DGL Ü1

1) $y'(x) = 3x^2(y(x)+1)$, $x \in \mathbb{R}$

a) $y(x) = \exp(x^3)$ $\quad y'(x) = \exp(x^3) \cdot 3x^2$

$3x^2(y(x)+1) = 3x^2(\exp(x^3)+1)$ X

b) $y(x) = -1$ $\quad y'(x) = 0$

$3x^2(y(x)+1) = 3x^2(-1+1) = 0$ ✓

c) $y(x) = 2\exp(x^3) - 1$ $\quad y'(x) = 2\exp(x^3)3x^2 = 6x^2\exp(x^3)$

$3x^2(y(x)+1) = 3x^2(2\exp(x^3)-1+1) = 6x^2\exp(x^3)$ ✓

d) $y(x) = -1 + \frac{1}{3x^2}$ $\quad y'(x) = \frac{1}{3}(-2)x^{-3} = -\frac{2}{3x^3}$

$3x^2(y(x)+1) = 3x^2(-1+\frac{1}{3x^2}+1) = 0$ X

DGL Ü1

2) a) $y'(t) + y(t)\sin(t) = 1$ $\qquad y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Ordnung, linear, gewöhnlich

b) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = 0$ $\qquad u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

2. Ordnung, linear, partiell

c) $y''(t) = t \sin(y(t))$ $\qquad y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

2. Ordnung, nicht linear, gewöhnlich

d) $y'(t) + A(t)B(t)\,y(t) = f(t)$ $\qquad f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \quad A, B \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2})$

1. Ordnung, System, gewöhnlich

DGL Ü1

4) $u(x,t) = \sin(x \pm ct)$ $\quad w: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ … zweimal stetig diffbar

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$

- Für $u(x,t) = \sin(x+ct)$

  $u_t(x,t) = \cos(x+ct)c \qquad u_{tt}(x,t) = -c^2 \sin(x+ct)$

  $u_x(x,t) = \cos(x+ct) \qquad u_{xx}(x,t) = -\sin(x+ct)$

  $u_{tt} = -c^2 \sin(x+ct) = c^2(-\sin(x+ct)) = c^2 u_{xx}$

- Für $u(x,t) = \sin(x-ct)$

  $u_t = -c \cos(x-ct) \qquad u_{tt} = c^2(-\sin(x-ct))$

  $u_x = \cos(x-ct) \qquad u_{xx} = -\sin(x-ct)$

  $u_{tt} = -c^2 \sin(x-ct) = c^2(-\sin(x-ct)) = c^2 u_{xx}$

- Für $u(x,t) = w(x \pm ct)$

  $u_t(x,t) = w'(x \pm ct)(\pm c) \qquad u_{tt}(x,t) = c^2 w''(x \pm ct)$

  $u_x(x,t) = w'(x \pm ct) \qquad u_{xx}(x,t) = w''(x \pm ct)$

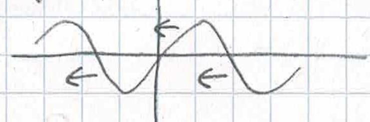
  $u_{tt} = c^2 w''(x \pm ct) = c^2 u_{xx}$

Bedeutung von $c \in \mathbb{R}^+$?

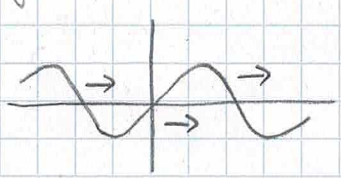
Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen

Welche Richtung bewegen sich die Wellen? $\quad x \in \mathbb{R}$ Ort $\quad t \in \mathbb{R}$ Zeit

Für $c(x,t) = \sin(x+ct)$ bewegen sich die Wellen nach links



für $c(x,t) = \sin(x-ct)$ bewegen sich die Wellen nach rechts.



