ALG Ü9

332) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ die Teilerkettenbedingung gilt.

Teilerkettenbedingung... es gibt keine unendliche absteigende Folge echter Teiler

$\Leftrightarrow \forall (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in R mit $\forall n\in\mathbb{N}: r_{n+1} | r_n$ $\exists n_0\in\mathbb{N}: r_{n_0+1} \sim r_{n_0}$

$\Leftrightarrow \forall (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in R mit $\forall n\in\mathbb{N}: r_{n+1} | r_n$ $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n \geq n_0: r_{n+1} \sim r_n$

Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in R mit $\forall n\in\mathbb{N}: r_{n+1} | r_n$ bel.

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ \exists s_n: s_n \cdot r_{n+1} = r_n \qquad \Rightarrow N(s_n)\cdot N(r_{n+1}) = N(r_n)$

Da $\forall a+b\sqrt{-5} \in R: N(a+b\sqrt{-5}) = a^2+5b^2 \in \mathbb{N}$ und in $\mathbb{N}$ die Teilerkettenbedingung gilt muss $N(s_{n_0}) = 1$ für ein $n_0\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow s_{n_0} \in E(R)$ (siehe Bsp 326)

$\Rightarrow r_{n_0+1} \sim r_{n_0}$

$\Rightarrow R$ erfüllt die Teilerkettenbedingung.

$\square$