קומבינטוריקה למדעי המחשב
תרגיל בית 3

בשאלות בהן מבקשים נוסחת נסיגה, תנו תנאי התחלה מספיקים ולא מיותרים, והסבירו את תשובותיכם.

1. נסמן ב־ $F(n)$ להיות מספר הדרכים לסדר n אנשים שונים בשורה.

   (א) מצאו נוסחת הנסיגה ותנאי ההתחלה עבור $F(n)$ כאשר $n \geq 1$.

   (ב) מצאו פתרון מפורש בעזרת שיטת ההצבות החוזרות.

   (ג) הוכיחו באינדוקציה את הפתרון שקיבלת בסעיף ב'.

2. נתונות n אבני דומינו, כל אחת בגודל 1×2, מהצורה: 

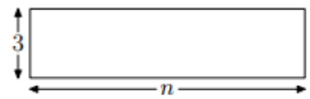
בכמה אופנים ניתן לרצף בעזרתן מלבן בגודל $2 \times n$, כאשר אין חשיבות למיקום המרצפות במלבן אלא רק לצבען? כלומר, שתי הדוגמאות הבאות מייצגות את אותו הריצוף:  ו־ 

3. עבור $n \geq 1$ מצא נוסחה רקורסיבית ותנאי התחלה עבור הבעיות הבאות.

   (א) מספר הדרכים לרצף אריח בגודל $1 \times n$ באמצעות לבנים מגודל 1×1, 1×2, 1×3.

   (ב) מספר הדרכים לרצף אריח בגודל $1 \times n$ באמצעות לבנים מגודל 1×1, 1×2, 1×3 כך שכל לבנה יכולה להופיע בשלושה צבעים: כחול, אדום או צהוב, ואין שתי לבנים עוקבות באותו הצבע.

   (ג) נסמן ב $T(n)$ את מספר האפשרויות לרצף משטח בגודל $3 \times n$ (ראה ציור) על ידי מרצפות בגודל 1×3, שצביעהן כחול, אדום או צהוב. שימו לב שמיקום הרצפות, ולא רק צביעהן, משנה. במילים אחרות, מיקום החריצים שבין המרצפות משנה. מצא נוסחת נסיגה ל־ $T(n)$ ותנאי התחלה המספיקים לפתרון הבעיה.



4. נתונות $n \geq 1$ קוביות זהות. זלמן מעוניין לבנות מהקוביות סדרת מגדלים. מגדל בסדרה מתאפיין אך ורק במספר הקוביות מהן הוא בנוי. שימו לב: יש סדר בין המגדלים אבל אין סדר בין הקוביות בכל מגדל.

(א) תנו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה נאותים עבור $F(n)$ שהוא מספר סדרות המגדלים השונות אותן יכול לבנות זלמן ־מ $n \geq 1$ קוביות? שימו לב: הסדרה אינה מכילה מגדלים ריקים.

(ב) פיתרו את נוסחת הנסיגה שקבלתם בסעיף א'. כלומר, תנו נוסחא ללא סכימה וללא רקורסיה.

(ג) ספקו הסבר קומבינטורי לתשובה שקבלתם בסעיף ב'.

5. נסמן ב־ $F(n,m)$ את מספר הדרכים לסדר את המספרים $1,2,\dots,n$ בשורה כך שמספר הפעמים שבו איבר גדול מקודמו הוא בדיוק m. מצא נוסחת הנסיגה ותנאי ההתחלה עבור $F(n,m)$ כאשר $n \geq 0$ ו $m \geq 0$.