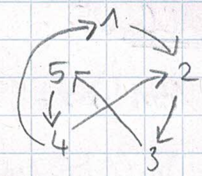
# ALG Ü5




1616) Sn a) gezeigt $\forall G\ \forall U_1, U_2 \leq G: (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$

Sei $U_1, \dots, U_n \leq G$ bel. zz: $(1) \Rightarrow (2)$

$(1) \Leftrightarrow \varphi: U_1 \times \dots \times U_n \to G \quad (u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$ … Isomorphismus zw. dem direkten Produkt $\prod_{i=1}^{n} U_i$ und $G$ $\Rightarrow \varphi$ ist surjektiv $\Leftrightarrow (A)$

Sei $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ bel. Sei $x \in U_i, y \in U_j$ bel. zz: $xy = yx$

$\hat{\varphi}: U_i, V_i \to G \quad (u_i, u_1 \cdot \ldots \cdot u_{i-1} \cdot u_{i+1} \cdot \ldots \cdot u_n) \mapsto \varphi(u_1, \dots, u_n) = u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$

$\hat{\varphi}$ ist surjektiv, injektiv und Homomorphismus, da $\varphi$ diese Eigenschaften vererbt.

$\Rightarrow U_i, V_i \leq G$ erfüllen (1) mit $n=2$ $\Rightarrow$ (2) gilt für $U_i, V_i \leq G$

$x \in U_i, y \in V_i \Rightarrow xy = yx \quad \Leftrightarrow (B)$

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ bel. zz: $U_i \cap V_i = \{e\}$

$U_i, V_i \leq G$ erfüllen (1) mit $n=2$ $\Rightarrow$ (2) gilt für $U_i, V_i \leq G$

$U_i \cap V_i = \{e\} \Leftrightarrow (C) \qquad \Rightarrow (1) \Rightarrow (2)$

zz: $(2) \Rightarrow (3)$

$(C) \Rightarrow (C')$, da $\forall i \in \{1, \dots, n\}: U_i \cap V_i = \{e\}$ und $U_1 \cdot \ldots \cdot U_{i-1} \subseteq V_i$

$\Rightarrow U_i \cap (U_1 \cdot \ldots \cdot U_{i-1}) \subseteq U_i \cap V_i = \{e\}$ und $e \in U_i, e \in U_1 \cdot \ldots \cdot U_{i-1}$

$\Rightarrow U_i \cap (U_1 \cdot \ldots \cdot U_{i-1}) = \{e\}\ \forall i \in \{2, \dots, n\} \Leftrightarrow (C')$

zz: $(4) \Rightarrow (2)$

$(B') \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}: U_i \trianglelefteq G$ gemeinsam mit $(C) \Rightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j: U_i \cap U_j \subseteq U_i \cap V_i = \{e\}$

können wir Lemma 3.2.3.1. anwenden $\Rightarrow \forall u_i \in U_i, u_j \in U_j: u_i u_j = u_j u_i \Leftrightarrow (B)$

zz: $(3) \Rightarrow (5)$

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ bel. Sei $u_i \in U_i$ bel. Sei $g \in G$ bel. zz: $\exists g' \in G: u_i g = g' u_i$

Da $\varphi$ surjektiv ist $\exists g_1 \in U_1, \dots, g_n \in U_n: g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_n$. $u_i g = u_i g_1 \cdots g_n$

$(B) \Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\ \forall y \in U_j: gy = yg \Rightarrow u_i g = g_1 \cdots g_{i-1} \underline{u_i g_i} \cdots g_n$

$u_i g_i u_i^{-1} = \tilde{g}_i \in U_i \Rightarrow u_i g_i = \tilde{g}_i u_i \qquad \Rightarrow u_i g = g_1 \cdots g_{i-1} \tilde{g}_i u_i \cdots g_n =$

$= g_1 \cdots g_{i-1} \tilde{g}_i g_{i+1} \cdots g_n u_i =: g' u_i \qquad \Rightarrow (B')$

ALG Ü5

161 b)... zz: $(5) \Rightarrow (4)$

$(C') \Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n-1\}: (U_1 \cdots U_i) \cap U_{i+1} = \{e\}$

