

5. Equações Diferenciais Ordinárias

baseado no texto de Alexandre Almeida, Cálculo II, fev. 2018, pp. 51–92, e versões anteriores de slides de Cálculo II

Isabel Brás

UA, 28/5/2019

Cálculo II – Agrup. IV 18/19

Resumo dos Conteúdos

- 1 Diferencial de uma função
- 2 EDO – Introdução, Conceitos e Terminologia
- 3 Problemas de Valores Iniciais e Problemas de Valores na Fronteira
- 4 Equações de variáveis separáveis
- 5 Equações Diferenciais Homogéneas
- 6 EDO Exatas
- 7 EDO Redutíveis a Exatas, usando fatores integrantes
- 8 EDO Lineares de Primeira Ordem
- 9 EDO redutíveis a EDO linear de 1.^a ordem: Equações de Bernoulli
- 10 EDO Lineares de Ordem Arbitrária
 - EDO lineares com coeficientes constantes
 - Problemas de Cauchy

Diferencial de uma função real de uma variável real

Reta Tangente/Linearização em torno de um ponto:

$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $x_0 \in \text{int}(D)$. A reta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (x_0, f(x_0))$ tem equação $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. A função L definida por

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

cujo gráfico é a reta tangente, é a chamada **linearização de f em x_0** .

Diferencial: Como L é uma boa aproximação local de f , para x próximo de x_0 , considerando $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\Delta x := x - x_0$,

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x.$$

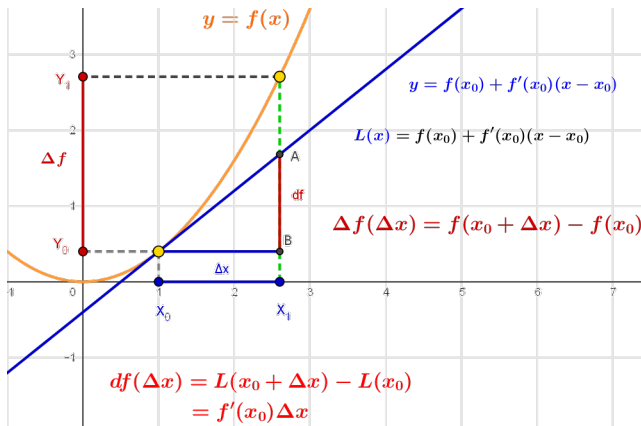
Representando Δx por dx , (para valores próximos de zero),

o **diferencial de f em x_0** é

$$df = f'(x_0)dx.$$

(ver interpretação geométrica no slide seguinte e/ou em [GeoGebra](#), agradecimentos a Ana Breda)

Diferencial de uma função real de uma variável real (interpretação geométrica)



Diferencial de uma função real de duas variáveis reais

Plano Tangente/Linearização em torno de um ponto:

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $(x_0, y_0) \in \text{int}(D)$. O plano tangente ao gráfico de f no ponto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem equação

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

A função L definida por

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

cujos gráfico é o plano tangente, é a chamada **linearização de f em (x_0, y_0)** .

Diferencial Total: Analogamente ao caso $n = 1$, para x próximo de x_0 e y próximo de y_0 , considerando $\Delta f := f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, $\Delta x := x - x_0$ e $\Delta y := y - y_0$,

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y .$$

Representando Δx por dx e Δy por dy (para valores próximos de zero), o **diferencial total de f em (x_0, y_0)** é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy .$$

Generalização para n variáveis (análogo):

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in \text{int}(D)$.

O **diferencial total de f em $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$** é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})dx_n .$$

Equações Diferenciais, o que são?

Equações que envolvem uma função e as suas derivadas e/ou a variável que é o argumento dessa função.

Estas equações aparecem frequentemente quando se pretende modelar matematicamente fenómenos reais, em especial, naqueles de evolução temporal.

Exemplos:

- 1 Taxa de variação de temperatura de um objeto:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

$T(t)$ → temperatura do objeto,

T_m → temperatura do meio ambiente, k → constante positiva.

