ALG Ü2

66) M... Menge $\quad \leq$... Totalordnung auf M $(\forall x,y\in M: x\neq y \Rightarrow x\leq y \vee y\leq x)$

...abzählbar $\quad$ ...dicht $(\forall x,y\in M: x\neq y \Rightarrow \exists z\in M: x<z<y \vee y<z<x)$

...kein größtes Element $(\forall m\in M\ \exists x\in M: m<x)$

...kein kleinstes Element $(\forall m\in M\ \exists x\in M: x<m)$

zz: $(M,\leq)$ ist ordnungsisomorph zu $(\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}})$

$:\Longleftrightarrow \exists f: M\to\mathbb{Q}$ ... bijektiv $\quad \forall x,y\in M: x<y \Rightarrow f(x) <_{\mathbb{Q}} f(y)$

0: $\quad m_0\in M$ bel.

$f_0: \{0\}\to\{m_0\}\ ;\ f_0(0)=m_0$

n+1: für $f_n:\{q_0,\dots,q_n\}\to\{m_0,\dots,m_n\}$ mit $\forall i,j: q_i<q_j \Rightarrow m_i<m_j$

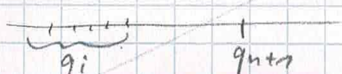
definieren wir $f_{n+1}:\{q_0,\dots,q_{n+1}\}\to\{m_0,\dots,m_{n+1}\}$ durch

$$f_{n+1}(q_i)=\begin{cases} f_n(q_i) & \text{für } i<n+1 \\ m_{n+1} & \text{für } i=n+1\end{cases}$$ wobei m_{n+1} definiert wird durch

1. Fall 

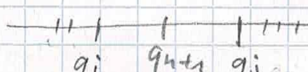
$\forall i\in\mathbb{N}_{\leq n}: q_{n+1}<q_i$

$\Rightarrow \exists m_{n+1}\in M: \forall i\in\mathbb{N}_{\leq n}: m_{n+1}<m_i$ da sonst kleinstes Element $\exists$

2. Fall 

$\forall i\in\mathbb{N}_{\leq n}: q_i<q_{n+1}$

$\Rightarrow \exists m_{n+1}\in M: \forall i\in\mathbb{N}_{\leq n}: m_i<m_{n+1}$, da sonst größtes Element $\exists$

3. Fall 

$\exists i,j\in\mathbb{N}_{\leq n}: q_i<q_{n+1}<q_j$

Sei i sodass q_i das größte mit $q_i<q_{n+1}$ und j sodass q_j das kleinste mit $q_{n+1}<q_j$. Diese existieren da $\{q_0,\dots,q_n\}$ endlich ist.

$\Rightarrow \exists m_{n+1}\in M: m_i<m_{n+1}<m_j$, da sonst nicht dicht

Mit $g:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$, $n\mapsto q_n$ definieren wir

$f:\mathbb{Q}\to M$, $q\mapsto f_{g^{-1}(q)}(q)\ \left(=f_{g^{-1}(p)+k}(q)\ \forall k\in\mathbb{N}\right)$

- Sei $p,q\in\mathbb{Q}: p<q$ bel. $\quad m:=\max(g^{-1}(p),g^{-1}(q))$

$f(p)=f_m(p) < f_m(q)=f(q)$ nach Definition von f_m

...

ALG Ü2

66) ... zz: f ist bijektiv

f ist injektiv, da $\forall p,q \in \mathbb{Q}, p \neq q \Rightarrow p<q \vee q<p$

$\Rightarrow f(p)<f(q) \vee f(q)<f(p)$ insbesondere $f(p) \neq f(q)$

surjektiv

Angenommen $\exists m \in M \; \forall p \in \mathbb{Q}: f(p) \neq m$

$\Rightarrow \forall p \in \mathbb{Q}: f(p)<m \vee f(p)>m$

$P^- := \{p \in \mathbb{Q}: f(p)<m\}$ $\quad P^+ := \{p \in \mathbb{Q}: f(p)>m\} \Rightarrow P^- \dot\cup P^+ = \mathbb{Q}$

$\forall p^- \in P^- \; \forall p^+ \in P^+: \underbrace{f(p^-)}_{\in M} < m < \underbrace{f(p^+)}_{\in M}$

