ALG ÜG

215) $p \in \mathbb{P}$

(1) Wie viele Untergruppen hat $C_p \times C_p$?

Zyklische Untergruppen: Werden erzeugt von $\langle(\bar{x},\bar{y})\rangle$ mit $\bar{x},\bar{y} \in C_p$. Für $(\bar{a},\bar{b}) \in \langle \bar{x},\bar{y}\rangle \setminus \{(\bar{0},\bar{0})\}$ gilt $\langle \bar{a},\bar{b}\rangle = \langle \bar{x},\bar{y}\rangle$. $\operatorname{ord}\langle \bar{x},\bar{y}\rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \bar{x}=\bar{0}=\bar{y} \\ p & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Es gibt $\frac{p\cdot p-1}{p-1} + 1 = p+1+1 = p+2$ zyklische Untergruppen von $C_p \times C_p$

Nicht zyklische Untergruppen: Werden von zumindest 2 Elementen $(\bar{x},\bar{y}),(\bar{a},\bar{b})$ erzeugt, für die gilt $(\bar{x},\bar{y}) \notin \langle \bar{a},\bar{b}\rangle \wedge (\bar{a},\bar{b}) \notin \langle \bar{x},\bar{y}\rangle$. $\operatorname{ord}\langle \bar{x},\bar{y}\rangle = p$, da sie p^2 teilen muss, aber nicht ganz $C_p \times C_p$ erzeugen darf und aber auch nicht $(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{0},\bar{0}) \in \langle \bar{a},\bar{b}\rangle$ gelten kann.

$\langle (\bar{x},\bar{y}),(\bar{a},\bar{b})\rangle \subseteq U \qquad \operatorname{ord}\langle \bar{x},\bar{y}\rangle \cdot \operatorname{ord}\langle \bar{a},\bar{b}\rangle = p \cdot p = p^2 = \operatorname{ord}(C_p \times C_p)$

$\Rightarrow$ U muss von genau 2 Elementen mit ord p erzeugt werden. $\Rightarrow \operatorname{ord} U = p^2$

$\Rightarrow U = C_p \times C_p \qquad \Rightarrow$ Es gibt nur 1 nicht zyklische Untergruppe von $C_p \times C_p$

Insgesamt gibt es also $p+3$ Untergruppen von $C_p \times C_p$.

(2) Wie viele Untergruppen hat C_{p^2}?

Die Ordnung der Untergruppe muss p^2 teilen also sind nur $1, p, p^2$ möglich.

$C_1 = \langle \bar{0}\rangle$ und $C_{p^2} = \langle \bar{x}\rangle$ mit $\bar{x} \in \{\bar{1},\dots,\overline{p^2-1}\} \setminus \{\bar{p},\overline{2p},\dots,\overline{(p-1)p}\}$ sind triviale Untergruppen. (da $\langle \bar{x}\rangle$ zyklisch ist und offenbar Untergruppe so muss $\operatorname{ord}(\langle \bar{x}\rangle) \mid p^2$

$\operatorname{ord}\langle \bar{x}\rangle \neq 1$, da $\bar{x},\bar{0} \in \langle \bar{x}\rangle$; $\operatorname{ord}\langle \bar{x}\rangle \neq p$, da $p\cdot\bar{x} \neq \overline{p\cdot p} = \bar{0} \Rightarrow \operatorname{ord}\langle \bar{x}\rangle = p^2$)

Für $\bar{x} \in \{\bar{p},\overline{2p},\dots,\overline{(p-1)p}\}$ gilt $p\cdot\bar{x} = p\cdot\overline{kp} = \overline{p\cdot p\cdot k} = \bar{0} \Rightarrow \operatorname{ord}\langle \bar{x}\rangle \leq p$

$\operatorname{ord}\langle \bar{x}\rangle \neq 1$ weil wieder $\bar{0},\bar{x} \in \langle \bar{x}\rangle \Rightarrow \operatorname{ord}\langle \bar{x}\rangle = p \qquad \langle \bar{x}\rangle \cong C_p$

$\Rightarrow$ Es gibt 3 Untergruppen.

Bsp $C_3 \times C_3$: 00 | 01, 02, 00 | 10, 20, 00 | 11, 22, 00 | 12, 21, 00

|| || || ||

02, 01, 00 | 20, 10, 00 | 22, 11, 00 | 21, 12, 00

(00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22)

Bsp $C_2 \times C_2$: 00 | 01, 00 | 10, 00 | 11, 00

(00, 01, 10, 11)