Tratamento de dados

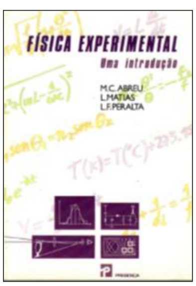
universidade de aveiro theoria poiesis praxis
Departamento de Física

Instrumentação e Análise de Dados Experimentais

Ano Letivo de 2017/18

[2] M.C.Abreu, L.Matias e L.F. Peralta, *Em Física Experimental Uma introdução*, 1ªed, Editorial Presença, Lisboa, 1994.

(29 exemplares na biblioteca da UA)



Recomendações de leitura:

- Introdução (págs. 17-23)
- Leitura 1 - Aquisição, Análise e Tratamento de Dados (págs. 85-98, 107-116, 121-130)
- Tabelas (págs. 275-286)

[5] N.C. Barford, *Experimental measurements: Precision, Error and Truth*, 2ªEd, John Wiley & Sons, New York (1985). (1 exemplar na biblioteca da UA)

[6] G. Almeida, *Sistema Internacional de unidades (SI)-Grandezas e Unidades Física, terminologia, símbolos e recomendações*, 1ªEd., Plátano Editora, Lisboa (1988).

Objectivos das aulas de laboratório

Fornecer:

- Demonstrações de ideias teóricas em Física

  Ex.: interferência da luz

- Familiaridade com aparelhos de medida
- Treino em como fazer experiência científicas

Como fazer experiências

1. Estabelecer fim pretendido (objectivos)
2. Planear: processo ou método, instrumentos, procedimentos
3. Registar dados (medidas)
4. Trabalhar dados (analisá-los e tratá-los) para obter resultados
5. Analisar e discutir os resultados
6. Avaliar a qualidade dos resultados tendo em conta o fim pretendido

Exemplo de experiência

1. *Objectivo*

Medir comprimento de pista de bicicletas

2. *Método experimental. Procedimentos*

Usando uma bicicleta apetrechada com odómetro, cada um de três ciclistas pedala entre os traços que marcam início e fim da pista.
Cada ciclista faz 10 ensaios, registando o valor indicado em cada ensaio.

3. *Dados*

Ver Tabela 1.

3. *Dados. Continuação*

Tabela 1: Comprimento da pista medido com odómetro

Ciclista A $x \pm 0.1$ (m)	Ciclista B $x \pm 0.1$ (m)	Ciclista C $x \pm 0.1$ (m)
600.2	620.0	589.7
593.3	612.4	585.2
582.6	570.0	598.3
584.6	600.8	597.7
586.2	607.2	592.0
590.6	585.8	590.3
591.6	603.8	590.6
587.3	588.6	587.0
593.2	596.4	583.6
592.3	582.2	585.1

erro instrumental

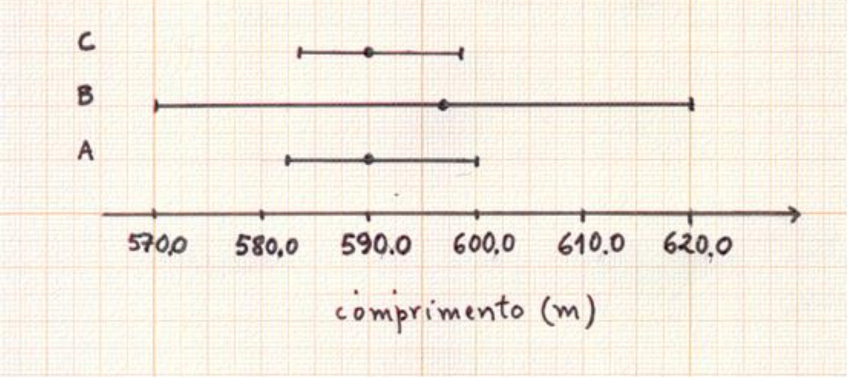
Tratamento de dados

4. Tratamento de *Dados*

Tabela 2

	Ciclista A		Ciclista B		Ciclista C	
	$x\ \pm 0.1$ (m)	$d = x - \bar{x}$ (m)	$x\ \pm 0.1$ (m)	$d = x - \bar{x}$ (m)	$x\ \pm 0.1$ (m)	$d = x - \bar{x}$ (m)
	600.2	+10.0	620.0	+23.3	589.7	-0.3
	593.3	+3.1	612.4	+15.7	585.2	-4.8
	582.6	-7.6	570.0	-26.7	598.3	+8.3
	584.6	-5.6	600.8	+4.1	597.7	+7.7
	586.2	-4.0	607.2	+10.5	592.0	+2.0
	590.6	+0.4	585.8	-10.9	590.3	+0.3
	591.6	+1.4	603.8	+7.1	590.6	+0.6
	587.3	-2.9	588.6	-8.1	587.0	-3.0
	593.2	+3.0	596.4	-0.3	583.6	-6.4
	592.3	+2.1	582.2	-14.5	585.1	-4.9
$\bar{x} = \frac{\sum_i^N x_i}{N}$	590.2		596.7		590.0	

