Cap. 3 Ondas

https://www.youtube.com/watch?v=RLn1ErhxOPo

Cap. 3 Ondas

https://www.youtube.com/watch?v=9L9AOPxhZwY

Cap. 3 Ondas

Ondas (impulsos) “1D”: solitões

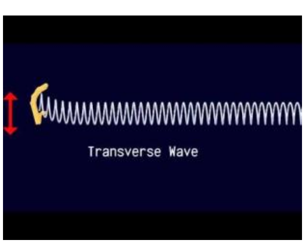
Cap. 3 Ondas

Neste capítulo estudaremos apenas <u>ondas mecânicas</u>: ondas em cordas, ondas sonoras

As ondas mecânicas precisam de meio de propagação. Ao contrário, as ondas eletromagnéticas não precisam de meio de propagação.

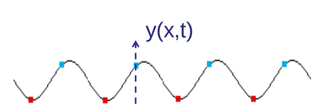
Cap. 3 Ondas

Há dois tipos de ondas: longitudinais e transversais.



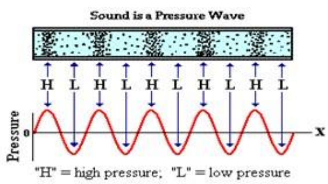
Cap. 3 Ondas

<u>Ondas transversais</u> – a perturbação do meio é perpendicular à direção de propagação da onda



Cap. 3 Ondas

<u>Ondas longitudinais</u> - perturbação do meio tem a mesma direção da propagação da onda



Cap. 3 Ondas

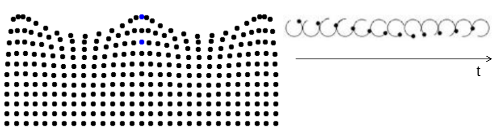
Como formalizar matemáticamente?

Podemos escrever, para cada ponto do espaço com coordenada x, no instante t, o desvio do meio em relação à posição no equilíbrio:

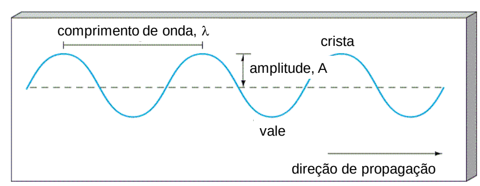
$$y(x,t)$$

Cap. 3 Ondas

Há situações mais complexas (que não abordaremos) como as ondas de superfície, em que o desvio em relação à posição de equilíbrio se faz numa trajetória circular a 2D:

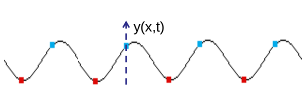


Quantidades Importantes



Quantidades Importantes

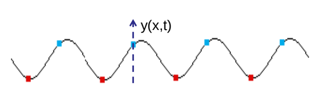
Periodo de oscilação: T



Mede o tempo que demora uma partícula do meio a reiniciar o seu movimento periódico (para cima e para baixo)

Quantidades Importantes

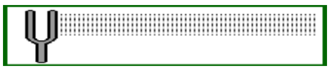
Velocidade de oscilação: $v_o = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$



Mede a velocidade associada ao movimento (para cima e para baixo) do ponto de coordenada x no instante t

Quantidades Importantes

Velocidade de propagação: v



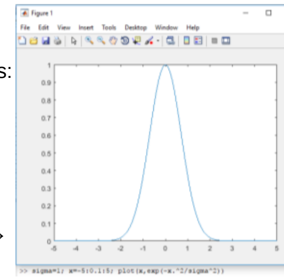
Mede quanto espaço percorre o impulso (onda) por unidade de tempo.

Descrição matemática

Propagação de um impulso com perfil gaussiano em t=0s:

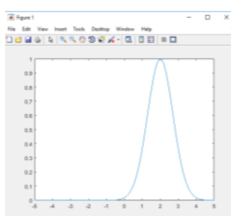
$$y(x,0) = A\,exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)$$

como fazer em matlab →



Cap. 3 Ondas

Onde estará este impulso em t=1s se viajar com velocidade de 2m/s?



Qual a expressão matemática para o perfil da onda?

