ALG Ü2

2003) $K=(K,+,0,-,\cdot,1)$ .. Körper $\quad char(K)=0 \quad (\forall n>0: f(n)\neq 0)$

zz: $\exists K_0$ .. Unterkörper von K : $K_0 \simeq \mathbb{Q}$

$f:\mathbb{Q}\to K$ mit $f(0_\mathbb{Q}):=0_K$; $\forall n\in\mathbb{N}: f((n+1)_\mathbb{Q}):=f(n)+1_K$;

$\forall n\in\mathbb{N}_{>0}: f(-n):=-f(n)$

$\forall q=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}: f(q)=f(m)\cdot f(n)^{-1}$

zz: $\forall n,m\in\mathbb{N}: f(n+m)=f(n)+f(m)$ vollständige Induktion nach m

$M_n:=\{m\in\mathbb{N}: f(n+m)=f(n)+f(m)\}$ $\quad 0\in M_n$, da $f(n+0)=f(n)=f(n)+0_K=f(n)+f(0)$

M_n ist abgeschlossen unter Nachfolgern, da wenn $m\in M_n \Rightarrow f(n+m)=f(n)+f(m)$ und

$f(n+(m+1))=f((n+m)+1)=f(n+m)+1\overset{IV}{=}(f(n)+f(m))+(0+1)=f(n)+(f(m)+f(1))$

zz: $\forall n,m\in\mathbb{N}: f(n\cdot m)=f(n)\cdot f(m)$ vollständige Induktion nach m

$M_n:=\{m\in\mathbb{N}: f(n\cdot m)=f(n)\cdot f(m)\}$ $\quad 0\in M_n$, da $f(n\cdot 0)=f(0)=0=f(n)\cdot 0=f(n)\cdot f(0)$

M_n ist abgeschlossen unter Nachfolgern, da wenn $m\in M_n \Rightarrow f(n\cdot m)=f(n)\cdot f(m)$ und

$f(n\cdot(m+1))=f(n\cdot m+n)=f(n\cdot m)+f(n)\overset{IV}{=}f(n)\cdot f(m)+f(n)\underset{1=f(1)}{=}f(n)(f(m)+f(1))$

zz: $\forall n,m\in\mathbb{Z}: f(n+m)=f(n)+f(m)$

1. Fall: $n,m\in\mathbb{N}$ bereits gezeigt

2. Fall: $n\in\mathbb{N}$, $m\in-\mathbb{N}$ oder $n\in-\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$ $\quad$ o.B.d.A. $n\in\mathbb{N}$ $m\in-\mathbb{N}$

(i) für $n>|m|$: $f(n+m)+f(|m|)=f(n-|m|)+f(|m|)=f(n-|m|+|m|)=f(n)$

$\Rightarrow f(n+m)=f(n)-f(|m|)=f(n)+f(-|m|)=f(n)+f(m)$

(ii) für $n=|m|$: $f(n+m)=f(0)=0=f(n)-f(|m|)=f(n)+f(-|m|)=f(n)+f(m)$

(iii) für $n<|m|$: $f(n+m)=f(-(|m|-n))=-f(|m|+(-n))\overset{(i)}{=}-(f(|m|)+(-f(n)))=f(m)+f(n)$

3. Fall $n,m\in-\mathbb{N}$: $f(n+m)=f(-(|n|+|m|))=-f(|n|+|m|)=-f(|n|)-f(|m|)=f(n)+f(m)$

zz: $\forall n,m\in\mathbb{Z}: f(n\cdot m)=f(n)\cdot f(m)$

1. Fall: $n,m\in\mathbb{N}$ bereits gezeigt

2. Fall: $n\in\mathbb{N}$, $m\in-\mathbb{N}$ oder $n\in-\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$ $\quad$ o.B.d.A. $n\in\mathbb{N}$, $m\in-\mathbb{N}$

$f(n\cdot m)=f(-(n\cdot|m|))=-f(n\cdot|m|)=-(f(n)\cdot f(|m|))=f(n)\cdot(-f(|m|))=f(n)\cdot f(m)$

3. Fall $n,m\in-\mathbb{N}$: $f(n\cdot m)=f(|n|\cdot|m|)=f(|n|)\cdot f(|m|)=(-f(|n|))\cdot(-f(|m|))=f(n)\cdot f(m)$

...

ALG Ü2

2003)... zz: $\frac{a}{b} = q = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(\frac{a}{b}) = f(\frac{c}{d})$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \Rightarrow f(a)f(d) = f(b)f(c) \Rightarrow f(a)f(b)^{-1} = f(c)\cdot f(d)^{-1} \Leftrightarrow f(\frac{a}{b}) = f(\frac{c}{d})$

zz: $\forall q = \frac{a}{b}, p = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: f(q+p) = f(q) + f(p)$

$f(q+p) = f(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) = f(\frac{ad+bc}{bd}) = f(ad+bc)f(bd)^{-1} = \frac{f(a)f(d)+f(b)f(c)}{f(b)f(d)}$

$= \frac{f(a)}{f(b)} + \frac{f(c)}{f(d)} = f(\frac{a}{b}) + f(\frac{c}{d}) = f(q) + f(p)$

zz: $\forall q = \frac{a}{b}, p = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: f(q\cdot p) = f(q)\cdot f(p)$

$f(p\cdot q) = f(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}) = f(\frac{ac}{bd}) = f(ac)\cdot f(bd)^{-1} = \frac{f(a)f(c)}{f(b)f(d)} = \frac{f(a)}{f(b)}\frac{f(c)}{f(d)} = f(q)\cdot f(p)$

zz: $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}: f(n) \in P$

Vollständige Induktion nach n $\quad M := \{n \in \mathbb{N}_{>0} : f(n) \in P\}$

Da $f(1) = f(0+1) = f(0) + 1 = 0 + 1 = 1 \in P \Rightarrow 1 \in M$

für $n+1$ gilt $f(n+1) = f(n) + 1 \in P$, da $f(n) \in P \Rightarrow M$ ist unter Nachfolgern abgeschlossen

zz: $\forall n, m \in \mathbb{Z}: n < m \Rightarrow f(n) < f(m)$

$n < m \Leftrightarrow m - n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(m-n) \in P \Rightarrow f(m) - f(n) \in P \Rightarrow f(n) < f(m)$

zz: $\forall p = \frac{a}{b}, q = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: p < q \Rightarrow f(p) < f(q)$

$p < q \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Rightarrow f(ad) < f(bc) \Leftrightarrow f(a)f(d) < f(b)f(c)$

$\Leftrightarrow f(a)f(b)^{-1} < f(c)f(d)^{-1} \Leftrightarrow f(\frac{a}{b}) < f(\frac{c}{d}) \Leftrightarrow f(p) < f(q)$

$\Rightarrow f$ ist injektiv $\quad \Rightarrow f: \mathbb{Q} \to K_0 = f(\mathbb{Q})$ ist bijektiv, wohldefiniert und mit allen Operationen verträglich