

האוניברסיטה הפתוחה

20407

מבני נתונים

ומבוא לאלגוריתמים

חוברת הקורס – סתיו 2012א

כתב: ד"ר גיק וינשטין

אוקטובר 2011 - סמסטר סתיו – תשע"ב

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

1	אל הסטודנט
2	1. לוח זמנים ופעילויות
4	2. תיאור המטלות
4	2.1 מבנה המטלות
4	2.2 חומר הלימוד הדרוש לפתרון המטלות
5	2.3 ניקוד המטלות
5	2.4 הנחיות לכתיבת אלגוריתמים
6	2.5 הנחיות לכתיבת פרויקט הרצה
7	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
9	ממ"ן 11
12	ממ"ן 12
14	ממ"ן 13
17	ממ"ן 14 - פרויקט 1
18	ממ"ן 15
20	ממ"ן 16
22	ממ"ן 17
24	ממ"ן 18 - פרויקט 2

אל הסטודנט,

אנו מברכים אותך עם הצטרפותך לקורס "מבני-נתונים ומבוא לאלגוריתמים" באוניברסיטה הפתוחה. על מנת לסייע לך לעבור את הקורס בהצלחה, ברצוננו להפנות את תשומת לבך למספר נקודות חשובות:

- כידוע לך, נוכחות במפגשי ההנחיה אינה חובה. יחד עם זאת, **מומלץ מאד** להגיע באופן סדיר למפגשי ההנחיה. המפגשים כוללים תרגול רב והשתתפות בהם תסייע לך בפתרון המטלות. כמו כן, ניסיון העבר מלמד, כי קיים מתאם גבוה בין נוכחות סדירה במפגשי ההנחיה לבין הצלחה במבחן הסופי.
- במהלך הקורס יש להגיש תרגילי בית. כדי להיות זכאי לגשת לבחינה, יש להגיש את שני הפרויקטים (ממ"נים 14 ו-18) וכן להגיש עוד שלושה ממ"נים. הכנת תרגילי הבית מהווה הכנה מצוינת לבחינה ולכן מומלץ להגיש כמה שיותר תרגילים. (כל ממ"ן נוסף שיוגש מעבר למינימום הנדרש יוכל רק **לשפר** את ציון המגן - ר' סעיף 4.3 בחוברת). יש להקפיד על הגשת הממ"נים במועד.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם/מת מרכז/ת ההוראה. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:

<http://telem.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מומלץ לעקוב אחרי ההודעות המתפרסמות בלוח ההודעות שבאתר. מאגר המשאבים שבאתר מתעדכן באופן שוטף במהלך הסמסטר, והוא מכיל פתרונות לשאלות מספר הלימוד, בחינות לדוגמה וכדומה.

צוות הקורס ישמח לעמוד לרשותך בכל שאלה שתתעורר.

ניתן לפנות למנחים בשעות ההנחיה הטלפונית שלהם, או אל מרכזי הקורס:

ד"ר ג'ק וינשטין: ביום א' בשעות 15:00-17:00 בטלפון 09-7781270,

e-mail: jack-weinstein@hotmail.com

אייל משיח: ביום ג' בשעות 11:00-13:00 בטלפון 09-7781233,

e-mail: eyalma@openu.ac.il

פגישות יש לתאם מראש.

אנו מאחלים לך לימוד פורה ומהנה.

בברכה,

ד"ר ג'ק וינשטין
מרכז ההוראה בקורס

לוח זמנים ופעילויות (20407 \ 2012א)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	28.10.2011-25.10.2011	פרק א' (מדריך הלמידה) פרקים 2-1 (ספר הלימוד)		
2	4.11.2011-30.10.2011	פרק ב' (מדריך הלמידה) פרק 3 (ספר הלימוד)	מפגש ראשון	ממ"ן 11 6.11.2011
3	11.11.2011-6.11.2011	פרק ג' (מדריך הלמידה) פרק 4 (ספר הלימוד)		
4	18.11.2011-13.11.2011	פרק ד' (מדריך הלמידה) פרק 6 (ספר הלימוד)	מפגש שני	ממ"ן 12 20.11.2011
5	25.11.2011-20.11.2011	פרק ה' (מדריך הלמידה) פרק 7 (ספר הלימוד)		
6	2.12.2011-27.11.2011	פרקים ה', ו' פרקים 9, 7		
7	9.12.2011-4.12.2011	פרק ו' (מדריך הלמידה) פרק 9 (ספר הלימוד)	מפגש שלישי	ממ"ן 13 11.12.2011
8	16.12.2011-11.12.2011	פרק ז' (מדריך הלמידה) פרק 8 (ספר הלימוד)		

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	23.12.2011-18.12.2011 (ד-ו חנוכה)	פרק ח' (מדריך הלמידה) פרק 10 (ספר הלימוד)	מפגש רביעי	ממ"ן 14 (פרויקט 1) 25.12.2011
10	30.12.2011-25.12.2011 (א-ד חנוכה)	פרק ט' (מדריך הלמידה) פרק 11 (ספר הלימוד)		ממ"ן 15 1.1.2012
11	6.1.2012-1.1.2012	פרק י' (מדריך הלמידה) פרק 12 (ספר הלימוד)	מפגש חמישי	
12	13.1.2012-8.1.2012	פרק י"א (מדריך הלמידה) פרק 13 (ספר הלימוד)		ממ"ן 16 15.1.2012
13	20.1.2012-15.1.2012	פרקים י"א, י"ב פרקים 14, 13	מפגש שישי	
14	27.1.2012-22.1.2012	פרק י"ב (מדריך הלמידה) פרק 14 (ספר הלימוד)		ממ"ן 17 29.1.2012
15	6.2.2012-29.1.2012	חזרה	מפגש שביעי	ממ"ן 18 6.3.2012

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

2. תיאור המטלות

קרא היטב עמודים אלו לפני שתתחיל לענות על השאלות

חוברת זו מכילה שש מטלות "יבשות" ושני פרויקטים שעליך להגיש במהלך הקורס. **שני פרויקטי ההרצה הם חובה!** מבין שש המטלות הנותרות יש לפתור **שלוש לפחות**.

