ALG Ü5

157) G... Gruppe $A, B \leq G$

(1) $\neg(A, B \leq G \Rightarrow AB \leq G)$

Gegenbsp: $G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ $(G, \circ, id, ^{-1})$... Gruppe

$A := \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{Q}\ \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = x^m\}$

$B := \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = x + n\}$

zz: $A, B \leq G$ Sei $f, f' \in A$, $g, g' \in B$ bel.

$f \circ f'(x) = f(x^{m'}) = (x^{m'})^m = x^{(m \cdot m')} \Rightarrow f \circ f' \in A$

$f^{-1}(x) := x^{\frac{1}{m}}$ $f \circ f^{-1}(x) = f(x^{\frac{1}{m}}) = x^{(\frac{1}{m} \cdot m)} = x \Rightarrow f \circ f^{-1} = id = x^1 \in A$

$g \circ g'(x) = g(x + n') = (x + n') + n = x + (n' + n) \Rightarrow g \circ g^{-1} \in B$

$g^{-1}(x) := x - n$ $g \circ g^{-1}(x) = g(x - n) = x - n + m = x \Rightarrow g \circ g^{-1} = id = x + 0 \in B$

zz: $AB \not\leq G$

$f(x) = x^2 \in A$ $g(x) = x + 5 \in B$ $f \circ g(x) = (x+5)^2 \in AB$

$(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} - 5 \notin AB$ $\Rightarrow AB$ ist keine Gruppe

(2) $A \trianglelefteq G$, $B \leq G \Rightarrow AB = BA \leq G$

zz: $AB = BA$ Sei $a \in A$, $b \in B$ bel. Da A ein Normalteiler ist gilt

$\forall x \in G\ \exists a' \in A: xa = a'x \Rightarrow \exists a' \in A: ba = a'b \in AB \land \exists a'' \in A: ab = ba'' \in BA \Rightarrow AB = BA$

zz: $AB \leq G$ Sei $a, \hat{a} \in A$, $b, \hat{b} \in B$ bel.

zz: $ab\hat{a}\hat{b} \in AB$ Da $AB = BA$ gilt $\exists \hat{a}' \in A, b' \in B: b\hat{a} = \hat{a}'b'$

$\Rightarrow ab\hat{a}\hat{b} = a\hat{a}'b'\hat{b} \in AB$

zz: $\exists c \in A, d \in B: abcd = 1$

$\exists c \in A, d \in B: b^{-1}a^{-1} = cd \Rightarrow a^{-1}d^{-1} = bc$ $\Rightarrow abcd = aa^{-1}d^{-1}d = 1$

zz: $1 \in AB$ $1 \in A, 1 \in B \Rightarrow 1 \cdot 1 = 1 \in AB$

(3) $A, B \trianglelefteq G \Rightarrow AB \trianglelefteq G$

Das $AB \leq G$ ist haben wir schon in (2) gezeigt. zz: $\forall x \in G: xAB \subseteq ABx$

Sei $x \in G$, $a \in A$, $b \in B$ bel. $xab = a'xb = a'b'x \in ABx$, da A und B Normalteiler sind und somit $\forall x \in G, a \in A, b \in B: \exists a' \in A, b' \in B: xa = a'x \land xb = b'x$ ...

ALG Ü5

157) (4) $N_1, \dots, N_k \trianglelefteq G$ $\quad \sup(N_1, \dots, N_k) = N_1 N_2 \cdots N_k$

zz: $N_1 N_2 \cdots N_k$ ist obere Schranke von $N_1, \dots, N_k$

Sei $i \in \{1, \dots, k\}$ bel. Sei $x \in N_i$ bel. Da $1 \in N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_k$ gilt

$\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot x \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{x \text{ an i-te Stelle}} = x \in N_1 N_2 \cdots N_k \quad \Rightarrow N_i \subseteq N_1 N_2 \cdots N_k$

zz: $N_1 N_2 \cdots N_k$ ist kleinste obere Schranke von $N_1, \dots, N_k$

Sei S eine bel. obere Schranke von $N_1, \dots, N_k$. Offenbar muss gelten $\forall i \in \{1, \dots, k\}: N_i \subseteq S$ damit S obere Schranke ist. Sei $x_1 \in N_1, \dots, x_k \in N_k$ bel.

Da $x_1, \dots, x_k \in S \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \in S$ damit S eine Gruppe ist.

$\Rightarrow N_1 N_2 \cdots N_k \subseteq S$ also ist $N_1 N_2 \cdots N_k$ das Supremum

(5) $\forall i \in I \neq \emptyset \quad N_i \trianglelefteq G \quad \Rightarrow \sup_{i \in I} N_i = N = \bigcup_{\substack{J \subseteq I \\ k = |J| < \infty}} (N_{j_1} N_{j_2} \cdots N_{j_k})$

zz: N ist obere Schranke

Sei $i \in I$ bel. Da $\{i\} \subseteq I$ und $|\{i\}| < \infty$ gilt $N_i \subseteq N$.

zz: N ist kleinste obere Schranke

Sei S eine bel. obere Schranke von $(N_i)_{i \in I}$. Offenbar muss $\forall i \in I: N_i \subseteq S$.

Sei $J \subseteq I$ mit $|J| < \infty$ bel. Da $\forall j \in J: N_j \subseteq S$ und S unter den Operationen abgeschlossen ist muss $\forall n_1 \in N_{j_1}, \dots, n_k \in N_{j_k}: n_1 n_2 \cdots n_k \in S$

$\Rightarrow \bigcup_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = k < \infty}} (N_{j_1} N_{j_2} \cdots N_{j_k}) \subseteq S \quad \Rightarrow N$ ist kleinste obere Schranke

$\square$