ALG Ü5

157 (1) neu G... Gruppe $A, B \leq G$ zz: im Allgemeinen gilt nicht $AB \leq G$

Gegenbsp zu $AB \leq G$: $A := \{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \mid \exists p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} : \forall t \in \mathbb{R} : f(t) = t^p\}$

$B := \{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \mid \exists q \in \mathbb{Q} : \forall t \in \mathbb{R} : f(t) = t + q\}$

$G := \{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \mid \exists f^{-1} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} : f \circ f^{-1} = id = f^{-1} \circ f\}$

zz: $(G, \circ, id, ^{-1})$... Gruppe

zz: $\forall f, g \in G : f \circ g \in G$

Sei $f, g \in G$ bel. $\Rightarrow \exists f^{-1}, g^{-1} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} : f \circ f^{-1} = id = g \circ g^{-1}$

$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = id \Rightarrow f \circ g \in G$

zz: $id \in G$

$id \circ id = id \Rightarrow id \in G$

zz: $\forall f \in G \; \exists f^{-1} \in G$

$f^{-1} \in G$, da $(f^{-1})^{-1} = f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G \Rightarrow G$... Gruppe

zz: $A \leq G$

zz: $\forall f, g \in A : f \circ g \in A$

$\exists p_f, p_g \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} : f(t) = t^{p_f} \wedge g(t) = t^{p_g} \Rightarrow f \circ g = (t^{p_g})^{p_f} = \underbrace{t^{p_f \cdot p_g}}_{\in A}$ mit $p_f \cdot p_g \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

zz: $id \in A$

für $p = 1 \Rightarrow f(t) = t^1 = t$ also $id \in A$

zz: $\forall f \in A \; \exists f^{-1} \in A$

$\exists p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} : f(t) = t^p \quad g(t) = t^{\frac{1}{p}} \in A \Rightarrow f \circ g(t) = t^{p \cdot \frac{1}{p}} = t \Rightarrow g = f^{-1} \in A \leq G$

zz: $B \leq G$

zz: $\forall f, g \in B : f \circ g \in B$

$\exists p_f, p_g \in \mathbb{Q} : f(t) = t + p_f \wedge g(t) = t + p_g \Rightarrow f \circ g = t + p_g + p_f \in B$ mit $p_g + p_f \in \mathbb{Q}$

zz: $id \in B$

für $p = 0 \Rightarrow f(t) = t + 0 = t$ also $id \in B$

zz: $\forall f \in B \; \exists f^{-1} \in B$

$\exists p \in \mathbb{Q} : f(t) = t + p \quad g(t) = t + (-p) \in B \Rightarrow f \circ g(t) = t + (-p) + p = t \Rightarrow g = f^{-1} \in B \leq G$

ALG Ü5

157 (1) neu...

zz: $\neg$ $BA \leq G$

$BA = \{ f \circ g \mid f \in B \wedge g \in A \}$

$f(t) = t + 3 \in B$ $\quad$ $g(t) = t^{\frac{1}{2}} \in A$ $\quad$ $f \circ g(t) = t^{\frac{1}{2}} + 3 \in BA$

$f^{-1}(t) = t - 3$ $\quad$ $g^{-1}(t) = t^2$ $\quad$ $(g^{-1} \circ f^{-1})(t) = (t-3)^2$

$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g)(t) = (g^{-1} \circ f^{-1})(t^{\frac{1}{2}} + 3) = (t^{\frac{1}{2}} + 3 - 3)^2 = t \Rightarrow (f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1})$

zz: $g^{-1} \circ f^{-1}(t) = (t-3)^2 \notin BA$

$(t-3)^2 = t^2 - 6t + 9$

$\forall h \in AB\ \exists p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\ \exists q \in \mathbb{Q} : \forall t \in \mathbb{Q} : h(t) = t^p + q$

Für $t = 0 \Rightarrow 9 = q$ $\quad$ Für $t = 1 \Rightarrow 1 - 6 + 9 = 4 = 1^p + 9 = 10$ ↯

$\Rightarrow (f \circ g)^{-1} \notin BA$ also ist BA keine Gruppe

ALG Ü5

157) G ... Gruppe $\quad A, B \leq G$

(1) $\neg(A, B \leq G \Rightarrow AB \leq G)$

Gegenbsp: $G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ $(G, \circ, id, ^{-1})$ ... Gruppe

$A := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{Q}\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^m\}$

$B := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x + n\}$

zz: $A, B \leq G$ $\quad$ Sei $f, f' \in A, g, g' \in B$ bel.