Exemplos (cont.):

2. Movimento harmónico de uma mola:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$m \rightarrow$ massa do objeto colocado na extremidade da mola vertical;

$x(t) \rightarrow$ deslocamento a partir da posição (inicial) de equilíbrio da mola;

$k > 0 \rightarrow$ constante de mola; Ver figura

3. Lei de Kirchhoff aplicada a uma malha constituída por uma bobine em série com uma resistência:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

onde L e R são constantes (indutância e resistência, respetivamente), $I(t)$ a intensidade de corrente e $E(t)$ a tensão da fonte de energia.

Equação diferencial ordinária

Definição:

Chama-se **equação diferencial ordinária (EDO)** de ordem n ($n \in \mathbb{N}$), a uma equação do tipo

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{EDO})$$

onde y é função (real) de x .

Terminologia associada:

y é designada por **variável dependente**;

x é designada por **variável independente**;

Uma EDO diz-se estar na **forma normal** quando se apresenta na forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Notação alternativa: No slide anterior $y^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função y . Em alternativa, podemos usar a notação $\frac{d^n y}{dx^n}$ e (re)escrever a EDO na forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Exemplos :

1

$$-y' + x^3 - 1 = 0$$

é uma equação diferencial de ordem 1, onde x é a variável independente e y a variável dependente;

2

$$3t \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

é uma equação diferencial de ordem 2, onde t é a variável independente e x a variável dependente;

Solução de uma EDO

Definição

Chama-se **solução da equação diferencial**

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

num intervalo I , a toda a função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, com derivadas finitas até à ordem n , tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Exemplo:

$\varphi_1(x) = \sin x$ e $\varphi_2(x) = \cos x - \sin x$ são duas soluções (em \mathbb{R}) de

$$y'' + y = 0$$

Identifique outras!



Mais terminologia associada a uma EDO de ordem n

Integral Geral: Família de soluções que se obtêm por técnicas de integração adequadas, que é definida, em geral, usando n constantes arbitrárias; o processo de obtenção dessa família de soluções é usualmente designado por integração(ou resolução) da EDO.

Integral Particular (ou solução particular): Solução que faz parte do integral geral;

Solução Singular: Solução que não se obtém a partir do integral geral;

Solução Geral: Conjunto de todas as soluções.

Exemplo: $(y')^2 - 4y = 0$.

Integral geral: $y = (x + C)^2$, onde $C \in \mathbb{R}$; Solução particular: $y = x^2$;

Solução singular: $y = 0$.

Problema de valores iniciais

Definição:

Chama-se **problema de valores iniciais** (PVI) (ou **problema de Cauchy**) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Exemplo:

$y = -\frac{x^3}{6} + 1$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Verifique!

Problema de valores na fronteira

Definição:

Chama-se **problema de valores na fronteira** (ou **problema de fronteira**) a todo o problema que consista em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

Exemplo:

O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução. Qual é?

Existência e Unicidade de Solução para um PVI

- Nem todo o PVI admite solução;
- Caso exista solução para o PVI, esta pode não ser única;
- É possível provar que um PVI de primeira ordem na forma normal, i.e., do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em x_0), desde que a função f satisfaça determinadas condições (*Teorema de Cauchy-Picard*). Não estudamos aqui este resultado, mas trataremos um caso particular a propósito das EDO's lineares (mais à frente).

Equações de variáveis separáveis

EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}, \quad (\text{com } q(y) \neq 0)$$

para p e q dependentes apenas de x e de y , respetivamente.

Determinação dum integral geral

- 1 Escrever a equação na forma:

$$y' q(y) = p(x) \quad (1)$$

- 2 Integrar ambos os membros de (1), para obter um integral geral da equação na seguinte forma implícita:

$$Q(y) = P(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde $Q(y)$ é uma primitiva de $q(y)$ e $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$.

Exemplo

$$y' = \frac{1}{y} e^x, y \neq 0$$

Separando as variáveis a equação toma a forma:

$$yy' = e^x$$

Integrando membro a membro

$$\int y \, dy = \int e^x \, dx,$$

obtendo-se o seguinte integral geral:

$$y^2 = 2e^x + C, C \in \mathbb{R}$$

Equações Diferenciais Homogêneas

EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = f(x, y)$$

onde $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau zero, i.e.,

$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{D}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, tais que $(\lambda x, \lambda y) \in \mathcal{D}$.