Cap. 3 Ondas

Ideia geral : fazer a substituição x → x – vt

$$y(x,t) = A\,exp\left(-\frac{(x-vt)^2}{\sigma^2}\right)$$

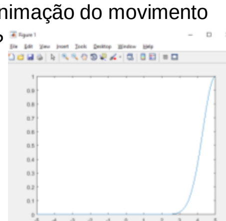
Se o impulso se propagar para a esquerda, a velocidade será negativa.

Cap. 3 Ondas

Desafio/curiosidade:

como fazer em Matlab a animação do movimento de uma onda progressiva?

```
sigma=1;
x=-5:0.1:5;
v=1;
for t=0:0.1:5;
    plot(x,exp(-(x-v*t).^2/sigma^2));
    ylim([0,1]);
    pause(0.1);
end
```



Cap. 3 Ondas

Exercício:

Considere uma onda com um perfil dado pela função $y(x) = \mathrm{A}\,cos(\frac{2\pi x}{\lambda} + \phi)$, com λ=10m e que se propaga com velocidade v. Escreva:

a) y(x,t)

b) que tipo de movimento executa um ponto do meio? Caracterize-o.

Cap. 3 Ondas

Resolução:

a) $y(x,t) = \text{A}\cos(\frac{2\pi(x - vt)}{\lambda} + \phi)$

b) Se x=0, vemos que:

$$y(0,t) = A\cos\left(-\frac{2\pi vt}{\lambda} + \phi\right) = A\cos\left(\frac{2\pi vt}{\lambda} + \psi\right)$$

com $\psi = -\phi$.

Trata-se de um MHS com período $T = \frac{\lambda}{v}$ e fase ψ.

Cap. 3 Ondas

Relação Muito Importante

$$v\,T = \lambda$$

1) Esta equação estabelece uma relação não trivial entre uma característica do movimento oscilatório de uma partícula, o período, e a posição de partículas distantes através do comprimento de onda.

2) Podemos ler esta fórmula dizendo que: o comprimento de onda é igual ao espaço percorrido por uma onda que se move com velocidade v ao fim de T segundos.

Notação

$$y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi(x - vt)}{\lambda} + \phi_0\right) =$$

$$= A\cos(kx - \omega t + \phi_0) = A\cos(\phi(x,t))$$

onde se define:

- o número de onda: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- a frequência angular de oscilação: $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$
- a fase da onda no instante t e posição x, $\phi(x,t)$
- a fase inicial na origem, em x=0m e t=0s, ϕ_0

Cap. 3 Ondas

Note-se que pontos diferentes do meio oscilam todos num MHS com o mesmo período e amplitude, diferindo somente na fase do movimento:

Se $x = x_1$, vemos que:

$$y(0,t) = A\cos\left(\frac{2\pi x_1}{\lambda} - \frac{2\pi vt}{\lambda} + \phi\right) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \psi\right)$$

com $\psi = -\frac{2\pi x_1}{\lambda} - \phi$.

Cap. 3 Ondas

E se tivéssemos começado com um seno para perfil de onda inicial?

$$y(x) = \text{A}sin(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$y(x,t) = \text{A}sin(\frac{2\pi(x-vt)}{\lambda} + \varphi) = \text{A}sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Cap. 3 Ondas

Antes tínhamos:

$$y(x,t) = \text{A}\cos(kx - \omega t + \phi)$$

agora:

$$y(x,t) = \text{A}\,sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Questão: serão as duas expressões iguais?

Cap. 3 Ondas

Resposta: podem ser ou não! Tudo depende da relação entre as fases. Ora, sabemos que:

$$\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

pelo que se $\varphi = \phi + \frac{\pi}{2}$ então:

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi) = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$$

e por isso, as duas expressões representam a mesma onda no caso precedente.

