ALG Üg

326) Sei D eine ganze Zahl und $R := \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ der von $\mathbb{Z}$ und $\sqrt{D}$ erzeugte Unterring von $\mathbb{C}$.

1) Man zeige, dass R mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von $\mathbb{C}$ einen Integritätsbereich bildet.

2) Man bestimme für $D<0$ die Einheiten von R

3) Man zeige, dass für $D=2$ unendlich viele Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subseteq R$ existieren.

Hinweis: Übersetzen Sie die Eigenschaft "z ist Einheit" in eine Eigenschaft von $N(z)$, siehe 5.1.3.1.(4)

Integritätsbereich ... nullteilerfreier, kommutativer Ring mit 1

Einheit ... $x \in R$ mit $x^{-1} \in R$ existiert

N ... Normfunktion $N: \mathbb{Z}[\sqrt{D}] \to \mathbb{Z}$, $a+b\sqrt{D} \mapsto (a+b\sqrt{D})(a-b\sqrt{D}) = a^2-b^2D$
wobei $D \neq 1$ eine Zahl mit $t^2 | D \Rightarrow t \in \{1,-1\}$

---

1) $R \subseteq \mathbb{C}$ ist klarerweise unter $+, 0, -, 1$ abgeschlossen. Sei $a+b\sqrt{D}, c+d\sqrt{D} \in R$ bel.

$(a+b\sqrt{D})(c+d\sqrt{D}) = (ac+bdD)+(ad+bc)\sqrt{D} \in R \Rightarrow (R,+,0,-,\cdot,1)$ ... Ring mit 1

Als Unterring von $\mathbb{C}$ ist auch R kommutativ und nullteilerfrei.

2) Sei $D<0$ bel. Sei $x = a+b\sqrt{D} \in R\setminus\{0\} \subseteq \mathbb{C}$ bel. Falls $x \in E(R)$ gilt

$N(x) \cdot N(x^{-1}) = N(1) = 1 \Rightarrow N(x^{-1}) = N(x)^{-1} \in \mathbb{N}^{\times}$ und $N(x) \in \mathbb{N}^{\times} \Rightarrow N(x) = 1$

Falls $N(x)=1$ gilt $a^2-b^2D=1$ und somit ist $\frac{a-b\sqrt{D}}{a^2-b^2D} = a-b\sqrt{D} \in R$

das inverse Element. $\Rightarrow x \in E(R)$

$\Rightarrow E(R) = \{x \in R \mid N(x)=1\}$

3) $D=2$ $\quad x = a+b\sqrt{2} \in R\setminus\{0\}$ $\quad$ ges a,b mit $N(a+b\sqrt{2}) = a^2-2b^2 = 1$

Behauptung: $a_1 = 3$ $\quad b_1 = 2$ und $a_n = 3a_{n-1}+4b_{n-1}$ $\quad b_n = 2a_{n-1}+3b_{n-1}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n^2+2b_n^2 = 1$ vollständige Induktion nach n: $n=1$ $\quad 3^2-2\cdot 2^2 = 1$ ✓

$n+1$ $\quad (a_{n+1})^2 - 2(b_{n+1})^2 = (3a_n+4b_n)^2 - 2(2a_n+3b_n)^2 =$

$= 9a_n^2+24a_nb_n+16b_n^2 - 2(4a_n^2+12a_nb_n+9b_n^2) = a_n^2-2b_n^2 = 1$ ✓

$\Rightarrow (a+b\sqrt{2})\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = 1$ und $\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = a-b\sqrt{2} \in R$

$\Rightarrow a+b\sqrt{2} \in E(R)$