

## Cap. V: Introdução à Física Quântica

---

Breve historial.

- Catástrofe dos ultra-violeta.

Quanta de energia e fótons.

- Efeitos fotoelétrico e de Compton.

Naturezas corpuscular e ondulatória da matéria.

- O átomo de Bohr.
- Relações de Heisenberg.

Funções de onda e quantificação.

- partícula na caixa e o átomo.

## Física Quântica

---

Revolução na Física 1900-1930

Física microscópica (pequenas escalas) é diferente da física do “dia-a-dia”

Mas MUITO diferente mesmo!

Qual a importância disso?

## Física Quântica

---

**1900** - radiação do corpo negro, Max Planck

**1905** - Albert Einstein explica o efeito fotoelétrico.

**1913** - Niels Bohr propõe o seu modelo atômico.

**1922** - Arthur Compton descobre que os comprimentos de onda dos raios-X aumentam devido à dispersão por elétrons livres (efeito Compton).

**1923** - Louis de Broglie amplia a dualidade onda-partícula para partículas.

**1927** - Werner Heisenberg formula o princípio da incerteza.

**1927** - Max Born desenvolve a interpretação de Copenhaga da natureza probabilística das funções de onda.



## Radiação do corpo negro

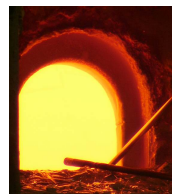
---

Objetos aquecidos emitem luz visível. À medida que a temperatura aumenta, a cor modifica-se:

**vermelho** → **laranja** → **branco** → **azul**.

Objetos à temperatura ambiente emitem no infravermelho

A emissão no amarelo corresponde a uma temperatura de cerca de 5500K (superfície do Sol)

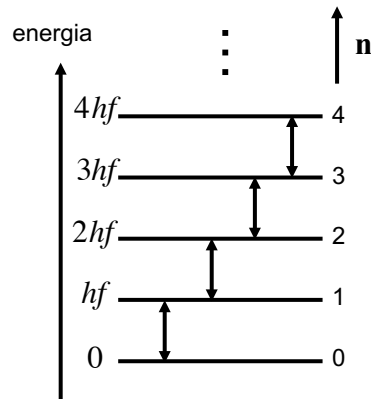


## Radiação do corpo negro: 1ª evidência quântica (1900)



**Max Planck (1858-1947)**

A energia dos osciladores no corpo negro está quantificada.



Quanta de energia

## Radiação do corpo negro: Modelo de Planck: Quanta de energia

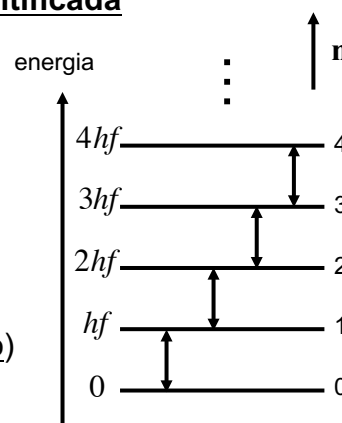
Energia dos osciladores está **quantificada**  
(não varia continuamente)

Emissão de radiação só quando há uma transição (salto) entre dois estados diferentes.

$$E_n = n hf$$

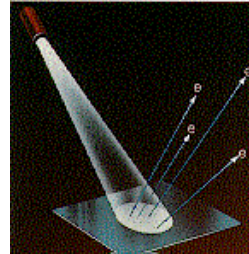
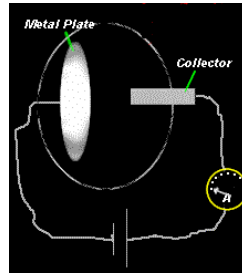
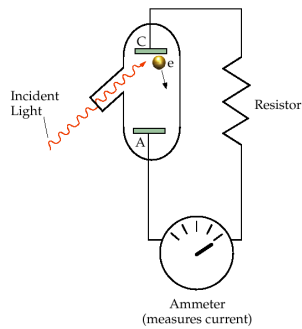
- $n = n^\circ$  inteiro (discreto, quântico)
- $f$  : frequência da radiação
- $h$  : Constante de Planck

