ALG Ü1

37) Fundamentalsatz der Algebra

zz: $\forall\, p(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C} \quad \exists z \in \mathbb{C} : p(z) = 0$

1. Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ bel. $\quad (a_k \in \mathbb{C},\ n \geq 1,\ a_n \neq 0)$

Da $\lim_{x \to +\infty} |p(x)| = \lim_{x \to +\infty} |a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n| = \lim_{x \to +\infty} |x^n| \cdot |\underbrace{a_0 x^{-n}}_{\to 0} + \underbrace{a_1 x^{-n+1}}_{\to 0} + \underbrace{\ldots}_{\to 0} + \underbrace{a_n}_{\to a_n}|$

$= \lim_{x \to +\infty} |a_n| \cdot \underbrace{|x^n|}_{\to +\infty} = +\infty$

existiert ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R : |p(z)| > |a_0| = |p(0)|$

$D := \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \}$ ist beschränkt und abgeschlossen also kompakt.

Aus der Kompaktheit von D und der Stetigkeit von $z \mapsto |p(z)|$

(Polynomfunktionen und Betragsfunktion sind stetig, Zusammensetzung erhält Stetigkeit)

folgt, dass $|p(z)|$ ein Minimum z_0 auf D annimmt.

Da $\forall z \in \mathbb{C} \setminus D : |p(z_0)| \underset{0 \in D}{\leq} |p(0)| < |p(z)|$ ist z_0 sogar ein globales Minimum.

2. Für $q(z) := p(z + z_0)$ gilt, dass wenn $w \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von q ist $w - z_0$ eine Nullstelle von p ist. Daher o.B.d.A. $z_0 = 0$.

Fallunterscheidung: 1. Fall z_0 ist Nullstelle $\quad$ fertig!

2. Fall z_0 ist keine Nullstelle also $p(z_0) \neq 0$

$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \qquad 0 \neq p(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = a_0$

$q(z) := 1 + \frac{a_1}{a_0} z + \frac{a_2}{a_0} z^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_0} z^n \qquad$ Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ der erste Index mit $a_k \neq 0$

$q(z) = 1 + \frac{a_k}{a_0} z^k + \frac{a_{k+1}}{a_0} z^{k+1} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} z^n \qquad$ (existiert, da sonst $p(z) = a_0 \in \mathbb{C}$)

Da $a_0 \cdot q(z) = p(z)$ ist jede Nullstelle von $q(z)$ auch eine von $p(z)$, daher o.B.d.A. $a_0 = 1$ also $p(z) = q(z)$.

Wähle $c \in \mathbb{C}$, sodass $c^k = -\frac{1}{a_k}$ und $\varepsilon > 0$, sodass $\frac{1}{\varepsilon} > \sum_{j=k+1}^{n} a_j c^j$. Dann gilt

$p(c\varepsilon) = 1 + a_k c^k \varepsilon^k + a_{k+1} c^{k+1} \varepsilon^{k+1} + \ldots + a_n c^n \varepsilon^n = 1 - \varepsilon^k + \sum_{j=k+1}^{n} a_j c^j \varepsilon^j$

und $\frac{1}{\varepsilon} > \sum_{j=k+1}^{n} a_j c^j \iff 1 > \sum_{j=k+1}^{n} a_j c^j \varepsilon \iff \varepsilon^k > \sum_{j=k+1}^{n} a_j c^j \varepsilon^{k+1} > \sum_{j=k+1}^{n} a_j c^j \varepsilon^j$

$\Rightarrow -\varepsilon^k + \sum_{j=k+1}^{n} a_j c^j \varepsilon^j < 0 \qquad \Rightarrow p(c\varepsilon) < 1 \quad ↯$

Widerspruch zu z_0 ist Minimum, da $p(z_0) = p(0) = a_0 = 1$ $\qquad \square$