ALG Ü8

2008) $\mathcal{K}$ .. Varietät von Algebren oder Klasse aller Körper

$(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Familie von Algebren in $\mathcal{K}$ $\quad (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Familie mit

$\forall n\in\mathbb{N}: f_n: R_n \to R_{n+1}$ .. Homomorphismus

Satz 2342: $\exists$ bis auf Isomorphie eindeutige Algebra $R_\infty \in \mathcal{K}$ und Homomorphismen $f_n^\infty: R_n \to R_\infty$ mit

$\forall B\in\mathcal{K}\ \forall (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... Hom. von R_n nach B mit $\forall n: \varphi_n = \varphi_{n+1}\circ f_n$ gilt

$\exists!\, \varphi: R_\infty \to B$ .. Hom. mit $\forall n: \varphi\circ f_n^\infty = \varphi_n$

(Es gilt $R_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^\infty(R_n)$)

ges: Kategorie $\mathcal{C}$, sodass $\exists$ initiales Element in C ist Umformulierung von Folgerung in Satz 2342.

$Ob(\mathcal{C}) = C := \{R_n : n\in\mathbb{N}\}$ $\quad Hom(\mathcal{C}) = \langle\{f_n : n\in\mathbb{N}\}\rangle$ Abschluss bzgl. Verknüpfung

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, Leftarrow] & \\
R_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}^\infty"] \arrow[dr, "\varphi_{n+1}" near start] & R_\infty \arrow[d, dotted, "\varphi"] \\
R_n \arrow[u, "f_n"] \arrow[ur, "f_n^\infty" near start] \arrow[r, "\varphi_n"] & B \\
\vdots \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

R_∞ ist initiales Obj

$\Leftrightarrow \forall B\in C\ \exists!\, \varphi: R_\infty \to B$

φ .. Hom

Sei $B\in C$ bel. $\quad$ zz: $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists!\, \varphi_n: R_n \to B$ .. Hom mit $\forall k\in\mathbb{N}: \varphi_k = \varphi_{k+1}\circ f_k$

Da $B\in C$ $\exists\, k\in\mathbb{N}: B = R_k$ $\quad$ Offenbar ist $\varphi_n = f_{k-1}\circ f_{k-2}\circ\ldots\circ f_{n+1}\circ f_n$ und somit eindeutig bestimmt. $\Rightarrow \exists!\, \varphi: R_\infty \to B$ .. Hom mit $\forall n: \varphi\circ f_n^\infty = \varphi_n$

$R_\infty \in C \Rightarrow \exists\, l\in\mathbb{N}: R_\infty = R_l$ $\quad \Rightarrow \varphi = f_{k-1}\circ\ldots\circ f_l$; $f_n^\infty = f_{l-1}\circ\ldots\circ f_n$

und somit immer auch $\varphi\circ f_n^\infty = f_{k-1}\circ\ldots\circ f_l\circ f_{l-1}\circ\ldots\circ f_n = \varphi_n$

Somit gilt tatsächlich $\forall B\in C\ \exists!\, \varphi: R_\infty \to B$ ... Hom