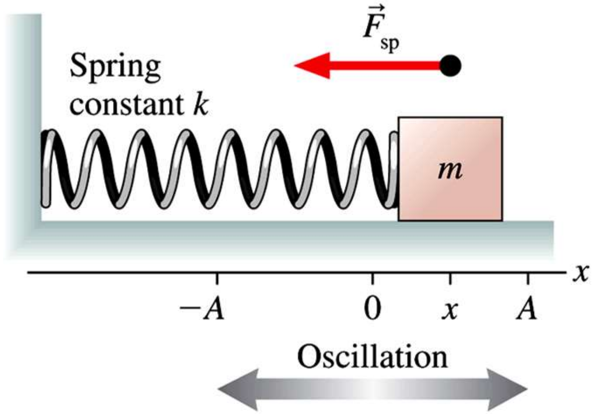
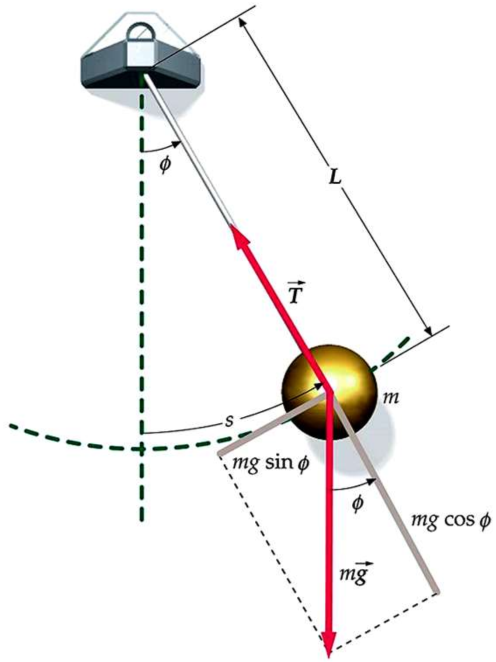
Cap. 2: Movimento oscilatório





Cap. 2: Movimento oscilatório

- Movimento harmónico simples (M.H.S.)
- Movimento amortecido
- Movimento forçado

Movimento oscilatório

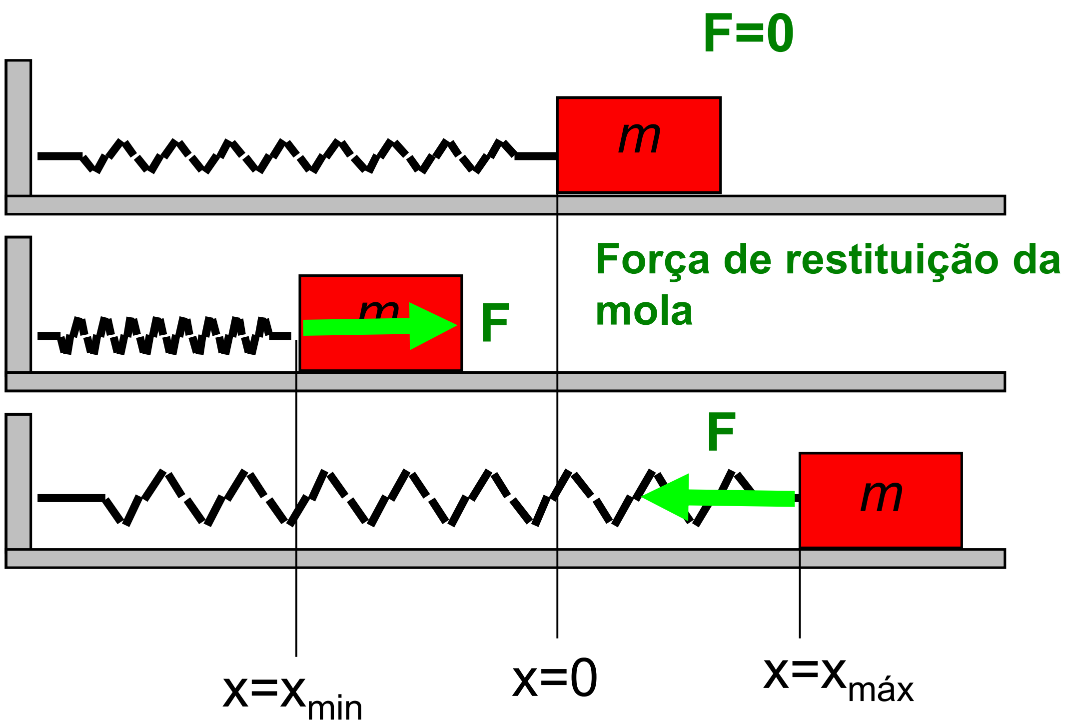
Se a força que atua sobre um corpo:

- é proporcional ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio
- aponta sempre para a posição de equilíbrio

O corpo tem movimento **periódico**, **harmónico**, **oscilatório** ou **vibratório**

Ex: Bloco preso a uma mola, baloiço (pêndulo), corda a vibrar, moléculas a vibrar num sólido, etc...

Massa presa a uma mola



F: Força restauradora

$$F = -kx$$

k: constante da mola

equação do movimento

$$F = -kx = ma_x \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

definimos $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ or $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

ω: frequência angular (radianos)

Massa presa a uma mola: M.H.S.

A solução geral é: $$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Amplitude
(deslocamento máximo)

e

Fase inicial

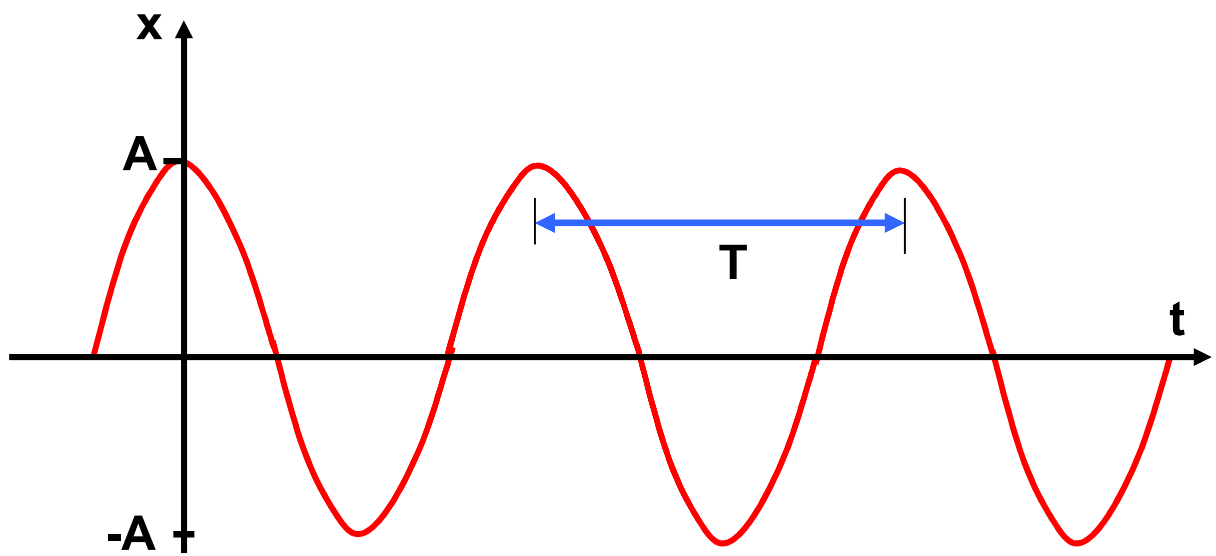
- ω é determinada pelas propriedades do sistema (K e m)
- A e ϕ são determinados pelas condições iniciais

Este movimento designa-se por

Movimento Harmónico Simples (M.H.S.)

Massa presa a uma mola: M.H.S.

$$x(t) = A\cos\omega t$$



frequência (Hz) – nº de oscilações por segundo

$$\omega = 2\pi \boxed{f}$$

Período (s) – tempo de uma oscilação completa

$$\omega = \frac{2\pi}{\boxed{T}}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

Massa presa a uma mola: M.H.S.

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$

Cálculo da velocidade da massa:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A sen(\omega t + \phi) \Rightarrow \boxed{v_{máx} = \omega A}$$

- ***v*** está desfasada de 90° em relação a *x*.
- ***v*** é zero quando ***x*** é máximo ou mínimo.
- ***v*** é máximo quando ***x*** = 0

Massa presa a uma mola: M.H.S.

