

ALG Ü11

394+395) $R := (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[t]$ $U \subseteq R$... kleinster Unterring mit 1, der t^5 enthält

Da $1 \in U \Rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \in U$ und Da $t^5 \in U \Rightarrow t^{5n} \in U \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \left\{ \sum_{i=0}^n a_i t^{5i} \mid n \in \mathbb{N}, \forall i: a_i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \right\} \subseteq U$$

Behauptung $U = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i t^{5i} \mid n \in \mathbb{N}, \forall i: a_i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \right\}$

zz: $U \subseteq R$... Unterring mit 1 $0, 1, +, -$ klar

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i t^{5i} \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j t^{5j} \right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \right) t^{5k} \in U$$

zz: $t^5 \in U$ klar

zz: kleinster Unterring mit diesen Eigenschaften

Sei $V \subseteq U$... Unterring mit 1, der t^5 enthält bel.

Sei $u \in U$ bel. $\Rightarrow u = \sum_{i=0}^n a_i t^{5i}$

$\forall i \in \{0, \dots, n\}: a_i t^{5i} \in V$, da $1 \in V \Rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subseteq V$ und
 $t^5 \in V \Rightarrow t^{5N} \in V$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i t^{5i} \in V \Leftrightarrow u \in V \Rightarrow U \subseteq V \rightarrow U = V$$

ges: $p(x) \in U[x] \setminus \{0\}$ mit $p(t) = 0$

$$p(x) = x^5 + 4t^5 \in U[x] \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad p(t) = t^5 + 4t^5 = 5t^5 = 0$$