פרויקט תפ"י 2

קבוצה 43

מגישים:

עידן דיוה - 208385930
יאיר דוד - 316281450

חלק א'- חלק תיאורטי

<u>הגדרת הבעיה:</u>

לפנינו בעיית איזון קווי ייצור בה נדרש לשבץ את הפעילויות בקו ייצור בודד ללא תחנות כפולות / במקביל.

<u>הקלט לבעיה:</u>

1 זמני פעילויות הקלט הינו מסוג $INTEGER$ בלבד.

2 טבלת קדימויות.

3. מספר התחנות בקו הייצור - K.

הפלט הנדרש: שיבוץ אופטימאלי/יוריסטי של הפעילויות ל- K תחנות אשר ממזער את זמן המחזור,

כלומר ממקסם את קצב הייצור.

<u>משימה :1 הוכיחו שהבעיה קשה שייכת לקבוצת NP השלמה:</u>

1. **הבנת בעיית הזימון והמרה לגרסת החלטה:**
בבעיית האיזון שלנו, נתון לנו מספר התחנות K וטבלת הקדימויות וזמני פעילות הקלט t. במצב האידיאלי זמן המחזור יתאים לנו בדיוק חלקי מספר התחנות ולא יהיו לנו אילוצי קדימויות. כלומר:

$$c=\frac{\sum_{j=1}^{n} t_j}{k}$$

2. **נבחר את בעיית העזר:**

הבעיה שנבחר הנה בעיית החלוקה.

תזכורת – בעיית החלוקה: נתונים n איברים: $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, כך שמתקיים $B=\sum a_j$. האם קיימת חלוקה לשתי תתי קבוצות: A_1 ו-A_2 כך ש:

$$A_1 \cap A_2=\phi, A_1 \cup A_2=A$$

ובנוסף:

$$\sum_{a_j \in A_1} a_j=\sum_{a_j \in A_2} a_j=B/2$$

3. נבנה מקרה פרטי שיעזור לנו להפחית את הבעיה הידועה כקשה לבעיה שלנו:

תחת ההגדרות של המקרה הפרטי נגדיר:

זמני הפעילות של כל פעילות כ- $a_j = t_j$ לכל j. נקבע גם שסכום כל $n = h$. בנוסף שסכום כל זמני הפעילויות $\sum t_j = 2B$. בנוסף נבחר מקרה פרטי שבו $K = 2$, ללא אילוצי קדימויות ובמצב האידיאלי ללא זמני בטלה ולכן:

$$B=\frac{2B}{k}=c=\frac{\sum_{j=1}^{h} t_j}{k}$$

נבדוק אם נמצא סידור, כך שבשתי תחנות שכל אחת מהן בזמן של B נוכל להכניס את כל הפעילות שלנו כל אחת בזמן של C.
במקרה הפרטי שלנו, אין קדימויות, ונדרוש ש $B \leq C$.

נראה שכן לבעיית החלוקה, גורר כן לבעיית האיזון שלנו:
אם יש פתרון לבעיית החלוקה זה אומר שיש לנו שתי תתי קבוצות A_1 וA_2 . כך ש-

$$\Sigma_{j \epsilon A_1} t_j = \Sigma_{j \epsilon A_2} t_j = B$$

ולפיכך נשבץ את K התחנות שלנו כאשר תת קבוצה A_1 תשובץ לתחנה הראשונה A_2 לשנייה. כך נקבל שיבוץ אופטימלי כאשר בכל תחנה זמן מחזור $C = B$ וללא זמני בטלה.
כלומר התשובה לבעיית האיזון היא כן!

נראה שלא לבעיית החלוקה גורר לא לבעיה האיזון שלנו:
אם אין פתרון לבעיית החלוקה נקבל שתי תתי קבוצות A_1 וA_2 כך ש-

$$\Sigma_{j \epsilon A_1} t_j = B - \varepsilon \qquad \Sigma_{j \epsilon A_2} t_j = B + \varepsilon$$

ובכך נקבל זמן מחזור מקסימלי שהוא: $C = B + \varepsilon > B$. לכן לא נוכל לשבץ את הפעילות של $\mathrm{K} = 2$ תחנות. כלומר התשובה לבעיית האיזון היא לא!

