Algebra Übungsblatt 2

Ida Hönigmann

March 21, 2022

Abstract

1 68

`*`, `+` ... 2-stellig `cos`, `sin` ... 1-stellig `i` ... 0-stellig `a`, `b`, `c` ... Variablen

```
(i)       (ii)       (iii)          (iv)
    *         sin          +              +
   / \         |          / \            / \
 sin  c        +        sin  b          *  cos
  |           / \        |             / \  |
  +          a   b       a            sin i a
 / \                                   |
a   b                                  b
```

	Präfix	Infix	Postfix
(i)	`*sin+abc`	`sin(a+b)*c`	`ab+sinc*`
(ii)	`sin+ab`	`sin(a+b)`	`ab+sin`
(iii)	`+sinab`	`sin(a)+b`	`asinb+`
(iv)	`+*sinbicosa`	`sin(b)*i+cos(a)`	`acosibsin*+`

2 72

Definition

$$C \text{ heißt Klon auf } A :\Longleftrightarrow (i)\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\forall i \in \{1,...,n\} : \pi_i^{(n)} \in C$$
$$(ii) f_1, f_2, ..., f_k : A^n \to A, g : A^k \to A \in C$$
$$\Longrightarrow g \circ_{n,k} (f_1,...,f_k) = g(f_1(a_1,...,a_n),...,f_k(a_1,...,a_n)) \in C$$

gesucht: 3 Klone C auf $A := \{1,...,k\}$ mit $A^A \subseteq C$, wobei $k \geq 3$.

- $$C_a := \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \{f : A^n \to A | \exists i \in \{1,...,n\}\exists \tilde{f} \in A^A : f(x_1,...,x_n) = \tilde{f}(x_i)\}$$
  - Sei $\pi_i^{(n)}$ eine beliebige Projektion. $\pi_i^{(n)} \in C_a$, da für $\tilde{f} = id$ gilt $f(x_1,...,x_n) = x_i$.
  - Sei $f_1,...,f_k, g \in C_c$ (mit Stelligkeiten wie oben beschrieben) beliebig. Nennen wir $h := g \circ_{n,k} (f_1,...,f_k)$.

$$g(x_1,...,x_k) = \tilde{g}(x_i)$$
$$f_1(x_1,...,x_n) = \tilde{f}_1(x_j)$$
$$\vdots$$
$$f_k(x_1,...,x_n) = \tilde{f}_k(x_l)$$
$$\Longrightarrow h(x_1,...,x_n) = \tilde{g}(\tilde{f}_i(x_l)) \in C_a$$

  - Für $n = 1$ ist $f : A \to A$ mit $f = \tilde{f}$ beliebig in C_a.

- $$C_b := \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \{f : A^n \to A\}$$
  - Alle Projektionen $\pi_i^{(n)}$ liegen in der Menge aller Funktionen von A^n nach A.
  - Alle beliebigen Verknüpfungen von Funktionen liegen in der Menge alller Funktionen von A^n nach A Widerspruch!.
  - Alle A^A liegen in der Menge aller Funktionen von A^1 nach A.

- $$C_c := C_a \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \{f : A^n \to A | f \text{ ist nicht surjektiv}\}$$
  - Wir haben schon gezeigt, dass alle Projektionen $\pi_i^{(n)} \in C_a$. Gemeinsam mit $C_a \subseteq C_c$ ergibt das $\pi_i^{(n)} \in C_c$.
  - Sei $f_1,...,f_k, g \in C_c$ (mit Stelligkeiten wie oben beschrieben) beliebig. Nennen wir $h := g \circ_{n,k} (f_1,...,f_k)$.
    Falls g eine nicht surjektive Funktion ist, ist klarerweise auch h nicht surjektiv und somit $h \in C_c$. Sonst gilt $g \in C_a$ und somit $\exists \tilde{g} : A \to A \exists i \in \{1,...,k\} | g(x_1,...,x_k) = \tilde{g}(x_i)$. $\Longrightarrow$ $h = \tilde{g}(f_i(x_1,...,x_n))$. Falls auch $f_i \in C_a$ so haben wir bereits gezeigt, dass $h \in C_a$. Anderenfalls ist h nicht surjektiv, da f_i nicht surjektiv ist.

