

Algebra Übungsblatt 2

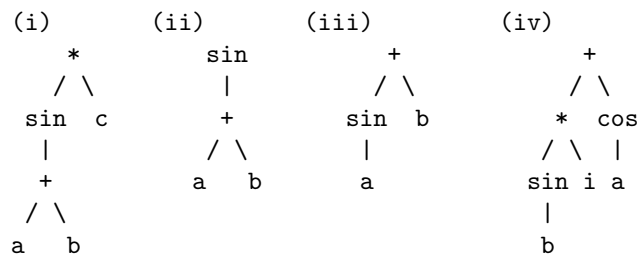
Ida Hönigmann

March 24, 2022

Abstract

1 68

*, + ... 2-stellig cos, sin ... 1-stellig i ... 0-stellig a, b, c ... Variablen



	Präfix	Infix	Postfix
(i)	*sin+abc	sin(a+b)*c	ab+sinc*
(ii)	sin+ab	sin(a+b)	ab+sin
(iii)	+sinab	sin(a)+b	asinb+
(iv)	++sinbicos	sin(b)*i+cos(a)	acosibsin*+

2 72

Definition

$$\begin{aligned}
 C \text{ heißt Klon auf } A : &\iff (i) \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \forall i \in \{1, \dots, n\} : \pi_i^{(n)} \in C \\
 &(ii) f_1, f_2, \dots, f_k : A^n \rightarrow A, g : A^k \rightarrow A \in C \\
 &\implies g \circ_{n,k} (f_1, \dots, f_k) = g(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_k(a_1, \dots, a_n)) \in C
 \end{aligned}$$

gesucht: 3 Klone C auf $A := \{1, \dots, k\}$ mit $A^A \subseteq C$, wobei $k \geq 3$.

•

$$C_a := \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{f : A^n \rightarrow A \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} \exists \tilde{f} \in A^A : f(x_1, \dots, x_n) = \tilde{f}(x_i)\}$$

- Sei $\pi_i^{(n)}$ eine beliebige Projektion. $\pi_i^{(n)} \in C_a$, da für $\tilde{f} = id$ gilt $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$.
- Sei $f_1, \dots, f_k, g \in C_c$ (mit Stelligkeiten wie oben beschrieben) beliebig. Nennen wir $h := g \circ_{n,k} (f_1, \dots, f_k)$.

$$\begin{aligned}
 g(x_1, \dots, x_k) &= \tilde{g}(x_i) \\
 f_1(x_1, \dots, x_n) &= \tilde{f}_1(x_j) \\
 &\vdots \\
 f_k(x_1, \dots, x_n) &= \tilde{f}_k(x_l) \\
 \implies h(x_1, \dots, x_n) &= \tilde{g}(\tilde{f}_i(x_l)) \in C_a
 \end{aligned}$$

- Für $n = 1$ ist $f : A \rightarrow A$ mit $f = \tilde{f}$ beliebig in C_a .

•

$$C_b := \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{f : A^n \rightarrow A\}$$

- Alle Projektionen $\pi_i^{(n)}$ liegen in der Menge aller Funktionen von A^n nach A .
- Alle beliebigen Verknüpfungen von Funktionen liegen in der Menge aller Funktionen von A^n nach A Widerspruch!.
- Alle A^A liegen in der Menge aller Funktionen von A^1 nach A .

•

$$C_c := C_a \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{f : A^n \rightarrow A \mid f \text{ ist nicht surjektiv}\}$$

- Wir haben schon gezeigt, dass alle Projektionen $\pi_i^{(n)} \in C_a$. Gemeinsam mit $C_a \subseteq C_c$ ergibt das $\pi_i^{(n)} \in C_c$.
- Sei $f_1, \dots, f_k, g \in C_c$ (mit Stelligkeiten wie oben beschrieben) beliebig. Nennen wir $h := g \circ_{n,k} (f_1, \dots, f_k)$.

