

Analysis 3 - Übung Nr. 10

Ida Hönigmann

December 17, 2022

1 Sätze

Satz (Integralsatz von Gauß). *Ist A eine offene und beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n mit $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_s A) = 0$, $\mathbf{f} : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld aus $C(\bar{A}) \cap C^1(A)$, so gilt wenn beide Integrale existieren*

$$\int_A \operatorname{div} \mathbf{f} d\lambda^n = \int_{\partial A} \mathbf{f}^\top \mathbf{n} d\mathcal{H}^{n-1}$$

wobei ν den in das Äußere von A zeigenden normierten Normalvektor auf ∂A bezeichnet.

Satz (Integralsatz von Stokes für die Ebene). *Ist A offen und beschränkt in \mathbb{R}^2 mit $\partial A \setminus \partial_r A$ endlich, sowie $\mathbf{f} : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine auf \bar{A} stetige und auf A stetig differenzierbare Funktion, so gilt:*

$$\int_A \operatorname{rot} \mathbf{f} d\lambda^2 = \int_{\partial A} \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} ds,$$

wobei \mathbf{t} den normierten Tangentialvektor einer positiv orientierten Parametrisierung und s die Weglänge bezeichnet.

Satz (Integralsatz von Stokes im \mathbb{R}^3). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ das Bild einer beschränkten Teilmenge des \mathbb{R}^2 mit stückweise stetig differenzierbarem Rand unter einer C^2 -Abbildung. Weiters sei \mathbf{f} ein C^1 -Vektorfeld auf einer offenen Obermenge von $\bar{\Omega}$. Dann gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}^\top \cdot \mathbf{t} d\mathcal{H}^1,$$

wobei \mathbf{n} ein normiertes Normalvektorfeld auf Ω und \mathbf{t} ein normiertes Tangentialvektorfeld an $\partial\Omega$ bezeichnet wobei die Orientierung von \mathbf{n} und \mathbf{t} so zu wählen ist, dass auf $\partial\Omega$ $\det(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{t}, \mathbf{n}) > 0$ für ein in das Äußere von Ω zeigende Tangentialvektorfeld $\boldsymbol{\nu}$ auf $\partial\Omega$ gilt.

2 Beispiele

Beispiel 1

Angabe. Sei $\mathbf{F}(x, y, z) := (xy, yz, x^2 + y^2)^\top$. Betrachte den Zylindermantel

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$$

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes \mathbf{F} durch die Fläche M :

$$\int_M \mathbf{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2$$

wobei $\boldsymbol{\nu}$ den nach außen gerichteten normierten Normalvektor auf M bezeichnet. Tun Sie das auf zwei Arten:

(i) direkt

(ii) mithilfe des Gauß'schen Integralsatzes.

(i) **direkt:**

In jedem Punkt $(x, y, z) \in M$ gilt, dass der normierte Normalvektor

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\nu}\|} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} x^2 + y^2 - 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} x^2 + y^2 - 1 \\ \frac{\partial}{\partial z} x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}_{x^2 + y^2 = 1}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\int_M \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_M x^2 y + y^2 z d\mathcal{H}^2$. Wir wollen nun zur Berechnung die Transformationsformel anwenden.

$$\begin{aligned} D &:= [0, 2\pi) \times (0, 1) & \phi : D &\rightarrow \mathbb{R}^2, (\theta, z) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), z) \\ d\phi &= \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \det(d\phi^\top d\phi) &= \det \begin{pmatrix} \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Offenbar gilt $\phi(D) = M$ und ϕ ist injektiv und eine C^1 -Abbildung.

$$\begin{aligned} \int_M \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 &= \int_{\phi(D)} x^2 y + y^2 z d\mathcal{H}^2 = \int_D \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \sin^2(\theta) z d\lambda^2(\theta, z) = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2(\theta) \sin(\theta) dz d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sin^2(\theta) z dz d\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta}_{=0} + \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta}_{=\pi} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(ii) **mit Gauß'schem Integralsatz:**

