ALG Ü11

384+385) Prop 6.2.2.2. K .. Körper   D.s.f.A.ä:

(1) $\forall p(x) \in K[x]\setminus K$: $\exists a \in K: p(a)=0$

(2) $\forall p(x) \in K[x]\setminus K$ ... irreduzibel: $\exists a \in K: p(a)=0$

(3) $\forall p(x) \in K[x]\setminus K$ ... irreduzibel : $\mathrm{grad}(p)=1$

(4) $\forall p(x) \in K[x]\setminus K$: $p(x)$ zerfällt in Linearfaktoren

(5) $\forall L \geq K$ ... algebraische Erweiterung : $L=K$

Bew (1) $\Rightarrow$ (2): klar

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $p(x) \in K[x]\setminus K$ ... irreduzibel bel. $\Rightarrow \exists a \in K: p(a)=0$

$\xrightarrow{\text{Prop. 5.3.3.1.}} p(x) = (x-a)\cdot q(x)$ Da $p(x)$ ... irreduzibel ist gilt

$q(x)$ ist eine Einheit von $K[x]$. $E(K[x]) = K\setminus\{0\}$ $\Rightarrow \mathrm{grad}(q)=0$

$\Rightarrow \mathrm{grad}(p) = \mathrm{grad}(x-a) + \mathrm{grad}(q) = 1$

(3) $\Rightarrow$ (4) Sei $p(x) \in K[x]\setminus K$ bel. Sei $q_1, \dots, q_n \in K[x]$ ... irreduzibel mit

$p = q_1 \cdot \ldots \cdot q_n$. $\forall i \in \{1,\dots,n\}: \mathrm{grad}(q_i)=1$ $\Rightarrow p$ zerfällt in Linearfaktoren

(4) $\Rightarrow$ (5) Sei $L \geq K$ eine algebraische Erweiterung. Sei $\alpha \in L$ bel.

$\Rightarrow \exists p(x) \in K[x]^{\setminus\{0\}}: p(\alpha)=0$ offenbar gilt $p(x) \in K[x]\setminus K$

$\Rightarrow p(x)$ zerfällt in Linearfaktoren $p(x) = q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_n(x)$

$0 = p(\alpha) = q_1(\alpha) \cdot \ldots \cdot q_n(\alpha) \overset{\text{da } K \text{.. Körper}}{\Rightarrow} \exists i \in \{1,\dots,n\}: q_i(\alpha)=0$, da q_i Linearfaktor

$\exists a \in K\setminus\{0\}, b \in K: q_i(x) = ax+b$ $\hat{q}_i(x) := x + \frac{b}{a} \in K[x]\setminus K$

$0 = q_i(\alpha) = a \cdot \hat{q}_i(\alpha) \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} 0 = \hat{q}_i(\alpha) = \alpha + \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{a} \in K$

$\Rightarrow L \leq K$ $\Rightarrow L = K$

(5) $\Rightarrow$ (1) Sei $p(x) \in K[x]\setminus K$ bel. Sei L eine algebraische Erweiterung in der

$p(\alpha)=0$ mit $\alpha \in L$. $\Rightarrow L=K$ $\Rightarrow \alpha \in K$ $\Rightarrow \exists \alpha \in K: p(\alpha)=0$

...

ALG ÜM

384+385) ... Prop 6.2.2.4. $K \leq L$ D.s.f.A.ä:

(1) L ist ein algebraischer Abschluss von K

(2) L ist Nullstellenkörper von $K[x]$ und L ist algebraisch über K

(3) L ist algebraisch über K und $\forall L' \geq L: L'$...algebraisch über $K \Rightarrow L = L'$

Bew (1) $\Rightarrow$ (2)

L...algebraischer Abschluss von K :$\Longleftrightarrow$ L...zerfällungskörper von $K[x]$

:$\Leftrightarrow$ L... minimaler Nullstellenkörper von $K[x]$ $\Rightarrow$ L...Nullstellenkörper von $K[x]$

L wird von K und allen Nullstellen von $K[x]$ erzeugt $\Rightarrow$ L ist algebraisch über K

(2) $\Rightarrow$ (3)

L ist algebraisch über K nach Vorgabe. Sei $L' \geq L$ mit L' algebraisch über K bel.

Sei $\alpha \in L'$ bel. Da L' algebraisch über K $\exists p(x) \in K[x] \setminus \{0\}: p(\alpha) = 0$

Da L Nullstellenkörper von $K[x]$ ist zerfällt $p(x)$ in Linearfaktoren aus $L[x]$

$p(x) = c\,(x-a_1)(x-a_2) \cdot \ldots \cdot (x-a_n)$ Da $p(\alpha)=0$ $\exists j \in \{1,\ldots,n\}: \alpha - a_j = 0$

$\Rightarrow \alpha = a_j \in L$ $\Rightarrow L = L'$

(3) $\Rightarrow$ (1) zz: L ist minimaler Nullstellenkörper von $K[x]$

(Sei $p(x) \in K[x]$ bel. $\Rightarrow \exists \alpha_1 \in L: p(\alpha_1) = 0$, da L algebraisch über K

$\Rightarrow p(x) = (x-\alpha_1)\,p_1(x) = \ldots = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n)\,c$ $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in L$ $c \in K$

$\Rightarrow L$ ist Nullstellenkörper)

(3) $\Rightarrow$ $\forall L' \geq L: L'$...algebraisch über $K \Rightarrow L = L'$

(384)
$\Leftrightarrow$ $\forall p(x) \in L[x] \setminus L: p(x)$ zerfällt in Linearfaktoren über L

$\Leftrightarrow$ L ist Nullstellenkörper von $L[x]$

$\Rightarrow$ L ist algebraisch abgeschlossen $\wedge$ L ist algebraisch über K

$\Rightarrow$ L ist algebraischer Abschluss von K

□