Tratamento de dados



Valores médios e gamas de valores

Tratamento de dados

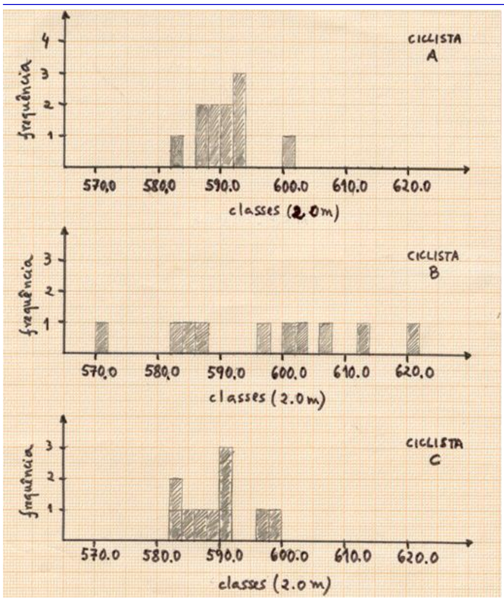
Se N (número de medição $N <$ s de cada ciclista) fosse pequeno (digamos, $N < 10$), o valor experimental (X) do comprimento da pista obtido por cada ciclista seria dado pela média ($\bar{x}$); a incerta de X é dada pelo maior dos desvios ($\{Max\ d_i\}$).

$$\boxed{X \pm \Delta X = \bar{x} \pm \{Max\ d_i\}}$$

O valor experimental duma grandeza (X) nem sempre é dado pela média ($\bar{x}$) de medições diretas.

Mas, quando temos um número maior de medidas (digamos, $N \geq 10$), é mais razoável fazermos um tratamento estatístico mais sofisticado.

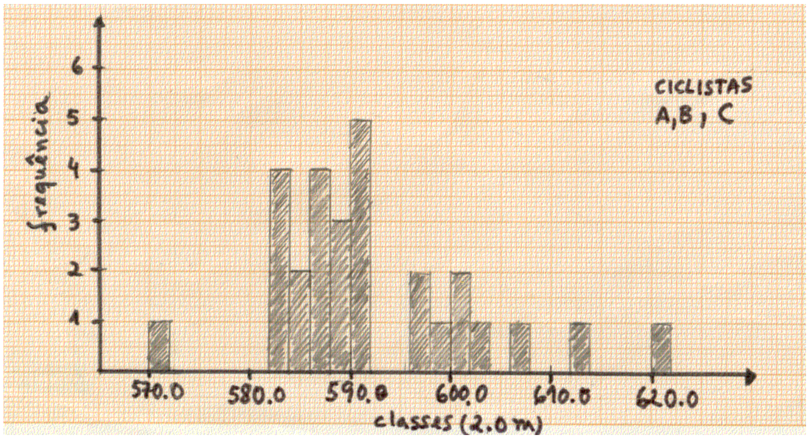
Tratamento de dados



Comentários?

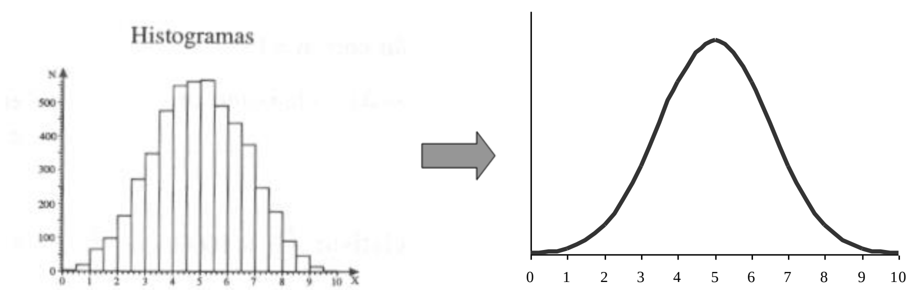
E que aconteceriam se juntássemos os 3 num só?

Tratamento de dados



Como seria o histograma se fizéssemos muitas mais medições?

Tratamento de dados



Distribuição normal ou gaussiana

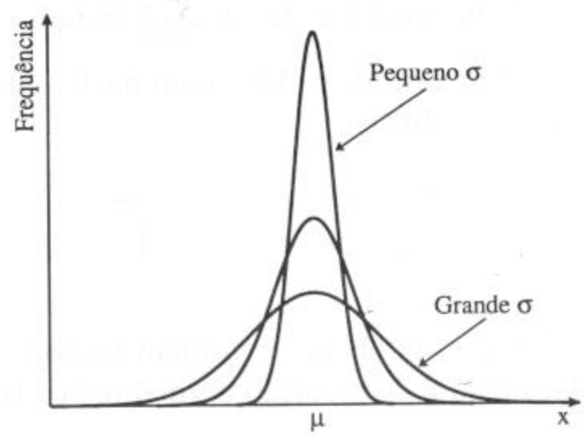
Distribuição normal ou gaussiana

A distribuição de Gauss descreve o comportamento de um grande número de acontecimentos aleatórios com pequenas oscilações à esquerda e à direita do valor esperado.

