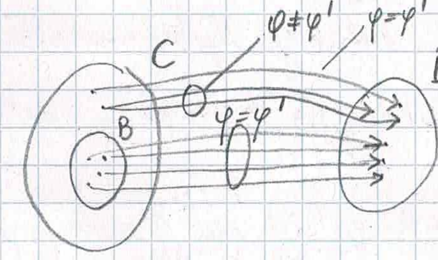
ALG Ü3

97) $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ ... Algebren $\quad \varphi, \varphi' : C \to D$ ... Homomorphismen $\quad B \subseteq C$

$$\left(C = \langle B \rangle \ \wedge \ \forall b \in B: \varphi(b) = \varphi'(b) \right) \Rightarrow \varphi = \varphi'$$



Beweis: Sei $c \in C$ beliebig.

Da $C = \langle B \rangle$ $\exists t \in \mathbb{T}_c$ (die von $\mathcal{C}$ erzeugte Termalgebra) $\exists b_1, \dots, b_n \in B$ (wobei n die Stufe des Termes t ist):

$t(b_1, \dots, b_n) = c$

$$\varphi(c) = \varphi(t(b_1, \dots, b_n)) \overset{(1)}{=} t(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)) \overset{(2)}{=} t(\varphi'(b_1), \dots, \varphi'(b_n))$$
$$\overset{(3)}{=} \varphi'(t(b_1, \dots, b_n)) = \varphi'(c).$$

(1), (3) ... da φ und φ' Homomorphismen sind können alle Operationen mit den Homomorphismen vertauscht werden

(2) ... nach Angabe haben alle Elemente aus B die gleichen Bilder unter beiden Homomorphismen.

$\Rightarrow \varphi = \varphi'$ $\square$

Für Körper $K, \tilde{K}$ gilt wenn $\varphi, \tilde{\varphi}: K \to \tilde{K}$ zwei Homomorphismen sind und $\exists k \in K \setminus \{0\}: \varphi(k) = \varphi'(k) \Rightarrow \varphi = \varphi'$, da $\langle k \rangle = K$.

ALG Ü3

107) $(\mathcal{A}_k)_{k\in K}$ ... Familie von Algebren derselben Typs

$\mathcal{A} := \prod_{k\in K} \mathcal{A}_k \qquad \forall j\in K: \; p_j : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_j$ ... j-te Projektion

$\mathcal{B}$ ... beliebige Algebra vom selben Typ wie die $\mathcal{A}_k$

$\forall j\in K: q_j : \mathcal{B} \to \mathcal{A}_j$ ... beliebiger Homomorphismus

zz: (1) $\forall j\in K: p_j$ ist ein Homomorphismus

Sei $j\in K$ bel. Sei $(a_k)_{k\in K}\in A$ bel. Sei $\omega_i^{\mathcal{A}}$ eine beliebige Operation von $\mathcal{A}$.

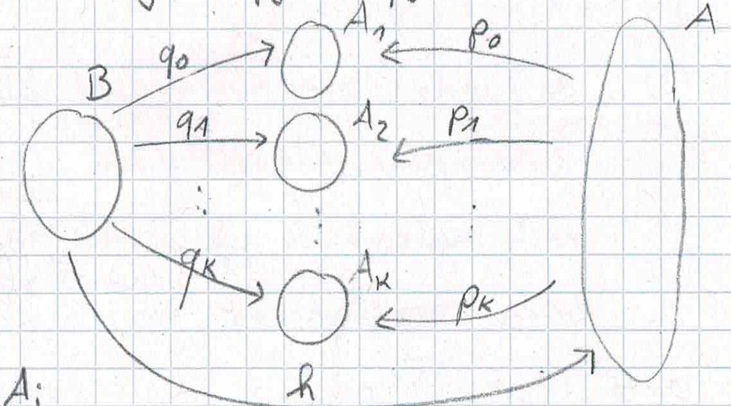
$$p_j(\omega_i^{\mathcal{A}}((a_k)_{k\in K})) = p_j((\omega_i^{\mathcal{A}_k}(a_k))_{k\in K}) = \omega_i^{\mathcal{A}_j}(a_j) = \omega_i^{\mathcal{A}_j}(p_j((a_k)_{k\in K}))$$

