Capítulo 4: Interferência de Ondas

Tópicos:

Sobreposição e interferência de ondas harmónicas

Ondas estacionárias

Batimentos (interferência no tempo)

Sobreposição e interferência

Uma característica importante do movimento ondulatório ocorre quando duas ou mais ondas coincidem no espaço e no tempo, verificando-se então o fenómeno de interferência.

Princípio de sobreposição:

Se duas ou mais ondas passam na mesma região do espaço, no mesmo tempo, a função de onda resultante é, em qualquer ponto, a soma algébrica das funções de onda individuais .

Sobreposição e interferência

Considere-se duas ondas harmónicas progressivas, que se propagam da esquerda para a direita, tendo:

- a mesma amplitude, A,
- a mesma constante de propagação, k,
- a mesma frequência f,
- o mesmo comprimento de onda λ
- mas desfasadas entre si de φ

$$y_1(x,t) = A \text{ sen } (\omega t - kx)$$

$$y_2(x,t) = A \text{ sen } (\omega t - kx + \varphi)$$

Sobreposição e interferência

De acordo com o **princípio de sobreposição** a onda resultante na região do espaço e tempo onde coincidem as duas primeiras, será obtida pela sua adição algébrica:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$
$$= A\,[\text{sen } (\omega t - kx) + \text{sen } (\omega t - kx + \varphi)\,]$$

Como sen a + sen b = 2 cos (a-b)/2 sen (a+b)/2, tem-se:

$$y(x,t) = \left[2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] sen\left[\omega t - kx + \left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

Sobreposição e interferência

Tal como as ondas iniciais a onda resultante

- é harmónica
- tem o mesmo comprimento de onda λ
- a mesma constante de propagação, k,
- a mesma frequência f,

Contudo, difere das ondas iniciais por apresentar

- uma diferença de fase de **φ/2**
- uma nova amplitude **A'=2A cos φ/2**

Sobreposição e interferência

Ocorre **interferência totalmente construtiva**

sempre que $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm 1$

$$\left(\frac{\varphi}{2}\right) = n\pi$$
$$\varphi = 0, 2\pi, \ldots, 2n\pi$$

Ocorre **interferência totalmente destrutiva**

sempre que $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$

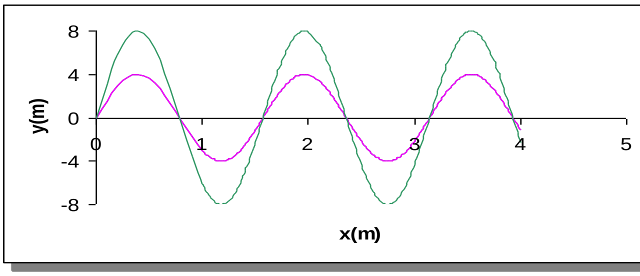
$$\left(\frac{\varphi}{2}\right) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$
$$\varphi = \pi, 3\pi, \ldots, (2n+1)\pi$$

Sobreposição e interferência

Interferência totalmente construtiva:

φ = 0, logo cos (φ/2) = 1

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2A\text{sen}[kx - \omega t]$$

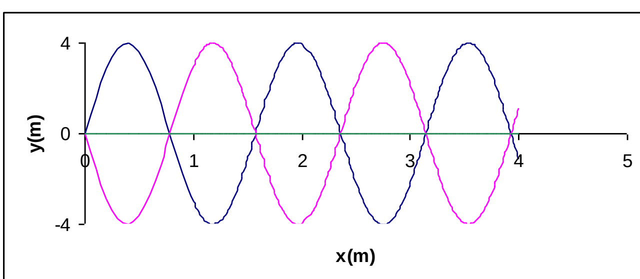


Sobreposição e interferência

Interferência totalmente destrutiva:

$\varphi = \pi$, logo cos (φ/2) = 0

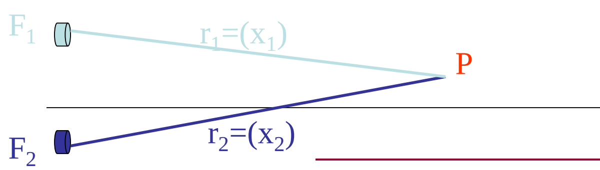
$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 0$$



Sobreposição e interferência

O desfasamento entre duas ondas é muitas vezes de **origem espacial**, ou seja, deriva do facto de as ondas terem diferentes percursos entre as fontes e o ponto de interferência.

