Analysis 3 - Übung Nr. 10

Ida Hönigmann

December 18, 2022

1 Sätze

Satz (Integralsatz von Gauß)**.** *Ist A ein offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_s A) = 0$, $\boldsymbol{f} : \bar{A} \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld aus $C(\bar{A}) \cap C^1(A)$, so gilt wenn beide Integrale existieren*

$$\int_A div \boldsymbol{f} d\lambda^n = \int_{\partial A} \boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{n} d\mathcal{H}^{n-1}$$

wobei ν den in das Äußere von A zeigenden normierten Normalvektor auf ∂A bezeichnet.

Satz (Integralsatz von Stokes für die Ebene)**.** *Ist A offen und beschränkt in $\mathbb{R}^2$ mit $\partial A \setminus \partial_r A$ endlich, sowie $\boldsymbol{f} : \bar{A} \to \mathbb{R}^2$ eine auf $\bar{A}$ stetige und auf A stetig differenzierbare Funktion, so gilt:*

$$\int_A rot \boldsymbol{f} d\lambda^2 = \int_{\partial A} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{t} ds,$$

wobei $\boldsymbol{t}$ den normierten Tangentialvektor einer positiv orientierten Parametrisierung und s die Weglänge bezeichnet.

Satz (Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$)**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ das Bild einer beschränkten Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ mit stückweise stetig differenzierbarem Rand unter einer C^2-Abbildung. Weiters sei $\boldsymbol{f}$ ein C^1-Vektorfeld auf einer offenen Obermenge von $\bar{\Omega}$. Dann gilt*

$$\int_\Omega rot \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{f}^\top \cdot \boldsymbol{t} d\mathcal{H}^1,$$

wobei $\boldsymbol{n}$ ein normiertes Normalvektorfeld auf Ω und $\boldsymbol{t}$ ein normiertes Tangentialvektorfeld an $\partial\Omega$ bezeichnet wobei die Orientierung von $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{t}$ so zu wählen ist, dass auf $\partial\Omega$ $\det(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}) > 0$ für ein in das Äußere von Ω zeigende Tangentialvektorfeld $\boldsymbol{\nu}$ auf $\partial\Omega$ gilt.

2 Beispiele

Beispiel 1

Angabe. *Sei* $\boldsymbol{F}(x,y,z) := (xy, yz, x^2+y^2)^\top$. *Betrachte den Zylindermantel*

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, 0 < z < 1\}$$

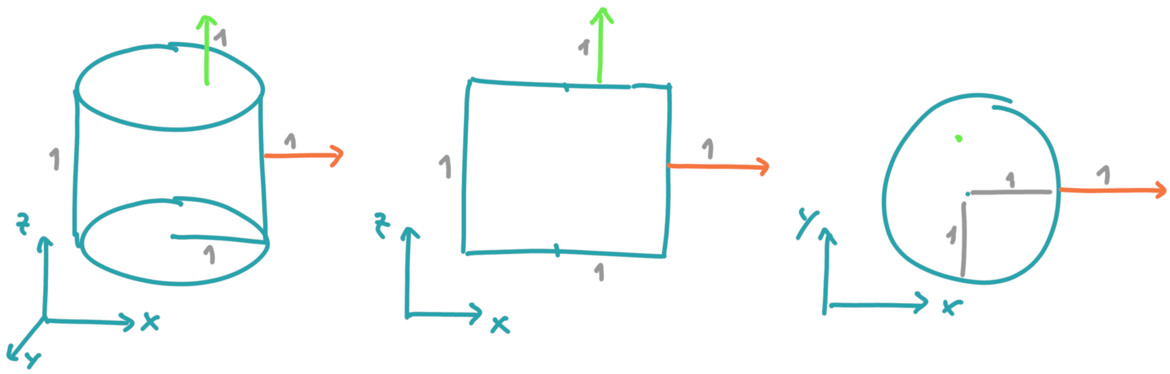
Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{F}$ *durch die Fläche* M*:*

$$\int_M \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2$$

wobei $\boldsymbol{\nu}$ *den nach außen gerichteten normierten Normalvektor auf* M *bezeichnet. Tun Sie das auf zwei Arten:*

(i) direkt

(ii) mithilfe des Gauß'schen Integralsatzes.



