MAS Ü8

1) $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^r)$, $g \in \mathcal{L}^p(\lambda^r)$ $\quad 1 \leq p < \infty \quad h := f * g$

zz: $h \in \mathcal{L}^p(\lambda^r) \wedge \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$

$f \in \mathcal{L}^1(\lambda^r) \Rightarrow \int |f| \, d\lambda^r < \infty \qquad g \in \mathcal{L}^p(\lambda^r) \Rightarrow \int |g|^p \, d\lambda^r < \infty$

$$\int |h|^p d\lambda^r = \int |f * g|^p d\lambda^r = \int \left| \int f(x) g(y-x) \, d\lambda^r(x) \right|^p d\lambda^r(y)$$

$$= \int \left| \int \|f\|_1 \frac{f(x)}{\|f\|_1} g(y-x) \, d\lambda^r(x) \right|^p d\lambda^r(y) = \|f\|_1^p \int \left| \int g(y-x) \frac{f(x)}{\|f\|_1} d\lambda^r(x) \right|^p d\lambda^r(y)$$

Sei nun $f, g \geq 0$. $\frac{f}{\|f\|_1}$ soll Wahrscheinlichkeitsdichte bzgl. λ^r sein $\int \frac{f}{\|f\|_1} d\lambda^r = \int dP$

$$= \|f\|_1^p \int \left(\int g(y-x) \, dP(x) \right)^p d\lambda^r(y) \overset{\text{Jensen}}{\leq} \|f\|_1^p \int \int (g(y-x))^p dP(x) \, d\lambda^r(y)$$
$$= \|f\|_1^p \int \int (g(y-x))^p \frac{f(x)}{\|f\|_1} d\lambda^r(x) \, d\lambda^r(y) \overset{\text{Fubini}}{=} \|f\|_1^p \int \frac{f(x)}{\|f\|_1} \int g(y-x)^p d\lambda^r(y) \, d\lambda^r(x)$$
$$= \|f\|_1^p \int \frac{f(x)}{\|f\|_1} \|g\|_p^p \, d\lambda^r(x) = \|f\|_1^p \|g\|_p^p \int dP(x) = \|f\|_1^p \|g\|_p^p$$

$\Rightarrow$ für $f, g \geq 0$: $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

für allgemeine f, g: $|(f * g)(x)| = \left| \int f(x) g(y-x) d\lambda^r(x) \right| \leq \int |f(x)| |g(y-x)| d\lambda^r(x)$

$= (|f| * |g|)(x)$ also

$\|f * g\|_p \leq \| |f| * |g| \|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

Auch folgt daraus $h \in \mathcal{L}^p(\lambda^r)$

$\square$

Jensen $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$... endlicher Maßraum, $\varphi: I \to \mathbb{R}$... konvex, $I \subseteq \mathbb{R}$ ... Intervall, $f(\Omega) \subseteq I$

f... integrierbar aus $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow \varphi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int f \, d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int \varphi \circ f \, d\mu$

MAS Ü8

2) X ... Zufallsvariable auf W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\quad 0<\alpha<\beta$

zz: $(\mathbb{E}|X|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\mathbb{E}|X|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$

Für $p=\frac{\beta}{\alpha} \in [1,\infty)$ folgt aus der Hölder-Ungleichung $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ $\quad q=\frac{p}{p-1}$

$\Rightarrow \| \, |X|^\alpha \cdot 1 \|_1 \leq \| \, |X|^\alpha \|_{\frac{\beta}{\alpha}} \, \|1\|_q \quad \Rightarrow \| \, |X|^\alpha \|_1 \leq \| \, |X|^\alpha \|_{\beta/\alpha}$

$\Rightarrow \int |X|^\alpha dP \leq \left(\int |X|^{\alpha \frac{\beta}{\alpha}} dP\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \left(\int |X|^\beta dP\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}$

$\Rightarrow \left(\int |X|^\alpha dP\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\int |X|^\beta dP\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad \Rightarrow (\mathbb{E}|X|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\mathbb{E}|X|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$

zz: $X \geq 0, \; p>0 \quad \Rightarrow \frac{1}{(\mathbb{E}X)^p} \leq \mathbb{E}\frac{1}{X^p}$