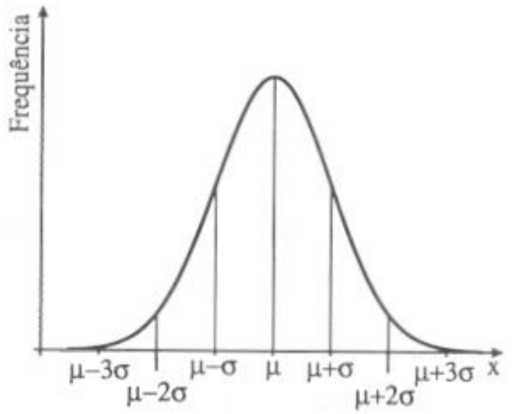
É simétrica e apresenta uma forma característica de sino, dada por um expressão do tipo

$$P(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

$$P(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$



Tratamento de dados



68.27% entre [μ-σ , μ+σ]
95.45% entre [μ-2σ , μ+2σ]
99.73% entre [μ-3σ , μ+3σ]

Tratamento de dados

	População ($N \to \infty$)	Amostra (N pequeno)	
Média	μ	$\bar{x}$	(melhor estimativa de μ)
Desvio-padrão	σ	σ_{N-1}	(melhor estimativa de σ)

σ mede a PRECISÃO da experiência

Amostra: $\{x_i, \ldots, x_N\}$

Média da amostra: $$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{x_1 + x_1 + \ldots + x_N}{N}}$$

$$\bar{x} \xrightarrow[N \to \infty]{} \mu$$

Tratamento de dados

Desvio-padrão da amostra:

$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

$$\sigma_{N-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} \sigma$$

(s não diminui quando N aumenta)

Desvio-padrão da <u>média</u> ≡ Erro-padrão da <u>amostra</u>:

$$\Delta\bar{x} = S_{N-1} \equiv \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}$$

$$S_{N-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

(S_{N-1} diminui quando N aumenta)

Tratamento de dados

A MELHOR ESTIMATIVA do “verdadeiro valor” da grandeza que conseguimos numa experiência é X:

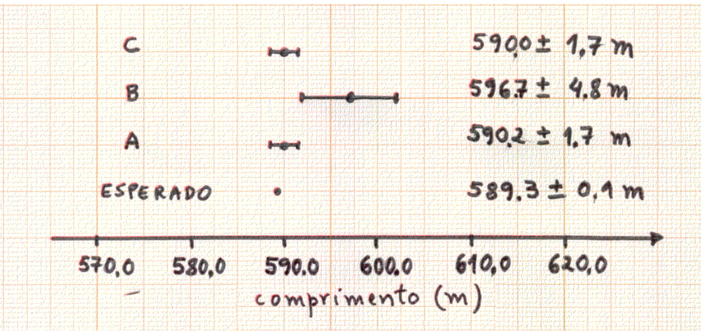
$$X \pm \Delta X = \bar{x} \pm \Delta\bar{x} = \bar{x} \pm S_{N-1}$$

Recorde que o valor experimental duma grandeza (X) nem sempre é dado pela média ($\bar{x}$) de medições diretas, como veremos na próxima aula.

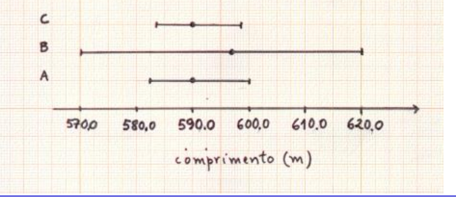
Tratamento de dados

Barras de erros

(ou de incertezas)



Gamas de valores



Tratamento de dados

Mas quem sabe qual é "verdadeiro" valor da grandeza?!

~~verdadeiro~~ → ESPERADO

- dado por fórmula teórica
- tabelado
- etc.

Designemos por V o **valor esperado** da grandeza.

V também é afetado de uma incerteza, que geralmente é menor que a incerteza experimental obtida nos laboratórios comuns.

<u>Exemplo: carga do eletrão</u>

$$V \pm \Delta V = (1{,}60217662 \ \pm 0{,}00000001) \times 10^{-19} \text{ C}$$

valor tabelado
(que também é experimental!)

$$X \pm \Delta X = (1{,}6 \ \pm 0{,}1) \times 10^{-19} \text{ C}$$

valor experimental obtido
num lab de ensino

Tratamento de dados

A qualidade de um resultado experimental $X \pm \Delta X$ é avaliada pela:

- incerteza experimental
  (pretende-se que $\Delta X / X$ seja pequena)

PRECISÃO

Mede "espalhamento" das medidas

Erros aleatórios

Reprodutibilidade

Algarismos significativos

Expressa em percentagem

- proximidade com o valor esperado V
  (pretende-se que $|V - X|$ seja pequena)

EXATIDÃO ("accuracy")

Mede diferença entre X e V

Erros sistemáticos

Falhas do modelo utilizado

Tratamento de dados

Como se avalia a precisão? Que significa "pequeno $\Delta X / X$" ?

No âmbito dos laboratórios de ensino, tipicamente considera-se que um erro relativo $\Delta X / X \leq 10\%$ (que corresponde a uma precisão ≥ 90%) é aceitável.

