DGL Ü5

1) $x'' + g(x) = 0 \quad x(0)=0 \quad x(1)=0 \qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ... lokal Lipschitz, beschränkt

(i) AWP $\quad x'' = -g(x)\,,\ x(0)=0,\ x'(0)=a$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (t,x) \mapsto -g(x)$ ... beschränkt und lokal Lipschitz bezgl. x, da g beschränkt und lokal Lipschitz

$\Rightarrow$ nach Picard Lindelöf $\ \exists!\ y_a(t) = y(a,t)$, dass auf (t_-, t_+) das AWP löst

(ii) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto y_a(1) \qquad \varphi \in C^1(\mathbb{R})$

$m := \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \qquad y_m$ löst AWP $\ y_m'' = -g,\ y_m(0)=0,\ y_m'(0) = m$

$$y_m''(t) = y_m'(t) - y_m'(0) = \int_0^t -g(y_m(s))\,ds$$

$$\Rightarrow y_m'(t) = y_m'(0) - \int_0^t g(y_m(s))\,ds = m - \int_0^t g(y_m(s))\,ds \quad \text{(da AWP löst)}$$

$$\geq m - \int_0^t m\,ds = m - ms\Big|_0^t = m - mt + m\cdot 0 = m(1-t)$$

$$\Rightarrow \int_0^t y_m'(s)\,ds \geq \int_0^t m(1-s)\,ds$$

$$y_m(t) - \underbrace{y_m(0)}_{=0} \geq m(s - \tfrac{1}{2}s^2)\Big|_0^t = m(t - \tfrac{1}{2}t^2) - m(0 - \tfrac{1}{2}0^2) = m(t - \tfrac{1}{2}t^2)$$

$$\Rightarrow y_m(t) \geq m(t - \tfrac{1}{2}t^2) = mt(1 - \tfrac{1}{2}t)$$

$y_m(1) \geq m(1 - \frac{1}{2}) \geq 0 \qquad$ gleiche Berechnung für $-m$ liefert $\ y_{-m}(1) \leq 0$

$\Rightarrow \varphi(-m) \leq 0 \leq \varphi(m)\ $ also Besitzt φ eine Nullstelle in $[-m, +m]$

$\Rightarrow \exists\ l \in [-m, +m]: y_l(1) = 0,\ y_l(0) = 0,\ y_l''(x) + g(x) = 0$

$\square$

DGL Ü5

2) AWP $x_1' = x_2 x_3$, $x_2' = -x_1 x_3$, $x_3' = 2$ $\quad x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$, $x_3(0)=0$

$$x\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad x'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2x_3\\-x_1x_3\\2\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Picard Iterationen folgen $P(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\,ds$

0. ter Schritt $\quad p_0(t) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

1. ter Schritt $\quad p_1(t) = P(p_0)(t) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \int_0^t f(p_0(s))\,ds = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix}0\\1\\2t\end{pmatrix}$

2. ter Schritt $\quad p_2(t) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix}2t\\0\\2\end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t^2\\0\\2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t^2\\1\\2t\end{pmatrix}$

3. te Schritt $\quad p_3(t) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix}2t\\-2t^3\\2\end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix}t^2\\1-\frac{1}{2}t^4\\2t\end{pmatrix}$

[f .. stetig auf $\mathbb{R}^3$
... stetig diffbar bzgl. $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ lokal Lipschitz $\Rightarrow$ Lipschitz]

f ist Lipschitz $\quad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ .. stetig $\Rightarrow \exists$ Lösung des AWP

$\Rightarrow$ Iteration konvergiert gegen die Lösung

$x_3'(t) = 2 \quad x_3'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3(t) = 2t$

$x_1'(t) = x_2 x_3 = x_2\, 2t \qquad x_2'(t) = -x_1 x_3 = -x_1\, 2t$

$x_1(t) = \sin(t^2) \qquad x_2(t) = \cos(t^2)$ erfüllt

$x_1'(t) = \cos(t^2)\,2t$, $x_2'(t) = -\sin(t^2)\,2t$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix}\sin(t^2)\\\cos(t^2)\\2t\end{pmatrix}$ löst das AWP

$$\sin(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(t^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(t^2)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{4k}}{(2k)!}$$

die endlichen Summen bis $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$ sind die Werte aus der Picard Iteration

$$p_4(t) = \begin{pmatrix}t^2 - \frac{1}{6}t^6\\1-\frac{1}{2}t^4\\2t\end{pmatrix} \quad p_5(t) = \begin{pmatrix}t^2 - \frac{1}{6}t^6\\\frac{1}{3\cdot 8}t^8 - \frac{1}{2}t^4\\2t\end{pmatrix} \quad p_6(t) = \begin{pmatrix}t^2 - \frac{1}{6}t^6 + \frac{2}{6\cdot 20}t^{10}\\\frac{1}{3\cdot 8}t^8 - \frac{1}{2}t^4\\2t\end{pmatrix}$$

