מקבץ פתרונות לפי נושאים בקורס

אוטומטים ושפות פורמליות

עידן כמרה
idan@alpeh.nu

במסמך זה אפשר למצוא פתרונות **תמציתיים** לשאלות במגוון נושאים מהקורס "אוטומטים ושפות פורמליות" שנלמד באוניברסיטה הפתוחה.

לתגובות, תיקונים או בכל עניין אחר אפשר ליצור איתי קשר בכתובת שמופיעה למעלה.

עדכונים למסמך זה יופיעו ב-http://aleph.nu/university.html.
עודכן לאחרונה ב-29.06.2013.

תוכן העניינים

ביטויים רגולריים

1. רשום ביטוי רגולרי המציין את שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{a, b, c\}$ שיש בהן בדיוק שתי אותיות c, והן אינן מכילות רצף cba.

פתרון: נחלק לשני מקרים; שתי אותיות ה-c מופיעות בנפרד, או ששתיהן מופיעות ברצף. במקרה הראשון נקבל את הביטוי הרגולרי $(a+b)*c(a+bb)(a+b)*c((a+bb)(a+b)*+b+\varepsilon)$. לפני ה-c אפשר להוסיף a או b כרצוננו, ולאחריו חייב להופיע a או bb (אחרת נקבל מופע של cba). לאחר מכן שוב יכולים להופיע כל הצירופים של a ו-b, ולאחר המופע של c, ניתן שהוא יסיים את המילה או שלאחריו יופיע מופע יחיד של b, או שיופיע אחריו שוב a או bb ואז אותיות כרצוננו.
בדומה, במקרה השני נקבל את הביטוי הרגולרי $(a+b)*cc((a+bb)(a+b)*+b+\varepsilon)$.
כלומר ביטוי רגולרי לשפה זו יהיה:

$$(a+b)*c(a+bb)(a+b)*c((a+bb)(a+b)*+b+\varepsilon)+$$
$$+(a+b)*cc((a+bb)(a+b)*+b+\varepsilon)$$

2. רשמו ביטוי רגולרי המציין את שפת כל המילים מעל $\{0,1\}$, שאין בהן תת מילה 110 ושמספר ה-1-ים בהם הוא אי זוגי.

פתרון: ביטוי רגולרי לשפה זו הוא: $(0^*10^+10^+)^*0^*10^* + (0^*10^+10^+)^*0^*10^*(11)^*$.
הרעיון הוא לפרק לשני מקרים; אם במילה מופיע רצף של 1-ים, או אם לא.
במקרה השני, נחלק את המילה לשני חלקים – סיפא של המילה שיש בה אחד יחיד (חייב להיות כזה כי מספר ה-1-ים הוא אי זוגי), ושאר המילה. את החלק של הסיפא ממלא החלק 0^*10^* בביטוי. החלק שלפניו מורכב ממספר זוגי של 1-ים, כאשר בין כל שניים כאלו מפריד לפחות אפס אחד.
כעת, רצף של שני 1-ים או יותר, יכול להופיע רק בסוף המילה, שכן אחרת יהיה אפס אחרי זוג 1-ים בניגוד לדרישה. לכן במקרה השני מסיימים את המילה עם $0^*1(11)^*$, ותחילת המילה זהה.

3. כתוב ביטוי רגולרי לשפת כל המילים מעל $\{s, t\}$ שיש בהן רצף sts וגם יש בהן רצף tst.

פתרון:
הרצפים יכולים להופיע מחוברים: $stst$ וכך להכיל את שני הרצפים, או בנפרד. בכל אחד מהמקרים האלו, sts יכול להופיע לפני tst או להיפך, כלומר:

$$\Sigma^* sts\, \Sigma^* tst\, \Sigma^* + \Sigma^* tst\, \Sigma^* sts\, \Sigma^* + \Sigma^* stst\, \Sigma^* + \Sigma^* tsts\, \Sigma^*.$$

4. רשום ביטוי רגולרי המציין את שפת כל המילים מעל $\{0,1\}$, המסתיימות ב-0, ושאין בהן תת מילה 010.

פתרון:
מרגע שהופיע אפס, אחד חייב להופיע ברצף של שתיים או יותר. לכן נקבל $1^*(0+11^+)^*0$.

