ALG Ü10

372!) ges: Minimalpolynom von $\sqrt{3}+i$ über $\mathbb{Q}$

$m(x)$ ... Minimalpolynom von $\alpha \iff m(\alpha)=0 \wedge m\neq 0 \wedge m$ ... normiert $\wedge$

m hat minimalen Grad

Grad 0: offenbar nur 0, das ist aber ausgeschlossen $\lightning$

Grad 1: $p(x)=x+a$, da p normiert sein soll

$p(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i+a=0 \Rightarrow a=-\sqrt{3}-i \notin \mathbb{Q}$ $\lightning$

Grad 2: $p(x)=x^2+ax+b$

$p(\sqrt{3}+i)=3+2\sqrt{3}i-1+a\sqrt{3}+ai+b=0 \Rightarrow 2\sqrt{3}+a=0 \Rightarrow a=-2\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ $\lightning$

Grad 3: $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$p(\sqrt{3}+i)=8i+a(3+2\sqrt{3}i-1)+b(\sqrt{3}+i)+c=8i+3a+2\sqrt{3}ai-a+b\sqrt{3}+bi+c=0$

$\Rightarrow 8+2\sqrt{3}a+b=0 \wedge 3a-a+b\sqrt{3}+c=0$

$\Rightarrow b=-8-2\sqrt{3}a \wedge b=\frac{1}{\sqrt{3}}(-2a-c) \Rightarrow -8\sqrt{3}-6a=-2a-c$

$\Rightarrow 4a=-8\sqrt{3}+c \Rightarrow a=-2\sqrt{3}+\frac{c}{4}\notin\mathbb{Q}$ wenn $c\in\mathbb{Q}$ $\lightning$

Grad 4: $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

$p(\sqrt{3}+i)=-8+8\sqrt{3}i+a(8i)+b(2+2\sqrt{3}i)+c(\sqrt{3}+i)+d$

$=-8+2b+\sqrt{3}c+d+i(8\sqrt{3}+8a+2\sqrt{3}b+c)=0$

$\Rightarrow -8+2b+\sqrt{3}c+d=0 \wedge 8\sqrt{3}+8a+2\sqrt{3}b+c=0$

$\Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{3}}(8-2b-d)\in\mathbb{Q} \iff c=0 \wedge 8-2b-d=0$

$\Rightarrow 8-2b-d=0 \quad \wedge 8\sqrt{3}+8a+2\sqrt{3}b=0$

$\Rightarrow a=\frac{1}{8}(-8\sqrt{3}-2\sqrt{3}b)=-\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{3}b=\sqrt{3}(-1-\frac{1}{4}b)\in\mathbb{Q} \iff a=0$

$\Rightarrow 8-2b-d=0 \wedge 8\sqrt{3}+2\sqrt{3}b=0 \Rightarrow 4+b=0 \Rightarrow b=-4$

$\Rightarrow 8+8-d=0 \Rightarrow d=16$

$p(x)=x^4-4x^2+16$ ist das Minimalpolynom von $\sqrt{3}+i$ über $\mathbb{Q}$

Prüfung $p(\sqrt{3}+i)=-8+8\sqrt{3}i-4(3+2\sqrt{3}i-1)+16=8+8\sqrt{3}i-12-8\sqrt{3}i+4=0$ ✓