Cap. 3 Ondas

Poderíamos ainda usar mais as relações:

$$\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta)$$
$$\cos(\theta) = \cos(-\theta)$$

para mostrar que as expressões seguintes:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \phi_1) = A\sin(kx - \omega t + \phi_2) =$$
$$= A\cos(kx - \omega t + \phi_3) = A\cos(\omega t - kx + \phi_4)$$

representam a mesma onda se as fases estiverem relacionadas da seguinte forma:

$$\phi_2 = \pi - \phi_1 \qquad \phi_3 = \phi_2 - \frac{\pi}{2} \qquad \phi_3 = -\phi_4$$

Cap. 3 Ondas

III

Uma onda transversal harmónica de f = 400 *Hz* propaga-se numa corda com uma amplitude de 5 *cm*. Dois pontos separados de 5.0 *cm* estão num dado instante desfasados de $\frac{\pi}{6}$ *rad*.

a) Determine o comprimento de onda.
b) Determine o valor da velocidade de propagação.
c) Determine o valor máximo da velocidade transversal.

Cap. 3 Ondas

Solução:

a) $$\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} \times 5 = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \lambda = 60cm$$

b) $$v = \lambda\, f = 0.6 \times 400 = 240 m/s$$

c) $$v_{max} = \max\left(\frac{d}{dt}\left(A\cos(\omega t - kx + \phi_0)\right)\right) = A\omega = 5 \times 10^{-2} \times 2\pi \times 400 =$$
$$= 40\pi \ \ m/s$$

Cap. 3 Ondas

Vimos que o valor da fase inicial pode ser muito importante. Mas que informação guarda a fase?

Resposta 1: A fase estabelece o perfil da onda em t=0s (ou, de forma mais geral, num instante qualquer)

Exemplo

Compare:

$$y_1(x,t) = 2\cos(2x - 3t + \pi)$$

$$y_2(x,t) = 2\cos\left(2x - 3t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Cap. 3 Ondas

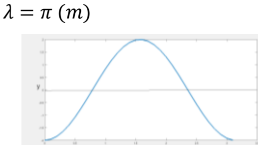
Em t=0s, o perfil da onda 1 ("fotografia da onda") é:

$$y_1(x,0) = 2\cos(2x + \pi)$$

Em x=0, a função vale -2, estando no mínimo.

O c.d.o. é $\frac{2\pi}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda = \pi\ (m)$

É fácil traçar:



Cap. 3 Ondas

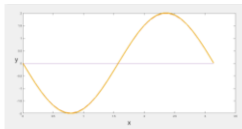
Para a outra onda, em t=0s, o perfil da onda é dado por:

$$y_2(x,0) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Em x=0, está na origem. A derivada em x=0m dá:

$\frac{dy_2(x,0)}{dx}|_{x=0} = -4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$ pelo que a função decresce.

Alternativamente, podemos pensar que em x=0.00001m a função teria um valor de $2\cos\left(\frac{\pi}{2} + 0.0\ldots\right)$. Ou seja, decresceu.



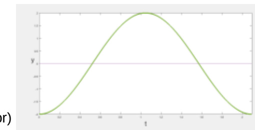
Cap. 3 Ondas

Resposta 2: A fase estabelece como se está a mover o ponto em x=0m.
(ou, de forma mais geral, um ponto qualquer do meio)

$$y_1(0,t) = 2\cos(-3t+\pi) = 2\cos(3t-\pi) = -2\cos(3t)$$

Ou seja uma partícula em x=0m, executa um MHS com período $\frac{2\pi}{T} = 3 \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{3}s$

Em t=0s a partícula estará no mínimo.
(o que está de acordo com a analise anterior)

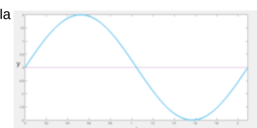


Cap. 3 Ondas

Para a outra onda teremos:

$$y_2(0,t) = 2\cos\left(-3t + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin(3t)$$

Em t=0s, a extremidade estará a passar pela origem e logo depois (t pequeno positivo) a partícula vai para coordenadas positivas. Podíamos comprovar isso também através do cálculo da derivada, ou seja, da velocidade de oscilação da partícula:

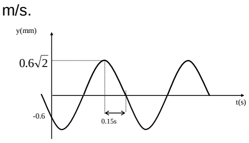


$$v_{osc} = \frac{dy_2(0,t)}{dt} = 6\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$$

Que é positiva, como seria de esperar.