Exemplo: carga do eletrão

$X \pm \Delta X = (1{,}6 \pm 0{,}1) \times 10^{-19}$ C ⇒ $\Delta X / X = 6\,\%$

Este resultado tem um precisão aceitável no âmbito dos laboratórios de ensino.
Mas não quando comparado com o valor tabelado:

$V \pm \Delta V = (1{,}60217662 \pm 0{,}00000001) \times 10^{-19}$ C ⇒ $\Delta V / V = 6 \times 10^{-7}\,\%$

Como avalia a exatidão? Que significa "$|V - X|$ pequena"?

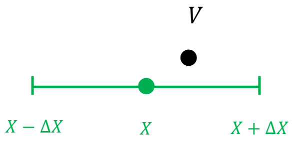
Exemplo: relógio de ponteiros

Se não se atrasa nem se adianta, é um relógio de precisão.

Se for um relógio de precisão e estiver regulado para a hora de verão, no inverno nunca indica a hora exata.

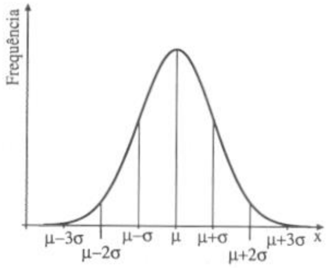
Se estiver "parado" (sem pilhas), dá sempre a hora "exata" duas vezes por dia.

Duas condições, simultaneamente
$$\begin{cases} \dfrac{\Delta X}{X} & \text{o mais pequena possível} \\ |V - X| < \Delta X & \end{cases}$$



A probabilidade de V:

- estar contido no intervalo $[X - \Delta X, X + \Delta X]$ é superior a 2/3.
- estar fora do intervalo $[X - 2\Delta X, X + 2\Delta X]$ é inferior a 5%.
- estar fora do intervalo $[X - 3\Delta X, X + 3\Delta X]$ é praticamente nula.



68.27% entre [μ-σ , μ+σ]
95.45% entre [μ-2σ , μ+2σ]
99.73% entre [μ-3σ , μ+3σ]

Tratamento de dados

Para um resultado ser exato, tem de ser preciso.

Mas pode ser preciso e não ser exato.

Tratamento de dados

Rejeição de observações

Será que todas as observações (medidas) feitas são de conservar?

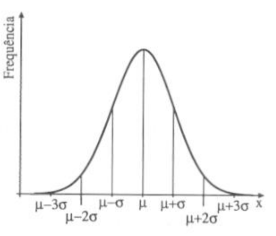
- Usar de bom senso
- Usar de pouca severidade.

Nota: apenas se devem rejeitar observações (medidas) quando o número total das mesmas N é elevado (tem significado estatístico)

<u>Exemplo:</u>

Uma dada medida x_i apresenta um desvio $d_i = |x_i - \bar{x}| > 3 \times \Delta\bar{x}$. É razoável rejeitar.

Então, recalculam-se $\bar{x}$ e $\Delta\bar{x}$ sem aquele medida x_i



68.27% entre [μ-σ , μ+σ]
95.45% entre [μ-2σ , μ+2σ]
99.73% entre [μ-3σ , μ+3σ]

Algarismos Significativos

Determinação do valor de uma grandeza:

- Medição direta
- Cálculos sobre grandezas medidas.

Valor numérico final

deve expressar
imprecisão inerente:
deve conter apenas
algarismos (fisicamente) significativos

Algarismos Significativos: aqueles cujos valores são conhecidos com certeza, mais o primeiro coberto pelo erro.

Exemplo: Ciclista A

Calculadora: $\begin{cases} \bar{x} = 590{,}19 \text{ m} \\ \Delta\bar{x} = S_{N-1} = 1{,}628462124 \text{ m} \end{cases}$

Resultado final: 590 ± 2 m

Tratamento de dados

Contagem de algarismos significativos:

- Da esquerda para a direita
- Começa-se pelo primeiro algarismo não-nulo
- Termina-se no primeiro algarismo afetado pela incerteza
- Zeros à esquerda do símbolo decimal não têm significado físico.
- Zeros à direita do símbolo decimal têm significado físico

Tratamento de dados

Valor	Nº de algarismos significativos	Observações
102 s	3	a) **Representação ambígua** pois o zero pode servir só para posicionar a vírgula (**Não deve ser usada**).
40 mm	2 ou 1 (?) a)	
4.0 cm	2	
4 cm	1	
4×10^1 mm	1	b) A redução de unidades deve ser feita usando potências de base 10, para garantir que o n.º de algarismos significativos não é alterado.
0.520 s	3	
0.061s	2	
2.48 kg	3 b)	
2.48×10^3 g	3 b)	
2480 g	3 ou 4 (?) a)	
2.480×10^{-3} kg	4	
50000 m	1 ou 5 (?) a)	
50.0×10^3 km	3	

Arredondamentos

- Ao truncar um número, se o primeiro algarismo desprezado for ≥ 5, o ultimo algarismo significativo que se considera deve ser incrementado de uma unidade.
- Nos cálculos intermédios, consideram-se sempre o maior número de algarismo possível para evitar erros de truncatura.

Exemplo:
Se se pretender indicar a área de um disco com 5 algarismos significativos, não se deve usar $\pi = 3{,}14$.

Exercício

Fazem-se 15 medidas do comprimento de um telemóvel com uma régua graduada em milímetros.

Erro de leitura: 0,5 mm $\Rightarrow$ medidas podem ter algarismos significativos até à casa das décimas de mm..