5. רשום ביטוי רגולרי המציין את שפת כל המילים מעל $\{a, b\}$ שאין בהן תת מילה aab, ושהן מתחילות ברצף bb או aaa.

פתרון:

אם המילה מתחילה ב- aaa, אז אסור שיופיע b נוסף במילה.

אם המילה מתחילה ב- bb, אז לאחר מכן – לאחר כל מופע של a חייב להופיע b, אלא אם כן זו סוף המילה. לכן נקבל את הביטוי הרגולרי $aaa^{+} + bb(ab+b)^{*}a^{*}$.

6. רשום ביטוי רגולרי המציין את שפת כל המילים מעל $\{0,1\}$ שאין בהן תת מילה 011, ויש בהן תת מילה 111.

פתרון:

אין אפשרות שיופיע אפס לפני הרצף 111 אחרת יווצר רצף 011. לאחר שהופיע הרצף, ניתן להוסיף אפסים ללא הגבל, אך לאחר כל 1 חייב להופיע אפס, אלא אם הוא בסוף מילה.

נקבל הביטוי הרגולרי $111^{+}(0+10)^{*}(1+\varepsilon)$.

7. רשום ביטוי רגולרי המציין את שפת כל המילים מעל $\{0,1\}$ כך שאם קיים בהן רצף 00 אז היכנשהו ימינה לו במילה קיים רצף 11.

פתרון:

נחלק לשני המקרים: יש רצף 00 או אין. במקרה השני, לאחר כל מופע של אפס חייב להופיע אחד, אלא אם הוא האות האחרונה. המקרה הראשון פשוט יחסית.

נקבל $\Sigma^{*}00\Sigma^{*}11\Sigma^{*} + (01+1)^{*}(0+\varepsilon)$.

8. רשום ביטוי רגולרי המציין את שפת המילים מעל $\{0,1\}$ שאין בהן תת מילה 011, ושהן מסתיימות ב- 1.

פתרון:

מרגע שהופיע אפס, מופעים של 1-ים חייבים להיות יחידים. לכן נקבל את הביטוי $1^{*}(0+10)^{*}1$.

9. רשום ביטוי רגולרי המציין את שפת המילים מעל $\{a,b\}$, שמספר ה- a-ים בהן זוגי, ואין בהן תת מילה aab.

פתרון:

מילה יכולה להתחיל ב- b. מרגע שהופיע a, הזוג שלו יכול להיות צמוד אליו, או שיש ביניהם b-ים. אם הם צמודים, אז לא יוכל להופיע מאוחר יותר b. אחרת, לאחר ה- a השני חייב להופיע לפחות b אחד, אחרת תיווצר אפשרות להיצמדות של a-ים (אלא אם זו סוף המילה).

נקבל את הביטוי $b^{*}(ab^{+}ab^{+})^{*}(ab^{+}a+\varepsilon)(aa)^{*}$.

10. רשום ביטוי רגולרי המציין את שפת כל המילים מעל $\{a,b,c\}$ מהצורה ucv באורך זוגי, כאשר $u,v\in\{a,b\}^{*}$, ואין בהן רצף bc.

פתרון:

נחלק לשלושה מקרים: אם $u=\varepsilon$, נקבל את הביטוי $c\Sigma(\Sigma\Sigma)^{*}$.

אם $u\neq\varepsilon, |u| \bmod 2 = 0$, אז נקבל את הביטוי $\Sigma(\Sigma\Sigma)^{*}ac(\Sigma\Sigma)^{*}\Sigma$.

אם $|u| \bmod 2 = 1$, נקבל את הביטוי $(\Sigma\Sigma)^{*}ac(\Sigma\Sigma)^{*}$.

קיבלנו את הביטוי $c\Sigma(\Sigma\Sigma)^{*} + \Sigma(\Sigma\Sigma)^{*}ac(\Sigma\Sigma)^{*}\Sigma + (\Sigma\Sigma)^{*}ac(\Sigma\Sigma)^{*}$.

תוצאת פעולות על שפות

11. רשום את השפה הבאה כביטוי רגולרי: $L = a^+b^*a^+ /(\{a\} \cup b^+a^*)$.