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = -\omega A sen(\omega t + \phi)}$$

Cálculo da aceleração da massa:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \underbrace{A\cos(\omega t + \phi)}_{x} = -\omega^2 x$$

a tem sentido contrário a x
(relembrar Lei de Hooke)

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{a_{máx} = \omega^2 A}$$

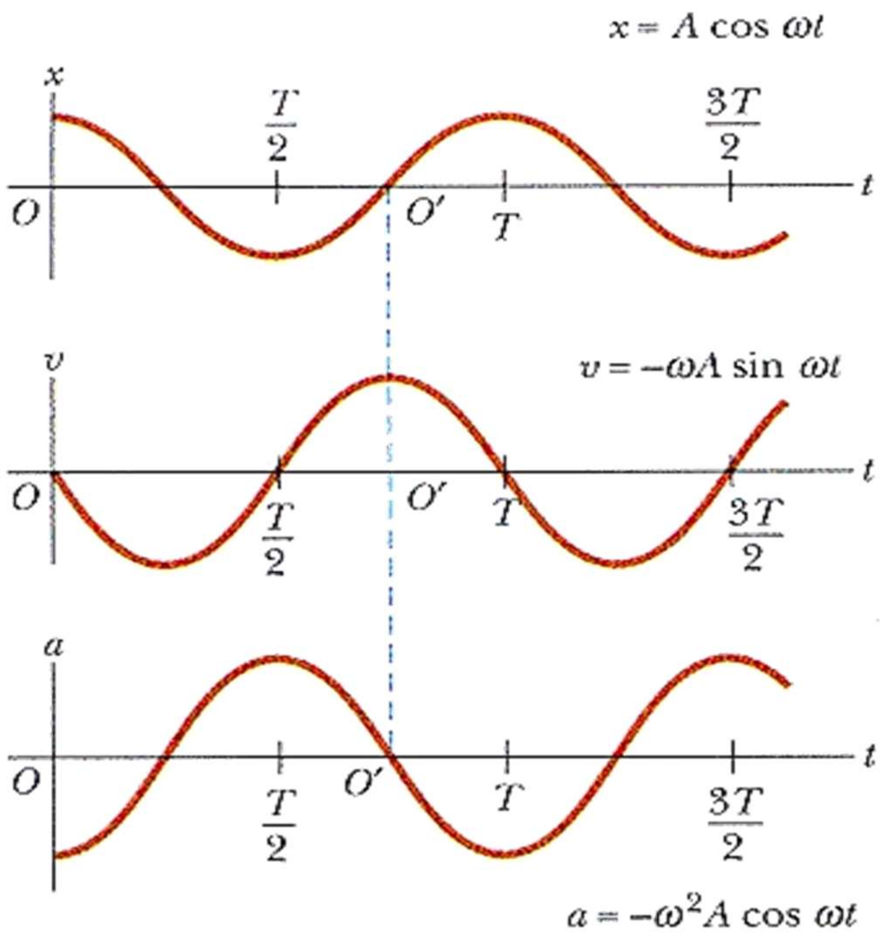
Massa presa a uma mola: M.H.S.

Cálculo da aceleração da massa:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \underbrace{A\cos(\omega t + \phi)}_{x} = -\omega^2 x$$

- *a* está desfasada de 180° em relação a *x*
- *a* está desfasada de 90° em relação a *v*
- *a* é zero quando *x* =0
- *a* é máxima quando *x* é mínimo (e vice-versa)

Massa presa a uma mola: M.H.S.

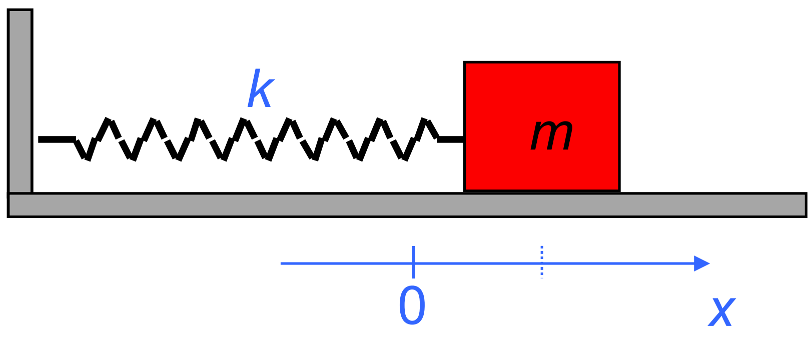


Determinação da fase inicial (exemplo)

condições iniciais $\Rightarrow$ Fase inicial

Exemplo:

É dito que $x(0) = 0$, e que x aumenta inicialmente (i.e. $v(0) = positivo$).



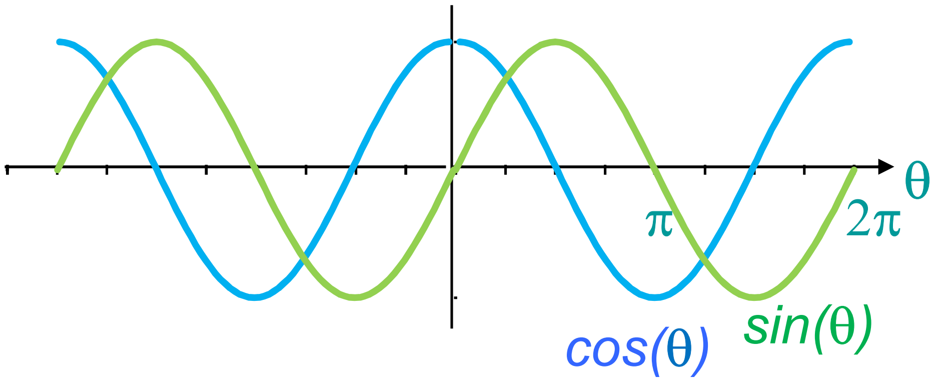
Determinação da fase inicial (exemplo)

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$x(0) = 0 = A\cos(\phi) \Rightarrow \phi = \pi/2$ ou $-\pi/2$

$v(0) > 0 = -\omega A \sin(\phi) \Rightarrow \phi < 0$

$\Rightarrow \boxed{\phi = -\pi/2}$



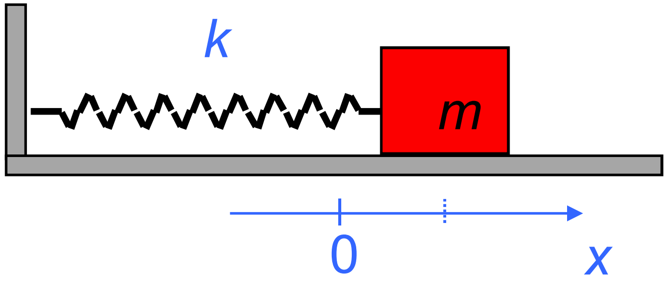
Determinação da fase inicial (exemplo)

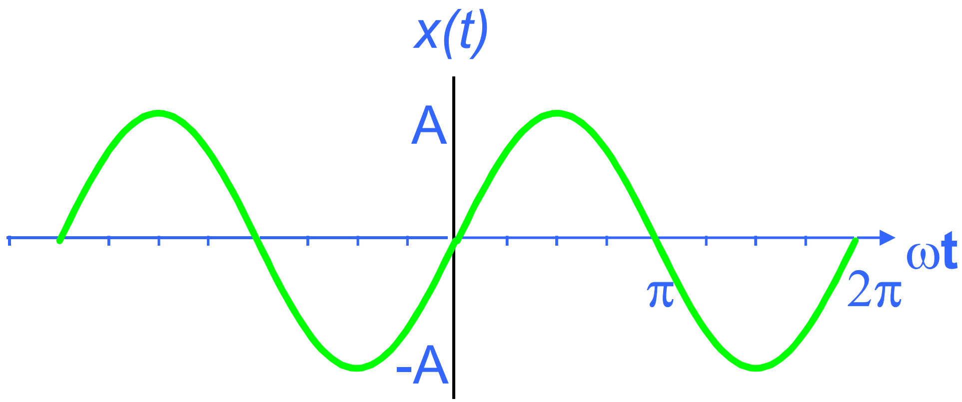
encontrámos $\phi = -\pi/2$!

