Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie Skript Felsenstein W2022

Ida Hönigmann

November 9, 2022

1 Produkträume und Maße

Auf dem kartesischen Produkt von Grundmengen

$$\Omega = \bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_i$$

wird eine Produkt-(Sigma)Algebra konstruiert, wobei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ Messräume sind. Es soll $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ in $(\Omega, \mathcal{A})$ eingebettet werden.

Def (Projektion)**.**

$$\pi_i : \Omega \mapsto \Omega_i \textit{ mit } \pi_i(\omega_1, ..., \omega_n) = \omega_i$$

Die Produktalgebra wird von den Projektionen erzeugt.

Definition 1 (Produktalgebra)**.**

$$\mathcal{A} := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i := \sigma(\pi_1, ..., \pi_n)$$

$$\textit{d.h. } \pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2) \cap ... \cap \pi_n^{-1}(A_n) \textit{ für } A_i \in \mathcal{A}_i$$

erzeugen diese Algebra (bzw. $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$*).*

Wenn $\mathcal{A}_i = \sigma(\mathcal{E}_i)$ erzeugt wird von $\mathcal{E}_i$, wird $\bigotimes \mathcal{A}_i$ von $\bigtimes \mathcal{E}_i$ erzeugt.

Satz 1 (1.PR)**.** *$\mathcal{A}_i = \sigma(\mathcal{E}_i)$ mit $\mathcal{E}_i \subset 2^{\Omega_i}$. Ω_i sei aus $\mathcal{E}_i$ monoton erreichbar ($E_{i,k} \nearrow \Omega_i$)*[a]*.*

$$\mathcal{E} = \{\bigtimes_{i=1}^{n} E_i, E_i \in \mathcal{E}_i\}$$

Dann gilt

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i = \sigma(\mathcal{E}).$$

[a]Man kann fordern, dass $\Omega_i \in \mathcal{E}_i$, dann ist es erfüllt.

Beweis Satz 1.PR. $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste Sigma-Algebra, sodass die Projektionen messbar sind: $\tilde{\mathcal{A}}$ sei Sigma-Algebra auf $\Omega = \bigtimes_i \Omega_i$.

π_i ist $\tilde{\mathcal{A}} - \mathcal{A}_i$ messbar $\iff \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$.

$\implies$: Alle π_i seien $\tilde{\mathcal{A}} - \mathcal{A}_i$ messbar, d.h. $\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$, wobei für $E_i \in \mathcal{E}_i$

$$\pi_i^{-1}(E_i) = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times E_i \times \Omega_{i+1} \times ... \times \Omega_n$$

Da

$$\underbrace{\bigtimes_{i=1}^{n} E_i}_{\in \mathcal{E}} = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(E_i) \subseteq \tilde{\mathcal{A}} \implies \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}.$$

$\Longleftarrow$: Es gelte $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$. Jedes Ω_i ist aus $\mathcal{E}_i$ monoton erreichbar mit $E_{i,k} \nearrow \Omega_i, k \to \infty$.

$$F_k = E_{1,k} \times E_{2,k} \times ... \times E_i \times ... \times E_{n,k} \nearrow \pi_i^{-1}(E_i)$$
$$\lim F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \pi_i^{-1}(E_i) \in \sigma(\mathcal{E}) \subset \tilde{\mathcal{A}}$$

Urbild vom Erzeuger in $\tilde{\mathcal{A}}$, $\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i) \subseteq \tilde{\mathcal{A}} \forall i$, alle π_i sind $\tilde{\mathcal{A}} - \mathcal{A}_i$ messbar.

Alle Projektionen $\sigma(\mathcal{E})$ messbar, also $\sigma(\pi_1, ..., \pi_n) \subset \sigma(\mathcal{E})$. Nach obigem setze $\tilde{\mathcal{A}} = \sigma(\pi_1, ..., \pi_n) \implies \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\pi_1, ..., \pi_n)$ also $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\pi_1, ..., \pi_n)$. □

Beberkung. *$\{A_1 \times ... \times A_n | A_i \in \mathcal{A}_i\}$ ist keine Sigma-Algebra, da nicht Vereinigungs-stabil.*

Die komponentenweise Behandlung im Produktraum ist anwendbar auf n-dim. Funktionen.