(i) **direkt**:

In jedem Punkt $(x,y,z) \in M$ gilt, dass der normierte Normalvektor

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{||\boldsymbol{\nu}||} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} x^2+y^2-1 \\ \frac{\partial}{\partial y} x^2+y^2-1 \\ \frac{\partial}{\partial z} x^2+y^2-1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2}}}_{x^2+y^2=1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\int_M \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_M x^2 y + y^2 z d\mathcal{H}^2$. Wir wollen nun zur Berechnung die Transformationsformel anwenden.

$$D := [0, 2\pi) \times (0,1) \qquad \phi : D \to \mathbb{R}^2, (\theta, z) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

$$d\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(d\phi^\top d\phi) = \det \begin{pmatrix} \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Offenbar gilt $\phi(D) = M$ und ϕ ist injektiv und eine C^1-Abbildung.

$$\int_M \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_{\phi(D)} x^2 y + y^2 z d\mathcal{H}^2 = \int_D \cos^2(\theta)\sin(\theta) + \sin^2(\theta) z d\lambda^2(\theta, z) =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2(\theta)\sin(\theta) dz d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sin^2(\theta) z dz d\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\sin(\theta) d\theta}_{=0} + \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta}_{=\pi} = \frac{\pi}{2}$$

(ii) **mit Gauß'schem Integralsatz**:

Wir betrachten zuerst $A := \{(x, y, 0)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\} = B_1^2(0)$ (der Boden des Zylinders) und $B := \{(x, y, 1)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\} = B_1^2(0) + (0, 0, 1)^\top$ (der Deckel des Zylinders). Offenbar gilt für $(x, y, 0) \in A$, dass der Normalvektor $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, -1)^\top$ und für $(x, y, 1) \in B$, dass $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)^\top$. Da $\boldsymbol{F}$ in der dritten Komponente nicht von z abhängt gilt nun, dass sich die Summe der folgenden beiden Integrale aufhebt:

$$\int_A \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 + \int_B \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_{B_1^2(0)} -(x^2 + y^2) d\mathcal{H}^2 + \int_{B_1^2(0)+(0,0,1)^\top} x^2 + y^2 d\mathcal{H}^2 =$$
$$- \int_{B_1^2(0)} x^2 + y^2 d\mathcal{H}^2 + \int_{B_1^2(0)} x^2 + y^2 d\mathcal{H}^2 = 0$$

Damit erhalten wir, dass wenn wir mit $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1\}$ den Zylinder bezeichnen, gilt

$$\int_{\partial Z} \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_M \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2$$

Um den Integralsatz von Gauß anwenden zu können müssen wir überprüfen ob

- Z eine offene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist; was klarerweise gilt
- $\mathcal{H}^2(\partial_s Z) = 0$ was gilt da $\partial_s Z = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 = 1\}$ und beide diese Mengen haben endliches eindimensionales Hausdorffmaß (genauer $\mathcal{H}^1(\text{Kreisrand}) = 2\pi$) und somit zweidimensionales Hausdorffmaß Null haben müssen ($\mathcal{H}^2(\text{Kreisrand}) = 0$).
- $\boldsymbol{F} : \bar{Z} \to \mathbb{R}^3 \in C(\bar{Z}) \cap C^1(Z)$, da $\boldsymbol{F}$ offenbar stetig ist und

  $$D\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

  ist stetig.

Also gilt nun

$$\int_{\partial_Z} \boldsymbol{F}^\top \cdot \nu d\mathcal{H}^2 = \int_Z div \boldsymbol{F} d\lambda^3 = \int_Z \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} d\lambda^3 = \int_Z y + z d\lambda^3$$

Zur Berechnung verwenden wir wieder den Transformationssatz

$$D := (0, 1) \times [0, 2\pi) \times (0, 1) \quad \phi : D \to \mathbb{R}^3, (r, \theta, z) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)^\top \quad \det(d\phi^T d\phi) = r^2$$

wobei D ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, ϕ ist eine injektive C^1-Abbildung und $Z = \phi(D)$. Damit folgt