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

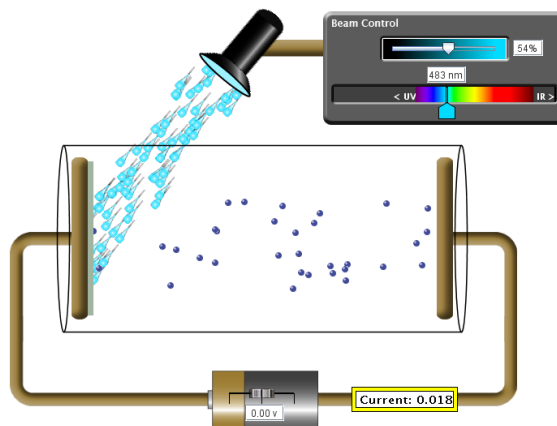


## Efeito fotoelétrico

Luz iluminando uma superfície e (foto)electrões emitidos, com energia (cinética).



## Efeito fotoelétrico



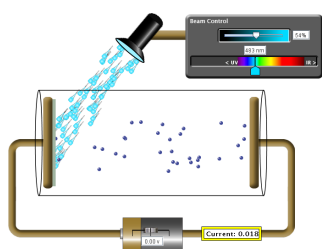
<https://phet.colorado.edu/en/simulation/photoelectric>

## Potencial de paragem $V_p$ (d.d.p.):

Como se determina a energia cinética dos electrões?

$E_{c,max}$  = aumento de energia potencial eléctrica até parar

$$E_{c,max} = eV_p$$



Unidade de energia

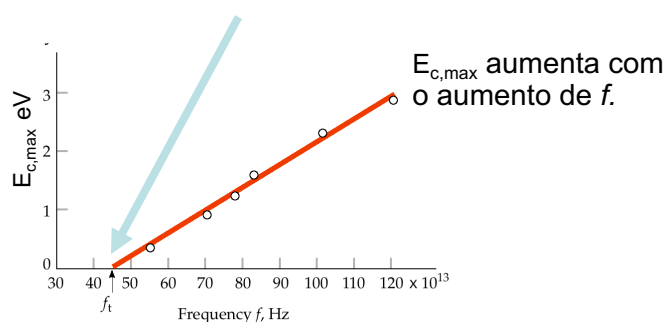
Electrão-Volt: eV

$1\text{eV} = 1,60 \times 10^{-19}\text{J}$

## Efeito fotoelétrico

Não há electrões emitidos se  $f < f_c$ .

( $f_c$  depende do tipo de metal: mínimo de frequência)



$E_{c,max}$  não depende da intensidade luminosa

## Efeito fotoelétrico (experiência)

- Não há electrões emitidos se  $f < f_c$  (depende do tipo de metal): mínimo de frequência
- Não existe limiar de intensidade para emissão de electrões
- $E_{C,max}$  não depende da intensidade luminosa
- $E_{C,max}$  aumenta com o aumento de  $f$
- Nº fotoelectrões aumenta com a intensidade luminosa
- Nº fotoelectrões não depende de  $f$
- Primeiro electrão emitido quase instantaneamente
- Dois metais diferentes: muda a frequência mínima para ter emissão de electrões

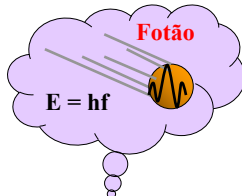


## Efeito fotoelétrico

	$W$	<i>Limiar do comprimento de onda</i>	
<b>Material</b>	<b>(eV)</b>	<b>nm</b>	<b>Região Espectral</b>
Rubídio	2.10	591	Visível
Césio	2.14	580	Visível
Sódio	2.30	540	Visível
Potássio	2.20	565	Visível
Alumínio	4.28	290	Ultravioleta
Tungsténio	4.55	273	Ultravioleta
Cobre	4.65	267	Ultravioleta
Ouro	5.10	244	Ultravioleta