לסיכום:
הראינו שהמקרה הפרטי של הבעיה, היא בעיה קשה (משום שעל מנת לפתור אותו נהיה חייבים לפתור את בעיית החלוקה הידועה כקשה) => הבעיה כולה היא קשה.
הראינו שבעיית ההחלטה היא בעיה קשה=> בעיית האופטימיזציה השקולה שלנו היא בעיה קשה.

<u>משימה :2 הצגה של לפחות 2 נוסחאות מסודרות לחישוב חסם תחתון (LB) לערך הפתרון האופטימלי:</u>

נבחר להציג 2 נוסחאות שנלמדו בשיעורי הקורס:

$$LB_1(c) = \left\lceil \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j}{k} \right\rceil$$

אנו יודעים כי במצב האידיאלי אין זמני בטלה ובנוסף נצליח לשבץ את כלל הפעילויות בK תחנות נתונות.
כאשר נרצה לשבץ את זמני הפעולות אנו נתייחס אליהם כשלמים ונדאג שאכן השיבוץ יצלח על ידי עיגול מעלה של הפלט שיתקבל מהנוסחה.

$$LB_2(c) = max t_j$$

תמיד נרצה לוודא שזמן המחזור שלנו הוא שווה לפחות לגוב הארוך ביותר, אחרת לא נוכל לשבץ אותו לאף תחנה. לכן הוא מהווה גם כן חסם תחתון.

לסיום החסם התחתון של הבעיה כולה הוא:

$$LB(c) = \max\{LB_1(c), LB_2(c)\}$$

<u>משימה 3: ניסוח מסודר של הבעיה כבעיית תכנות לינארי</u>

פרמטרים:

k- מספר התחנות, בקו הייצור. (נתון מראש).

n- מספר הפעילויות שיש לשבץ בקו ייצור בודד. (הנחה: ללא תחנות כפולות/במקביל. בנוסף, יש אילוצי קדימויות בין הפעילויות).

t_j -משך ביצוע של פעילות j, $(j = 1,..,n)$.

c- זמן מחזור.

משתני החלטה:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{אם פעילות } j \text{ תשובץ לתחנה } i \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

המטרה:

למצוא שיבוץ אופטימלי/ יוריסטי של הפעילויות ל- k תחנות אשר ממזער את זמן המחזור c, כלומר ממקסם את קצב הייצור .

פונקציית המטרה:

$$Min\ C$$

אילוצים:

1.אילוץ שיגדיר שכל גוב ישובץ פעם אחת:

$$\sum_{i=1}^{k} X_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

2. האילוץ שהזמן מחזור בכל תחנה קטן או שווה לזמן מחזור:

$$c_{\max} \geq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot t_j \quad , \forall i = 1,2, \dots, k$$

3. אילוצי קדימויות:

$$\sum_{i=1}^{k} iX_{il} \leq \sum_{i=1}^{k} iX_{im} \qquad \forall l > m$$

4. אילוצי טווח ערכים:

$$x_{i,j} = \{0,1\}$$

$$i = 1, \dots, k$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$C \geq 0$$

<u>משימה 4:הצגת פסאודו-קוד מסודר (הרץ הזמן פולינומיאלי) על מנת לפתור את המקרה הפרטי של בעיית האיזון לעיל כאשר זמני הפעילויות זהים:</u>