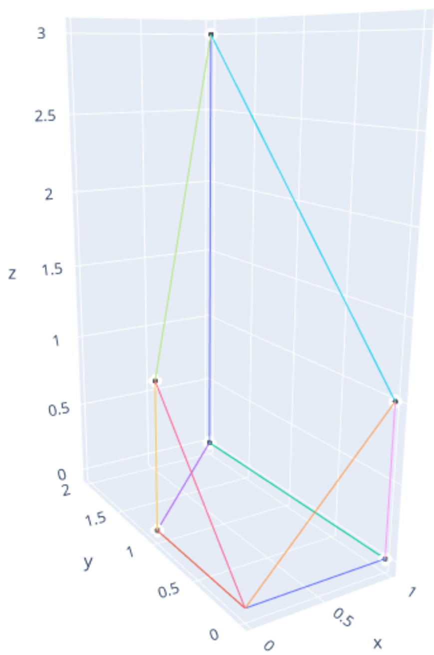
$$\int_{\phi(D)} y + z d\lambda^3 = \int_D (r\sin(\theta) + z) r d\lambda^3 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\theta) dz d\theta dr + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 rz dz d\theta dr =$$
$$\int_0^1 r^2 \left(-\cos(\theta)\right)\Big|_0^{2\pi} dr + 2\pi \int_0^1 r \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^1 dr = 0 + 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} r dr = \pi \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Beispiel 2

Angabe. *Sei* $\boldsymbol{F}(x,y,z) := (xz, xy, z^2 - x)^\top$. *Betrachte das Gebiet*

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, 0 < y < x+1, 0 < z < x+y\}.$$

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ *durch den Rand von* Ω*.*



Gesucht ist

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2$$

weshalb wir den Gauß'schen Integralsatz verwenden wollen. Daher prüfen wir zuerst die Bedingungen:

- Ω ist offen und beschränkt: offen ist aus der Definition klar, Beschränktheit folgt aus $\Omega \subseteq (0,1) \times (0,2) \times (0,3)$.
- $\mathcal{H}^2(\partial_s\Omega) = 0$, da $\partial_s\Omega$ aus 11 Kanten (und 7 Ecken) besteht (siehe Grafik) und diese alle endliches eindimensionales Hausdorffmaß besitzen und daher $\mathcal{H}^2(\partial_s\Omega) = 0$.
- $\boldsymbol{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, da $\boldsymbol{F}$ offenbar stetig ist und

$$D\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$$

ist stetig.

Gemeinsam mit $div\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3} \partial f_i / \partial x_i = x + z$ und dem Gauß'schen Integralsatz ergibt sich

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_\Omega div \boldsymbol{F} d\lambda^3 = \int_0^1 \int_0^{x+1} \int_0^{x+y} x + z dz dy dx$$

$$\int_0^1 \int_0^{x+1} \int_0^{x+y} x dz dy dx = \int_0^1 x \int_0^{x+1} x + y dy dx = \int_0^1 x \left(x(x+1) + \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{x+1} \right) dx =$$

$$\int_0^1 x \left(x^2 + x + \frac{(x+1)^2}{2} \right) dx = \int_0^1 x^3 + x^2 + \frac{x}{2}(x^2 + 2x + 1) dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x dx = \frac{31}{24}$$

$$\int_0^1 \int_0^{x+1} \int_0^{x+y} z dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{x+1} \frac{(x+y)^2}{2} dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_x^{2x+1} u^2 du dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left.\frac{u^3}{3}\right|_x^{2x+1} dx =$$

$$\frac{1}{6} \int_0^1 (2x+1)^3 - x^3 dx = \frac{1}{6} \left(\int_1^3 \frac{v^3}{2} dv - \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \left.\frac{v^3}{4}\right|_1^3 - \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{8}$$

$$\implies \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \frac{31}{24} + \frac{13}{8} = \frac{35}{12}$$

Beispiel 3

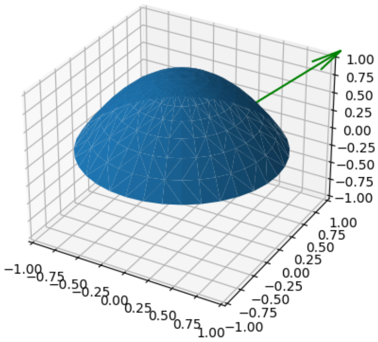
Angabe. *Verifizieren Sie den Gauß'schen Integralsatz für das Gebiet*

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 - x^2 - y^2\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) := (x, x + y, x^2 + z)^\top,$$

d.h., berechnen Sie die beiden Integrale und überprüfen Sie deren Gleichheit.



