1. מטילים 2 קוביות עם 6 פאות שונות, כמה הטלות יש כאשר:

א. **הקוביות זהות:** אין חשיבות לסדר כיוון ששתי הקוביות זהות(אם נקבל [1,2] או [2,1] אין הבדל). עם חזרות כיוון שמותר לקבל "דאבל"- אם יצא לנו כבר 3, מותר שיצא שוב 3.

לכן: *.*

*= (7!)/5!2! = 42/2 = 21.*

*.* ***הקוביות שונות:*** *יש חשיבות לסדר כיוון ששתי הקוביות שונות. עם חזרות(כמו בא').*

לכן:  *= .36 =*

*ג.* **הקוביות שונות, ובקובייה שמאלית יצא מספר קטן ממש מהקובייה הימנית*:*** *הקוביות שונות, לכן כמו בסעיף ב' סה"כ יש 36 הטלות.* מספר ההטלות האפשריות כאשר המספר בקוביות זהה הוא 6. לכן יש לנו 36-6=30 הטלות כאשר בקובייה השמאלית יצא מספר קטן ממש או גדול ממש מהקובייה הימנית. הפונקציה המתאימה הטלה כאשר בקובייה השמאלית מספר קטן ממש מהקובייה הימנית אל הטלה כאשר בקובייה השמאלית מספר גדול ממש מהקובייה הימנית היא בייקציה(מחליפים את מיקום הקוביות)*. לכן מספר ההטלות בשתי הקבוצות זהה ולכן התשובה לשאלה היא 30/2=15.*

*ד.* **הקוביות שונות, ותוצאות הקוביות שונות:** *כמו הפירוט בסעיף ג', התשובה היא  
 36-6=30.*

*2. א.* 

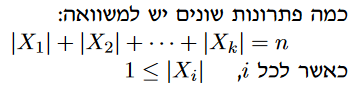
ראשית, "נכניס" לכל 1.

כעט אני מביטים על בעיה אחרת:

אנו יודעים שלמשוואה יש פתרונות אפשריים כאשר יכול להיות גם אפס.

יש לזכור שגם באגף ימין יש להוסיף .kלכן אחרי שהוכנסו 1 לכל , נפתור את המשוואה:

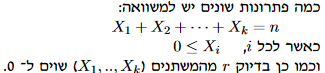
= = = .



ב.

בשונה מסעיף א', כל Xi יכול לקבל גם את המספר הנגדי של Xi מסעיף א', ולכן נתייחס לבעיה כך: ניקח מילה בינארית באורך k, אשר 1 ייצג מספר חיובי ב-Xi, כמו בסעיף א', ו-0 ייצג את הנגדי לו. למילה בינארית זו יש אפשרויות. לכן לכל פתרון מסעיף א' יש קומבינציות של מספרים חיוביים ושליליים באיברי הסכום.

לכן: .

ג. 

נבחר r מהמשתנים שווים לאפס. כעת שאר המשתנים גדולים או שווים ל -1, בדומה לבעיה מסעיף 2.א'. אך הפעם מספר המשתנים הוא k-r ולכן עבור על r נקבל:

יש לזכור שיש אפשרויות שונות כך שיהיו r אפסים במשוואה, ולכן:

ד. 

הבעיה שקולה לבעיה הבאה: יש לנו k שקים, ו- n כדורים. אנו צריכים להכניס את כל הכדורים לשקים, ו - מייצג את שק מספר i. כאשר מייצג את כל הכדורים שנשארו בחוץ. כך שסכום הכדורים בשקים + = כל הכדורים(n).

הסדר אינו חשוב(אני סופרים את **כמות** הכדורים), ויש חזרות(אפשר להכניס כמה כדורים לאותו השק\להשאיר כמה בחוץ). לכן: .

ה. 

עבור r אפסים במשוואה(כלומר Xi = 0) יש לנו בעיה הדומה לסעיף ב', אך יש לנו פחות משתנים- מספר המשתנים שלנו הוא k-r, ולכן : = מספר הפתרונות למשוואה כאשר יש לנו r אפסים במקום מסויים.

בדומה לסעיף ג', נזכור שיש אפשרויות למקם את האפסים במשוואה ולכן נקבל:

כמו כן, יכול להיות כל מספר אפסים במשוואה, ולכן נסכם:

3. כל מספר במעגל נספר 3 פעמים(הוא חלק מ3 רצפים סמוכים). סכום המספרים מ1 עד 10 הוא 55, נכפול ב-3 כיוון שכל מספר משתתף בשלושה רצפים ונקבל: 165.

יש לנו עשרה רצפים סמוכים במעגל, שאנו רוצים לבדוק שכל אחד מהם קטן מ17/18/19.

1. הסכום הממוצע של סכומי הרצפים הוא 165/10=16.5.  
   הסכומים הם סכומים של מספרים שלמים ולכן גם הם שלמים, כלומר על מנת שנקבל סכום ממוצע של 16.5 בהכרח יהיו לנו **סכומי רצפים גדולים מ16** ובהכרח יהיו לנו סכומי רצפים קטנים מ17. סכומי רצפים גדולים מ16 אומר שישנו רצף שלושה מספרים שסכומו לפחות 17.

עקרון שובך היונים: נחלק 165 ל10 רצפים, יהיה רצף עם סכום = 17.

1. נניח בשלילה שאין רצף השווה ל18, או גדול ממנו.

כמו בסעיף א', ראינו שיש קיום של רצף השווה 17 או גדול ממנו בהכרח, לפי ההנחה שלנו הוא שווה 17 ממש(הנחנו שלא גדול מ17, וראינו שהוא לפחות 17 לכן שווה 17).