1. מציאת חסם תחתון לבעיה הנתונה: $LB(c) = t_1 \cdot \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil^+$ (n = מספר הגובים) . נתון לנו כי זמן ביצועי הגובים t_j של כל הגובים שווים. לכן במקום לסכום כל גוב בנפרד , נמצא רק את זמן הביצוע של הגוב הראשון ונכפול במספר הגובים. מכיוון שנרצה להבטיח שיבוץ, נבצע קודם את חילוק מספר הגובים בתחנות ונעגל מעלה ורק לאחר מכן נכפיל בזמן הביצוע . $O(1)$
2. נקבע ש $\mathrm{C = LB}$ $O(1)$
3. נפתח k תחנות (נתון) $O(k)$
4. נשבץ את הגובים לפי הסדר הנתון מהראשון לאחרון עד שיגמרו הגובים:$O(n)$
   - 4.1. נרוץ על i תחנות: אם בתחנה הנוכחית $\mathrm{T}imeLeft - t_j \le 0$ נשבץ אותה ונגדיר $\mathrm{T}imeLeft = \mathrm{c} - t_j$ $O(1)$ (בשלב הראשון t_j = 0)
   - 4.2. אחרת, נעבור לתחנה הבאה $(\mathrm{i} + 1)$ ונאתחל את $\mathrm{T}imeLeft = \mathrm{c}$ ונחזור ל4.1 $O(1)$

הערה: אין התייחסות למקרה שבו לא נצליח לבצע את השיבוץ אחרי לולאה אחת כשנעבוד בדרך הזאת, מכיוון שאנו יודעים שדבר זה תמיד יעבוד. כמו כן, לאחר ששאלנו הבנו שאין אנו צריכים להוכיח זאת ומספיק הסבר סביר.

הסבר:

למדנו בכיתה על נוסחה שבודקת זמן בטלה אפשרי

$$\mathrm{I} = \mathrm{kc} - \sum_{j=1}^{n} t_j$$

כאשר נעבוד בצורה הזאת ונשבץ את הפעילות בזמן מחזור בגדול של LB שלנו, נקבל זמן בטלה במקרה הכי גרוע שבו $\mathrm{k} = 1$ אפס וכל השאר גדול מאפס. במקרה שבו K=1 , נוכל לשבץ את כל התחנות בתחנה היחידה שיש לנו, והLB שווה לכל $\sum_{j=1}^{n} t_j$.

בכל מצב שבו $k \ge 2$, תמיד יהיה לנו יתרה בזמן הבטלה. היתרה תמיד תהיה גדולה שווה ליתרה של עוד גוב אחד מה שיבטיח לנו שתמיד יהיה מקום לעוד גוב. וכאשר ה$k \ge 3$ ישאר מקום לעוד 2 גובים וכן הלאה. לכן, במצב הנתון שבו כל המספרים שלמים והגובים שווים נדע שבניסיון הראשון שלנו לשבץ בגודל של ה $LB(c)$ שבנינו אנו נצליח.

זמן הסיבוכיות הכולל:

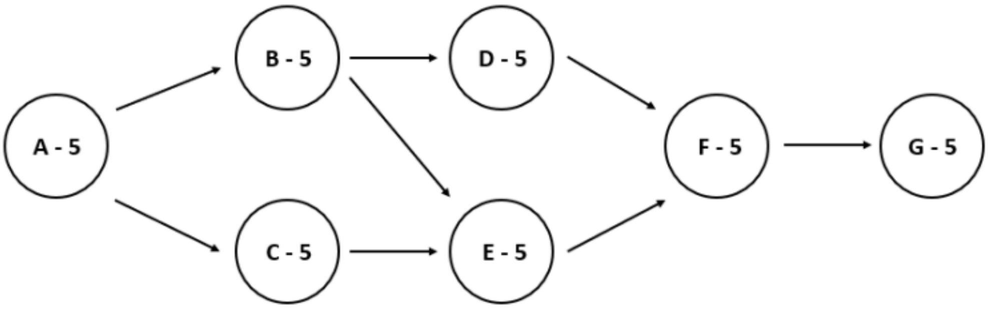
<u>ניתוח לוקאלי:</u> $O(n + k)$.

