ALG Ü3

107) $(\mathcal{A}_k)_{k\in K}$ ... Familie von Algebren derselben Typs

$\mathcal{A} := \prod_{k\in K} \mathcal{A}_k$ $\forall j\in K: \; p_j : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_j$ ... j-te Projektion

$\mathcal{B}$ ... beliebige Algebra vom selben Typ wie die $\mathcal{A}_k$

$\forall j\in K: \; q_j : \mathcal{B} \to \mathcal{A}_j$ ... beliebiger Homomorphismus

zz: (1) $\forall j\in K: p_j$ ist ein Homomorphismus

Sei $j\in K$ bel. Sei $(a_k)_{k\in K} \in A$ bel. Sei $\omega_i^{\mathcal{A}}$ eine beliebige Operation von $\mathcal{A}$.

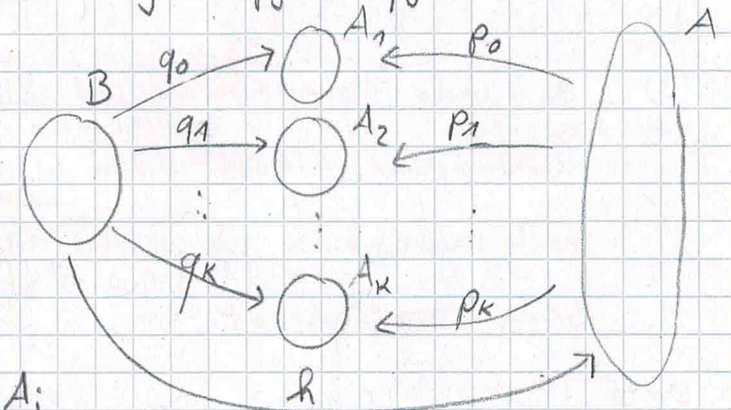
$$p_j(\omega_i^{\mathcal{A}}((a_k)_{k\in K})) = p_j((\omega_i^{\mathcal{A}_k}(a_k))_{k\in K}) = \omega_i^{\mathcal{A}_j}(a_j) = \omega_i^{\mathcal{A}_j}(p_j((a_k)_{k\in K}))$$

$\Rightarrow p_j$ ist ein Homomorphismus

zz: (2) $\exists!\, h : B \to \mathcal{A}$ ... Homomorphismus : $\forall j\in K: p_j \circ h = q_j$

$h : B \to A$

$b \mapsto (q_j(b))_{j\in K}$



zz: (i) $h(B) \subseteq A$

Sei $b\in B$ bel. $\forall j\in K: q_j(b) =: a_j \in A_j$

$\Rightarrow h(b) = (a_j)_{j\in K} \in A$

zz: (ii) $\forall \omega_i^B$ ... Operation auf B $\forall b_1,\dots,b_n \in B$: $h(\omega_i^B(b)) = \omega_i^{\mathcal{A}}(h(b))$

Sei $\omega_i^B, b_1,\dots,b_n$ beliebig.

$$\omega_i^{\mathcal{A}}(h(b)) \underset{\text{Definition von } h}{=} \omega_i^{\mathcal{A}}((q_j(b))_{j\in K}) \underset{\omega_i^{\mathcal{A}} \text{ ist komponentenweise definiert}}{=} (\omega_i^{\mathcal{A}_j}(q_j(b)))_{j\in K} \underset{q_j \text{ ist Homomorphismus}}{=} q_j(\omega_i^B(b)) \underset{\text{Definition von } h}{=} h(\omega_i^B(b))$$

$\Rightarrow h$ ist Homomorphismus

zz: (iii) $\forall j\in K: p_j \circ h = q_j$

Sei $j\in K$, $b\in B$ bel. $p_j(h(b)) = p_j((q_\ell(b))_{\ell\in K}) = q_j(b)$

zz: (iv) $\forall \tilde{h} : B \to \mathcal{A}$ ... Homomorphismus: $\forall j\in K: p_j \circ \tilde{h} = q_j \;\Rightarrow\; h = \tilde{h}$

Sei $\tilde{h}$ nach diesen Vorgaben beliebig. Sei $b\in B$ bel. $(a_\ell)_{\ell\in K} := \tilde{h}(b) \in A$

$\forall j\in K: p_j \circ \tilde{h}(b) = p_j((a_\ell)_{\ell\in K}) = a_j = q_j(b)$ also stimmen $h(b)$ und $\tilde{h}(b)$ in der j-ten Komponente überein. $\Rightarrow$ Sie stimmen in allen Komponenten überein $\Rightarrow h = \tilde{h}$

$\square$