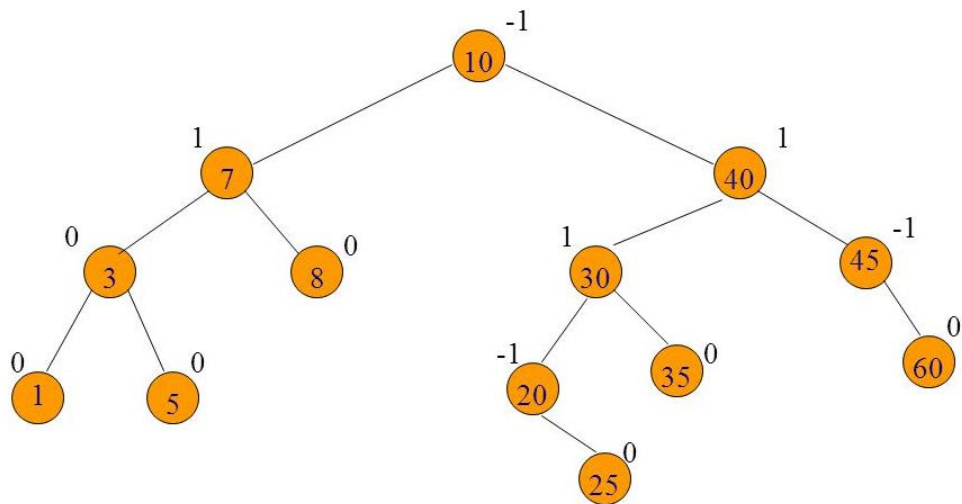


## עצי AVL

Height-Balance Property	לכל צומת $v$ בעץ $T$ , הגבהים של הבנים של $v$ נבדלים לכל היותר ב-1
AVL Tree	עץ חיפוש בינארי מאוזן
AVL Interface	עץ AVL תומך בפעולות הבאות בזמן $O(\log n)$ : Insert, search, delete, maximum, minimum, predecessor, successor
AVL Height	גובהו של עץ AVL המאחסן $n$ מפתחות הוא $O(\log n)$ .

### דוגמה לעץ AVL



גורם האיזון של צומת – ההפרש שבין גובה תת-העץ השמאלי לגובה תת-העץ הימני.

עץ AVL הוא עץ חיפוש בינארי שבו גורם האיזון של כל צומת הוא 0, 1 או -1.

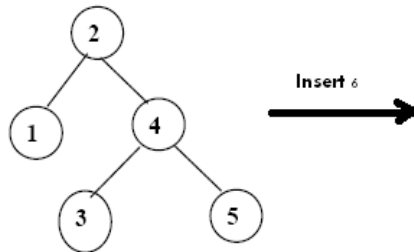
תכונה זו מבטיחה כי העץ יהיה מאוזן, ולכן ניתן להכניס ולהוציא ממנו איברים בסיבוכיות זמן של  $O(\log n)$ .

### שאלה 2

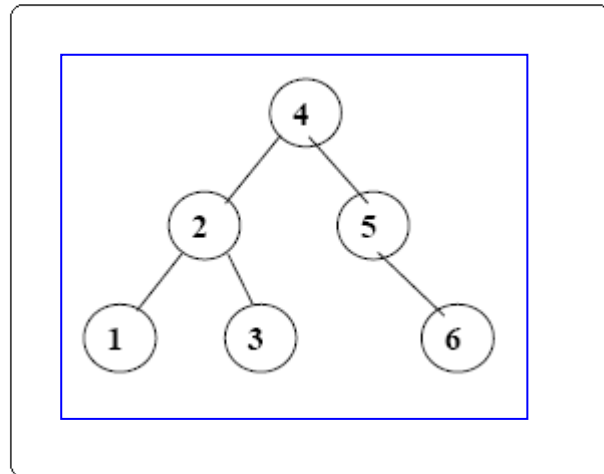
בשאלה זו תתבקש לבצע פעולות על עץ AVL. בכל סעיף נתון עץ AVL ופעולה עליך לבצע על העץ. יש לבצע את הפעולה על העץ ולתקנו לפי הצורך (אם הופרו תכונותיו כעץ AVL). עליכם לעבוד לפי האלגוריתמים שנלמדו בכיתה.