Wir betrachten zuerst $A := \{(x, y, 0)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\} = B_1^2(0)$ (der Boden des Zylinders) und $B := \{(x, y, 1)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\} = B_1^2(0) + (0, 0, 1)^\top$ (der Deckel des Zylinders). Offenbar gilt für $(x, y, 0) \in A$, dass der Normalvektor $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, -1)^\top$ und für $(x, y, 1) \in B$, dass $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)^\top$. Da \mathbf{F} in der dritten Komponente nicht von z abhängt gilt nun, dass sich die Summe der folgenden beiden Integrale aufhebt:

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 + \int_B \mathbf{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 &= \int_{B_1^2(0)} -(x^2 + y^2) d\mathcal{H}^2 + \int_{B_1^2(0) + (0, 0, 1)^\top} x^2 + y^2 d\mathcal{H}^2 = \\ &= - \int_{B_1^2(0)} x^2 + y^2 d\mathcal{H}^2 + \int_{B_1^2(0)} x^2 + y^2 d\mathcal{H}^2 = 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir, dass wenn wir mit $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1\}$ den Zylinder bezeichnen, gilt

$$\int_{\partial Z} \mathbf{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_M \mathbf{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2$$

Um den Integralsatz von Gauß anwenden zu können müssen wir überprüfen ob

- Z eine offene, beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^3 ist; was klarerweise gilt
- $\mathcal{H}^2(\partial_s Z) = 0$ was gilt da $\partial_s Z = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 = 1\}$ und beide diese Mengen haben endliches eindimensionales Hausdorffmaß (genauer $\mathcal{H}^1(\text{Kreisrand}) = 2\pi$) und somit zweidimensionales Hausdorffmaß Null haben müssen ($\mathcal{H}^2(\text{Kreisrand}) = 0$).
- $\mathbf{F} : \bar{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C(\bar{Z}) \cap C^1(Z)$, da \mathbf{F} offenbar stetig ist und

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

ist stetig.

Also gilt nun

$$\int_{\partial Z} \mathbf{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_Z \operatorname{div} \mathbf{F} d\lambda^3 = \int_Z \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} d\lambda^3 = \int_Z y + z d\lambda^3$$

Zur Berechnung verwenden wir wieder den Transformationssatz

$$D := (0, 1) \times [0, 2\pi) \times (0, 1) \quad \phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, z) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)^\top \quad \det(d\phi^T d\phi) = r^2$$

wobei D ist eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^3 , ϕ ist eine injektive C^1 -Abbildung und $Z = \phi(D)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{\phi(D)} y + z d\lambda^3 &= \int_D (r \sin(\theta) + z) r d\lambda^3 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\theta) dz d\theta dr + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r z dz d\theta dr = \\ &= \int_0^1 r^2 (-\cos(\theta))|_0^{2\pi} dr + 2\pi \int_0^1 r \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^1 dr = 0 + 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} r dr = \pi \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Beispiel 2

Angabe. Sei $\mathbf{F}(x, y, z) := (xz, xy, z^2 - x)^\top$. Betrachte das Gebiet

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, 0 < y < x + 1, 0 < z < x + y\}.$$

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes \mathbf{F} durch den Rand von Ω .

Gesucht ist

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2$$

weshalb wir den Gauß'schen Integralsatz verwenden wollen. Daher prüfen wir zuerst die Bedingungen:

- Ω ist offen und beschränkt: offen ist aus der Definition klar, Beschränktheit folgt aus $\Omega \subseteq (0, 1) \times (0, 2) \times (0, 3)$.
- $\mathcal{H}^2(\partial_s \Omega) = 0$, da $\partial_s \Omega$ aus 12 Kanten (und 7 Ecken) besteht (siehe Grafik TODO) und diese alle endliches eindimensionales Hausdorffmaß besitzen und daher $\mathcal{H}^2(\partial_s \Omega) = 0$.
- $\mathbf{F} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, da \mathbf{F} offenbar stetig ist und

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$$

ist stetig.