Exercício

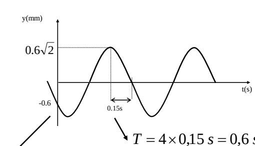
A figura representa os vários estados de vibração de uma dada partícula (na origem). Este movimento propaga-se ao longo de uma corda com velocidade de 1 m/s.



a) Escreva a equação da elongação da referida partícula.

$$y(0,t) = A\,sen\,(\frac{2\pi}{T}t + \varphi) = A\,sen\,(\omega t + \varphi)$$

Exercício



$$T = 4 \times 0{,}15\ s = 0{,}6\ s$$

$$-0{,}6 = 0{,}6\sqrt{2}sen\varphi \Leftrightarrow sen\varphi = -1/\sqrt{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{5\pi}{4} \quad \vee \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

Para escolher a opção adequada, calcula-se a derivada em t=0s:

$$\frac{d}{dt}(A\,sen\,(\frac{2\pi}{T}t+\varphi))\Big|_{t=0} = \frac{2\pi}{T}A\cos(\varphi) < 0 \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{4}$$

Exercício

Podemos então escrever:

$$y(0,t) = 0.6\sqrt{2}\,sen\,(\frac{2\pi}{0.6}t + \frac{5\pi}{4})$$

b) Escreva a equação da elongação para qualquer partícula da onda.

Dado que podemos escrever a função de onda como um seno ou um coseno, com o argumento kx-wt ou wt-kx, usamos a que mais nos convém tendo em conta o resultado da alínea anterior:

$$y(0,t) = 0.6\sqrt{2}\,sen\,(\frac{2\pi}{0.6}t + \frac{5\pi}{4}) \rightarrow y(x,t) = 0.6\sqrt{2}\,sen\,(\frac{2\pi}{0.6}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{5\pi}{4})$$

Exercício

Ora: $v = 1\,m/s \Rightarrow \lambda = vT = 0.6m$

pelo que:

$$y(x,t) = 0.6\sqrt{2}\,sen\left(\frac{2\pi}{0.6}t - \frac{2\pi}{0.6}x + \frac{5\pi}{4}\right)$$

Cap. 3 Ondas

Velocidade de propagação: de que depende?

Ondas transversais em cordas:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

T- tensão exercida na corda
ρ – densidade linear de massa

Ondas longitudinais (sonoras):

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

E – módulo volumétrico de elasticidade do meio de propagação
ρ - densidade volúmica de massa

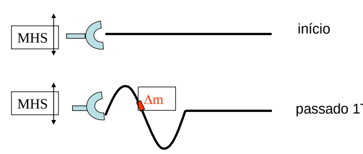
Cap. 3 Ondas

Mover uma corda pode ser fácil, mas uma mangueira difícil pois requer mais energia.

Qual a energia contida numa onda que esteja a oscilar?

Energia de uma onda

Consideremos a situação em que colocamos uma corda em oscilação:

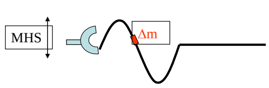


Energia de uma onda

A energia mecânica de um oscilador a executar um MHS é igual à sua energia potencial máxima pelo que:

$$E_{mec} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

O segmento da corda terá:



$$E_{mec} = \frac{1}{2}\Delta m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\rho_{1D}\,\Delta x\omega^2 A^2$$

onde ρ_{1D} é a densidade linear de massa, i.e., a massa por unidade de comprimento

$$\rho_{1D} = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

Energia de uma onda

A energia fornecida à corda por unidade de tempo, ou seja a potência transmitida será:

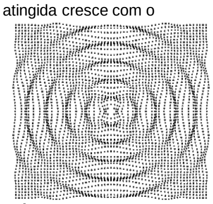
$$P = \frac{dE_{mec}}{dt} = \frac{1}{2}\rho_{1D}\,v\,\omega^2 A^2$$

Como se generaliza este raciocínio a mais dimensões?

Energia de uma onda

A 2D teremos: $\Delta m = \rho_{2D}\Delta a$ onde ρ_{2D} é a massa por unidade de área. Quando a onda se propaga, a área atingida cresce com o raio. Ao fim de t segundos:

$$a = \pi R(t)^2 = \pi v^2 t^2$$



$$P = \frac{dE_{mec}}{dt} = \frac{1}{2}\rho_{2D}\ 2\pi v^2 t\ \omega^2 A^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\rho_{2D}\ \ (2\pi v t) v\ \omega^2 A^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\rho_{2D}\ p\ v\ \omega^2 A^2$$ onde p é o perímetro da frente da onda atingida emitida há t segundos.

