universidade
de aveiro

Elementos de Física

Problemas Cap. 2

Movimento Oscilatório

Ano Letivo 2018/2019

Capítulo 2

1. Um corpo de 2 kg estica de 10 cm uma mola, à qual está pendurado na vertical, em equilíbrio. O corpo preso à mola é depois colocado sobre uma mesa lisa, com uma das extremidades da mola fixa. O corpo é mantido à distância de 5 cm da posição de equilíbrio e então solto oscilando com movimento harmónico simples. Determine:
a) a frequência angular, ω.
b) a frequência, f.
c) o período, T.
d) a amplitude, A.
e) a constante de fase, δ.
f) Qual é o módulo da velocidade máxima do corpo, e quando ele a tem?

2. Uma segunda mola, idêntica à do problema anterior, está ligada a um segundo corpo, que tem também a massa de 2 kg. A mola está esticada de 10 cm em relação à posição de equilíbrio e as duas molas são simultaneamente soltas, estando a primeira distendida apenas 5 cm. Qual dos dois corpos atinge, em primeiro lugar, a posição de equilíbrio?

3. Um movimento harmónico simples demora 12 segundos a completar 5 oscilações completas. Determine:

a) O período das oscilações
b) A frequência
c) A frequência angular.

4. Qual o período de um pêndulo de 1 m, quando g = 9,81 m.s^{-2}?

5. Uma partícula tem o deslocamento, x, dado por $x = 3\cos(5\pi t + \pi)$ em que x está expresso em metros e t em segundos.
a) Qual a frequência, f, e o período, T, do movimento?
b) Qual a maior distância percorrida pela partícula, medida a partir do equilíbrio?
c) Onde está a partícula no instante $t = 0$? E no instante $t = 0{,}5$ s?

6. Uma massa de 1kg, está suspensa do teto de um elevador através de uma mola de constante k=9N/m. Se o elevador descer com velocidade $v=3m/s$, e a massa estiver em repouso em relação ao elevador, escreva a equação do movimento da massa quando, em t=0s, o elevador parar.

7. Uma partícula, com movimento harmónico simples, está em repouso a uma distância de 6 cm da posição de equilíbrio, no instante t = 0. O seu período é 2 s. Escreva as expressões da posição, x, da velocidade, v, e da aceleração, a, em função do tempo.

8. A posição de uma partícula é dada por $x = 4\,\mathrm{sen}(2t)$, em que x é expresso em metros e t em segundos.
a) Qual é o valor máximo de x?
b) Qual o primeiro instante, depois de $t = 0$, em que ocorre este máximo?
c) Determine a expressão da velocidade da partícula em função do tempo.
d) Qual é a velocidade no instante $t = 0$?
e) Determine uma expressão para a aceleração da partícula em função do tempo. Qual é a aceleração no instante $t = 0$? Qual é o valor máximo da aceleração?

9. Um objeto de 500g, preso a uma mola com k=8N/m, oscila num movimento com amplitude A=10cm.
Calcule:

a) a velocidade e aceleração máximas.
b) a velocidade e aceleração quando o objeto dista 6cm da posição de equilíbrio.
c) o tempo necessário para o objeto partir de x=0 e chegar a x=8cm.

10. Uma partícula desloca-se num círculo no plano *xy* com centro na origem. O raio do círculo é 40 cm e o módulo da velocidade da partícula é 80 $cm.s^{-1}$.
a) Qual a velocidade angular da partícula?
b) Quais a frequência e o período do movimento circular?
c) Escreva as componentes *x* e *y* do vetor posição, $\vec{r}$, em função do tempo.

11. Um bloco de massa M= 4.0 kg está assente numa mesa horizontal e ligado a uma mola de constante k = 100 N/m e massa desprezável. O sistema executa um movimento harmónico simples. Considere que no instante inicial a mola está na posição de compressão máxima, que corresponde a 10cm. Determine:

a) A frequência angular
b) O período
c) A equação do movimento
d) A energia cinética do sistema no instante t = 1.0 s

12. Um corpo de 3 kg está preso a uma mola e oscila com a amplitude de 10 cm e a frequência f = 2 Hz.
a) Qual é a constante de força da mola?
b) Qual é a energia mecânica total do movimento?
c)Escreva uma equação $x(t)$ que descreva a posição do corpo em relação à sua posição de equilíbrio. A constante de fase pode ser determinada pela informação que se deu?

