ALG Ü1

5) gegeben: (1) $\forall x: x+0=x$ (2) $0+1=1$ (3) $\forall x,y: (x+y)+1 = x+(y+1)$

a) zz: $\forall y: 0+y=y$

vollständige Induktion $M:=\{y : 0+y=y\}$

$0\in M$, da für $y:=0$ gilt $0+y=0+0 \overset{(1)}{=} 0=y$

M ist unter Nachfolgern abgeschlossen:

(IV) $y\in M$ also $0+y=y$ zz: $y+1\in M$ also $0+(y+1)=y+1$

$0+(y+1) \overset{(3)}{=} (0+y)+1 \overset{(IV)}{=} y+1$

$\Rightarrow M=\mathbb{N}$ also $\forall y: 0+y=y$

b) zz: $\forall x\,\forall y: x+y=y+x$

* Wir zeigen zuerst $\forall a\,\forall b: a+(1+b)=(a+1)+b$ durch vollständige Induktion: $S:=\{b \mid \forall a: a+(1+b)=(a+1)+b\}$

$0\in S$, da für $b:=0$ gilt $a+(1+0) \overset{(1)}{=} a+1 \overset{(1)}{=} (a+1)+0$

S ist unter Nachfolgern abgeschlossen:

(IV) $\forall a: a+(1+b)=(a+1)+b$ zz: $a+(1+(b+1)) = (a+1)+(b+1)$

Sei a bel. $a+(1+(b+1)) \overset{(3)}{=} a+((1+b)+1) \overset{(3)}{=} (a+(1+b))+1$

$\overset{(IV)}{=} ((a+1)+b)+1 \overset{(3)}{=} (a+1)+(b+1)$

$\Rightarrow S=\mathbb{N}$ also $\forall a\,\forall b: a+(1+b)=(a+1)+b$

Nun zur Kommutativität durch vollständige Induktion

$T:=\{x \mid (\forall y: x+y=y+x)\}$

$0\in T$, da $0+y \overset{(a)}{=} y \overset{(1)}{=} y+0$

Δ $1\in T$, da $U:=\{y : 1+y=y+1\}$ $0\in U$, da $1+0 \overset{(1)}{=} 1 \overset{(2)}{=} 0+1$

U ist unter Nachfolgern abgeschlossen, da $1+(y+1) \overset{(3)}{=} (1+y)+1 \overset{IV}{=} (y+1)+1$

T ist unter Nachfolgern abgeschlossen, da wenn wir voraussetzen $\forall y: x+y=y+x$ folgt für bel. y, dass $(x+1)+y \overset{*}{=} x+(1+y) \overset{\Delta}{=} x+(y+1) \overset{(3)}{=} (x+y)+1$

$\overset{IV}{=} (y+x)+1 \overset{(3)}{=} y+(x+1)$

$\Rightarrow T=\mathbb{N}$ also $\forall x\,\forall y: x+y=y+x$ $\square$