2.1 מבנה המטלות

ממ"ן רגיל

מטלה זו מורכבת מכמה שאלות. פתרון השאלות במטלה כזו אינו דורש הרצת תוכניות במחשב. את הפתרון יש לכתוב **בעט** על דף נייר, **בכתב ברור** ובצורה מסודרת. רצוי לכתוב ברווחים ולהשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. (אפשר ורצוי, כמובן, להדפיס את הפתרונות למטלה.) אם שאלה כלשהי בממ"ן אינה ברורה די הצורך, תוכל להיעזר בקבוצת הדיון של הקורס, או להתקשר לאחד המנחים (בשעת ההנחיה הטלפונית).

פרויקט הרצה

במטלה כזו עליך לכתוב ולהריץ במחשב תוכנית בשפת C/C++ או Java. מובן שעל התוכנית לעבור הידור (קומפילציה) ולבצע את הנדרש ממנה ללא טעויות. עליך לשלוח למנחה:

1. הדפסה של קובץ התוכנית
2. דוגמאות מייצגות של קלטים/פלטים אפשריים
3. קובץ התוכנית וקובץ exe של התוכנית.

הערה: מומלץ להתחיל לעבוד על הפרויקטים לפחות שבועיים לפני מועד ההגשה.

2.2 חומר הלימוד הדרוש לפתרון המטלות

מ ט ל ה	חומר הלימוד הנדרש לפתרונה (במדריך הלמידה)
ממ"ן רגיל 11	פרקים א, ב
ממ"ן רגיל 12	פרקים ג, ד
ממ"ן רגיל 13	פרקים ה, ו
ממ"ן 14 - פרויקט הרצה 1	פרקים א עד ו
ממ"ן רגיל 15	פרקים ז, ח
ממ"ן רגיל 16	פרקים ט, י
ממ"ן רגיל 17	פרקים י"א, י"ב
ממ"ן 18 - פרויקט הרצה 2	פרקים ז עד י"ב

הערות: 1. לצורך פתרון המטלה, יש להשתמש רק בחומר שנלמד עד למועד הגשת המטלה ולא בחומר הנמצא בפרקים מתקדמים יותר.

2. כעיקרון, בעת פתרון שאלות, אין להסתמך על תוצאות משאלות בלתי-פתורות בספר הלימוד בלי להוכיחן, אלא אם ניתן לכך היתר מפורש, או אם פתרונות לאלה מופיעים במדריך הלמידה, בחומר הנלמד במפגשי ההנחיה, באתר הקורס וכדומה (ובמקרה זה יש להזכיר את המקור עליו מסתמכים). עם זאת, ניתן לחרוג מכלל זה, ככל שמדובר בתוצאות מוכרות וקלות, או שאין בהן כדי להפוך את השאלה המקורית לקלה מדי ולחסרת עניין.

2.3 ניקוד המטלות

משקל כל אחד מהממ"נים 11, 12, 13, 15, 16, 17 - 4 נקודות.

משקלו של פרויקט 1 (ממ"ן 14) - 2 נקודות

משקלו של פרויקט 2 (ממ"ן 18) - 4 נקודות

כאמור, חובה להגיש את ממ"נים 14 ו-18 ועוד שלושה ממ"נים רגילים.

כלומר, כדי שתוכל לגשת לבחינה עליך לצבור לפחות 18 נקודות מתוך 30 הנקודות האפשריות.

הכנת המטלות הרגילות חייבת להיעשות על-ידי כל תלמיד **בנפרד**. במקרה שתוגשנה שתי מטלות זהות, המטלות תיפסלנה ותוגש תלונה לוועדת המשמעת.

הכנת הפרויקטים (ממ"נים 14 ו-18) יכולה להיעשות בזוגות.

לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לתלמידים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

2.4 הנחיות לכתיבת אלגוריתמים

בחלק מהשאלות בממ"נים הרגילים יש לכתוב **אלגוריתם**. להלן מספר הנחיות:

1. הסבר בקצרה את אופן הפעולה של האלגוריתם (אלא אם כן האלגוריתם מאוד פשוט). אלגוריתם ללא הסבר - לא יתקבל!

2. כתוב את האלגוריתם בפסידו-קוד, בדומה לספר. מותר לשלב בפסידו-קוד הוראות בעברית, במידה שהמימוש שלהן חד-משמעי וברור. (לדוגמה: ניתן לכתוב "בחר את האיבר הראשון ברשימה; אם הוא גדול מ-7 אז...").