13. Um corpo de 100 g executa um movimento harmónico simples com uma frequência de 20 Hz e amplitude de 0,5 cm.
a) Qual é a constante da força, *k*, que atua sobre ele?
b) Qual é a aceleração máxima?
c) Qual é a energia mecânica total do movimento?

14. A posição inicial, velocidade e aceleração de um objeto que executa um movimento harmónico simples, são x_i, v_i e a_i , respectivamente. A frequência angular do movimento é ω.

a) Mostre que a posição e velocidade do objeto estão relacionadas através da expressão:

$$x(t) = x_i \cos(\omega t) + \frac{v_i}{\omega} \sin(\omega t)$$
$$v(t) = -x_i\, \omega \sin(\omega t) + v_i \cos(\omega t)$$

b) Se a amplitude do movimento for A, mostre que:

$$v^2 - a\,x = v_i^2 - a_i\, x_i = \omega^2 A^2$$

15. Quando o deslocamento de um corpo que oscila preso a uma mola é igual à metade da amplitude, qual a fracção da sua energia mecânica total que corresponde à energia cinética? Para que deslocamento as energias cinética e potencial são iguais?

16. Se o período de um pêndulo de 70 cm de comprimento é 1,68 s, qual o valor de g no local onde ele se encontra?

17. Um corpo de 2 kg está suspenso verticalmente numa mola de constante de força, k = 350 $N.m^{-1}$.
a) Determine o alongamento, y_0, da mola esticada quando o corpo está em repouso, e a energia potencial da mola em relação à situação em que está sem tensão.
b) O corpo é puxado para baixo, até uma distância y' = 3 cm abaixo do ponto de equilíbrio. Determine a variação da energia potencial da mola, a variação da energia potencial gravitacional e a variação total da energia potencial. Mostre que a variação total da energia potencial é $ky'^2/2$.
c) O corpo é então libertado. Determine o período, a frequência e a amplitude da oscilação subsequente.

18. Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola (k = 100 N/m) executa um movimento harmónico simples com amplitude igual a 10 cm. A oscilação tem início numa das posições extremas.

a) Determine a energia cinética e energia potencial elástica do oscilador no instante de tempo em que elas são iguais. Determine o primeiro instante de tempo e a posição respectiva em que isso acontece.

De seguida, o oscilador fica sujeito a amortecimento (b = 2 kg/s).

b) Determine a variação de energia mecânica no segundo ($\Delta t = 1\ s$) seguinte.
c) Se se pretendesse manter a oscilação com amplitude igual à amplitude inicial (A_0 = 10 cm) determine a potência da força exterior a aplicar ao oscilador?

19. Um corpo de 2 kg oscila preso a uma mola de constante de força k = 400 $N.m^{-1}$, com amplitude inicial de 3 cm.
a) Determine o período e a energia mecânica total inicial.
b) Qual a constante de amortecimento b, quando a energia diminui de 1% por período. Assuma que o período da oscilação natural é igual ao da oscilação amortecida.

20. Um sistema mola/massa de m = 10 kg e k = 100 N/m, oscila com um período de 2 s e uma amplitude inicial de 20 cm. Assuma que, no instante inicial, o oscilador se encontra na posição de equilíbrio.
a) Calcule a constante de amortecimento do movimento oscilatório.
b) Calcule a posição do oscilador ao fim de 0,5s.
c) Qual a posição do oscilador e a sua energia mecânica ao fim de 2 oscilações completas.
d) O oscilador passa a ser forçado por uma força externa de amplitude 100 N. Calcule a frequência da força externa para a amplitude do oscilador ser metade da amplitude inicial (A_0 = 20 cm).

21. Um corpo de massa m = 1 kg ligado a uma mola de constante elástica k= 100 N/m oscila sob acção de uma força externa sinusoidal de valor máximo 10 N e frequência angular 6 rad/s. A constante de amortecimento do sistema é igual a 2 kg/s.

a) Escreva a expressão da força externa em função do tempo.
b) Determine a amplitude das oscilações forçadas.
c) Para que valor da frequência força externa ocorre ressonância?
d) Se a força externa deixar de actuar, ao fim de quanto tempo a amplitude passa para metade do valor inicial.