$x(t) = A\cos(\omega t - \pi/2)$
$v(t) = -\omega A\sin(\omega t - \pi/2)$
$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t - \pi/2)$

$\Rightarrow$

$x(t) = A\sin(\omega t)$
$v(t) = \omega A\cos(\omega t)$
$a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t)$





Condições iniciais (caso geral)

$$x = A\cos\left(\omega t + \phi_0\right)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin\left(\omega t + \phi_0\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{mv_0^2}{k}} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

Condições iniciais (caso geral)

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= A\ \cos(\omega \times 0 + \phi_0) \\ v_0 &= -\omega\ A\ sen\ (\omega \times 0 + \phi_0) \end{aligned}}$$

$$\frac{v_0}{x_0} = \frac{-\omega\ A\ sen\phi_0}{A\ \cos\phi_0} = -\omega\ tg\phi_0$$

$$\boxed{tg\phi_0 = -\frac{v_0}{\omega\ x_0}}$$

exercício

Um corpo oscila com M.H.S., ao longo do eixo dos xx, de acordo com:

$$x(t) = 4{,}0\,cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(m)}$$

Determine :

a) A amplitude;

b) A frequência e o período do movimento;

c) Posição, velocidade e aceleração no instante t = 1 s;

d) A velocidade e a aceleração máximas;

e) O deslocamento em t $\in$[0,1s];

f) A fase em t=2s.

solução

$$x(t) = 4,0\cos(\pi\ t + \frac{\pi}{4})\text{(m)}$$

c) Velocidade, v = ?

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[4,0\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})\right] = -4,0\pi sen\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(m/s)}$$

Aceleração, a = ?

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-4,0\sin(\pi t + \frac{\pi}{4})\right] = -4,0\pi^2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{ms}^{-2})$$

solução

Posição, velocidade e aceleração no instante *t* = 1 s

$$x(1) = 4{,}0\,cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 4{,}0\,cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2{,}8\ \ m$$

$$v(1) = -4{,}0\pi\,sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 8{,}9\ \ ms^{-1}$$

$$a(1) = -(4{,}0\pi^{2})\,cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 27{,}9\ \ \ ms^{-2}$$

solução

d) $x(t) = 4,0\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})$ (m)

Velocidade máxima

$$v_{máx} = 4\pi \quad \text{(m/s)}$$

Aceleração máxima

$$a_{máx} = 4\pi^2 \quad \text{(m}^2\text{/s)}$$

e) Deslocamento entre 0-1s

$$\Delta x = x(1) - x(0) \Leftrightarrow$$

$$\Delta x = 4\cos\left(\pi.1 + \frac{\pi}{4}\right) - 4\cos\left(\pi.0 + \frac{\pi}{4}\right) = -2.83 - 2.83 = -5.66 \ m$$

solução

f) $x(t) = 4,0\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})$ (m)

Fase em t=2s:

$$\pi.2 + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} \quad \text{(rad)}$$

Pêndulo simples

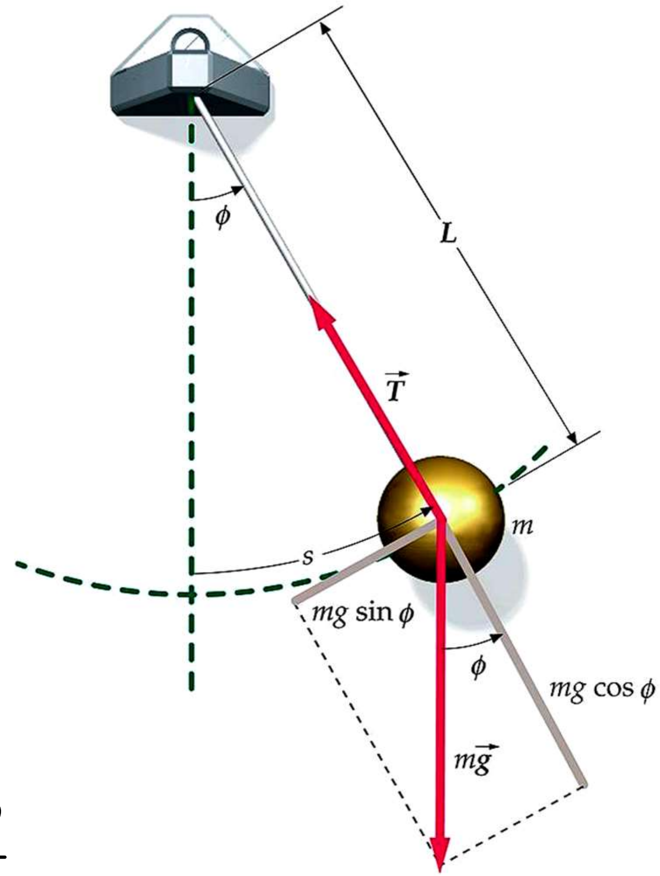
Força restauradora:

$$-mg\sin\phi$$

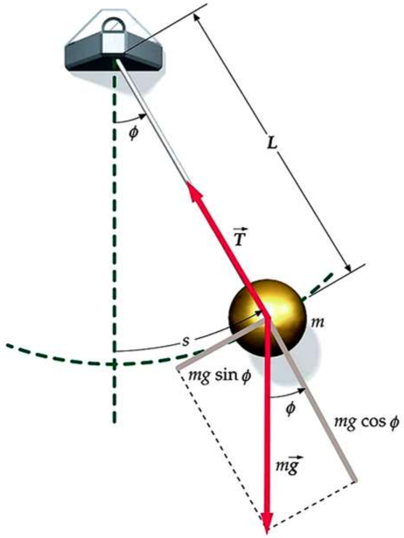
aceleração tangencial:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$-mg\sin\phi = m\frac{d^2s}{dt^2} = mL\frac{d^2\phi}{dt^2}$$



Pêndulo simples



$$-mg\sin\phi = m\frac{d^2s}{dt^2} = mL\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

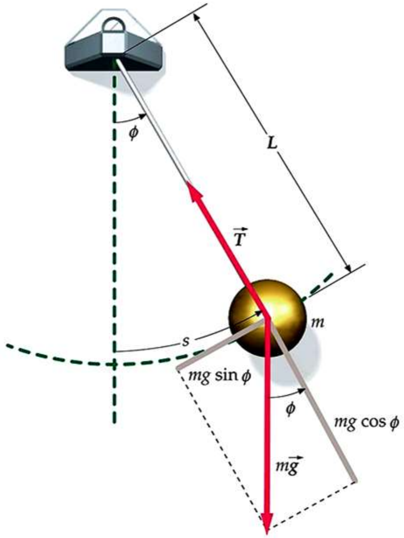
$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\phi \approx -\frac{g}{L}\phi \quad \text{se} \quad \phi \ll 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

solução: $\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$

Pêndulo simples: sumário

pequenas oscilações!



eq. movimento:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

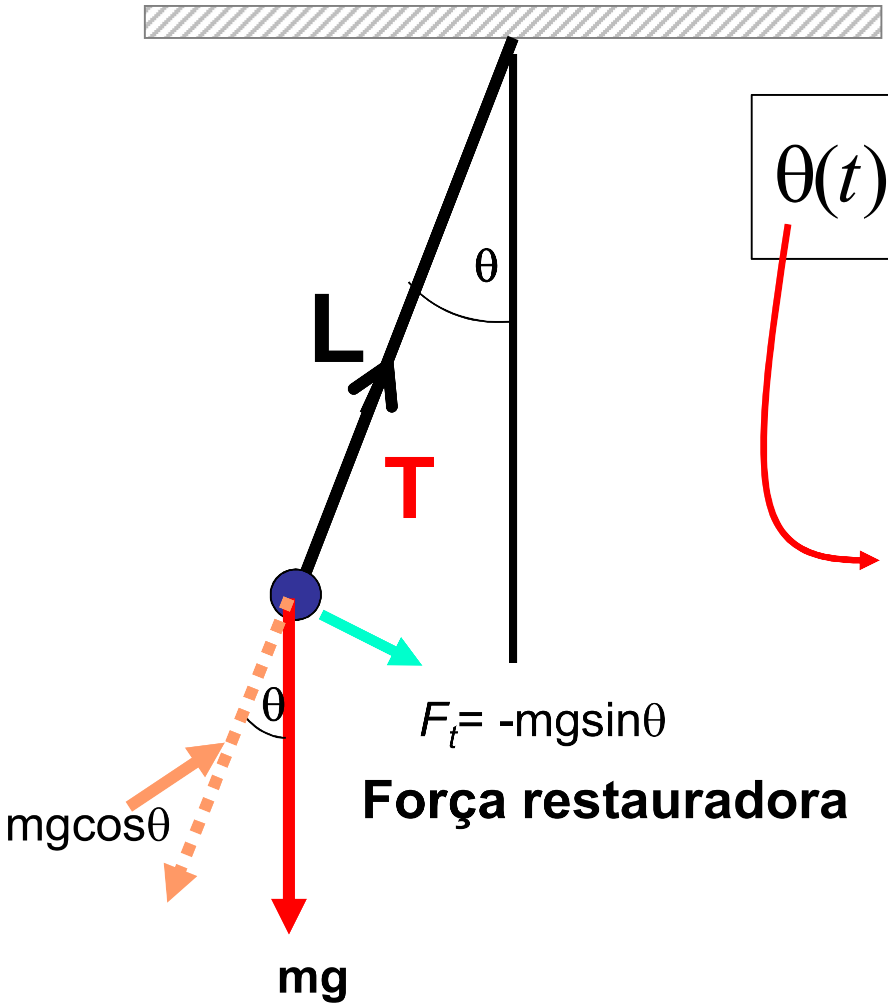
solução:

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Pêndulo Simples (outra notação)



F_t= -mgsinθ

Força restauradora

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Deslocamento angular máximo

Deslocamento angular

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Pêndulo Simples

Estás **sentado** num baloiço e um colega dá-te um pequeno empurrão. Começas a oscilar com período T_1.

Se te puseres **de pé** no baloiço oscilarás com um período T_2

Qual a afirmação correta?

(a) $T_1 = T_2$

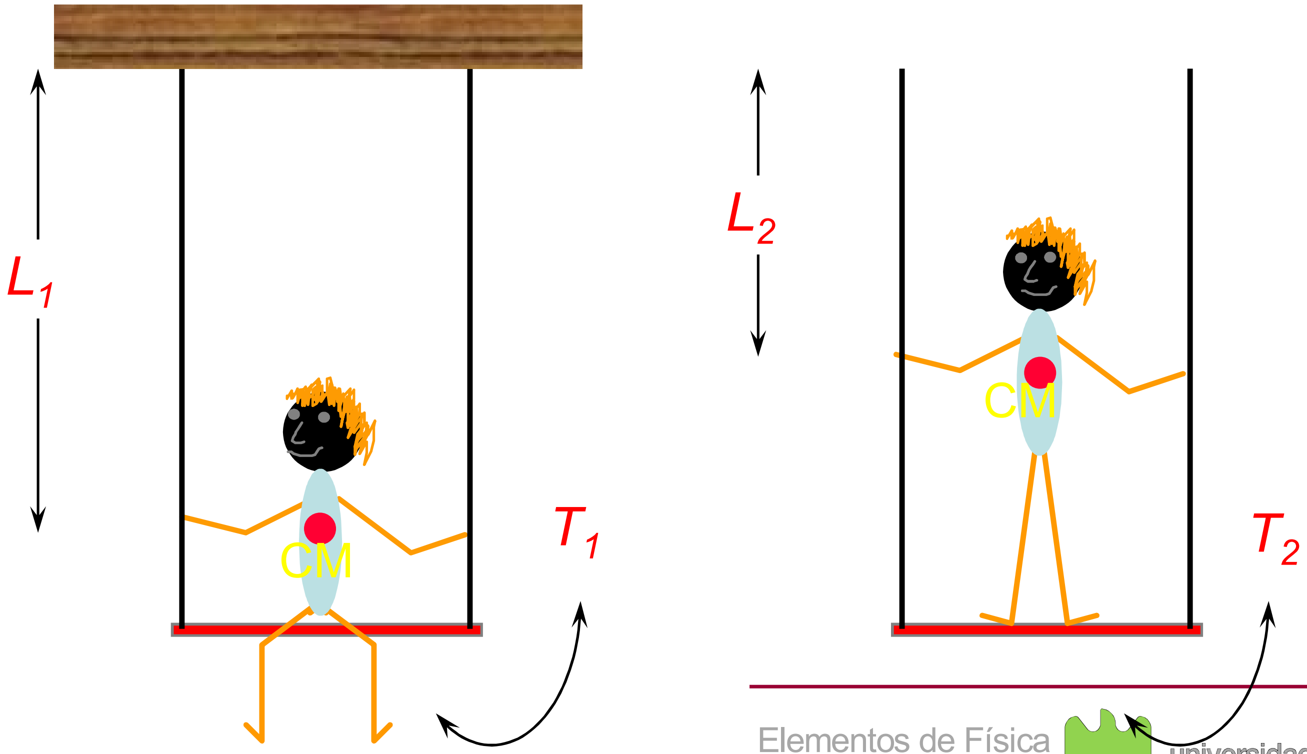
(b) $T_1 > T_2$ **Porquê?**

(c) $T_1 < T_2$

Pêndulo Simples

Em pé, o CM do baloiço está mais elevado.

Como $L_1 > L_2$ temos que $T_1 > T_2$.



Energia M.H.S.

Num M.H.S. a Energia Mecânica é constante:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

Energia potencial elástica:

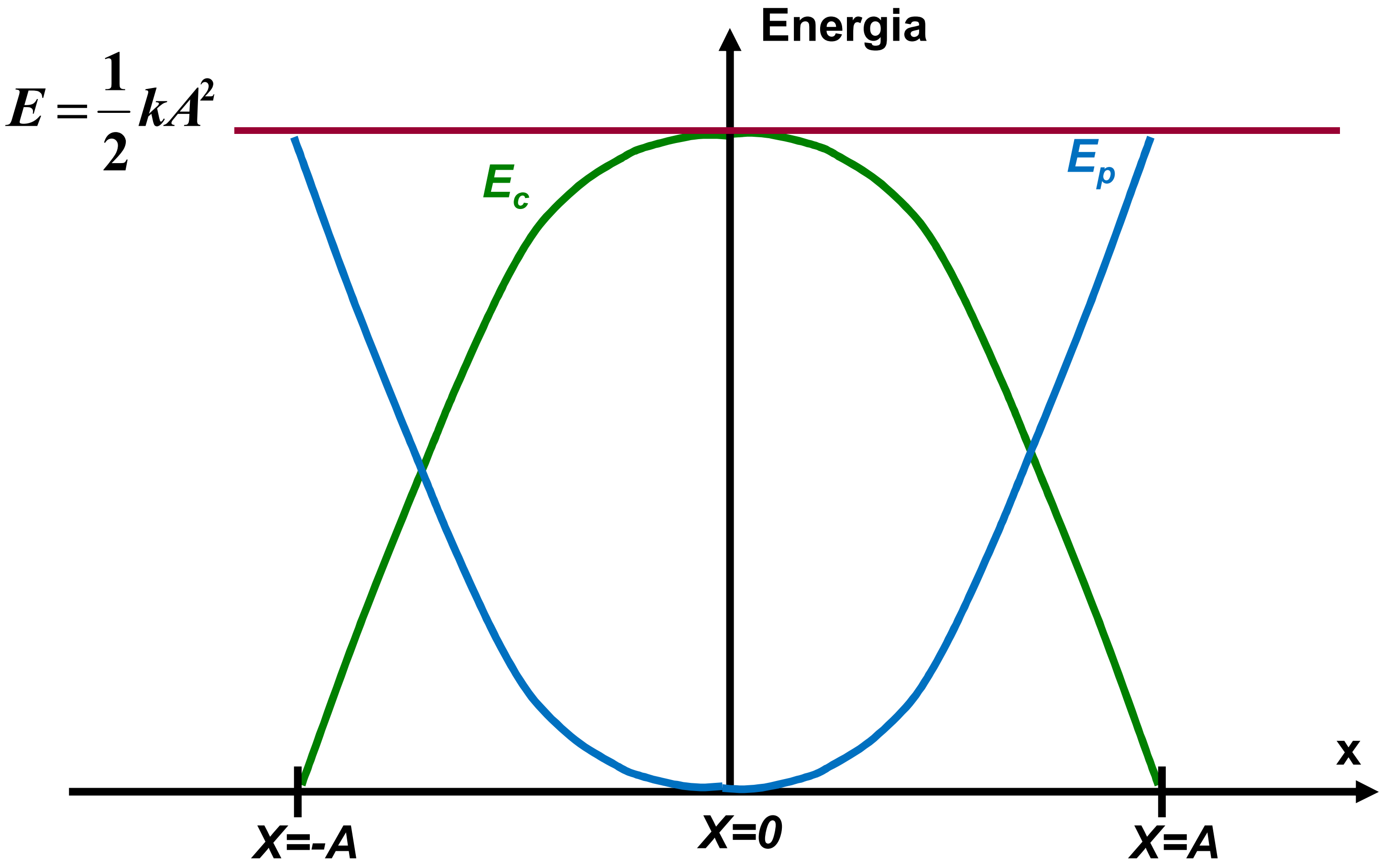
$E_{pe}(0)=0$ (posição de equilíbrio)

$$E_{Pe} = \frac{1}{2} k x^2$$

Energia cinética:

