ALG Ü5

161a) G ... Gruppe $U_1, U_2 \leq G$

(A) φ ... surjektiv (B) $\forall x \in U_1, y \in U_2 : xy = yx$ (B') $U_1, U_2 \trianglelefteq G$

(C) $U_1 \cap U_2 = \{e\}$ (C') $U_1 \cap U_2 = \{e\}$

---

(1) G ist das innere direkte Produkt von U_1, U_2 (2) A, B, C (3) A, B, C'

(4) A, B', C (5) A, B', C'

---

zz: $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$

Nach Proposition 3.2.3.2. gilt $(1) \Leftrightarrow U_1, U_2 \trianglelefteq G \wedge U_1 \cap U_2 = \{e\} \wedge U_1 \cdot U_2 = G$

zz: $(1) \Rightarrow (A)$ also $\varphi: U_1 \times U_2 \to G$, $(u_1, u_2) \mapsto u_1 u_2$ ist surjektiv $\Leftrightarrow U_1 \cdot U_2 = G$

zz: $(1) \Rightarrow (B')$, $(1) \Rightarrow (C)$ beides nach oben genannten klar

Da $(C) \Leftrightarrow (C')$ und $(B) \Leftrightarrow (B')$ (nach Definition von Normalteiler) gilt nun

$(1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$.

zz: $(4) \Rightarrow (1)$ also $(A), (B'), (C) \Rightarrow (B'), (C), U_1 \cdot U_2 = G$

$U_1 \cdot U_2 \subseteq G$ ist klar. Sei $g \in G$ bel. Da $\varphi: U_1 \times U_2 \to G$ surjektiv ist $\exists u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$:

$u_1 \cdot u_2 = g \Rightarrow g \subseteq U_1 \cdot U_2$ also $U_1 \cdot U_2 = G$

$\square$