ALG Ü6

216) ges: zwei nicht isomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 75

$A = C_3 \times C_5 \times C_5$ $\qquad$ $B = C_3 \times C_{25}$

Lemma B, B' ... nicht isomorph $\Rightarrow A \times B, A \times B'$ ... nicht isomorph

Bew $A \times B, A \times B'$ ... isomorph $\Rightarrow \exists f: A \times B \to A \times B'$ ... Isomorphismus

$B \cong \{0\} \times B \subseteq A \times B \qquad B' \cong \{0\} \times B' \subseteq A \times B' \qquad f|_{\{0\} \times B} : \{0\} \times B \to \{0\} \times B'$

$\Rightarrow B, B'$ ... isomorph

$\Rightarrow$ Es reicht zu zeigen $C_5 \times C_5$, C_{25} ... nicht isomorph

Aus 167 wissen wir 5, 5 besitzen einen gemeinsamen Teiler > 1 (nämlich 5)

$\Rightarrow C_5 \times C_5$ ... nicht zyklisch.

Da C_{25} zyklisch ist und isomorphe Gruppen von zyklischen Gruppen selber zyklisch sind gilt $C_5 \times C_5$ ist nicht isomorph zu C_{25} !

Bestimmen Sie für A, B und jedes $d \in \{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$

1. die Anzahl der zyklischen Untergruppen der Ordnung d.

- zyklische UG von A haben die Form $\langle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\rangle$ mit $\bar{x} \in C_3$, $\bar{y}, \bar{z} \in C_5$

  Falls $\bar{x} = \bar{0} \wedge \bar{y} = \bar{z} = \bar{0}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\rangle = 1$ also 1 UG mit ord $= 1$

  Falls $\bar{x} = \bar{0} \wedge (\bar{y} \neq \bar{0} \vee \bar{z} \neq \bar{0})$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\rangle = 5$ also 6 UG mit ord $= 5$

  Falls $\bar{x} \neq \bar{0} \wedge \bar{y} = \bar{z} = \bar{0}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\rangle = 3$ also 1 UG mit ord $= 3$

  Falls $\bar{x} \neq \bar{0} \wedge (\bar{y} \neq \bar{0} \vee \bar{z} \neq \bar{0})$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\rangle = 15$ also 6 UG mit ord $= 15$

- zyklische UG von B haben die Form $\langle(\bar{x}, \bar{y})\rangle$ mit $\bar{x} \in C_3$, $\bar{y} \in C_{25}$

  Falls $\bar{x} = \bar{0} \wedge \bar{y} = \bar{0}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y})\rangle = 1$ $\qquad$ 1 UG mit ord $= 1$

  Falls $\bar{x} \neq \bar{0} \wedge \bar{y} = \bar{0}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y})\rangle = 3$ $\qquad$ 1 UG mit ord $= 3$

  Falls $\bar{x} = \bar{0} \wedge \bar{y} \in \{\bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$: $\operatorname{ord}\langle\bar{x}, \bar{y}\rangle = 5$ $\qquad$ 1 UG mit ord $= 5$

  Falls $\bar{x} = \bar{0} \wedge \bar{y} \in C_{25} \setminus \{\bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$: $\operatorname{ord}\langle\bar{x}, \bar{y}\rangle = 25$ $\qquad$ 1 UG mit ord 25

  Falls $\bar{x} \neq \bar{0} \wedge \bar{y} \in \{\bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y})\rangle = \overline{15}$ $\qquad$ 1 UG mit ord 15

  Falls $\bar{x} \neq \bar{0} \wedge \bar{y} \in C_{25} \setminus \{\bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$: $\operatorname{ord}\langle(\bar{x}, \bar{y})\rangle = \overline{75}$ $\qquad$ 1 UG mit ord 75 ...

ALG Ü6

216) ... 2. die Anzahl der nicht-zyklischen Untergruppen der Ordnung d

- B ist zyklisch (siehe Bsp 167) also sind auch alle UG von B zyklisch.