Zuerst berechnen wir $\int_\Omega div\boldsymbol{F} d\lambda^3$:

$$div\boldsymbol{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3 \qquad \Longrightarrow \int_\Omega div\boldsymbol{F} d\lambda^3 = 3\int_\Omega d\lambda^3$$

Mit der Transformationsformel für $D := \{(r, \theta, z) : r \in (0, 1), \theta \in [0, 2\pi), z \in (0, 1 - r^2)\}$ und $\phi(r, \theta, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ gilt $\det(d\phi^\top d\phi) = r^2$ sowie $\Omega = \phi(D)$ und es folgt

$$3\int_\Omega d\lambda^3 = 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r^2} r dz d\theta dr = 6\pi \int_0^1 r(1 - r^2)dr = 6\pi\left(\int_0^1 rdr - \int_0^1 r^3 dr\right) = 6\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{3\pi}{2}$$

Für die Berechnung von $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2$ müssen wir uns zuerst überlegen wie der normierte Normalvektor auf $\partial\Omega$ aussieht.

$$\partial\Omega = A_1 \cup A_2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y, 1 - x^2 - y^2)\} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\text{Auf } A_1 : \boldsymbol{\nu} = (0, 0, -1)^\top$$

$$\text{Auf } A_2 : \tilde{\boldsymbol{\nu}} = \left(-\frac{\partial}{\partial x}(1 - x^2 - y^2), -\frac{\partial}{\partial y}(1 - x^2 - y^2), 1\right)^\top = (2x, 2y, 1)^\top$$

$$||\tilde{\boldsymbol{\nu}}|| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \implies \boldsymbol{\nu} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\nu}}}{||\tilde{\boldsymbol{\nu}}||}$$

Nun gilt

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_{A_1} \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 + \int_{A_2} \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2$$

$$\int_{A_1} \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_{A_1} (x, x + y, x^2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} d\mathcal{H}^2 = \int_{A_1} -x^2 d\mathcal{H}^2$$

$$\int_{A_2} \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_{A_2} \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} (x, x + y, 1 - y^2) \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} d\mathcal{H}^2 =$$

$$\int_{A_2} \frac{2x^2 + 2xy + 2y^2 + 1 - y^2}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} d\mathcal{H}^2 = \int_{A_2} \frac{2x^2 + 2xy + y^2 + 1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} d\mathcal{H}^2$$

Für die Transformationsformel sein nun $D := (0,1)\times[0,2\pi)$, $\phi_1(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 0)$ und $\phi_2(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 1-r^2)$, dann gilt $A_1 = \phi_1(D)$ und $A_2 = \phi_2(D)$, sowie $\det(d\phi_1^\top d\phi_1) = r^2$ und $\det(d\phi_2^\top d\phi_2) = r^2(4r^2+1)$.

$$\int_{A_1} -x^2 d\mathcal{H}^2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -r^2\cos^2(\theta) r d\theta dr = -\int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta dr = -\pi \int_0^1 r^3 dr = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{A_2} \frac{2x^2+2xy+y^2+1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}} d\mathcal{H}^2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{2r^2\cos^2(\theta)+2r^2\cos(\theta)\sin(\theta)+r^2\sin^2(\theta)+1}{\sqrt{4r^2+1}} r\sqrt{4r^2+1} d\theta dr =$$

$$\int_0^1 2r^3 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta + 2r^3 \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta + r^3 \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta + r \int_0^{2\pi} d\theta dr =$$

$$\int_0^1 2\pi r^3 + \pi r^3 + 2\pi r dr = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$$

$$\implies \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = -\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

Beispiel 4

Angabe. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Sei $f \in C^2(A)$ eine reelle Funktion, sei $\boldsymbol{F} \in C^2(A;\mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie*

(i) $rot \nabla f = \mathbf{0}$,

(ii) $div rot \boldsymbol{F} = 0$

(i) Da die Reihenfolge bei Differenzieren von f egal ist ergibt sich

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} =: (f_1, f_2, f_3)^\top \qquad rot \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Sei $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, f_3)$, dann gilt

$$rot \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{div rot}\boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) =$$
$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} = 0$$

Beispiel 5

Angabe. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$. Wir schreiben das Wegintegral*

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} d\boldsymbol{x} =: \int_\gamma f_1(\boldsymbol{x})dx + f_2(\boldsymbol{x})dy.$$

Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\partial B} (x - y^3)dx + y^3 dy$$

(i) direkt

(ii) mithilfe des Stoke'schen Integralsatzes.