<u>ניתוח גלובאלי:</u>

- אנו מניחים שאם היו יותר תחנות מגובים לא היה לנו בעיית שיבוץ, יתרה מזאת שכאן אין לנו בעיה מהותית מבחינת אילוצי הקדימויות מכיוון שכל הזמנים שווים אז אנו עובדים לפי הסדר. לכן נוכל להגיד כי הוא גדול ממש ולרשום $O(n)$
- הוכחה בדרך מתמטית:

$$O(n + k) \le \mathrm{O(n + n)} = O(2n) = O(n)$$

כעת נדגים שימוש באלגוריתם בעבור הקלט הבא-רשת הקדימויות ומשך כל פעילות נתונים וכן $\mathrm{k} = 3$:



נעבוד לפי השלבים:

1. נתון לנו $\mathrm{n} = 7$:

$$LB(c) = t_1 \cdot \left\lceil \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} \right\rceil^+ = 5 \cdot \left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil = 15$$

2. $\mathrm{C} = \mathrm{LB} = 15$
3. נפתח תחנות כנתון לנו $\mathrm{k} = 3$:
4. נתחיל לשבץ לפי הסדר:

$$\mathrm{T}imeLeft = \mathrm{c} - t_j = 15 - 0 = 15$$

נתחיל בשיבוץ:

האם ניתן לשבץ את גוב A בתחנה 1?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 15 - 5 = 10 \geq 0$
כן! נשבץ את A בתחנה 1, ונגדיר $TimeLeft = 10$

האם ניתן לשבץ את גוב B בתחנה 1?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 10 - 5 = 5 \geq 0$
כן! נשבץ את B בתחנה 1, ונגדיר $TimeLeft = 5$

האם ניתן לשבץ את גוב C בתחנה 1?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 5 - 5 = 0 \geq 0$
כן! נשבץ את C בתחנה 1, ונגדיר $TimeLeft = 5$

האם ניתן לשבץ את גוב D בתחנה 1?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 0 - 5 = -5 \geq 0$
לא! נעבור לתחנה 2 נאפס את $TimeLeft = 15$ ונחזור ל4.1
האם ניתן לשבץ את גוב D בתחנה 2?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 15 - 5 = 10 \geq 0$
כן! נשבץ את D בתחנה 2, ונגדיר $TimeLeft = 10$

האם ניתן לשבץ את גוב E בתחנה 2?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 10 - 5 = 5 \geq 0$
כן! נשבץ את E בתחנה 2, ונגדיר $TimeLeft = 5$

האם ניתן לשבץ את גוב F בתחנה 2?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 5 - 5 = 0 \geq 0$
כן! נשבץ את E בתחנה 2, ונגדיר $TimeLeft = 0$

האם ניתן לשבץ את גוב G בתחנה 2?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 0 - 5 = -5 \geq 0$
לא! נעבור לתחנה 3 נאפס את $TimeLeft = 15$ ונחזור ל4.1
האם ניתן לשבץ את גוב G בתחנה 3?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 15 - 5 = 10 \geq 0$
כן! נשבץ את G בתחנה 3, ונגדיר $TimeLeft = 10$

סיימנו לרוץ על כל הגובים.

קיבלנו פתרון אופטימלי ל$k = 3$ הנתון כי $LB = c$ והפלט הוא:

A-5 B-5 C-5	D-5 E-5 F-5	G-5

משימה 5: רשת קדימויות מסוג CHAIN

משימה 5א: נראה אלגוריתם פולינומיאלי לפתרון בעיית איזון קווי יצור כפי שנלמדה בכיתה (מציאת מינימום K עבור C נתון) עבור המקרה הפרטי בו רשת הקדימויות הינה מסוג CHAIN:

מתוך תרגול 7 שקופית 29:

נשים לב שבתהליך הייצור הסדרתי (טורי) מדובר בזמן מחזור נתון, ומה שרוצים למזער הוא K.

לא מדובר בבעיה קשה משום שבמקרה הזה יש רק אופציה אחת לשיבוץ – נמלא את התחנה הנוכחית על פי סדר הפעולות עד שלא נותר מקום, ואז נעבור לתחנה הבאה.

