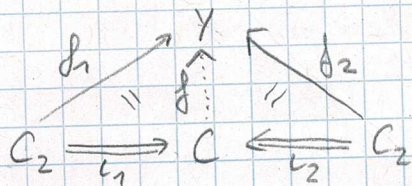


ALG 08

2009)



$K \dots$ Klasse aller Gruppen

$(C, l_1, l_2) \dots$ Koproduct von C_2 mit C_2

also $\forall Y \dots G. \forall f_1, f_2: C_2 \rightarrow Y \exists! f: C \rightarrow Y$

mit $f_1 = f \circ l_1$ und $f_2 = f \circ l_2$

$\mathbb{Z}\mathbb{Z}: |\mathbb{C}| = \infty$ und $C \dots$ nicht kommutativ

Nach Hinweis: $A := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : |x - y| = 1\}$

$G \dots$ Menge der Automorphismen der relationalen Struktur (\mathbb{Z}, A)

$C := (G, \circ, \text{id}, ^{-1}) \dots$ Gruppe

$C_2 := (\{\bar{0}, \bar{1}\}, +, \bar{0}, -) \dots$ Gruppe

$$l_1(\bar{0}) := \text{id}$$

$$l_2(\bar{0}) := \text{id}$$

$$l_1(\bar{1}) := s: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto -x$$

$$l_2(\bar{1}) := v: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto -(x+1)$$

Sei $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $|x - y| = 1$ bel.

$$\Rightarrow |s(x) - s(y)| = |-x - (-y)| = |y - x| = 1 \Rightarrow s \in G$$

$$\Rightarrow |v(x) - v(y)| = |-(x+1) - (-(y+1))| = |y - x + 1 - 1| = 1 \Rightarrow v \in G$$

Da $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ in C_2 muss auch

$$l_1(\bar{1}) \circ l_1(\bar{1}) = l_1(\bar{1} + \bar{1}) = l_1(\bar{0}) = \text{id} \quad \text{für } l_1 \text{ und } l_2 \text{ gelten.}$$

$$(l_1(\bar{1}) \circ l_1(\bar{1}))(x) = l_1(\bar{1})(-x) = x; \quad l_2(\bar{1})(-(x+1)) = -(-(x+1) + 1) = x$$

$\Rightarrow l_1, l_2 \dots$ Hom. von C_2 nach C

Behauptung: $G = \langle s, v \rangle$ jeder Homomorphismus in G wird bereits

durch das Bild der 1 festgelegt. $s \circ v = x \mapsto x+1$; $(s \circ v) \circ \dots \circ (s \circ v) = x \mapsto x+k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$s \circ ((s \circ v) \circ \dots \circ (s \circ v)) = x \mapsto x-k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ also gibt es Verküpfungen von s und v sodass

1 auf jeden bel. Wert abgebildet wird.

$\Rightarrow f$ wird eindeutig durch das Bild der 1 von f_1 und f_2 festgelegt.

also ist C Koproduct von C_2 mit C_2 und bereits bekannt ist $|\mathbb{C}| = \infty$ und

C ist nicht kommutativ. (bis auf Isomorphie eindeutig?)