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist für $p>0$ konvex

$x \mapsto \frac{1}{x^p} = x^{-p}$

$\Rightarrow \frac{1}{(\mathbb{E}X)^p} = \varphi(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)) = \mathbb{E}\frac{1}{X^p}$

$\square$

Hölder $f,g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ $\quad 1<p<\infty \Rightarrow \int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$ $\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Jensen $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ... endlicher Maßraum, $\varphi: I \to \mathbb{R}$ ... konvex, $I \subseteq \mathbb{R}$ ... Intervall, $f(\Omega) \subseteq I$

f ... integrierbar aus $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ $\Rightarrow \varphi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int f \, d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int \varphi \circ f \, d\mu$

Jensen für $\mathbb{E}$ $\quad X \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, φ ... konvex $\Rightarrow \varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$

MAS Ü8

5) a) f, g ... messbare Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ $\quad g \neq 0$ μ-f.ü.

zz: $\left(\int \sqrt{|f|}\, d\mu\right)^2 \le \|f \cdot g\| \cdot \|\frac{1}{g}\|$

Reverse Hölder Inequality für $p = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \|fg\|_1 \ge \|f\|_{\frac{1}{2}} \|g\|_{-1} = \|f\|_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\frac{1}{g}\|_1} \Rightarrow \|f\|_{\frac{1}{2}} = \left(\int \sqrt{|f|}\, d\mu\right)^2 \le \|fg\|_1 \|\tfrac{1}{g}\|_1$$

b) $\varphi(t) := \mathbb{E} \exp(tX)$, $X \ge 0$ $\quad t \in (-\delta, \delta)$ $\quad$ zz: $\varphi(-t)\varphi'(t) \ge (\mathbb{E}\sqrt{X})^2$

$f = X \quad g = \exp(tX) \quad \overset{a}{\Rightarrow} \left(\int \sqrt{|X|}\, d\mu\right)^2 \le \|X \exp(tX)\|\, \|\frac{1}{\exp(tX)}\|$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\sqrt{X})^2 \le \mathbb{E}|X \exp(tX)|\ \mathbb{E}|\exp(-tX)| = \varphi'(t)\varphi(-t)$$

$$\varphi'(t) = (\mathbb{E}\exp(tX))' = \mathbb{E}(\exp(tX))' = \mathbb{E}(X \exp(tX))$$

c) $X \sim Ex_\lambda$ $\quad$ zz: $\varphi(-t)\varphi'(t) \ge (\mathbb{E}\sqrt{X})^2$

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(\exp(tX)) = \int_{\mathbb{R}} \exp(tx)\, dP^X(x) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\, d\lambda(x)$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{x(t-\lambda)}\, d\lambda(x) = \lambda \frac{1}{t-\lambda} e^{x(t-\lambda)}\Big|_0^\infty = \frac{-\lambda}{t-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{für } t < \lambda$$

$$\varphi'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \qquad \Rightarrow \varphi(-t)\varphi'(t) = \frac{\lambda}{\lambda+t} \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}$$

$$\mathbb{E}\sqrt{X} = \int_{\mathbb{R}} x\, dP^{\sqrt{X}}(x) = \int_0^\infty 2\lambda x^2 e^{-\lambda x^2}\, d\lambda(x) = \int_0^\infty (-x e^{-\lambda x^2})' + e^{-\lambda x^2}\, dx$$

$$\left[(-x e^{-\lambda x^2})' = -e^{-\lambda x^2} + x e^{-\lambda x^2} \lambda 2x\right.$$

$$= -x e^{-\lambda x^2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x^2}\, dx =$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x^2}} + 0 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\lambda x e^{\lambda x^2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} \Rightarrow (\mathbb{E}\sqrt{X})^2 = \frac{\pi}{4\lambda}$$

zz: $\frac{\lambda^2}{(\lambda+t)(\lambda-t)^2} \ge \frac{\pi}{4\lambda}$ mit $t \in (-\lambda, \lambda)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\lambda^2}{(\lambda+t)(\lambda-t)^2} = \frac{\lambda^2(\lambda+3t)}{(\lambda-t)^3(\lambda+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \lambda + 3t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\lambda}{3}$$