– Wir haben schon gezeigt, dass $A^A \subseteq C_a \subseteq C_c$.

Nun müssen wir zeigen, dass es sich um drei unterschiedliche Klone handelt.

$$\begin{aligned} f : A^2 &\to A \\ (a,b) &\mapsto ((a+b) mod |A|) + 1 \end{aligned}$$

f liegt (klarerweise) in C_b. Angenommen f liegt in $C_a \implies f(a,b) = \tilde{f}(a) \vee f(a,b) = \tilde{f}(b)$. o.B.d.A $f(a,b) = \tilde{f}(a)$.

$$\begin{aligned} f(1,1) = 3 &\implies \tilde{f}(1) = 3 \\ f(1,2) = 1 \text{ falls } |A| = 3 \text{ und } 4 \text{ falls } |A| > 3 &\implies \tilde{f}(1) \neq 3 \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

Also $C_a \neq C_b$.

f ist surjektiv, da man mit $\{(1,l) : l \in \{1, ..., k\}\}$ alle Elemente in A erreichen kann. Also $f \notin C_c$ und somit $C_b \neq C_c$.

$$\begin{aligned} g : A^2 &\to A \\ (a,b) &\mapsto 1 \text{ falls } a = b \text{ und } 2 \text{ sonst} \end{aligned}$$

Die Funktion g ist offensichtlich nicht surjektiv ($3 \notin g(A)$) also $g \in C_c$.
Angenommen g liegt in $C_a \implies g(a,b) = \tilde{g}(a) \vee g(a,b) = \tilde{g}(b)$. o.B.d.A $g(a,b) = \tilde{g}(a)$.

$$\begin{aligned} g(1,1) = 1 &\implies \tilde{g}(1) = 1 \\ g(1,2) = 2 &\implies \tilde{g}(1) = 2 \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

Also $C_a \neq C_b$.

3 77

A ... Menge, $\mathcal{O}_A$ ... Menge aller Klone auf A
zu zeigen: $(\mathcal{O}_A, \subseteq)$ bildet einen vollständigen Verband

Sei $P \subseteq \mathcal{O}_A$ beliebig.

Für $P = \emptyset$ ist

$$inf(P) = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{f : A^n \to A\}$$
$$sup(P) = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{\pi_i^{(n)} : i \in \{1, ..., n\}\}.$$

Was auch mit den unteren Definitionen übereinstimmt, wenn man die Vereinigung und den Schnitt über die leere Menge entsprechend definiert.

Wir wollen zeigen $\exists C \in \mathcal{O}_A : C = inf(P)$ also

$$\forall D \in P : C \subseteq D \text{ und}$$
$$\forall \tilde{C} \in \mathcal{O}_A : (\forall D \in P : \tilde{C} \subseteq D) \implies \tilde{C} \subseteq C.$$

$$C := \bigcap_{D \in P} D$$

- **zz:** C ist ein Klon auf A

  Sei $\pi_i^{(n)}$ eine beliebige Projektion auf A. $\forall D \in P : \pi_i^{(n)} \in D$, da $D \in \mathcal{O}_A$. Das bedeutet aber, dass $\pi_i^{(n)} \in \bigcap_{D \in P} D = C$.

  Sei $f_1, ..., f_k : A^n \to A, g : A^k \to A$ aus C beliebig. $\implies \forall D \in P : f_1, ..., f_k, g \in D$ und daher auch $\forall D \in P : h := g \circ_{n,k} (f_1, ..., f_k) \in D$. Das bedeutet aber, $h \in C$.

  Also ist $C \in \mathcal{O}_A$.

- **zz:** $\forall D \in P : C \subseteq D$

  gilt nach Definition von C.

- **zz:** $\forall \tilde{C} \in \mathcal{O}_A : (\forall D \in P : \tilde{C} \subseteq D) \implies \tilde{C} \subseteq C$

  Sei $\tilde{C} \in \mathcal{O}_A$ mit $\forall D \in P : \tilde{C} \subseteq D$ beliebig. Angenommen $C \subsetneq \tilde{C}$. Das bedeutet $\exists f \in \tilde{C} \setminus C$.