Dados (cm):

15,20	15,20	15,25	15,15	15,35
15,25	15,20	15,25	15,15	15,20
15,10	15,30	15,10	15,25	15,25

Comentários:

- As oscilações que se observam são de natureza aleatória $\therefore$ provavelmente distribuem-se de modo gaussiano.
- O número de medições, apesar de não ser muito grande, permite uma razoável aproximação àquela distribuição.

Exercício (cont.)

Cálculos: $\bar{x} = 15{,}2133$ cm

$s = \sigma_{N-1} = 6{,}2396 \times 10^{-2}$ cm

$\Delta\bar{x} = S_{N-1} = \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}} = 0{,}01611$ cm

Resultado final: $15{,}21 \pm 0{,}02$ cm

Comentários:

- Ao repetir a experiência 15 vezes ganhou-se precisão:

1 medida $\Delta X = 0{,}05$ cm (erro de leitura)	$\Rightarrow$	15 medidas $\Delta X = 0{,}02$ cm (erro estatístico)

- Dispersão dos valores tabelados ($s = \sigma_{N-1} = 0{,}06$) é maior que erro de leitura de uma só medição ∴ existem causas aleatórias que influenciam a medição.

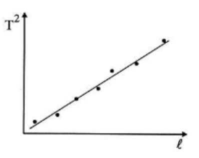
Relações entre grandezas

Um dado fenómeno pode depender de diversas grandezas — p. ex., período de oscilação de pêndulo simples depende de 2:

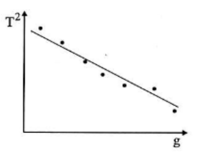
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

As grandezas podem estar correlacionadas:

- Positivamente
  (as grandezas variam no mesmo sentido)



- Negativamente
  (as grandezas variam em sentidos contrários)



Gráficos

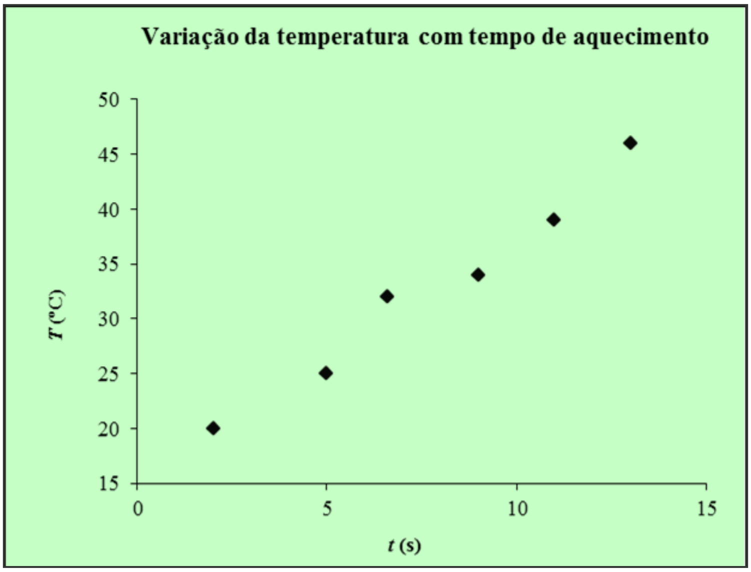
Seu interesse :

- Visualizar como uma grandeza varia em relação a outra, evidenciando:
  - Se a relação é linear ou não.
  - Se a variação é rápida ou lenta.
  - Se existem descontinuidades
  - Se há grandes oscilações no comportamento dos valores experimentais.
- Determinar aproximadamente valores intermédios (interpolar) ou para além da gama de valores (extrapolar).

Como fazer um gráfico bem feito:

- Escolher as grandezas a representar em abcissa e em ordenada.
- Identificar cada eixo, na sua extremidade, pela designação da grandeza representada e da unidade utilizada, separadas pelo símbolo / (ou com a unidade entre parêntesis).
- Escolher criteriosamente as escalas de modo que o aspecto global seja harmonioso:
  - evitar a aglomeração ou dispersão excessiva dos pontos;
  - a precisão de marcação dos pontos nos dois eixos deve ser equivalente;
  - os eixos não têm de se intersectar obrigatoriamente na coordenada (0,0);
  - as escalas dos eixos não têm de ser obrigatoriamente da mesma natureza (se conveniente pode usar-se uma escala linear e a outra logarítmica);
  - se os valores são acompanhados de incertezas, estas devem ser representados no gráfico na forma de barras horizontais e verticais. As barras têm amplitude proporcional à incerteza de acordo com a escala, e marcam-se simetricamente a partir do valor;
- Dar um título sucinto ao gráfico.

