}$ also $\forall a \forall b: a+(1+b)=(a+1)+b$

Nun zur Kommutativität durch vollständige Induktion

$T:=\{x \mid (\forall y: x+y=y+x)\}$

$0\in T$, da $0+y \overset{(a)}{=} y \overset{(1)}{=} y+0$

Δ $1\in T$, da $U:=\{y: 1+y=y+1\}$ $0\in U$, da $1+0 \overset{(1)}{=} 1 \overset{(2)}{=} 0+1$

U ist unter Nachfolgern abgeschlossen, da $1+(y+1) \overset{(3)}{=} (1+y)+1 \overset{IV}{=} (y+1)+1$

T ist unter Nachfolgern abgeschlossen, da wenn wir voraussetzen $\forall y: x+y=y+x$ folgt für bel. y, dass $(x+1)+y \overset{*}{=} x+(1+y) \overset{\Delta}{=} x+(y+1) \overset{(3)}{=} (x+y)+1$

$\overset{IV}{=} (y+x)+1 \overset{(3)}{=} y+(x+1)$

$\Rightarrow T=\mathbb{N}$ also $\forall x \forall y: x+y=y+x$ $\square$

ALG Ü1

9) ges: Struktur $(M, 0_m, v_m)$ mit allen Peano-Axiomen außer (3)/(4)/(5)

Def Peano-Axiome (1) $0_m \in M$ (2) $v_m: M \to M$

(3) v_m ... injektiv (4) $\forall n \in M: v_m(n) \neq 0_m$

(5) $\forall T \subseteq M \, (0_m \in T \land (\forall n \in M: n \in T \Rightarrow v_m(n) \in T) \Rightarrow T = M)$

Peano-Axiome ohne (3)

$M := \{0, 1\}$ $0_m := 0$ v_m sodass $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 1$

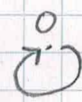
(1) $0 \in M$ ✓ (2) $v_m: M \to M$ ✓ (4) $\forall n \in M: v_m(n) \neq 0$ ✓

$\neg(3) \Leftrightarrow \exists n, k \in M, n \neq k: v_m(n) = v_m(k)$ für $n=0$ $k=1$ ✓

(5) Für alle $T \subseteq M$ mit den in (5) beschriebenen Eigenschaften gilt

$0 \in T$ und $v_m(0) = 1 \in T$ also $T = \{0, 1\} = M$ ✓

Peano-Axiome ohne (4)



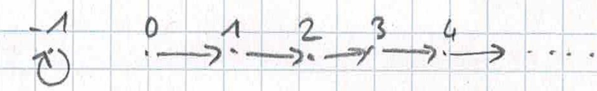
$M := \{0\}$ $0_m := 0$ v_m sodass $0 \mapsto 0$

(1) $0 \in M$ ✓ (2) $v_m: M \to M$ ✓ (3) injektiv, da $\nexists n, k \in M: n \neq k$

$\neg(4) \Leftrightarrow \exists n \in M: v_m(n) = 0$ für $n=0$ gegeben

(5) Alle $T \subseteq M$ mit $0 \in T$ sind schon ganz M

Peano-Axiome ohne (5)



$M := \{-1\} \cup \mathbb{N}$ $0_m := 0$ v_m sodass $-1 \mapsto -1 \land \forall n \in \mathbb{N}: v_m(n) = n+1$

(1) $0 \in M$ ✓ (2) $v_m: M \to M$ ✓ (3) injektiv: $\exists! n \in M: v_m(n) = -1$ nämlich -1

und auf den restlichen Zahlen wissen wir die Injektivität aus der Definition von $\mathbb{N}$

$(v_m(-1) = -1 \notin \mathbb{N})$

(4) $\forall n \in M: v_m(n) \neq 0$, da $-1 \mapsto -1$ und für die

restlichen Zahlen wissen wir das aus der Definition von $\mathbb{N}$

$\neg(5) \Leftrightarrow \exists T \subseteq M \, (0 \in T \land (\forall n \in M: n \in T \Rightarrow v_m(n) \in T) \land T \neq M)$