Exemplo:

$$y' = \underbrace{\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}}_{f(x,y)}$$

f é homogênea de grau zero pois, desde que $\lambda \neq 0$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda x \lambda y + \lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = f(x, y)$$

Determinação dum integral geral de uma equação diferencial homogénea:

- 1 Certifique-se que a equação na forma:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

é homogénea;

- 2 Em (1), fazer a mudança de variável $z = y/x$ (ou seja, $z = \frac{y}{x}$) :

$$z + xz' = g(z), \quad (2)$$

onde $g(z) = f(1, z)$;

- 3 Integrar a equação (2), como equação de variáveis separáveis.
- 4 No integral geral obtido fazer $z = \frac{y}{x}$.

Voltando ao Exemplo do Slide 18

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

Ora,

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad x \neq 0,$$

Através da substituição $y = zx$, obtemos a equação de variáveis separáveis

$$\frac{1}{1 + z^2} z' = \frac{1}{x},$$

com integral geral dado por

$$\arctg z = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Por conseguinte, um integral geral da equação homogênea dada tem a forma

$$\arctg \frac{y}{x} = \ln |x| + C, \quad i.e., \quad y = x \operatorname{tg} (\ln |x| + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Equações Diferenciais Exatas

Uma equação da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

onde $M, N: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e D é aberto, diz-se uma **equação diferencial exata** se existir $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$, tal que

$$dF = M(x, y)dx + N(x, y)dy, \quad (1)$$

i.e., $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$.

Resolver uma equação diferencial exata é encontrar uma função F (nas condições descritas). A família de funções

$$F(x, y) = C, C \in \mathbb{R},$$

forma o conjunto das soluções da equação (1).

Exemplo:

$$y^2 dx + 2xy dy = 0$$

Esta equação é exata se existir $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y) = y^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y) = 2xy \quad (3)$$

De (2) conclui-se que

$$F(x, y) = y^2 x + \phi(y),$$

derivando em ordem a y e conjugando com (3), $\phi(y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.
Deste modo, a equação é exata e o conjunto das suas soluções é

$$y^2 x = C, C \in \mathbb{R}.$$

Caracterização das EDO exatas em abertos simplesmente conexos

Conjuntos abertos simplesmente conexos:

Um conjunto simplesmente conexo em \mathbb{R}^2 é aquele que não apresenta “buracos”^a. Exemplos de abertos simplesmente conexos:

\mathbb{R}^2 ; $]a, b[\times]c, d[$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $c < d$;
bolas abertas; semiplanos abertos.

^a A definição rigorosa ultrapassa o âmbito desta u.c., trabalharemos com casos dentro dos exemplos dados.

Proposição:

Sejam $M, N: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $M, N \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$, e \mathcal{D} aberto simplesmente conexo.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é uma equação diferencial exata se e só se $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$.

Exemplos de classificação de EDO em exatas/não exatas

❶ $y^2 dx + 2xy dy = 0.$

Sejam $M(x, y) = y^2$ e $N(x, y) = 2xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 2y,$$

a equação é exata (por aplicação da proposição do slide anterior).

❷ $(3y + 4xy^2) dx + (2x + 3yx^2) dy = 0.$

Sejam $M(x, y) = 3y + 4xy^2$ e $N(x, y) = 2x + 3yx^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \neq \frac{\partial N}{\partial x}(x, y),$$

a equação não é exata (por aplicação da proposição do slide anterior).

Fatores integrantes para EDO redutíveis a exatas

Uma função não nula $\mu(x, y)$ diz-se um **fator integrante** da equação (não exata)

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

se a equação

$$\mu(x, y) M(x, y) dx + \mu(x, y) N(x, y) dy = 0$$

é diferencial exata.

Exemplo:

A equação $(3y + 4xy^2) dx + (2x + 3yx^2) dy = 0$ não é exata. Mas

$$x^2 y (3y + 4xy^2) dx + x^2 y (2x + 3yx^2) dy = 0$$

é exata **[Verifique!]**. Assim, $\mu(x, y) = x^2 y$ é um fator integrante da equação $(3y + 4xy^2) dx + (2x + 3yx^2) dy = 0$.

Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)$$

onde a_0, a_1, b são funções definidas num certo intervalo I , com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Deste modo, esta equação pode tomar a seguinte forma:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Quando $b \equiv 0$ ($q \equiv 0$), a equação diz-se **incompleta** ou **homogénea**.

