DGL Ü4

1) a) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 4 \cdot 3 = -\lambda + \lambda^2 - 12$

$\chi(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \iff \lambda_{1,2} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} -3 \\ 4 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + 4v_2 \\ 3v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3v_1 \\ -3v_2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 3v_1 = -3v_2 \Rightarrow v_1 = -v_2 \quad \Rightarrow -3v_1 = v_1 + 4v_2 = v_1 - 4v_1 = -3v_1 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + 4v_2 \\ 3v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4v_1 \\ 4v_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 3v_1 = 4v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{3}{4} v_1 \quad \Rightarrow v_1 + 4\frac{3}{4} v_1 = 4v_1 = 4v_1 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) $x' = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x$

$\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2(-3-\lambda) + 4(-3-\lambda) = (-3-\lambda)(1 + 2\lambda + \lambda^2 + 4)$

$\chi(\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = -3 \ \vee \ \lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$

$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 - 2v_2 \\ 2v_1 - v_2 \\ -3v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3v_1 \\ -3v_2 \\ -3v_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -v_1 - 2v_2 \\ 2v_1 - v_2 \\ -3v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1+2i)v_1 \\ (-1+2i)v_2 \\ (-1+2i)v_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \cancel{-v_1} - 2v_2 = \cancel{-v_1} + 2iv_1 \Rightarrow v_2 = -iv_1 \quad \Rightarrow v_1 = iv_2$

$2v_1 - v_2 = 2iv_2 - v_2 = -v_2 + 2iv_2 \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -v_1 - 2v_2 \\ 2v_1 - v_2 \\ -3v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1-2i)v_1 \\ (-1-2i)v_2 \\ (-1-2i)v_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \cancel{-v_1} - 2v_2 = \cancel{-v_1} - 2iv_1 \quad \Rightarrow v_2 = iv_1 \quad \Rightarrow v_1 = -iv_2 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$2v_1 - v_2 = -2iv_2 - v_2 = -v_2 - 2iv_2$

$\Rightarrow x^{\mathbb{C}}(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{(-1+2i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{(-1-2i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

$Re(x^{\mathbb{C}}) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \cos(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \cos(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$Im(x^{\mathbb{C}}) = c_2 e^{-t} \sin(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \sin(2t) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-t} \sin(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \cos(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$= e^{-t} \begin{pmatrix} c_1 \sin(2t) \\ c_2 \cos(2t) \\ c_3 e^{3} \end{pmatrix}$

DGL Ü4

2) a) $f(t,x) = \sin(tx)$ $I=(a,b)$ $B=\mathbb{R}$

Satz 3.3. $G=(a,b)\times\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{1+1}$ ... für festes t konvex bzgl. x

$f: G\to\mathbb{R}^1 \equiv \sin(t,x)$ ist stetig und $\frac{\partial}{\partial x}\sin(tx) = t\cos(tx)$ ... stetig auf G

$\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\| = \|t\cos(tx)\| \leq (b-a)$.

$\Rightarrow f$ ist Lipschitz bzgl. x

b) $f(t,x)=\sin(tx)$ $I=\mathbb{R}$ $B=\mathbb{R}$

Satz 3.2. $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^2$ ... offen

$f: G\to\mathbb{R}^1 \equiv \sin(t,x)$ ... stetig und $\frac{\partial}{\partial x}\sin(tx) = t\cos(tx)$ ... stetig auf G

$\Rightarrow f$ ist lokal Lipschitz bzgl. x

c) $f(t,x) = x\sin(t)$ $I=\mathbb{R}$, $B=\mathbb{R}$

$\|f(t,x)-f(t,y)\| = \|x\sin(t) - y\sin(t)\| = |x-y|\underbrace{\|\sin(t)\|}_{\leq 1} \leq |x-y|$

$\Rightarrow f$ ist Lipschitz bzgl. x

d) $f(t,x) = A(t)x + g(t)$ $I=(a,b)$ $B=\mathbb{R}^n$ $A(t)$ ... stetige $n\times n$ Matrix auf (a,b), $f(t)$ ... auf (a,b) stetige vektorwertige Funktion

$\|f(t,x)-f(t,y)\| = \|A(t)x+g(t)-A(t)y-g(t)\| = \|A(t)x - A(t)y\|$

$= \|A(t)(x-y)\| \leq \underbrace{\|A(t)\|}_{:=L\in\mathbb{R}}\|x-y\|$

$\Rightarrow f$ ist Lipschitz bzgl. x

e) $f(t,x) = (x_1 e^{x_2}\cos(t), \sin(x_1x_2))$ $I=\mathbb{R}$ $B=[-2,5]\times[0,10]$

f ... stetig $\frac{\partial}{\partial x}f(t,x) = \begin{pmatrix} e^{x_2}\cos(t) & x_2\sin(x_1) \\ x_1 e^{x_2}\cos(t) & x_1\sin(x_2)\end{pmatrix}$ ... stetig

$\|\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\| = \left\|\begin{matrix} e^{x_2}\cos(t) & x_2\sin(x_1) \\ x_1 e^{x_2}\underbrace{\cos(t)}_{\leq 1} & x_1\sin(x_2)\end{matrix}\right\| < \infty$

