DGL Ü6

2) $x'(t) = A(t)\,x(t) \qquad A = \begin{pmatrix} 3t-1 & 1-t \\ t+2 & t-2 \end{pmatrix}$

Ansatz $x_1(t) = x_2(t)$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3t-1)x_1(t) + (1-t)x_2(t) \\ (t+2)x_1(t) + (t-2)x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3tx_1(t) - x_1(t) + x_1(t) - t x_1(t) \\ t x_1(t) + 2x_1(t) + t x_1(t) - 2x_1(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2t x_1(t) \\ 2t x_1(t) \end{pmatrix} \Rightarrow x_1' = 2t x_1 \quad \Rightarrow x_1 = e^{(t^2)} \quad \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ e^{t^2} \end{pmatrix} \text{ ... nicht trivial}$$

Reduktionsverfahren von d'Alembert

$$x(t) = \phi(t)\begin{pmatrix} e^{t^2} \\ e^{t^2} \end{pmatrix} + z(t) = \phi(t)\begin{pmatrix} e^{t^2} \\ e^{t^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

$$z_2'(t) = \sum_{j=2}^{2}\left(a_{2j} - \frac{a_{1j}e^{t^2}}{e^{t^2}}\right) z_j = (a_{22} - a_{12})\, z_2 = (t-2-(1-t))z_2 = (2t-3)z_2$$

$$\Rightarrow z_2(t) = e^{t^2-3t}$$

$$\phi' = \sum_{j=2}^{2} \frac{a_{1j} z_j}{e^{t^2}} = \frac{a_{12} z_2}{e^{t^2}} = (1-t)e^{t^2-3t} e^{-t^2} = (1-t)\,e^{-3t}$$

$$\phi = \int (1-t)e^{-3t}\,dt = \int e^{-3t}\,dt - \int t e^{-3t}\,dt = -\frac{1}{3}e^{-3t} - \int \left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\right)' t\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3t} - \left(-\frac{1}{3}te^{-3t} + \frac{1}{3}\int e^{-3t}\,dt\right) = -\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}te^{-3t} + \frac{1}{3}\frac{1}{3}e^{-3t}$$

$$= \frac{1}{3}e^{-3t}\left(t - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}e^{-3t}\left(t - \frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{3}e^{-3t}\left(t-\frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} e^{t^2} \\ e^{t^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t^2-3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} e^{t^2-3t}(3t-2) \\ e^{t^2-3t}(3t-2) + 9e^{t^2-3t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}e^{t^2-3t}\begin{pmatrix} 3t-2 \\ 3t+7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{FM} \quad Y(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} & \frac{1}{9}e^{t^2-3t}(3t-2) \\ e^{t^2} & \frac{1}{9}e^{t^2-3t}(3t+7) \end{pmatrix}$$

DGL ÜG

3) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2t^2 x_2 \\ -3x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2' = -3x_2 \Rightarrow x_2 = \pm e^{-3t}$

$\Rightarrow x_1' = x_1 \pm 2t^2 e^{-3t}$

$\Rightarrow x_1 = e^t \left(c \pm \int_{t_0}^{t} e^{-s} 2s^2 e^{-3s}\, ds\right) = e^t c \pm 2\int_{t_0}^{t} s^2 e^{-4s}\, ds \qquad c \neq 0$

$\Rightarrow x^+(t) = \begin{pmatrix} e^t c + 2\int_{t_0}^{t} s^2 e^{-4s}\, ds \\ e^{-3t} \end{pmatrix} \quad x^-(t) = \begin{pmatrix} e^t c - 2\int_{t_0}^{t} s^2 e^{-4s}\, ds \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}$

Sind x^+, x^- l.u? Da Lsg von DGL nicht es für t_0 zu überprüfen.

$a\,(x^+(t_0)) + b\,(x^-(t_0)) = 0$

$\Rightarrow a e^{-3t_0} - b e^{-3t_0} = 0 \Leftrightarrow (a-b)e^{-3t_0} = 0 \Rightarrow b = a$

$\Rightarrow a e^{t_0} c + a\, 2\int_{t_0}^{t_0} s^2 e^{-4s}\, ds + b e^{t_0} c - b\, 2\int_{t_0}^{t_0} s^2 e^{-4s}\, ds = 0$

$\Leftrightarrow (a+b)\, e^{t_0} c = 0 \Rightarrow a+b = 0 \Rightarrow a = -b \Rightarrow a = b = 0$

$\Rightarrow$ l.u!

