ALG Ü8

290) $\mathcal{K}$ ... Klasse von Algebren selben Typs $\qquad S\mathcal{K} = \mathcal{K} \qquad \mathcal{F} \in \mathcal{K}$

$X \subseteq F \qquad$ (1) $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{K} \; \forall j : X \to A \; \exists \varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$ ... Homomorphismus, $j \subseteq \varphi$

(2) $\mathcal{F}$ wird von X erzeugt also $\nexists\, U \subsetneq \mathcal{F} : X \subseteq U$

zz: $\mathcal{F}$ ... frei über $X \iff (1) \wedge (2)$

($\Leftarrow$) Es ist nur mehr zu zeigen, dass φ eindeutig ist, das folgt aus $\langle X \rangle = F$ und Proposition 2.3.1.13.

($\Rightarrow$) (1) klar, da sogar ein eindeutiges φ existiert

(2) Sei $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ mit $X \subseteq \mathcal{F}_0$ bel. $\qquad$ zz: $F_0 = F$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \arrow[dd, bend left, "id_F"] \\
X \arrow[ur, "id_X"] \arrow[r, "id_X"] \arrow[dr, "id_X"'] & \mathcal{F}_0 \arrow[d, "id_{F_0}"] \\
 & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

φ ist Hom.

$\exists! \varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_0 : id_X = \varphi \circ id_X$ da $\mathcal{F}$ frei über X

id_{F_0} ist ein Homomorphismus von $\mathcal{F}_0$ nach $\mathcal{F}$

id_F ist Hom. von $\mathcal{F}$ nach sich selbst (sogar eindeutig mit $id_X : X \to F$ vorgegeben)

Es gilt $\quad id_F = id_{F_0} \circ \varphi$

$\Rightarrow \varphi(F) \subseteq F_0 \wedge \varphi(F) = id_{F_0}(\varphi(F)) = id_F(F) \qquad \Rightarrow F \subseteq F_0$

und da auch $F_0 \subseteq F \Rightarrow F_0 = F$

$\square$