(i) **direkt**:

Wir setzen $D := [0, 2\pi)$ und $\phi(\theta) := (\cos(\theta), \sin(\theta))$, dann wird der Weg des Wegintegrals wird durch $\phi(D)$ beschrieben. Wegen $\int_\gamma f(x)dx = \int_{[a,b]} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ gilt:

$$\int_{\partial B} \begin{pmatrix} x - y^3 \\ y^3 \end{pmatrix} d(x,y) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\theta) - \sin^3(\theta) \\ \sin^3(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}' d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi} - \sin(\theta)\cos(\theta) + \sin^4(\theta) + \sin^3(\theta)\cos(\theta) d\theta = 0 + \frac{3\pi}{4} + 0 = \frac{3\pi}{4}$$

(ii) **mithilfe des Stoke'schen Integralsatzes**:

Auf der Einheitskreisscheibe ist offenbar für jeden Punkt $(x, y)^\top$ der Vektor $(x, y)^\top$ ein normierter Normalvektor, daher sind die beiden Tangentialvektor an der Stelle $(-y, x)^\top$ und $(y, -x)^\top$, wobei der erste der positiven Orientierung entspricht.

Zuerst prüfen wir die Vorraussetzungen für den Integralsatz von Stokes für die Ebene:

- B ist klarerweise offen und beschränkt in $\mathbb{R}^2$
- $\partial B \setminus \partial_r B = \emptyset$ also endlich
- $f : \bar{B} \to \mathbb{R}^2 \in C(\bar{B}) \cap C^1(B)$: stetig auf $\bar{B}$ ist klar;

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & -3y^2 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}$$

  ist stetig auf B.

Daher gilt nun

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\theta) - \sin^3(\theta) \\ \sin^3(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} d\theta = \int_{\partial B} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{t} ds = \int_B rot \boldsymbol{f} d\lambda^2 =$$
$$\int_B \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} d\lambda^2 = \int_B 0 - (-3y^2) d\lambda^2 = 3 \int_B y^2 d\lambda^2$$

Mit der Transformationssformel für $D := (0, 1) \times [0, 2\pi)$ und $\phi(r, \theta) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta))^\top$ gilt $\det(d\phi^\top d\phi) = r^2$ und es folgt:

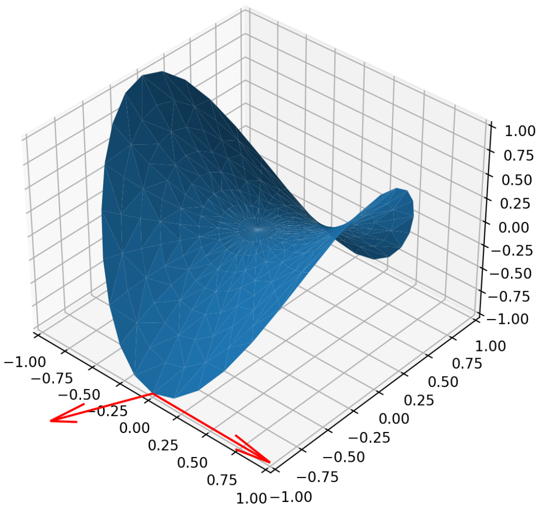
$$3 \int_B y^2 d\lambda^2 = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2(\theta) r d\theta dr = 3\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{3\pi}{4}$$

Beispiel 6

Angabe. *Sei* $\boldsymbol{F}(x,y,z) := (1-xy, xz, x+z)^\top$*. Betrachte das hyperbolische Paraboloid*

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x^2+y^2 < 1\}.$$

Verifizieren Sie den Stoke'schen Integralsatz für $\boldsymbol{F}$ *auf* Ω*.*



Zuerst wollen wir die benötigten Normal- und Tangentialvektoren berechnen. Sei $(x,y,z) \in \Omega$, dann ist

$$\tilde{n} := (-\frac{\partial x^2 - y^2}{\partial x}, -\frac{\partial x^2 - y^2}{\partial y}, 1)^\top = (-2x, 2y, 1)^\top$$

ein Normalvektor auf Ω im Punkt (x,y,z). Normieren ergibt

$$n := \frac{\tilde{n}}{||\tilde{n}||} = \frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}(-2x, 2y, 1)^\top$$

