MAS Ü7

1) $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ ... Lipschitz-stetig $\iff \exists g$ mit $\|g\|_\infty<\infty$: $F(x)=F(a)+\int_{[a,x]} g\,d\lambda$

Def f ... Lipschitz-stetig $:\iff \exists M\ \forall x,y\in[a,b]: |f(y)-f(x)|\le M|x-y|$

Satz 4.DS $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\quad F(x)=\int_{[a,x]} g\,d\lambda+c$ mit $g\in\mathcal{L}_1(\lambda|_{[a,b]}) \iff F$ ... absolut stetig

Satz 9.DS Hauptsatz der DI $\quad F:[a,b]\to\mathbb{R}$ ... absolut stetig $\Rightarrow \lambda$-f.ü. $\exists F'$: $F(x)-F(a)=\int_{[a,x]}F'\,d\lambda$, $x\in[a,b]$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}\in\mathcal{L}_1 \Rightarrow F(x)=\int_{[a,x]} f\,d\lambda$ ... absolut stetig und λ-f.ü. diffbar mit $F'=f$ λ-f.ü.

($\Rightarrow$) F ... Lipschitz-stetig $\Rightarrow F$ ... absolut stetig $\Rightarrow$ nach Hauptsatz der DI-Rechnung gilt

$$\exists\ \lambda\text{-f.ü. } F' \text{ und } F(x)-F(a)=\int_{[a,x]}F'(t)\,d\lambda(t),\quad x\in[a,b]$$

Also $F(x)=F(a)+\int_{[a,x]}F'\,d\lambda$ es bleibt nun zu zeigen $\|F'\|_\infty<\infty$

$$|F'(y)|=\lim_{h\to0}\frac{|F(y-\frac{h}{2})-F(y+\frac{h}{2})|}{|y-\frac{h}{2}-(y+\frac{h}{2})|}\le M \quad \text{für } y\in(a,b)$$

für $y=a$ oder $y=b$ analog mit einseitigem Grenzwert

$\Rightarrow \forall y\in[a,b]: |F'(y)|\le M$ also $\|F'\|_\infty=\sup_{y\in[a,b]}|F'(y)|\le M<\infty$

($\Leftarrow$) $\exists g$ mit $\|g\|_\infty<\infty$: $F(x)=F(a)+\int_{[a,x]}g(t)\,d\lambda(t)$

$\int_{[a,b]}|g(t)|\,d\lambda(t)\le|b-a|\,\|g\|_\infty<\infty \Rightarrow g\in\mathcal{L}_1(\lambda|_{[a,b]}) \Rightarrow F$ ... absolut stetig

auch $\int_{[a,x]}|g(t)|\,d\lambda(t)\le|x-a|\,\|g\|_\infty \quad \forall x\in[a,b]$

Sei $x,y\in[a,b]$ bel. $\quad$ zz: $\frac{|F(y)-F(x)|}{|y-x|}\le M<\infty$ für ein $M\in\mathbb{R}$

$$\frac{|F(y)-F(x)|}{|y-x|}=\frac{|F(y)-F(a)-(F(x)-F(a))|}{|y-a-(x-a)|}\le\frac{|F(y)-F(a)|}{|y-a|}+\frac{|F(x)-F(a)|}{|x-a|}$$

$$=\frac{|\int_{[a,y]}g(t)\,d\lambda(t)|}{|y-a|}+\frac{|\int_{[a,x]}g(t)\,d\lambda(t)|}{|x-a|}\le\frac{|y-a|\,\|g\|_\infty}{|y-a|}+\frac{|x-a|\,\|g\|_\infty}{|x-a|}=2\|g\|_\infty<\infty$$

$\Rightarrow$ Lipschitz stetig!

$\square$

MAS Ü7

3) $X \sim N(\mu, \Sigma)$ ... k-dim Normalverteilt auf $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k, \lambda_k)$

Dichte $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\}$

ges: Dichte von $Y := MX + b$ für $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ... regulär und $b \in \mathbb{R}^k$

Ergebnis sollte sein: $N(M\mu + b, M \Sigma M^T)$

$T(x) := Mx + b$ T ist bijektiv, da $T^{-1}(y) = M^{-1}(y-b)$

$\det \left| \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x) \right| = |\det M| \neq 0$, da M regulär

$\det |T^{-1}| = \frac{1}{|\det M|} \neq 0$ $Y = MX + b = T(X)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(T^{-1}(y)) \left| \det \left(\frac{\partial T_i^{-1}}{\partial y_j} \right)(y) \right|$$

$$= f_X(M^{-1}(y-b)) \frac{1}{|\det M|} = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\{-\frac{1}{2}(M^{-1}(y-b)-\mu)^T \Sigma^{-1}(M^{-1}(y-b)-\mu)\} \frac{1}{|\det M|}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det \Sigma}\sqrt{\det M \det M^T}} \exp\{-\frac{1}{2}(M^{-1}(y-b)-\mu)^T M^T M^{T^{-1}} \Sigma^{-1} M^{-1} M (M^{-1}(y-b)-\mu)\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det M\Sigma M^T}} \exp\{-\frac{1}{2}(MM^{-1}(y-b)-M\mu)^T (M\Sigma M^T)^{-1}(MM^{-1}(y-b)-M\mu)\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det M\Sigma M^T}} \exp\{-\frac{1}{2}(y-(M\mu+b))^T (M\Sigma M^T)^{-1}(y-(M\mu+b))\}$$

ist Dichte von $N(M\mu + b, M\Sigma M^T)$

MAS Ü7

5) $f \in \mathcal{L}^p$ p-fach integrierbar auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ $\quad 1 \leq p < \infty$

zz: $\forall c > 0: \quad \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > c\|f\|_p\}) \leq \frac{1}{c^p}$