Energia de uma onda

$$P = \frac{1}{2}\rho_{2D}\ (2\pi v t) v\ \omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\rho_{2D} p\ v\ \omega^2 A^2$$

O perímetro é tanto maior quanto mais longe a frente de onda chegar (t maior). Porém, a potência da fonte da perturbação é constante. Assim, qual a quantidade que pode variar nesta expressão para compensar o aumento do perímetro?

$$pA^2 = P/(\tfrac{1}{2}\rho_{2D} v\ \omega^2) = constante$$

Ou seja: $A \sim \frac{1}{\sqrt{R(t)}}$ ou $A \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$

Energia de uma onda

A 3D teremos: $\Delta m = \rho_{3D}\Delta a$ onde ρ_{3D} é a massa por unidade de volume. Quando a onda se propaga, a área atingida cresce com o raio. Ao fim de t segundos:

$$V = \frac{4}{3}\pi R(t)^3 = \frac{4}{3}\pi v^3 t^3$$

$$P = \frac{dE_{mec}}{dt} = \frac{1}{2}\rho_{3D}\ 4\pi v^3 t^2\ \omega^2 A^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\rho_{3D}\ \ (4\pi v^2 t^2)\ v\ \omega^2 A^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\rho_{3D}\ S\ v\ \omega^2 A^2$$ onde S é a área da superfície da frente da onda atingida emitida há t segundos.

Energia de uma onda

$$P = \frac{1}{2}\rho_{3D}\ (4\pi v^2 t^2)\ v\ \omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\rho_{3D}\ S\ v\ \omega^2 A^2$$

A àrea é tanto maior quanto mais longe a frente de onda chegar (t maior). Porém, a potência da fonte da perturbação é constante. Assim, qual a quantidade que pode variar nesta expressão para compensar o aumento do perímetro?

$$SA^2 = P/(\tfrac{1}{2}\rho_{3D} v\ \omega^2) = constante$$

Ou seja: $A \sim \frac{1}{R(t)}$ ou $A \sim \frac{1}{t}$

Energia de uma onda

A potência transmitida é uma grandeza que caracteriza a fonte emissora da onda (por exemplo, uma antena de telecomunicações). A capacidade do telemóvel “ter rede” depende antes do sinal captado, cuja amplitude decai com a distância à fonte, pois a energia é repartida por todos os pontos da frente de onda.

Para saber a <u>intensidade,</u> I, do sinal recebido, por unidade de tempo, num ponto da frente de onda devemos dividir a potência pelo “número” de pontos na frente de onda:

$I_{2d} = P/p$ $\qquad$ $I_{3d} = P/a$

Energia de uma onda

Ficamos por isso com as seguintes expressões:

$$I_{2D} = \frac{1}{2}\rho_{2D}\ v\ \omega^2 A^2 \qquad I_{3D} = \frac{1}{2}\rho_{3D}\ v\ \omega^2 A^2$$

A dependência da intensidade do sinal à distância à fonte será:

$$I_{2D} \sim \frac{1}{R} \qquad I_{3D} \sim \frac{1}{R^2}$$

Exercício

Uma explosão ocorreu numa fábrica em Aveiro e foi ouvida na Costa Nova cerca de 30 segundos mais tarde.

a) Calcule a distância aproximada entre as duas localidades.

$$\boxed{d = v \times t \approx 340 \times 30 \approx 10^4\ m = 10\,Km}$$

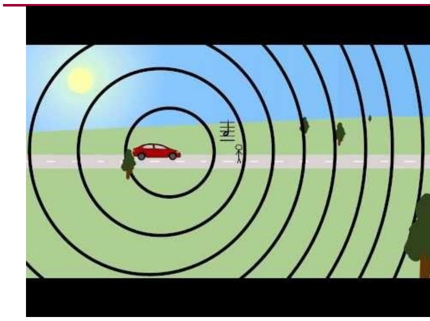
b) Sabendo que a 1 Km do local da explosão a intensidade da onda era de 100 Wm^{-2}, calcule a intensidade na Costa Nova.