$T := \mathbb{N}$ $0 \in T$ ✓ $\forall n \in T: v_m(n) \in T$ ✓ aber $T \neq M$ wegen $-1 \in M$

ALG Ü1

37) Fundamentalsatz der Algebra

zz: $\forall p(x)\in \mathbb{C}[x]\setminus\mathbb{C} \quad \exists z\in\mathbb{C}: p(z)=0$

1. Sei $p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{C}[x]\setminus\mathbb{C}$ bel. $(a_k\in\mathbb{C},\ n\geq 1,\ a_n\neq 0)$

Da $\lim_{x\to+\infty}|p(x)| = \lim_{x\to+\infty} |a_0+a_1x+\dots+a_nx^n| = \lim_{x\to+\infty} |x^n|\cdot|\underbrace{a_0x^{-n}}_{\to 0}+\underbrace{a_1x^{-n+1}}_{\to 0}+\underbrace{\dots}_{\to 0}+\underbrace{a_n}_{\to a_n}|$
$= \lim_{x\to+\infty} |a_n|\cdot|\underbrace{x^n}_{\to+\infty}| = +\infty$

existiert ein $R\in\mathbb{R}_{>0}$ mit $\forall z\in\mathbb{C}, |z|\geq R: |p(z)|>|a_0|=|p(0)|$

$D:=\{z\in\mathbb{C}: |z|\leq R\}$ ist beschränkt und abgeschlossen also kompakt.

Aus der Kompaktheit von D und der Stetigkeit von $z\mapsto|p(z)|$
(Polynomfunktionen und Betragsfunktion sind stetig, Zusammensetzung erhält Stetigkeit)
folgt, dass $|p(z)|$ ein Minimum z_0 auf D annimmt.

Da $\forall z\in\mathbb{C}\setminus D: |p(z_0)| \underset{0\in D}{\leq} |p(0)| < |p(z)|$ ist z_0 sogar ein globales Minimum.

2. Für $q(z):=p(z+z_0)$ gilt, dass wenn $w\in\mathbb{C}$ eine Nullstelle von q ist $w-z_0$ eine Nullstelle von p ist. Daher o.B.d.A. $z_0=0$.

Fallunterscheidung: 1. Fall z_0 ist Nullstelle fertig!

2. Fall z_0 ist keine Nullstelle also $p(z_0)\neq 0$

$p(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+a_nz^n \qquad 0\neq p(0)=a_0+a_1\cdot 0+\dots+a_n\cdot 0=a_0$

$q(z)=1+\frac{a_1}{a_0}z+\frac{a_2}{a_0}z^2+\dots+\frac{a_n}{a_0}z^n$ Sei $k\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ der erste Index mit $a_k\neq 0$

$q(z)=1+\frac{a_k}{a_0}z^k+\frac{a_{k+1}}{a_0}z^{k+1}+\dots+\frac{a_n}{a_0}z^n$ (existiert, da sonst $p(z)=a_0\in\mathbb{C}$)

Da $a_0\cdot q(z)=p(z)$ ist jede Nullstelle von $q(z)$ auch eine von $p(z)$, daher o.B.d.A. $a_0=1$ also $p(z)=q(z)$.

Wähle $c\in\mathbb{C}$, sodass $c^k=-\frac{1}{a_k}$ und $\varepsilon>0$, sodass $\frac{1}{\varepsilon} > \sum_{j=k+1}^{n} a_jc^j$. Dann gilt

$p(c\varepsilon)=1+a_kc^k\varepsilon^k+a_{k+1}c^{k+1}\varepsilon^{k+1}+\dots+a_nc^n\varepsilon^n = 1-\varepsilon^k+\sum_{j=k+1}^{n} a_jc^j\varepsilon^j$

und $\frac{1}{\varepsilon}>\sum_{j=k+1}^{n} a_jc^j \iff 1>\sum_{j=k+1}^{n} a_jc^j\varepsilon \iff \varepsilon^k>\sum_{j=k+1}^{n} a_jc^j\varepsilon^{k+1}>\sum_{j=k+1}^{n} a_jc^j\varepsilon^j$