כעת נוריד את הרצף 17 מהסכום הכולל :165-17=148  
נמשיך כך באופן דומה:

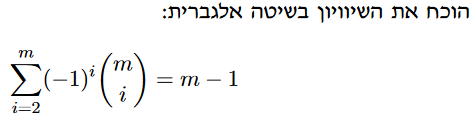
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| הסכום הכולל | נקבל ממנו שלפחות יש רצף גדול או שווה ל: | יונים חלקי שובכים |
| 165 | 17 | 165/10 |
| 148 | 17 | 148/9 |
| 131 | 17 | 131/8 |
| 114 | 17 | 114/7 |
| 97 | 17 | 97/6 |
| 80 | 16 | 80/5 |
| 64 | 16 | 64/4 |
| 48 | 16 | 48/3 |
| 32 | 16 | 32/2 |
| 16 | 16 | 16/1 |

קיבלנו כי במסגרת ההנחה שלנו, יש בהכרח 5 רצפים של 17 ועוד 5 רצפים של 16.

כעת, נבדוק אם אפשרי הדבר. נניח: a+b+c=17 (בה"כ, נוכל להתחיל גם מ16)  
כעת, נביט על המספר בעיגול, כיוון שהסכום הוא 16 או 17, וידוע כי a+b+c=17, האפשרות היחידה היא שהמספר בעיגול הוא a-1(הסכום הוא 16). ידוע כי (a-1)+b+c=16 ולכן באופן דומה, לא נוכל לקבל c+(a-1)+ **heart** =16, אלא רק 17, ולכן **הלב** יהיה שווה b+1.  
באופן דומה, נמשיך כך, המספר בצלב פלוס b+1 פלוס a-1 יהיה שווה 16, ולכן המספר בצלב הוא c-1.

בשלב הבא, באופן דומה, נקבל כי המספר בצורה המוזרה יהיה שווה a-1+1, כלומר a, וזוהי **סתירה**.

1. דוגמא :

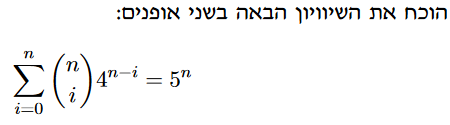
6.

נוסחת הבינום של ניוטון:

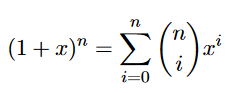
נקבע x=(-1), a=1:

כעת נחלץ מהסכום את האיבר הראשון והשני:

נעביר אגפים:



7.

1. **אלגברית:** נסמן k=n-i.

לפי מקרה פרטי של הבינום של ניוטון:

נציב ב i מהנוסחה את k שלנו. נציב ב- x את המספר 4:

נציב את k=n-i :

נזכור כי כיוון ששניהם שווים ל: .

ולכן:

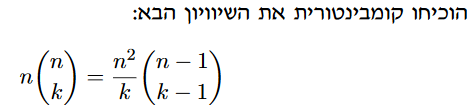
1. **קומבינטורית:**

הבעיה: נרצה לייצג מילה באורך n אשר כל אות בה היא מספר מהקבוצה {0,1,2,3,4}.

צד ימין: אין חשיבות לסדר, אך יש חזרות ולכן .

*צד שמאל: כעת נפתור את הבעיה בדרך אחרת: מספר האפסים(האות = 0) במילה יכול לנוע בין אפס ל-n.  
נביט על כל המקרה של I אפסים במילה, יש לנו אפשרויות שונות לכך. לכל אפשרות כזו נשלים את שאר המילה: האותיות יבחרו מהקבוצה {1,2,3,4} ויש לנו n-i אותיות לבחור ולכן ישנן אפשרויות שונות לכל מיקום שונה של i אפסים במילה.*

*נסכם את כל האפשרויות של אפסים במילה(אשר זרות זו לזו ולכן נסכם), מכמות האפסים ומיקומם, ואז לכל אפשרות נשלים למילה בת n אותיות ונקבל: .*

8.

הבעיה: אנו רוצים לבחור מכיתה בעלת n תלמידים k תלמידים לוועד. ובנוסף תלמיד בודד שיהיה נציג הכיתה בתחרות(ללא קשר לוועד).

צד שמאל: נבחר מתוך כיתה בעלת n תלמידים, k תלמידים לוועד. מספר האפשרויות הוא .

בנוסף, נבחר תלמיד אחד(בלי קשר לוועד) אשר יהיה נציג הכיתה. מספר האפשרויות הוא n.

אין קשר בין הבחירות ולכן יש לנו סה"כ: אפשרויות.

צד ימין: *כעת נפתור את הבעיה בצורה אחרת: נבחר תלמיד בודד מן הכיתה לוועדn) אפשרויות), וכעת נבחר מתוך שאר הכיתה המכילה n-1 תלמידים, k-1* תלמידים לוועד. מספר האפשרויות הוא .

יש לזכור כי יש n אפשרויות לבחירת התלמיד שממנו נתחיל ולכן נקבל אך יש לזכור כי יש לנו תוצאות כפולות, לדוגמא: במקרה ראשון התלמיד א' נבחר ראשון, ותלמיד ג' נבחר כחלק מהוועד לאחר מכן, ומקרה שני כאשר תלמיד ג' נבחר ראשון ולאחר מכן תלמיד א' נבחר לוועד. בשני המקרים התוצאה זהה, תלמיד א' וג' שניהם בוועד, סדר הבחירה אינו משנה. לכן נחלק ב- k שהוא מספר התלמידים בוועד:

בנוסף, נבחר תלמיד אחד(בלי קשר לוועד) אשר יהיה נציג הכיתה. מספר האפשרויות הוא n.