Considere-se duas fontes F1 e F2 que mantêm uma diferença de fase constante (fontes coerentes), emitindo ondas harmónicas com a mesma amplitude e frequência.



Sobreposição e interferência

Após diferentes percursos r_1 (= x_1) e r_2 (=x_2), as ondas no ponto P são:

$$y_1(x,t) = A \text{ sen } (\omega t - kx_1)$$
$$y_2(x,t) = A \text{ sen } (\omega t - kx_2)$$

De acordo com o princípio de sobreposição, a onda resultante é:

$$y(x,t) = A\left[sen(\omega t - kx_1) + sen(\omega t - kx_2)\right]$$
$$= 2A\cos\left(\frac{k(x_1 - x_2)}{2}\right) sen\left[\omega t - kx\right]$$

com $x \approx (x_1+x_2)/2$

Sobreposição e interferência

A diferença de fase φ entre as duas ondas é então

$$\varphi = (kx_1 - \omega t) - (kx_2 - \omega t) = k(x_1 - x_2) = k\,\Delta x$$

Verifica-se que a diferença de fase é proporcional à diferença de percurso.

Como $k = 2\pi / \lambda$, tem-se:

$$\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$$

Sobreposição e interferência

A interferência totalmente construtiva é dada pela condição:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{k\Delta x}{2} = n\pi$$

$$\Delta x = \lambda, 2\lambda, \ldots n\lambda$$

ou seja, verifica-se se a diferença de percurso for igual a um <u>número inteiro de comprimentos de onda</u>

Sobreposição e interferência

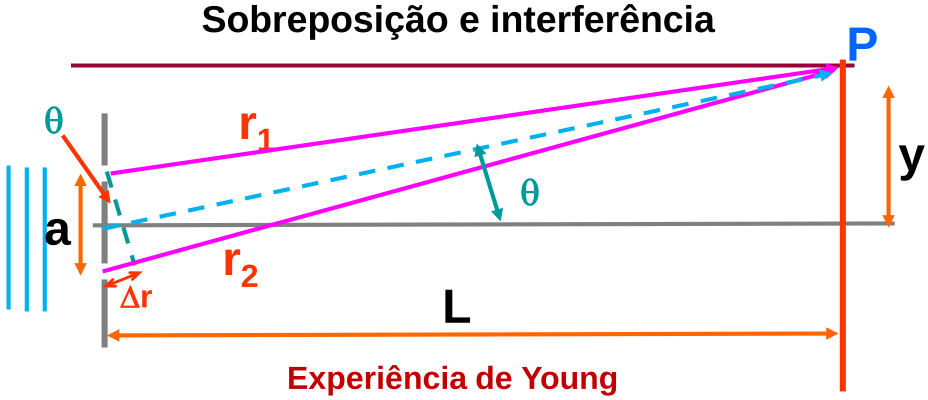
A interferência totalmente destrutiva é dada pela condição:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{k\Delta x}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots, (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

ou seja, verifica-se se a diferença de percurso for igual a um <u>número inteiro ímpar de metade do comprimento de onda</u>

Sobreposição e interferência



Experiência de Young

$\Delta r = r_2 - r_1$; L>> a; $\Delta r \cong a \sin\theta$; $\sin\theta \cong y/L$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r \Leftrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta \Leftrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{y}{L} a$$

Sobreposição e interferência

Interferência construtiva:

$$\Delta r = n\lambda \Leftrightarrow a\sin\theta = n\lambda \Leftrightarrow y = \frac{n\lambda L}{a}$$

n=0,±1, ±2,..

Interferência destrutiva:

$$\Delta r = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow a\sin\theta = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow y = \frac{(2n+1)\lambda L}{2a}$$

n=0,±1, ±2,..

Sobreposição e interferência

Exemplo

Numa experiência de Young realizada com luz, a separação entre as duas fendas é de 0.20mm e o ecran de observação está a uma distância de 1.0m. A terceira franja brilhante (*n*=3) está a uma distância de 7.5mm da franja central. Determine o comprimento de onda da luz utilizada.

Solução:

A posição da n-ésima franja brilhante é dada $y = \frac{n\lambda L}{a}$

Com n = 3, L = 1.0m, y = 7.5mm e a = 0.20mm, obtém-se então λ = 500nm.

Ondas estacionárias

Quando se confina o movimento ondulatório a uma **região limitada do espaço**, como uma corda em que as extremidades estão fixas, um líquido num canal ou uma onda electromagnética numa cavidade, a interferência produz **ondas estacionárias**.

