ALG Ü10

345+346!) zz: $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib : a,b\in\mathbb{Z}\}$ ist euklidisch vermittels der euklidischen Bewertung $H(z):=|z|^2$

Def Integritätsbereich R heißt euklidischer Ring $\Leftrightarrow \forall a\in R\setminus\{0\}, b\in R\ \exists q,r\in R: b=aq+r$ mit $r=0 \vee H(r)<H(a)$

Das $\mathbb{Z}[i]$ abgeschlossen bzgl. $+,\cdot,0,1,-$ ist, ist klar. $\Rightarrow$ Ring mit 1

Das $\mathbb{Z}[i]$ kommutativ ist ebenso. Die Nullteilerfreiheit vererbt sich von den komplexen Zahlen, in die $\mathbb{Z}[i]$ eingebettet ist. $\Rightarrow$ Integritätsbereich

Sei $a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $b\in\mathbb{Z}$ bel. $\Rightarrow \exists\tilde{q}\in\mathbb{C}: b=a\cdot\tilde{q}$

$q:=\lfloor\tilde{q}\rceil$ wobei $\lfloor.\rceil:\mathbb{C}\to\mathbb{Z}[i]\quad x+iy\mapsto\lfloor x\rceil+i\lfloor y\rceil$ mit runden zur nächsten ganzen Zahl

$\lfloor.\rceil:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$

$42{,}6\mapsto 43$

$42{,}4\mapsto 42$

$42{,}5\mapsto 42$

$\vdots$

$a\cdot\tilde{q}-a\cdot q=:r \quad\Rightarrow b=a\cdot\tilde{q}=a\cdot q+r$ nun zz: $r\in\mathbb{Z}[i]$

$r=a\cdot\tilde{q}-a\cdot q=b-a\cdot q$ mit $a,b,q\in\mathbb{Z}[i] \quad\Rightarrow r\in\mathbb{Z}[i]$

$H(r)=|r|^2=|a\cdot\tilde{q}-a\cdot q|^2=|a(\tilde{q}-q)|^2=|a|^2\cdot|\tilde{q}-q|^2=H(a)\,|\tilde{q}-q|^2$

$\tilde{q}-q=x+iy$ mit $x,y\in[0,\frac{1}{2}] \Rightarrow |\tilde{q}-q|^2=\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}=x^2+y^2\in[0,\frac{1}{2}]$

$\Rightarrow H(r)=H(a)\,(x^2+y^2)<H(a)$

zz: $p=a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)\in\mathbb{P}$, $a,b\in\mathbb{N} \Rightarrow a+ib, a-ib$ ... prim in $\mathbb{Z}[i]$

Wir wissen prim $\Leftrightarrow$ irreduzibel. Sei $x,y\in\mathbb{Z}[i]$ bel. mit $a+ib=x\cdot y$.

$\Rightarrow a-ib=\bar{x}\cdot\bar{y} \quad\Rightarrow p=x\cdot y\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}=x\bar{x}\cdot y\bar{y}=|x|^2\cdot|y|^2 \quad\Rightarrow |x|^2=1 \vee |y|^2=1$ da p irreduzibel in $\mathbb{Z}$

Nur $\underbrace{\{1,-1,i,-i\}}_{=E(\mathbb{Z}[i])}$ liegen in $\mathbb{Z}[i]$ und haben $|x|=1$.

$\Rightarrow$ Das Produkt $x\cdot y$ ist trivial also ist $a+ib$ (und genauso $a-ib$) irreduzibel also prim in $\mathbb{Z}[i]$.

zz: ges: Primfaktorzerlegung von $27+6i$ und $-3+4i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

$27+6i=3(9+2i)=3(1+4i)(1-2i)$

Da $1^2+4^2=17$ und $1^2+2^2=5$ prim sind gilt nach oben, dass $1+4i$ und $1-2i$ in $\mathbb{Z}[i]$ prim sind.

$-3+4i=(1+2i)^2$ nach oben ebenso eine Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}[i]$.

(Werte gefunden durch ausprobieren und mit einem Python Skript.)