3. אסור בשום אופן לכתוב תוכניות בשפת תכנות במקום בפסידו-קוד.
4. אם נתבקשת להוכיח את נכונות האלגוריתם עשה זאת בצורה פורמלית ומדויקת (למשל, תוך שימוש באינדוקציה או בכלים מדויקים אחרים). **גם אם לא** נתבקשת להוכיח נכונות, יש להסביר באופן כללי מדוע האלגוריתם עובד כשורה.
5. בכל מקרה (גם אם הדבר לא צוין במפורש) יש לנתח את זמן הריצה של האלגוריתם. כמו כן, **תמיד** נסה להגיע לאלגוריתם יעיל ככל שניתן.

2.5 הנחיות לכתיבת פרויקט הרצה

ההנחיות נחלקות לשני נושאים עיקריים:

1. כתיבת הקוד: תכנות פשוט וקריא, מודולריות, תכנות מלמעלה למטה.
2. תיעוד: תיעוד כללי, תיעוד בגוף התוכנית.

1. כתיבת הקוד

תכנות פשוט וקריא

- לאחר קריאת התיעוד, על התכנית להיות מובנת גם למי שלא היה שותף לכתיבתה! לכן יש להקפיד על הכללים הבאים:
- א. יש לתת למשתנים שמות משמעותיים.
 - ב. אין להשתמש באותו משתנה למטרות שונות (יוצאים מן הכלל בעניין זה הם משתנים המשמשים כאינדקסים).
 - ג. אם משתנה מקבל במהלך התכנית ערכים בתחום מסוים, יש להגדיר תחום זה.
 - ד. כדאי להשתמש ב- `enumerated type` בעל משמעות בכל מקום שאפשר. למשל, בשפת C/C++, במקום: `int month[12]` נשתמש ב- `enum month = {jan, feb, ..., dec}`.
 - ה. מומלץ להעביר פרמטרים בין הפונקציות השונות ומותר להשתמש במשתנים גלובליים במקרה הצורך.

מודולריות

את התוכנית יש לחלק לפונקציות בהתאם לכללים הבאים:

- א. אם קטע קוד או פעולה חוזרים על עצמם בשינויים קלים, יש לכתוב אותם פעם אחת כפונקציה.
- ב. מספר המשפטים בפונקציה צריך להיות מוגבל, כך שניתן לקרוא ולהבין את פעולתה בקלות.
- ג. יש להשתדל לרכז את פעולות הקלט/פלט בתוך פונקציות ספציפיות למטרות אלו.
- ד. הפונקציה הראשית צריכה להיות מורכבת אך ורק מקריאות לפונקציות.

תכנות מלמעלה למטה (Top-Down)

לאחר כתיבת האלגוריתם לפתרון הבעיה המוצגת בממ"ן, יש "לתרגם" את האלגוריתם לתוכנית מחשב.

רצוי לכתוב את התוכנית באופן הבא :

שלב א - תכנון המבנה הכללי של התוכנית, וחלוקה לפונקציות עיקריות (מודולים).

שלב ב - תכנון כל מודול וחלוקה לתת-מודולים. (יש להחליט בשלב זה אילו ערכים מועברים בין המודולים).

שלב ג - כתיבת הקוד לתוכנית בסדר שבו היא תוכננה : מתחילים בפונקציה הראשית ומסיימים בפונקציות העזר.

שלב ד - ניפוי שגיאות, בדיקת נכונות התוכנית באמצעות הרצתה על קלטים שונים, כתיבת התיעוד.

2. תיעוד

התיעוד צריך להיות מורכב משני חלקים :

1. תיעוד כללי :

- תיאור הבעיה והגישה הכללית של התוכנית לפתרונה.

- תיאור מבני הנתונים העיקריים שבהם התוכנית משתמשת.

- תיאור כללי של הפונקציות המרכיבות את התוכנית והקשרים ביניהן (מי קורא למי וכו').

2. תיעוד בגוף התכנית :

כל פונקציה יש להוסיף מספר שורות, המסבירות באופן כללי מה מבצעת השגרה ומהו תפקיד המשתנים המוגדרים בה. כמו כן יש להוסיף הסברים נוספים לפי הצורך.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

א. הגשת פרויקט 1 (ממ"ן 14) ופרויקט 2 (ממ"ן 18).

ב. הגשת שלושה ממ"נים לפחות מתוך ששת הממ"נים הרגילים.

ג. ציון של 50 לפחות בכל פרויקט.

ד. ציון של 23 לפחות בכל מטלה אחרת הנלקחת בחשבון (ר' סעיף 4.3).

ה. ציון של 60 לפחות בבחינת הגמר.

ו. הציון המשוקלל של המטלות, הפרויקטים והבחינה נדרש להיות 60 לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20407 - מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1, 2, 3 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 6.11.2011

סמסטר: 2012א

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (10 נקודות)

הפעילו את אלגוריתם INSERTION-SORT למיון הסדרה

$[6, 7, 8, 13, 70, 1, 19, 21, 12, 29, 71, 75, 80]$

שאלה 2 (20 נקודות)

- א כתבו מחדש את השגרה INSERTION-SORT כך שתמייין את המערך A בסדר לא-יורד, בצורת כזאת שאחרי כל מעבר בלולאה החיצונית נקבל תת-מערך ממוין בחלק הימני של A .
- ב כתבו מחדש את השגרה INSERTION-SORT כך שתמייין את המערך A בסדר לא-עולה במקום בסדר לא-יורד (תרגיל 2.1, ספר הלימוד, עמוד 18).
- ג כתבו מחדש את השגרה INSERTION-SORT כך שתמייין את המערך A בסדר לא-עולה, בצורה כזאת שבכל שלב נקבל תת-מערך ממוין בחלק הימני של A .
- ד כמה פעולות השוואה מבצעות השגרה INSERTION-SORT והגרסאות שלה בסעיפים הקודמים?
- ה נניח שהמערך A מתחיל מהאינדקס 0; מאחסנים ב- $A[0]$ את הערך $-\infty$. כמה פעולות השוואה מתבצעות עכשיו?