Sei nun $(x,y,z) \in \partial\Omega$ also aus dem Rand $\partial\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 = 1\}$. Dann ist die Polarkoordinatendarstellung gleich $(\cos(\theta), \sin(\theta), \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$ und ein Tangentialvektor an dem Punkt gleich

$$\tilde{\boldsymbol{t}} = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\cos(\theta), \frac{\partial}{\partial\theta}\sin(\theta), \frac{\partial}{\partial\theta}\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)^\top = (-\sin(\theta), \cos(\theta), -4\sin(\theta)\cos(\theta))^\top = (-y, x, -4xy)^\top$$

$$||\tilde{\boldsymbol{t}}|| = \sqrt{x^2+y^2+16x^2 * y^2} = \sqrt{16x^2y^2+1} \qquad \boldsymbol{t} := \frac{\tilde{\boldsymbol{t}}}{||\tilde{\boldsymbol{t}}||}$$

Nun berechnen wir $\int_\Omega rot\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} d\mathcal{H}^2$:

$$rot\boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^\top = (0-x, 0-1, z-(-x))^\top = (-x, -1, x+z)^\top$$

$$\int_\Omega rot\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} d\mathcal{H}^2 = \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}(-x, -1, x+z) \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} d\mathcal{H}^2 =$$

$$\int_\Omega \frac{2x^2 - 2y + x + z}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}} d\mathcal{H}^2 = \int_\Omega \frac{3x^2 - y^2 + x - 2y}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}} d\mathcal{H}^2$$

Die Transformationsformel für $D := (0,1) \times [0,2\pi)$ und $\phi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ liefert uns $\det(d\phi^\top d\phi) = r^2$ und

$$\int_\Omega \frac{3x^2 - y^2 + x - 2y}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}} d\mathcal{H}^2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{3r^2\cos^2(\theta) - r^2\sin^2(\theta) + r\cos(\theta) - 2r\sin(\theta)}{\sqrt{4(r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta))+1}} r d\theta dr =$$
$$\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{4r^2+1}} \left(3r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta - r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)d\theta + r\int_0^{2\pi} \cos(\theta)d\theta - 2r\int_0^{2\pi} \sin(\theta)d\theta\right) dr =$$
$$\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{4r^2+1}}(3\pi r^2 - \pi r^2)dr = 2\pi \int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4r^2+1}} dr = 2\pi \; \frac{1}{24}(2r^2-1)\sqrt{4r^2+1}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{12}(\sqrt{5}+1)$$

Nun zur Berechnung von $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{t} d\mathcal{H}^1$:

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{t} d\mathcal{H}^1 = \int_{\partial\Omega} \frac{-y + xy^2 + x^2z - 4x^2y - 4xyz}{\sqrt{16x^2y^2+1}} d\mathcal{H}^1 =$$
$$\int_{\partial\Omega} \frac{-y + xy^2 + x^4 - x^2y^2 - 8x^2y + 4y^3}{\sqrt{16x^2y^2+1}} d\mathcal{H}^1 = \int_0^{2\pi} \frac{num}{den}$$

TODO

Beispiel 7

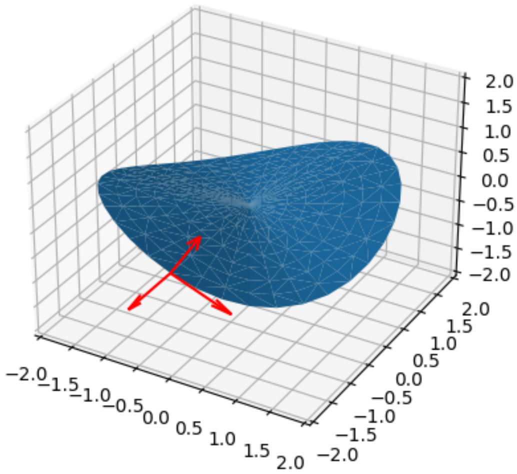
Angabe. *Sei* $\boldsymbol{F}(x,y,z) := (z,-z,y)^\top$. *Betrachte*

$$\Omega := \{(2r\cos(t), 2r\sin(t), r\cos(t)\sin(t)) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r < 1, 0 \le t < 2\pi\}.$$