  $\Rightarrow$ Es gibt 0 nicht zyklische Untergruppen von B

- Die einzige nicht zyklische Untergruppe von $C_5 \times C_5$ ist nach Bsp 215 die ganze Gruppe selber. $\Rightarrow \{0\} \times C_5 \times C_5 \leq A$ und nicht zyklisch

  $C_3 \times C_5 \times C_5 \leq A$ und ebenfalls nicht zyklisch.

  Sei $U \leq C_3 \times C_5 \times C_5$ ... nicht zyklisch bel. $U|_{\{0\} \times C_5 \times C_5} \leq \{\bar{0}\} \times C_5 \times C_5 \cong C_5 \times C_5$

  $U|_{\{0\} \times C_5 \times C_5}$ ... nicht zyklisch, da $\{(0,0,0)\}$ die einzige zyklische Untergruppe von $U|_{\{0\} \times C_5 \times C_5}$ ist und dann $U = \langle \bar{x}, \bar{0}, \bar{0} \rangle$ für $\bar{x} \in C_3$ wäre (also zyklisch).

  $\Rightarrow U|_{\{0\} \times C_5 \times C_5} = \{0\} \times C_5 \times C_5$

  $U|_{C_3 \times \{0\} \times \{0\}} \leq C_3 \times \{0\} \times \{0\} \cong C_3$ also entweder gleich $\{\bar{0}\}$ oder $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

  $\Rightarrow$ die beiden oben genannten Gruppen sind bereits alle möglichen nicht zyklischen.

```python


def get_multiples_3_5_5(elem):
    lst = [elem]
    curr = elem
    if elem == (0, 0, 0):
        return lst

    while True:
        curr = (curr[0] + elem[0], curr[1] + elem[1], curr[2] + elem[2])
        curr = (curr[0] % 3, curr[1] % 5, curr[2] % 5)
        lst.append(curr)
        if curr == (0, 0, 0):
            break
    return lst


def get_multiples_3_25(elem):
    lst = [elem]
    curr = elem
    if elem == (0, 0):
        return lst

    while True:
        curr = (curr[0] + elem[0], curr[1] + elem[1])
        curr = (curr[0] % 3, curr[1] % 25)
        lst.append(curr)
        if curr == (0, 0):
            break
    return lst

```

```python

if __name__ == '__main__':
    print("C3 x C5 x C5:")
    s = set()
    d = {1: [], 3: [], 5: [], 15: [], 25: [], 75: []}

    for a in range(0, 3):
        for b in range(0, 5):
            for c in range(0, 5):
                m = frozenset(get_multiples_3_5_5((a, b, c)))
                if m not in s:
                    d[len(m)].append((a, b, c))
                    s.add(m)
    # print(d)

    for k in d:
        print("ord {}: {} verschiedene Untergruppen".format(k, len(d[k])))

    print("\nC3 x C25:")
    s = set()
    d = {1: [], 3: [], 5: [], 15: [], 25: [], 75: []}

    for a in range(0, 3):
        for b in range(0, 25):
            m = frozenset(get_multiples_3_25((a, b)))
            if m not in s:
                d[len(m)].append((a, b))
                s.add(m)
    # print(d)

    for k in d:
        print("ord {}: {} verschiedene Untergruppen".format(k, len(d[k])))

```

```
C3 x C5 x C5:
ord 1: 1 verschiedene Untergruppen
ord 3: 1 verschiedene Untergruppen
ord 5: 6 verschiedene Untergruppen
ord 15: 6 verschiedene Untergruppen
ord 25: 0 verschiedene Untergruppen
ord 75: 0 verschiedene Untergruppen

C3 x C25:
ord 1: 1 verschiedene Untergruppen
ord 3: 1 verschiedene Untergruppen
ord 5: 1 verschiedene Untergruppen
ord 15: 1 verschiedene Untergruppen
ord 25: 1 verschiedene Untergruppen
ord 75: 1 verschiedene Untergruppen

Process finished with exit code 0
```