שאלה 3 (20 נקודות)

נתון מערך ממוין $A[1..n]$ של מספרים שלמים; ידוע שכל מספר הנמצא במערך מופיע פעם אחת בלבד.

א' כתבו שגרה שזמן ריצתה $\Theta(1)$, העונה לשאלה הבאה: האם קיים מספר שלם k שלא מופיע במערך ומקיים את התנאי $A[1] < k < A[n]$.

ב' הרחיבו את השגרה מהסעיף הקודם כך שהיא גם תמצא ותחזיר את המספר k (במקרה כאשר הוא קיים). סיבוכיות השגרה תהיה עכשיו $\Theta(\lg n)$.

שאלה 4 (20 נקודות)

סדרו את הפונקציות הבאות על-פי שיעור הגידול שלהן; כלומר, מצאו סידור g_1, g_2, \dots, g_{16} של הפונקציות המקיים: $g_1 = \Omega(g_2), g_2 = \Omega(g_3), \dots, g_{15} = \Omega(g_{16})$.

חלקו את הפונקציות למחלקות שקילות $f(n)$ ו- $g(n)$ שייכות לאותה מחלקת שקילות אם ורק אם $f(n) = \Theta(g(n))$.

$n / \lg n + \sqrt[4]{n}$	$n^{\lg n}$	$(\lg n)^n$	$n^{\lg \lg n}$
$(\lg \lg n)^n$	$2^{\sqrt{\lg n}}$	$\sqrt{\lg n}$	$n^2 (\lg n)^2$
$n^2 / \lg n$	\sqrt{n}	$n \lg n$	$n^{1/\lg n}$
$\lg^2 \lg n$	2^n	$n^2 / \lg n$	$4^{\sqrt{n}}$

שאלה 5 (30 נקודות)

נתון האלגוריתם הבא בפסידוקוד :

```

MIN-MAX( $A, l, r$ )
1  if  $r - l > 1$ 
2    then  $\min \leftarrow \text{MIN-INDEX}(A, l, r)$ 
3          $\max \leftarrow \text{MAX-INDEX}(A, l, r)$ 
4         exchange  $A[l] \leftrightarrow A[\min]$ 
5         exchange  $A[r] \leftrightarrow A[\max]$ 
6         MIN-MAX( $A, l+1, r-1$ )
7  else if  $r - l = 1$ 
8    then if  $A[l] > A[r]$ 
9         then exchange  $A[l] \leftrightarrow A[r]$ 

```

```

MIN-INDEX( $A, l, r$ )
1   $\min \leftarrow l$ 
2  for  $i \leftarrow l+1$  to  $r$ 
3    do if  $A[i] < A[\min]$ 
4         then  $\min \leftarrow i$ 
5  return  $\min$ 

```

```

MAX-INDEX( $A, l, r$ )
1   $\max \leftarrow l$ 
2  for  $i \leftarrow l+1$  to  $r$ 
3    do if  $A[i] > A[\max]$ 
4         then  $\max \leftarrow i$ 
5  return  $\max$ 

```

הקריאה הראשית הינה

MIN-MAX($A, 1, N$)

א' הראו שהאלגוריתם הנתון לא ממיין נכון כל מערך קלט (תנו דוגמה נגדית והסבירו למה האלגוריתם נכשל).

ב' שנו את האלגוריתם, כך שימיין נכון כל מערך. השינוי חייב לשמור על הרעיון המרכזי של האלגוריתם, כלומר הוא יעביר את האיבר המינימלי למקום הראשון ואת האיבר המכסימלי למקום האחרון. כתבו את האלגוריתם החדש בפסידוקוד.

ג' הוכיחו באופן פורמלי את נכונות הגרסה המתוקנת של האלגוריתם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4, 6 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 20.11.2011

סמסטר: א2012

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

מצאו חסמים אסימפטוטיים הדוקים עבור $T(n)$ בכל אחת מנוסחאות הנסיגה שלהלן. הניחו כי $T(n)$ קבועה עבור $n = 1$ (או עבור כמה ערכים התחלתיים של n , לפי הצורך).

א'

$$T(n) = T(n/4) + \sqrt{n}$$

ב'

$$T(n) = 5T(n/5) + \lg^2 n$$

ג'

$$T(n) = 6T(n/6) + n + n / \lg n$$

ד'

$$T(n) = 4T(n/4) + n^{3/2}$$

ה'

$$T(n) = \frac{3}{2}T(\sqrt{n}) + \lg^2 n$$

$$(T(2) = 1)$$

ו'

$$T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + n \lg n$$

$$(T(2) = 1)$$

שאלה 2 (24 נקודות)

פתרו את הבעיה 3-4 (עלות העברת פרמטרים) מספר הלימוד (עמוד 73).

שאלה 3 (16 נקודות)

נתבונן בשגרה HEAP-INCREASE-KEY (ספר הלימוד, עמוד 117). אם המערך A מתחיל באינדקס 0 ומאחסנים ב- $A[0]$ את הערך ∞ , אזי ניתן להוריד את ההשוואה " $i > 1$ " שבשורה 3; כתוצאה מזה, מקטינים את מספר ההשוואות שהשגרה מבצעת. אומרים שהאיבר $A[0]$ משמש כזקיף.

