ALG Ü7

169+171)

4) zz: Die inneren Automorphismen bilden einen Normalteiler $\Phi(G) \triangleleft Aut(G)$ der Automorphismengruppe von G

Def Innerer Automorphismus $\Phi: G \to Aut(G)$, $g \mapsto (\pi_g : G \to G, \ x \mapsto gxg^{-1})$

Von 2. wissen wir, dass $\forall g \in G: \Phi(g) = \pi_g \in Aut(G)$. $\Rightarrow \Phi(G) \subseteq Aut(G)$

Von 1. wissen wir, dass $\forall g,h \in G: \Phi(g) \circ \Phi(h) = \Phi(g \cdot h)$ also ist $\Phi(G)$ unter $\circ$ und $^{-1}$ abgeschlossen $(\Phi(e) = id)$ $\Rightarrow \Phi(G) \leq Aut(G)$

Sei $\varphi \in Aut(G)$ bel. Sei $g \in G$ bel. zz: $\exists g' \in G: \varphi \circ \Phi(g) = \Phi(g') \circ \varphi$

$(\varphi \circ \Phi(g))(x) = \varphi(gxg^{-1}) \overset{*}{=} \varphi(g) \cdot \varphi(x) \cdot \varphi(g^{-1}) \overset{*}{=} \varphi(g) \cdot \varphi(x) \cdot \varphi(g)^{-1} = (\Phi(\varphi(g)) \circ \varphi)(x)$

zz: $\exists g' \in G: \Phi(g) \circ \varphi = \varphi \circ \Phi(g')$ Da φ bijektiv ist gilt $\exists g': g = \varphi(g')$

$(\Phi(g) \circ \varphi)(x) = g\,\varphi(x)\,g^{-1} = \varphi(g') \cdot \varphi(x) \cdot \varphi(g')^{-1} \overset{*}{=} \varphi(g' x g'^{-1}) = (\varphi \circ \Phi(g'))(x)$

$*$, da φ ein Homomorphismus ist $\Rightarrow \Phi(G) \triangleleft Aut(G)$

1) X ... Menge $G := S_X$ ... symmetrische Gruppe auf X $|X| \geq 3$

zz: Zentrum von G ist trivial: $Z(S_X) = \{id_X\}$

Def $Z(S_X) := \{g \in S_X : \forall h \in S_X : gh = hg\}$

$id_X \in Z(S_X)$, da $\forall h \in S_X: id \circ h = h = h \circ id$

Sei $g \in S_X \setminus \{id\}$ bel. $\Rightarrow \exists x,y \in X, x \neq y: g(x) = y$ $\exists z \in X \setminus \{x,y\}$

$h: G \to G$ $x \mapsto z$ $z \mapsto x$ $a \mapsto a$ sonst

$\Rightarrow h \circ g(x) = h(y) = y$ $g \circ h(x) = g(z) \neq y$, da g injektiv ist

$\Rightarrow h \circ g \neq g \circ h \Rightarrow g \notin Z(S_X)$ $\Rightarrow Z(S_X) = \{id_X\}$

zz: $\Phi: G \to Aut(G)$ ... isomorphe Einbettung

Φ... Homomorphismus bereits oben gezeigt

Φ... injektiv, da Sei $g \in G$ mit $\pi_g = id$ bel. $\Rightarrow \forall x \in G: x = gxg^{-1}$

$\Rightarrow \forall x \in G: xg = gx \Rightarrow g \in Z(G) \Rightarrow g = e$

$\Rightarrow \Phi$... isomorphe Einbettung von G nach den inneren Automorphismen $\square$