פתרון: כשמורידים מכל המילים ב- $a^+b^*a^+$ אות אחרונה, אז עדיין נשארות כל המילים באותה צורה עם מספר כלשהו של a-ים בסוף, אך מתווספת המילה שבה אין בכלל a-ים בסוף. כלומר, מקבלים $a^+b^*a^*$. כאשר מורידים מהן מילים מתוך b^+a^* מקבלים את כל המילים מהצורה המקורית כאשר ניתן להוריד להן a-ים ו-b-ים, ושוב נקבל את השפה $a^+b^*a^*$. בסך הכל קיבלנו ש- $L = a^+b^*a^*$.

12. כתוב בצורה פשוטה את תוצאות החלוקה מימין הבאה:

א. a^*ba^* / ba^*b.

ב. $\{a^ib^j \mid i \geq j \geq 0\} / \{a^ib^i \mid i > 0\}$.

ג. $\{a^ib^i \mid i > 0\} / \{a^ib^j \mid i \geq j \geq 0\}$.

פתרון:

א. אין אף מילה ב- a^*ba^* שמסתיימת במילה מתוך ba^*b ולכן התוצאה היא $\varnothing$.

ב. כל סיפא של השפה המחולקת שמופיעה כמילה בשפה המחלקת מכילה בעצם מספר שווה של a-ים ו-b-ים, ולכן התשובה היא a^*.

ג. כל מילה בשפה הראשונה מופיעה בשפה השנייה, ואין סיפא ממש של השפה הראשונה שמופיעה בשפה השנייה, ולכן התשובה היא ε.

13. הציגו את תוצאת החלוקה מימין הבאה בצורה פשוטה:

$L = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\} / \{b^ic^j \mid j > i \geq 0\}$.

פתרון:

$L = \{a^ib^j \mid i \geq j \geq 1\}$. לפחות אחד, כי כשמבצעים חלוקה, החזקה של c חייבת להיות אחת, וניתן "לקחת" רק חלק ממספר ה- b-ים.

14. הציגו את תוצאת פעולת המינימום הבאה בצורה פשוטה:

$Min\ (\{a^ib^jc^k \mid 1 \leq i < j \ or\ 1 \leq j = k < i\})$.

פתרון:

ניתן לראות שכל מילה שעומדת בתנאי השני, יש לה רישא שעומדת בתנאי הראשון, וכל מילה שעומדת בתנאי הראשון ויש לה c, יש לה רישא שעדיין שייכת לשפה (בלי ה-c). כל מילה מהתנאי הראשון שאין בה c, שבה $j > i + 1$, שוב יש לה רישא שעדיין בשפה. לכן התשובה היא $\{a^ib^j \mid j > i \geq 1\}$.

15. הציגו בצורה פשוטה את תוצאת החלוקה מימין הבאה:

$L = \{c^ib^jc^jd^i \mid i, j \geq 0\} / \{c^nd^n \mid n \geq 1\}$.

פתרון:

ראשית, כל מילה שמחלקים, היא מילה שבה $i, j \geq 1$.

בנוסף, כשמחלקים, $i = n$, אחרת לא הייתה אפשרות להוריד גם c. בוודאי מתקיים $j \geq i$, והחזקה הנותרת של c נקבעת על פי i, j:

$L = \{a^ib^jc^{j-i} \mid j \geq i\}$.

16. מהו $Min\ (0^*1^+)$?

פתרון:

כל מילה שמכילה יותר מ-1 יחיד, רישא שלה שעדיין מכילה 1 היא בשפה. כל מילה שמכילה 1 יחיד, כל רישא ממש שלה היא לא בשפה.

לכן, $Min\ (0^*1^+) = 0^*1$.

משפט נרוד

17. הוכיחו באמצעות משפט נרוד שהשפה L איננה רגולרית:

$L = \{0^i 1^j 2^k 3^n \mid 1 \le i, j, k, n; n > i \cdot k\}$.

פתרון: לכל i שלם, תהי $z_i = a^i 12^2$.

לכל $i \ne j$, נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $i > j$, נבחר את המילה $z = 3^{2j+1}$.

אז $z_j z = 0^j 12^2 3^{2j+1}$, ומתקיים $2j + 1 > 2 \cdot j$, ולכן $z_j z \in L$.

עם זאת, $z_i z = 0^i 12^2 3^{2j+1}$. מתקיים $2j < 2i$ ולכן $2j + 1 \le 2i$, ולכן מתקיים $z_i z \notin L$.

כלומר, לכל $i \ne j$ מצאנו מילה מפרידה בין z_i ל- z_j, לכן מספר המחלקות של R_L הוא אינסופי, ולכן השפה איננה רגולרית.