Da M abzählbar $\Rightarrow M \cap [f(p^-), f(p^+)]$ ist abzählbar

ALG Ü2

66) M ... abzählbare Menge $\leq$ ... dichte Totalordnung, ohne kleinstes und größtes Element

zz: $\exists f: M \to \mathbb{Q}$ ... bijektiv, $\forall m_1, m_2 \in M: m_1 < m_2 \Rightarrow f(m_1) < f(m_2)$

Wir definieren Funktionen $f_n: A \to B$ mit $A \subseteq M$, $B \subseteq \mathbb{Q}$, $|A| = |B| = n+1$

$n=0$: $f_0: A \to B$ Sei $m_0 \in M$ bel. $A = \{m_0\}$ $B = \{0\}$ $f(m_0) := 0 = q_0$

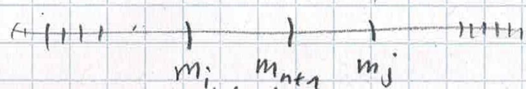
$n+1$: für gegebene Funktion $f_n: \{m_0, \dots, m_n\} \to \{q_0, \dots, q_n\}$ die $\forall i, j \in \{0, \dots, n\}: m_i < m_j \Rightarrow f(m_i) = q_i < q_j = f(m_j)$ erfüllt definieren wir
$$f_{n+1}(m_i) = \begin{cases} f_n(m_i) = q_i & \text{falls } i < n+1 \\ q_{n+1} & \text{falls } i = n+1 \end{cases}$$
wobei

$q_{n+1} \in \mathbb{Q}$ mit

1. Fall $\forall j \in \{0, \dots, n\}: m_j < m_{n+1}$ $\Rightarrow \exists q_{n+1} \in \mathbb{Q}\ \forall j \in \{0, \dots, n\}: q_j < q_{n+1}$

2. Fall $\forall j \in \{0, \dots, n\}: m_{n+1} < m_j$ $\Rightarrow \exists q_{n+1} \in \mathbb{Q}\ \forall j \in \{0, \dots, n\}: q_{n+1} < q_j$

3. Fall $\exists i, j \in \{0, \dots, n\}: m_i < m_{n+1} < m_j$ Sei i, sodass m_i das größte solche und j, sodass m_j das kleinste solche Element ist.



$\exists q_{n+1} \in \mathbb{Q}: f(m_i) = q_i < q_{n+1} < q_j = f(m_j)$

$f: M \to \mathbb{Q}$

$m \mapsto f_{g^{-1}(m)}(m) (= f_{g^{-1}(m)+k}(m))$ $\forall k \in \mathbb{N}$ nach Definition

wobei $g: \mathbb{N} \to M$ das existiert, da M abzählbar ist.

Nach Definition gilt $\forall m_1, m_2 \in M: m_1 < m_2 \Rightarrow f(m_1) < f(m_2)$, daraus folgt auch gleich die Injektivität.

ALG Ü2

66) M ... abzählbare Menge $\leq$ ... dichte Totalordnung ohne kleinstes und größtes Element

zz: $\exists f: M \to \mathbb{Q}$ ... bijektiv mit $\forall m_1, m_2 \in M : m_1 < m_2 \Rightarrow f(m_1) < f(m_2)$

Da M, $\mathbb{Q}$ abzählbar $\exists g: \mathbb{N} \to M$, $h: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ... bijektiv.

Wir definieren $f_n: A \subseteq M \to B \subseteq \mathbb{Q}$ mit $|A| = |B| = n$ durch