$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty$

Sei $c > 0$ bel.

$$\mu(\{x \in \Omega: |f(x)| > c\|f\|_p\}) = \mu(\{x \in \Omega: \frac{|f(x)|}{c\|f\|_p} > 1\}) = \int_\Omega 1\!\!1_{(1,\infty)}\left(\frac{|f(x)|}{c\|f\|_p}\right) d\mu(x)$$

$$\leq \int_\Omega \frac{|f(x)|}{c\|f\|_p} 1\!\!1_{(1,\infty)}\left(\frac{|f(x)|}{c\|f\|_p}\right) d\mu(x) \leq \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{c\|f\|_p}\right)^p 1\!\!1_{(1,\infty)}\left(\frac{|f(x)|}{c\|f\|_p}\right) d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{c^p\|f\|_p^p} \int_\Omega |f(x)|^p 1\!\!1_{(1,\infty)}\left(\frac{|f(x)|}{c\|f\|_p}\right) d\mu(x) \leq \frac{1}{c^p\|f\|_p^p} \int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) = \frac{1}{c^p} \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} = \frac{1}{c^p}$$

$\square$

MAS Ü7

6) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ .. Maßraum $1 \leq p < r < q < \infty$ zz: $L_p \cap L_q \subseteq L_r$

Sei $f \in L_p \cap L_q$ bel. $\Rightarrow \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty \wedge \int_\Omega |f|^q d\mu < \infty$

$$\int_\Omega |f|^r d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_{[0,1)}(|f(x)|)\, \underbrace{|f(x)|}_{<1}{}^r d\mu + \int_\Omega \mathbb{1}_{[1,\infty)}(|f(x)|)\, \underbrace{|f(x)|}_{\geq 1}{}^r d\mu$$

$$\leq \int_\Omega \mathbb{1}_{[0,1)}(|f(x)|)\, |f(x)|^q d\mu + \int_\Omega \mathbb{1}_{[1,\infty)}(|f(x)|)\, |f(x)|^p d\mu$$

$$\leq \underbrace{\int_\Omega |f(x)|^q d\mu(x)}_{<\infty} + \underbrace{\int_\Omega |f(x)|^q d\mu(x)}_{<\infty} < \infty$$

$\Rightarrow f \in L_r$ $\square$

MAS Ü7

7) ges: μ.. σ-endliches Maß sodass $1 \le p < q \le \infty \Rightarrow L^p(\mu) \subsetneq L^q(\mu)$.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta)$ also Zählmaß auf $\mathbb{N}$

σ-endlich klar (und bekannt)

Sei $1 \le p < q < \infty$ bel.

$f(n)$ oder auch $(a_n) \in L^p(\zeta) \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p < \infty$ Sei $(a_n) \in L^p(\zeta)$ bel.

Da $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p < \infty \Rightarrow |a_n|^p \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N: |a_n|^p < 1$

$(\Rightarrow |a_n| < \sqrt[p]{1} = 1)$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^q = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^q + \sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{|a_n|^q}_{<1} \le \underbrace{\sum_{n=1}^{N} |a_n|^q}_{<\infty,\text{ da endlich}} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^p}_{<\infty,\text{ da } \sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^p<\infty} < \infty \Rightarrow (a_n) \in L^q(\zeta)$$

Für $a_n := \frac{1}{\sqrt[p]{n}}$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, aber

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q/p}} < \infty$, da $\frac{q}{p} > 1$ bekannt aus Ana 1

$\Rightarrow a_n \in L^q(\zeta) \wedge a_n \notin L^p(\zeta) \Rightarrow L^p(\zeta) \subsetneq L^q(\zeta)$

Sei $1 \le p < q = \infty$ bel.

$(a_n) \in L^\infty(\zeta) \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty$

Sei $(a_n) \in L^p(\zeta)$ bel. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: |a_n|^p < \infty \Rightarrow \forall n: |a_n| < \infty$

$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty \Rightarrow (a_n) \in L^\infty(\zeta)$

Für $a_n := \frac{1}{\sqrt[p]{n}}$ gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} < \infty$, aber

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p = \infty \Rightarrow a_n \in L^\infty(\zeta) \wedge a_n \notin L^p(\zeta) \Rightarrow L^p(\zeta) \subsetneq L^\infty(\zeta)$

$\square$