18. הוכח באמצעות משפט נרוד שהשפה L איננה רגולרית:

$L = \{a^k b^l \mid k \ne l\}$.

פתרון:

לכל i נגדיר $z_i = a^i$.

עבור $i \ne j$, נבחר $z = b^i$, ואז יתקיים:

$z_i z = a^i b^i \notin L$, ו- $z_j z = a^j b^i \in L$.

כלומר, לכל $i \ne j$ מצאנו מילה מפרידה בין z_i ל- z_j, ולכן מספר המחלקות של היחס R_L הוא אינסופי, ולכן ממשפט נרוד השפה איננה רגולרית.

19. הוכח באמצעות משפט נרוד שהשפה L איננה רגולרית:

$L = \{0^k 1^l 2^m 3^n \mid k, l, n \ge 2, m - k - l \ge 3\}$.

פתרון:

לכל $i \ge 4$, נבחר $z_i = 0^i 1^2$.

עבור $i \ne j$, $i, j \ge 4$, נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $i < j$. נבחר $z = 2^{i+5} 3^2$. ואז $z_i z = 0^i 1^2 2^{i+5} 3^2$, לכן $m - k - l = i + 5 - i - 2 = 3 \ge 3$ כלומר $z_i z \in L$.

עם זאת, $z_j z = 0^j 1^2 2^{i+5} 3^2$, כלומר $m - k - l = i + 5 - j - 2 = i - j + 3$. אך $i < j$, ולכן $m - k - l < 3$, ולכן $z_j z \notin L$.

כלומר, לכל $i \ne j$, $i, j \ge 4$, מצאנו מילה מפרידה בין z_i ל- z_j, ולכן מספר המחלקות של R_L הוא אינסופי, ולכן על פי משפט נרוד, השפה איננה רגולרית.

20. הוכח באמצעות משפט נרוד שהשפה L הבאה איננה רגולרית:

$L = \{w = abu \mid u \in \{a, b\}^*; \#_a(w) \bmod \#_b(w) = 1\}$.

פתרון:

לכל p ראשוני, נגדיר $z_p = abb^{p-1}$.

כעת, יהיו $i \ne j$ ראשוניים, נבחר את המילה $z = a^i$.

אז $z_i z = ab^i a^i$, ולכן $\#_a(w) \bmod \#_b(a) = 1$, ולכן $z_i z \in L$.

אך עם זאת, $z_j z = ab^j a^i$. $\#_a(w) \bmod \#_b(w) = i+1 \bmod j \neq 1$, אחרת נקבל ש- $i \bmod j = 0$, וזו סתירה לכך שהם מספרים ראשוניים שונים.

אם כן, לכל זוג מספרים ראשוניים $i \neq j$, מצאנו מילה מפרידה בין z_i ל- z_j, אך קיימים אינסוף מספרים ראשוניים, ולכן מספר המחלקות של R_L הוא אינסופי, ולכן ממשפט נרוד זוהי שפה שאיננה רגולרית.

21. הוכח באמצעות משפט נרוד שהשפה הבאה איננה רגולרית:

$L = \{0^i 1^j \mid i \cdot j = n^2, n \in \mathbf{N}\}$.

פתרון:

לכל p ראשוני, נבחר $z_p = a^p$.

עבור $i \neq j$, נבחר $z = b^i$.

אז $z_i z = a^i b^i \in L$, עבור $n = i$.

אך עם זאת, $z_j z = a^j b^i$ ולא ייתכן ש- $i \cdot j$ הוא חזקה שלמה, אחרת נקבל שאחד המספרים לפחות מתחלק במספר שאינו עצמו או 1, וזו סתירה. כלומר, $z_j z \notin L$.

לכל זוג מילים z_i, z_j עבור $i \neq j$ ראשוניים, מצאנו מילה מפרידה ביניהן, אך מספר המספרים הראשוניים אינסופי, ולכן מספר מחלקות השקילות של R_L אינסופי, לכן ממשפט נרוד השפה אינה רגולרית.

היחס R_L

22. הגדר את מחלקות השקילות של היחס R_L עבור L הבאות:

א. $L = aa\Sigma^* b$.

ב. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = 3\#_b(w)\}$.

ג. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \geq \#_b(w)\}$.