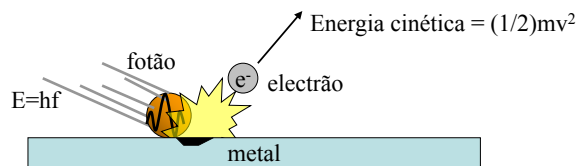


## Einstein e o conceito de fóton



**Albert Einstein**  
(1879-1955)



## Efeito fotoelétrico



## Modelo de Einstein

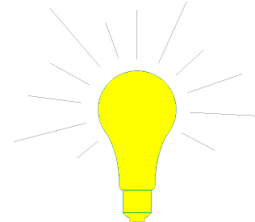
- Cada fóton fornece toda a sua energia a um único eletrão
- O fotoeletrão perde uma certa energia fixa - a função trabalho  $W$  - ao escapar da superfície.

- Não há fotoeletrões se  $f < f_c$  (depende do tipo de metal)
- Se  $hf < W$ , nenhum eletrão terá energia suficiente para escapar ao metal ( $f_c = W/h$ )
- Maior intensidade significa maior número de fótons


$$E_{c,máx} = hf - W$$


## Exemplo 1 - Fótons

Quantos fótons são emitidos em cada segundo por uma lâmpada (amarela,  $\lambda \approx 500$  nm) de potência 100 W, supondo eficiência 100% ?



$$E_{1\text{fotão}} = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{500 \text{ nm}} = 4 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$N^{\circ} \text{ fótons / s} = \frac{P}{E_{1\text{fotão}}} = \frac{100 \text{ J / s}}{4 \times 10^{-19} \text{ J / fotão}} = 2.5 \times 10^{20} \text{ fótons / s}$$

## Exemplo 2 - Fótons

Um laser verde e outro vermelho têm potência igual. Qual deles emite mais fótons/segundo?

1) vermelho

2) verde

3) igual

$$\frac{\# \text{ fótons}}{\text{segundo}} = \frac{\text{Potência}}{\text{Energia/fotão}} = \frac{\text{Potência}}{hf}$$

O laser vermelho tem menor energia/fotão, necessita pois de mais fótons para ter a mesma energia.



## Exemplo 3 – Efeito Fotoeléctrico

Sabendo que o alumínio tem uma função trabalho de 4.08 eV, qual é a frequência e o c.d.o. críticos?

$$f_c = \frac{W}{h} = \frac{4,08\text{eV}}{4,14 \times 10^{-15}} \approx 10^{15} \text{ Hz}$$
$$\lambda_c = \frac{hc}{W} = \frac{1240\text{eV.nm}}{4,08\text{eV}} \approx 300\text{nm}$$
$$\lambda_c = \frac{c}{f_c}$$

## Exemplo 4 – Efeito Fotoeléctrico

O trabalho de extracção (energia mínima para extrair um electrão da superfície) do sódio metálico é 2,3 eV. Suponha que se faz incidir um feixe luminoso sobre sódio metálico.

a) Qual a frequência mínima da radiação incidente para que ocorra emissão de electrões por efeito fotoeléctrico? Qual o comprimento de onda correspondente?  $f_{min}=5,55 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ;  $\lambda_{max}=5,40 \times 10^{-7} \text{ m}$ ;

b) Qual a energia (cinética) dum electrão libertado por radiação incidente de comprimento de onda 200 nm?  $E=3,91 \text{ eV}$ ;

c) Qual a diferença de potencial eléctrico que é necessário aplicar para parar os electrões emitidos nas condições da alínea anterior?  $V_p=3,91 \text{ V}$

## Exemplo 5 – Efeito Fotoelétrico

Qual o potencial de paragem dos electrões se irradiarmos uma placa de alumínio com um laser de  $\lambda = 200 \text{ nm}$ ?