$Y(t) = (x^+(t), x^-(t)) \ldots$ FM

$\Rightarrow W(t) = \det Y(t) = \left(e^t c + 2\int_{t_0}^{t} s^2 e^{-4s}\, ds\right)(-e^{-3t}) - \left(e^t c - 2\int_{t_0}^{t} s^2 e^{-4s}\, ds\right)(e^{-3t})$

$= -ce^{-2t} - 2e^{-3t}\int_{t_0}^{t} s^2 e^{-4s}\, ds - ce^{-2t} + 2e^{-3t}\int_{t_0}^{t} s^2 e^{-4s}\, ds = -2ce^{-2t}$

Satz von Liouville: $W'(t) = \operatorname{spur} A(t)\, W(t)$

$W'(t) = -2ce^{-2t}(-2) = 4ce^{-2t}$

$\operatorname{spur} A(t)\, W(t) = (1 + (-3)) \cdot (-2ce^{-2t}) = 4ce^{-2t}$ ✓

AWP $x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x(t) = \begin{pmatrix} ae^t + 2a\int_{t_0}^{t} s^2 e^{-4s}\, ds + be^t - 2b\int_{t_0}^{t} s^2 e^{-4s}\, ds \\ ae^{-3t} - be^{-3t} \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow ae^0 + 2a\cdot 0 + be^0 - 2b\cdot 0 = -1 \Rightarrow a + b = -1$

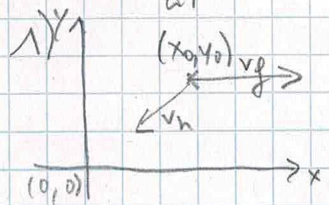
$\Rightarrow ae^{-3\cdot 0} - be^{-3\cdot 0} = 1 \Rightarrow a - b = 1$

$\Rightarrow a = 0 \quad b = -1$

$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} -e^t + 2\int_{t_0}^{t} s^2 e^{-4s}\, ds \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$

DGL Ü6

a)



$$h'(t,x,y) = v_h t \frac{\binom{-x}{-y}}{\left\|\binom{x}{y}\right\|} + v_g t \binom{1}{0} \qquad \left\|\binom{x}{y}\right\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= v_h t \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\binom{-x}{-y} + v_g t \binom{1}{0} \qquad h(0) = \binom{x_0}{y_0}$$

b) $$f(t,x,y) = v_h t \binom{-x}{-y} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + v_g t \binom{1}{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(-v_h t \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} 2x}{x^2+y^2}, -v_h t \frac{-y \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} 2x}{x^2+y^2}\right)^T$$

$$= -v_h t \frac{1}{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ ...stetig} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \text{ gleich ...stetig}$$

$$-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \Rightarrow \text{lokal Lipschitz}$$

c) $$h_2'(t,x,y) = -v_h t y \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow h_2(t,x,y) = \int -v_h t y \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dt = -v_h \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{2} t^2 + x_0$$

$$h_1'(t,x,y) = -v_h t x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + v_g t$$

$$\Rightarrow h_1(t,x,y) = \int -v_h t x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + v_g t \, dt = -v_h \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{2} t^2 + v_g \frac{1}{2} t^2 + y_0$$

$$\Rightarrow h(t,x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 \left(v_g - v_h \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ \frac{1}{2} t^2 \left(-v_h \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

d) $$h(t,x,y) = \binom{0}{0} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} t^2 \left(v_g - v_h \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + x_0 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{-\frac{2x_0}{v_g - v_h \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}} = \sqrt{\frac{2x_0}{v_h \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - v_g}}$$

$$\wedge \ \frac{1}{2} t^2 \left(-v_h \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + y_0 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{-\frac{2y_0}{v_h \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}} = \sqrt{\frac{2y_0}{-v_h \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_0}{v_h \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - v_g} \geq 0 \ \wedge \ \frac{y_0}{-v_h \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} \geq 0$$ und sind sogar gleich, da in beiden Koordinaten gleichzeitig an Nullpunkt

$$\Rightarrow -x_0 v_h \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = y_0 \left(v_h \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - v_g\right) =: t_1$$

$\Rightarrow \sqrt{2t_1}$ ist Zeitpunkt bei dem Hund angekommen ist

DGL Ü6

4) $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n}) \ldots FM$ für $x' = Ax$

a) zz: $X \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n}) \ldots FM \Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ... regulär: $X = YB \quad \forall x \in I$

($\Leftarrow$) Da $Y' = AY$ erfüllt (da Y aus Lsg von $x' = Ax$ besteht)

$\Rightarrow$ aus $Y = XB^{-1} \quad \Rightarrow Y' = X'B^{-1}$ da B nicht von t abhängt

$\Rightarrow X'B^{-1} = AXB^{-1} \quad \Rightarrow X' = AX$ also lösen die Spalten der Matrix X die DGL $x' = Ax$

Da die Spalten von Y l.u. sind und B regulär ist sind auch die Spalten von X l.u. $\quad \Rightarrow X$ ist FM

($\Rightarrow$) Für jede Spalte x_i von X gilt $x_i' = Ax_i$ wird gelöst $\Rightarrow \exists b_i \in \mathbb{R}^n$: $x_i(t) = Y(t) b_i$ da $Y \ldots FM \quad B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\Rightarrow X(t) = Y(t)B \quad$ B muss regulär sein, da sonst die Spalten in X l.a. wären, was ein Widerspruch zu X ist FM liefert.

b) $X(t) := Y(t) Y(t_0)^{-1} \ldots HFM \quad t_0 \in I$ fest

$Y(t_0) \ldots FM \Rightarrow$ regulär $\quad \Rightarrow Y(t_0)^{-1}$ existiert und ist regulär

