

ALG Ü7

$$189) R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \quad S := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$$M := \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} \quad a, b \in M \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow a = p_a + \sqrt{2}q_a \quad b = p_b + \sqrt{2}q_b \quad \text{mit } p_a, p_b, q_a, q_b \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow a+b = p_a + p_b + \sqrt{2}(q_a + q_b) \in M \quad \Rightarrow a \cdot b = p_a p_b + 2q_a q_b + \sqrt{2}(q_a p_b + p_a q_b) \in M$$

$$\Rightarrow -a = -p_a - \sqrt{2}q_a \in M \quad \Rightarrow 0 = 0 + \sqrt{2} \cdot 0 \in M$$

$$a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} = (p_a + \sqrt{2}q_a)^{-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_a = \frac{c}{d} ; q_a = \frac{e}{f} ; d, f \neq 0 \wedge (c \neq 0 \vee e \neq 0) \\ \Rightarrow cf + \sqrt{2}de \neq 0 \end{array} \right.$$

$$= \left(\frac{c}{d} + \frac{\sqrt{2}e}{f} \right)^{-1} = \frac{df}{cf + \sqrt{2}de} = \frac{df(cf - \sqrt{2}de)}{c^2f^2 + 2d^2e^2}$$

$$= \frac{cdf^2}{c^2f^2 + 2d^2e^2} - \sqrt{2} \frac{d^2fe}{c^2f^2 + 2d^2e^2} \in M \quad 1 = 1 + 0\sqrt{2} \in M$$

$\Rightarrow M$ Körper

$$R \subseteq M \quad (R \setminus \{0\})^{-1} = \left\{ \frac{1}{a+b\sqrt{2}} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \vee b \neq 0 \right\}$$

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \sqrt{2} \frac{b}{a^2-2b^2} \in M \Rightarrow (R \setminus \{0\})^{-1} \subseteq M$$

$$\text{Sei } x = \frac{c}{d} + \sqrt{2} \frac{e}{f} \in M \text{ bel. } d, f \neq 0 \Rightarrow df \neq 0$$

$$x = \frac{cf + \sqrt{2}de}{df} \quad cf + \sqrt{2}de \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}, df \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow x$ muss im Quotientenkörper liegen $\Rightarrow M$ ist der kleinste

Körper in den R eingebettet werden kann

$S = M$ ist bereits ein Körper $\Rightarrow S$ ist der gesuchte Quotientenkörper.

* Sei \mathbb{Q}' ein komm. Ring mit 1 und $\iota: R \rightarrow \mathbb{Q}'$ mit $\forall r \in R \setminus \{0\}: \exists (\iota(r))^{-1}$

$$\varphi: M \rightarrow \mathbb{Q}'$$

$$\frac{c}{d} + \sqrt{2} \frac{e}{f} \mapsto \iota(cf + \sqrt{2}de) \cdot (\iota(df))^{-1} \quad \dots \text{isomorphe Einbettung durch Nachrechnen}$$