Folgerung.

$$f_i : \Omega_0 \mapsto \Omega_i, f = (f_1, ..., f_n) =: \otimes_i f_i$$
$$f : \Omega_0 \mapsto \bigtimes_i \Omega_i = \Omega$$

Dann gilt:

$$f \text{ ist } (\Omega_0, \mathcal{A}_0) \mapsto \underbrace{\bigotimes_{i=1}^{n} (\Omega_i, \mathcal{A}_i)}_{\text{Produktraum}} \text{ messbar} \iff f_i \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_i \text{ messbar}$$

Beweis Folgerung. $\implies$: Da $f_i = \pi_i \circ f$ und $\pi_i \otimes_j \mathcal{A}_j - \mathcal{A}_i$ messbar ist f_i als Verkettung messbar.

$\Longleftarrow$: $A \in \otimes \mathcal{A}_i$ Menge aus der Produktalgebra mit $A = \times_{i=1}^n A_i \leftarrow$ erzeugen $\otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$.

$$f^{-1}(A) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}_0$$

Diese Rechtecke erzeugen $\sigma(f) = \sigma(f_1, ..., f_n) \subseteq \mathcal{A}_0$ also ist $f \mathcal{A}_0 - \otimes \mathcal{A}_i$ messbar. □

Anwendung auf Borel-Algebra: $\mathcal{B}^k = \otimes_{i=1}^k \mathcal{B}$ erzeugt von den Rechtecken $\times_i (a_i, b_i]$. Die Lebesgue-Mengen werden nicht von den Produkten erzeugt: $\otimes_{i=1}^k \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}_k$.

Nicht alle Nullmengen von $\mathcal{B}^k$ sind durch die Produkte mit allen Nullmengen erzeugbar.

Def (Schnitt)**.** *Besondere Mengen (für Integralberechnungen) sind die Schnitte:*

$$A \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$$
$$A_{x_1} := \{x_2 \in \Omega_2 | (x_1, x_2) \in A\}$$
$$A_{x_2} := \{x_1 \in \Omega_1 | (x_1, x_2) \in A\}$$

Die Schnitte sind messbar.

Satz 2 (2.PR)**.** *$A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ messbar bez. Produktalgebra, dann ist $A_{x_1} \in \mathcal{A}_2$ und $A_{x_2} \in \mathcal{A}_1$ für alle x_1 bzw. x_2.*

Proof. x_1 sei fest. Betrachte $\mathcal{M} = \{A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 | A_{x_1} \in \mathcal{A}_2\}$. $\mathcal{M}$ ist Sigma-Algebra: $\Omega \in \mathcal{M}$, $(A_{x_1})^c = (A^c)_{x_1}$ und $\cup A_{x_i,1} = (\cup A_i)_{x_1}$.

Für die Erzeuger Mengen $A_1 \times A_2 \in \mathcal{E}$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$

$$(A_1 \times A_2)_{x_1} = \begin{cases} A_2, & x_1 \in A_1 \\ \emptyset, & x_1 \notin A_1 \end{cases}$$

also $(A_1 \times A_2)_{x_1} \in \mathcal{A}_2$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$ und $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{M}$, alle Mengen, alle x_1 erfüllen die Messbarkeit-Bedingungen. □

Die Abbildungen $x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1})$ sind messbare Abbildungen.

Satz 3 (3.PR)**.** *$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, auf $\mathcal{A}_2$ sei μ_2 ein sigma-endliches Maß auf $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$. Dann ist $x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1})$ eine $\mathcal{A}_1$ messbare Abbildung (entsprechendes gilt auch für $x_2 \mapsto \mu_1(A_{x_2})$).*

Proof. TODO □

Mit diesen Funktionen wird das Produktmaß erklärt.