תשובתך צריכה להיות ציור של העץ (כולו!) לאחר שביצעת את הפעולה והתיקונים (אם נדרשו).  
צייר את תשובתך על דף טיוטא, ולאחר שאתה בטוח, העבר אותה לאזור המיועד לכך בדף הבחינה.

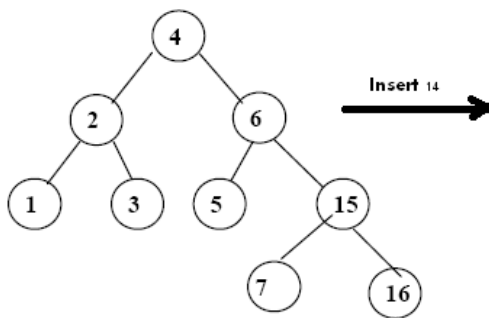
א. הכנס צומת חדש בעל ערך מפתח 6 לעץ הבא:



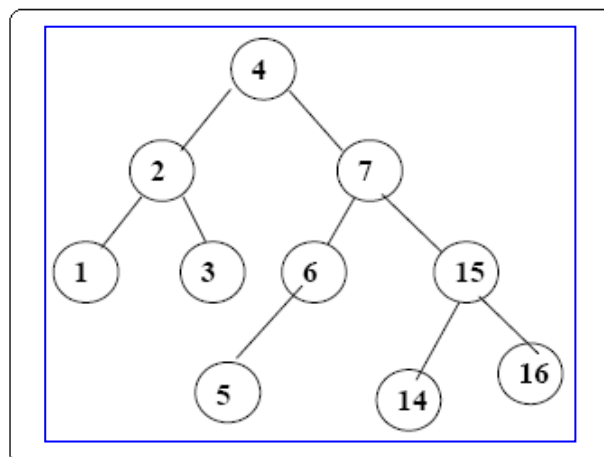
Insert 6 →



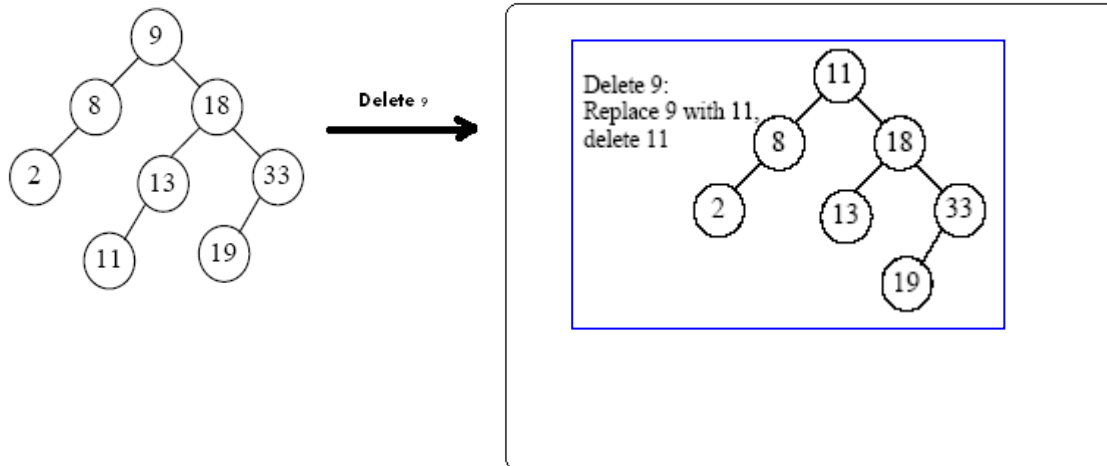
ב. הכנס צומת חדש בעל ערך מפתח 14 לעץ הבא:



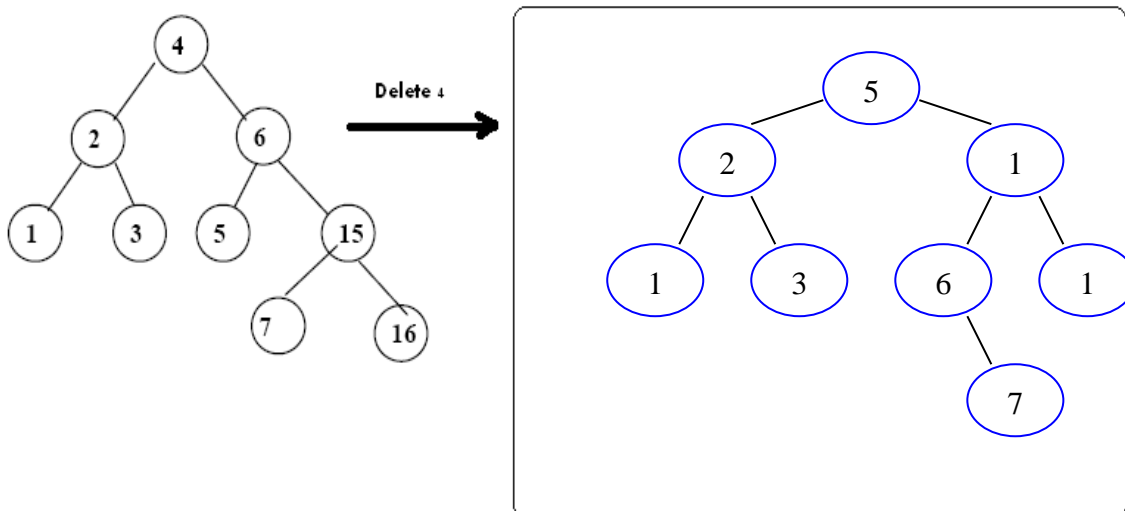
Insert 14 →



ג. מחק את הצומת בעל ערך המפתח 9 מהעץ הבא:

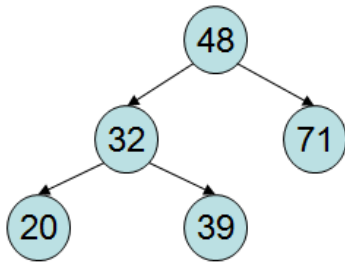


ד. מחק את הצומת בעל ערך המפתח 4 מהעץ הבא:



**שאלה 3**  
**הכנסה – דוגמא**

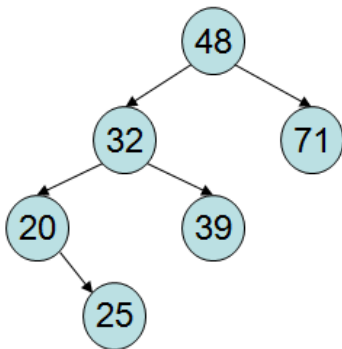
נתון עץ AVL הבא:



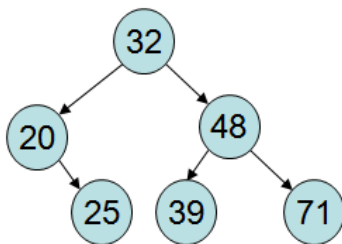
הכנס לעץ את המפתחות (משמאל לימין):

25, 75, 62, 28, 50, 7, 18

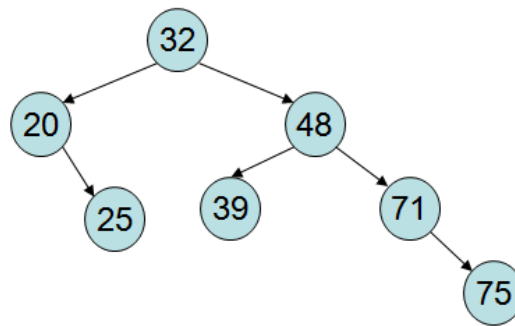
**הכנסת 25**



האיזון הופר בצומת 48 (הפך ל- +2) ולכן נבצע עליו רוטציה ימנית (גלגול LL).