$\Rightarrow -\varepsilon^k+\sum_{j=k+1}^{n} a_jc^j\varepsilon^j<0 \qquad \Rightarrow p(c\varepsilon)<1$ ↯

Widerspruch zu z_0 ist Minimum, da $p(z_0)=p(0)=a_0=1$ □

ALG Ü1

48) Def partielle Ordnung (M, R) mit R reflexiv, transitiv, antisymmetrisch

Def p... kleinstes Element von $M :\Longleftrightarrow p \in M \wedge \forall x \in M: pRx$

ges: partielle Ordnung, die kein kleinstes Element hat

$M := \{0, 1\}$ $\quad 0R0 \quad 1R1$

reflexiv ✓ transitiv ✓ antisymmetrisch ✓ alles durch hinsehen

0 ist nicht kleinstes Element von M, da $0R1$ nicht gilt.

1 ist nicht kleinstes Element von M, da $1R0$ nicht gilt.

$\Rightarrow \nexists$ kleinstes Element von M

Def p... minimales Element von $M :\Longleftrightarrow p \in M \wedge \nexists x \in M: xRp \wedge x \neq p$

ges: partielle Ordnung, die kein minimales Element hat

$M := \mathbb{Z}$ $\quad R = \leq$.

reflexiv ✓ transitiv ✓ antisymmetrisch ✓ alles bereits bekannt

$\forall p \in M: p-1 \, R \, p \wedge (p-1) \neq p$ also $\forall p \in \mathbb{Z}: p-1 < p$

$\Rightarrow \nexists$ minimales Element von M

ALG Ü1

52) $(P, \leq)$ ... Halbordnung $\forall M \subseteq P$: M hat Infimum

zz: $\forall M \subseteq P$: M hat Supremum

Sei $M \subseteq P$ bel. $S := \{x \in P : x$ ist obere Schranke von $M\} \subseteq P$

$s := \inf S$, dass existiert nach Vorgabe.

Indirekt angenommen $s \notin S$ also s ist keine obere Schranke von M

$\Leftrightarrow \neg(\forall m \in M : m \leq s) \Leftrightarrow \exists m \in M : m \nleq s$

Da $\leq$ reflexiv ist gilt $m \neq s$.

Fallunterscheidung: 1. Fall $m > s$:

$\forall x \in S : s < m \leq x$, da $m \in M$ und x obere Schranke von M

↯ zu s ist größte untere Schranke von S

2. Fall m, s sind nicht vergleichbar

Da $\forall x \in S : m \leq x$ also m eine untere Schranke von S ist folgt der Widerspruch, dass s nicht die größte untere Schranke sein kann da nicht $m \leq s$ gilt.

$\Rightarrow s \in S$ und dadurch s ist kleinste obere Schranke von M also $s = \sup M$.

□

$(\mathbb{N}, \leq)$ ist kein Gegenbeispiel, da $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ und

$I := \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in \emptyset : x \leq y\} = \mathbb{N}$ ... Menge der unteren Schranken von $\mathbb{N}$

hat kein größtes Element.

ALG Ü1

2002) $(V, \leq)$ ... Verband v_0 ... minimal in V

zz: v_0 ist kleinstes Element von V $:\Leftrightarrow \forall a \in V: v_0 \leq a$

ww: $\forall M \subseteq V, |M| = 2$: M besitzt inf und sup

$v_0 \in V \wedge \nexists a \in V : a < v_0$ ... v_0 ist minimal

Sei $a \in V$ bel. $M := \{a, v_0\}$

Fallunterscheidung 1. Fall $a = v_0$: da $\leq$ reflexiv ist gilt $v_0 \leq v_0 = a$

2. Fall $a \neq v_0$: $|M| = 2$ Sei $x := \inf M$. x ist nach Definition untere Schranke von M, also $x \leq a \wedge x \leq v_0$. Da aber $\nexists b \in V: b < v_0$ muss $x = v_0$ gelten.

$\Rightarrow v_0 = x \leq a$ also ist v_0 das kleinste Element von V. $\square$