Def (Produktmaß).

$$\mu\left(\bigtimes_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \mu_i(A_i)$$

Wenn $\Omega = \Omega_1^k$ *mit* $\mu_i = \mu$ *gilt*

$$\mu\left(\bigtimes_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \mu(A_i).$$

Dieses Maß ist eindeutig definiert, wenn μ_1, μ_2 sigma-endlich sind, dann sind die Funktionen $f_B(x_1)$ bzw. $f_B(x_2)$ die "Dichten" bezüglich den Randmaßen μ_1 bzw. μ_2. μ_1, μ_2 werden auch als marginale Maße bezeichnet.

Satz 4 (4.PR).

1. *μ_2 sei sigma-endlich. Dann definiert*

$$\mu(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1)$$

   das Produktmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

2. *Sind beide Maße μ_1,μ_2 sigma-endlich, dann ist μ eindeutig und*

$$\mu(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{\Omega_2} \mu_1(A_{x_2}) d\mu_2(x_2)$$

Proof. TODO □

Beispiel. *Insbesonders bei endlichem Maß anwendbar. X,Y stochastische Größen, dann wird eindeutig eine zweidim. Verteilung auf $\mathbb{R}^2$ durch $P[(X,Y) \in A \times B] := P[X \in A]P[Y \in B]$ Produktverteilung.*

Verallgemeinerung der Maße von Schnitten ist die Schnittfunktion.

Definition 2 (Schnittfunktion).

$$\begin{aligned} f : \Omega_1 \times \Omega_2 \mapsto \Omega' & \textit{ Dann heißt} \\ x_2 \mapsto f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2) & \ x_1\textit{-Schnitt} \\ x_1 \mapsto f_{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2) & \ x_2\textit{-Schnitt} \end{aligned}$$

von f. (messbare Funktion $\Omega_1 \times \Omega_2 \to (\Omega', \mathcal{A}')$).

Satz 5 (5.PR). *f sei messbar $(\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (\Omega', \mathcal{A}')$. Die Schnittfunktionen sind messbar:*

$$\begin{aligned} f_{x_1} & \textit{ ist messbar } (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \mapsto (\Omega', \mathcal{A}') \\ f_{x_2} & \textit{ ist messbar } (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \mapsto (\Omega', \mathcal{A}') \end{aligned}$$

Proof. TODO □

Mit den Funktionenschnitten lässt sich auch ein mehrdim. Integral "zerteilen".

Satz 6 (6.PR Satz von Fubini (-Tonelli)). *Produktraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \otimes_i(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, f messbar $\Omega \mapsto \mathbb{R}$, μ_i sigma-endlich. Das zweidimensionale Integral von f ist aufspaltbar*

$$\int f d\mu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f_{x_2}(x_1) d\mu_1 \right) d\mu_2$$

wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

- *$f \geq 0$: Dann ist $x_2 \mapsto \phi_2(x_2) = \int_{\Omega_1} f_{x_2} d\mu_1$ messbar $\mathcal{A}_2$ und $x_1 \mapsto \phi_1(x_1) = \int_{\Omega_2} f_{x_1} d\mu_2$ messbar $\mathcal{A}_1$*
- *f ist integrierbar, $\int f d\mu < \infty$: Dann sind f_{x_1} μ_2-integrierbar $[\mu_1]$ f.ü. und f_{x_2} μ_1-integrierbar $[\mu_2]$ f.ü.*
- *$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |f_{x_1}| d\mu_2 d\mu_1 < \infty$ oder $\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} |f_{x_2}| d\mu_1 d\mu_2 < \infty$: Daraus folgt f integrierbar.*

Proof. TODO □

Durch Iteration gilt die Fubini-Schnitt Konstruktion auch für mehrdimensionale $k \in \mathbb{N}$ Integrale: Wenn $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ messbar mit $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_n$

$$\int f d\mu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2 \times ... \times \Omega_n} f_{x_1} d\mu_2 \otimes ... \otimes \mu_k \right) d\mu_1(x_1)$$

Viele Folgerungen: Doppelreihen-Satz $\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij}$ Kriterien für Konvergenz