כתבו את הגרסה החדשה של השגרה והסבירו למה היא עובדת נכון.

שאלה 4 (40 נקודות)

ערמות שמאליות

הגדרות: בהינתן עץ בינרי T , נגדיר לכל צומת z בעץ את $NPL(z)$ (null path length) כאורך המסלול הקצר ביותר מ- z עד לצומת עם פחות משני בנים. נוסיף לכל צומת z של T את השדה $npl[z]$ המכיל את $NPL(z)$; העץ הבינרי T נקרא **עץ שמאלי** אם לכל צומת z בעץ מתקיים: $npl[\text{left}[z]] \geq npl[\text{right}[z]]$. העץ שמאלי H נקרא **ערמה שמאלית** אם לכל צומת z בעץ מתקיים $key[\text{parent}[z]] \leq key[z]$.

א' הראו שאם מיישמים ערמה בינרית כעץ (בעזרת מצביעים, לא במערך), אזי היא מהווה גם ערמה שמאלית.

ב' הוכיחו שכל עץ שמאלי T בן r צמתים במסלול הימני מכיל $2^r - 1$ צמתים לפחות.

ג' בהינתן שתי ערמות שמאליות, H_1 בת n_1 צמתים ו- H_2 בת n_2 צמתים, נגדיר את פעולת המיזוג של שתי הערמות. משווים בין מפתחות שני השורשים; בוחרים את הערמה עם המפתח הגדול יותר בשורש וממזגים אותה (באופן רקורסיבי) עם התת-ערמה הימנית של הערמה השנייה. את התוצאה מחברים כתת-עץ ימני של הערמה השנייה. אם תנאי העץ השמאלי מופר בשורש הערמה החדשה, מחליפים בין שני הבנים של השורש.

כתבו את האלגוריתם הרקורסיבי למיזוג שתי ערמות שמאליות בפסידוקוד.

הוכיחו שזמן הריצה של האלגוריתם הינו $\Theta(\lg n_1 + \lg n_2)$.

ד' כתבו את הגרסה האיטרטיבית של האלגוריתם למיזוג שתי ערמות שמאליות בפסידוקוד. רמז: ממזגים את שני המסלולים הימניים; בכל צומת של התוצאה שבו לא מתקיים תנאי העץ השמאלי, מחליפים בין שני הבנים. הוכיחו שזמן הריצה לא משתנה.

ה' השתמשו בפעולת המיזוג כדי להגדיר את פעולת הכנסת איבר חדש x לערמה השמאלית H בת n צמתים. מהו זמן הריצה של הפעולה?

ו' השתמשו בפעולת המיזוג כדי להגדיר את פעולת מחיקת המינימום מערמה שמאלית H בת n צמתים. מהו זמן הריצה של פעולה זו?

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 7, 9 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 11.12.2011

סמסטר: 2012א

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"**

שאלה 1 (10 נקודות)

הפעילו את האלגוריתם QUICKSORT למיון הסדרה

$\langle 60, 70, 80, 90, 100, 1, 5, 9, 11, 15, 19, 21, 25, 29, 30 \rangle$

שאלה 2 (30 נקודות)

נתבונן בגרסא שונה של מיון-מהיר, המתוארת בשורות הבאות:

```

PARTITION1( $A, p, r$ )
1   $y \leftarrow A[p]$ 
2   $i \leftarrow p$ 
3   $j \leftarrow r+1$ 
4  while  $i < j$ 
5      do  $i \leftarrow i+1$ 
6          while  $i \leq r$  and  $A[i] < y$ 
7              do  $i \leftarrow i+1$ 
8           $j \leftarrow j-1$ 
9          while  $j \geq p$  and  $A[j] > y$ 
10             do  $j \leftarrow j-1$ 
11     if  $i < j$ 
12         then exchange  $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
13     exchange  $A[j] \leftrightarrow A[p]$ 
14     return  $j$ 

```

```

QUICKSORT1( $A, p, r$ )
1  if  $p < r$ 
2      then  $q \leftarrow \text{PARTITION1}(A, p, r)$ 
3          QUICKSORT1( $A, p, q-1$ )
4          QUICKSORT1( $A, q+1, r$ )

```

קריאת ההפעלה :

QUICKSORT1($A, 1, \text{length}[A]$)

א' הוכיחו שהאלגוריתם ממיין נכון את המערך A .

ב' אחת הבדיקות " $i \leq r$ ", " $j \geq p$ " בלולאות הפנימיות מיותרת; איזו מהן ומדוע?

ג' כמה השוואות מבצע האלגוריתם עבור מערך A באורך n וממין מראש?

שאלה 3 (20 נקודות)

יהיו $A[1..n]$ ו- $B[1..n]$ שני מערכים, שכל אחד מהם מכיל רשימה ממוינת של n מספרים. כתבו אלגוריתם למציאת ערך המיקום ה- k בתוך איחוד שתי הרשימות, שזמן ריצתו $O(\lg \min(k, 2n - k))$.

שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה שגרת "קופסה שחורה", המוצאת את ערך המיקום ה- $\left\lfloor \frac{in}{m} \right\rfloor$ בזמן לינארי במקרה הגרוע בכל מערך בגודל n (i ו- m קבועים, $1 \leq i \leq m$). כתבו אלגוריתם פשוט שרץ בזמן לינארי, המשתמש ב"קופסה השחורה" כדי לפתור את בעיית הבחירה עבור ערך מיקום כלשהו.