Exemplos:

- $y' + xy = 1$ equação diferencial linear de 1.ª ordem completa.
- $y' + xy = 0$ equação diferencial linear de 1.ª ordem incompleta (ou homogénea).

Note que, se $q \equiv 0$ ou se p e q forem funções constantes a EDO é de variáveis separáveis.

Resolução de uma EDO Linear de 1.^a Ordem usando um Fator Integrante

Para resolver a equação

$$y' + p(x)y = q(x).$$

basta determinar uma primitiva P da função p , multiplicar ambos os membros pelo **fator integrante** $\mu(x) = e^{P(x)}$ e integrar de seguida em ordem a x .

Exemplo:

$$y' - y = -e^x$$

Um fator integrante é e^{-x} , pois $p(x) = -1$. Multiplicando ambos os membros da equação por e^{-x} obtemos

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = -1, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{d}{dx}(e^{-x}y) = -1.$$

Integrando vem

$$e^{-x}y = \int (-1) dx = -x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, um integral geral da equação linear é

$$y = (C - x)e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$



PVI associado a EDO Linear de Primeira Ordem:

Teorema (existência e unicidade de solução):

Se p e q são funções contínuas num intervalo I , então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exemplo:

O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem como solução única $y = -xe^x$, para $x \in \mathbb{R}$. **Porquê?**

Equações de Bernoulli:

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, a equação é linear de 1.ª ordem.
- Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, a equação é redutível a uma EDO linear de 1.ª ordem, usando a mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$.

De facto, a equação de Bernoulli pode escrever-se na forma

$$y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

(eventualmente com $y \neq 0$). Com a substituição $z = y^{1-\alpha}$, chegamos à equação linear de 1.ª ordem

$$z' + (1 - \alpha)a(x)z = (1 - \alpha)b(x),$$

Exemplo:

A equação

$$y' + y = e^x y^2$$

é uma equação de Bernoulli (com $\alpha = 2$). Fazendo $z = 1/y$ ($y \neq 0$) obtemos

$$z' - z = -e^x$$

cujo integral geral é

$$z = (C - x) e^x, \quad C \in \mathbb{R},$$

► Ver slide 27

Assim, um integral geral da equação de Bernoulli é

$$y = \frac{e^{-x}}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Equações Lineares de Ordem Arbitrária:

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x)$$

onde

$$b: I \rightarrow \mathbb{R};$$

$$a_i: I \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, \dots, n, \text{ com } a_0(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in I.$$



coeficientes da equação

- Se $b \equiv 0$, a equação diz-se **incompleta** (ou homogénea); Caso contrário, a equação diz-se **completa** (ou não homogénea);
- Se os coeficientes da equação são funções constantes, a equação diz-se de **linear de coeficientes constantes**.

Exemplos

1.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

EDO linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes;

2.

$$e^x y' - \cos x y = x$$

EDO linear completa de primeira ordem;

3.

$$y^{(5)} + 2y' = 0$$

EDO linear homogénea de quinta ordem com coeficientes constantes.

Equação homogénea associada a uma EDO linear

Se na equação

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x)$$

tomarmos $b(x) \equiv 0$, obtemos a chamada **equação homogénea associada**.

Exemplo:

A equação homogénea associada à equação completa

$$y'' + y = \cos(x)$$

é a equação:

$$y'' + y = 0.$$

Solução geral de uma EDO linear completa

Teorema:

A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada.

Exemplo:

$$y' - 2y = e^{5x}.$$

A equação homogénea associada é a equação

$$y' - 2y = 0,$$

cuja solução geral é dada por $y_h = C e^{2x}$, com $C \in \mathbb{R}$. Uma solução da EDO completa é $y_p = \frac{1}{3} e^{5x}$ [Verifique!]. Assim, a solução geral da equação completa é

$$y = \underbrace{C e^{2x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{3} e^{5x}}_{y_p}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

EDO linear homogénea – Conjunto das soluções

Considere-se a EDO:

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \quad (4)$$

onde $a_i: I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Teorema:

Sejam $y: I \rightarrow \mathbb{R}$, $w: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (i) $y \equiv 0$ é solução de (4);
- (ii) Se y e w são soluções de (4), então $y + w$ é solução de (4);
- (iii) Se y é solução de (4), então αy é solução de (4);

Isto é, o conjunto das soluções de (4) é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções reais de variável real definidas em I .