Falls g eine nicht surjektive Funktion ist, ist klarerweise auch h nicht surjektiv und somit $h \in C_c$.
 Sonst gilt $g \in C_a$ und somit $\exists \tilde{g} : A \rightarrow A \exists i \in \{1, \dots, k\} \mid g(x_1, \dots, x_k) = \tilde{g}(x_i) \implies h = \tilde{g}(f_i(x_1, \dots, x_n))$. Falls auch $f_i \in C_a$ so haben wir bereits gezeigt, dass $h \in C_a$. Anderenfalls ist h nicht surjektiv, da f_i nicht surjektiv ist.

– Wir haben schon gezeigt, dass $A^A \subseteq C_a \subseteq C_c$.

Nun müssen wir zeigen, dass es sich um drei unterschiedliche Klone handelt.

$$\begin{aligned} f : A^2 &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto ((a + b) \bmod |A|) + 1 \end{aligned}$$

f liegt (klarerweise) in C_b . Angenommen f liegt in $C_a \implies f(a, b) = \tilde{f}(a) \vee f(a, b) = \tilde{f}(b)$. o.B.d.A $f(a, b) = \tilde{f}(a)$.

$$\begin{aligned} f(1, 1) &= 3 \implies \tilde{f}(1) = 3 \\ f(1, 2) &= 1 \text{ falls } |A| = 3 \text{ und } 4 \text{ falls } |A| > 3 \implies \tilde{f}(1) \neq 3 \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

Also $C_a \neq C_b$.

f ist surjektiv, da man mit $\{(1, l) : l \in \{1, \dots, k\}\}$ alle Elemente in A erreichen kann. Also $f \notin C_c$ und somit $C_b \neq C_c$.

$$\begin{aligned} g : A^2 &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto 1 \text{ falls } a = b \text{ und } 2 \text{ sonst} \end{aligned}$$

Die Funktion g ist offensichtlich nicht surjektiv ($3 \notin g(A)$) also $g \in C_c$.

Angenommen g liegt in $C_a \implies g(a, b) = \tilde{g}(a) \vee g(a, b) = \tilde{g}(b)$. o.B.d.A $g(a, b) = \tilde{g}(a)$.

$$\begin{aligned} g(1, 1) &= 1 \implies \tilde{g}(1) = 1 \\ g(1, 2) &= 2 \implies \tilde{g}(1) = 2 \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

Also $C_a \neq C_b$.

3 77

A ... Menge, \mathcal{O}_A ... Menge aller Klone auf A

zu zeigen: $(\mathcal{O}_A, \subseteq)$ bildet einen vollständigen Verband

Sei $P \subseteq \mathcal{O}_A$ beliebig.

Für $P = \emptyset$ ist

$$\inf(P) = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{f : A^n \rightarrow A\}$$

$$\sup(P) = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{\pi_i^{(n)} : i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Was auch mit den unteren Definitionen übereinstimmt, wenn man die Vereinigung und den Schnitt über die leere Menge entsprechend definiert.

Wir wollen zeigen $\exists C \in \mathcal{O}_A : C = \inf(P)$ also

$$\forall D \in P : C \subseteq D \text{ und}$$

$$\forall \tilde{C} \in \mathcal{O}_A : (\forall D \in P : \tilde{C} \subseteq D) \implies \tilde{C} \subseteq C.$$

$$C := \bigcap_{D \in P} D$$

- **zz:** C ist ein Klon auf A

Sei $\pi_i^{(n)}$ eine beliebige Projektion auf A . $\forall D \in P : \pi_i^{(n)} \in D$, da $D \in \mathcal{O}_A$. Das bedeutet aber, dass $\pi_i^{(n)} \in \bigcap_{D \in P} D = C$.

Sei $f_1, \dots, f_k : A^n \rightarrow A, g : A^k \rightarrow A$ aus C beliebig. $\implies \forall D \in P : f_1, \dots, f_k, g \in D$ und daher auch $\forall D \in P : h := g \circ_{n,k} (f_1, \dots, f_k) \in D$. Das bedeutet aber, $h \in C$.

Also ist $C \in \mathcal{O}_A$.

- **zz:** $\forall D \in P : C \subseteq D$

gilt nach Definition von C .