$\Rightarrow p_j$ ist ein Homomorphismus

zz: (2) $\exists!\, h: \mathcal{B}\to\mathcal{A}$ ... Homomorphismus : $\forall j\in K: p_j\circ h = q_j$

$h: B \to A$

$b \mapsto (q_j(b))_{j\in K}$



zz: (i) $h(B)\subseteq A$

Sei $b\in B$ bel. $\forall j\in K: q_j(b) =: a_j\in A_j$

$\Rightarrow h(b) = (a_j)_{j\in K}\in A$

zz: (ii) $\forall \omega_i^B$ ... Operation auf B $\forall b_1,\dots,b_n\in B: h(\omega_i^B(b)) = \omega_i^{\mathcal{A}}(h(b))$

Sei $\omega_i^B, b_1,\dots,b_n$ beliebig.

$$\omega_i^{\mathcal{A}}(h(b)) \underset{\text{Definition von } h}{=} \omega_i^{\mathcal{A}}((q_j(b))_{j\in K}) \underset{\omega_i^{\mathcal{A}} \text{ ist komponentenweise definiert}}{=} (\omega_i^{\mathcal{A}_j}(q_j(b)))_{j\in K} \underset{q_j \text{ ist Homomorphismus}}{=} q_j(\omega_i^B(b)) \underset{\text{Definition von } h}{=} h(\omega_i^B(b))$$

$\Rightarrow h$ ist Homomorphismus

zz: (iii) $\forall j\in K: p_j\circ h = q_j$

Sei $j\in K$, $b\in B$ bel. $\quad p_j(h(b)) = p_j((q_\ell(b))_{\ell\in K}) = q_j(b)$

zz: (iv) $\forall \hat{h}: B\to\mathcal{A}$ ... Homomorphismus: $\forall j\in K: p_j\circ\hat{h} = q_j \Rightarrow h = \hat{h}$

Sei $\hat{h}$ nach diesen Vorgaben beliebig. Sei $b\in B$ bel. $(a_\ell)_{\ell\in K} := \hat{h}(b)\in A$

$\forall j\in K: p_j\circ\hat{h}(b) = p_j((a_\ell)_{\ell\in K}) = a_j = q_j(b)$ also stimmen $h(b)$ und $\hat{h}(b)$ in der j-ten Komponente überein. $\Rightarrow$ Sie stimmen in allen Komponenten überein $\Rightarrow h = \hat{h}$ $\square$

ALG Ü3

115+116) $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ $\quad\sim$ gegeben durch $\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6,7\}\}$

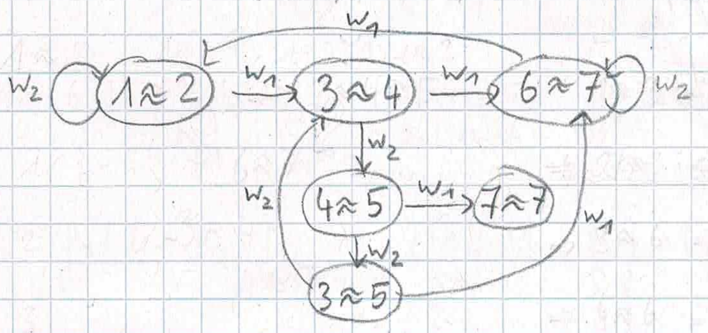
ges: $\mathcal{A}(A,\omega_1,\dots,\omega_k)$, sodass $\sim$ die einzige nichttriviale Kongruenzrelation der Algebra ist.