Berechnen Sie mithilfe des Stoke'schen Integralsatzes

$$\int_\Omega (rot\boldsymbol{F})^\top \cdot \boldsymbol{n} d\mathcal{H}^2,$$

wobei das Normalvektorfeld $\boldsymbol{n}$ *so gewählt ist, dass* $\boldsymbol{n} \cdot e_3 > 0$ *(wobei* e_3 *der dritte kanonische Einheitsvektor in* $\mathbb{R}^3$ *ist).*



Zuerst suchen wir einen Normalvektor für jeden Punkt $(x,y,z) \in \Omega$:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} 2r\cos(t) \\ 2r\sin(t) \\ r\cos(t)\sin(t) \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} 2r\cos(t) \\ 2r\sin(t) \\ r\cos(t)\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r\sin^3(t) \\ -2r\cos^3(t) \\ 4r \end{pmatrix}$$

Normieren ist nicht notwendig, da wir uns nur für die Orientierung interessieren.
Nun zum Tangentialvektor auf $\partial\Omega = \{(2\cos(t), 2\sin(t), \cos(t)\sin(t)) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le t < 2\pi\}$:

$$\tilde{\boldsymbol{t}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}2\cos(t), \frac{\partial}{\partial t}2\sin(t), \frac{\partial}{\partial t}\cos(t)\sin(t)\right)^\top = (-2\sin(t), 2\cos(t), \cos^2(t) - \sin^2(t))^\top$$

$$||\tilde{\boldsymbol{t}}|| = \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) + (\cos^2(t) - \sin^2(t))^2} = \sqrt{(\cos^2(t) - \sin^2(t))^2 + 4}$$

$$\boldsymbol{t} := \frac{\tilde{\boldsymbol{t}}}{||\tilde{\boldsymbol{t}}||}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{n} \times \tilde{\boldsymbol{t}} = \begin{pmatrix} 8\cos(t) + 2\cos^5(t) - 2\sin^2(t)\cos^3(t) \\ -2\sin^3(t)\cos^2(t) + 2\sin^5(t) + 8\sin(t) \\ 4\sin(t)\cos^3(t) + 4\sin^3(t)\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\cos(t) + 2\cos^3(t)(\cos^2(t) - \sin^2(t)) \\ 8\sin(t) + 2\sin^3(t)(\sin^2(t) - \cos^2(t)) \\ 4\sin(t)\cos(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \end{pmatrix}$$

Die Bedingungen für den Stoke'schen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ sind:

- Ω ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$

- Ω ist das Bild von $\phi \in C^2$ unter einer beschränkten Teilmenge des $\mathbb{R}^2$

Es gilt nun also

$$\int_\Omega (rot\boldsymbol{F})^\top \cdot \boldsymbol{n} d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t} d\mathcal{H}^1 =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(\cos^2(t) - \sin^2(t))^2 + 4}} (\cos(t)\sin(t), -\cos(t)\sin(t), 2\sin(t)) \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{-2\sin^2(t)\cos(t) - 2\sin(t)\cos^2(t) + 2\sin(t)\cos^2(t) - 2\sin^3(t)}{\sqrt{(\cos^2(t) - \sin^2(t))^2 + 4}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{-2\sin^2(t)(\sin(t) + \cos(t))}{\sqrt{(\cos^2(t) - \sin^2(t))^2 + 4}} dt$$

Definieren wir $f(t)$ als das was im Integral steht so gilt $\forall t \in [0, \pi)$:

$$-f(t+\pi) = -\frac{-2\sin^2(t+\pi)(\sin(t+\pi) + \cos(t+\pi))}{\sqrt{(\cos^2(t+\pi) - \sin^2(t+\pi))^2 + 4}} =$$

$$-\frac{-2\sin^2(t)(-\sin(t) - \cos(t))}{\sqrt{(\cos^2(t) - \sin^2(t))^2 + 4}} = \frac{-2\sin^2(t)(\sin(t) + \cos(t))}{\sqrt{(\cos^2(t) - \sin^2(t))^2 + 4}} = f(t)$$

Woraus folgt

$$\int_\Omega (rot\boldsymbol{F})^\top \cdot \boldsymbol{n} d\mathcal{H}^2 = \int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^\pi f(t)dt + \int_\pi^{2\pi} f(t)dt = \int_0^\pi f(t)dt + \int_0^\pi f(t+\pi)dt = 0$$