- **zz:** $\forall \tilde{C} \in \mathcal{O}_A : (\forall D \in P : \tilde{C} \subseteq D) \implies \tilde{C} \subseteq C$

Sei $\tilde{C} \in \mathcal{O}_A$ mit $\forall D \in P : \tilde{C} \subseteq D$ beliebig. Angenommen $C \subsetneq \tilde{C}$. Das bedeutet $\exists f \in \tilde{C} \setminus C$.

Da $f \notin C$ gilt $\exists D \in P : f \notin D$ und somit $\neg (\tilde{C} \subseteq D)$ was ein Widerspruch ist. Also muss gelten $\tilde{C} \subseteq C$.

Insgesamt ist also $C = \inf(P)$.

Da $(\mathcal{O}_A, \subseteq)$ eine Halbordnung ist und jede Teilmenge ein Infimum besitzt gilt nach Aufgabe 52 von letzter Woche, dass auch jede Teilmenge ein Supremum besitzt.

Alternativer Beweis des Supremums:

Zu zeigen: $\exists C \in \mathcal{O}_A : C = \sup(P)$ also

$$\forall D \in P : D \subseteq C \text{ und}$$

$$\forall \tilde{C} \in \mathcal{O}_A : (\forall D \in P : D \subseteq \tilde{C}) \implies C \subseteq \tilde{C}.$$

$$C := \left[\bigcup_{D \in P} D \right] \text{ wobei } [M] \text{ den Abschluss unter allen } \circ_{n,k} \text{ bezeichnet}$$

- **zz:** C ist ein Klon auf A

Sei $\pi_i^{(n)}$ eine beliebige Projektion auf A . $\forall D \in P : \pi_i^{(n)} \in D$, da $D \in \mathcal{O}_A$. Das bedeutet aber, dass $\pi_i^{(n)} \in \bigcup_{D \in P} D = C$.

Die Abgeschlossenheit bezüglich aller $\circ_{n,k}$ gilt nach Definition.

Also ist $C \in \mathcal{O}_A$.

- **zz:** $\forall D \in P : D \subseteq C$

gilt nach Definition von C .

- **zz:** $\forall \tilde{C} \in \mathcal{O}_A : (\forall D \in P : D \subseteq \tilde{C}) \implies C \subseteq \tilde{C}$

Sei $\tilde{C} \in \mathcal{O}_A$ mit $\forall D \in P : D \subseteq \tilde{C}$ beliebig. Angenommen $\tilde{C} \subsetneq C$. Das bedeutet $\exists f \in C \setminus \tilde{C}$.

Da $f \in C$ gilt entweder $\exists D \in P : f \in D$ was aber ein Widerspruch zu $D \subseteq \tilde{C}$ ist, da $f \notin \tilde{C}$ oder f entsteht durch $\circ_{n,k}$ auf $\bigcup_{D \in P} D$. Da $\forall D \in P : D \subseteq \tilde{C} \implies \bigcup_{D \in P} D \subseteq \tilde{C}$ kann \tilde{C} kein Klon sein, da $f \notin \tilde{C}$ und somit \tilde{C} nicht unter allen $\circ_{n,k}$ abgeschlossen ist.

Insgesamt also $C = \sup(P)$.

4 102

1. $E := \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

gesucht: Algebra \mathcal{A} auf $A := \{0, 1, 2, 3\}$, sodass $\forall M \in E : M$ ist Unteralgebra von A

$$\mathcal{A} = (A, w_1, w_2, w_3) \text{ (Typ (0,2,2))}$$

$$w_1 : A^0 \rightarrow A \quad w_2 : A^3 \rightarrow A \quad w_3 : A^3 \rightarrow A$$

$$() \mapsto 0 \quad (a, b, c) \mapsto \begin{cases} 2 & , \text{ falls } \{a, b, c\} = \{0, 1, 3\} \\ a & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (a, b, c) \mapsto \begin{cases} 3 & , \text{ falls } \{a, b, c\} = \{0, 1, 2\} \\ a & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \begin{array}{cccccccc} \emptyset, & w_1! & \{0\}, & & \{1\}, & w_1! & \{2\}, & w_1! \\ \{3\}, & w_1! & \{0, 1\}, & & \{0, 2\}, & & \{0, 3\}, & \\ \{1, 2\}, & w_1! & \{1, 3\}, & w_1! & \{2, 3\}, & w_1! & \{0, 1, 2\}, & w_3! \\ \{0, 1, 3\}, & w_2! & \{0, 2, 3\}, & & \{1, 2, 3\}, & w_1! & \{0, 1, 2, 3\} & \end{array} \}$$

Wobei $w_i!$ bedeutet, dass die Menge nicht unter w_i abgeschlossen ist.

