

ALG 09

2010) V. Varietät mit $\exists X \in V: |X| \geq 2$

$F_i \in V$ frei über (B_i, ι_i) $i=1,2$ $B_1 \cap B_2 = \emptyset$

(F, j_1, j_2) - Koprodukt von F_1 und F_2

zz: a) $(j_1 \circ \iota_1)(B_1) \cap (j_2 \circ \iota_2)(B_2) = \emptyset$

Angenommen $\exists a \in (j_1 \circ \iota_1)(B_1) \cap (j_2 \circ \iota_2)(B_2) \neq \emptyset$

Sei $X \in V$ mit $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ bel.

$f_1: B_1 \rightarrow X, b \mapsto x_1$

$f_2: B_2 \rightarrow X, b \mapsto x_2$

$\Rightarrow \exists! \varphi_1: F_1 \rightarrow X \exists! \varphi_2: F_2 \rightarrow X$

$\varphi_1 \circ \iota_1 = f_1 \wedge \varphi_2 \circ \iota_2 = f_2$

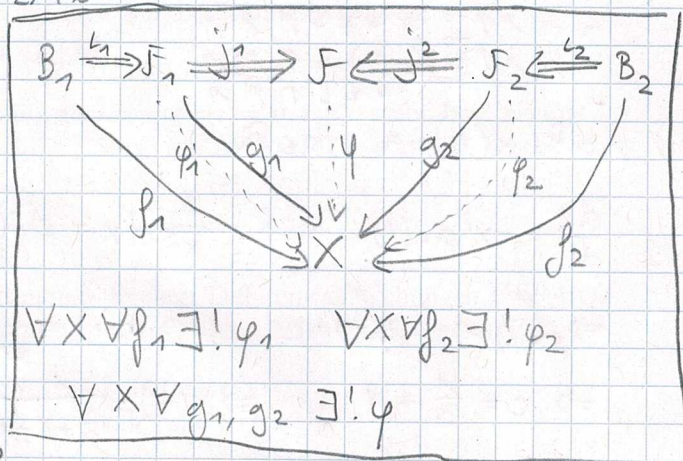
$\Rightarrow \exists! \varphi: F \rightarrow X: \varphi_1 = \varphi \circ j_1, \varphi_2 = \varphi \circ j_2$

$\Rightarrow \varphi \circ j_1 \circ \iota_1 = f_1 \wedge \varphi \circ j_2 \circ \iota_2 = f_2$

$a_1 \in B_1, a_2 \in B_2$ mit $(j_1 \circ \iota_1)(a_1) = a = (j_2 \circ \iota_2)(a_2)$

$\Rightarrow f_1(a_1) = x_1 = \varphi(j_1 \circ \iota_1(a_1)) = \varphi(a); f_2(a_2) = x_2 = \varphi(j_2 \circ \iota_2(a_2)) = \varphi(a)$

$\Rightarrow \varphi(a) = x_1 \neq x_2 = \varphi(a) \quad \text{---} \quad \Rightarrow (j_1 \circ \iota_1)(B_1) \cap (j_2 \circ \iota_2)(B_2) = \emptyset$



b) $B = B_1 \cup B_2 \quad \iota := (j_1 \circ \iota_1) \cup (j_2 \circ \iota_2) \Rightarrow F$ frei über (B, ι)

Sei $X \in V$ bel. Sei $f: B \rightarrow X$ bel. $f_1 := f|_{B_1}, f_2 := f|_{B_2}$

$\Rightarrow \exists! \varphi_i: F_i \rightarrow X$ mit $f_i = \varphi_i \circ \iota_i \quad i=1,2$

$\Rightarrow \exists! \varphi: F \rightarrow X$ mit $\varphi_i = \varphi \circ j_i \quad i=1,2$

$\Rightarrow f_i = \varphi \circ j_i \circ \iota_i = \varphi \circ \iota \quad i=1,2$

Also $\forall X \in V \forall f: B \rightarrow X \exists! \varphi: F \rightarrow X: f = \varphi \circ \iota$

$\Rightarrow F$ ist frei über (B, ι)

