ALG Ü11

355 + 375)

Prop 5.3.2.11 R ... faktorieller Ring $f \in R[x]$ $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$p, q \in R$ ... teilerfremd $\frac{p}{q} \in Q$ ... Quotientenkörper von R

$f(\frac{p}{q}) = 0 \Rightarrow p | a_0 \wedge q | a_n$

Bew

$f(\frac{p}{q}) = \sum_{i=0}^{n} a_i (\frac{p}{q})^i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{p^i}{q^i} = 0 \Leftrightarrow a_0 = -\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{p^i}{q^i} = -p \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{p^{i-1}}{q^i}$

Da $p | (-p \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{p^{i-1}}{q^i})$ gilt auch $p | a_0$.

$f(\frac{p}{q}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{p^i}{q^i} = a_n \frac{p^n}{q^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{p^i}{q^i} = 0 \Leftrightarrow a_n \frac{p^n}{q^n} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{p^i}{q^i}$

$\Leftrightarrow a_n p^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-i} = -q \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-i-1}$

Da $q | (-q \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-1-i})$ gilt auch $q | a_n p^n$.

Seien $q_1, \dots, q_m$ die Primfaktoren und $e_1, \dots, e_m$ die Potenzen von q

also $q = q_1^{e_1} \cdot \dots \cdot q_m^{e_m}$

$\forall j \in \{1, \dots, m\}: q_j^{e_j} | q | a_n p^n \Rightarrow q_j^{e_j} | a_n \Rightarrow q | a_n$

Lemma p ... prim $a, b \in R$ p, b ... teilerfremd $p^k | a \cdot b \Rightarrow p^k | a$

Bew Vollständige Induktion nach k:

$k = 1$: $p | a \cdot b \Rightarrow p | a \vee p | b$, da p prim $p | b$ ↯ zu teilerfremd $\Rightarrow p | a$

$k+1$: Induktionsannahme $p^k | a \cdot b \Rightarrow p^k | a$

$p^{k+1} | a \cdot b \Rightarrow p^k | a \cdot b \Rightarrow p^k | a \Rightarrow \exists x : p^k \cdot x = a$

$p^{k+1} | a \cdot b \Leftrightarrow \exists y : p^{k+1} \cdot y = a \cdot b = p^k \cdot x \cdot b \Leftrightarrow \exists y : p \cdot y = x \cdot b$

$\Leftrightarrow p | x \cdot b \Rightarrow p | x \vee p | b \Rightarrow p | x$, da sonst p, b nicht teilerfremd

$\Rightarrow p \cdot \hat{x} = x \Rightarrow a = p^k \cdot x = p^k \cdot p \cdot \hat{x} = p^{k+1} \cdot \hat{x} \Rightarrow p^{k+1} | a$

...

ALG Ü11

355+375) ... Def $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt ganz algebraisch $:\Longleftrightarrow \exists p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$

mit $a_n = 1$ und $p(\alpha) = 0$

ZZ: $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ist ganz algebraisch

Nehmen wir einmal vielleicht grad 2? $p(x) = x^2 + ax + b$

$$p(\alpha) = \left(\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^2 + a\left(\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right) + b = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} + b \qquad a = -1$$

$$= \frac{3}{2} + \cancel{\frac{\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{5}}{2}} + b = 1 + b = 0 \qquad b = -1$$

$\Rightarrow p(x) = x^2 - x - 1$ $\quad\Rightarrow \alpha$ ist ganz algebraisch

ZZ: $q \in \mathbb{Q}$ $\quad q$ ... ganz algebraisch $\Longleftrightarrow q \in \mathbb{Z}$

$\Longleftarrow$ $q \in \mathbb{Z} \Rightarrow p(x) = x - q$ ist normiert in $\mathbb{Z}[x]$ und erfüllt $p(q) = 0$

$\Longrightarrow$ Sei q ... ganz algebraisch $\Rightarrow \exists p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ mit $a_n = 1$

und $p(q) = 0$. Sei $q = \frac{r}{s}$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$ und teilerfremd sowie $s \neq 0$.

Nach 355 gilt $r \mid a_0 \wedge s \mid a_n$ Da $a_n = 1 \Rightarrow s \mid 1 \Rightarrow s = \pm 1$

$\Rightarrow q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Z}$

ZZ: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{Z} \vee \sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Angenommen $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Da $p(x) = x^2 - n \in \mathbb{Z}[x]$, normiert und

$p(\sqrt{n}) = 0$ ist $\sqrt{n}$ ganz algebraisch $\Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ nach oben.

$\Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \vee \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$

$\square$