22. Uma massa de 1 kg vibra com movimento harmónico simples no extremo de uma mola. No instante t = 0 s a massa está a uma distância de 10 cm da posição de equilíbrio e está em repouso. O período natural do movimento é de 5 s. Obtenha:

a) A frequência natural do movimento e a constante da mola;
b) A equação da posição em função do tempo, *x(t)*
c) A velocidade e a aceleração máximas da massa;
d) Considere agora que o movimento é amortecido com uma constante de amortecimento b = 1,00 kg.s^{-1}. Considerando que o período da oscilação natural é igual ao da oscilação amortecida, qual é a variação da energia mecânica do movimento num período.

23. Um corpo de 2 kg oscila preso a uma mola de constante de força k = 400 N.m^{-1}. A constante de amortecimento é b = 2,00 kg.s^{-1} O corpo é accionado por uma força sinusoidal de valor máximo 10 N e frequência angular de 10 rad.s^{-1}.

a) Qual é a amplitude das oscilações?
b) Se a frequência da força motriz se alterar, em que frequência ocorrerá a ressonância?
c) Determine a amplitude das vibrações na ressonância.

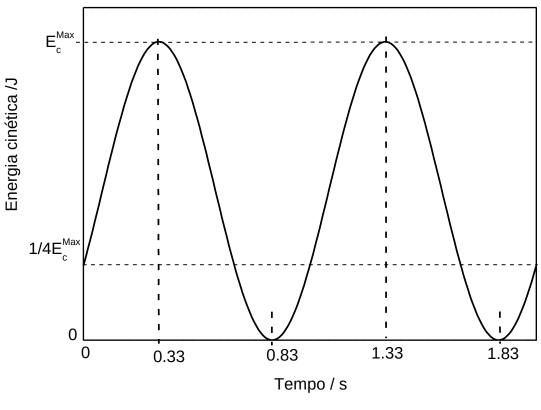
24. Um corpo de massa m=2kg encontra-se ligado a uma mola de constante elástica k=10 N/m. O sistema oscila com uma amplitude inicial de 20 cm. Ao fim de 2 segundos a amplitude de oscilação passa para metade.

a) Determine a frequência angular do movimento.
b) Qual a frequência angular com que uma força externa deveria ser aplicada para que o sistema vibrasse em ressonância?

25.

A figura representa o gráfico da energia cinética em função do tempo para uma massa de 0.5*kg* ligada a uma mola que oscila em torno da posição de equilíbrio com uma amplitude de 0.5*m*.

a) Determine a constante da mola.
b) Escreva a dependência temporal da aceleração do corpo, *a(t)*.
c) Represente o gráfico força resultante em função do tempo, $F_R(t)$.
d) Considere que a partir de um dado instante actua sobre o sistema corpo-mola uma força com as seguintes características: F(t) = 2 *cos* (5*t*) (N).



Determine a nova amplitude de oscilação.

26. Um corpo de massa 2kg está preso a uma mola que se encontra na horizontal sobre uma superfície sem atrito. Na direcção do movimento, o corpo está sujeito a uma força restauradora de módulo igual a **20x** (**x** é a posição do corpo relativamente à posição de equilíbrio) e a uma força de amortecimento de módulo igual a **2v** (**v** é a velocidade do corpo).

a) Determine a frequência angular do movimento.

b) Sabendo que a amplitude inicial é de 20cm determine a amplitude ao fim de 2 segundos.
c) Escreva a equação diferencial do movimento.

Formulário:

$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$y(t) = A\ \cos(\omega t + \varphi)$ $\qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$

$y(t) = A\ e^{-\left({}^{b}/_{2m}\right)t} \cos(\omega t + \phi)$ $\qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

$F = F_0 \cos(\omega_f t)$ $\qquad Y(t) = A\ \cos(\omega_f t + \varphi)$ $\qquad A = \frac{{}^{F_0}/_{m}}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\ \omega_f}{m}\right)^2}}$

$y(t) = 2\ A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \mathrm{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$

Grandezas físicas, conversões e fórmulas:

$N_A = 6{,}022140857 \times 10^{23}$ moléculas/mol

$h = 6{,}626070040 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} = 4{,}135667662 \times 10^{-15}\ \mathrm{eV \cdot s}$

$\hbar = h/2\pi = 1{,}054571800 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} = 6{,}582119514 \times 10^{-16}\ \mathrm{eV \cdot s}$

