1. א. מה מספר הגרפים הפשוטים, שאינם מכוונים, עם nצמתים שונים?

**תשובה:** גרף פשוט הינו גרף ללא לולאות עצמיות וללא קשתות מקבילות.

נסמן את מספר הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים עם n צמתים שונים: f(n)

נחשב בעזרת רקורסיה: עבור n=1: צומת יחיד, יש גרף יחיד. f(1)=1.

נניח שאנו יודעים לחשב עבור n צמתים את f(n).

בעזרת ההנחה נחשב את f(n+1), כלומר נוסיף צומת לגרף.

כל פתרון שנמנה עכשיו הוא לא תלוי במספר הפתרונות f(n) הידוע לנו, לכן נכפול. מהצומת החדש יש לנו n קשתות חדשות שנוכל לחבר, אחת לכל צומת קיים, ולא יותר(כיוון שהגרף פשוט ואסור לולאות עצמיות או קשתות מקבילות). בנוסף גם נוכל שלא להוסיף כלל קשתות חדשות. לכן עבור כל פתרון מ f(n) נוכל למצוא  *פתרונות אפשריים חדשים.*

*נדמה למילה בינארית כך שעבור כל צומת קיים נסמן 1 אם קיימת קשת מהצומת החדש, ו-0 אם לא, יש פתרונות.*

*לכן:*

אנו מכירים פתרון עבור f(1) ולכן נבדוק כאשר k=n-1 :

**דרך נוספת לפתרון(ללא אינדוקציה):**

יש לנו n צמתים שונים, מכל צומת נוכל להוציא n-1 קשתות(לולאה עצמית אינה אפשרית בגרף פשוט, ובין זוג צמתים תהיה לכל היותר קשת אחד) ויש לנו n צמתים. אנו רוצים לבדוק כמה גרפים כאלו קיימים, נבנה מילה בינארית באורך מספר צמדי הצמתים הקיימים בגרף. נסמן קשת קיימת ב1, וקשת שאינה קיימת(כלומר זוג צמתים אשר לא קשורים בקשת ישירה) ב-0. ואז מצאנו שיש n-1 קשתות אפשריות מכל צומת, כפול n צמתים נקבל: n(n-1) קשתות קיימות. כיוון שהגרף לא מכוון נחלק ב-2 : . כעת נבדוק מה מספר האפשרויות לגרפים כאלו, יש לנו מילה בינארית באורך ולכן :

ב. מה מספר הגרפים הפשוטים, שאינם מכוונים, עם n צמתים שונים בהם אין צמתים מבודדים? (צמתים מבודדים הם צמתים בעלי דרגה אפס)

**תשובה:** נביט על המילה הבינארית של קשתות שהגדרנו בסעיף א'. לכל צומת קיימים n-1 אינדקסים המייצגים קשתות מאותה הצומת אל שאר הצמתים. כעת נרצה למצוא כמה גרפים פשוטים, שאינם מכוונים עם n צמתים שונים בהם יש צומת מבודד אחד לפחות יש.

נכניס בכוונה 0 בכל n-1 האינדקסים של צומת n, ובכך נבטיח שיש צומת מבודד. נשים לב שכאשר הכנסנו 0 בקשת בין הצומת המבודד לאחר, אנחנו גם מכניסים 0 באותה הקשת בין הצומת האחר לצומת המבודד. סה"כ מאורך המילה המקורית החסרנו 2\*(n-1) אינדקסים(שכבר יש בהם 0. ולכן יש:

אפשרויות לכך.

אנו מחפשים גרפים בהם אין צמתים מבודדים ולכן נחסר את התוצאה הזו מהתוצאה של סעיף א ונקבל:

ג. הוכיחו באמצעות בייקציה כי מספר הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים עם n צמתים שונים בהם אין צמתים מבודדים, שווה למספר הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים בהם אין צמתים שדרגתם n-1.

**תשובה:**

ניצור פונקציה f אשר התחום שלה הוא קבוצת כל הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים עם n צמתים שונים בהם אין צמתים מבודדים, והטווח שלה הוא קבוצת הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים בהם אין צמתים שדרגתם n-1.

נבחין כי הקשר בין כל שני צמתים הוא בינארי, כלומר יש קשר בניהם או שאין קשר בניהם. הפונקציה, לכל גרף בתחום, תמחק את הקשתות הקיימות ותוסיף קשתות היכן שלא היו קשתות.

נקבל פונקציה חח"ע ועל: לכל שני גרפים שונים בתחום נקבל שני גרפים שונים בתמונה. ולכל שני גרפים שונים בתמונה היו שני גרפים שונים בתחום שהובילו לכל גרף בתמונה. ניתן להביט על כך כמו מילה בינארית כאשר כל קשת מייצגת קשת בגרף, אנו פשוט החלפנו את האפסים באחדים.

