

ALC 08

2008) K-Varietät von Algebren oder Klasse aller Körper

$(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$... Familie von Algebren in \mathcal{K} $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$... Familie mit

$\forall n \in \mathbb{N}: f_n: R_n \rightarrow R_{n+1}$ - Homomorphismen

Satz 2342: \exists bis auf Isomorphie eindeutige Algebra $R_\infty \in K$ und

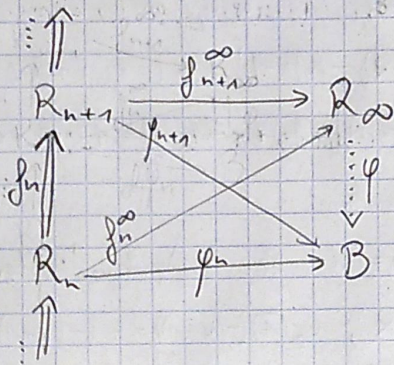
Homomorphismen $f_n: R_n \rightarrow R_\infty$ mit

$\forall B \in K \quad \forall (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$ Komm. von R_n nach B mit $\forall n: \varphi_n = \varphi_{n+1} \circ f_n$ gilt

$\exists! \varphi: R_\infty \rightarrow B \dots$ Mon. mit $\forall n: \varphi \circ f_n^\infty = \varphi_n$

(Es gilt $R_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$)

ges: Kategorie \mathcal{C} , sodass \exists initiales Element in \mathcal{C} ist Umformulierung von Folgend
in Satz 2342.

$$\text{Ob}(\mathcal{C}) = \mathcal{C} := \{R_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{Hom}(\mathcal{C}) = \langle \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \rangle \quad \text{Abschluss bzgl. Verkettung}$$


R₂ 131 initiales Obj

$$\Leftrightarrow \forall B \in C \exists ! \varphi: R_\infty \rightarrow B$$

q... Koin

Sei $B \in C$ bel. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists! \varphi_n: R_n \rightarrow B$... Kom mit $\forall k \in \mathbb{N}: \varphi_k = \varphi_{k+1} \circ \varphi_k$

Da $BEC \exists k \in \mathbb{N}: B = R_k$ offenbar ist $\varphi_n = f_{k-1} \circ f_{k-2} \circ \dots \circ f_{n+1} \circ f_n$ und somit
eindeutig bestimmt. $\Rightarrow \exists! \varphi: R_\infty \rightarrow B$ kom mit $\forall n: \varphi \circ f_n^\infty = \varphi_n$

$$R_\infty \in C \Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : R_\infty = R_l \quad \Rightarrow \varphi = f_{n_l} \circ \dots \circ f_l \quad ; \quad f_n^\infty = f_{n_l} \circ \dots \circ f_l$$

und somit immer auch $\varphi \circ f_n^\infty = f_{k-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_n = \varphi_n$

Somit gilt tatsächlich $\forall B \in C \exists! \varphi: R_X \rightarrow B \dots$ Kom