פתרון:

א. ניתן לבנות אוטומט מצומצם לשפה, אך יותר פשוט לחשוב אילו מחלקות צריכות להיות, ואז להשתכנע שצדקנו על ידי מילים מפרידות, ובניית אוטומט בהתאם.

$$S_0 = \varepsilon$$
$$S_1 = a$$
$$S_2 = b\Sigma^* + ab\Sigma^*$$
$$S_3 = aa + aa\Sigma^* a$$
$$S_4 = aa\Sigma^* b$$

ב. עבור כל $i \geq 0$, נגדיר את מחלקות השקילות:

$$S_{i1} = \{w \mid \#_a(w) - 3\#_b(w) = i\}$$
$$S_{i2} = \{w \mid \#_b(w) - \#_a(w) = i\}.$$

ג. קבוצת המחלקות $\{\{w \mid \#_a(w) - \#_b(w) = i\} \mid i \in \mathbf{Z}\}$.

23. רשום את מחלקות השקילות של היחס R_L עבור $L = \{xaby \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$.

פתרון:

קל לבנות לשפה הזו אוטומט סופי דטרמיניסטי מלא, ולקבל את המחלקות הבאות:

$S_0 = b^*$.

$S_1 = b^* a$.

$S_2 = b^* a^+ b \Sigma^*$.

24. יהי Σ א"ב המקיים $a, b \in \Sigma$. כמה מחלקות שקילות יש ליחס R_L, עבור L שמציין הביטוי הרגולרי $\Sigma a \Sigma^+ bb \Sigma$?

פתרון:

$$S_0 = \varepsilon$$
$$S_1 = \Sigma$$
$$S_2 = \Sigma a$$
$$S_3 = \Sigma a \Sigma^+$$
$$S_4 = \Sigma a \Sigma^+ b$$
$$S_5 = \Sigma a \Sigma^+ bb$$
$$S_6 = \Sigma a \Sigma^+ bb \Sigma$$
$$S_7 = \Sigma b \Sigma^*$$

25. רשום את מחלקות השקילות של היחס R_L עבור השפה L הבאה:

$L = \{a^i b^j c^k \mid j \ge i \ge 2, k \ge 1\}$.

פתרון:

כל המילים במצב "מלכודת": $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \ge 0, i > j\} \cup (\Sigma^* - a^* b^* c^*)$.

קבוצת המחלקות $\{\{a^i\} \mid i \ge 0\}$.

קבוצת המחלקות $\{\{a^i b^j \mid j - i = k\} \mid k \ge 0\}$.

המחלקה $\{a^i b^j c^k \mid k \ge 1, j \ge i \ge 2\}$.

26. רשמו את מחלקות השקילות של היחס R_L עבור L הבאה: $L = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

פתרון:

כל מילה מ- $(a + b)^*$ תימצא במחלקה נפרדת, שכן ניתן להוסיף לה את המילה cw^R והיא תתקבל, וכל מילה אחרת לא תתקבל כך. כלומר, קבוצת המחלקות:

$\{\{w\} \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

כל מילה wcu כך ש- u היא רישא של w^R שוב תימצא במחלקה נפרדת, כלומר נקבל:

$\{\{wcu\} \mid \exists x \in \Sigma^* : ux = w^R\}$.

שאר המילים הן מילים שלעולם לא יתקבלו, יהיו במחלקה אחת ("מצב מלכודת"):

$\{wcu \mid \neg\exists x \in \Sigma^* : ux = w^R\} \cup \Sigma^* c \Sigma^* c \Sigma^*$.

סגירות לשפות רגולריות

27. נגדיר פעולה $Random$ על זוג מילים באורך שווה:

לכל $w_1, w_2 \in \Sigma^*$, המקיימות $|w_1| = |w_2| = n$, ונניח ש- $w_1 = a_1 a_2 \ldots a_n$ ו- $w_2 = b_1 b_2 \ldots b_n$, $Random(w_1, w_2) = \{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \mid \forall i, 1 \le i \le n, \sigma_i \in \{a_i, b_i\}\}$.

נרחיב את הפעולה לשפות: לכל L_1, L_2 מעל Σ^*,
$Random(L_1, L_2) = \{Random(w_1, w_2) \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$.

הוכח: L_1, L_2 רגולריות $\Leftarrow$ $Random(L_1, L_2)$ רגולרית.

