ALG Ü6

212) (1) Begründen Sie: $C_{50} \cong C_{25} \times C_2$

25, 2 haben keinen gemeinsamen Teiler > 1 $\overset{167}{\Longrightarrow}$ $C_{25} \times C_2$ ... zyklisch

$|C_{25} \times C_2| = 25 \cdot 2 = 50 = |C_{50}|$ Da C_{50}, $C_{25} \times C_2$ beides zyklische Gruppen mit Mächtigkeit 50 sind gilt $C_{50} \cong C_{25} \times C_2$. (Bsp 167 gibt den Isomorphismus an)

(2) Begründen Sie: $C_2 \times C_{10} \cong C_2 \times C_2 \times C_5$

Wie oben gilt $C_{10} \cong C_2 \times C_5$. Nennen wir den Isomorphismus $g: C_2 \times C_5 \to C_{10}$

$f: C_2 \times C_2 \times C_5 \to C_2 \times C_{10}$ $(a,b,c) \mapsto (a, g(b,c))$. klarerweise Isomorphismus (siehe unten)

(3) Begründen Sie: $C_2^2 \times C_4^2 \times C_7^3 \cong C_2 \times (C_2 \times C_7) \times (C_4 \times C_7) \times (C_4 \times C_7) \cong C_2 \times C_{14} \times C_{28} \times C_{28}$

$C_2^2 \times C_4^2 \times C_7^3 = (C_2 \times C_2) \times (C_4 \times C_4) \times (C_7 \times C_7 \times C_7)$

$f: (C_2 \times C_2) \times (C_4 \times C_4) \times (C_7 \times C_7 \times C_7) \to C_2 \times (C_2 \times C_7) \times (C_4 \times C_7) \times (C_4 \times C_7)$

$((a,b),(c,d),(e,f,g)) \mapsto (a,(b,e),(c,f),(d,g))$ ist als Permutation bijektiv und klarerweise ein Homomorphismus. Damit ist die erste Isomorphie klar.

Wieder wie oben gilt $C_2 \times C_7 \cong C_{14}$ und $C_4 \times C_7 \cong C_{28}$.

$g_1: C_2 \times C_7 \to C_{14}$, $g_2: C_4 \times C_7 \to C_{28}$ ... die beiden Isomorphismen

$f: C_2 \times (C_2 \times C_7) \times (C_4 \times C_7) \times (C_4 \times C_7) \to C_2 \times C_{14} \times C_{28} \times C_{28}$

$(a,(b,c),(d,e),(f,g)) \mapsto (a, g_1(b,c), g_2(d,e), g_2(f,g))$ ... klarerweise ein Isomorphismus (zeigt man analog wie in (2))

---

surjektiv: Sei $x \in C_2$, $y \in C_{10}$ bel. Da g ... surjektiv $\Rightarrow \exists b \in C_2, c \in C_5: g(b,c) = y$

$\Rightarrow f(x,b,c) = (x, g(b,c)) = (x,y)$

injektiv: Sei $x,y \in C_2$, $z \in C_5$ mit $f(x,y,z) = (0,0)$ bel. $f(x,y,z) = (x, g(y,z))$

$\Rightarrow x = 0$ und da g ... injektiv $\Rightarrow (y,z) = (0,0)$

Homomorphismus: Sei $a,b,x,y \in C_2$, $c,z \in C_5$ bel. Da g ein Homomorphismus ist gilt:

$f((a,b,c)+(x,y,z)) = f(a+x, b+y, c+z) = (a+x, g(b+y, c+z)) \overset{\downarrow}{=} (a+x, g(b,c)+g(y,z))$
$= (a, g(b,c)) + (x, g(y,z)) = f(a,b,c) + f(x,y,z)$