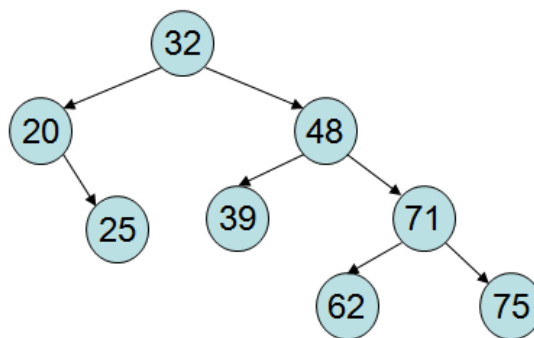


### הכנסת 75



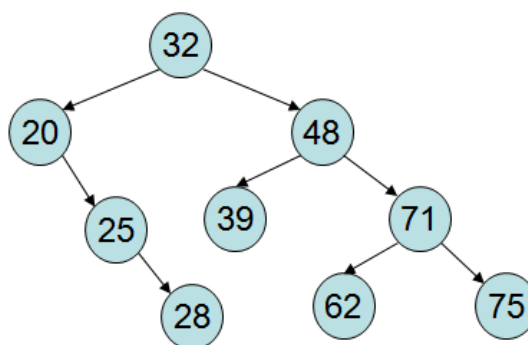
לא הופר האיזון של אף צומת ולכן אין צורך לבצע גלגול.

### הכנסת 62

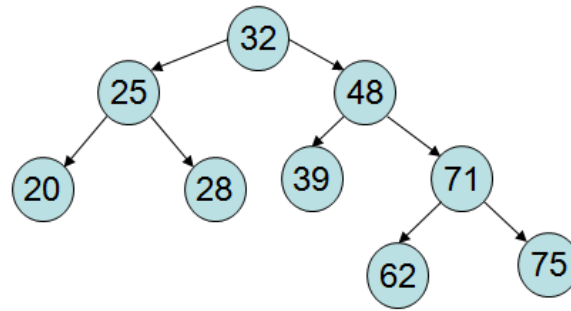


גם עכשיו לא היתה הפרת איזון של אף צומת.

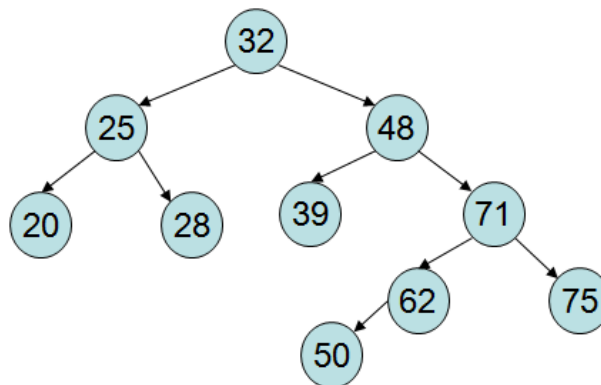
### הכנסת 28



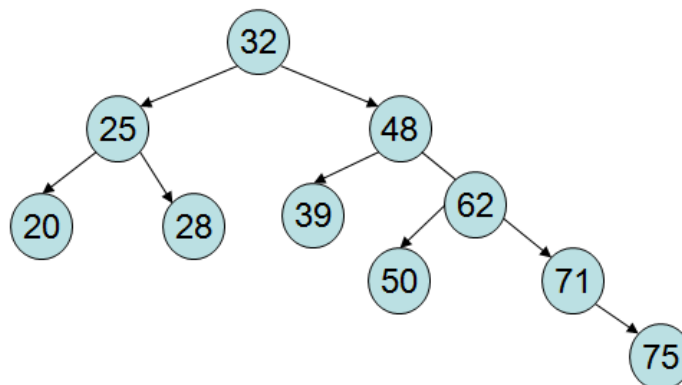
הופר האיזון של הצומת 20 (הפך להיות -2), ולכן נבצע עליו רוטציה שמאלית (גלגול RR).



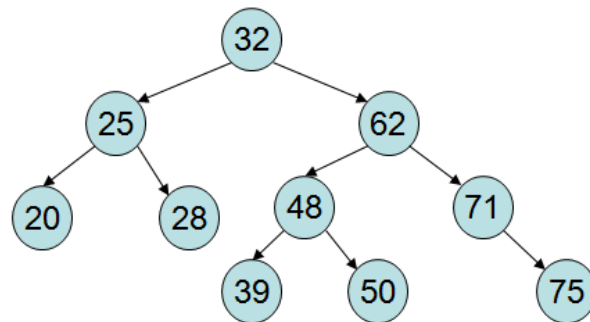
הכנסת 50



במקרה זה הופר האיזון בצומת 48 (הפך להיות -2).  
 אנחנו במקרה של גלגול RL. לכן עלינו לבצע רוטציה שמאלית ל-71 ולאחר מכן רוטציה ימנית ל-48.  
 תחילה נבצע רוטציה שמאלית ל-71:



