ALG Ü3

134) H... Halbgruppe

zz: $\forall n,m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\ \forall a \in H: a^{m+n} = a^m a^n$

Vollständige Induktion nach n $\qquad M := \{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \mid \forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}: a^{m+n} = a^m a^n\}$

$1 \in M$, da $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}: a^{m+1} = a^m \cdot a = a^m \cdot a^1$

M ist abgeschlossen bezgl. Nachfolger, da $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$a^{m+(n+1)} = a^{m+n+1} = a^{m+n} \cdot a \overset{(IV)}{=} (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^m (a^n \cdot a) = a^m \cdot a^{n+1}$$

H... Monoid

zz: $\forall n,m \in \mathbb{N}\ \forall a \in H: a^{m+n} = a^m a^n$

$n=0$: $\quad a^{m+0} = a^m = a^m \cdot e = a^m \cdot a^0$

H... Monoid und a^{-1} existiert

zz: $\forall n,m \in \mathbb{Z}: a^{m+n} = a^m a^n$

1. Fall $n,m \geq 0$: bereits oben gezeigt

2. Fall $n<0 \wedge m \geq 0$: $\quad k := -n \Rightarrow k > 0$

Vollständige Induktion nach k $\qquad M := \{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \mid \forall m \in \mathbb{N}: a^{m-k} = a^m a^{-k}\}$

$1 \in M$, da $\forall m \in \mathbb{N}: a^m \cdot a^{-1} = (a^{m-1} \cdot a) \cdot a^{-1} = a^{m-1} \cdot (a \cdot a^{-1}) = a^{m-1} \cdot e = a^{m-1}$

M ist unter Nachfolgern abgeschlossen, da $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$a^m a^{-(k+1)} = a^m (a^{-1})^{k+1} = a^m ((a^{-1})^k \cdot a^{-1}) = (a^m \cdot a^{-k}) \cdot a^{-1} = a^{m-k} \cdot a^{-1}$$
$$= (a^{m-k-1} \cdot a) \cdot a^{-1} = a^{m-(k+1)} (a \cdot a^{-1}) = a^{m-(k+1)}$$

3. Fall $n,m < 0$: $\quad k := -n \quad l := -m$

$$a^{m+n} = a^{-l-n} = a^{-(l+n)} = (a^{-1})^{l+n} = (a^{-1})^l (a^{-1})^n = a^{-l} \cdot a^{-n} = a^m a^n$$

$\square$