$\omega_1: A^1 \to A$

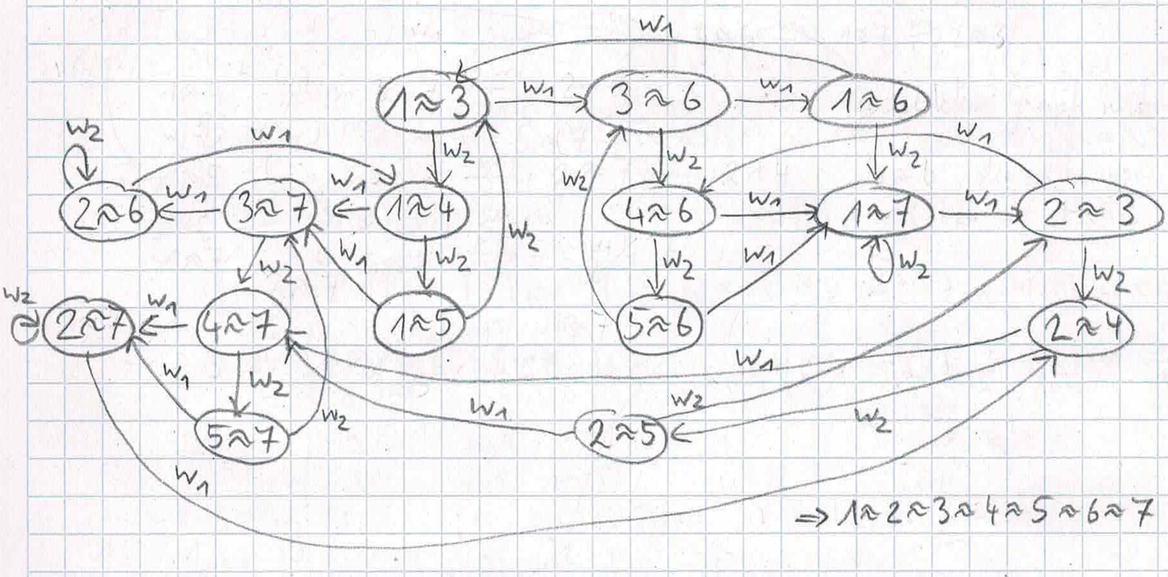
$$a \mapsto \begin{cases} 3 & , a=1 \\ 4 & , a=2 \\ 6 & , a=3 \\ 7 & , a=4 \\ 7 & , a=5 \\ 1 & , a=6 \\ 2 & , a=7 \end{cases}$$

$\omega_2: A^1 \to A$

$$a \mapsto \begin{cases} 1 & , a=1 \\ 2 & , a=2 \\ 4 & , a=3 \\ 5 & , a=4 \\ 3 & , a=5 \\ 6 & , a=6 \\ 7 & , a=7 \end{cases}$$



$\Rightarrow 1\approx 2 \qquad 3\approx 4\approx 5 \qquad 6\approx 7$



$\Rightarrow 1\approx 2\approx 3\approx 4\approx 5\approx 6\approx 7$

116)

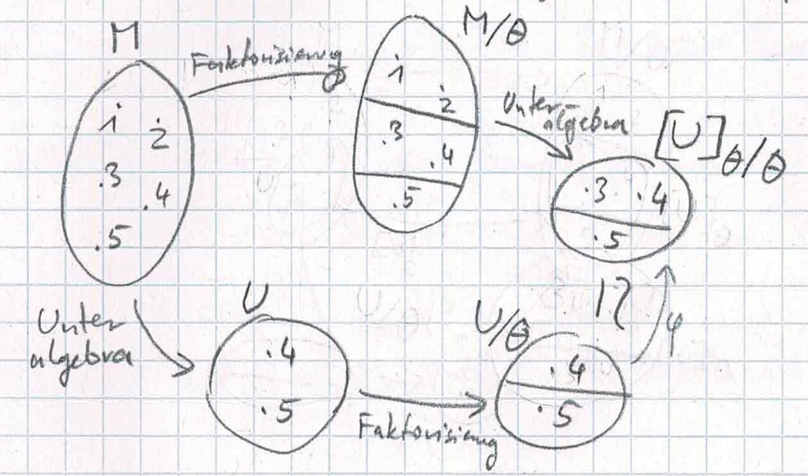
$\cancel{\not\exists}$

ALG Ü3

126) $M=\{1,2,3,4,5\}$ Θ.. Äquivalenzrelation definiert durch $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$

