ALG Ü8

200 g)

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ C_2 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "\iota_1"'] & C \arrow[u, dotted, "f"] & C_2 \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "\iota_2"] \end{tikzcd}$$

K ... Klasse aller Gruppen

(C, ι_1, ι_2) ... Koprodukt von C_2 mit C_2

also $\forall Y$ ... Gr. $\forall f_1, f_2 : C_2 \to Y \; \exists! f : C \to Y$

mit $f_1 = f \circ \iota_1$ und $f_2 = f \circ \iota_2$

zz: $|C| = \infty$ und C ... nicht kommutativ

Nach Hinweis: $A := \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : |x-y| = 1\}$

G ... Menge der Automorphismen der relationalen Struktur $(\mathbb{Z}, A)$

$C := (G, \circ, id, ^{-1})$ ... Gruppe

$C_2 := (\{\overline{0}, \overline{1}\}, +, \overline{0}, -)$ ... Gruppe

$\iota_1(\overline{0}) := id$ $\qquad$ $\iota_2(\overline{0}) := id$

$\iota_1(\overline{1}) := s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \; x \mapsto -x$ $\qquad$ $\iota_2(\overline{1}) := v : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \; x \mapsto -(x+1)$

Sei $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $|x-y| = 1$ bel.

$\Rightarrow |s(x) - s(y)| = |-x-(-y)| = |y-x| = 1 \qquad \Rightarrow s \in G$

$\Rightarrow |v(x) - v(y)| = |-(x+1)+(y+1)| = |y-x\cancel{+1}\cancel{-1}| = 1 \qquad \Rightarrow v \in G$

Da $\overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$ in C_2 muss auch

$\iota(\overline{1}) \circ \iota(\overline{1}) = \iota(\overline{1}+\overline{1}) = \iota(\overline{0}) = id$ für ι_1 und ι_2 gelten.

$(\iota_1(\overline{1}) \circ \iota_1(\overline{1}))(x) = \iota_1(\overline{1})(-x) = x$; $\iota_2(\overline{1})(-(x+1)) = -(-(x+1)+1) = x$

$\Rightarrow \iota_1, \iota_2$ ... Hom. von C_2 nach C

Behauptung: $G = \langle\{s, v\}\rangle$ $\quad$ jeder Homomorphismus in G wird bereits durch das Bild der 1 festgelegt. $s \circ v = x \mapsto x+1$; $\underbrace{(s \circ v) \circ \ldots \circ (s \circ v)}_{k\text{-mal}} = x \mapsto x+k \;\; \forall k \in \mathbb{N}$

$s \circ ((s \circ v) \circ \ldots \circ (s \circ v)) = x \mapsto -x-k \;\; \forall k \in \mathbb{N}$ also gibt es Verknüpfungen von s und v sodass 1 auf jeden bel. Wert abgebildet wird.

$\Rightarrow f$ wird eindeutig durch das Bild der $\overline{1}$ von f_1 und f_2 festgelegt.

Also ist C Koprodukt von C_2 mit C_2 und bereits bekannt ist $|C| = \infty$ und C ist nicht kommutativ. (bis auf Isomorphie eindeutig?!) $\square$