Gemeinsam mit $\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \partial f_i / \partial x_i = x + z$ und dem Gauß'schen Integralsatz ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\lambda^3 = \int_0^1 \int_0^{x+1} \int_0^{x+y} x + z dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{x+1} \int_0^{x+y} x dz dy dx = \int_0^1 x \int_0^{x+1} x + y dy dx = \int_0^1 x \left(x(x+1) + \frac{y^2}{2} \Big|_0^{x+1} \right) dx = \\ &= \int_0^1 x \left(x^2 + x + \frac{(x+1)^2}{2} \right) dx = \int_0^1 x^3 + x^2 + \frac{x}{2}(x^2 + 2x + 1) dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x dx = \frac{31}{24} \\ &+ \int_0^1 \int_0^{x+1} \int_0^{x+y} z dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{x+1} \frac{(x+y)^2}{2} dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_x^{2x+1} u^2 du dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u^3}{3} \Big|_x^{2x+1} dx = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (2x+1)^3 - x^3 dx = \frac{1}{6} \left(\int_1^3 \frac{v^3}{2} dv - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \frac{v^3}{4} \Big|_1^3 - \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{8} \\ &\implies \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \frac{31}{24} + \frac{13}{8} = \frac{35}{12} \end{aligned}$$

Beispiel 3

Angabe. Verifizieren Sie den Gauß'schen Integralsatz für das Gebiet

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 - x^2 - y^2\}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y, z) := (x, x + y, x^2 + z)^\top,$$

d.h., berechnen Sie die beiden Integrale und überprüfen Sie deren Gleichheit.

Zuerst berechnen wir $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\lambda^3$:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3 \quad \implies \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\lambda^3 = 3 \int_{\Omega} d\lambda^3$$

Mit der Transformationsformel für $D := \{(r, \theta, z) : r \in (0, 1), \theta \in [0, 2\pi), z \in (0, 1 - r^2)\}$ und $\phi(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$ gilt $\det(d\phi^\top d\phi) = r^2$ sowie $\Omega = \phi(D)$ und es folgt

$$3 \int_{\Omega} d\lambda^3 = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r^2} r dz d\theta dr = 6\pi \int_0^1 r(1 - r^2) dr = 6\pi \left(\int_0^1 r dr - \int_0^1 r^3 dr \right) = 6\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3\pi}{2}$$

Für die Berechnung von $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2$ müssen wir uns zuerst überlegen wie der normierte Normalvektor auf $\partial\Omega$ aussieht.

$$\partial\Omega = A_1 \cup A_2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y, 1 - x^2 - y^2) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\text{Auf } A_1 : \boldsymbol{\nu} = (0, 0, -1)^\top$$

$$\text{Auf } A_2 : \tilde{\boldsymbol{\nu}} = \left(-\frac{\partial}{\partial x}(1 - x^2 - y^2), -\frac{\partial}{\partial y}(1 - x^2 - y^2), 1 \right)^\top = (2x, 2y, 1)^\top$$

$$\|\tilde{\boldsymbol{\nu}}\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \implies \boldsymbol{\nu} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\nu}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\nu}}\|}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 &= \int_{A_1} \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 + \int_{A_2} \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 \\ \int_{A_1} \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 &= \int_{A_1} (x, x + y, x^2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} d\mathcal{H}^2 = \int_{A_1} -x^2 d\mathcal{H}^2 \\ \int_{A_2} \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 &= \int_{A_2} \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} (x, x + y, 1 - y^2) \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} d\mathcal{H}^2 = \\ &= \int_{A_2} \frac{2x^2 + 2xy + 2y^2 + 1 - y^2}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} d\mathcal{H}^2 = \int_{A_2} \frac{2x^2 + 2xy + y^2 + 1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} d\mathcal{H}^2 \end{aligned}$$