Sei $i \in \{1,\dots,n\}$ bel. zz: $U_i \cap V_i = \{e\}$

Sei $x \in U_i \cap V_i$ bel. $\Leftrightarrow x \in U_i \wedge x \in U_1 U_2 \cdots U_{i-1} U_{i+1} \cdots U_n$

$\Leftrightarrow \exists u_1 \in U_1, \dots, u_{i-1} \in U_{i-1}, u_{i+1} \in U_{i+1}, \dots, u_n \in U_n : x = u_1 u_2 \cdots u_{i-1} u_{i+1} \cdots u_n$

$\Leftrightarrow u_{n-1}^{-1} \cdots u_{i+1}^{-1} u_{i-1}^{-1} \cdots u_2^{-1} u_1^{-1} x = u_n$ und da $(B') \Rightarrow \forall i : U_i \lhd G$

$\Leftrightarrow u_{n-1}^{-1} \cdots u_{i+1}^{-1} x u_{i-1}^{-1} \cdots u_2^{-1} u_1^{-1} = u_n$

$\Leftrightarrow (\underbrace{u_1 u_2 \cdots u_{i-1} x^{-1} u_{i+1} \cdots u_{n-1}}_{\in U_1 \cdots U_{n-1}})^{-1} = u_n$ da $x \in U_i$ ist und $U_1 \cdots U_{n-1} \lhd G$ (siehe Bsp 157) gilt, folgt

$u_n = (u_1 u_2 \cdots u_{i-1} x^{-1} u_{i+1} \cdots u_{n-1})^{-1} \in (U_1 \cdots U_{n-1}) \cap U_n \Rightarrow u_n = e$

$\Rightarrow x = u_1 u_2 \cdots u_{i-1} u_{i+1} \cdots u_{n-1}$ mittels schleichender Induktion erhalten wir $x = u_1 u_2 \cdots u_{i-1}$ und somit $x \in (U_1 \cdots U_{i-1}) \cap U_i = \{e\}$ also $x = e$ und dadurch $U_i \cap V_i = \{e\} \Longleftrightarrow (C)$.

zz: $(2) \wedge (3) \wedge (4) \wedge (5) \Rightarrow (1)$

zz: $\varphi$... Homomorphismus Sei $(u_1,\dots,u_n), (v_1,\dots,v_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$ bel.

$\varphi(u_1 v_1, \dots, u_n v_n) = u_1 v_1 \cdots u_n v_n = u_1 \cdots u_n v_1 \cdots v_n$, da $\forall i : U_i \lhd G$

$= \varphi(u_1,\dots,u_n)\varphi(v_1,\dots,v_n)$

zz: $\varphi$... Bijektion zw. $U_1 \times \dots \times U_n$ und $G$.

surjektiv, wegen (A) und injektiv, da $\forall (u_1,\dots,u_n),(v_1,\dots,v_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$ mit $\varphi(u_1,\dots,u_n) = \varphi(v_1,\dots,v_n) \Rightarrow u_1 \cdots u_n = v_1 \cdots v_n$

Sei $i \in \{1,\dots,n\}$ bel. $u_i = u_{i-1}^{-1} u_{i-2}^{-1} \cdots u_1^{-1} v_1 \cdots v_n u_n^{-1} \cdots u_{i+1}^{-1}$

da $\forall i : U_i \lhd G \Rightarrow u_i = u_1^{-1} v_1 u_2^{-1} v_2 \cdots u_{i-1}^{-1} v_{i-1} u_{i+1}^{-1} v_{i+1} \cdots u_n^{-1} v_n \, v_i$

$\Leftrightarrow \underbrace{u_i v_i^{-1}}_{\in U_i} = \underbrace{u_1^{-1} v_1 \cdots u_{i-1}^{-1} v_{i-1} u_{i+1}^{-1} v_{i+1} \cdots u_n^{-1} v_n}_{\in U_1 \cdots U_{i-1} U_{i+1} \cdots U_n = V_i} = e$ (folgt aus C)

$\Rightarrow u_i = v_i \;\forall i \in \{1,\dots,n\} \Rightarrow (u_1,\dots,u_n) = (v_1,\dots,v_n)$ also $\varphi$... injektiv

$\Rightarrow \varphi$... Isomorphismus $\square$