ALG Ü4

2007) $(G,\cdot,1,^{-1})$ ... Gruppe $U\leq G$ $K:=\{gU : g\in G\}$

a⇒b) $(\forall g\in G: gU = Ug) \Rightarrow (\forall g\in G: gU\subseteq Ug)$

klar

b⇒c) $(\forall g\in G: gU\subseteq Ug) \Rightarrow (\forall g\in G: gUg^{-1}=U)$

$gUg^{-1}=\{x\in G \mid \exists u\in U: x = gug^{-1}\}$

Sei $g\in G$ bel. Sei $u\in U$ bel.

- $\Rightarrow \exists v\in U: gu = vg$, da $gU\subseteq Ug$ somit gilt
  $gug^{-1} = vgg^{-1} = v\in U \quad \Rightarrow gUg^{-1}\subseteq U$
- $\Rightarrow \exists v\in U: g^{-1}u = vg^{-1}$, da $g^{-1}U\subseteq Ug$ somit gilt
  $u = gg^{-1}u = gvg^{-1}\in gUg^{-1} \quad \Rightarrow U\subseteq gUg^{-1} \quad \Rightarrow gUg^{-1}=U$

c⇒a) $(\forall g\in G: gUg^{-1}=U) \Rightarrow (\forall g\in G: gU = Ug)$

Sei $g\in G$ bel. Sei $u\in U$ bel.

$\Rightarrow gug^{-1} = v\in U \quad \Rightarrow gu = vg\in Ug$

$\Rightarrow \exists v\in U: gvg^{-1} = u \quad \Rightarrow gv = ug \quad \Rightarrow ug\in gU \quad \Rightarrow gU = Ug$

a)⇒d) $(\forall g\in G: gU = Ug) \Rightarrow (\forall g,h\in G: (gh^{-1}\in U \Leftrightarrow h^{-1}g\in U))$

Sei $g,h\in G$ mit $gh^{-1}\in U$ bel.

$\Rightarrow \exists u\in U: gh^{-1} = u \quad \Rightarrow g = uh \quad \overset{a)}{\Rightarrow} \exists v\in U: uh = hv$

$\Rightarrow g = hv \quad \Rightarrow h^{-1}g = v\in U$

Für $h^{-1}g\in U$ folgt aus oben mit $g' = h^{-1}$ die Aussage $gh^{-1}\in U$.

d)⇒b) $(\forall g,h\in G: (gh^{-1}\in U \Leftrightarrow h^{-1}g\in U)) \Rightarrow (\forall g\in G: gU\subseteq Ug)$

Sei $g\in G$, $u\in U$ bel. $\quad gu =: h\in G \quad \Leftrightarrow g = hu^{-1} \Leftrightarrow h^{-1}g = u^{-1}\in U$

$\Rightarrow gh^{-1} =: v\in U \quad \Leftrightarrow g = vh \Leftrightarrow v^{-1}g = h \quad \Rightarrow gu = h = v^{-1}g\in Ug$

...

ALG Ü4

2007) ...

e) $\forall g,h \in G: \; gU * hU := (gh)U$ liefert eine wohldefinierte Abbildung von $K \times K$ nach K

Wohldefiniert:

$$\forall g,g',h,h': ((gU = g'U \wedge hU = h'U) \Rightarrow ((gh)U = (g'h')U))$$

a,b,c,d) $\Rightarrow$ e)

Sei $g,g',h,h' \in G$ mit $gU = g'U \wedge hU = h'U$ bel.

$*$ [$\forall g,h \in G: \; g(hU) = (gh)U$

$$g(hU) = \{x \in G : \exists y \in \{z \in G : \exists u \in U : z = hu\} : x = g \cdot y\}$$

$$= \{x \in G : \exists u \in U : x = g \cdot (hu)\} = \{x \in G : \exists u \in U : x = (gh)u\} = (gh)U$$

$$(gh)U \overset{*}{=} g(hU) = g(h'U) \overset{*}{=} (gh')U \overset{(a)}{=} U(gh')$$

$*'$ [$\forall g,h \in G: (Ug)h = U(gh)$ Beweis wie oben

$$\overset{*'}{=} (Ug)h' \overset{a)}{=} (gU)h' = (g'U)h' \overset{a)}{=} (Ug')h' \overset{*'}{=} U(g'h') \overset{a)}{=} (g'h')U$$

e) $\Rightarrow$ d)

Sei $g,h \in G$ mit $gh^{-1} \in U$ bel.

$\Rightarrow (gh^{-1})U = U \qquad gU = g^{-1}U \qquad h^{-1}U = hU$

$\Rightarrow (g^{-1}h)U = U \quad \Rightarrow \forall u \in U \; \exists v \in U: \; g^{-1}hu = v$

$\Leftrightarrow hu = gv \quad \Leftrightarrow u = h^{-1}gv \quad \Leftrightarrow uv^{-1} = h^{-1}g \quad \Rightarrow h^{-1}g \in U$

Falls $h^{-1}g \in U$ folgt die Aussage wenn man $g = h^{-1}$ setzt.

$\square$