$\Rightarrow f$ ist Lipschitz bzgl. x

DGL Ü4

3) I... Intervall $\quad f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ... stetig, bzgl. 2. Argument Lipschitz-stetig mit Konstante L

$x'(t) = f(t, x(t)) \quad t \in I$ hat zwei Lösungen x_1, x_2

zz: $\forall t > t_0 \in I: \quad |x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| \, e^{L|t-t_0|}$

Da x_1, x_2 Lösungen von $x'(t) = f(t, x(t))$ sind gilt

$$x_1(t) = x_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s)) \, ds; \quad x_2(t) = x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s)) \, ds$$

$$x_1(t) - x_2(t) = x_1(t_0) - x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s)) ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s)) ds$$

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| = \| x_1(t_0) - x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) \, ds \, \|$$

$$\leq \|x_1(t_0) - x_2(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\|$$

$$\leq \|x_1(t_0) - x_2(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} L \, \|x_1(s) - x_2(s)\| \, ds$$

Gronwall mit $K = |x_1(t_0) - x_2(t_0)| \quad a(s) = L \quad x(s) = |x_1(s) - x_2(s)|$

$\Rightarrow \forall t \in [t_0, \infty): \; x(t) \leq K \, e^{A(t)}$ mit $A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s) \, ds$

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} L \, ds = L t \Big|_{t_0}^{t} = L(t - t_0)$$

$\Rightarrow |x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| \, e^{L|t-t_0|}$

DGL Ü4

6) $x'(t) = t^2(1-(x(t))^2) = f(t, x(t))$ ... stetig $\quad t \in [1,3]$

$x(2) = 1$

$G = (1,3) \times B_1(1)$ ... konvex, offen

$\|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\| = \|-2t^2 x(t)\| = 2 \cdot 3^2 \cdot 2 = 36 =: L$

$\Rightarrow f$ ist Lipschitz mit Lipschitzkonstante 36

$(t_0, x_0) = (2, 1) \in G$

G...offen $\Rightarrow \alpha \in (0,1)$, $r \in (0,1)$, $L = 36 > 0$

$$R := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}_r(x_0) \subseteq G$$
$$= [1-\alpha, 1+\alpha] \times \overline{B}_r(1) \subseteq G$$

$m := \max_{(t,x)\in R} \|f(t,x)\| = \max_{(t,x)\in R} \|t^2(1-x^2)\| = \|(1+\alpha)^2(1-(1-r)^2)\|$

$\leq \|2^2(1-0^2)\| = 4$

$\delta < \min(\alpha, \frac{r}{m}, \frac{1}{L}) = \min(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{36}) = \frac{1}{36}$

$J_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] = [2 - \frac{1}{36}, 2 + \frac{1}{36}]$

Lösung ist $x(t) = 1$, da $x'(t) = 0$ und $t^2(1-(x(t))^2) = t^2(1-1) = 0$

und existiert somit auf ganz $(1,3)$

DGL Ü4

7) $G := (-10, 10) \times B_c(1) \qquad f: G \to \mathbb{R} \quad (t, x) \mapsto 1 + x^2$

a) $x'(t) = f(t, x(t)) \qquad x(0) = 1$

G…offen $\quad$ f…stetig $\quad \|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\| = \|2x\| = 2(1+c) = 2c+2 =: L$

f… Lipschitz $\quad (t_0, x_0) = (0, 1) \in G$

$R := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \bar{B}_r(x_0) = [-\alpha, +\alpha] \times \bar{B}_r(1) \subseteq G$

$\alpha \in (0, 10) \quad r \in (0, c)$

$m := \max_{(t,x)\in R} \|f(t,x)\| = \max_{(t,x)\in R} \|1 + x^2\| = 1 + (1+c)^2 = c^2 + 2c + 2$

$\delta < \min(\alpha, \frac{r}{m}, \frac{1}{L}) \leq \min(10, \frac{c}{c^2+2c+2}, \frac{1}{2c+2})$

1. Fall $c < \sqrt{2}$: $\delta < \frac{c}{c^2+2c+2}$

2. Fall $c > \sqrt{2}$: $\delta < \frac{1}{2c+2}$

nach Picard-Lindelöf besitzt das AWP auf $[-\delta, \delta]$ genau eine Lösung.

b) $\left.\begin{array}{l} \max_{c\in(0,\sqrt{2})} \frac{c}{c^2+2c+2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \\ \max_{c\in(\sqrt{2},\infty)} \frac{1}{2c+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{2}$

$\Rightarrow G = (-10, 10) \times B_{\sqrt{2}}(1)$ ergibt Intervalllänge $2\delta = \sqrt{2} - 1$

c) $x' = 1 + x^2 \iff \frac{dx}{dt} = 1 + x^2 \iff \frac{1}{1+x^2} dx = dt$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int 1 dt \iff \arctan(x) = t + c$

$\iff x = \tan(t + c)$

AWP $x(0) = 1 \Rightarrow 1 = \tan(0 + c) = \tan(c) \iff c = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x(t) = \tan(t + \frac{\pi}{4})$

Die Lösung existiert auf $(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = (-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

$\sim (-2{,}356; 0{,}7854)$

$(-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1), \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)) \sim (-0{,}2071, 0{,}2071)$