Folgerung (Maße mit Dichten bezüglich dem Produktmaß). *$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$*
ν sei absolut stetig bzgl. μ ($\nu \ll \mu$), es existiert ein $f = \frac{d\nu}{d\mu} \geq 0$ mit $\nu(A) = \int_A f d\mu$ (f integrierbar)
μ sei sigma-endlich, ν erzeugt ein $\nu_1 \ll \mu_1$ auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und ein $\nu_2 \ll \mu_2$ auf $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ mit den Dichten ϕ_1, ϕ_2.

$$A \in \mathcal{A}_1 : \nu_1(A_1) = \int_{A_1} \phi_1(x_1) d\mu_1 = \int_{A_1} \int_{\Omega_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2 d\mu_1$$

Beispiel. *2 dim SG mit Gleichverteilung auf dem Einheitskreis $P[(X,Y) \in K] = 1$. Dichte f bezgl. $\lambda^2 = \lambda_1 \otimes \lambda_1$. $f(x,y) = \frac{1}{\pi} 1_K$.*

$$\phi_1(x) = \int f_X(y) d\lambda = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} d\lambda(y) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

(Symmetrie: $\phi_2(y) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$)
Randverteilung ν_1 $P[X \in A] = \int_A \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} d\lambda(y)$
ν ist nicht das Produktmaß $\nu \neq \nu_1 \otimes \nu_2$ außer $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$.

Def (Ordinatenmenge, Graph). *Die Punkte unter einer positiven Funktion $f \geq 0$ heißt Ordinatenmenge $O_f = \{(x,y) | 0 \leq < \leq f(x)\}$ und der Graph ist $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in \Omega\}$.*

Für sigma-endliches Maß μ und f messbar, dann ist O_f eine bezüglich $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ messbare Menge und $\int f d\mu = (\mu \otimes \lambda)(O_f)$. Der Graph ist eine Nullmenge, $(\mu \otimes \lambda)(\Gamma_f) = 0$

1.1 ∞-dim. Produkträume

Die Konstruktion der ∞-dim. Produkt-Messräume ist der endl. dim. Konstruktion entsprechend. I sei Index-Menge,

$$\otimes_{i \in I} \mathcal{A}_i := \sigma(\pi_i, i \in I) \qquad \pi_i \text{... Projektion auf } \Omega_i$$

beispielsweise $\otimes_{i \in I} \mathcal{B}$ auf $\Omega = \mathbb{R}^I$ (Funktionenraum).

Def (Zylinder,Pfeiler). *$Z \subseteq \Omega^I$ heißt Zylinder, wenn $Z = \pi_j^{-1}(C) = C \times \Omega^{j^C}$ wobei $J \subseteq I$ eine endliche Teilindexmenge ist und C die endlich dim. Basis des Zylinders ist; und Pfeiler, wenn C ein Rechteck $\times_{i \in J} A_i$ ist.*

Auf den Pfeilern lässt sich das n-dim. Produktmaß erklären. $P^n(C) = \pi_{j \in J} P(A_j)$
Im abzählbar unendlichen Fall ist die Vorgangsweise ähnlich, wie im endl. dim. Fall:

Satz 7 (7.PR)**.** *X_i sei eine Folge von SGn auf $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ mit gegebener gemeinsamer Verteilung*

$$P_i(A) = P[X_j \in A_j, j \leq i, X_i \in A]$$

für $A_j \in \mathcal{A}_j$ und $A \in \mathcal{A}_i$. D.h. die gemeinsame Verteilung von $(X_1, ..., X_n)$ sind auf $(\times_i \Omega_i, \otimes_i \mathcal{A}_i)$ mit

$$P[(X_1, ..., X_n) \in A_n, X_i \in \mathbb{R}, i > n] = P[(X_1, ..., X_n) \in A_n]$$

also für Zylinder $Z = \pi^{-1}_{1,...,n}(C_n)$, $C_n \in \otimes_i \mathcal{A}_i$ gilt $P[Z] = P_n(Cn)$.
Wenn diese Wahrscheinlichkeitsverteilung verträglich sind, d.h. die Randverteilungen (bzw. alle Teilmengen endl.) eindeutig sind, lässt sich obiges Prinzip verallgemeinern.

Satz 8 (8.PR Satz von Kolmogoroff)**.** *content...*