

## קומבינטוריקה למדעי המחשב

### תרגיל בית 2

1. בסעיפים הבאים יש לתת תשובה עם שימוש בנוסחאות קומבינטוריות שנלמדו בכיתה. (תשובה מספרית כמו 25 לא תתקבל)  
מטילים 2 קוביות עם 6 פאות שונות. כמה הטלות יש כאשר:

(א) הקוביות זהות.

(ב) הקוביות שונות.

(ג) הקוביות שונות, ובקוביה שמאלית יצא מספר קטן ממש מקוביה ימנית.

(ד) הקוביות שונות, ותוצאות הקוביות שונות.

2. נתונים  $n$  ו- $k$  שלמים חיוביים.  
עבור כל אחת מהמשוואות בסעיפים הבאים ה- $X_i$  הם הינם משתנים המקבלים ערכים שלמים בלבד.

(א) כמה פתרונות שונים יש למשוואה:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_k = n$$

כאשר לכל  $i, 1 \leq X_i$

(ב) כמה פתרונות שונים יש למשוואה:

$$|X_1| + |X_2| + \dots + |X_k| = n$$

כאשר לכל  $i, 1 \leq |X_i|$

(ג) כמה פתרונות שונים יש למשוואה:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_k = n$$

כאשר לכל  $i, 0 \leq X_i$

וכמו כן בדיוק  $r$  מהמשתנים  $(X_1, \dots, X_k)$  שווים ל-0.

(ד) כמה פתרונות שונים יש לאי השוויון:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq n$$

כאשר לכל  $i, 0 \leq X_i$

(ה) כמה פתרונות שונים יש לאי השוויון:

$$|X_1| + |X_2| + \dots + |X_k| \leq n$$

3. מסדרים את המספרים  $1, 2, \dots, 10$  במעגל. בשלושת הסעיפים הבאים, הוכח או הפרך את הטענה:

(א) ישנו רצף של שלושה מספרים שסכומם לפחות 17.

(ב) ישנו רצף של שלושה מספרים שסכומם לפחות 18.

(ג) ישנו רצף של שלושה מספרים שסכומם לפחות 19.

4. נתונה קבוצה  $S$  בת עשרה אנשים שונים וידוע כי גילו של כל אחד הוא לפחות שנה ולכל היותר 100. הוכיחו כי קיימות ב- $S$  שתי תתי-קבוצות זרות כך שסכום הגילאים בתת-קבוצה אחת שווה לסכום הגילאים בתת-קבוצה השנייה.

5. במסיבה כל זוג אנשים הם או חברים זה של זה או זרים זה לזה. הוכח כי בכל מסיבה של 10 אנשים מתקיים לפחות אחד משני התנאים הבאים:

(א) יש 3 חברים (כל אחד מהשלושה חבר של כל אחד מהשלושה)

(ב) יש 4 אנשים שהם זרים לחלוטין (כל שניים מהם אינם חברים)

6. הוכח את השיוויון בשיטה אלגברית:

$$\sum_{i=2}^m (-1)^i \binom{m}{i} = m - 1$$

7. הוכח את השיוויון הבאה בשני אופנים:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 4^{n-i} = 5^n$$

(א) בשיטה אלגברית.

(ב) בשיטה קומבינטורית.

8. הוכיחו קומבינטורית את השיוויון הבא:

$$n \binom{n}{k} = \frac{n^2}{k} \binom{n-1}{k-1}$$