ALG Ü1

9) ges: Struktur $(M, 0_m, v_m)$ mit allen Peano-Axiomen außer (3)/(4)/(5)

Def Peano-Axiome (1) $0_m \in M$ (2) $v_m: M \to M$

(3) v_m ... injektiv (4) $\forall n \in M: v_m(n) \neq 0_m$

(5) $\forall T \subseteq M \left(0_m \in T \land (\forall n \in M: n \in T \Rightarrow v_m(n) \in T) \Rightarrow T = M \right)$

Peano-Axiome ohne (3)

$M := \{0, 1\}$ $0_m := 0$ v_m sodass $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 1$

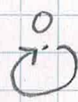
(1) $0 \in M$ ✓ (2) $v_m: M \to M$ ✓ (4) $\forall n \in M: v_m(n) \neq 0$ ✓

$\neg(3) \Leftrightarrow \exists n, k \in M, n \neq k: v_m(n) = v_m(k)$ für $n=0$ $k=1$ ✓

(5) Für alle $T \subseteq M$ mit den in (5) beschriebenen Eigenschaften gilt

$0 \in T$ und $v_m(0) = 1 \in T$ also $T = \{0, 1\} = M$ ✓

Peano-Axiome ohne (4)



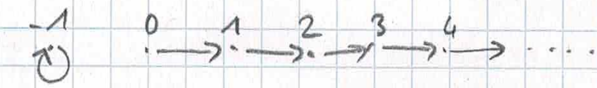
$M := \{0\}$ $0_m := 0$ v_m sodass $0 \mapsto 0$

(1) $0 \in M$ ✓ (2) $v_m: M \to M$ ✓ (3) injektiv, da $\nexists n, k \in M: n \neq k$

$\neg(4) \Leftrightarrow \exists n \in M: v_m(n) = 0$ für $n=0$ gegeben

(5) Alle $T \subseteq M$ mit $0 \in T$ sind schon ganz M

Peano-Axiome ohne (5)



$M := \{-1\} \cup \mathbb{N}$ $0_m := 0$ v_m sodass $-1 \mapsto -1 \land \forall n \in \mathbb{N}: v_m(n) = n+1$

(1) $0 \in M$ ✓ (2) $v_m: M \to M$ ✓ (3) injektiv: $\exists! n \in M: v_m(n) = -1$ nämlich -1

und auf den restlichen Zahlen wissen wir die Injektivität aus der Definition von $\mathbb{N}$

$(v_m(-1) = -1 \notin \mathbb{N})$

(4) $\forall n \in M: v_m(n) \neq 0$, da $-1 \mapsto -1$ und für die

restlichen Zahlen wissen wir das aus der Definition von $\mathbb{N}$

$\neg(5) \Leftrightarrow \exists T \subseteq M \left(0 \in T \land (\forall n \in M: n \in T \Rightarrow v_m(n) \in T) \land T \neq M \right)$

$T := \mathbb{N}$ $0 \in T$ ✓ $\forall n \in T: v_m(n) \in T$ ✓ aber $T \neq M$ wegen $-1 \in M$