$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\lambda^2}{(\lambda+t)(\lambda-t)^2} = \frac{4\lambda^2(\lambda^2+2\lambda t+3t^2)}{(\lambda-t)^4(\lambda+t)^3}$ bei $t = -\frac{\lambda}{3}$ gleich $\frac{729}{256\lambda^3} > 0$ also Minimum oder

auch $\lim_{t\to\pm\lambda} \frac{\lambda^2}{(\lambda+t)(\lambda-t)^2} = \infty$ $\Rightarrow$ bei $t = -\frac{\lambda}{3}$ Minimum mit Wert $\frac{27}{32\lambda}$

$$\frac{27}{32} = 0{,}84375 \ge 0{,}7854 \approx \frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow \varphi(-t)\varphi'(t) \ge (\mathbb{E}\sqrt{X})^2$$

$X \sim Ex_\lambda$ $\quad$ ges: Dichte von $\sqrt{X}$:

$P(\sqrt{X} \le y) = \mathbb{P}(X \le y^2) = F_X(y^2) = 1 - e^{-\lambda y^2}$ $\quad f_{\sqrt{X}}(y) = \frac{d}{dy} 1 - e^{-\lambda y^2} = -e^{-\lambda y^2}(-2\lambda y) = 2\lambda y e^{-\lambda y^2}$

MAS Ü8

6) Ist für $([0,1], \mathcal{B}|_{[0,1]}, \lambda|_{[0,1]})$ der Raum $L^\infty([0,1], \mathcal{B}|_{[0,1]}, \lambda|_{[0,1]})$ separabel?

seperabel ... $\exists$ abzählbare, dichte Teilmenge

Nein. $\forall t \in (0,1)$: $\mathbb{1}_{(0,t)}$ ist überabzählbar

Für t_1, t_2 mit $t_1 < t_2 < t$ $\Rightarrow \| \mathbb{1}_{(0,t_1)} - \mathbb{1}_{(0,t_2)} \|_\infty = \| \mathbb{1}_{[t_1,t_2)} \|_\infty = 1 > \frac{1}{3}$

$B := \{ U^\infty_{\frac{1}{3}}(t) \mid t \in (0,1) \}$ von oben folgt das die offenen Kugeln alle paarweise disjunkt sind.

Sei $S \subseteq L^\infty([0,1], \mathcal{B}|_{[0,1]}, \lambda|_{[0,1]})$ dicht, so muss $\forall\, U^\infty_{\frac{1}{3}}(t) \in B\ \exists x \in S: x \in U^\infty_{\frac{1}{3}}(t)$

$\Rightarrow$ S hat überabzählbar viele Elemente.

$\Rightarrow$ nicht separabel

MAS Ü8

7) ges: endlicher Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, f_n ... gmI, $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$: $\|f_n\| \to \|f\| \wedge (f_n \overset{\mu\text{-f.ü.}}{\not\to} f \vee f_n \overset{L_1}{\not\to} f)$

$(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}), \zeta)$ ... Zählmaß auf $\mathcal{P}\{0,1\}$

$f := 1 \qquad g: \{0,1\} \to \mathbb{R} \qquad g(0) = \frac{1}{2} \qquad g(1) = 1 + \frac{1}{2} \qquad f_n = g \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega |f| \, d\zeta = \int_\Omega 1 \, d\zeta = \zeta(\Omega) = 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \int_\Omega |f_n| \, d\zeta = \int_{\{0\}} \frac{1}{2} \, d\zeta + \int_{\{1\}} 1 + \frac{1}{2} \, d\zeta = 2 \qquad \Rightarrow \|f_n\| \to \|f\|$$

$$f_n \not\to f \quad \zeta\text{-f.s.}, \text{ da } \lim_{n\to\infty} \zeta(\{x \in \Omega : \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{=\frac{1}{2}} \underset{\frac{1}{3}}{\geq \varepsilon}\}) = \lim_{n\to\infty} \zeta(\Omega) = 2 \neq 0$$

$$\int_\Omega |f - f_n| \, d\zeta = \int_\Omega |1 - g(x)| \, d\zeta(x) = \int_\Omega \frac{1}{2} \, d\zeta(x) = 1 \qquad \to \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 1 \neq 0$$

$\square$