$f_0: \emptyset \to \emptyset$

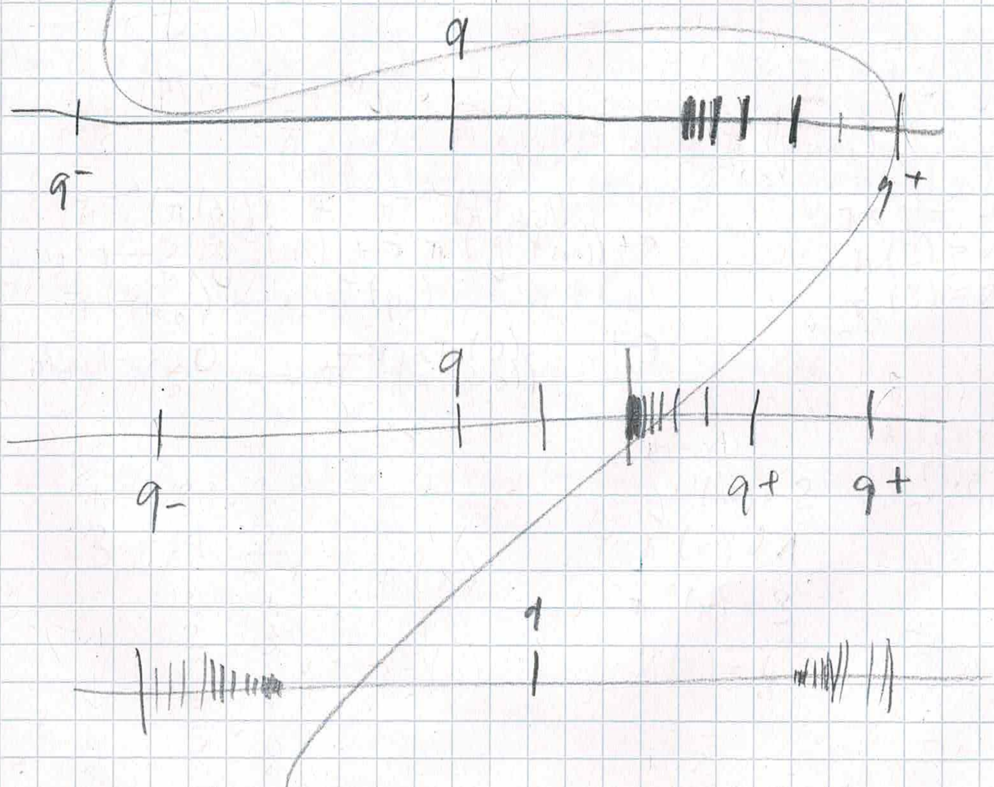
$$f_{n+1}: \underbrace{\{m \in M \mid \exists k \in \mathbb{N}_{\leq n+1}: g(k) = m\}}_{= \{m_0, m_1, \ldots, m_n, m_{n+1}\}} \longrightarrow \underbrace{\{q \in \mathbb{Q} \mid \exists k \in \mathbb{N}_{\leq n+1}: h(k) = q\}}_{= \{q_0, q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}\}}$$

Da $\leq$ auf M eine Totalordnung ist $\exists \pi: \{0, \ldots, n+1\} \to \{0, \ldots, n+1\}$ mit $m_{\pi(0)} < m_{\pi(1)} < \ldots < m_{\pi(n+1)}$. Gleiches gilt für $\mathbb{Q}$:

$\exists \tilde{\pi}: \{0, \ldots, n+1\} \to \{0, \ldots, n+1\}$ mit $p_{\tilde{\pi}(0)} < p_{\tilde{\pi}(1)} < \ldots < p_{\tilde{\pi}(n+1)}$

$f_{n+1}(m) := h(\tilde{\pi}^{-1}(\pi(g^{-1}(m))))$

surjektiv da



$d(m_1, m_2) = |f(m_1) - f(m_2)|$

ALG Ü2

66) $f_0: \emptyset \to \emptyset$

$f_{n+1}: A_n \cup \{m\} \to B_n \cup \{p\}$ $\quad |A_n| = |B_n| = n$

$A_n = \{m_0, \dots, m_n\}$ $\quad B_n = \{p_0, \dots, p_n\}$ mit

$m_0 < m_1 < \dots < m_n$ $\quad p_0 < p_1 < \dots < p_n$

$f_n: A_n \to B_n$ mit $f_n(m_i) = p_i \ \forall i \in \{0, \dots, n\}$ also $\forall i,j: m_i < m_j \Rightarrow f(m_i) < f(m_j)$

$m_0 < m_1 < \dots < m_i < m < m_{i+1} < \dots < m_n$ $\quad p_0 < \dots < p_j < p < p_{j+1} < \dots < p_n$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N} & \\ M \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] \arrow[rr, "f", "inj."'] & & \mathbb{Q} \arrow[ul, phantom, "\supseteq"] \end{tikzcd}$$