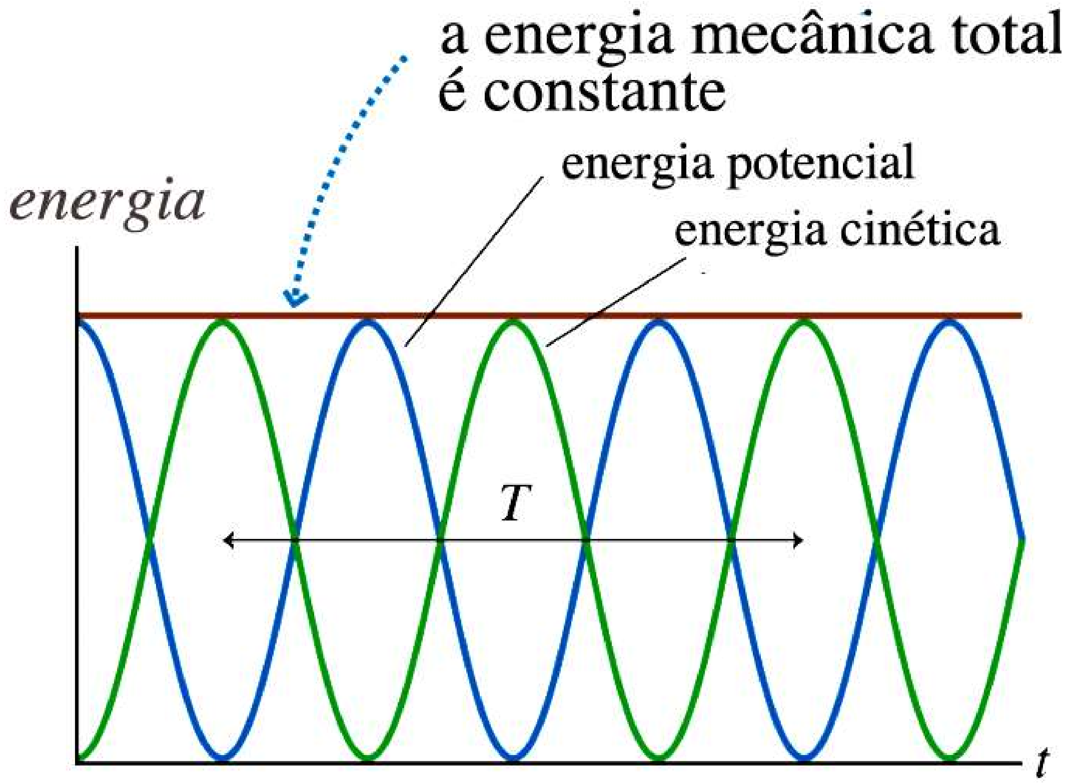
$$E_c = E - E_{pe} = \frac{1}{2} k \left(A^2 - x^2 \right)$$

Energia M.H.S. em função de *x*



Energia M.H.S. em função de *t*

$$E = \frac{1}{2} m v_x^{\,2} + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^{\,2} = \text{constante}$$



Exemplo

Um bloco de massa *M* = 4,0 kg está assente numa mesa horizontal e ligado a uma mola de constante *k* = 100 N/m e massa desprezável. O sistema executa um movimento harmónico simples. Considere que no instante inicial a mola está na posição de compressão máxima, que corresponde a 10 cm.

Determine:

a) A frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5 rad/s$$

b) O período

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{5} s$$

Exemplo

c) A equação do movimento $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

<u>Cálculo da fase inicial ϕ:</u>

No instante t = 0 o corpo está na posição x = -A

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$-A = A\cos(\phi)$$

$$-1 = \cos(\phi)$$

$$\phi = \pi$$

Equação do movimento:

$$x(t) = 0.1\cos(5t + \pi)(m)$$

Exemplo

d) A energia cinética do sistema no instante *t* = 1,0 s

$$E_c = E - E_{pe} = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right)$$

Precisamos de saber qual a posição do corpo no instante *t* = 1,0 s

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$x(t=1) = 0.1\cos(5+\pi)$$

$$x(t=1) = -0.028 \text{ m}$$

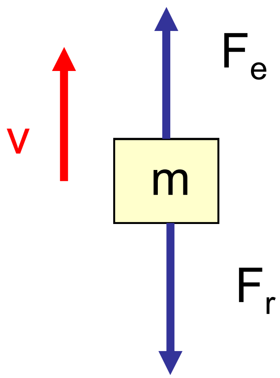
A energia cinética do sistema no instante t = 1.0 s será:

$$E_c = E - E_{pe} = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right)$$

$$E_c = \frac{1}{2}100\left(0.1^2 - x^2\right)$$

$$E_c = 0.46 \text{ J}$$

Oscilador Amortecido



força elástica: $F_e = -kx$

força resistíva: $F_r = -bv$

Oscilador Amortecido

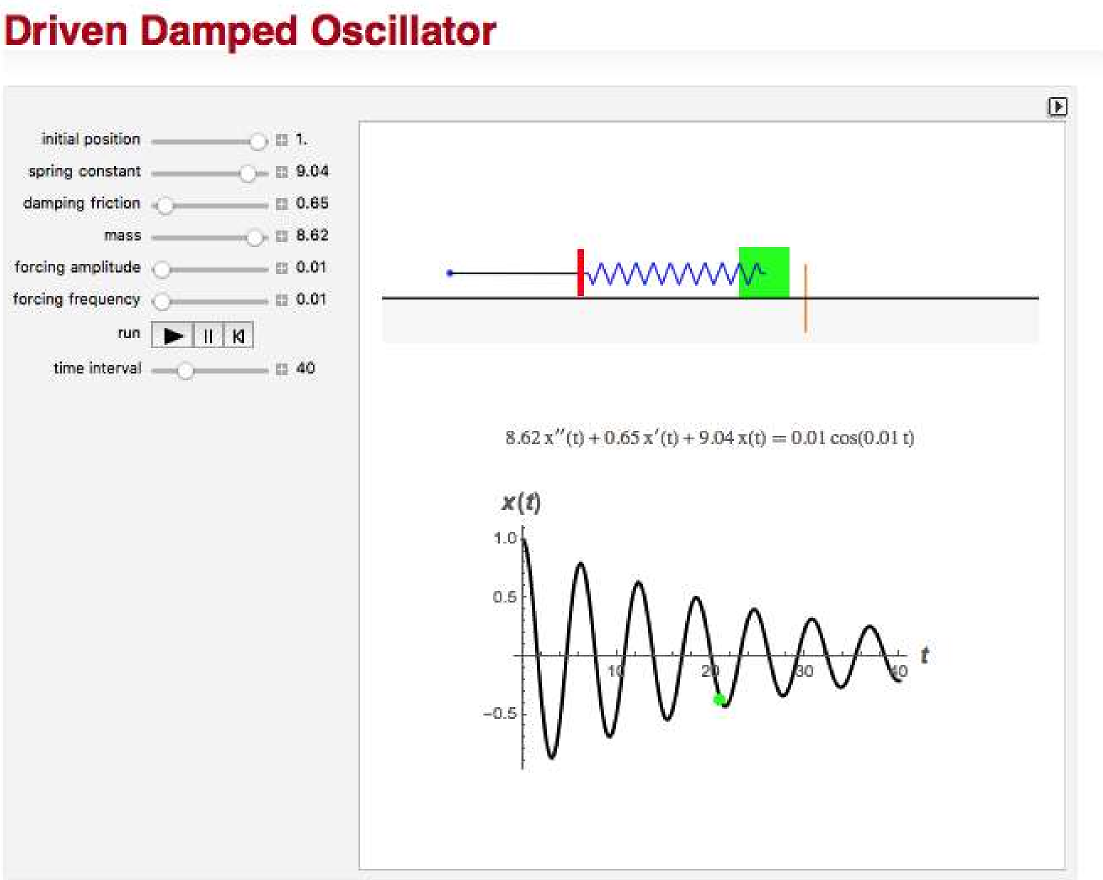
Na realidade, na ausência de forças externas, a amplitude de um oscilador diminui no tempo, devido a forças dissipativas (atrito, viscosidade, etc.).

