Analysis 3 - Übung Nr. 10

Ida Hönigmann

December 15, 2022

1 Sätze

Transformationsformel
Gauß'sche Integralsatz

2 Beispiele

TODO: Grafik Zylinder + Normalvektor in Bsp 1 TODO: Grafik in Bsp 2

Beispiel 1

Angabe. *Sei* $\boldsymbol{F}(x,y,z) := (xy, yz, x^2+y^2)^\top$. *Betrachte den Zylindermantel*

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, 0 < z < 1\}$$

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{F}$ *durch die Fläche* M:

$$\int_M \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2$$

wobei $\boldsymbol{\nu}$ *den nach außen gerichteten normierten Normalvektor auf* M *bezeichnet. Tun Sie das auf zwei Arten:*

(i) direkt

(ii) mithilfe des Gauß'schen Integralsatzes.

(i) **direkt**:

In jedem Punkt $(x,y,z) \in M$ gilt, dass der normierte Normalvektor

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{||\boldsymbol{\nu}||}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} x^2+y^2-1 \\ \frac{\partial}{\partial y} x^2+y^2-1 \\ \frac{\partial}{\partial z} x^2+y^2-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{4x^2+4y^2}}_{x^2+y^2=1}}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\int_M \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_M x^2y + y^2z d\mathcal{H}^2$. Wir wollen nun zur Berechnung die Transformationsformel anwenden.

$$D := [0, 2\pi) \times (0,1) \qquad \phi : D \to \mathbb{R}^2, (\theta, z) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

$$d\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(d\phi^\top d\phi) = \det\begin{pmatrix} \sin^2(\theta)+\cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Offenbar gilt $\phi(D) = M$ und ϕ ist injektiv und eine C^1-Abbildung.

$$\int_M \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_{\phi(D)} x^2y + y^2 z d\mathcal{H}^2 = \int_D \cos^2(\theta)\sin(\theta) + \sin^2(\theta) z d\lambda^2(\theta, z) =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2(\theta)\sin(\theta) dz d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sin^2(\theta) z dz d\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\sin(\theta) d\theta}_{=0} + \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta}_{=\pi} = \frac{\pi}{2}$$

(ii) **mit Gauß'schem Integralsatz**:

Wir betrachten zuerst $A := \{(x, y, 0)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\} = B_1^2(0)$ (der Boden des Zylinders) und $B := \{(x, y, 1)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\} = B_1^2(0) + (0, 0, 1)^\top$ (der Deckel des Zylinders). Offenbar gilt für $(x, y, 0) \in A$, dass der Normalvektor $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, -1)^\top$ und für $(x, y, 1) \in B$, dass $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)^\top$. Da $\boldsymbol{F}$ in der dritten Komponente nicht von z abhängt gilt nun, dass sich die Summe der folgenden beiden Integrale aufhebt:

$$\int_A \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 + \int_B \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_{B_1^2(0)} -(x^2 + y^2) d\mathcal{H}^2 + \int_{B_1^2(0)+(0,0,1)^\top} x^2 + y^2 d\mathcal{H}^2 =$$

$$- \int_{B_1^2(0)} x^2 + y^2 d\mathcal{H}^2 + \int_{B_1^2(0)} x^2 + y^2 d\mathcal{H}^2 = 0$$

Damit erhalten wir, dass wenn wir mit $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1\}$ den Zylinder bezeichnen, gilt

$$\int_{\partial Z} \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_M \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2$$

Um den Integralsatz von Gauß anwenden zu können müssen wir überprüfen ob

- Z eine offene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist; was klarerweise gilt
- $\mathcal{H}^2(\partial_s Z) = 0$ was gilt da $\partial_s Z = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 = 1\}$ und beide diese Mengen haben endliches eindimensionales Hausdorffmaß (genauer $\mathcal{H}^1(\text{Kreisrand}) = 2\pi$) und somit zweidimensionales Hausdorffmaß Null haben müssen ($\mathcal{H}^2(\text{Kreisrand}) = 0$).
- $\boldsymbol{F} : \bar{Z} \to \mathbb{R}^3 \in C(\bar{Z}) \cap C^1(Z)$, da $\boldsymbol{F}$ offenbar stetig ist und

$$D\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

  ist stetig.