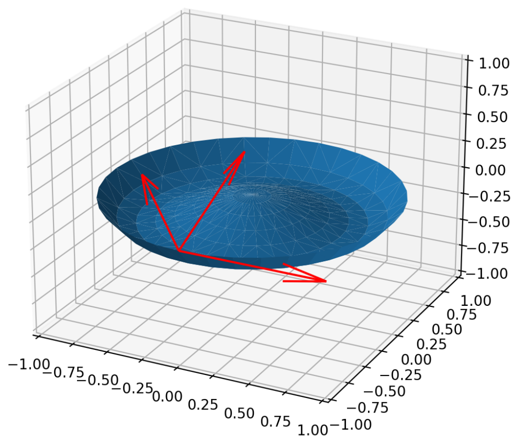
Beispiel 8

Angabe. *Sei* $\boldsymbol{F}(x,y,z) := (x^2y, z^2, x+y+z^3)^\top$. *Betrachte*

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = (\sqrt{x^2+y^2}+1)(\sqrt{x^2+y^2}-1)(x^2+y^2), x^2+y^2 < 1\}.$$

Setzte $\boldsymbol{n}$ *das normierte Normalvektorfeld auf* Ω *mit positiver* z*-Koordinate. Berechen Sie*

$$\int_\Omega (rot\boldsymbol{F})^\top \cdot \boldsymbol{n} d\mathcal{H}^2.$$



Wir suchen zuerst die Normalvektoren auf Ω mit positiver z-Koordinate. Für jeden Punkt $(x,y,z(x,y)) \in \Omega$ ist $\boldsymbol{n}$ ein normierter Normalvektor:

$$\tilde{\boldsymbol{n}} := \left(-\frac{\partial}{\partial x}z(x,y), -\frac{\partial}{\partial y}z(x,y), 1\right)^\top = (-2x(2x^2+2y^2-1), -2y(2x^2+2y^2-1), 1)^\top$$

$$||\tilde{\boldsymbol{n}}|| = \sqrt{4x^2(2x^2+2y^2-1)^2+4y^2(2x^2+2y^2-1)^2+1} = \sqrt{(4x^2+4y^2)(2x^2+2y^2-1)^2+1}$$

$$\boldsymbol{n} := \frac{\tilde{\boldsymbol{n}}}{||\tilde{\boldsymbol{n}}||}$$

Um den Integralsatz von Stokes in $\mathbb{R}^3$ anwenden zu können müssen wir nun einen Tangentialvektor $\boldsymbol{t}$ für jeden Punkt in $\partial\Omega$ finden.

$$\partial\Omega = \{(x,y,(\sqrt{x^2+y^2}+1)(\sqrt{x^2+y^2}-1)(x^2+y^2)) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\} = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\}$$

$$\boldsymbol{t} = (-y,x,0)^\top \qquad ||\boldsymbol{t}|| = \sqrt{y^2+x^2} = 1$$

Auf $\partial\Omega$ gilt $\tilde{\boldsymbol{n}} = (-2x(2-1), -2y(2-1), 1)^\top = (-2x,-2y,1)^\top$.

$$\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x^2+2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}) = \det\begin{pmatrix} x & -y & -2x \\ y & x & -2y \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2+4y^2+4x^2+y^2 = 5(x^2+y^2) = 5 > 0$$

Überprüfen wir als nächstes die Bedingungen des Integralsatzes von Stokes in $\mathbb{R}^3$:

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

- Ω ist das Bild einer C^2-Abbildung:

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$
$$\phi : D \to \mathbb{R}^3, \phi(x,y) := (x, y, (\sqrt{x^2+y^2}+1)(\sqrt{x^2+y^2}-1)(x^2+y^2))$$

  Es gilt $\phi(D) = \Omega$ und $\phi \in C^2(\bar{D})$.

- D ist beschränkt.

Also gilt

$$\int_\Omega (rot\boldsymbol{F})^\top \cdot \boldsymbol{n} d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{t} d\mathcal{H}^1 = \int_{\partial\Omega} (x^2 y, 0, x+y) \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} d\mathcal{H}^1 =$$
$$\int_{\partial\Omega} -x^2 y^2 d\mathcal{H}^1 = -\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\sin^2(\theta) d\theta = -\frac{\pi}{4}$$

Wobei die vorletzte Gleichung aus der Transformationsformel für $D = [0, 2\pi)$ und $\phi(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ folgt.