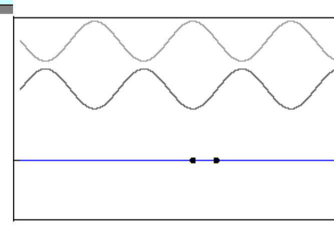
Este tipo de interferência é de grande interesse prático, ex.

-- Física atómica - quantificação dos níveis de energia;
-- Emissão laser;
-- Desenho de pontes, prédios, instrumentos musicais

Ondas estacionárias

Duas ondas harmónicas que se propagam em sentidos opostos interferem de tal modo que há pontos que não se desviam da posição de equilíbrio - nodos - e outros que vibram com amplitude máxima – anti-nodos ou ventres.

A onda resultante não se propaga e chama-se onda estacionária



Ondas estacionárias

Ondas estacionárias numa corda

Considere-se a corda OX que tem a extremidade O fixa. Uma onda harmónica transversal incidente que se propaga para a esquerda, expressa por $y_1(x,t) = A \, sen\,(\omega t + kx)$, será reflectida em O, produzindo uma nova onda harmónica que se propaga para a direita e é expressa por $y_2(x,t) = A \, sen\,(\omega t - kx)$.

Ondas estacionárias

O deslocamento em qualquer ponto da corda é o resultado da sobreposição das duas ondas:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A[sen(kx+\omega t) + sen(kx-\omega t)]$$
$$y(x,t) = 2A sen(kx)\cos(\omega t)$$

As expressões $(kx \pm \omega t)$ não aparecem na onda resultante e como tal ela não representa uma onda progressiva, mas sim uma onda estacionária. A amplitude varia com a posição e é dada por:

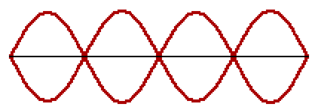
A' = 2 A sen (kx)

Ondas estacionárias

A amplitude A' = 2A sen (kx) é nula para kx = n π, onde n é inteiro. Como k = 2π/ λ, tem-se:

$$x = \frac{n\lambda}{2}$$

Estes pontos designam-se por *nodos.*
Os nodos consecutivos estão separados de λ /2 .



A standing wave pattern for a string

Cap. 4: Interferência de ondas

Ondas estacionárias

Os pontos de amplitude máxima – *anti-nodos* ou ventres - ocorrem quando |sen (kx)|=1; ou seja, para

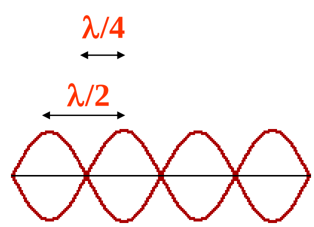
kx = (2n+1) π/2

Como k = 2π/ λ, tem-se: $x = \dfrac{(2n+1)\lambda}{4}$

Cap. 4: Interferência de ondas

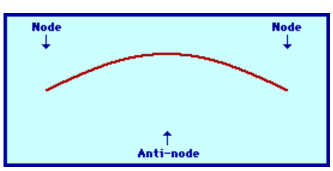
Ondas estacionárias

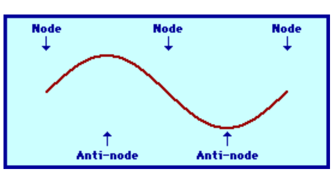
Note-se que anti-nodos (nodos) adjacentes estão separados de **λ/2** e que a distância entre um nodo e um antinodo é de **λ/4.**

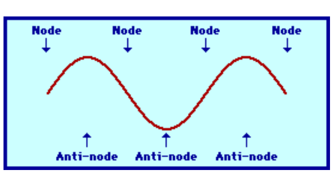


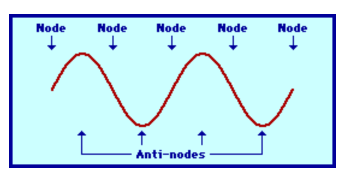
A standing wave pattern for a string

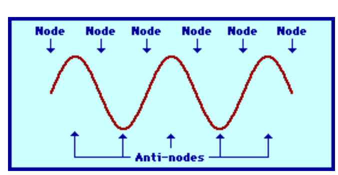
Ondas estacionárias









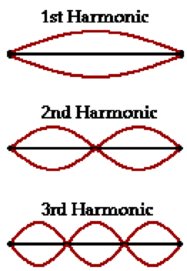


Ondas estacionárias

Exemplo 1: corda presa nas duas extremidades

$L = n\dfrac{\lambda}{2}$ (L= comprimento da corda)

