ALG Ü4

125) $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ... aufsteigende Familie von Algebren

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i =: \mathcal{A}_\infty$

zz: $\exists\, \mathcal{U} \leq \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i \;\exists f: \mathcal{U} \to \mathcal{A}_\infty$ ... Homomorphismus

$B := \{(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i : \exists i_0 \in \mathbb{N}\; \forall j \geq i_0 : a_j = a_{i_0}\} \subseteq \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i$

zz: $B \leq \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i$ also B ist Unteralgebra von $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i$

Sei $\omega^{\prod \mathcal{A}_i}$ eine beliebige Operation auf $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i$. Sei n die Stelligkeit von $\omega^{\prod \mathcal{A}_i}$ und

$\vec{b_1} = (b_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, \vec{b_n} = (b_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} \in B$ beliebig.

$\omega^{\prod \mathcal{A}_i}(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}) = (\omega^{\mathcal{A}_j}(b_{1,j}, \ldots, b_{n,j}))_{j\in\mathbb{N}}$

$\forall k \in \{1,\ldots,n\}\; \exists\, l_k \in \mathbb{N}\; \forall j \geq l_k : b_{k,j} = b_{k,l_k}$, da $(b_{k,j})_{j\in\mathbb{N}} \in B$

Sei $\hat{l}$ eine obere Schranke von $\{l_k : k \in \{1,\ldots,n\}\}$.

$\Rightarrow \forall j \geq \hat{l} : \omega^{A_j}(b_{1,j}, \ldots, b_{n,j}) = \omega^{A_{\hat{l}}}(b_{1,\hat{l}}, \ldots, b_{n,\hat{l}})$ ..."konstant" $\Rightarrow B$ ist abgeschlossen

$\sim \subseteq B \times B$ mit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \sim (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists\, i_1 \in \mathbb{N}\; \forall j \geq i_1 : a_j = b_j$

zz: $\sim$ ist Äquivalenzrelation also reflexiv, transitiv und symmetrisch

Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}, (b_j)_{j\in\mathbb{N}}, (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in B$ bel.

$(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \sim (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, da für $i_1 = 0$ gilt $\forall j \geq i_1$ (also $j \in \mathbb{N}$): $a_j = a_j$

$(a_j) \sim (b_j) \wedge (b_j) \sim (c_j) \Rightarrow \exists\, i_1, i_2 \in \mathbb{N} ((\forall j \geq i_1 : a_j = b_j) \wedge (\forall j \geq i_2 : b_j = c_j)) \Rightarrow \forall j \geq \max(i_1; i_2) : a_j = b_j = c_j$

$(a_j) \sim (b_j) \Rightarrow \exists\, i_1 \in \mathbb{N}\; \forall j \geq i_1 : a_j = b_j \Rightarrow \forall j \geq i_1 : b_j = a_j$

zz: $\sim$ ist Kongruenzrelation also verträglich mit allen Operationen

Sei $\omega^{\prod \mathcal{A}_i}$ eine beliebige Operation auf B. Sei n die Stelligkeit und $\vec{a_1} = (a_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, \vec{a_n} = (a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$,

$\vec{b_1} = (b_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, \vec{b_n} = (b_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} \in B$ mit $\vec{a_1} \sim \vec{b_1}, \ldots, \vec{a_n} \sim \vec{b_n}$ beliebig.

$\Rightarrow \exists\, l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{N} : \forall i \in \{1,\ldots,n\}\; \forall j \geq l_i : a_{i,j} = a_{i,l_i} = b_{i,l_i} = b_{i,j} =: c_i \qquad l = \max\{l_1, \ldots, l_n\}$

$\Rightarrow \omega^{\prod \mathcal{A}_i}(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}) = (\omega^{A_j}(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}))_{j\in\mathbb{N}} \sim (\omega^{A_l}(c_1, \ldots, c_n))_{j\in\mathbb{N}} \sim (\omega^{A_j}(b_{1,j}, \ldots, b_{n,j}))_{j\in\mathbb{N}} = \omega^{\prod \mathcal{A}_i}(\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$

$C := B/\sim$

$\Rightarrow C$ ist Trägermenge einer Algebra $\mathcal{C}$ vom gleichen Typ wie B

...

ALG Ü4

125) ...

zz: $\mathcal{C} \simeq \mathcal{A}_\infty$ also $\exists f: C \to A_\infty$ ... Homomorphismus $\qquad \in A_{i_0} \subseteq A_\infty$

Für $[(c_j)_{j\in\mathbb{N}}]_\sim \in C$ gilt $\forall (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in [(c_j)_{j\in\mathbb{N}}]_\sim \ \exists i_0 \in \mathbb{N} \ \forall j \geq i_0: c_j = c_{i_0} =: \hat{c}$

Wir wollen zeigen, dass dieser Wert für unterschiedliche $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}, (d_j)_{j\in\mathbb{N}} \in [(c_j)_{j\in\mathbb{N}}]_\sim$ gleich ist. Da $(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \sim (d_j)_{j\in\mathbb{N}} \Rightarrow \exists i_1 \in \mathbb{N} \ \forall j \geq i_1: c_j = d_j$

$\exists i_c \in \mathbb{N} \ \forall j \geq i_c: c_j = c_{i_c} \quad \exists i_d \in \mathbb{N} \ \forall j \geq i_d: d_j = d_{i_d} \quad i := \max\{i_1, i_c, i_d\}$

$\Rightarrow \forall j \geq i: c_j = c_i = d_i = d_j$ $\Rightarrow$ gleicher Wert c in oberer Formel

$f([(c_j)_{j\in\mathbb{N}}]_\sim) := \hat{c}$ (also dieser Wert aus A_∞)

Wohldefiniert: oben gezeigt

Homomorphismus:

Sei ω^C eine n-stellige Operation auf C. Sei $[(c_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}]_\sim, \dots, [(c_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}]_\sim \in C$ bel.

$$f(\omega^C([(c_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}]_\sim, \dots, [(c_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}]_\sim)) = f(\omega^B((\hat{c}_1)_{j\in\mathbb{N}}, \dots, (\hat{c}_n)_{j\in\mathbb{N}}))$$

$$= f((\omega^{A_i}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n))_{j\in\mathbb{N}}) = \omega^{A_i}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n) = \omega^{A_\infty}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n)$$

$$\omega^{A_\infty}(f([(c_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}]_\sim), \dots, f([(c_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}]_\sim)) = \omega^{A_\infty}(f((\hat{c}_1)_{j\in\mathbb{N}}), \dots, f((\hat{c}_n)_{j\in\mathbb{N}}))$$

$$= \omega^{A_\infty}(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n)$$

$\Rightarrow \mathcal{C} \simeq \mathcal{A}_\infty$

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "\text{Unteralgebra}"'] & & \mathcal{A}_\infty \\
& \mathcal{B} \arrow[r, "\text{Faktorisieren nach Kongruenz}"'] & \mathcal{C} \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$