  Da $f \notin C$ gilt $\exists D \in P : f \notin D$ und somit $\neq (\tilde{C} \subseteq D)$ was ein Widerspruch ist. Also muss gelten $\tilde{C} \subseteq C$.

Insgesamt ist also $C = inf(P)$.

Da $(\mathcal{O}_A, \subseteq)$ eine Halbordnung ist und jede Teilmenge ein Infimum besitzt gilt nach Aufgabe 52 von letzer Woche, dass auch jede Teilmenge ein Supremum besitzt.

Alternativer Beweis des Supremums:

Zu zeigen: $\exists C \in \mathcal{O}_A : C = sup(P)$ also

$$\forall D \in P : D \subseteq C \text{ und}$$
$$\forall \tilde{C} \in \mathcal{O}_A : (\forall D \in P : D \subseteq \tilde{C}) \implies C \subseteq \tilde{C}.$$

$$C := \left[\bigcup_{D \in P} D \right] \text{ wobei } [M] \text{ den Abschluss unter allen } \circ_{n,k} \text{ bezeichnet}$$

- **zz:** C ist ein Klon auf A

  Sei $\pi_i^{(n)}$ eine beliebige Projektion auf A. $\forall D \in P : \pi_i^{(n)} \in D$, da $D \in \mathcal{O}_A$. Das bedeutet aber, dass $\pi_i^{(n)} \in \bigcup_{D \in P} D = C$.

  Die Abgeschlossenheit bezüglich aller $\circ_{n,k}$ gilt nach Definition.

  Also ist $C \in \mathcal{O}_A$.

- **zz:** $\forall D \in P : D \subseteq C$

  gilt nach Definition von C.

- **zz:** $\forall \tilde{C} \in \mathcal{O}_A : (\forall D \in P : D \subseteq \tilde{C}) \implies C \subseteq \tilde{C}$

  Sei $\tilde{C} \in \mathcal{O}_A$ mit $\forall D \in P : D \subseteq \tilde{C}$ beliebig. Angenommen $\tilde{C} \subsetneq C$. Das bedeutet $\exists f \in C \setminus \tilde{C}$.

  Da $f \in C$ gilt entweder $\exists D \in P : f \in D$ was aber ein Widerspruch zu $D \subseteq \tilde{C}$ ist, da $f \notin \tilde{C}$ oder f entsteht durch $\circ_{n,k}$ auf $\bigcup_{D \in P} D$. Da $\forall D \in P : D \subseteq \tilde{C} \implies \bigcup_{D \in P} D \subseteq \tilde{C}$ kann $\tilde{C}$ kein Klon sein, da $f \notin \tilde{C}$ und somit $\tilde{C}$ nicht unter allen $\circ_{n,k}$ abgeschlossen ist.

Insgesamt also $C = sup(P)$.

4 102

1. $E := \{\{0\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{0,2,3\},\{0,1,2,3\}\}$
   gesucht: Algebra $\mathcal{A}$ auf $A := \{0,1,2,3\}$, sodass $\forall M \in E : M$ ist Unteralgebra von A

$$\mathcal{A} = (A, w_1, w_2, w_3) \text{ (Typ (0,2,2))}$$

$$w_1 : A^0 \to A \quad () \mapsto 0 \qquad w_2 : A^3 \to A \quad (a,b,c) \mapsto \begin{cases} 2 & \text{, falls } \{a,b,c\} = \{0,1,3\} \\ a & \text{, sonst} \end{cases} \qquad w_3 : A^3 \to A \quad (a,b,c) \mapsto \begin{cases} 3 & \text{, falls } \{a,b,c\} = \{0,1,2\} \\ a & \text{, sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{P}(A) = \{$

$\emptyset$,	$w_1!$	$\{0\}$,		$\{1\}$,	$w_1!$	$\{2\}$,	$w_1!$
$\{3\}$,	$w_1!$	$\{0,1\}$,		$\{0,2\}$,		$\{0,3\}$,	
$\{1,2\}$,	$w_1!$	$\{1,3\}$,	$w_1!$	$\{2,3\}$,	$w_1!$	$\{0,1,2\}$,	$w_3!$
$\{0,1,3\}$,	$w_2!$	$\{0,2,3\}$,		$\{1,2,3\}$,	$w_1!$	$\{0,1,2,3\}$	

$\}$

   Wobei $w_i!$ bedeutet, dass die Menge nicht unter w_i abgeschlossen ist.