Für die Transformationsformel sein nun $D := (0, 1) \times [0, 2\pi)$, $\phi_1(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 0)$ und $\phi_2(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 1 - r^2)$, dann gilt $A_1 = \phi_1(D)$ und $A_2 = \phi_2(D)$, sowie $\det(d\phi_1^\top d\phi_1) = r^2$ und $\det(d\phi_2^\top d\phi_2) = r^2(4r^2 + 1)$.

$$\begin{aligned} \int_{A_1} -x^2 d\mathcal{H}^2 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -r^2 \cos^2(\theta) r d\theta dr = - \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta dr = -\pi \int_0^1 r^3 dr = -\frac{\pi}{4} \\ \int_{A_2} \frac{2x^2 + 2xy + y^2 + 1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} d\mathcal{H}^2 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{2r^2 \cos^2(\theta) + 2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) + 1}{\sqrt{4r^2 + 1}} r \sqrt{4r^2 + 1} d\theta dr = \\ &= \int_0^1 2r^3 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta + 2r^3 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta + r^3 \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta + r \int_0^{2\pi} d\theta dr = \\ &= \int_0^1 2\pi r^3 + \pi r^3 + 2\pi r dr = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} \\ &\implies \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = -\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Beispiel 4

Angabe. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Sei $f \in C^2(A)$ eine reelle Funktion, sei $\mathbf{F} \in C^2(A; \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie

(i) $\operatorname{rot} \nabla f = \mathbf{0}$,

(ii) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$

(i) Da die Reihenfolge bei Differenzieren von f egal ist ergibt sich

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} =: (f_1, f_2, f_3)^\top \quad \operatorname{rot} \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Sei $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$, dann gilt

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) =$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} = 0$$

Beispiel 5

Angabe. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ die offene Einheitskreisscheibe in \mathbb{R}^2 . Wir schreiben das Wegintegral

$$\int_{\gamma} \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} d\mathbf{x} =: \int_{\gamma} f_1(\mathbf{x})dx + f_2(\mathbf{x})dy.$$

Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\partial B} (x - y^3)dx + y^3 dy$$

(i) *direkt*

(ii) *mithilfe des Stoke'schen Integralsatzes.*

(i) **direkt:**

Wir setzen $D := [0, 2\pi)$ und $\phi(\theta) := (\cos(\theta), \sin(\theta))$, dann wird der Weg des Wegintegrals durch $\phi(D)$ beschrieben. Wegen $\int_{\gamma} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \begin{pmatrix} x - y^3 \\ y^3 \end{pmatrix} d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\theta) - \sin^3(\theta) \\ \sin^3(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}' d\theta = \\ \int_0^{2\pi} -\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin^4(\theta) + \sin^3(\theta)\cos(\theta) d\theta &= 0 + \frac{3\pi}{4} + 0 = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

(ii) **mithilfe des Stoke'schen Integralsatzes:**

Auf der Einheitskreisscheibe ist offenbar für jeden Punkt $(x, y)^{\top}$ der Vektor $(x, y)^{\top}$ ein normierter Normalvektor, daher sind die beiden Tangentialvektoren an der Stelle $(-y, x)^{\top}$ und $(y, -x)^{\top}$, wobei der erste der positiven Orientierung entspricht.

Zuerst prüfen wir die Voraussetzungen für den Integralsatz von Stokes für die Ebene:

- B ist klarerweise offen und beschränkt in \mathbb{R}^2
- $\partial B \setminus \partial_r B = \emptyset$ also endlich
- $f : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^2 \in C(\bar{B}) \cap C^1(B)$: stetig auf \bar{B} ist klar;

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & -3y^2 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}$$

ist stetig auf B .