$$E_c = \frac{hc}{\lambda} - W = \frac{1240 \text{ eV nm}}{200 \text{ nm}} - 4,08 \text{ eV} = 2,12 \text{ eV}$$

$$V_p = \frac{E_c}{e} = \frac{2,12 \text{ eV}}{e} = 2,12 \text{ V}$$

## Exemplo 6 – Efeito Fotoelétrico

Qual o potencial de paragem dos electrões se irradiarmos uma placa de alumínio com um laser de  $\lambda = 400 \text{ nm}$ ?

$$E_c = \frac{hc}{\lambda} - W = \frac{1240 \text{ eV nm}}{400 \text{ nm}} - 4,08 \text{ eV} = -0,98 \text{ eV} < 0$$

Não há emissão de electrões!

## Fotão = quantum de energia

Até agora o fóton aparece como um “pacote” de energia,  $E=hf$ .

Que outras características podemos atribuir-lhes?

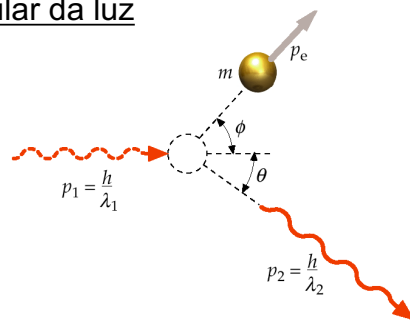
De acordo com a relatividade, sendo  $m=0$ , vem  $E=pc$ .

Então o fóton deve ter momento linear!

Como detectar isso?

## Difusão de Compton

Prova convincente da natureza corpuscular da luz



**Arthur Compton  
(1892-1962)**

$$\vec{P}_{\text{fotão incidente}} + \vec{0} = \vec{P}_{\text{fotão difundido}} + \vec{P}_{\text{electrão}}$$

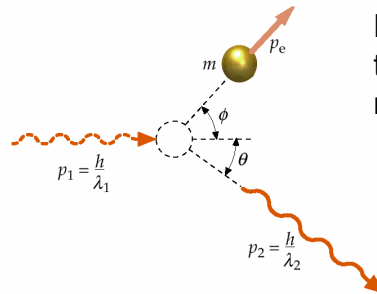
Leis de  
Conservação  
aplicáveis

## Difusão de Compton

Fotão tem momento,  $p_1$ , e comprimento de onda  $\lambda_1$

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

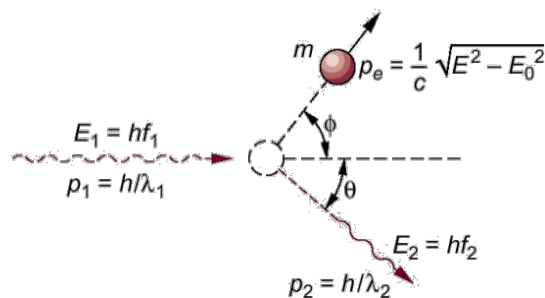


Electrão de recuo terá algum momento e  $E_c$

Fotão difundido tem momento  $p_2$  e comprimento de onda  $\lambda_2$

## Efeito Compton

fotão tem energia  $E = hf$  e momento  $p = E/c$  e o electrão satisfaz equação relativística  $E^2 = E_0^2 + (pc)^2$



## Efeito Compton

Conservação da energia

$$\frac{hc}{\lambda_1} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda_2} + \gamma mc^2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Conservação do momento

$$\frac{h}{\lambda_1} = \frac{h}{\lambda_2} \cos \theta + \gamma m v \cos \phi$$

$$0 = -\frac{h}{\lambda_2} \sin \theta + \gamma m v \sin \phi$$

$$\Rightarrow \Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_c (1 - \cos \theta)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 2.43 \text{ pm} \quad \lambda_c - \text{comprimento de onda de Compton}$$