$$\boxed{\frac{I_{CN}}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_{CN}^2} = \frac{1^2}{10^2} \Leftrightarrow I_{CN} = \frac{I_1}{100} = 1\,Wm^{-2}}$$

c) Qual a redução correspondente na amplitude da onda?

$$\boxed{\frac{I_{CN}}{I_1} = \frac{\rho v \omega^2 A_{CN}^2/2}{\rho v \omega^2 A_1^2/2} = \frac{A_{CN}^2}{A_1^2} \Leftrightarrow \frac{A_{CN}}{A_1} = \sqrt{\frac{I_{CN}}{I_1}} = 0{,}1}$$

Efeito Doppler



Efeito Doppler

$$f' = f\,\frac{1 + \frac{v_{obs}}{v_{som}}}{1 - \frac{v_{fonte}}{v_{som}}}$$

v_{obs}: velocidade do observador: positiva se se aproximar da fonte; negativa em caso contrário

v_{fonte}: velocidade da fonte: positiva se se aproximar da fonte; negativa em caso contrário

v_{som}: velocidade do som

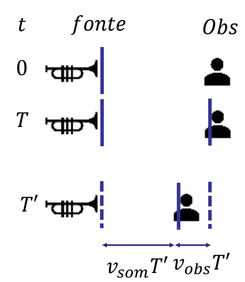
Dedução: movimento do observador

Movimento das cristas de uma onda, emitida por uma fonte a partir de t=0s:

$$\lambda = v_{som}T' + v_{obs}T'$$

$$\Downarrow$$

$$f' = f\left(1 + \frac{v_{obs}}{v_{som}}\right)$$



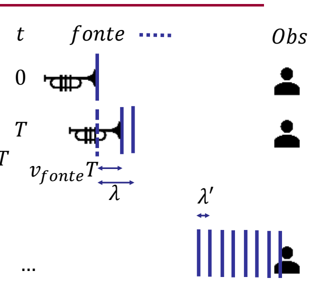
Dedução: movimento da fonte

Movimento das cristas de uma onda, emitida por uma fonte a partir de t=0s:

$$\lambda' = v_{som}T' = \lambda - v_{fonte}T$$

$$\Downarrow$$

$$f' = \frac{f}{1 - \frac{v_{fonte}}{v_{som}}}$$



Exercício

Uma fonte emitindo sons de frequência 200 Hz desloca-se a 80 m/s em relação ao ar no sentido de um ouvinte estacionário.

a) Calcule a frequência recebida pelo ouvinte.

$$\boxed{f' = f\left(1 - \frac{v_s}{v}\right)^{-1} = 200\left(1 - \frac{80}{340}\right)^{-1} = 261{,}5\,Hz}$$

b) Calcule novamente a mesma frequência se o ouvinte se afastar da fonte com uma velocidade de 40 m/s.

$$\boxed{f' = f\left(1 + \frac{v_o}{v}\right)\left(1 - \frac{v_s}{v}\right)^{-1} = 200\left(1 + \frac{-40}{340}\right)\left(1 - \frac{80}{340}\right)^{-1} = 230{,}7\,Hz}$$

c) Qual o correspondente comprimento de onda detetado?

$$\boxed{\lambda = v \times T = v / f = 340 / 230{,}7 = 1{,}47\,m}$$

Reflexões com efeito Doppler

Um morcego emite ultrasons com frequência de 56kHz.
O morcego vôa em direção a uma borboleta a 16m/s. A borboleta afasta-se à velocidade de 2m/s.

a) se a borboleta conseguir detetar os ultrasons, qual a frequência com que os deteta?

b) qual a frequência com que o morcego recebe os ultrsons que emite após serem refletidos na borboleta?

Ideia Importante: quando se dá uma reflexão, o corpo que reflete funciona como um observador que "recebe" a onda emitida; depois é um emissor que "emite" uma onda com as características daquela que recebeu mas a dirige noutra direção/sentido.