הוכחה: L_1 רגולרית, ולכן קיים לה אס"ד. יהי A_1 אס"ד כך ש- $L(A_1) = L_1$, $A_1 = (\Sigma, Q_1, q_{01}, F_1, \delta_1)$. בדומה, L_2 רגולרית, יהי A_2 אס"ד המקבל אותה, $A_2 = (\Sigma, Q_2, q_{02}, F_2, \delta_2)$.

נגדיר אס"ד A כך ש- $L(A) = Random(L_1, L_2)$.

$A = (\Sigma, Q_1 \times Q_2, \{q_{01}, q_{02}\}, F_1 \times F_2, \delta')$, ונגדיר את δ' כך:

לכל $q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$, ולכל $\sigma \in \Sigma$,

$\delta'((q_1, q_2), \sigma) = \{(\delta(q_1, \sigma), \delta(q_2, \sigma')) \mid \sigma' \in \Sigma\} \cup \{(\delta(q_1, \sigma'), \delta(q_2, \sigma)) \mid \sigma' \in \Sigma\}$.

הרעיון הוא, שלכל אות בקלט, מנחשים האם לקרוא אותה דרך האוטומט לשפה הראשונה, או דרך האוטומט לשפה השנייה. בשפה השנייה, צריכים לדאוג לקריאת כל אות, שכן האות הזו יכולה להחליף כל אות מהשפה השנייה.
בסוף קריאת הקלט עלינו להיות במצב מקבל בשתי השפות

28. יהיו L_1, L_2 שפות רגולריות. הוכח שהשפה L הבאה רגולרית:

$$L = \left\{ \begin{array}{r} uvw \in \Sigma^* \mid uvw \in L_1 L_2, \\ wu \in L_2, \\ v^R \in L_1 \end{array} \right\}$$

פתרון:

יהי $A_1 = (\Sigma, Q_1, q_{01}, F_1, \delta_1)$ אס"ד המקבל את L_2. מתכונות סגירות גם השפה L_1^R רגולרית, ועל כן יהיה $A_2 = (\Sigma, Q_2, q_{02}, F_2, \delta_2)$ אס"ד המקבל אותה.

לכל $q \in Q_1$ נגדיר אוטומט $A_q = (\Sigma, Q_1 \times Q_2 \times \{1,2,3\}, (q, q_{02}, 1), \{q\} \times F_2 \times \{3\}, \delta')$, ולהלן נגדיר את δ'.

לכל $q' \in Q_1$, $\sigma \in \Sigma$, נגדיר $\delta'((q', q_{02}, 1), \sigma) = (\delta_1(q', \sigma), q_{02}, 1)$, ובנוסף לכל $q' \in F_1$ נגדיר $\delta'((q', q_{02}, 1), \varepsilon) = (q', q_{02}, 2)$.

לכל $q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$, ו- $\sigma \in \Sigma$, נגדיר $\delta'((q_1, q_2, 2), \sigma) = (q_1, \delta(q_2, \sigma), 2)$, ובנוסף לכל $q_1 \in Q_1$, $q' \in F_2$ נגדיר $\delta'((q_1, q', 2), \varepsilon) = (q_{01}, q', 3)$.

לכל $q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$ ו- $\sigma \in \Sigma$ נגדיר $\delta'((q_1, q_2, 3), \sigma) = (\delta(q_1, \sigma), q_2, 3)$.

מסגירות לשרשור $L_1 L_2$ רגולרית, ועל כן נקבל מתכונות סגירות ש-

$L=\left(\bigcup_{q\in Q} L(A_q)\right)\cap L_1L_2$ היא רגולרית.

29. תהי L שפה רגולרית. הוכח שהשפה $Rot(L)=\{xy \mid yx\in L\}$ היא שפה רגולרית.

פתרון: L רגולרית ולכן קיים אס"ד שמקבל אותה. יהי $A=(\Sigma,Q,q_0,F,\delta)$. לכל $q\in Q$ נגדיר אוטומט סופי לא דטרמיניסטי A_q שיקבל את שפת כל המילים מ- $Rot(L)$ שבהן A מגיע ל- q בקריאת y.

$A_q=(\Sigma,Q\times Q\times\{1,2\},(q,q_0,1),F\times\{q\}\times\{2\},\delta')$, ונגדיר את δ' כך:

לכל $q\in Q,\sigma\in\Sigma$, $\delta'((q,q_0,1),\sigma)=(\delta(q,\sigma),q_0,1)$.