## Exemplo – Efeito Compton

Qual é o comprimento de onda dos raios X de 0.2 nm rectro-difundidos dum alvo?

$$\Delta \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta) = 2\lambda_c = 4.86 \text{ pm}$$

De notar que a variação  $\Delta \lambda$  do comprimento de onda não depende do comprimento de onda incidente

$$\lambda_2 = \lambda_1 + 2\lambda_c = 205 \text{ pm}$$

## Ondas de de Broglie

Fotão com energia E,  
frequência f, momento  
p e comprimento de  
onda  $\lambda$

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

A relação momento - comprimento de onda foi deduzida para fótons mas *de Broglie* postulou a validade desta expressão para qualquer objecto com momento: electrão, núcleo, átomo, bola,.....



Louis de Broglie  
(1892-1987)

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$



## Ondas de de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma mv}$$



Fenómenos ondulatórios como a interferência e difração devem ser observados para partículas materiais!!



## Experiência de Davisson-Germer

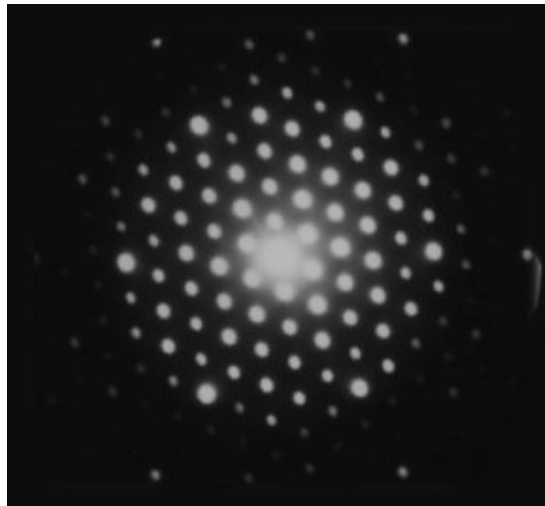
---

### Natureza ondulatória do elétron (experiência)

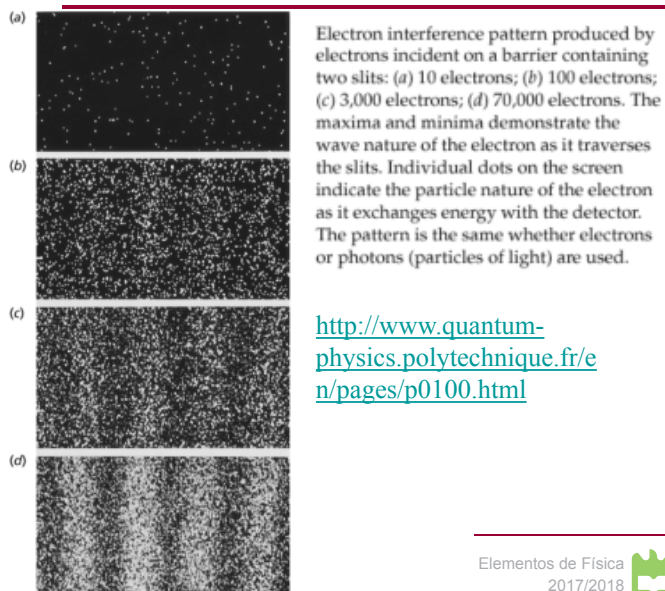
- Elétrons difundidos por um cristal de níquel
- Produz um padrão de difração igual ao obtido com raios X (Difração de Bragg)
- Confirmada fórmula para o comprimento de onda dos elétrons
- Também no microscópio eletrónico de transmissão (TEM) da U.A.

## Experiência de Davisson-Germer

---



## Experiência de Davisson-Germer



## Exercício 1

Qual é o comprimento de onda de um electrão que viaja com  $v = 0.1 c$  ?

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s})}{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3 \times 10^7 \text{ m/s})}$$

$$\lambda = 2.43 \times 10^{-11} \text{ m}$$

0.0243 nm é um comprimento de onda da zona do espectro dos raios X



## Exercício 2

E um electrão com energia cinética de 1eV?

