ALG Ü11

370 $p \in \mathbb{P}$ $\quad f(x) = x^3 - p$

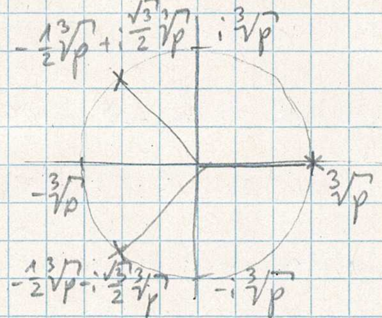
1) ges alle Nullstellen von f in der Form $a+ib$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$ $\quad$ + Skizze

bekannt es gibt 3 Nullstellen: $\sqrt[3]{p} \simeq r_1 = \sqrt[3]{p} \quad \varphi_1 = 0$

$$\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt[3]{p}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \simeq r_2 = \sqrt[3]{p} \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt[3]{p}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \simeq r_3 = \sqrt[3]{p} \quad \varphi_3 = \frac{4\pi}{3}$$

Also Nullstellen $\left\{\sqrt[3]{p},\ -\frac{1}{2}\sqrt[3]{p}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{p},\ -\frac{1}{2}\sqrt[3]{p}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{p}\right\}$



2) zz: $f \in \mathbb{Q}[x]$ ... irreduzibel

In $\mathbb{C}[x]$ ist die Faktorisierung in Linearfaktoren von f die folgende

$$f(x) = (x-\sqrt[3]{p})\left(x-\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

Da $\mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$ und alle drei Faktoren nicht in $\mathbb{Q}[x]$ liegen ist $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel.

3) L ... Körper $\quad \mathbb{Q} \leq L \quad \alpha \in L \quad \alpha^3 = p \quad g(x) = \frac{x^3-p}{x-\alpha} = x^2+\alpha x+\alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]$

zz: $g(x)$ ist irreduzibel

Zunächst der Fall $\alpha = \sqrt[3]{p}$: Da $g(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha}$ hat $g(x)$ genau die Nullstellen x mit $f(x)=0 \wedge x-\alpha \neq 0$ also $x = \sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \alpha\left(-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow g(x) = \left(x-\alpha\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\alpha\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ und da beide Faktoren nicht in $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$ liegen ist $g(x)$ in $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$ irreduzibel $(\mathbb{Q}(\alpha)[x] \subsetneq \mathbb{C}[x])$.

Da $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ alle Nullstellen desgleichen Minimalpolynoms $f(x)$ sind ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p})$, $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ und $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{p}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ isomorph ($h(r)=r\ \forall r \in \mathbb{Q}$ $\ h(\alpha_1)=\alpha_2$) $\Rightarrow$ Da $g_{\alpha_1}(x)$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p})$ irreduzibel ist, ist $g_{\alpha_2}(r)$ auch in $\mathbb{Q}(\alpha_2)$ und $g_{\alpha_3}(r)$ auch in $\mathbb{Q}(\alpha_3)$ irreduzibel.

$\square$