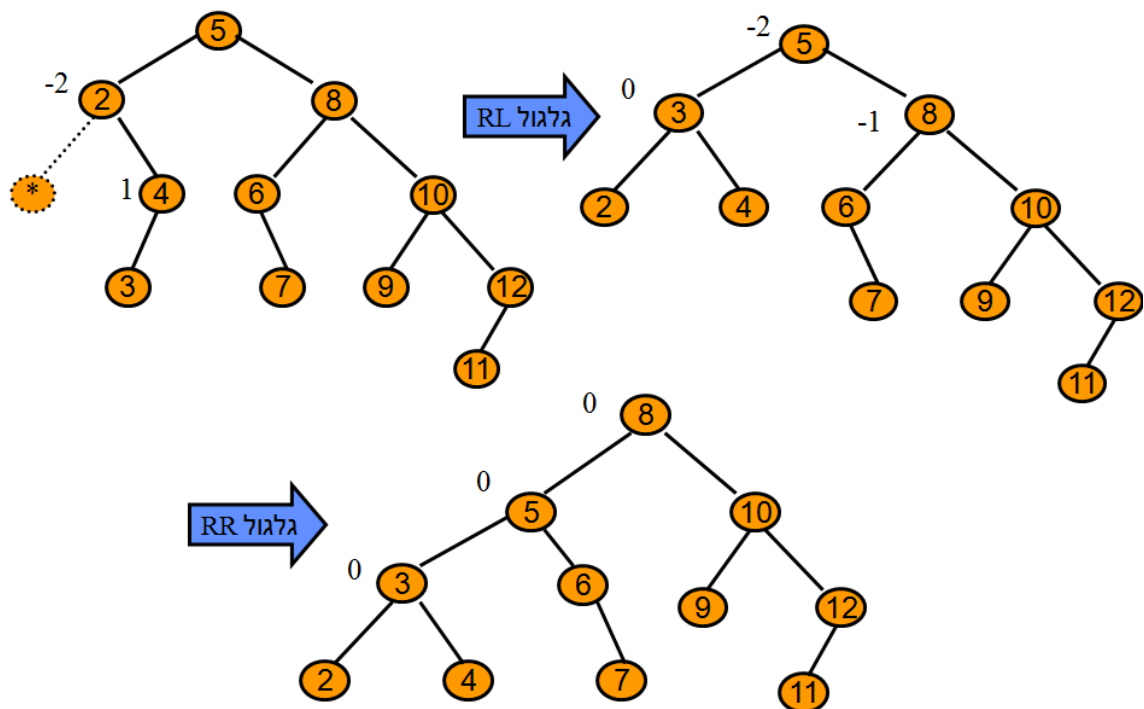
עתה נבצע רוטציה ימנית ל-48:



#### שאלה 4 (מבחן 2015 סמסטר ב' מועד א')

הציגו עץ חיפוש AVL בגובה 4, כך שהוצאת אחד מצמתיו יהיה כרוך בשתי פעולות רוטציה. מהו הצומת וכיצד מתבצעת ההוצאה?

#### פתרון



### שאלה פתוחה 2 (20 נקודות)

הציעו מבנה נתונים השומר מספרים **ממשיים** באופן שמקנה חשיבות לערך **השלם התחתון** שלהם ומאפשר לתמוך בפעולות הבאות:

$\text{Find}(i)$ : מחזירה true אם קיים במבנה הנתונים מספר ממשי כלשהו  $x$  כך ש  $\lfloor x \rfloor = i$

$\text{Delete}(i)$ : מוחקת ממבנה הנתונים את ה- $x$  האחרון שנכנס כך שמתקיים  $\lfloor x \rfloor = i$

$\text{Insert}(x)$ : מוסיפה את  $x$  למבנה.

יעילות כל פעולה צריכה להיות  $O(\log k)$  במקרה הגרוע, תחת ההנחה שבזמן הפעולה קיימים  $n$  איברים, ומספר הערכים השלמים התחתונים השונים הינו  $k$ . תארו את מבנה הנתונים, ורשמו כיצד מתבצעת כל פעולה.

**פתרון:** עץ חיפוש  $AVL$  כאשר שדה המפתח הוא החלק השלם של מספר. כאשר בכל צומת בעץ מחסנית השומרת את המספרים שהוכנסו.

$\text{Find}(i)$  פנייה לצומת בעץ ששדה המפתח שלו הוא  $i$ . והחזרת  $\text{IsEmpty}(S)$  למחסנית בצומת.