Se *A* diminui, a Energia Mecânica diminui também:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

Diz-se que o movimento é **amortecido**

Oscilador Amortecido



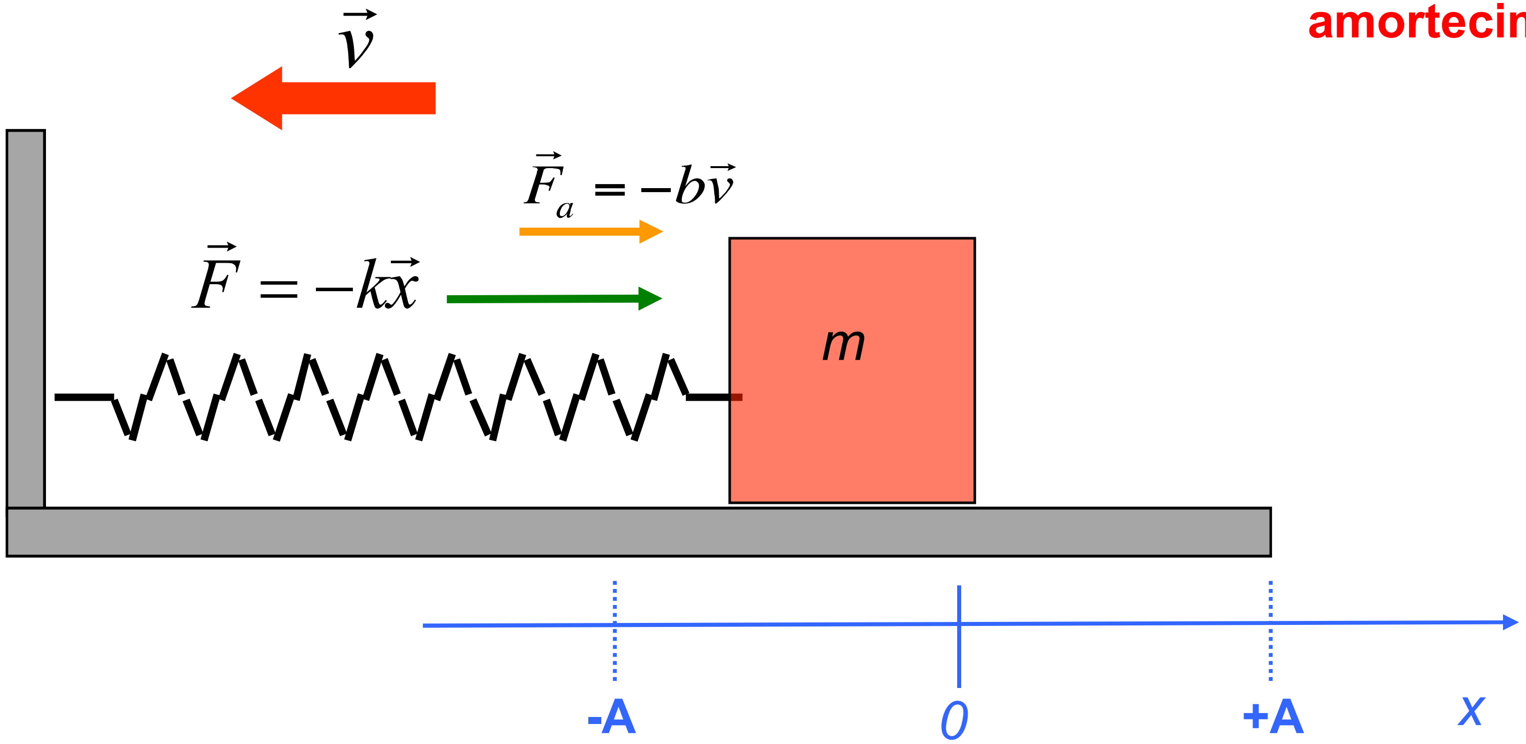
http://demonstrations.wolfram.com/DrivenDampedOscillator/

Oscilador Amortecido

Exemplo de força dissipativa: $\vec{F}_a = -b\vec{v}$

Força devida à viscosidade de um fluido

Coeficiente de amortecimento



equação do movimento

$$\sum F = -kx - bv = -kx - b\frac{dx}{dt} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

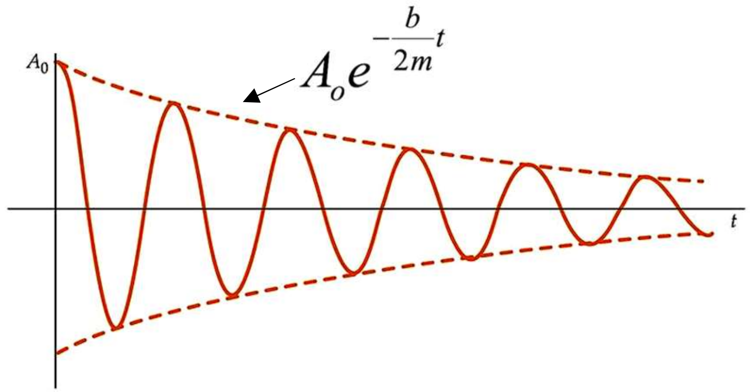
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

com

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \\ \gamma &= \frac{b}{2m} \end{aligned}}$$

3 regimes

subamortecimento

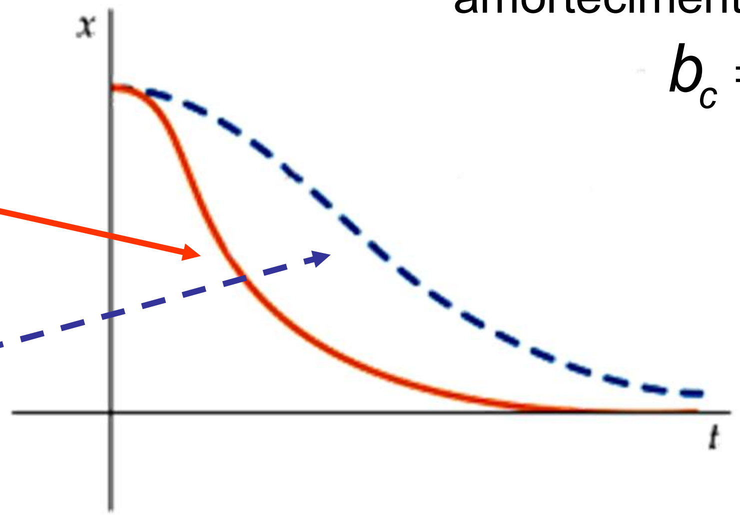


Coeficiente de amortecimento crítico:

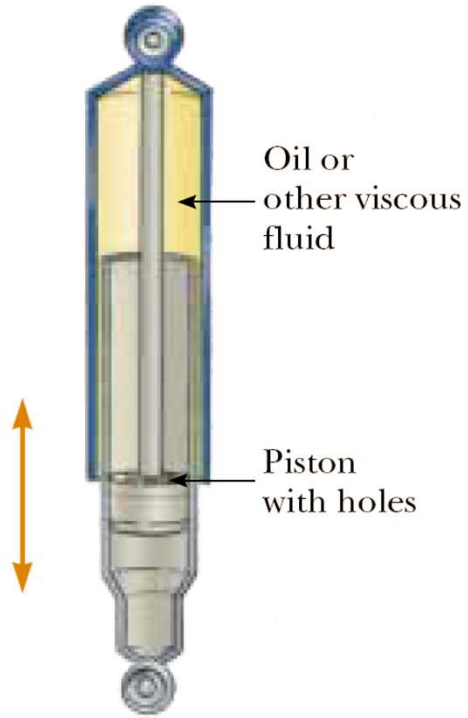
$$b_c = 2m\omega_0$$

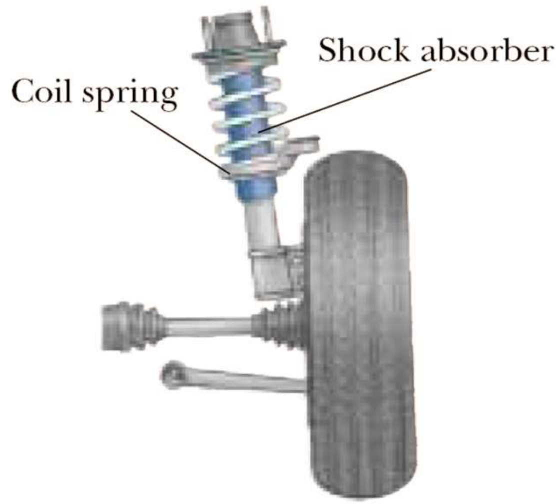
amortecimento crítico

sobreamortecimento



exemplo


Oil or
other viscous
fluid
Piston
with holes

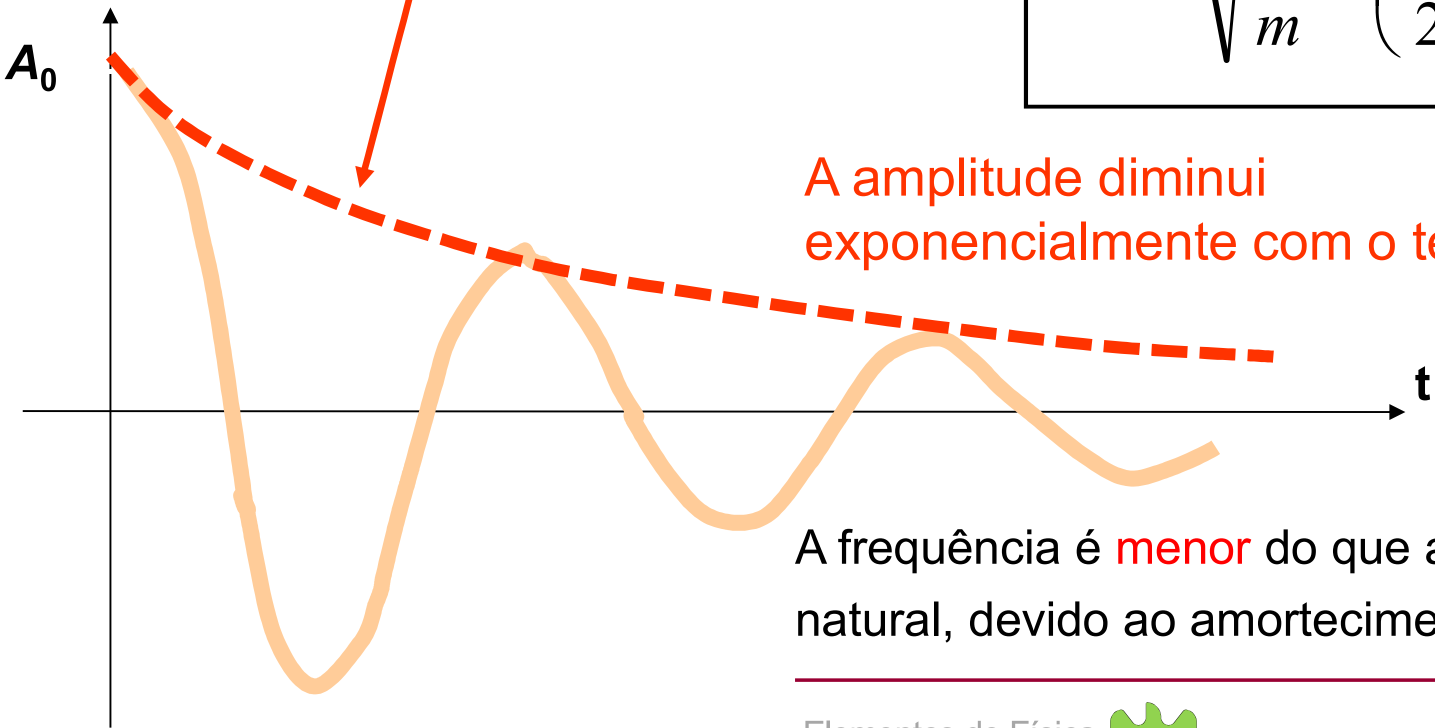

Shock absorber
Coil spring

Oscilador Amortecido (subamort.)

posição: $x = \boxed{A_o e^{-\frac{b}{2m}t}} \cos(\omega t + \phi)$

Frequência de oscilação:

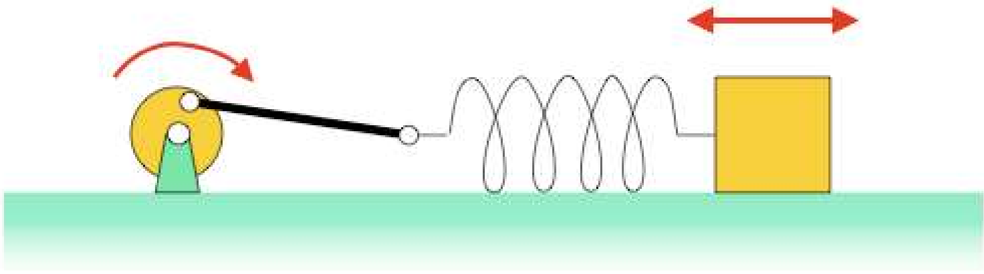
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$



A amplitude diminui exponencialmente com o tempo

A frequência é menor do que a frequência natural, devido ao amortecimento

Oscilador forçado



"mola" ligada a um "motor"

Oscilador Forçado

- Para manter um sistema a oscilar na presença de forças dissipativas, temos de fornecer energia, aplicando uma força externa. Ao fim de algum tempo, o movimento terá a frequência da força externa.
- Nessa altura, a energia fornecida (numa oscilação) será igual à dissipada, a amplitude mantém-se constante, e o seu valor depende da frequência externa.

Este movimento designa-se

Oscilação Forçada

equação do movimento

Força externa:

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t$$

frequência angular da força externa

2ª Lei de Newton:

$$\sum F = F_0 \cos \omega t - b\frac{dx}{dt} - kx = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

amortec.

força elástica

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t}$$

com $\boxed{\gamma = \dfrac{b}{2m}}$

solução geral

solução: $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$

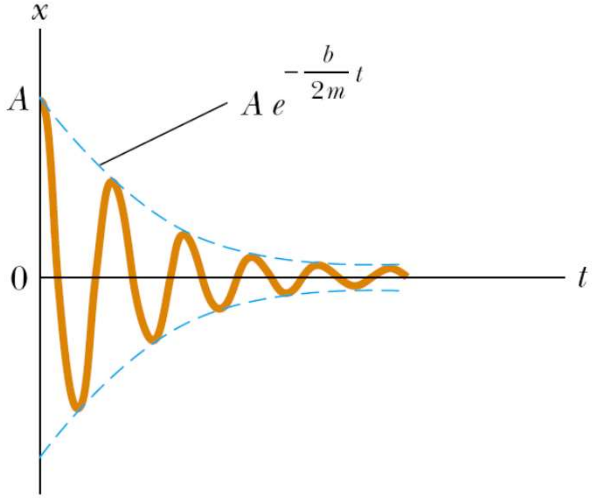
solução transiente:

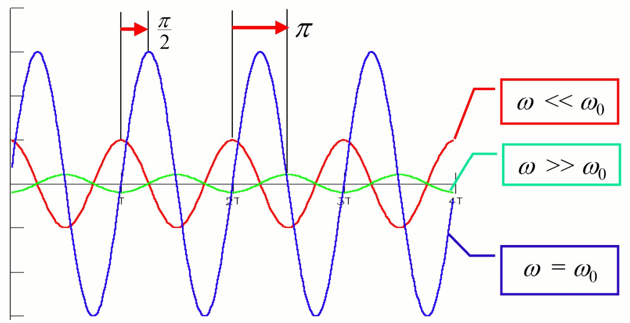
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