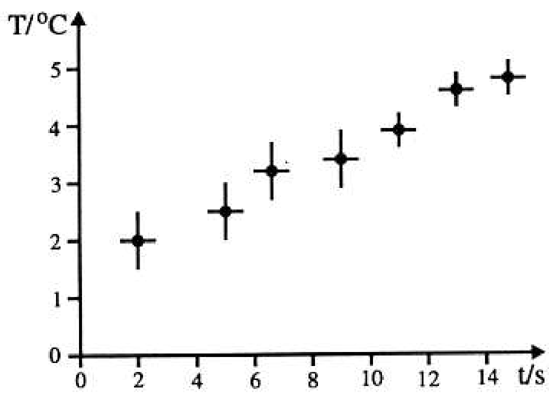
Tratamento de dados



Tratamento de dados

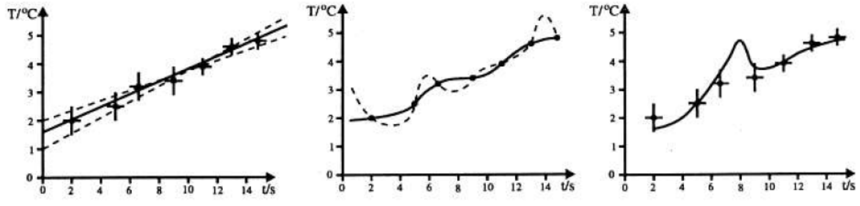
Qual a linha (função matemática) que descreve o comportamento dos pontos?

$t \pm \Delta t$ (s)	$T \pm \Delta T$ (ºC)
2.0±0.6	2.0±0.5
5.0±0.6	2.5±0.5
6.6±0.6	3.2±0.5
9.0±0.6	3.4±0.5
11.0±0.6	3.9±0.3
13.0±0.6	4.6±0.3
14.8±0.6	4.8±0.3



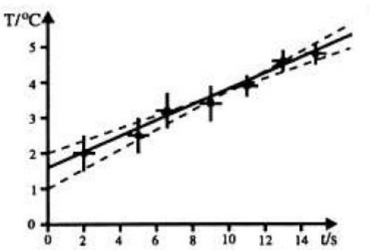
Podem considerar-se várias possibilidades…

Tratamento de dados



Vejamos as conclusões ou análises que cada um deles proporciona.

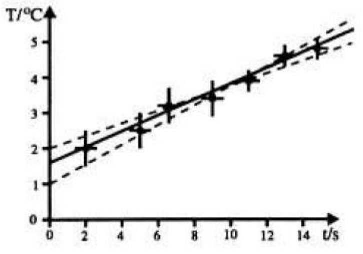
Tratamento de dados



Este gráfico permite prever uma relação linear entre as duas grandezas (linha a cheio) se bem que uma certa incerteza exista, como visualizado pelas linhas a tracejado, as quais são traçadas unindo as extremidades das barras de erro que mais se afastam da reta traçada.

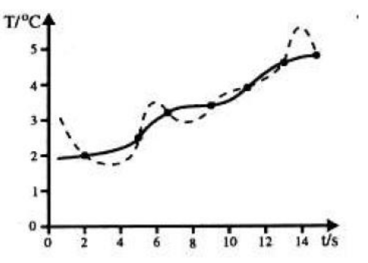
A constante de proporcionalidade entre as duas grandezas pode ser calculada a partir do declive da reta traçada manualmente. O seu valor é dado por

$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ e a ordenada na origem por b.

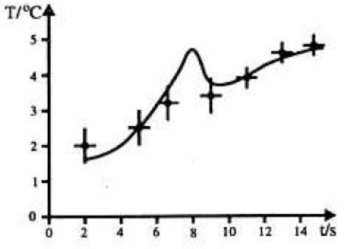


A partir do declive das retas de inclinação máxima e mínima traçadas considerando as barras de erro (retas a tracejado) pode calcular-se aproximadamente o erro nos parâmetros a e b dados respetivamente por

$$\frac{a_{max}-a_{min}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{b_{max}-b_{min}}{2}$$



O gráfico do meio, desenhado sem as barras de erro, põe mais dúvidas ao traçado de uma curva. As representações feitas que se limitam a unir os pontos experimentais são fantasiosas. É pouco provável um dado fenómeno ter uma evolução tão tortuosa. Mesmo sem barras de erro pode-se prever que a variação mais justa seja a reta.



O gráfico à direita mostra uma outra hipótese que só pode adquirir plausibilidade se forem determinados mais pontos na zona de comportamento irregular.

Tratamento de dados

A função que melhor descreve o comportamento dos pontos experimentais obtém-se ANALITICAMENTE a partir da lei física que descreve o fenómeno (p. ex., $T = 2\pi\sqrt{l/g}$) (se não a conhecermos a lei física, arbitramos uma função para a correlação entre x e y), determinando-se os parâmetros dessa função através de um processo estatístico de AJUSTE (em Inglês, *fit*).

Tratamento de dados

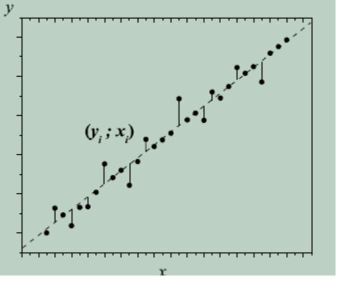
Situações mais frequentes de ajustes:

- determinar o melhor valor de uma grandeza medida várias vezes
- determinar a constante de proporcionalidade: $y = kx$
- estabelecer uma relação entre duas grandezas — a mais simples é linear, $y = mx + b$
- determinar os parâmetros de uma relação não-linear (como $y = a + bx^2$ ou $y = ke^{\alpha x}$) fazendo primeiro uma linearização (transformação de variável: $y = a + bz$, com $z \equiv x^2$; $\ln y = \ln k + \alpha x$)
- determinação de uma dependência funcional não-linearizável, do tipo $y = a + bx + cx^2$

Tratamento de dados

Quando a relação entre duas ou mais grandezas é linear, o processo de estabelecer uma equação que as relacione designa-se REGRESSÃO LINEAR.