שאלה 5 (20 נקודות)

כתבו אלגוריתם עבור הבעיה הבאה:

א' הקלט מכיל n זוגות של מספרים שלמים חיוביים

$$(x_1, w_1), \dots, (x_n, w_n)$$

ומספר שלם k ;

ב' הפלט הוא ערך המיקום ה- k ברשימה המכילה w_1 הופעות של x_1, \dots, x_n הופעות של x_n . האלגוריתם חייב לרוץ בזמן $O(n)$ במקרה הגרוע.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 2, 7 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 2 נקודות

מספר השאלות: 1

מועד אחרון להגשה: 25.12.2011

סמסטר: 2012א

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

מותר לעבוד בזוגות

מטרת הפרויקט היא להשוות באופן מעשי שלוש גרסאות של האלגוריתם מיון-בעות: :
, BUBBLESORT (BS), BIDIRECTIONALBUBBLESORT (BDBS),
SHAKERSORT (SHS) (ראו את הנספח).

א' כתבו תכנית (ב- C/C++, Java), או שפה אחרת שבה המנחה יכול לבדוק) המבצעת את הפעולות הבאות:

1. יוצרת מאה סדרות באורך 200 בעזרת פונקציית ספרייה המיועדת ליצירת מספרים אקראיים; כל סדרה תכיל איברים בתחום 1..100.
 2. על כל סדרה כקלט, תריצו את האלגוריתם BS, את האלגוריתם BDBS ואת האלגוריתם SHS.
בכל הרצה עליכם לספור את ההשוואות (בין איברי הסדרה בלבד) ואת ההעתקות (של איברים או אל איברים).
 3. הדפסת ממוצעי התוצאות על כל מאה הסדרות, עבור הכמויות הבאות:
 - BS, השוואות;
 - BS, העתקות;
 - BDBS, השוואות;
 - BDBS, העתקות;
 - SHS, השוואות;
 - SHS, העתקות.
- ב' צרפו את מסקנותיכם בכתב (איזה אלגוריתם מבצע פחות פעולות השוואה ואיזה אלגוריתם מבצע פחות פעולות העתקה).

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8, 10 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 1.1.2012

סמסטר: א2012

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

הוכיחו שכל אלגוריתם מבוסס על השוואות הפותר את בעיית החזרת k האיברים הקטנים ביותר בסדר ממזין (מתוך סדרת n איברים נתונים), חייב לרוץ בזמן $\Omega(k \cdot \lg n)$ במקרה הגרוע.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונים קבוצה S של n מספרים שלמים ומספר שלם נוסף z ; נניח שכל איברי הקבוצה S שייכים לתחום $[0 \dots n^k - 1]$ ($k \geq 1$, שלם).
א' כתבו אלגוריתם הקובע האם קיימים ב- S ארבעה איברים שונים זה מזה, שסכומם בדיוק z ; זמן הריצה הנדרש: $\Theta(n^2 \cdot \min(k, \lg n))$.
ב' כתבו אלגוריתם הקובע האם קיימים ב- S חמישה איברים שונים זה מזה, שסכומם בדיוק z ; זמן הריצה הנדרש: $\Theta(n^3)$.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה סדרה בת n שלמים מהתחום $[0..2^n - 1]$.

הוכיחו שניתן למיין סדרה זו בזמן $O(n^2 / \lg n)$.

שאלה 4 (20 נקודות)

ידוע שאחת הבעיות הנוצרות כאשר מממשים מחסנית במערך היא מצב הגלישה הנגרם ע"י ניסיון להכניס איבר חדש למערך מלא. ניתן לפתור את בעיית הגלישה באופן הבא: כל פעם שהמערך מתמלא, מייצרים מערך חדש, גדול יותר, ומעתיקים את כל האיברים של המחסנית מהמערך הישן למערך החדש (עם שמירת סדר האיברים: בסיס אל בסיס, ראש אל ראש).

א' נניח שהמערך החדש מכיל תא אחד יותר מאשר המערך הישן. כתבו את פעולת ההכנסה החדשה. מהו זמן הריצה במקרה הגרוע עבור סדרה של n פעולות הכנסה (החל ממחסנית ריקה)?

ב' נניח שהמערך החדש מכיל k תאים יותר מאשר המערך הישן. כתבו את פעולת ההכנסה החדשה. מהו זמן הריצה במקרה הגרוע עבור סדרה של n פעולות הכנסה (החל ממחסנית ריקה)? התייחסו גם למקרה כאשר k קבוע וגם למקרה כאשר k משתנה בלתי-תלוי ב- n .

ג' נניח שהמערך החדש מכיל פי שניים יותר תאים מאשר המערך הישן. כתבו את פעולת ההכנסה החדשה. מהו זמן הריצה במקרה הגרוע עבור סדרה של n פעולות הכנסה (החל ממחסנית ריקה)?

ד' איזו מהשיטות המתוארות בסעיפים (א)-(ג) היא היעילה ביותר?

שאלה 5 (20 נקודות)

פתרו את התרגיל 5-10.3 מספר הלימוד (עמודים 179).