DGL Ü1

5) a) $x^2 y_{xxx} - 5xy_x + 7y = 0$ 3. Ordnung, linear, gewöhnlich

b) $y' + t^3 y = e^{-t}$ 1. Ordnung, linear, gewöhnlich

c) $y' + ty^3 = e^{-t}$ 1. Ordnung, nicht linear, gewöhnlich

d) $y'' + 9y = 0$ 2. Ordnung, linear, gewöhnlich

$2\cos(3x) + 5\sin(3x)$ $y'' + 9y = -18\cos(3x) - 45\sin(3x) + 18\cos(3x) + 45\sin(3x) = 0$

e) $x'' + \sin x = 0$ 2. Ordnung, nicht-linear, gewöhnlich

f) $x' = f(x,y),\ y' = g(x,y)$ 1. Ordnung, System, gewöhnlich

g) $u_t + 2u_x = 0$ 1. Ordnung, linear, partiell

$\sin(x-2t)$ $u_t + 2u_x = -2\cos(x-2t) + 2\cos(x-2t) = 0$

h) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ 2. Ordnung, linear, partiell

$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} + \frac{-x^2 + 2y^2 - z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} + \frac{-x^2 - y^2 + 2z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} = 0$

i) $u_t + u u_x = 0$ 1. Ordnung, nicht linear, partiell

$\frac{x}{t}$ $u_t + u u_x = -\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t}\frac{1}{t} = 0$

j) $u_t + 6u u_x = u_{xxx}$ 3. Ordnung, nicht linear, partiell

DGL Ü1

6) a) $y''(x) - \sin(x)(y'(x))^2 y(x) = \cosh(x) - (y(x))^2$

$y''(x) = \cosh(x) - (y(x))^2 + \sin(x)(y'(x))^2 y(x)$

$x_1 = y \qquad x_2 = y'$

$x_1' = x_2$

$x_2' = \cosh(x) - x_1^2 + \sin(x)\, x_2^2\, x_1$

b) $y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = 2e^{3x}$

$y'''(x) = 2e^{3x} - 2y''(x) - y'(x)$

$x_1 = y \qquad x_2 = y' \qquad x_3 = y''$

$x_1' = x_2$

$x_2' = x_3$

$x_3' = 2e^{3x} - 2x_3 - x_2$

DGL Ü1

7) $x'(t) = f(x(t))$

a) zz: Wenn x eine Lösung ist, so auch $x(t+a)$ mit $a \in \mathbb{R}$

$u(t) = x(t+a)$

$u'(t) = x'(t+a) = f(x(t+a)) = f(u(t))$

b) $f(x) = x(x-1)$

1. Fall $x = 0$ oder $x = 1$

$\Rightarrow x' = x(x-1) = 0$ Ruhelage

2. Fall $x \neq 0$ und $x \neq 1$

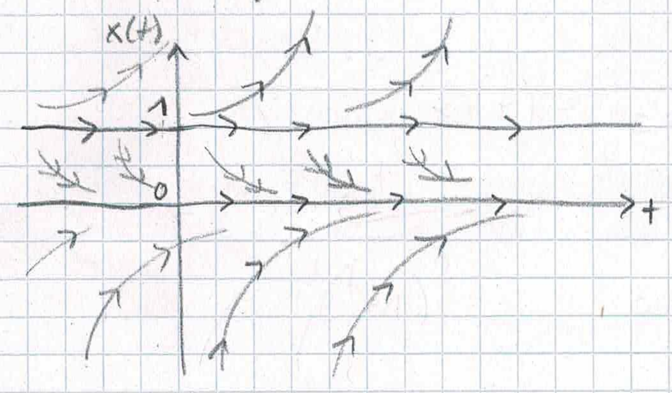
$\Rightarrow x' = x(x-1) \iff \frac{x'}{x(x-1)} = 1$

$\iff \int \frac{x'}{x(x-1)} = \int 1$

$\iff \log(1-x) - \log(x) = t$

$\iff \log\left(\frac{1-x}{x}\right) = t \iff \frac{1}{x} - 1 = \exp(t) \iff \frac{1}{x} = \exp(t) + 1$

$\iff x = \frac{1}{\exp(t)+1}$



$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$