2. Ist 1. für beliebiges $E \subseteq \mathcal{P}(A)$ lösbar?

Nein, z.B. für $E = \emptyset$ gibt es keine Algebra $\mathcal{A} = (A, (w_i)_{i \in I})$ ohne Unteralgebren, da A immer eine Unteralgebra von sich selbst ist!

3. **gesucht:** Kriterium / Algorithmus um entscheiden zu können ob für gegebenes, endliches A und $E \subseteq \mathcal{P}(A)$ eine Algebra $\mathcal{A} = (A, w_1, w_2, \dots)$ existiert mit $Sub(\mathcal{A}) = E$.

```

Algorithmus (A ... Menge, E ... gewünschte Unteralgebren)
(1)  for ( $P \in \mathcal{P}(A) \setminus E$ ) {
(2)       $C := \bigcap_{B \in E, P \subseteq B} B$ ;
(3)      if ( $C \setminus P = \emptyset$ ) {
(4)          raise Error("nicht lösbar");
(5)      } else {
(6)           $w_P : A^{|P|} \rightarrow A, (x_1, \dots, x_{|P|}) \mapsto \begin{cases} y \in C \setminus P & , \text{ falls } \{x_1, \dots, x_{|P|}\} = P \\ x_1 & , \text{ sonst} \end{cases}$ 
(7)          füge  $w_P$  zur Algebra hinzu;
(8)      }
(9)  }
```

Jede Operation w erreicht (für unsere Zwecke), dass wenn x_1, \dots, x_n in einer Unteralgebra U liegen, dass dann auch $y = w(x_1, \dots, x_n) \in U$ sein muss.

Damit ein $P \in \mathcal{P}(A) \setminus E$ nicht in $Sub(\mathcal{A})$ liegt muss also ein w_P garantieren, dass wenn $P \subseteq U \implies \exists y \notin P : y \in U$. Natürlich muss das y so gewählt werden, dass $\forall B \in E : P \subset B \implies y \in B$, da sonst $B \notin Sub(\mathcal{A})$. $\implies y \in \left(\bigcap_{B \in E, P \subseteq B} B\right)$.

Falls aber $\left(\bigcap_{B \in E, P \subseteq B} B\right) = \emptyset$ kann nach der Überlegung von oben keine Lösung existieren. Sonst garantiert die Operation wie in (6) beschrieben, dass $P \notin Sub(\mathcal{A})$ für alle $P \notin E$ (wegen der Schleife in (1)).

Für $Q \in E$ hat keine der Funktionen $(w_P)_{P \in \mathcal{P}(A) \setminus E}$ einen Effekt, da immer entweder gilt

- $P \subseteq Q$ und somit

$$\forall q_1, \dots, q_{|P|} \in Q : w_P(q_1, \dots, q_{|P|}) = \begin{cases} y & , \text{ falls } \{q_1, \dots, q_{|P|}\} = P \\ q_1 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Da $Q \in E$ und $P \subseteq Q$ gilt nach Konstruktion, dass $y \in Q$ und $q_1 \in Q$ sowieso.

- $P \setminus Q \neq \emptyset$ und somit $\exists p \in P \setminus Q$ damit kann nicht der Fall $\{q_1, \dots, q_{|P|}\} = P$ eintreten. Also gilt

$$\forall q_1, \dots, q_{|P|} \in Q : w_P(q_1, \dots, q_{|P|}) = q_1 \in Q.$$

In beiden Fällen gilt also, dass Q bezüglich allen $(w_P)_{P \in \mathcal{P}(A) \setminus E}$ abgeschlossen ist.