לכל $q\in F$, $\delta'((q,q_0,1),\varepsilon)=(q,q_0,2)$.

לכל $q_1\in F,q_2\in Q$ ולכל $\sigma\in\Sigma$, $\delta'((q_1,q_2,2),\sigma)=(q_1,\delta(q_2,\sigma),2)$.

ואז מתקיים $Rot(L)=\bigcup_{q\in Q} L(A_q)$, וזהו איחוד סופי, ולכן $Rot(L)$ רגולרית.

30. תהי L שפה רגולרית. הוכח שהשפה $\tilde{L}=\{xy \mid x\in L, y\notin L\}$ גם היא רגולרית.

פתרון: מסגירות להשלמה, נקבל ש- $\overline{L}$ רגולרית. מתקיים $\tilde{L}=L\overline{L}$, ולכן מסגירות לשרשור נקבל ש- $\tilde{L}$ אכן רגולרית.

31. תהי L שפה רגולרית מעל Σ. הוכח שהשפה $\hat{L}=\{xy \mid \exists a, xay\in L\}$ היא שפה רגולרית.

פתרון: נגדיר הצבה $f:\Sigma\to 2^{(\Sigma\cup\Sigma')^*}$, כאשר $\Sigma'=\{\sigma' \mid \sigma\in\Sigma\}$ כך:

לכל $\sigma\in\Sigma$, $f(\sigma)=\sigma+\sigma'$.

כעת, מסגירות להצבה רגולרית, נקבל ש- $f(L)$ גם היא רגולרית. מסגירות לחיתוך, נקבל שגם השפה $L'=f(L)\cap\Sigma^*\Sigma'^*\Sigma^*$ היא רגולרית.

כעת נגדיר הומומורפיזם $h:\Sigma\cup\Sigma'\to\Sigma$ כך:

לכל $\sigma\in\Sigma$, $h(\sigma)=\sigma$, ו- $h(\sigma')=\varepsilon$.

אז $h(L')=\hat{L}$ ולכן מסגירות להומומורפיזם, $\hat{L}$ רגולרית.

32. תהי L שפה רגולרית מעל Σ. הוכח שהשפה $\widehat{L}=\{a_1a_3\ldots a_{2n-1} \mid \exists a_2,a_4,\ldots,a_{2n}\in\Sigma, a_1a_2\ldots a_{2n}\in L\}$ רגולרית.

פתרון: אפשר כמובן עם אוטומט, אבל אפשר עם חוקי סגירות! ☺

נגדיר הצבה $f:\Sigma\to 2^{(\Sigma\cup\Sigma')^*}$ כך:

לכל $\sigma\in\Sigma$, $f(\sigma)=\sigma+\sigma'$.

ואז $f(L)\cap(\Sigma\Sigma')^*$ היא שפה רגולרית.

נגדיר הומומורפיזם $h:\Sigma\cup\Sigma'\to\Sigma$ כך:

לכל $\sigma\in\Sigma$,

$h(\sigma)=\sigma$

$h(\sigma')=\varepsilon$

ואז $h(f(L)\cap(\Sigma\Sigma')^*)=\widehat{L}$ ומסגירות נקבל ש- $\widehat{L}$ היא שפה רגולרית.

33. יהיו L_1, L_2 שפות רגולריות מעל Σ. הוכח שהשפה $L_3 = \{xyz \mid xz \in L_1, y \in L_2\}$ היא שפה רגולרית.

פתרון: אפשר אוטומט ואפשר תכונות סגירות... ☺

נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \{\&\} \to \Sigma$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$.

$h(\&) = \varepsilon$.

מסגירות להומומורפיזם הפוך ולחיתוך $h^{-1}(L_1) \cap \Sigma^* \& \Sigma^* = L'$ היא שפה רגולרית.

כעת נגדיר הצבה $f : \Sigma \cup \{\&\} \to 2^{\Sigma^*}$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $f(\sigma) = \sigma$.

$f(\&) = L_2$.

מתקיים $f(L') = L_3$, ולכן L_3 רגולרית.

34. יהיו L_1, L_2 שפות רגולריות. הוכח שהשפה $\overleftrightarrow{L} = \{vwxy \mid vx \in L_1, wy \in L_2\}$ היא שפה רגולרית.

