ALG Ü11

393) $L := \mathbb{Q}(x)$ ... Körper der gebrochenen rationalen Funktionen über $\mathbb{Q}$

(1) $K := \mathbb{Q}(x^3) \subseteq L$ ges: $[L:K]$ indem Minimalpolynom von x über K gefunden wird

$K \subseteq L$ $x \in L$ ...algebraisch über K $m(y)$ ... Minimalpolynom von x über K

$k := grad(m(y)) \Rightarrow [K(x):K] = k$ Nach Satz 6.1.3.4.

$K(x) = \mathbb{Q}(x^3)(x) = \mathbb{Q}(x, x^3) = \mathbb{Q}(x) = L$

$$\mathbb{Q}(x^3) = \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^{3i}}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^{3j}} \middle| n, m \in \mathbb{N}, \forall a_i, b_j \in \mathbb{Q} \right\}$$

$m(y) = y^3 - x^3$ ist normiert und erfüllt $m(x) = 0$

$$p = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^{3i}}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^{3j}} \in \mathbb{Q}(x^3) \Rightarrow p \sum_{j=0}^{m} b_j x^{3j} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{3i}$$

$$\Rightarrow grad\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^{3i}\right) = grad(p) + grad\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^{3j}\right)$$

$$\Rightarrow 3n = grad(p) + 3m \quad \Rightarrow grad(p) = 3n - 3m \in 3\mathbb{Z}$$

$x \cdot p$ hat $grad(x \cdot p) = 1 + grad(p) \in 1 + 3\mathbb{Z}$

Angenommen es gäbe ein Minimalpolynom mit kleineren Grad:

$\tilde{m}(y) = y^2 + py + q$ mit $p, q \in \mathbb{Q}(x^3)$

$\tilde{m}(x) = x^2 + xp + q = 0 \Leftrightarrow x^2 = -xp + q$ aber $grad(x^2) = 2 \wedge grad(-xp+q) \in 1+3\mathbb{Z}$

Da $2 \notin 1 + 3\mathbb{Z}$ kann es kein kleineres Minimalpolynom geben.

$\Rightarrow [L:K] = 3$

(2) $K := \mathbb{Q}(x + \frac{1}{x})$ ges: $[L:K]$

$x + \frac{1}{x}$ ist algebraisch über $L = \mathbb{Q}(x)$, da $p(y) = x \cdot y - x^2 - 1 \in \mathbb{Q}(x)[y]$ hat

$p(x + \frac{1}{x}) = x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0$

$m(y) = y^2 - (x + \frac{1}{x})y + 1 \in K[y]$ und $m(x) = x^2 - (x + \frac{1}{x})x + 1 = x^2 - x^2 - 1 + 1 = 0$

$x \notin K$ aber $x \in L \Rightarrow [L:K]$ kann nicht 1 sein.

$\Rightarrow [L:K] = 2$

...

ALG Ü11

393) ... (3) $\alpha \in \mathbb{Q}(x) \setminus \mathbb{Q}$ $\quad$ zz: $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(\alpha)] < \infty$

$\mathbb{Q}(\alpha)(x) = \mathbb{Q}(x)$

$\alpha = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}$ $\quad$ $\alpha \notin \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \neg(n=m \wedge \exists c \in \mathbb{Q} : \forall i \in \{0,\dots,n\} : a_i \cdot c = b_i)$

$\Longleftrightarrow n \neq m \vee \forall c \in \mathbb{Q} : \exists i \in \{0,\dots,n\} : a_i \cdot c \neq b_i$

$B := \{x^{-m}, \dots, x^{n}\}$

Sei $p(x) \in \mathbb{Q}(x)$ bel. ges: $q_1(x), \dots, q_k(x) \in \mathbb{Q}(\alpha)$: $p(x) = b_1 q_1(x) + \dots + b_k q_k(x)$

$p(x) = \alpha(x) \cdot \tilde{p}(x) + r(x)$ $\quad$ $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(\alpha)$