האלגוריתם:

- עבור כל פעילות j=1…n
- אם בתחנה הנוכחית יש לפחות t_j יח' זמן "פנויות" (כלומר שובצו עד $C-t_j$)
  - ← שבץ את הפעילות בתחנה זו.
  - אחרת ← פתח תחנה חדשה ושבץ את הפעילות בתחנה זו.

סיבוכיות: O(n) ← **<u>אם מצאנו אלגוריתם פולינומיאלי לבעיה , הבעיה "קלה".</u>**

משימה 5ב:בהתבסס על האלגוריתם שמצאנו נראה אלגוריתם הפותר את הבעיה הדואלית (מציאת מינימום C עבור K נתון) כאשר הרשת הנתונה הינה רשת מסוג CHAIN :

<u>האלגוריתם:</u>

1. נמצא את $LB(c)$, בצורה שהסברנו עליה במשימה 2. $O(n)$
2. נגדיר - $c = LB(c)$. $O(1)$
3. כעת נגדיר את $UB(c)$: כ- $UB(c) = \sum_{j=1}^{n} t_j$ $O(n)$
4. נפתח k תחנות (נתון) $O(k)$
נגדיר:
$Counter = 0,\quad Kcheak = 1$ $O(1)$: (מכיוון שאנו מסודרים כבר בשרשרת, משמע אנו מסודרים לפי הקדימויות):
5. נשבץ את הגובים לפי הסדר הנתון מהראשון לאחרון עד שיגמרו הגובים:$O(n)$
5.1 נרוץ על i תחנות: אם בתחנה הנוכחית $TimeLeft - t_j \leq 0$ וגם $Kcheak \leq k$ נשבץ את הגוב הנוכחי ונעדכן את:

$TimeLeft = c - t_j, \text{Counter} = \text{Counter} + 1$, ונעבור לגוב הבא $O(1)$ (בשלב הראשון $t_j = 0$)

5.2 אחרת, נעדכן את $Kcheak = Kcheak + 1$ ונאתחל את $TimeLeft = c$ ונחזור ל5.1 $O(1)$

5.3 אם בתחנה הנוכחית $TimeLeft - t_j \le 0$ וגם $Kcheak > k$, נגדיל את $c = c + 1$ ונחזור ל5 $O(1)$

6. נבדוק האם $\text{Counter} = n$ אם כן יש לנו שיבוץ ונסיים את הלולאה. $O(1)$

כעת נדגים שימוש באלגוריתם בעבור הקלט הבא-רשת הקדימויות CHAIN ומשך כל פעילות נתונים וכן $\mathbf{k = 3}$:

$$\text{A - 1} \longrightarrow \text{B - 4} \longrightarrow \text{C - 2} \longrightarrow \text{D - 5} \longrightarrow \text{E - 3} \longrightarrow \text{F - 2}$$

1.

$$LB_1(c) = \left\lceil \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{17}{3} \right\rceil = 6$$

$$LB_2(c) = max t_j = 5$$

$$LB(c) = \max\{LB_1(6), LB_2(5)\} = 6$$

2. $C = 6$

3. $UB(c) = \sum_{j=1}^{n} t_j = 17$

4. נפתח $k = 3$ תחנות .

נגדיר:

$Kcheak = 1$, $\text{Counter} = 0$ $O(1)$:

5. **נתחיל בשיבוץ:**

האם ניתן לשבץ את גוב A בתחנה 1?

נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 6 - 1 = 5 \ge 0$ וגם $1 \le 3$

כן! נשבץ את A בתחנה 1, ונעדכן:

$TimeLeft = 5, \text{Counter} = 1$

האם ניתן לשבץ את גוב B בתחנה 1?

נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 5 - 4 = 1 \ge 0$ וגם $1 \le 3$

כן! נשבץ את B בתחנה 1, ונעדכן:

$TimeLeft = 1, \text{Counter} = 2$

האם ניתן לשבץ את גוב C בתחנה 1?

נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 1 - 2 = -1 \ge 0$ וגם $1 \le 3$

לא!

