ALG Ü8

292) Beschreiben Sie freie Objekte über einer beliebigen vorgegebenen Menge X in der Kategorie Ab der abelschen Gruppen.

Nach UE 290 bzw. Lemma 4.1.2.2. gilt:

Da Ab unter Unteralgebren abgeschlossen ist gilt für $\mathcal{F} \in Ab$ mit $X \subseteq \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$... frei über X $\iff$ (1) $\forall \mathcal{A} \in Ab \; \forall j: X \to \mathcal{A} \; \exists \varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{A}$.. Hom mit $j \subseteq \varphi$

(2) $\mathcal{F}$ wird von X erzeugt

Also kommt für gegebenes X nur $\mathcal{F} = \langle X \rangle$ in Frage.

(2) wird trivialerweise erfüllt.

zz: (1) Sei $\mathcal{A} \in Ab$, $j: X \to \mathcal{A}$ bel. Sei $f \in F$ bel.

$\Rightarrow \exists t \in \mathbb{T} \; \exists x_1, \dots, x_n \in X : f = t(x_1, \dots, x_n)$

$\varphi(f) = \varphi(t(x_1, \dots, x_n)) = t(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = t(j(x_1), \dots, j(x_n))$

φ setzt j fort zz: wohldefiniert

$t(x_1, \dots, x_n) = t'(x_1, \dots, x_n)$ (mit genügend großem n, es müssen nicht alle x_i verwendet werden)

$\Rightarrow$ aus UE 297, dass $\forall \mathcal{A} \in Ab : \mathcal{A} \models t \approx t'$

$\Rightarrow t(j(x_1), \dots, j(x_n)) = t'(j(x_1), \dots, j(x_n))$ also ist φ wohldefiniert

φ ist Hom. nach Definition

$\Rightarrow \mathcal{F}$ ist frei über X

$\Rightarrow$ genau $\langle X \rangle$ ist frei über X in der Kategorie Ab