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 11, 12 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 15.1.2012

סמסטר: א2012

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

בהינתן קבוצה S של n מספרים ממשיים ומספר ממשי נוסף z :
א' כתבו אלגוריתם הקובע האם קיימים ב- S שני איברים שונים, שסכומם בדיוק z ; תוחלת זמן הריצה הנדרשת: $\Theta(n)$;
ב' כתבו אלגוריתם הקובע האם קיימים ב- S ארבעה איברים שונים זה מזה, שסכומם בדיוק z ; תוחלת זמן הריצה הנדרשת: $\Theta(n^2)$.

שאלה 2 (20 נקודות)

א' נתונה טבלת גיבוב עם שרשור בת m תאים, ריקה מלכתחילה. מהי ההסתברות שאחרי הכנסת ארבעת מפתחות תיווצר שרשרת באורך 4?
ב' נתונה טבלת גיבוב פתוח בת m תאים, ריקה מלכתחילה. נכניס לטבלה את המפתח k_1 , אחריו את המפתח k_2 , ובסוף את המפתח k_3 . מהי ההסתברות שהכנסת המפתח k_3 תדרוש שלוש בדיקות?
ג' נתונה טבלת גיבוב כאשר מקדם העומס α שלה קשור למספר האיברים שבטבלה על ידי הנוסחה $\alpha = 1 - 1/\lg n$. בהנחה שהטבלה משתמשת במיעון פתוח, מהי תוחלת הזמן עבור חיפוש כושל בפונקציה של n ?

שאלה 3 (20 נקודות)

נתון עץ בינארי המכיל את העלים $\langle \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m \rangle$ ועומקיהם $\langle d_1, d_2, \dots, d_m \rangle$ בהתאמה.

$$\sum_{i=1}^m 2^{-d_i} \leq 1$$

הוכיחו שמתקיים

באילו תנאים מתקיים השוויון?

שאלה 4 (20 נקודות)

נתאר אלגוריתם חלופי עבור מחיקת צומת מעץ חיפוש בינארי.

במקרה השלישי, כאשר לצומת z שני בנים, מאתרים את העוקב שלו y , ואז מחליפים בין

$left[y]$ לבין $left[z]$; עכשיו אפשר להסיר את z כמו במקרה השני.

הוכיחו שהאלגוריתם הזה נכון. מהו זמן הריצה במקרה הגרוע? מהם היתרונות והחסרונות שלו בהשוואה לאלגוריתם המחיקה המתואר בספר?

שאלה 5 (20 נקודות)

הוכיחו שאפשר לשחזר עץ חיפוש בינארי מהסריקה הסופית שלו. כלומר, הראו שאם הסדרה

$\langle k_1, k_2, \dots, k_n \rangle$ היא תוצאת הסריקה הסופית של עץ חיפוש בינארי, אזי מבנה העץ מוגדר באופן

חד-משמעי על-ידי הסדרה; בנוסף, מבנה העץ משוחזר כאשר הסדרה נקראת מימין לשמאל.

האם נכון דבר דומה עבור הסריקה התחילית? ועבור הסריקה התוכית?

הערה: הניחו שהמפתחות שונים זה מזה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 13, 14 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 29.1.2012

סמסטר: 2012א

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (10 נקודות)

פתרו את התרגיל 2-13.1 מספר הלימוד (עמוד 233).

שאלה 2 (20 נקודות)

עץ חיפוש בינארי הוא עץ אדום-אדום-שחור אם הוא מקיים את התכונות של האדום-אדום-שחור:

1. כל צומת הוא אדום או שחור;
2. כל צומת עלה (NIL) הוא שחור;
3. אם צומת הוא אדום וההורה שלו גם הוא אדום, אזי שני בניו שחורים;
4. כל המסלולים הפשוטים מצומת לצאצאים עלים מכילים אותו מספר של צמתים שחורים (גובה-השחור של הצומת).

כמה צמתים פנימיים שגובה-השחור שלהם k קיימים לכל היותר בעץ אדום-אדום-שחור המכיל n צמתים? כמה קיימים לכל הפחות?

שאלה 3 (30 נקודות)

נגדיר את המבנה של **עץ צובר** – עץ בינארי המכיל בכל צומת z שני שדות מספריים :

- שדה המפתח $key[z]$;

- השדה הצובר $accum[z]$.

בהינתן עץ צובר A , ניתן לבנות ממנו עץ בינארי רגיל T : עבור כל צומת z ב- A , מחברים את הערך $accum[z]$ לכל המפתחות בתת-עץ המושרש ב- z ; נאמר ש- A מייצג את T .

א' כתבו אלגוריתם הרץ בזמן $O(n)$, הבודק האם העץ הצובר A מייצג עץ **חיפוש** בינארי.

ב' כתבו שְׁגָרוֹת בפְּסִידוֹקוּד עבור פעולות החיפוש, ההכנסה והמחיקה עבור העץ הצובר A , המייצג עץ חיפוש בינארי ; זמן הריצה של שלוש השְׁגָרוֹת חייב להישאר $O(h)$ (h הוא גובה העץ).

ג' הראו שניתן להוסיף לכל צומת ב- A שדה צבע, כך ש- A ייצג עץ אדום-שחור. כתבו את הגרסאות החדשות של שְׁגָרוֹת הרוטציות.

שאלה 4 (40 נקודות)

נתונה סדרה KP של זוגות מפתחות מהסוג $k = (a, b)$, ו- a מספרים ממשיים, שונים זה

מזה ; כלומר, אם $k_1 = (a_1, b_1)$ ו- $k_2 = (a_2, b_2)$, אזי $a_1 \neq a_2$ או $b_1 \neq b_2$.