$\text{Delete}(i)$  - פנייה לצומת בעץ ששדה המפתח שלו הוא  $i$ . וביצוע  $\text{Pop}(S)$  למחסנית בצומת.

$\text{Insert}(x)$  - פנייה לצומת בעץ ששדה המפתח שלו הוא  $\lfloor x \rfloor$ . וביצוע  $\text{Push}(S, x)$  למחסנית בצומת.

### שאלה פתוחה 2 (20 נקודות)

נתון מערך  $A$  בגודל  $n$  המכיל מספרים טבעיים כולל חזרות.

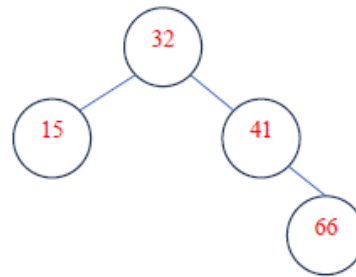
ידוע כי קיימים במערך  $O(\log n)$  מספרים שונים.

תארו (בעברית מובנית) אלגוריתם יעיל למיון המערך. מה סיבוכיות זמן הריצה שלו?



#### שאלה מספר 4:

נתון עץ AVL הבא:



כמה פעולות רוטציה יש לבצע לצורך הכנסת האיברים (משמאל לימין): 57, 90, 35, 39.  
הערה: אם הכנסה מסוימת של איבר דורשת שתי פעולות רוטציה יש להוסיף 2 לסך הרוטציות.

1. 6
2. 4
3. 3
4. 5

#### שאלה מתוחה 1 (25 נקודות)

א. (10 נק') נתונים שני עצי AVL עם  $n$  קודקודים. תארו אלגוריתם למיזוג שני העצים לעץ AVL אחד בסיבוכיות זמן ריצה של  $O(n)$ .

#### תשובה:

מבצעים סריקת in-order של העצים לקבלת מערך ממויין.  $O(n)$

ממזגים את שני המערכים למערך ממויין.  $O(n)$

בניית עץ AVL מהמערך ע"י בחירת איבר האמצע כשורש והפעלה רקורסיבית של האלגוריתם על תת המערך שמשמאל לאיבר האמצע (בן שמאל) ועל תת המערך שמימין לאיבר האמצע (בן ימין).  $O(n)$ .

#### שאלה 6 (מבחן 2016 סמסטר א' מועד א')

הציעו מבנה נתונים עבור מספרים טבעיים התומך בפעולות הבאות בסיבוכיות זמן ריצה  $O(\log n)$ :

- הכנסת מספר
- מחיקת מספר
- החזרת מספר המספרים במבנה שהם בתחום  $[a, b]$ .

#### פתרון

נשתמש בעץ חיפוש בינרי AVL הכולל בכל צומת שדה "מספר צאצאי הצומת" (נקרא לו  $size[x]$ ), נניח שמספר זה כולל את הצומת עצמו.

הכנסה והוצאה כולל עדכון  $+1$  או  $-1$  של השדה הנוסף עבור צמתי האבות הקדמוניים.  
עתה נמצא את מספר האיברים שהם קטנים מ- $a$  ומספר האיברים קטנים מ- $b$  בעזרת השדה הנוסף והחזרת  
ההפרש ביניהם.

ניתן למצוא את מספר האיברים שקטנים מ- $a$  בסיבוכיות זמן ריצה לוגריתמית באופן הבא:

$\text{CountLessThan}(x, a)$

```
1 if  $x \neq \text{nil}$ 
2   then if  $\text{key}[x] < a$ 
3     then return  $\text{size}[\text{left}[x]] + 1 + \text{CountLessThan}(\text{right}[x], a)$ 
4     else return  $\text{CountLessThan}(\text{left}[x], a)$ 
```

זמן הריצה של השגרה הוא  $O(\log n)$  כיוון שבכל קריאה רקורסיבית יורדים רמה אחת בעץ, וגובה העץ  
הוא  $O(\log n)$ .

באופן דומה, אפשר למצוא את מספר האיברים שקטנים מ- $b$  גם כן ב-  $O(\log n)$ .