$\varepsilon_0 = 8{,}854187817 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$ $\qquad k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8{,}98755188 \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

$m_e = 9{,}10938356 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$

$m_p = 1{,}67262 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1836{,}151\ m_e$ $\qquad 1\ \mathrm{amu} = 1{,}660539040 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$

$m_n = 1{,}67493 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$

$c = 299792{,}458\ \mathrm{km/s} = 2{,}99792458 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$

$e = 1{,}602176208 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$

Soluções Cap. 2

1. a) 9,9 rad.s^{-1} b)1,58 Hz c) 0,63s; d) 5 cm; e) 0 rad; f) 0,495 m/s e $t = (2n+1)\times 0{,}1586\,\mathrm{s},\, n = 0,1,2,\cdots$

2. Chegam ao mesmo tempo (Δt=T/4)

3. a) 2.4 s b) 0.417Hz c) 2.62rad/s

4. 2,006 s

5. a) 5/2 s^{-1} e 0,4 s; b) 3 m c) -3 m e 0 m.

6. $x(t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$, com sentido positivo para cima.

7. $x(t)$= 6 cos(πt) (cm); $v(t)$ = -6π sen(πt) (cm/s); $a(t)$ = -6π^2 cos(πt) (cm.s^{-2}).

8. a) 4m; b) π/4 s c) 8 cos2t (m/s) d) 8 m/s e) 0 ms^{-2} e 16 m.s^{-2}.

9. a) 40cm/s; 160 cm/s^2 b) ±32 cm/s; -96 cm/s^2 c) 0.232s

10. a) 2 rad/s b) 0,318 Hz e 3,14 s c) x = 40 cos(2t+δ) (cm) e y = 40 sen(2t+δ) (cm).

11. a) 5 rad/s b) 1.256s c) 0.1 cos(5t - π) d) 0.46J

12. a) 474 N/m; b) 2,37 J; c) x = 0,1 cos(4πt+δ); não.

13. a) 1579 N/m; b) 79 m.s^{-2}; c) 0,0197 J.

15. 3/4 e $x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$.

16. 9,79 m.s^{-2}.

17. a) 5,6 cm e 0,55 J; b) 0,7455 J -0,588 J e 0,1575 J; c) 0,475 s 2,1 Hz e 0,03 m.

18. a) $E_c = E_{pot} = 0.25J$; $t = 0.07854s$; $x = 0.0707m$ b) $\Delta E_m = -0.432J$ c) $\overline{P} = 0.432W$

19. a) 0,44 s e 0,18 J; b) 0,045 kg/s.

20. a) b=7,22 kg/s b) x=0,167 m c) x=0 m; E_{mec}=0,11 J d) ω=10,5 rad/s

21. a) $F_{ext} = 10\cos(6t+\phi)$ b) $A = 0.15m$ c) $w_f = w_0 = 10\ rad/s$ d) $t = 0.69s$

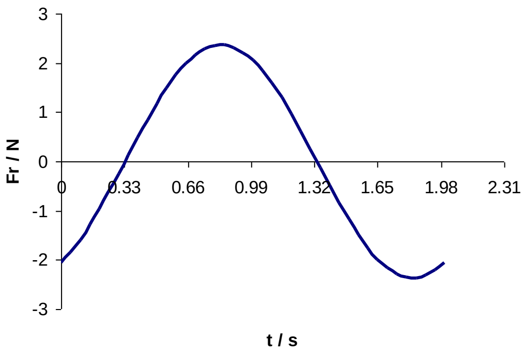
22. a) $f_0 = 0.2Hz$; $k = 1.6N/m$ b) $x(t) = A_0\cos(w_0 t+\delta) = 0.1\cos(0.4\pi t)\ (m)$ c) $v_{\max} = 0.04\pi\ m/s$; $a_{\max} = 0{,}16\,m/s^2$ d) $\Delta E_M = -7{,}8\times 10^{-3}\,J$

23. a) 4,98 cm; b) 14,14 rad/s; c) 35,4 cm.

24. a) $w = 2{,}21$rad/s b) $w_f = w_0 = \sqrt{5}$ rad/s

25. a) $k = 4.9N/m$ b) $a(t) = -\frac{\pi^2}{2}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\ (m/s^2)$

c)



d) A=0.26 m

26. a) ω = 3.12 rad/s b) A=0.074 m c) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + 10x = 0$