הציעו מבנה נתונים S , שבאמצעותו ניתן לבצע את הפעולות הבאות בזמנים הנדרשים (n מציין את מספר האיברים במבנה) :

$BUILD(KP, S)$: בניית המבנה S מתוך הסדרה KP ; זמן הריצה $O(n \cdot \lg n)$;

$INSERT(k, S)$: הכנסת זוג המפתח $k = (a, b)$ למבנה S ; זמן הריצה $O(\lg n)$;

$DELETE(p, S)$: מחיקת האיבר שאליו מצביע p מהמבנה S ; זמן הריצה $O(\lg n)$;

$FIRST-MIN(S)$: החזרת מספר המפתחות $k = (a, b)$ שעבורם ערך המפתח a הוא מינימלי ; זמן הריצה : $O(1)$;

$MAJORITY-FIRST(S)$: החזרת המפתח a שעבורו קיים מספר מכסימלי של זוגות מפתחות $k = (a, b)$ ב- KP ; זמן הריצה $O(\lg n)$;

$MAJORITY-SUM(S)$: החזרת סכום $a + b$ של זוגות מפתחות $k = (a, b)$, ששכיחותו מכסימלית ; זמן הריצה : $O(1)$.

הערה : המבנה S יכול להיות מורכב מכמה מבני נתונים יסודיים.

מטלת מנחה (ממ"ן) 18

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 13, 14 (ספר הלימוד)

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 1

מועד אחרון להגשה: 6.3.2012

סמסטר: 2012א

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שמונה-עשרה ... שמונה-עשרה ... שמונה-עשרה

מותר לעבוד בזוגות

מבוא

בפרויקט זה עליכם לכתוב ולהריץ תכנית ב-Java או ב-C/C++, שתפקידה לנהל את ספריית האוניברסיטה. כלל מנוי בספרייה המאפיינים הבאים: שם משפחתו, מספר הזהות שלו וקודי הספרים שברשותו (כל קוד מורכב משתי אותיות וארבע ספרות). כלל מנוי לכל היותר 10 ספרים בו-זמנית. שמות משפחה עשויים, כמובן, לחזור. מספרי זהות וקודים של ספרים אינם חוזרים.

הקלט הבסיסי לתכנית הוא אוסף של שורות. בכל שורה יש הודעה או שאילתה. עליכם לבחור מבני נתונים יעילים לביצוע השינויים הנדרשים ושליפת המידע.

הדרישה העיקרית בתכנית היא לבחור מבנה נתונים יעיל ככל האפשר, כך שבעקבות הודעה חדשה על קורא ששאל או החזיר ספר, ניתן יהיה לבצע בצורה יעילה את השינוי הנדרש על מבנה הנתונים. כמו-כן, נדרש שהתשובות לשאילתות יוכלו להינתן ביעילות.

אופן ייצוג הקלט

הקלט לתכנית מורכב מאוסף של שורות. כל שורה מכילה אחד מהשניים:

- הודעה על השאלתהחזרת ספר על ידי קורא;
- שאילתה.

• ההודעות קלט אפשריות:

1. הודעה על השאלת ספר

למשל: + AB1132 112540783 Baraq

משמעות: ברק, בעל ת"ז 112540783, שואל ספר שהקוד שלו AB1132.

2. הודעה על החזרת ספר

למשל: - AB1132 112540783 Baraq

משמעות: ברק הנ"ל מחזיר את הספר שהקוד שלו AB1132.

3. הודעה על מנוי חדש

למשל: + Yizhaqi 356241173

משמעות: לקוח חדש, יצחקי, בעל מספר זהות 356241173, הצטרף לספרייה.

4. הודעה על סיום מינוי

למשל: - Yizhaqi 356241173

משמעות: הלקוח הנ"ל מסיים את מינויו בספרייה.

• השאילתות אפשריות:

כל השאילתות מתחילות בסימן שאלה. יש שלושה סוגי שאילתות:

1. אילו ספרים נמצאים ברשותו של המנוי שמספר הזהות שלו רשום בשאילתה:

112540783 ?

2. אצל איזה מנוי נמצא הספר שהקוד שלו רשום בשאילתה:

AX2713 ?

3. מיהם כל הלקוחות שמחזיקים כרגע במספר הרב ביותר של ספרים:

! ?

הערה: אין צורך לבדוק את חוקיות הקלט. ההנחה היא כי הקלט חוקי (למשל: כאשר לקוח מופיע פעמים רבות, תמיד יהיה לו אותו מספר זהות).

צורת הפלט

יש להדפיס כל שינוי בצורה ברורה ומדויקת.
יש להדפיס בצורה ברורה כל שאילתה, ולאחריה את התשובה עליה.

יעילות

הפרמטרים של הבעיה הם מספר הספרים m ומספר הקוראים n .
ביצוע הפעולות השונות צריך להיות יעיל כפונקציה של m ו- n .

הרצה

הריצו את התכנית על 2 קלטים. כל קלט צריך להכיל 25 שורות לפחות.

תיעוד

תעדו את התכנית בהתאם לכתוב בסעיף "הנחיות לכתיבת פרויקט הרצה" בחוברת הקורס.
תארו את מבנה הנתונים והסבירו איך מתבצעת כל פעולה.
נתחו את זמן הביצוע של כל פעולה כפונקציה של m ו- n .

דרישה נוספת

צרפו את דיונכם בסיבוכיות האלגוריתמים השונים שבהם התכנית משתמשת.