$f \circ f'(x) = f(x^{m'}) = (x^{m'})^m = x^{(m \cdot m')} \Rightarrow f \circ f' \in A$

$f^{-1}(x) := x^{\frac{1}{m}}$ $\quad f \circ f^{-1}(x) = f(x^{\frac{1}{m}}) = x^{(\frac{1}{m} \cdot m)} = x \Rightarrow f \circ f^{-1} = id = x^1 \in A$

$g \circ g'(x) = g(x + n') = (x + n') + n = x + (n' + n) \Rightarrow g \circ g^{-1} \in B$

$g^{-1}(x) := x - n$ $\quad g \circ g^{-1}(x) = g(x - n) = x - n + m = x \Rightarrow g \circ g^{-1} = id = x + 0 \in B$

zz: $AB \nleq G$

$f(x) = x^2 \in A$ $\quad g(x) = x + 5 \in B$ $\quad f \circ g(x) = (x+5)^2 \in AB$

$(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} - 5 \notin AB$ $\quad \Rightarrow AB$ ist keine Gruppe

(2) $A \trianglelefteq G, B \leq G \Rightarrow AB = BA \leq G$

zz: $AB = BA$ $\quad$ Sei $a \in A, b \in B$ bel. Da A ein Normalteiler ist gilt

$\forall x \in G\ \exists a' \in A : xa = a'x \quad \Rightarrow \exists a' \in A : ba = a'b \in AB \ \wedge \exists a'' \in A : ab = ba'' \in BA \Rightarrow AB = BA$

zz: $AB \leq G$ $\quad$ Sei $a, \hat{a} \in A,\ b, \hat{b} \in B$ bel.

zz: $ab\hat{a}\hat{b} \in AB$ $\quad$ Da $AB = BA$ gilt $\exists \hat{a}' \in A, b' \in B : b\hat{a} = \hat{a}'b'$

$\Rightarrow ab\hat{a}\hat{b} = a\hat{a}'b'\hat{b} \in AB$

zz: $\exists c \in A, d \in B : abcd = 1$

$\exists c \in A, d \in B : b^{-1}a^{-1} = cd \quad \Rightarrow a^{-1}d^{-1} = bc \quad \Rightarrow abcd = aa^{-1}d^{-1}d = 1$

zz: $1 \in AB$ $\quad 1 \in A, 1 \in B \Rightarrow 1 \cdot 1 = 1 \in AB$

(3) $A, B \trianglelefteq G \Rightarrow AB \trianglelefteq G$

Das $AB \leq G$ ist haben wir schon in (2) gezeigt. zz: $\forall x \in G : xAB \subseteq ABx$

Sei $x \in G, a \in A, b \in B$ bel. $\quad xab = a'xb = a'b'x \in ABx$, da A und B Normalteiler

sind und somit $\forall x \in G, a \in A, b \in B : \exists a' \in A, b' \in B : xa = a'x \wedge xb = b'x$ $\quad$ ...

ALG Ü5

157) (4) $N_1, \dots, N_k \trianglelefteq G$ $\quad \sup(N_1, \dots, N_k) = N_1 N_2 \cdots N_k$

zz: $N_1 N_2 \cdots N_k$ ist obere Schranke von $N_1, \dots, N_k$

Sei $i \in \{1, \dots, k\}$ bel. Sei $x \in N_i$ bel. Da $1 \in N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_k$ gilt

$\underset{\text{i-te Stelle}}{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \underset{\uparrow}{x} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} = x \in N_1 N_2 \cdots N_k \quad \Rightarrow N_i \subseteq N_1 N_2 \cdots N_k$

zz: $N_1 N_2 \cdots N_k$ ist kleinste obere Schranke von $N_1, \dots, N_k$

Sei S eine bel. obere Schranke von $N_1, \dots, N_k$. Offenbar muss gelten $\forall i \in \{1, \dots, k\}: N_i \subseteq S$ damit S obere Schanke ist. Sei $x_1 \in N_1, \dots, x_k \in N_k$ bel.

Da $x_1, \dots, x_k \in S \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \in S$ damit S eine Gruppe ist.

$\Rightarrow N_1 N_2 \cdots N_k \subseteq S$ also ist $N_1 N_2 \cdots N_k$ das Supremum

(5) $\forall i \in I \neq \emptyset \quad N_i \trianglelefteq G \quad \Rightarrow \sup_{i \in I} N_i = N = \bigcup_{\substack{J \subseteq I \\ k = |J| < \infty}} (N_{j_1} N_{j_2} \cdots N_{j_k})$

zz: N ist obere Schranke

Sei $i \in I$ bel. Da $\{i\} \subseteq I$ und $|\{i\}| < \infty$ gilt $N_i \subseteq N$.

zz: N ist kleinste obere Schranke

Sei S eine bel. obere Schanke von $(N_i)_{i \in I}$. Offenbar muss $\forall i \in I: N_i \subseteq S$.

Sei $J \subseteq I$ mit $|J| < \infty$ bel. Da $\forall j \in J: N_j \subseteq S$ und S unter den Operationen abgeschlossen ist muss $\forall n_1 \in N_{j_1}, \dots, n_k \in N_{j_k}: n_1 n_2 \cdots n_k \in S$

$\Rightarrow \bigcup_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = k < \infty}} (N_{j_1} N_{j_2} \cdots N_{j_k}) \subseteq S \quad \Rightarrow N$ ist kleinste obere Schranke $\quad \square$