Also gilt nun

$$\int_{\partial Z} \boldsymbol{F}^\top \cdot \nu d\mathcal{H}^2 = \int_Z div \boldsymbol{F} d\lambda^3 = \int_Z \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} d\lambda^3 = \int_Z y + z d\lambda^3$$

Zur Berechnung verwenden wir wieder den Transformationssatz

$$D := (0, 1) \times [0, 2\pi) \times (0, 1) \qquad \phi : D \to \mathbb{R}^3, (r, \theta, z) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)^\top \qquad \det d\phi = r$$

wobei D ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, ϕ ist eine injektive C^1-Abbildung und $Z = \phi(D)$. Damit folgt

$$\int_{\phi(D)} y + z d\lambda^3 = \int_D (r\sin(\theta) + z) r d\lambda^3 = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \sin(\theta) dz d\theta dr + \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 r z dz d\theta dr =$$

$$\int_0^1 r^2 \left(-\cos(\theta)\right)\big|_0^{2\pi} dr + 2\pi \int_0^1 r \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^1 dr = 0 + 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} r dr = \pi \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Beispiel 2

Angabe. *Sei $\boldsymbol{F}(x,y,z) := (xz, xy, z^2 - x)^\top$. Betrachte das Gebiet*

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, 0 < y < x+1, 0 < z < x+y\}.$$

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ durch den Rand von Ω.

Gesucht ist

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2$$

weshalb wir den Gauß'schen Integralsatz verwenden wollen. Daher prüfen wir zuerst die Bedingungen:

- Ω ist offen und beschränkt: offen ist aus der Definition klar, Beschränktheit folgt aus $\Omega \subseteq (0,1) \times (0,2) \times (0,3)$.
- $\mathcal{H}^2(\partial_s\Omega) = 0$, da $\partial_s\Omega$ aus 12 Kanten (und 7 Ecken) besteht (siehe Grafik TODO) und diese alle endliches eindimensionales Hausdorffmaß besitzen und daher $\mathcal{H}^2(\partial_s\Omega) = 0$.
- $\boldsymbol{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, da $\boldsymbol{F}$ offenbar stetig ist und

  $$D\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$$

  ist stetig.

Gemeinsam mit $div\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^3 \partial f_i/\partial x_i = x + z$ und dem Gauß'schen Integralsatz ergibt sich

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \int_\Omega div\boldsymbol{F} d\lambda^3 = \int_0^1 \int_0^{x+1} \int_0^{x+y} x + zdzdydx$$

$$\int_0^1 \int_0^{x+1} \int_0^{x+y} xdzdydx = \int_0^1 x \int_0^{x+1} x + ydydx = \int_0^1 x \left(x(x+1) + \frac{y^2}{2}\bigg|_0^{x+1} \right) dx =$$

$$\int_0^1 x \left(x^2 + x + \frac{(x+1)^2}{2} \right) dx = \int_0^1 x^3 + x^2 + \frac{x}{2}(x^2 + 2x + 1) dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}xdx = \frac{31}{24}$$

$$\int_0^1 \int_0^{x+1} \int_0^{x+y} zdzdydx = \int_0^1 \int_0^{x+1} \frac{(x+y)^2}{2} dydx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_x^{2x+1} u^2 dudx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u^3}{3}\bigg|_x^{2x+1} dx =$$

$$\frac{1}{6} \int_0^1 (2x+1)^3 - x^3 dx = \frac{1}{6} \left(\int_1^3 \frac{v^3}{2} dv - \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \frac{v^3}{4}\bigg|_1^3 - \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{8}$$

$$\implies \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{\nu} d\mathcal{H}^2 = \frac{31}{24} + \frac{13}{8} = \frac{35}{12}$$

Beispiel 3

Angabe. *Verifizieren Sie den Gauß'schen Integralsatz für das Gebiet*

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 - x^2 - y^2\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) := (x, x+y, x^2+z)^\top,$$

d.h., berechnen Sie die beiden Integrale und überprüfen Sie deren Gleichheit.

TODO

Beispiel 4

Angabe. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Sei $f \in C^2(A)$ eine reelle Funktion, sei $\boldsymbol{F} \in C^2(A;\mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie*

(i) $rot \nabla f = \mathbf{0}$,

(ii) $div rot \boldsymbol{F} = 0$

(i) Da die Reihenfolge bei Differenzieren von f egal ist ergibt sich

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} =: (f_1, f_2, f_3)^\top \qquad rot \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Sei $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, f_3)$, dann gilt

$$rot \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{div rot}\boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) =$$
$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} = 0$$