+

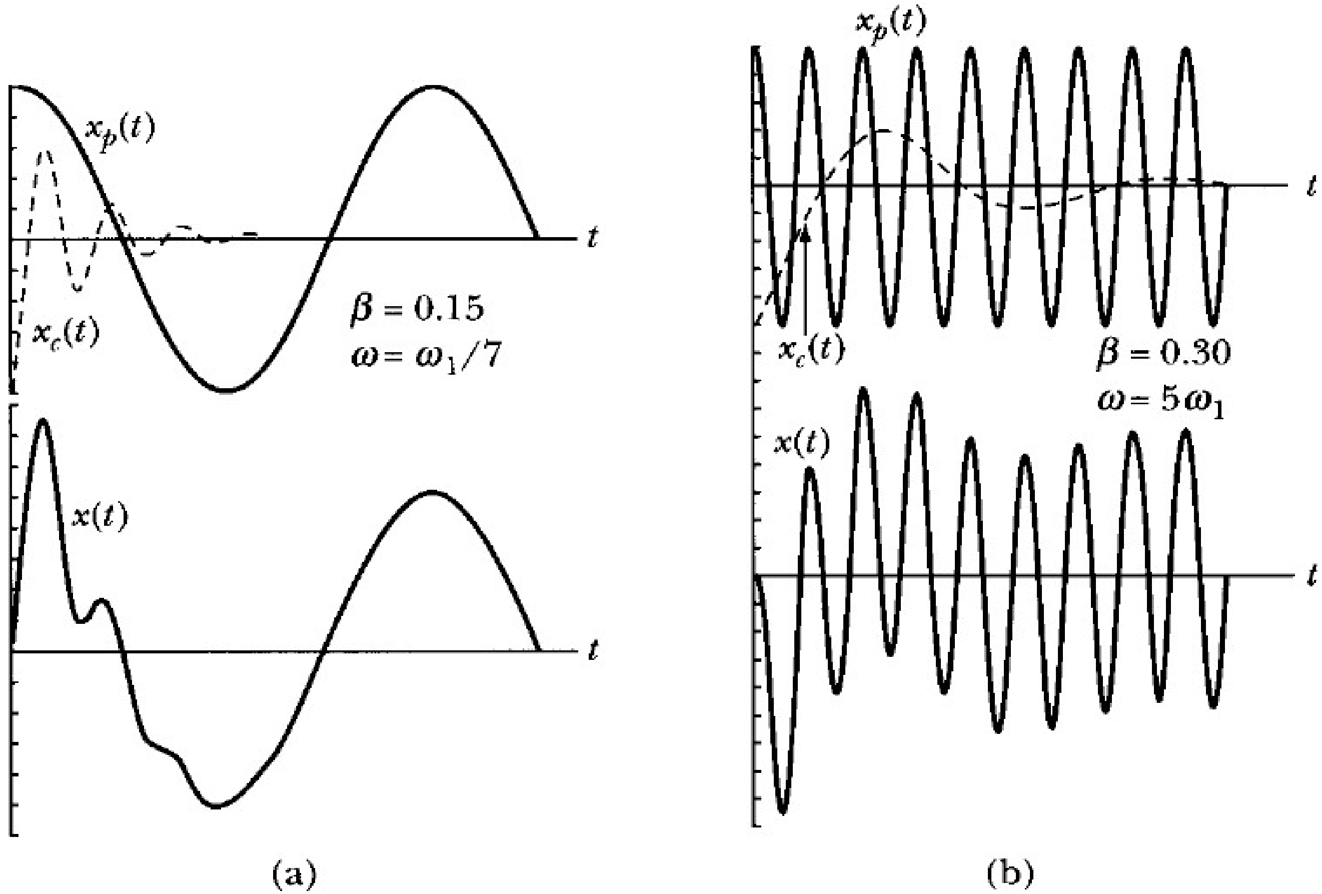
solução permanente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$





Solução transiente + solução permanente



solução permanente

$$\boxed{x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

com $$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$ amplitude

$$\delta = \arctan\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$ desfasamento entre a posição x e a força

$$0 \le \delta \le \pi$$

Oscilador Forçado

Força externa: $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Posição: $x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)$

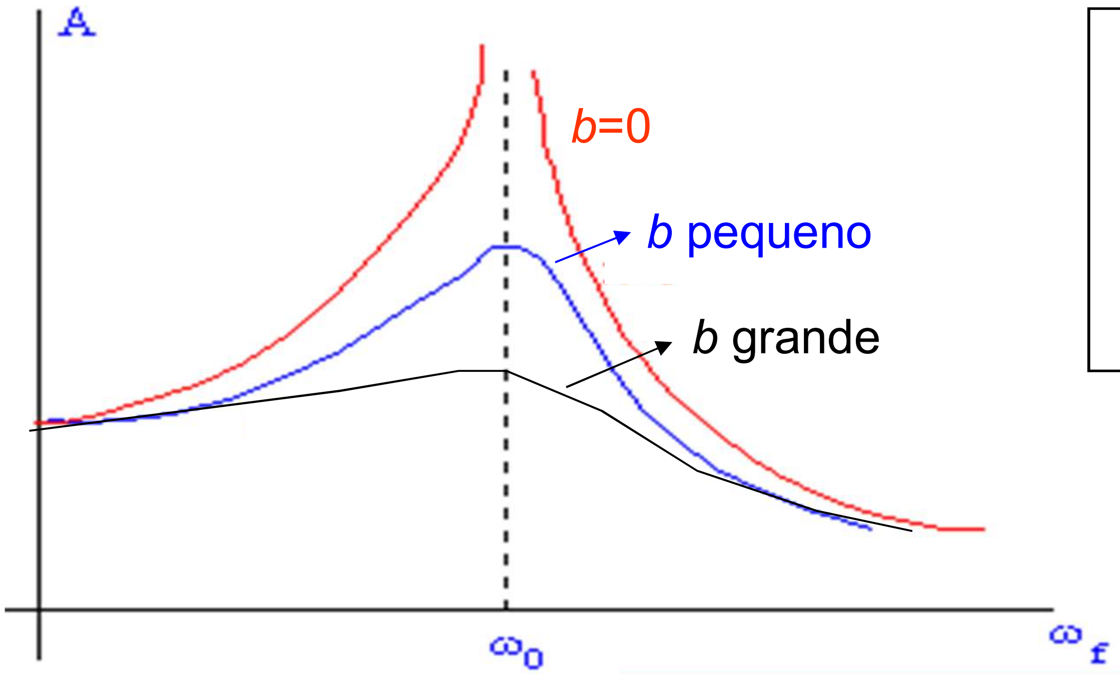
Mesma frequência!

Amplitude: $A = \dfrac{\dfrac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)^2 + \left(\dfrac{b\omega}{m}\right)^2}}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ressonância no oscilador forçado

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$ ⇨ A é máximo quando $\omega \approx \omega_0$ ⇨ **ressonância**



Na ausência de amortecimento

$A \longrightarrow \infty$

quando $\omega \longrightarrow \omega_0$

notas sobre energia

Considerando a solução permanente:

na ressonância:

- energia dissipada máxima
- trabalho realizado pelo motor máximo
- energia mecânica do oscilador máxima

nota: num período

energia dissipada pelo atrito = trabalho realizado pelo motor

Ressonância

A Ponte do Estreito de Tacoma caiu em 1940, devido a torques vibracionais induzidos pelo vento, fazendo a ponte oscilar com $\omega \approx$ frequência de ressonância!

Applet1 Applet3

Applet2 Applet4

Exemplo

Um sistema mola/massa de m = 10 kg oscila com um período de 2 s e uma amplitude inicial de 20 cm. Após 10 oscilações completas a amplitude reduz-se a 15 cm.

a) Calcule a constante de amortecimento do movimento oscilatório

Movimento amortecido:

$$x(t) = A_o e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$A = A_o e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$15 = 20 e^{-\frac{b}{20}20}$$

$$\ln \frac{15}{20} = -b$$

$$b = 0.29 kg / s$$

Exemplo

b) Calcule a energia mecânica total do sistema ao fim de 10 oscilações completas.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{2}$$

$$\omega = \pi \ rad/s$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\pi = \sqrt{\frac{k}{10} - \left(\frac{0.29}{20}\right)^2}$$

$$k = 9.87 N/m$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E = \frac{1}{2}9.87(0.15)^2$$

$$E = 0.11J$$

Exemplo

c) O oscilador passa a ser forçado por uma força externa de amplitude 7,5 N. Calcule a frequência da força externa para a amplitude do oscilador seja máxima. Calcule o valor dessa amplitude.

$$x = A\cos(\omega_f t + \phi) \qquad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\dfrac{b\omega_f}{m}\right)^2}}$$

A amplitude é máxima para $\omega_f \approx \omega_0$
e tem o valor de: $A \approx \dfrac{F_0}{b\omega_0} = 26\ m$