2 72

Definition

$$C \text{ heißt Klon auf } A :\Longleftrightarrow (i)\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\forall i \in \{1,...,n\} : \pi_i^{(n)} \in C$$
$$(ii) f_1, f_2, ..., f_k : A^n \to A, g : A^k \to A \in C$$
$$\implies g \circ_{n,k} (f_1,...,f_k) = g(f_1(a_1,...,a_n),...,f_k(a_1,...,a_n)) \in C$$

gesucht: 3 Klone C auf $A := \{1,...,k\}$ mit $A^A \subseteq C$, wobei $k \geq 3$.

- $$C_a := \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \{f : A^n \to A | \exists i \in \{1,...,n\}\exists \tilde{f} \in A^A : f(x_1,...,x_n) = \tilde{f}(x_i)\}$$

  - Sei $\pi_i^{(n)}$ eine beliebige Projektion. $\pi_i^{(n)} \in C_a$, da für $\tilde{f} = id$ gilt $f(x_1,...,x_n) = x_i$.
  - Sei $f_1,...,f_k, g \in C_c$ (mit Stelligkeiten wie oben beschrieben) beliebig. Nennen wir $h := g \circ_{n,k} (f_1,...,f_k)$.

    $$\begin{aligned} g(x_1,...,x_k) &= \tilde{g}(x_i) \\ f_1(x_1,...,x_n) &= \tilde{f}_1(x_j) \\ &\vdots \\ f_k(x_1,...,x_n) &= \tilde{f}_k(x_l) \\ \implies h(x_1,...,x_n) &= \tilde{g}(\tilde{f}_i(x_l)) \in C_a \end{aligned}$$

  - Für $n = 1$ ist $f : A \to A$ mit $f = \tilde{f}$ beliebig in C_a.

- $$C_b := \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \{f : A^n \to A\}$$

  - Alle Projektionen $\pi_i^{(n)}$ liegen in der Menge aller Funktionen von A^n nach A.
  - Alle beliebigen Verknüpfungen von Funktionen liegen in der Menge alller Funktionen von A^n nach A Widerspruch!.
  - Alle A^A liegen in der Menge aller Funktionen von A^1 nach A.

- $$C_c := C_a \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \{f : A^n \to A | f \text{ ist nicht surjektiv}\}$$

  - Wir haben schon gezeigt, dass alle Projektionen $\pi_i^{(n)} \in C_a$. Gemeinsam mit $C_a \subseteq C_c$ ergibt das $\pi_i^{(n)} \in C_c$.
  - Sei $f_1,...,f_k, g \in C_c$ (mit Stelligkeiten wie oben beschrieben) beliebig. Nennen wir $h := g \circ_{n,k} (f_1,...,f_k)$.
    Falls g eine nicht surjektive Funktion ist, ist klarerweise auch h nicht surjektiv und somit $h \in C_c$. Sonst gilt $g \in C_a$ und somit $\exists \tilde{g} : A \to A \exists i \in \{1,...,k\} | g(x_1,...,x_k) = \tilde{g}(x_i)$. $\implies h = \tilde{g}(f_i(x_1,...,x_n))$. Falls auch $f_i \in C_a$ so haben wir bereits gezeigt, dass $h \in C_a$. Anderenfalls ist h nicht surjektiv, da f_i nicht surjektiv ist.

– Wir haben schon gezeigt, dass $A^A \subseteq C_a \subseteq C_c$.

Nun müssen wir zeigen, dass es sich um drei unterschiedliche Klone handelt.

$$f : A^2 \to A$$
$$(a,b) \mapsto ((a+b) mod |A|) + 1$$

f liegt (klarerweise) in C_b. Angenommen f liegt in $C_a \implies f(a,b) = \tilde{f}(a) \vee f(a,b) = \tilde{f}(b)$. o.B.d.A $f(a,b) = \tilde{f}(a)$.

$$f(1,1) = 3 \implies \tilde{f}(1) = 3$$
$$f(1,2) = 1 \text{ falls } |A| = 3 \text{ und } 4 \text{ falls } |A| > 3 \implies \tilde{f}(1) \neq 3 \text{ Widerspruch!}$$

Also $C_a \neq C_b$.

f ist surjektiv, da man mit $\{(1,l) : l \in \{1,...,k\}\}$ alle Elemente in A erreichen kann. Also $f \notin C_c$ und somit $C_b \neq C_c$.

$$g : A^2 \to A$$
$$(a,b) \mapsto 1 \text{ falls } a = b \text{ und } 2 \text{ sonst}$$

Die Funktion g ist offensichtlich nicht surjektiv ($3 \notin g(A)$) also $g \in C_c$.
Angenommen g liegt in $C_a \implies g(a,b) = \tilde{g}(a) \vee g(a,b) = \tilde{g}(b)$. o.B.d.A $g(a,b) = \tilde{g}(a)$.

$$g(1,1) = 1 \implies \tilde{g}(1) = 1$$
$$g(1,2) = 2 \implies \tilde{g}(1) = 2 \text{ Widerspruch!}$$

Also $C_a \neq C_b$.