ALG Ü1

2001) $R_1 = \{A \subseteq \mathbb{Q} : A$ nach unten abgeschlossen, kein größtes Element, $\emptyset \neq A \neq \mathbb{Q}\}$

$R_2 = CF/\sim$

$R_3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{\leq 9}^{\mathbb{N}}$ Idee: 3,1415... als $\underset{\in \mathbb{Z}}{3}, \underbrace{1, 4, 1, 5, \dots}_{\in \{0,1,\dots,9\}}$

$f_1 : R_1 \to R_3$

$A \in R_1$ bel. $\Rightarrow \forall a \in A \; \exists b \in A : a < b$ Da $A \neq \mathbb{Q}$ muss dabei $|a-b| \to 0$

Mit Wahl von a "nahe genug am oberen Rand" gilt $\forall x \in A : \lfloor x \rfloor \leq \lfloor a \rfloor$

und $A \cap U_{\frac{1}{10^{n+1}}}(a)$ enthält nur Zahlen die in der n-ten Nachkommastelle

gleich sind. $x_n :=$ eben diese Nachkommastelle $\in \mathbb{N}_{\leq 9}$

$A \mapsto (\lfloor a \rfloor, (x_n)_{n \in \mathbb{N}})$

$f_2 : R_2 \to R_3$

$[x_n]_\sim \in R_2$ bel. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [x_n]_\sim$ ... streng monoton wachsend

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > m \geq N : x_n - x_m < \varepsilon$

Für $\varepsilon := \frac{1}{2}$ haben also $\forall n, m \geq N : \lfloor x_n \rfloor = \lfloor x_m \rfloor =: z$

Für $\varepsilon := \frac{1}{10^{n+1}}$ haben $\forall n, m \geq N$ die selbe n-te Nachkommastelle $=: x_n$

$[x_n]_\sim \mapsto (z, (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$f_1^{-1} : R_3 \to R_1$

$$(z, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(-\infty, z + \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{10^{n+1}} x_n\right)$$

nach unten abgeschlossen klar, nicht leer, da z enthalten, nicht ganz $\mathbb{Q}$, da $z+1$ nicht enthalten

kein größtes Elem., da $\forall w \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \dots \; \exists k \in \mathbb{N} : w \in (-\infty, z + \sum_{n=0}^{k} \dots) \Rightarrow \exists y : w < y < z + \sum_{n=0}^{k} \dots$

$f_2^{-1} : R_3 \to R_2$

$$(z, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto \left[\left(z + \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{10^{n+1}} x_n\right)_{k\in\mathbb{N}}\right]_\sim$$

ist (durch hinschauen) Cauchy-Folge

$\forall A \in R_1 : f_1^{-1}(f_1(A)) = A$ und $\forall [x_n]_\sim \in R_2 : f_2^{-1}(f_2([x_n]_\sim)) = [x_n]_\sim$

nachprüfen sollte machbar sein (habe aber keine Zeit mehr dafür)

evt. hübscher mit sgn und $\mathbb{N}$ statt $\mathbb{Z}$ also $\{-1, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\leq 9}^{\mathbb{N}}$

dann hat aber 0 zwei Darstellungen