2. Ist 1. für beliebiges $E \subseteq \mathcal{P}(A)$ lösbar?
   Nein, z.B. für $E = \emptyset$ gibt es keine Algebra $\mathcal{A} = (A, (w_i)_{i \in I})$ ohne Unteralgebren, da A immer eine Unteralgebra von sich selbst ist!

3. **gesucht:** Kriterium / Algorithmus um entscheiden zu können ob für gegebenes, endliches A und $E \subseteq \mathcal{P}(A)$ eine Algebra $\mathcal{A} = (A, w_1, w_2, ...)$ existiert mit $Sub(\mathcal{A}) = E$.

`Algorithmus (A ... Menge, E ... gewünschte Unteralgebren)`

(1) `for` $(P \in \mathcal{P}(A) \setminus E)$ `{`

(2) $\quad C := \bigcap_{B \in E, P \subseteq B} B$;

(3) $\quad$ `if` $(C \setminus P = \emptyset)$ `{`

(4) $\quad\quad$ `raise Error("nicht lösbar");`

(5) $\quad$ `} else {`

(6) $\quad\quad w_P : A^{|P|} \to A, (x_1, ..., x_{|P|}) \mapsto \begin{cases} y \in C \setminus P & \texttt{, falls } \{x_1, ..., x_{|P|}\} = P \\ x_1 & \texttt{, sonst} \end{cases}$

(7) $\quad\quad$ `füge` w_P `zur Algebra hinzu;`

(8) $\quad$ `}`

(9) `}`

Jede Operation w erreicht (für unsere Zwecke), dass wenn $x_1, ..., x_n$ in einer Unteralgbra U liegen, dass dann auch $y = w(x_1, ..., x_n) \in U$ sein muss.

Damit ein $P \in \mathcal{P}(A) \setminus E$ nicht in $Sub(\mathcal{A})$ liegt muss also ein w_P garantieren, dass wenn $P \subseteq U \implies \exists y \notin P : y \in U$. Natürlich muss das y so gewählt werden, dass $\forall B \in E : P \subset B \implies y \in B$, da sonst $B \notin Sub(\mathcal{A})$. $\implies y \in \left(\bigcap_{B \in E, P \subseteq B} B\right)$.

Falls aber $\left(\bigcap_{B \in E, P \subseteq B} B\right) = \emptyset$ kann nach der Überlegung von oben keine Lösung existieren. Sonst garantiert die Operation wie in (6) beschrieben, dass $P \notin Sub(\mathcal{A})$ für alle $P \notin E$ (wegen der Schleife in (1)).

Für $Q \in E$ hat keine der Funktionen $(w_P)_{P \in \mathcal{P}(A) \setminus E}$ einen Effekt, da immer entweder gilt

- $P \subseteq Q$ und somit

$$\forall q_1, ..., q_{|P|} \in Q : w_P(q_1, ..., q_{|P|}) = \begin{cases} y & \text{, falls } \{q_1, ..., q_{|P|}\} = P \\ q_1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

  Da $Q \in E$ und $P \subseteq Q$ gilt nach Konstruktion, dass $y \in Q$ und $q_1 \in Q$ sowieso.

- $P \setminus Q \neq \emptyset$ und somit $\exists p \in P \setminus Q$ damit kann nicht der Fall $\{q1, ..., q_{|P|}\} = P$ eintreten. Also gilt

$$\forall q_1, ..., q_{|P|} \in Q : w_P(q_1, ..., q_{|P|}) = q_1 \in Q.$$

In beiden Fällen gilt also, dass Q bezüglich allen $(w_P)_{P \in \mathcal{P}(A) \setminus E}$ abgeschlossen ist.