$Y(t) \ldots FM \quad \Rightarrow \quad X(t) = Y(t) Y(t_0)^{-1} \ldots FM$

$X(t_0) = Y(t_0) Y(t_0)^{-1} = I_n \quad \Rightarrow X \ldots HFM$

DGL ÜG

5) $X, Y \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$

a) $\frac{d}{dt}(XY) = \left(\frac{d}{dt}X\right)Y + X\left(\frac{d}{dt}Y\right)$

$$\left(\frac{d}{dt}(XY)\right)_{i,j} = \frac{d}{dt}(XY)_{i,j} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} X_{i,k} Y_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}(X_{i,k} Y_{k,j})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}X_{i,k}\right)Y_{k,j} + X_{i,k}\left(\frac{d}{dt}Y_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}X_{i,k}\right)Y_{k,j} + \sum_{k=1}^{n} X_{i,k}\left(\frac{d}{dt}Y_{k,j}\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}X\right)Y + X\left(\frac{d}{dt}Y\right)$$

b) $\forall t \in I:$ $X(t)$ ... invertierbar $\qquad t \mapsto (X(t))^{-1} \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$

Für $A \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ ... invertierbar gilt

$$0 = \frac{d}{dt}(I_n) = \frac{d}{dt}(AA^{-1}) = \left(\frac{d}{dt}A\right)A^{-1} + A\left(\frac{d}{dt}A^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow A\frac{d}{dt}A^{-1} = -\left(\frac{d}{dt}A\right)A^{-1}$$

$$\frac{d}{dt}A^{-1} = -A^{-1}\left(\frac{d}{dt}A\right)A^{-1} \quad \text{also } (X^{-1})' = -X^{-1}X'X^{-1}$$

c) Y ... FM für $x' = A(t)x$ $\qquad$ DGL für Y^{-1}?

$$AY = Y' = ((Y^{-1})')^{-1} = (-Y^{-1}Y'Y^{-1})^{-1} = -Y(Y')^{-1}Y$$

$$\Rightarrow (Y^{-1})' = -Y^{-1}AYY^{-1} = -Y^{-1}A$$

$$Y' = AY \quad \Rightarrow (Y')^{-1} = (AY)^{-1} \Rightarrow (Y^{-1})' = Y^{-1}A^{-1}$$

DGL ÜG

6) $A(t) \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ $Y(t)$ ... FM von $x' = A(t)x$

a) $A^T(t) = -A(t)$ $\Rightarrow$ $\|x(t)\|_2$ ... konstant für alle x .. Lsg von $x' = A(t)x$

$\|x(t)\|_2^2 = x(t)^T x(t)$ Da x Lsg von $x' = A(t)x$ gilt x ist zusammengesetzt aus den Lsg in Y $\Rightarrow \exists b \in \mathbb{R}^n : x = Y(t)b$

$\Rightarrow (x^T x)' = (b^T Y^T Y b)' = b^T (Y^{T'} Y + Y^T Y') b = b^T(-Y^T A Y + Y^T A Y) b = b^T 0 b = 0$

Da $Y' = AY$ und somit auch $Y^{T'} = (AY)^T = Y^T A^T = Y^T(-A) = -Y^T A$

$\Rightarrow$ Da $(x^T x)' = 0$ muss $x^T x = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ also konstant

b) $t, \tau \in I$ $\Phi(t,\tau) := Y(t) Y^{-1}(\tau)$

1) $\Phi(t,\tau)$ ... HFM bzgl. τ $\tau \in I$ fest

$Y(\tau)$ ... FM somit regulär ($Y^{-1}(\tau)$ existiert)

$Y(t)$ ... FM $\Rightarrow Y(t) \cdot Y^{-1}(\tau)$ ... FM (siehe Bsp 4a)

$\Phi(\tau,\tau) = Y(\tau) Y^{-1}(\tau) = I$ $\Rightarrow \Phi(t,\tau)$ ... HFM

2) $\forall t, s, \tau \in I : \Phi(t,s) = \Phi(t,\tau)\Phi(\tau,s)$

$\Phi(t,\tau)\Phi(\tau,s) = Y(t) Y^{-1}(\tau) Y(\tau) Y^{-1}(s) = Y(t) Y^{-1}(s) = \Phi(t,s)$

3) $(\Phi(t,\tau))^{-1} = \Phi(\tau,t)$

$(\Phi(t,\tau))^{-1} = (Y(t) Y^{-1}(\tau))^{-1} = Y(\tau) Y(t)^{-1} = \Phi(\tau,t)$

c) $\Phi(t,\tau)$ wie oben $b: I \to \mathbb{R}^n$ .. stetig $x(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) b(\tau)\, d\tau$ $t_0 \in I$

$x(t) = \Phi(t,t_0) \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau) b(\tau)\, d\tau$

$x'(t) = \Phi'(t,t_0) \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau) b(\tau)\, d\tau + \Phi(t,t_0)(\Phi(t_0,t) b(t))$

$= A\Phi(t,t_0) \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau) b(\tau)\, d\tau + \Phi(t,t_0)\Phi(t_0,t) b(t)$

$= A \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) b(\tau)\, d\tau + \Phi(t,t) b(t)$

$= A x + b$