Daher gilt nun

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\theta) - \sin^3(\theta) \\ \sin^3(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} d\theta &= \int_{\partial B} \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} ds = \int_B \operatorname{rot} \mathbf{f} d\lambda^2 = \\ \int_B \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} d\lambda^2 &= \int_B 0 - (-3y^2) d\lambda^2 = 3 \int_B y^2 d\lambda^2 \end{aligned}$$

Mit der Transformationsformel für $D := (0, 1) \times [0, 2\pi)$ und $\phi(r, \theta) := (r \cos(\theta), r \sin(\theta))^{\top}$ gilt $\det(d\phi^{\top} d\phi) = r^2$ und es folgt:

$$3 \int_B y^2 d\lambda^2 = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2(\theta) r d\theta dr = 3\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{3\pi}{4}$$

Beispiel 6

Angabe. Sei $\mathbf{F}(x, y, z) := (1 - xy, xz, x + z)^\top$. Betrachte das hyperbolische Paraboloid

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 < 1\}.$$

Verifizieren Sie den Stoke'schen Integralsatz für \mathbf{F} auf Ω .

Zuerst wollen wir die benötigten Normal- und Tangentialvektoren berechnen. Sei $(x, y, z) \in \Omega$, dann ist

$$\tilde{n} := \left(-\frac{\partial x^2 - y^2}{\partial x}, -\frac{\partial x^2 - y^2}{\partial y}, 1\right)^\top = (-2x, 2y, 1)^\top$$

ein Normalvektor auf Ω im Punkt (x, y, z) . Normieren ergibt

$$n := \frac{\tilde{n}}{\|\tilde{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}(-2x, 2y, 1)^\top$$

Sei nun $(x, y, z) \in \partial\Omega$ also aus dem Rand $\partial\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 = 1\}$. Dann ist die Polarkoordinatendarstellung gleich $(\cos(\theta), \sin(\theta), \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$ und ein Tangentialvektor an dem Punkt gleich

$$\tilde{t} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \cos(\theta), \frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta), \frac{\partial}{\partial \theta} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)^\top = (-\sin(\theta), \cos(\theta), -4\sin(\theta)\cos(\theta))^\top = (-y, x, -4xy)^\top$$

$$\|\tilde{t}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + 16x^2y^2} = \sqrt{16x^2y^2 + 1} \quad \mathbf{t} := \frac{\tilde{t}}{\|\tilde{t}\|}$$

Nun berechnen wir $\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{f} &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^\top = (0 - x, 0 - 1, z - (-x))^\top = (-x, -1, x + z)^\top \\ \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 &= \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}(-x, -1, x + z) \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} d\mathcal{H}^2 = \\ &= \int_{\Omega} \frac{2x^2 - 2y + x + z}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} d\mathcal{H}^2 = \int_{\Omega} \frac{3x^2 - y^2 + x - 2y}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} d\mathcal{H}^2 \end{aligned}$$

Die Transformationsformel für $D := (0, 1) \times [0, 2\pi)$ und $\phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ liefert uns $\det(d\phi^\top d\phi) = r^2$ und

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{3x^2 - y^2 + x - 2y}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} d\mathcal{H}^2 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{3r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta) + r \cos(\theta) - 2r \sin(\theta)}{\sqrt{4(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)) + 1}} r d\theta dr = \\ &= \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{4r^2 + 1}} \left(3r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta - r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta + r \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta - 2r \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta\right) dr = \\ &= \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{4r^2 + 1}} (3\pi r^2 - \pi r^2) dr = 2\pi \int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4r^2 + 1}} dr = 2\pi \left[\frac{1}{24}(2r^2 - 1)\sqrt{4r^2 + 1}\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}(\sqrt{5} + 1) \end{aligned}$$

Nun zur Berechnung von $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{t} d\mathcal{H}^1$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{t} d\mathcal{H}^1 &= \int_{\partial\Omega} \frac{-y + xy^2 + x^2z - 4x^2y - 4xyz}{\sqrt{16x^2y^2 + 1}} d\mathcal{H}^1 = \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{-y + xy^2 + x^4 - x^2y^2 - 8x^2y + 4y^3}{\sqrt{16x^2y^2 + 1}} d\mathcal{H}^1 = \int_0^{2\pi} \frac{\text{num}}{\text{den}} \end{aligned}$$