Tendo em atenção os dados experimentais da figura, a relação funcional apresentada é do tipo linear e o bom senso aconselha a que se trace uma reta que minimize a soma dos desvios absolutos dos pontos em relação à reta traçada. Mas, analiticamente, isto é mais complicado do que minimizar a soma dos quadrados dos desvios.



A técnica mais vulgarizada para determinar os parâmetros que melhor adaptam a equação aos valores disponíveis é o MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.

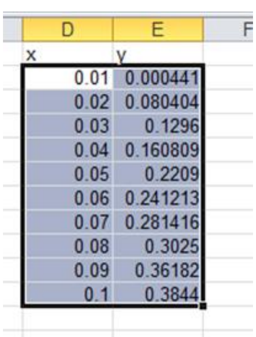
Tratamento de dados

N.B.: No teste prático os estudantes têm de saber fazer a regressão linear numa calculadora.

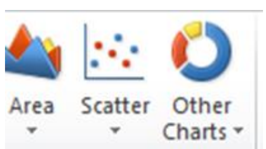
Mas é conveniente que sejam capazes de usar o MS-Excel para fazer gráficos e regressões lineares durante as aulas de prática laboratorial (embora esta capacidade não seja avaliada).

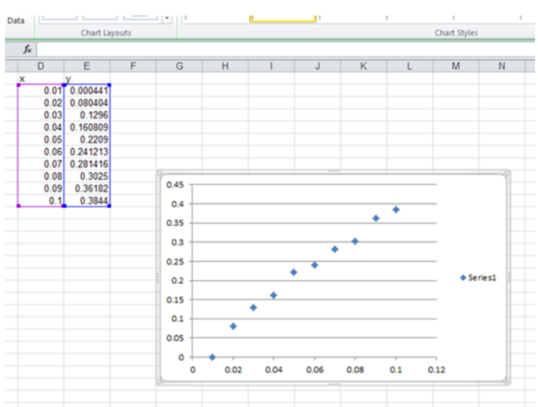
Ver o manual "Tratamento dos dados experimentais usando Excel"

Tratamento de dados



x	y
0.01	0.000441
0.02	0.080404
0.03	0.1296
0.04	0.160809
0.05	0.2209
0.06	0.241213
0.07	0.281416
0.08	0.3025
0.09	0.36182
0.1	0.3844





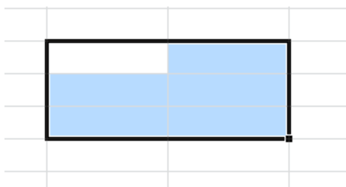
Tratamento de dados

O Excel possui funções para cálculos estatísticos que nos permitem obter facilmente os parâmetros da reta de ajuste.

Em português: *proj.lin(y,x,verdadeiro,verdadeiro)* ou *proj.lin(y,x,1,1)*

Em inglês: *linest(y,x,true,true)* ou *linest(y,x,1,1)*

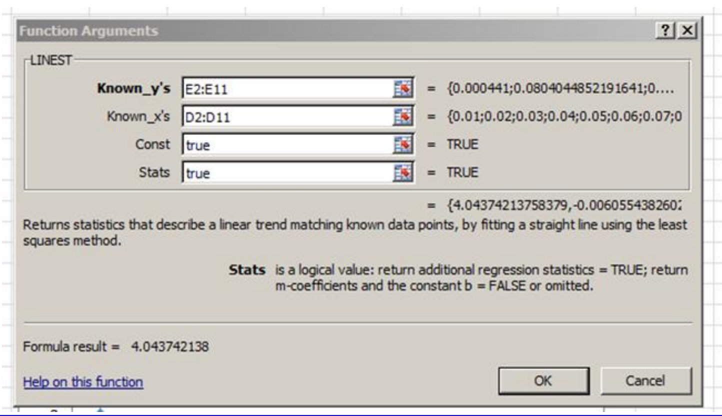
Selecionar 6 células (3x2 como na figura abaixo).



carregar em 

Tratamento de dados

Aparecerá, como na figura abaixo, o menu "*function arguments*" onde se tem de inserir os argumentos da função. Para tal tem de se preencher os vários campos, onde "*known_y's*" e "*known_x's*" é a identificação da localização na folha de cálculo dos valores que definimos para Y e X respetivamente. Nos argumentos "*const*" e "*stats*" é necessário colocar "true" (ou "verdadeiro" em pt). De seguida carregue em "*OK*".



Tratamento de dados

colocar o cursor na linha de comando e carregar em

CTRL+SHIFT+ENTER.