ונעדכן:

$Kcheak = 2$ ונאתחל את $TimeLeft = 6$

האם ניתן לשבץ את גוב C בתחנה 2?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 6 - 2 = 4 \geq 0$ וגם $2 \leq 3$
כן! נשבץ את C בתחנה 2, ונעדכן:
$TimeLeft = 4, \text{Counter} = 3$
האם ניתן לשבץ את גוב D בתחנה 2?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 4 - 5 = -1 \geq 0$ וגם $2 \leq 3$
לא!
ונעדכן:
$Kcheak = 3$ ונאתחל את $TimeLeft = 6$
האם ניתן לשבץ את גוב D בתחנה 3?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 6 - 5 = 1 \geq 0$ וגם $3 \leq 3$
כן! נשבץ את D בתחנה 3, ונעדכן:
$TimeLeft = 1, \text{Counter} = 4$

האם ניתן לשבץ את גוב E בתחנה 3?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 1 - 3 = -2 \geq 0$ וגם $3 \leq 3$
לא!
ונעדכן:
$Kcheak = 4$ ונאתחל את $TimeLeft = 6$
האם ניתן לשבץ את גוב D בתחנה 4?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 6 - 3 = 3 \geq 0$ וגם $4 \leq 3$
לא!
נגדיל את $c = 7$

ונתחיל את התהליך מההתחלה כאשר $c = 7$:

האם ניתן לשבץ את גוב A בתחנה 1?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 7 - 1 = 6 \geq 0$ וגם $1 \leq 3$
כן! נשבץ את A בתחנה 1, ונעדכן:
$TimeLeft = 6, \text{Counter} = 1$

האם ניתן לשבץ את גוב B בתחנה 1?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 6 - 4 = 2 \geq 0$ וגם $1 \leq 3$
כן! נשבץ את B בתחנה 1, ונעדכן:
$TimeLeft = 2, \text{Counter} = 2$

האם ניתן לשבץ את גוב C בתחנה 1?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 2 - 2 = 0 \geq 0$ וגם $1 \leq 3$
כן! נשבץ את C בתחנה 1, ונעדכן:
$TimeLeft = 0, \text{Counter} = 3$

האם ניתן לשבץ את גוב D בתחנה 1?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 0 - 5 = -5 \geq 0$ וגם $2 \leq 3$
לא!
ונעדכן:
$Kcheak = 2$ ונאתחל את $TimeLeft = 7$
האם ניתן לשבץ את גוב D בתחנה 2?
נבדוק את התנאי: $TimeLeft = 7 - 5 = 2 \geq 0$ וגם $2 \leq 3$
כן! נשבץ את D בתחנה 2, ונעדכן:
$TimeLeft = 2, \text{Counter} = 4$

האם ניתן לשבץ את גוב E בתחנה 2?

נבדוק את התנאי: $\text{T}imeLeft = 2 - 3 = -1 \geq 0$ וגם $2 \leq 3$
לא!
ונעדכן:
$Kcheak = 3$ ונאתחל את $\text{T}imeLeft = 7$
האם ניתן לשבץ את גוב E בתחנה 3?
נבדוק את התנאי: $\text{T}imeLeft = 7 - 3 = 4 \geq 0$ וגם $3 \leq 3$
כן! נשבץ את E בתחנה 3, ונעדכן:
$\text{T}imeLeft = 4, \text{Counter} = 5$

האם ניתן לשבץ את גוב F בתחנה 3?
נבדוק את התנאי: $\text{T}imeLeft = 4 - 2 = 2 \geq 0$ וגם $3 \leq 3$
כן! נשבץ את F בתחנה 3, ונעדכן:
$\text{T}imeLeft = 2, \text{Counter} = 6$

6. נבדוק האם $n = 6$ כן יש לנו שיבוץ ונסיים את הלולאה.

סיימנו לשבץ את כל הפעילויות, הפתרון האופטימלי שמצאנו הוא K=3, c=7:

תחנה 3	**תחנה 2**	**תחנה 1**
E-3 F-2	D-5	A-1 B-4 C-2