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow E_c = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = mv \Rightarrow p = \sqrt{2m(E_c)}$$

Fotão com energia E=1eV:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E}$$

$$= \frac{1240 \text{ eV nm}}{1 \text{ eV}} = 1240 \text{ nm}$$

Grande diferença!

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E_c)}}$$

$$= \frac{hc}{\sqrt{2mc^2(E_c)}}$$

$$= \frac{1240 \text{ eV nm}}{\sqrt{2(511,000 \text{ eV})(1 \text{ eV})}}$$

$\lambda = 1.23 \text{ nm}$  para um electrão com 1eV



## Exercício 3

Qual é o comprimento de onda de uma bola atirada a 45 m/s?

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s})}{(0.15 \text{ kg})(45 \text{ m/s})} \approx 10^{-34} \text{ m}$$

Com este pequeno comprimento de onda não serão observados efeitos ondulatórios.



## Luz - Partícula ou Onda?

---

Por vezes uma onda (interacção consigo própria)

- difracção e interferência

Por vezes uma partícula (interacção com a matéria)

- Efeitos Fotoeléctrico & Compton

**Luz tem dupla natureza**

- as descrições ondulatória e corpuscular são **complementares**

## Electrão - Partícula ou Onda?

---

Por vezes uma onda

- difracção e interferência

Por vezes uma partícula

- Efeitos Fotoeléctrico & Compton

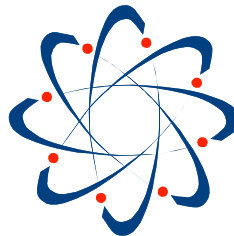
**Electrão tem dupla natureza**

- as descrições ondulatória e corpuscular são **complementares**

## Modelo de Bohr para o átomo



**Niels Bohr  
(1885-1962)**



Força de Coulomb produz aceleração centrípeta.

- Teremos uma certa energia para cada raio.
- As energias estão quantificadas (órbitas permitidas).

As órbitas estão quantificadas.

- O espectro diz-nos quais são as órbitas permitidas.



## Modelo de Bohr

Movimento circular uniforme:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{kZe^2}{r^2}$$

m\*aceleração = Força  
centrípeta eléctrica

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{kZe^2}{2r}$$

En. cinética      En. potencial eléctrica

Energia Total:  $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{kZe^2}{r} = -\frac{kZe^2}{2r}$



## Ondas de de Broglie

Fotão com energia  $E$ , frequência  $f$ , momento  $p$  e comprimento de onda

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

*de Broglie* postulou a validade desta expressão para qualquer objecto com momento: electrão, núcleo, átomo, bola,.....

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

Prince Louis-Victor  
Pierre Raymond de  
Broglie



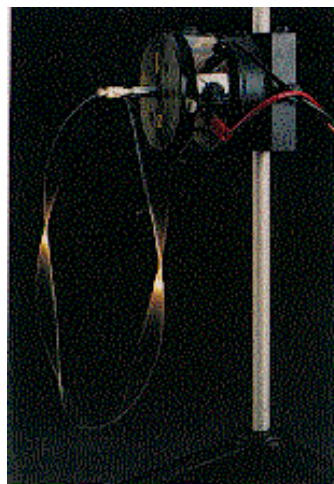
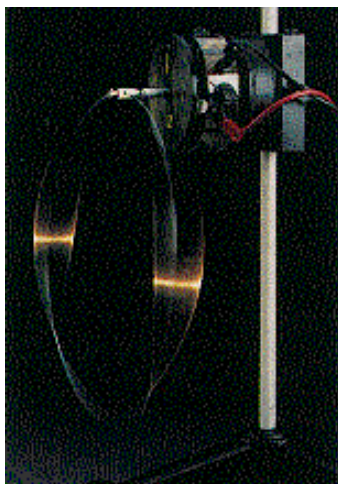
Elementos de Física  
2017/2018