DGL Ü5

6) $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ... Gebiet $\quad J = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ... Intervall, $t_0 \in J$

$o \in C^1(J, \mathbb{R})$ ... Oberlösung $:\Leftrightarrow o'(t) > f(t, o(t)) \ \forall t > t_0$

zz: $o \in C^1(J, \mathbb{R})$ ... strikte Oberlösung, $\quad x \in C^1(J, \mathbb{R})$ ... Lösung von $x' = f(t,x)$

$\Rightarrow x(t_0) < o(t_0) \Rightarrow x(t) < o(t) \quad \forall t \in (t_0, b)$

$d(t) = o(t) - x(t) \qquad A := \{t \in (t_0, b) \mid d(t) \leq 0\}$

Indirekt angenommen $A \neq \emptyset$:

$x_0 := \inf A \qquad x_0 \neq t_0$, da $x(t_0) < o(t_0)$

$\Rightarrow \forall t \in [t_0, x_0) : d(t) > 0$

Da o und x stetig sind gilt d ... stetig $\Rightarrow d(x_0) = 0 \Rightarrow o(x_0) = x(x_0)$

$d'(x_0) = o'(x_0) - x'(x_0) = o'(x_0) - f(x_0, x(x_0)) > 0$, da Oberlösung

$$\lim_{t \to x_0^-} \frac{d(t) - d(x_0)}{t - x_0} = \lim_{t \to x_0^-} \frac{\overbrace{d(t)}^{>0}}{\underbrace{t - x_0}_{<0}} \leq 0 \qquad \text{↯ zu } d'(x_0) > 0$$

$\Rightarrow A = \emptyset$ also $\forall t \in (a,b) : x(t) < o(t)$

$\square$

5.

DGL Ü5

7) AWP $x'(t)=1-t+x(t)$, $x(t_0)=x_0$

a)

$$x(t)=e^{A(t)}\left(c+\int_{t_0}^{t}e^{-A(s)}b(s)\,ds\right). \quad a(t)=1 \quad A(t)=\int a(t)dt=t \quad b(t)=1-t$$

$$=e^{t}\left(c+\int_{t_0}^{t}e^{-s}(1-s)\,ds\right)=e^{t}\left(c+\int_{t_0}^{t}e^{-s}ds-\int_{t_0}^{t}se^{-s}ds\right)$$

$$=e^{t}\left(c-e^{-t}+e^{-t_0}+e^{-t}(1+t)-e^{-t_0}(1+t_0)\right)=e^{t}\left(c+te^{-t}-t_0e^{-t_0}\right)$$

$$=ce^{t}+t-t_0e^{t-t_0}$$

$$x(t_0)=ce^{t_0}+t_0-t_0e^{t_0-t_0}=ce^{t_0}+t_0-t_0=ce^{t_0}=x_0$$

$$\Rightarrow c=x_0e^{-t_0} \qquad \Rightarrow x(t)=x_0e^{-t_0}e^{t}+t-t_0e^{t-t_0}=e^{t-t_0}(x_0-t_0)+t$$

b) x_n... Approximation mit Euler am Punkt $t_n=t_0+nh$

zz: $x_n=(1+h)^n(x_0-t_0)+t_n$

Vollständige Induktion nach n: $n=0$: $x_0=x_0=(1+h)^0(x_0-t_0)+t_0$ ✓

$n+1$: $x_{n+1}=x_n+hf(t_n,x_n)=x_n+h(1-t_n+x_n(t_n))$

$$\overset{IV}{=}(1+h)^n(x_0-t_0)+\underline{t_n+h}-ht_n+hx_n$$

$$\overset{IV}{=}(1+h)^n(x_0-t_0)+t_{n+1}-\cancel{ht_n}+h((1+h)^n(x_0-t_0)+\cancel{t_n})$$

$$=(1+h)^n(x_0-t_0)+t_{n+1}+h(1+h)^n(x_0-t_0)$$

$$=(1+h)^n(x_0-t_0)(1+h)+t_{n+1}=(1+h)^{n+1}(x_0-t_0)+t_{n+1} \quad ✓$$

c) $T>t_0$ bel. $h:=\frac{T-t_0}{n}$ für $n\in\mathbb{N}$ zz: $\lim_{n\to\infty}x_n=x(T)$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(1+h)^n(x_0-t_0)+t_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{T-t_0}{n}\right)^n(x_0-t_0)+t_n$$

$$=(x_0-t_0)\exp(T-t_0)+T=x(T) \text{ laut a)}$$