לכן מספר הגרפים בתחום שווה למספר הגרפים בתמונה.

2.נסמן ב־ f(n) את מספר הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים, בעלי nצמתים הממוספרים 1,2,…..,n  
בהם דרגת כל צומת היא .2תנו משוואת נסיגה עם תנאי התחלה מספיקים ולא מיותרים ל- f(n) נמקו את תשובתכם.

**תשובה:** בסיס האינדוקציה: n=3. כל צומת בעל שתי קשתות לשאר הצמתים. קיים גרף יחיד לכן:f(3)=1.

\*\* רצף צמתים- הגדרת עזר: נשים לב כי דרגת כל צומת הוא 2, לכן נוכל לשים לב שלכל צומת חייבת להיות 'קשת כניסה' ו'קשת יציאה' ולכן נוכל להציג את הגרף באמצעות רצף מספרים אשר כל אחד מייצג צומת בגרף לדוגמא (13421) מייצג : קשת בין 1-3, קשת בין 3-4, קשת בין 4-2, קשת בין 2-1 וקיבלנו שלכל צומת בגרף 2 קשתות כלומר דרגה 2.

נסמן את הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים בעלי n צמתים הממוספרים 1,2,…,n בהם דרגת כל צומת היא 2 כמו מעגלי תמורות , אשר לא מכילים איבר שנשלח לעצמו(לולאה פנימית) ולא מכילים מעגלים של זוגות(טרנספוזיציות).

נניח כי אנו יודעים את המספר הנדרש של עבור f(n-1).

נוסיף צומת ונחשב בעזרת ההנחה את f(n): נניח שאנו יודעים את f(n-1), כעת יש לנו צומת חדש שעלינו לדאוג שיהיה מדרגה 2, ובו זמנית כל שאר הצמתים יהיו בדרגה 2 גם הם. מה שנעשה הוא שעבור כל פתרון ב f(n-1) נוכל להכניס את צומת מספר n לרצף הצמתים בין כל שני מספרים נתונים. כך שעבור על פתרון יש לנו n-1 פתרונות נוספים. לכן:

נציב k=n-3 :

.3יהא G(V,E) גרף סופי לא מכוון וקשיר. הוכיחו כי הטענות הבאות שקולות:  
א. G אוילרי מעגלי.  
ב. קיימת קבוצה של מעגלים (לאו דווקא פשוטים), כך שכל קשת ב־ G שייכת בדיוק למעגל אחד ומופיעה בו בדיוק פעם אחת.  
ג. לכל תת קבוצה X של צמתי ,G מספר הקשתות בין X ל- V/X (כלומר המשלים של X) הוא זוגי.

**א' 🡨 ג':**

G אוילרי מעגלי ולכן קיים בו מעגל אוילרי- כלומר מעגל העובר בכל צמתי הגרף וכל קשת בגרף מופיעה בו בדיוק פעם אחת. אנו יודעים כי דרגת כל הצמתים זוגית. נוכיח כי לכל תת קבוצה X שנבחר יהיו מספר זוגי של קשתות.

בסיס: עבור X מכיל צומת אחד, יש לנו מספר זוגי של קשתות הרי דרגת הצומת היא 2.

אם נוסיף ל X צומת שאין לX כרגע קשת אליו, אז יתווספו לנו 2 קשתות חדשות, ועדיין נהיה עם מספר זוגי.

אם נוסיף ל X צומת שיש ל X קשת אליו, אז נחסר קשת אחת שמקודם נחשבה לקשת 'יוצאת' בין X לבין הצומת החדש, ונוסיף רק קשת אחת בין הצומת החדש אל V/X.

אם נוסיף ל X צומת שיש ל X שתי קשתות אליו, אז נחסר שתי קשתות מהמצב הקודם.

בכל מקרה נשאר עם מספר זוגי של קשתות.

**א' 🡨 ב':**

G אוילרי מעגלי ולכן קיים בו מעגל אוילרי- כלומר מעגל העובר בכל צמתי הגרף וכל קשת בגרף מופיעה בו בדיוק פעם אחת. לכן נביט על קבוצה בעלת מעגל אחד, שהוא המעגל האוילרי, ובו כל קשת שייכת בדיוק למעגל אחד ומופיעה בו בדיוק פעם אחת.

**ג' 🡨 א':**

נבחר תת קבוצה X כאשר X מכיל צומת יחיד, מספר הקשתות בין X ל V/X הוא זוגי, וזוהי בעצם דרגת הצומת. נעשה באופן דומה לכל צומת בגרף(נבחר אותה להיות X) וכל נקבל שכל צומת בגרף מדרגה 2 ולכן הגרף הוא אוילרי.

**ב' 🡨 ג':**