$U=\{4,5\}$ ges: $\mathcal{M}=(M, w_1, w_2)$ sodass

neben Allrelation nicht $2\sim3$. Θ Kongruenz, U... Unteralgebra und Isomorphismus



$\varphi: U/_\Theta \to [U]_\Theta/_\Theta$

$\varphi([4]_{\Theta|_U}) = [4]_\Theta \; (=\{3,4\})$

$\varphi([5]_{\Theta|_U}) = [5]_\Theta \; (=\{5\})$

$$w_1(a) = \begin{cases} 2, & \text{falls } a=1 \\ 1 & a=2 \\ 4 & 3 \\ 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{cases} \qquad w_2(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a=1 \\ 2 & a=2 \\ 5 & 3 \\ 5 & 4 \\ 5 & 5 \end{cases}$$

Offenbar $w_1(U) \subseteq U$, $w_2(U) \subseteq U$

$1\sim2 \Rightarrow w_{1/2}(1) \sim w_{1/2}(2) \Leftrightarrow 1\sim2$ ✓

$3\sim4 \Rightarrow w_1(3)\sim w_1(4) \Leftrightarrow 4\sim4$ ✓ $w_2(3)\sim w_2(4) \Leftrightarrow 5\sim5$ ✓

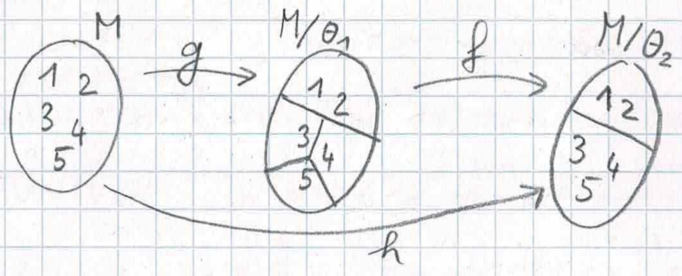
$2\sim3 \Rightarrow w_2(2)\sim w_2(3) \to 2\sim5 \to w_1(2)\sim w_1(5) \Rightarrow 1\sim5$

$\Rightarrow w_1(2)\sim w_1(3) \Rightarrow 1\sim4$ also $1\sim2\sim3\sim4\sim5$ ✓

ALG Ü3

129) $M=\{1,2,3,4,5\}$ Partitionen $\underbrace{\{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}}_{\Theta_1}$ und $\underbrace{\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}}_{\Theta_2}$

ges: Isomorphismus nach zweiten Isomorphiesatz



g, h... Isomorphismus existieren nach erstem Isomorphisatz

$$f: \frac{M/\Theta_1}{\Theta_2/\Theta_1} \longrightarrow M/\Theta_2$$

$$[[a]_{\Theta_1}]_{\Theta_2/\Theta_1} \mapsto [a]_{\Theta_2}$$

$$f([[1]_{\Theta_1}]_{\Theta_2/\Theta_1}) = [1]_{\Theta_2} = [2]_{\Theta_2} = f([[2]_{\Theta_2}]_{\Theta_2/\Theta_1})$$