TODO

Beispiel 7

Angabe. Sei $\mathbf{F}(x, y, z) := (z, -z, y)^\top$. Betrachte

$$\Omega := \{(2r \cos(t), 2r \sin(t), r \cos(t) \sin(t)) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r < 1, 0 \leq t < 2\pi\}.$$

Berechnen Sie mithilfe des Stoke'schen Integralsatzes

$$\int_{\Omega} (\text{rot} \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2,$$

wobei das Normalvektorfeld \mathbf{n} so gewählt ist, dass $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 > 0$ (wobei \mathbf{e}_3 der dritte kanonische Einheitsvektor in \mathbb{R}^3 ist).

Zuerst suchen wir einen Normalvektor für jeden Punkt $(x, y, z) \in \Omega$:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} 2r \cos(t) \\ 2r \sin(t) \\ r \cos(t) \sin(t) \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 2r \cos(t) \\ 2r \sin(t) \\ r \cos(t) \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r \sin^3(t) \\ -2r \cos^3(t) \\ 4r \end{pmatrix}$$

Normieren ist nicht notwendig, da wir uns nur für die Orientierung interessieren.

Nun zum Tangentialvektor auf $\partial\Omega = \{(2 \cos(t), 2 \sin(t), \cos(t) \sin(t)) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t < 2\pi\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} 2 \cos(t), \frac{\partial}{\partial t} 2 \sin(t), \frac{\partial}{\partial t} \cos(t) \sin(t) \right)^\top = (-2 \sin(t), 2 \cos(t), \cos^2(t) - \sin^2(t))^\top \\ \|\tilde{\mathbf{t}}\| &= \sqrt{4 \sin^2(t) + 4 \cos^2(t) + (\cos^2(t) - \sin^2(t))^2} = \sqrt{(\cos^2(t) - \sin^2(t))^2 + 4} \\ \mathbf{t} &:= \frac{\tilde{\mathbf{t}}}{\|\tilde{\mathbf{t}}\|} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 8 \cos(t) + 2 \cos^5(t) - 2 \sin^2(t) \cos^3(t) \\ -2 \sin^3(t) \cos^2(t) + 2 \sin^5(t) + 8 \sin(t) \\ 4 \sin(t) \cos^3(t) + 4 \sin^3(t) \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cos(t) + 2 \cos^3(t)(\cos^2(t) - \sin^2(t)) \\ 8 \sin(t) + 2 \sin^3(t)(\sin^2(t) - \cos^2(t)) \\ 4 \sin(t) \cos(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \end{pmatrix}$$

TODO Grafik

Die Bedingungen für den Stoke'schen Integralsatz im \mathbb{R}^3 sind:

- Ω ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^3
- Ω ist das Bild von $\phi \in C^2$ unter einer beschränkten Teilmenge des \mathbb{R}^2

Es gilt nun also

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\text{rot} \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} d\mathcal{H}^1 = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\cos^2(t) - \sin^2(t))^2 + 4}} (\cos(t) \sin(t), -\cos(t) \sin(t), 2 \sin(t)) \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-2 \sin^2(t) \cos(t) - 2 \sin(t) \cos^2(t) + 2 \sin(t) \cos^2(t) - 2 \sin^3(t)}{\sqrt{(\cos^2(t) - \sin^2(t))^2 + 4}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{-2 \sin^2(t)(\sin(t) + \cos(t))}{\sqrt{(\cos^2(t) - \sin^2(t))^2 + 4}} dt \end{aligned}$$

Definieren wir $f(t)$ als das was im Integral steht so gilt $\forall t \in [0, \pi)$:

$$\begin{aligned} -f(t + \pi) &= -\frac{-2 \sin^2(t + \pi)(\sin(t + \pi) + \cos(t + \pi))}{\sqrt{(\cos^2(t + \pi) - \sin^2(t + \pi))^2 + 4}} = \\ &= \frac{-2 \sin^2(t)(-\sin(t) - \cos(t))}{\sqrt{(\cos^2(t) - \sin^2(t))^2 + 4}} = \frac{-2 \sin^2(t)(\sin(t) + \cos(t))}{\sqrt{(\cos^2(t) - \sin^2(t))^2 + 4}} = f(t) \end{aligned}$$