Deverá ficar com as células selecionadas preenchidas:

f_x {=LINEST(E2:E11,D2:D11,TRUE,TRUE)}

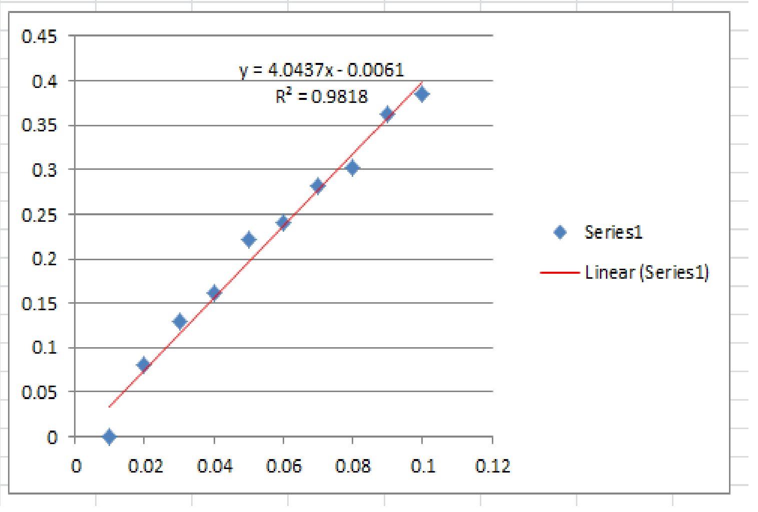
D	E	F	G	H	I	J
x	y					
0.01	0.000441			4.043742	-0.00606	
0.02	0.080404			0.194707	0.012081	
0.03	0.1296			0.98179	0.017685	
0.04	0.160809					
0.05	0.2209					
0.06	0.241213					
0.07	0.281416					

Tratamento de dados

m	4.043742	-0.00606	b
Δm	0.194707	0.012081	Δb
R^2	0.98179	0.017685	

$$\Delta m = |m|\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{r^2}-1\right)}{N-2}}$$

Tratamento de dados



Tratamento de dados

Propagação de erros

G: grandeza que só podemos determinar medindo outras grandezas $x, y, z, \ldots$:

$$G = f(x, y, z, \ldots)$$

Exemplo: volume de uma sala

$$V = (comprimento) \times (largura) \times (altura) = c \times l \times a$$

Essas outras grandezas são conhecidas com uma determinada incerteza:

$$x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, z \pm \Delta z, \ldots$$

Estas incertezas vão "propagar-se" até G, ou seja, ΔG depende de $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$
Mas de que maneira? Qual é o "peso" de $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ em ΔG?

Tratamento de dados

$\Delta G =$ (maneira como G depende de x)$\times$ Δx + (maneira como G depende de y)$\times$ $\Delta y + \cdots$

A "maneira como G depende de x" representa-se por $\frac{\partial G}{\partial x}$, a derivada parcial em ordem a x. Calcula-se aplicando as regras de derivação em ordem a uma determinada variável, mas tratando as outras variáveis como constantes.

Exemplo: volume de uma sala

$$V = c \times l \times a$$

$$\frac{\partial V}{\partial c} = l \times a; \ \frac{\partial V}{\partial l} = c \times a; \ \frac{\partial V}{\partial a} = c \times l$$

$$\Delta V = (l \times a)\Delta c + (c \times a)\Delta l + (c \times l)\Delta a$$

Mas, em geral, as derivadas parciais podem ser positivas ou negativas…

Que implicações?

Tratamento de dados

$$\boxed{\Delta G = \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right| \Delta x + \cdots}$$

LIMITE SUPERIOR DO ERRO

- Número de medições for pequeno (no limite, apenas uma medição)

  A incerteza de x, y, z, etc. é dada (como já sabemos) por:

  – Erro de leitura
  – Maior desvio, $\{Max\ d_i\}$

  A incerteza de G é dada pelo limite superior do erro.

Tratamento de dados

- Número de medições grande (digamos, $N \geq 10$)

  Podemos usar estatística e não precisamos de ser tão pessimistas a ponto de usar o limite superior do erro — é mais razoável usar o erro mais provável (ou erro estatístico ou erro-padrão):

$$\boxed{\Delta G = \sqrt{\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|^2 \Delta x^2 + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|^2 \Delta y^2 + \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|^2 \Delta z^2 + \cdots}}$$

ERRO-PADRÃO

N.B.: Estamos a usar Δ para indicar quer o erro-padrão, quer o limite superior do erro, quer o erro estimado.

Tratamento de dados

Casos particulares	Limite superior do erro	Erro-padrão
$G = x \pm y$	$\Delta G = \Delta x + \Delta y$	$\Delta G = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$
$G = x \cdot y$ $G = \frac{x}{y}$	$\frac{\Delta G}{\lvert G\rvert} = \frac{\Delta x}{\lvert x\rvert} + \frac{\Delta y}{\lvert y\rvert}$	$\frac{\Delta G}{\lvert G\rvert} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$G = x^n$	$\frac{\Delta G}{\lvert G\rvert} = \lvert n\rvert \frac{\Delta x}{\lvert x\rvert}$	$\frac{\Delta G}{\lvert G\rvert} = \sqrt{\left(n\frac{\Delta x}{x}\right)^2}$
$G = p \ln x$	$\Delta G = \lvert p\rvert \frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta G}{\lvert G\rvert} = \sqrt{\left(p\frac{\Delta x}{x}\right)^2}$