universidade de aveiro  
theoria poiesis praxis

## Modelo de Bohr

### Analogia com ondas estacionárias circulares



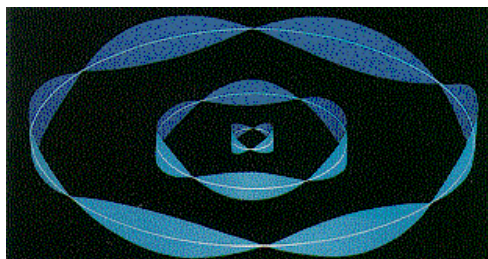
Elementos de Física  
2017/2018



universidade de aveiro  
theoria poiesis praxis

40

## Interpretação da teoria de Bohr baseada na hipótese de de Broglie



Onda estacionária

$$n\lambda = 2\pi r$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} \Rightarrow v_n = \frac{nh}{2\pi mr_n}$$



## Interpretação da teoria de Bohr baseada na hipótese de de Broglie

$$\begin{aligned} v_n &= n \frac{h}{2\pi mr_n} \\ mv_n^2 &= \frac{kZe^2}{r_n} \end{aligned} \Rightarrow r_n = n^2 \left( \frac{h}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{mkZe^2}$$

$$= \underbrace{0.0529}_{\text{Raio de Bohr}} \frac{n^2}{Z} nm$$

**Raio de Bohr**

$$a_0 = \left( \frac{h}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{mke^2}$$



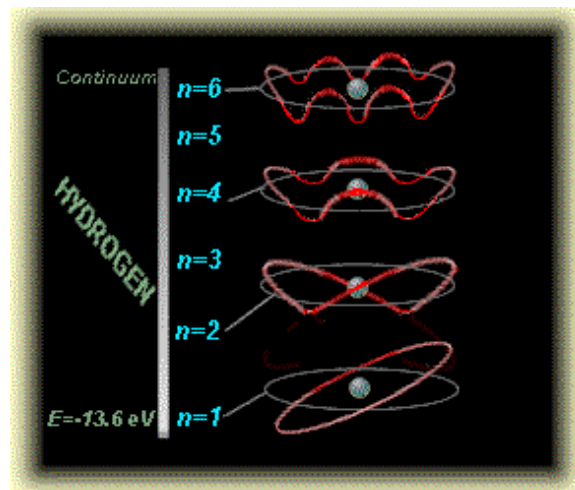
## Interpretação da teoria de Bohr baseada na hipótese de de Broglie

$$E_n = -\frac{kZe^2}{2r_n}$$

$$r_n = 0.0529 \frac{n^2}{Z} \text{ nm}$$

$$\Rightarrow E_n = -13.6 \frac{Z^2}{n^2} (\text{eV})$$

## Modelo de Bohr Analogia com ondas estacionárias circulares



## Exercício - Raio de Bohr

Se um electrão no átomo de hidrogénio fosse 200 vezes mais pesado (um muão), o raio de Bohr seria:

1) Maior

2) Igual

3) Menor

$$\text{Raio de Bohr} = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{mke^2}$$

m indica a massa do electrão e não a massa do protão!



## Átomo de Hidrogénio

$$E_n = -\frac{E_o}{n^2}$$

$$E_o = \frac{ke^2}{2a_o} = 13.6 \text{ eV}$$

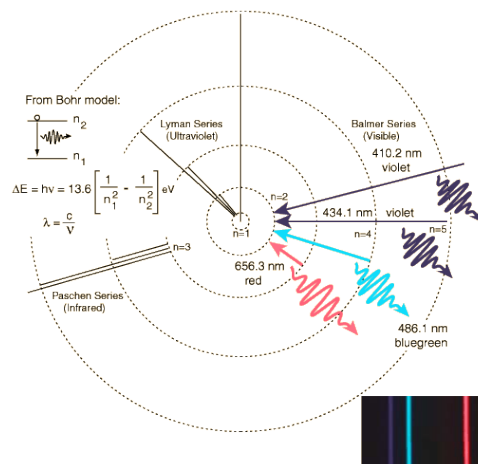
Energia de **ionização**  
( $n = +\infty$ )