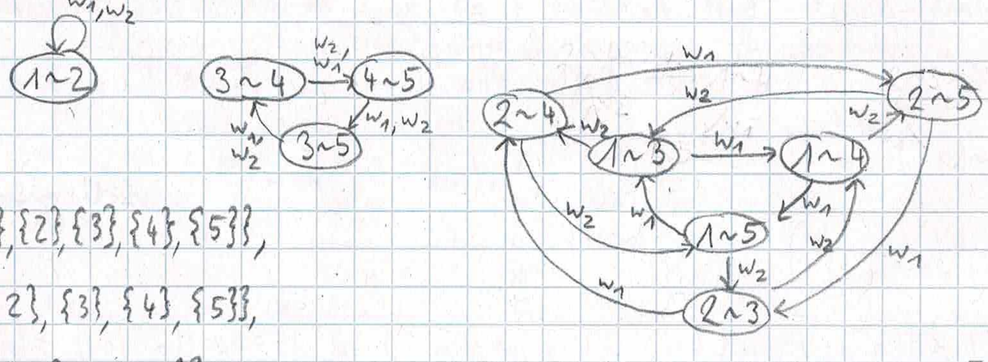
$$f([[3]_{\Theta_1}]_{\Theta_2/\Theta_1}) = [3]_{\Theta_2} \;(=)\; f([[4]_{\Theta_1}]_{\Theta_2/\Theta_1}) = [4]_{\Theta_2}$$
$$(=) f([[5]_{\Theta_1}]_{\Theta_2/\Theta_1}) = [5]_{\Theta_2}$$

f ist nach dem zweiten Isomorphiesatz ein Isomorphismus

$\mathcal{M} = (M, w_1, w_2)$

$$w_1: M \to M \qquad a \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } a=1 \\ 2, & \text{falls } a=2 \\ 4, & a=3 \\ 5, & a=4 \\ 3, & a=5 \end{cases}$$

$$w_2: M \longrightarrow M \qquad a \mapsto \begin{cases} 2, & \text{falls } a=1 \\ 1, & a=2 \\ 4, & a=3 \\ 5, & a=4 \\ 3, & a=5 \end{cases}$$



$\Rightarrow \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$,

$\{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$,

$\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$,

$\{\{1,2,3,4,5\}\}$ sind die einzigen Partitionen durch hinschauen des Graphen.

ALG Ü3

134) H... Halbgruppe

zz: $\forall n,m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\ \forall a \in H: a^{m+n} = a^m a^n$

Vollständige Induktion nach n $\quad M := \{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \mid \forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}: a^{m+n} = a^m a^n\}$

$1 \in M$, da $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}: a^{m+1} = a^m \cdot a = a^m \cdot a^1$

M ist abgeschlossen bezgl. Nachfolger, da $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$a^{m+(n+1)} = a^{m+n+1} = a^{m+n} \cdot a \overset{(IV)}{=} (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^m (a^n \cdot a) = a^m \cdot a^{n+1}$$

H... Monoid

zz: $\forall n,m \in \mathbb{N}\ \forall a \in H: a^{m+n} = a^m a^n$

$n = 0: \quad a^{m+0} = a^m = a^m \cdot e = a^m \cdot a^0$

H... Monoid und a^{-1} existiert

zz: $\forall n,m \in \mathbb{Z}: a^{m+n} = a^m a^n$

1. Fall $n,m \geq 0$: bereits oben gezeigt

2. Fall $n < 0 \wedge m \geq 0$: $\quad k := -n \Rightarrow k > 0$

Vollständige Induktion nach k $\quad M := \{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \mid \forall m \in \mathbb{N}: a^{m-k} = a^m a^{-k}\}$

$1 \in M$, da $\forall m \in \mathbb{N}: a^m \cdot a^{-1} = (a^{m-1} \cdot a) \cdot a^{-1} = a^{m-1} \cdot (a \cdot a^{-1}) = a^{m-1} \cdot e = a^{m-1}$

M ist unter Nachfolgern abgeschlossen, da $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$a^m a^{-(k+1)} = a^m (a^{-1})^{k+1} = a^m ((a^{-1})^k \cdot a^{-1}) = (a^m \cdot a^{-k}) \cdot a^{-1} = a^{m-k} \cdot a^{-1}$$
$$= (a^{m-k-1} \cdot a) \cdot a^{-1} = a^{m-(k+1)} (a \cdot a^{-1}) = a^{m-(k+1)}$$

3. Fall $n,m < 0$: $\quad k := -n \quad l := -m$

$$a^{m+n} = a^{-l-n} = a^{-(l+n)} = (a^{-1})^{l+n} = (a^{-1})^l (a^{-1})^n = a^{-l} \cdot a^{-n} = a^m a^n$$

$\square$