ALG Ü9

330) Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$

1) Zeigen Sie, dass die Elemente 2 und 3 in R irreduzibel aber nicht prim sind.

2) Finden Sie eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$, die im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht irreduzibel ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Normfunktion N aus 5.1.3. und zeigen Sie, dass genau jene $x \in R$ Einheiten sind, die $N(x) = 1$ erfüllen.

---

irreduzibel ... $p = a \cdot b \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b \quad \Leftrightarrow \quad p = a \cdot b \Rightarrow a \in E(R) \vee b \in E(R)$

prim ... $p \mid a \cdot b \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$

---

1) Sei $x, y \in R$ mit $x \cdot y = 2$ bel. $\Rightarrow N(x) \cdot N(y) = N(2) = 4$

1. Fall $(N(x) = 1 \wedge N(y) = 4)$ oder $(N(x) = 4 \wedge N(y) = 1) \Rightarrow x \in E(R) \vee y \in E(R)$

2. Fall $N(x) = 2 \wedge N(y) = 2$

Damit $N(a + b\sqrt{-5}) = 2$ muss $a^2 + 5b^2 = 2$ was keine Lösung in $\mathbb{Z}$ hat $\lightning$

Sei $x, y \in R$ mit $x \cdot y = 3$ bel. $\Rightarrow N(x) \cdot N(y) = N(3) = 9$

1. Fall $(N(x) = 1 \wedge N(y) = 9)$ oder $(N(x) = 9 \wedge N(y) = 1) \Rightarrow x \in E(R) \vee y \in E(R)$

2. Fall $N(x) = 3 = N(y)$

Damit $N(a + b\sqrt{-5}) = 3$ muss $a^2 + 5b^2 = 3$ was keine Lsg in $\mathbb{Z}$ hat $\lightning$

$\Rightarrow$ 2, 3 sind irreduzibel in R

$\neg(2 \mid 1 + \sqrt{-5})$ aber $2 \mid (1 + \sqrt{-5})^2 = (1 + 2\sqrt{-5} - 5) = -4 + 2\sqrt{-5}$

$\neg(3 \mid 1 + \sqrt{-5}) \wedge \neg(3 \mid 2 + \sqrt{-5})$ aber $3 \mid (1 + \sqrt{-5})(2 + \sqrt{-5}) = -3 + 3\sqrt{-5}$

$\Rightarrow$ 2, 3 sind nicht prim in R

2) 5 ist prim in $\mathbb{Z}$ aber $5 = (-\sqrt{-5})(\sqrt{-5})$ und $N(-\sqrt{-5}) = N(\sqrt{-5}) = 5$

$\Rightarrow$ 5 ist nicht irreduzibel in R