Woraus folgt

$$\int_{\Omega} (\text{rot} \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 = \int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_0^{\pi} f(t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t) dt = \int_0^{\pi} f(t) dt + \int_0^{\pi} f(t + \pi) dt = 0$$

Beispiel 8

Angabe. Sei $\mathbf{F}(x, y, z) := (x^2y, z^2, x + y + z^3)^\top$. Betrachte

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = (\sqrt{x^2 + y^2} + 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(x^2 + y^2), x^2 + y^2 < 1\}.$$

Setze \mathbf{n} das normierte Normalvektorfeld auf Ω mit positiver z -Koordinate. Berechnen Sie

$$\int_{\Omega} (\text{rot} \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2.$$

Wir suchen zuerst die Normalvektoren auf Ω mit positiver z -Koordinate. Für jeden Punkt $(x, y, z(x, y)) \in \Omega$ ist \mathbf{n} ein normierter Normalvektor:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}} &:= \left(-\frac{\partial}{\partial x} z(x, y), -\frac{\partial}{\partial y} z(x, y), 1 \right)^\top = (-2x(2x^2 + 2y^2 - 1), -2y(2x^2 + 2y^2 - 1), 1)^\top \\ \|\tilde{\mathbf{n}}\| &= \sqrt{4x^2(2x^2 + 2y^2 - 1)^2 + 4y^2(2x^2 + 2y^2 - 1)^2 + 1} = \sqrt{(4x^2 + 4y^2)(2x^2 + 2y^2 - 1)^2 + 1} \\ \mathbf{n} &:= \frac{\tilde{\mathbf{n}}}{\|\tilde{\mathbf{n}}\|} \end{aligned}$$

Um den Integralsatz von Stokes in \mathbb{R}^3 anwenden zu können müssen wir nun einen Tangentialvektor \mathbf{t} für jeden Punkt in $\partial\Omega$ finden.

$$\partial\Omega = \{(x, y, (\sqrt{x^2 + y^2} + 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(x^2 + y^2)) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\mathbf{t} = (y, -x, 0)^\top \quad \|\mathbf{t}\| = \sqrt{y^2 + x^2} = 1$$

Auf $\partial\Omega$ gilt $\tilde{\mathbf{n}} = (-2x(2 - 1), -2y(2 - 1), 1)^\top = (-2x, -2y, 1)^\top$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} &= \tilde{\mathbf{n}} \times \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -2x^2 - 2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -2 \end{pmatrix} \\ \det(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{t}, \mathbf{n}) &= \det \begin{pmatrix} -x & y & -2x \\ -y & -x & -2y \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2 + 4y^2 + 4x^2 + y^2 = 5 > 0 \end{aligned}$$

Überprüfen wir als nächstes die Bedingungen des Integralsatzes von Stokes in \mathbb{R}^3 :

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$
- Ω ist das Bild einer C^2 -Abbildung:

$$\begin{aligned} D &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \\ \phi : D &\rightarrow \mathbb{R}^3, \phi(x, y) := (x, y, (\sqrt{x^2 + y^2} + 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

Es gilt $\phi(D) = \Omega$ und $\phi \in C^2(\bar{D})$.

- D ist beschränkt.

Also gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\text{rot} \mathbf{F})^\top \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{t} d\mathcal{H}^1 = \int_{\partial\Omega} (x^2y, 0, x + y) \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} d\mathcal{H}^1 = \\ &= \int_{\partial\Omega} x^2y^2 d\mathcal{H}^1 = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Wobei die vorletzte Gleichung aus der Transformationsformel für $D = [0, 2\pi)$ und $\phi(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ folgt.