EDO linear homogénea – Conjunto das soluções (cont.)

Na verdade, o conjunto das soluções de uma EDO linear homogénea é um subespaço vetorial de dimensão n , como se conclui do seguinte teorema:

Teorema: Toda a equação linear homogénea de ordem n

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

num dado intervalo I (a_0, a_1, \dots, a_n contínuas em I ; $a_0(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$) admite n soluções, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, **linearmente independentes** e qualquer sua solução, y , pode escrever-se como sua combinação linear, *i.e.*,

$$y = C_1\varphi_1 + \cdots + C_n\varphi_n, \text{ para } C_j \in \mathbb{R}.$$

Qualquer **conjunto de n soluções linearmente independente** de uma EDO linear homogénea de ordem n é designado por **sistema fundamental de soluções** dessa equação.

Exemplo:

$$y'' + y = 0 \quad (5)$$

$\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \sin x$ são soluções desta equação e são linearmente independentes.

▶ Ver slide 11

Assim, $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ é sistema fundamental de soluções de (5). Logo, a solução geral da equação é

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$



Observações:

- ❶ A resolução de uma EDO linear homogénea reduz-se à determinação de um sistema fundamental de soluções. Todavia, para $n > 1$, não existe método geral que permita obter um tal conjunto de soluções.
- ❷ Se a EDO linear homogénea tiver **coeficientes constantes**, um sistema fundamental de soluções pode ser obtido a partir do conhecimento das raízes do chamado polinómio caraterístico(▶ ver 43 e seguintes).

Como obter uma solução particular de uma EDO linear completa?

Método da variação das constantes — método de determinação de uma solução particular de uma equação linear completa que:

- pressupõe o conhecimento da solução geral da equação homogénea associada:

$$y_h = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x), \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R},$$

onde $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é um sistema fundamental de soluções desta equação.

- procura obter uma solução particular da equação completa da forma

$$y_p = C_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n(x),$$

admitindo que as constantes são funções (de x) diferenciáveis, determinando-as da forma como é indicada no slide seguinte.

Método da variação das constantes (cont.)

1. As funções $C_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ determinam-se calculando as suas derivadas que constituem a solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1' \varphi_1 + \dots + C_n' \varphi_n = 0 \\ C_1' \varphi_1' + \dots + C_n' \varphi_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1' \varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n' \varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' \varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n' \varphi_n^{(n-1)} = \frac{b}{a_0} \end{cases}$$

2. Calculando primitivas $G_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, das funções que se obtêm da resolução do sistema anterior, podemos escrever a seguinte solução particular da equação completa:

$$y_p = G_1(x)\varphi_1(x) + \dots + G_n(x)\varphi_n(x).$$

Exemplo:

$$y'' + y = \operatorname{cosec} x, \quad x \in]0, \pi[$$

(6)

1. A solução geral da equação homogénea associada é

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▶ Ver slide 37

2. Procure-se uma solução particular da forma

$$y_p = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

onde

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \operatorname{cosec} x. \end{cases}$$

3. Da resolução do sistema obtemos $C_1'(x) = -1$ e $C_2'(x) = \cotg x$.
Logo, podemos tomar

$$C_1(x) = -x \quad \text{e} \quad C_2(x) = \ln(\sin x), \quad 0 < x < \pi.$$

Exemplo (cont.):

4. Assim, uma solução particular é

$$y_p = -x \cos x + \sin x \ln(\sin x).$$

5. Logo, a solução geral da equação completa (6) é

$$\begin{aligned} y &= \underbrace{C_1 \cos x + C_2 \sin x}_{y_h} \underbrace{-x \cos x + \sin x \ln(\sin x)}_{y_p}, \quad 0 < x < \pi, \\ &= (C_1 - x) \cos x + (C_2 + \ln(\sin x)) \sin x, \quad 0 < x < \pi, \end{aligned}$$

onde C_1, C_2 são constantes reais arbitrárias.

Princípio de sobreposição

Teorema:

Suponha-se que y_1 é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = b_1(x),$$

e que y_2 é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = b_2(x).$$

Então $y_1 + y_2$ é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b_1(x) + b_2(x).$$

EDO lineares com coeficientes constantes

EDO linear de ordem n com coeficientes constantes tem a forma:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) ,$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ com $a_0 \neq 0$.

