ALG Ü11

387) (1) zz: $\forall \alpha$ ... algebraische Zahl $\exists f \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\} : f(\alpha) = 0$

α ... algebraische Zahl $:\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{A} = \overline{\mathbb{Q}}$

$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Q}[x] \setminus \mathbb{Q} : p(\alpha) = 0$

$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{b_i} x^i$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \neq 0$ $\forall i \in \{0, \dots, n\}$

$b := \prod_{i=0}^{n} b_i$ $\quad \tilde{b}_i := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} b_j$ $\quad \Rightarrow b p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{b_i} b x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \tilde{b}_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$

$b p(\alpha) = b \cdot 0 = 0$

(2) $f \in \mathbb{Z}[x]$ $\quad$ grad$(f) = n$ $\quad r = \frac{p}{q}$ $\quad p, q$ ... teilerfremd $\quad f(r) \neq 0$ $\quad$ zz: $|f(r)| \geq \frac{1}{q^n}$

(3) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad \alpha$ ... algebraisch vom Grad n $\Rightarrow \exists c > 0 : \forall p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 : \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n}$

Da α algebraisch vom Grad n $\exists f(x) \in \mathbb{Z}[x]$: grad$(f) = n \wedge f(\alpha) = 0$

nach Punkt (1). Sei $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ bel.

Falls