

קומבינטוריקה למדעי המחשב

תרגיל בית 1

הנחיות: הוכיחו את השאלות הבאות בעזרת בייקציה ללא מציאת המספרים המפורשים, כלומר באחת משתי הדרכים הבאות:

- להגדיר פונקציה, ולהוכיח שהיא חח"ע ועל.
 - להגדיר פונקציה ופונקציה הפוכה, ולהוכיח שכל אחת מהן חח"ע.
- בשתי השאלות הראשונות יש להוכיח את הביקציה פורמלית, ובשתי השאלות האחרונות מספיק להגדיר את הפונקציה ולהסביר בקצרה.
1. הוכיחו כי מספר האפשרויות לבחור k מספרים מתוך $\{1, 2, \dots, n\}$ כך שלא נבחרו זוג מספרים עוקבים שווה למספר המילים הבינאריות באורך n בהן מופיעים k אחדים בדיוק ואין בהן שני אחדים רצופים.
 2. יפעת ויוגב משחקים יחד בגן הילדים עם עוד $n - 2$ ילדים. הילדים בגן התעייפו מלשחק וכעת הם רוצים לשבת על ספסל בגן ולנוח. הוכיחו כי מספר האפשרויות להושבת הילדים בהן יפעת יושבת משמאל ליוגב (לא בהכרח בצמוד לו) שווה למספר האפשרויות בהן יפעת יושבת מימין ליוגב.
 3. יוחנן לוקח 3 קורסים הסמסטר: קומבינטוריקה, את"מ ומת"מ, והוא צריך לבחור בין קבוצות התרגול.

- לקומבינטוריקה 9 קבוצות תרגול.
- לאת"מ 10 קבוצות תרגול.
- למת"מ 10 קבוצות תרגול.

למזלו אף אחת מהקבוצות לא מתנגשת עם קבוצה אחרת. הוכיחו כי מספר האפשרויות של יוחנן לבחירת קבוצות תרגול שווה לכמות המספרים התלת ספרתיים (בבסיס עשר).

4. מגנוס קרלסן, אלוף העולם בשחמט, מתכנן את תלבושתו (מכנסיים וחולצה) לתחרות הבאה. יש לו בארון 8 חולצות ו-8 זוגות מכנסיים. הוכיחו כי מספר הדרכים בהן מגנוס יכול לבחור את תלבושתו שווה למספר המשבצות בלוח השחמט.

שאלה נוספת לא להגשה:

5. הוכיחו כי מספר הדרכים לחלק k כדורים זהים ל- n תאים שונים שווה למספר המילים הבינאריות באורך $k + n - 1$ בהן מופיעים $n - 1$ אחדים בדיוק.