Equação homogénea associada:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Polinómio associado (polinómio caraterístico):

$$P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n$$

As n raízes do polinómio $P(r)$ permitem determinar n soluções linearmente independentes da equação homogénea, cada uma associada a cada uma dessas raízes (ver como no slide seguinte). Portanto, permitem determinar a solução geral da equação homogénea.

Construção dum sistema fundamental de soluções (base do subespaço das soluções) da EDO linear com coeficientes constantes e homogênea:

Considerem-se as raízes de $P(r)$ identificadas e para cada uma delas real e para cada par delas complexas (se existirem) proceda-se à seguinte associação de soluções (no final do processo ter-se-à n soluções linearmente independentes):

- **1.º Caso:** A raiz, r , é real simples.

Solução: e^{rx}

- **2.º Caso:** A raiz, r , é real de multiplicidade k .

Soluções: $e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{k-1}e^{rx}$

- **3.º Caso:** As raízes são complexas conjugadas simples, $\alpha + \beta i$ e $\alpha - \beta i$.

Soluções: $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

- **4.º Caso:** As raízes são complexas conjugadas, $\alpha + \beta i$ e $\alpha - \beta i$, com multiplicidade k .

Soluções: $e^{\alpha x} \cos(\beta x), xe^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \cos(\beta x),$
 $e^{\alpha x} \sin(\beta x), xe^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Exemplo: $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 4y' + 8y = 0$

Polinómio característico: $r^5 + 2r^4 + 4r^3 + 8r^2 + 4r + 8$

Raízes do polinómio característico:

-2 (simples); $i\sqrt{2}$ e $-i\sqrt{2}$, raízes duplas;

Sistema fundamental de soluções:

$$\{e^{-2x}, \cos(\sqrt{2}x), x \cos(\sqrt{2}x), \sin(\sqrt{2}x), x \sin(\sqrt{2}x)\}$$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$y = B e^{-2x} + (C_1 + C_2 x) \cos(\sqrt{2}x) + (D_1 + D_2 x) \sin(\sqrt{2}x),$$

com $B, C_1, C_2, D_1, D_2 \in \mathbb{R}$.

Método dos Coeficientes Indeterminados:

- Método para determinar uma solução particular, aplicável às EDO lineares de coeficientes constantes completas

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) \quad (7)$$

com $b(x)$ da forma

$$b(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{ou} \quad b(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

onde $P_m(x)$ denota um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Neste caso, prova-se que existe uma solução particular da equação (7) do tipo

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} (Q(x) \cos(\beta x) + R(x) \sin(\beta x)) \quad (8)$$

onde:

- k é a multiplicidade de $\alpha + i\beta$, se $\alpha + i\beta$ for raiz do polinómio característico da equação homogénea associada a (7); Senão, $k = 0$;
- $Q(x)$, $R(x)$ são polinómios de grau m cujos coeficientes terão de ser determinados usando a EDO (7) e a expressão para a solução (8).

Exemplo (Cálculo de solução particular de uma EDO linear de coeficientes constantes completa, usando o método dos coeficientes indeterminados):

$$y' - 3y = e^{3x}.$$

Como

$$e^{3x} = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

com $P_m(x) \equiv 1$ (grau zero), $m = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = 0$ e 3 é raiz do polinómio característico, com multiplicidade 1, então a solução particular a procurar é da forma

$$y_p = x e^{3x} A, \quad \text{com } A \in \mathbb{R} \text{ a determinar.}$$

Substituindo y_p e y'_p na equação:

$$\underbrace{A e^{3x} + 3Ax e^{3x}}_{y'_p} - 3(\underbrace{Ax e^{3x}}_{y_p}) = e^{3x}$$

obtemos $(A - 1)e^{3x} = 0$, e portanto $A = 1$. Assim, $y_p = x e^{3x}$.

PVI associado a uma EDO linear de ordem arbitrária

Teorema (existência e unicidade de solução):

Se $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ e $b(x)$ são funções contínuas num intervalo I , $a_0(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0, y'(x_0) = \beta_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1}, \end{cases}$$

onde $x_0 \in I$ e $\beta_i, i = 0, 1, \dots, n-1$, são reais dados, tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exemplo: O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$$

tem uma solução única em \mathbb{R} . **Porquê? e Qual?**