$$\lambda_n = 2L/n \qquad f_n = \frac{nv}{2L}$$



$$\longrightarrow \lambda_1 = 2L \longrightarrow f_1 = \frac{v}{2L}$$

$$\longrightarrow \lambda_2 = L \longrightarrow f_2 = \frac{v}{L}$$

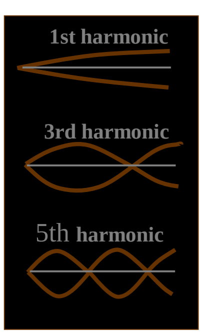
$$\longrightarrow \lambda_3 = 2L/3 \longrightarrow f_3 = \frac{3v}{2L}$$

Ondas estacionárias

Exemplo 2: corda com uma extremidade livre

L- comprimento da corda
Ponto x=L é um ventre

$$\lambda_{2n+1} = \frac{4L}{2n+1} \qquad f_{2n+1} = (2n+1)\frac{v}{4L}$$



$$\longrightarrow \lambda_1 = 4L \longrightarrow f_1 = \frac{v}{4L}$$

$$\longrightarrow \lambda_3 = \frac{4L}{3} \longrightarrow f_3 = 3\frac{v}{4L}$$

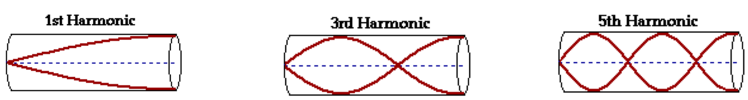
$$\longrightarrow \lambda_5 = \frac{4L}{5} \longrightarrow f_5 = 5\frac{v}{4L}$$

Ondas estacionárias

Exemplo 3: ondas sonoras estacionárias

Tubo aberto nas duas extremidades:

Tubo aberto em uma extremidade:



Ondas estacionárias

Exemplo

Num esforço para ter o nome no Guiness Book of World Records, alguém construiu uma viola em que as cordas apresentam um comprimento de 5.0m. Uma corda tem uma densidade linear de massa de 40.0g/m e uma frequência fundamental de 20.0Hz. Calcule a) a tensão desta corda e b) a frequência e o comprimento de onda do segundo harmónico.

Solução:

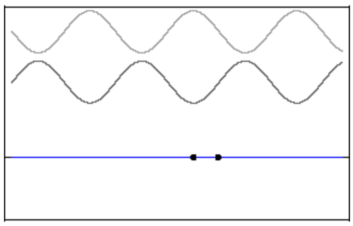
Tem-se $f_1 = \dfrac{v}{2L}$ e $v = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

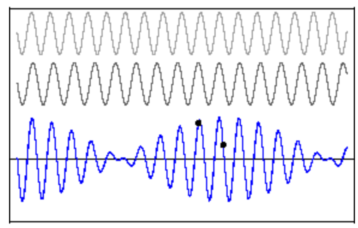
a) Considerando ρ = 40.0g/m, f_1 = 20.0 Hz e L = 5.0 m, obtém-se T = 1600 N

b) Tem-se $f_2 = \dfrac{v}{L} = 2f_1 = 40.0Hz$ $\lambda_2 = L = 5.00m$

Batimentos

Neste caso, consideramos duas ondas que se propagam no mesmo sentido, apresentando a mesma amplitude, mas com frequências e comprimentos de onda diferentes.





Batimentos

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\left[sen(\omega_1 t - k_1 x) + sen(\omega_2 t - k_2 x)\right]$$
$$= 2A\cos\left\{\frac{\left[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x\right]}{2}\right\} sen\left\{\frac{\left[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x\right]}{2}\right\}$$

Fazendo:

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad e \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$k_m = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad e \quad \omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

podemos escrever:

$$y(x,t) = 2A\cos\{\omega_m\, t - k_m x\}\, sen\{\omega\, t - kx\}$$

Batimentos

Em geral, ω_m e k_m são muito mais pequenos que ω e k. Podemos escrever:

$$y(x,t) = A' \, sen\{\omega\, t - kx\}$$

Esta expressão descreve uma onda progressiva com frequência $f = \omega/2\pi$ e comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$, mas com uma amplitude A' variável:

$$A' = 2A\cos\{\omega_m\, t - k_m x\}$$

Temos uma ***Modulação da Amplitude*** com uma frequência f_m e ***Batimentos*** com uma frequência $f_b = 2f_m$:

$$f_b = 2\, f_m = \frac{\omega_m}{\pi}$$