$$hf = E_i - E_f = E_o \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

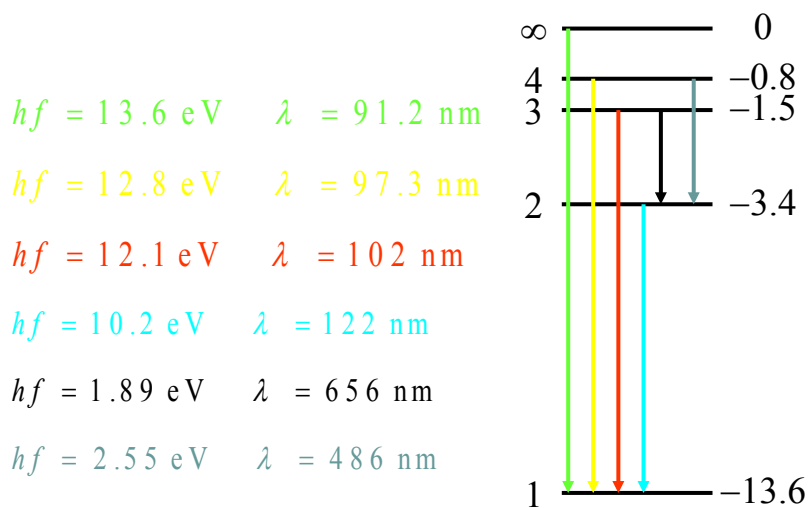
Energia da radiação emitida ou absorvida quando o electrão transita entre os níveis  $n_f$  e  $n_i$



# Átomo de Hidrogénio



# Átomo de Hidrogénio





## Exercício - Átomo de Hidrogénio

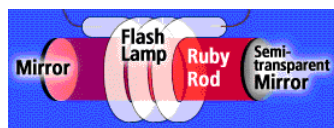
Calcule o comprimento de onda da radiação emitida quando um electrão livre é capturado directamente para o nível  $n=2$ .

$$hf = 13,6 eV \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = 13,6 eV \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 3,4 eV$$

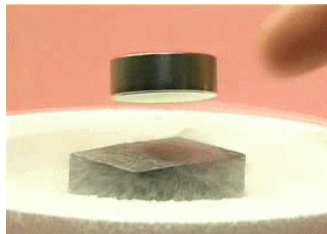
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{hf} = \frac{1240 eV nm}{3,4 eV} = 364,7 nm$$

## Exemplos de fenómenos quânticos

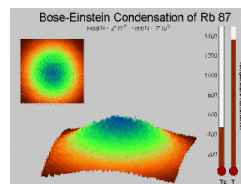
### Laser



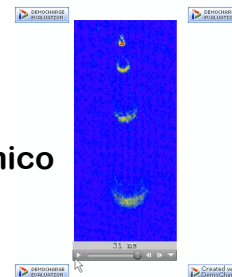
### Supercondutividade



### BEC



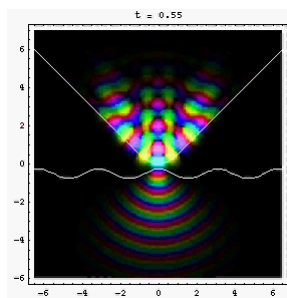
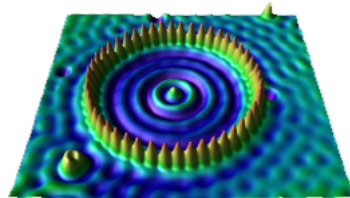
### Laser atómico



# Exemplos de fenômenos quânticos

## Microscopia efeito túnel

Curral Quântico



Miragem Quântica

