ALG Ü4

144) $(\mathbb{N},+)$ ges: nichttriviale R, S ... Kongruenzrelationen mit

(i) $(3,14)\in R$

(ii) $\exists$ mindestens zwei R-Äquivalenzklassen, die 1-elementig und mindesten zwei, die nicht 1-elementig sind

(iii) $(3,14)\in S$

(iv) $\forall$ S-Äquivalenzklassen sind nicht 1-elementig

$(x,y)\in S \ :\Longleftrightarrow\ x-y\in 11\mathbb{Z}$

reflexiv: $x-x=0\in 11\mathbb{Z}$ symmetrisch: $x-y\in 11\mathbb{Z} \Rightarrow y-x=-(x-y)\in 11\mathbb{Z}$

transitiv: $(x,y),(y,z)\in S \Rightarrow x-y\in 11\mathbb{Z},\ y-z\in 11\mathbb{Z} \Rightarrow x-z=\underline{x-y}+\underline{y-z}\in 11\mathbb{Z}$

verträglich mit $+$: $(x,y),(a,b)\in S \Rightarrow x-y,\ a-b\in 11\mathbb{Z} \Rightarrow x+a-(y+b)=\underline{x-y}+\underline{a-b}\in 11\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sim_S$ ist Kongruenzrelation (nicht trivial, da $0\sim_S 11$ und $0\not\sim_S 1$)

(iii) $(3,14)\in S$, da $3-14=-11\in 11\mathbb{Z}$

(iv) Sei $n\in\mathbb{N}$ bel. $\Rightarrow n+11\neq n$ und $n, n+11\in [n]_{\sim_S}$

Partition von R: $M_i=\{i\}\ \forall i\in\{0,1,2\}$ $M_i:=\{i+11n : n\in\mathbb{N}\}\ \forall i\in\{3,\dots,13\}$

reflexiv, symmetrisch, transitiv nach Definition

mit + verträglich: Sei $a,a',b,b'\in\mathbb{N}$ mit $a\sim a'$ und $b\sim b'$ bel.

1. Fall $a\leq 2 \Rightarrow a'=a$

i. Fall $b\leq 2 \Rightarrow b'=b$ $\Rightarrow a+b\sim a'+b'=a+b$

ii. Fall $b\geq 3 \Rightarrow \exists i\in\{3,\dots,13\}\ \exists n,n'\in\mathbb{N}: b=i+11n \wedge b'=i+11n'$

$\Rightarrow a+b=a+i+11n$ $a'+b'=a+i+11n'$ $\Rightarrow a+b\sim a'+b'$

2. Fall $a\geq 3 \Rightarrow \exists i\in\{3,\dots,13\}\ \exists n,n'\in\mathbb{N}: a=i+11n \wedge a'=i+11n'$

i. Fall $b\leq 2 \Rightarrow b'=b \Rightarrow a+b\sim a'+b'$ wie oben

ii. Fall $b\geq 3 \Rightarrow \exists j\in\{3,\dots,13\}\ \exists l,l'\in\mathbb{N}: b=j+11l \wedge b'=j+11l'$

$\Rightarrow a+b=i+11n+j+11l=i+j+11(n+l)$ $a'+b'=i+11n'+j+11l'=i+j+11(n'+l')$

$\Rightarrow a+b\sim a'+b'$

(i) $3=3+11\cdot 0$ $14=3+11\cdot 1$ $\Rightarrow 3\sim_R 14$

(ii) M_0, M_1 ... einelementig
M_3, M_4 ... nicht einelementig