1. א. מה מספר הגרפים הפשוטים, שאינם מכוונים, עם nצמתים שונים?

**תשובה:** גרף פשוט הינו גרף ללא לולאות עצמיות וללא קשתות מקבילות.

נסמן את מספר הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים עם n צמתים שונים: f(n)

נחשב בעזרת רקורסיה: עבור n=1: צומת יחיד, יש גרף יחיד. f(1)=1.

נניח שאנו יודעים לחשב עבור n צמתים את f(n).

בעזרת ההנחה נחשב את f(n+1), כלומר נוסיף צומת לגרף.

כל פתרון שנמנה עכשיו הוא לא תלוי במספר הפתרונות f(n) הידוע לנו, לכן נכפול. מהצומת החדש יש לנו n קשתות חדשות שנוכל לחבר, אחת לכל צומת קיים, ולא יותר(כיוון שהגרף פשוט ואסור לולאות עצמיות או קשתות מקבילות). בנוסף גם נוכל שלא להוסיף כלל קשתות חדשות. לכן עבור כל פתרון מ f(n) נוכל למצוא  *פתרונות אפשריים חדשים.*

*נדמה למילה בינארית כך שעבור כל צומת קיים נסמן 1 אם קיימת קשת מהצומת החדש, ו-0 אם לא, יש פתרונות.*

*לכן:*

אנו מכירים פתרון עבור f(1) ולכן נבדוק כאשר k=n-1 :

ב. מה מספר הגרפים הפשוטים, שאינם מכוונים, עם n צמתים שונים בהם אין צמתים מבודדים? (צמתים מבודדים הם צמתים בעלי דרגה אפס)

**תשובה:** כמו בסעיף א', רק שהפעם בצעד האינדוקציה, כאשר אנו מוסיפים צומת חדש, איננו יכולים לבחור שלא להוסיף קשתות חדשות ממנה. לכן נדמה למילה בינארית באורך n שמכיל לפחות '1' אחד. כך שיש פתרונות לכך. נציב באופן דומה במשוואה ונקבל:

אנו מכירים פתרון עבור f(1) ולכן נבדוק כאשר k=n-1 :

ג. הוכיחו באמצעות בייקציה כי מספר הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים עם n צמתים שונים בהם אין צמתים מבודדים, שווה למספר הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים בהם אין צמתים שדרגתם n-1.

**תשובה:**

ניצור פונקציה f אשר התחום שלה הוא קבוצת כל הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים עם n צמתים שונים בהם אין צמתים מבודדים, והטווח שלה הוא קבוצת הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים בהם אין צמתים שדרגתם n-1.

נבחין כי הקשר בין כל שני צמתים הוא בינארי, כלומר יש קשר בניהם או שאין קשר בניהם. הפונקציה, לכל גרף בתחום, תמחק את הקשתות הקיימות ותוסיף קשתות היכן שלא היו קשתות.

נקבל פונקציה חח"ע ועל: לכל שני גרפים שונים בתחום נקבל שני גרפים שונים בתמונה. ולכל שני גרפים שונים בתמונה היו שני גרפים שונים בתחום שהובילו לכל גרף בתמונה. ניתן להביט על כך כמו מילה בינארית כאשר כל קשת מייצגת קשת בגרף, אנו פשוט החלפנו את האפסים באחדים.

לכן מספר הגרפים בתחום שווה למספר הגרפים בתמונה.

2.נסמן ב־ f(n) את מספר הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים, בעלי nצמתים הממוספרים 1,2,…..,n  
בהם דרגת כל צומת היא .2תנו משוואת נסיגה עם תנאי התחלה מספיקים ולא מיותרים ל- f(n) נמקו את תשובתכם.

**תשובה:** בסיס האינדוקציה: n=3. כל צומת בעל שתי קשתות לשאר הצמתים. קיים גרף יחיד לכן:f(3)=1.

\*\* רצף צמתים- הגדרת עזר: נשים לב כי דרגת כל צומת הוא 2, לכן נוכל לשים לב שלכל צומת חייבת להיות 'קשת כניסה' ו'קשת יציאה' ולכן נוכל להציג את הגרף באמצעות רצף מספרים אשר כל אחד מייצג צומת בגרף לדוגמא (13421) מייצג : קשת בין 1-3, קשת בין 3-4, קשת בין 4-2, קשת בין 2-1 וקיבלנו שלכל צומת בגרף 2 קשתות כלומר דרגה 2.

נניח כי אנו יודעים את המספר הנדרש של עבור f(n-1).

נוסיף צומת ונחשב בעזרת ההנחה את f(n): נניח שאנו יודעים את f(n-1), כעת יש לנו צומת חדש שעלינו לדאוג שיהיה מדרגה 2, ובו זמנית כל שאר הצמתים יהיה בדרגה 2 גם הם. מה שנעשה הוא שעבור כל פתרון ב f(n-1) נוכל להכניס את צומת מספר n לרצף הצמתים בין כל שני מספרים נתונים. כך שעבור על פתרון יש לנו n-1 פתרונות נוספים. לכן:

נציב k=n-3 :

\*\* רצף הצמתים- הערה: נשים לב כי דרגת כל צומת הוא 2, לכן נוכל לשים לב שלכל צומת חייבת להיות 'קשת כניסה' ו'קשת יציאה' ולכן נוכל להציג את הגרף באמצעות רצף מספרים אשר כל אחד מייצג צומת בגרף לדוגמא (13421) מייצג : קשת בין 1-3, קשת בין 3-4, קשת בין 4-2, קשת בין 2-1 וקיבלנו שלכל צומת בגרף 2 קשתות כלומר דרגה 2.

.3יהא ) G(V; Eגרף סופי לא מכוון וקשיר. הוכיחו כי הטענות הבאות שקולות:  
א. G אוילרי מעגלי.  
ב. קיימת קבוצה של מעגלים )לאו דווקא פשוטים,( כך שכל קשת ב־ Gשייכת בדיוק למעגל אחד ומופיעה בו בדיוק פעם אחת.  
ג. לכל תת קבוצה X של צמתי ,G מספר הקשתות בין X ל ) V n Xכלומר המשלים של (Xהוא זוגי.