פתרון: פה הפתרון יהיה מסובך בהרבה עם חוקי סגירות, ולכן עדיף אוטומט.

יהי $A_1 = (\Sigma, Q_1, q_{01}, F_1, \delta_1)$ אס"ד המקבל את L_1, ויהי $A_2 = (\Sigma, Q_2, q_{02}, F_2, \delta_2)$ אס"ד המקבל את L_2. נגדיר אוטומט A שיקבל את $\overleftrightarrow{L}$. רעיון האוטומט יהיה לקרוא את המילה בארבעה חלקים, כאשר בכל חלק קוראים את האוטומט המתאים.

$A = (\Sigma, Q_1 \times Q_2 \times \{1,2,3,4\}, (q_{01}, q_{02}, 1), F_1 \times F_2 \times \{4\}, \delta')$, כאשר את δ' נגדיר כך:

לכל $q \in Q_1, \sigma \in \Sigma$, $\delta'((q, q_{02}, 1), \sigma) = (\delta_1(q, \sigma), q_{02}, \sigma)$.

ולכל $q \in Q$, $\delta'((q, q_{02}, 1), \varepsilon) = (q, q_{02}, 2)$.

לכל $q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$, ולכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((q_1, q_2, 2), \sigma) = (q_1, \delta_2(q_2, \sigma), 2)$.

ולכל $q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$, $\delta'((q_1, q_2, 2), \varepsilon) = (q_1, q_2, 3)$.

לכל $q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$ ולכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((q_1, q_2, 3), \sigma) = (\delta_1(q_1, \sigma), q_2, 3)$.

ולכל $q_1 \in F_1, q_2 \in Q_2$, $\delta'((q_1, q_2, 3), \varepsilon) = (q_1, q_2, 4)$.

לכל $q_1 \in F_1, q_2 \in Q_2$, ולכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((q_1, q_2, 4), \sigma) = (q_1, \delta_2(q_2, \sigma), 4)$.

35. יהיו L_1, L_2 שפות רגולריות. הוכח שהשפה L רגולרית:

$L = \{w \mid w \in L_1, w \notin L_2 \vee w \in L_2, w \notin L_1\}$.

פתרון:

$L = \left(L_1 \cap \overline{L_2}\right) \cup \left(\overline{L_1} \cap L_2\right)$, ולכן מתכונות סגירות, L רגולרית.

36. יהיו L_1, L_2 שפות רגולריות מעל Σ. הוכח כי השפה L רגולרית:

$L = \{uw \mid \exists v \in \Sigma^* : uv \in L_1, vw \in L_2\}$.

פתרון:

הרעיון יהיה לתייג חלקים מהמילים בהתאם, ואז לעשות חיתוך על מנת לקחת בדיוק את אותו v, ולאחר מכן מחיקת התגים.

אם כן, נגדיר הצבה $f:\Sigma \to 2^{(\Sigma\cup\Sigma')^*}$, כך שלכל $\sigma\in\Sigma$, $f(\sigma)=\sigma+\sigma'$.

נגדיר $L_1'=f(L_1)\cap\Sigma^*\Sigma'^*$, ו- $L_2'=f(L_2)\cap\Sigma'^*\Sigma^*$ (כלומר, השפות האלו מכילות אזורים מתויגים).

כעת נגדיר בנוסף הומומורפיזם (שמוריד תגים) $h:\Sigma\cup\Sigma'\to\Sigma$, כך שלכל $\sigma\in\Sigma$, $h(\sigma)=\sigma$, ו- $h(\sigma')=\varepsilon$, ונגדיר $L''=h(L_2')$.

כעת, נגדיר $L_U=L_1'L''$, זוהי השפה שתכיל את uvw, אך כאן לא בדקנו שה-v משותף לשתי השפות, ולכן נעשה חיתוך: $L_c=L_U\cap\Sigma^*L_2'$. כעת נסיר את התגים, ונקבל $L=h(L_c)$, ולכן L רגולרית.

37. תהי $L=\{a^{3i}ww \mid w\in\{b,c\}^*, i\geq 0\}$.

א. הוכיחו באמצעות למת הניפוח ש- L איננה רגולרית.

ב. הוכיחו ש- $L'=L\cup\{b,c\}^*$ ניתנת לניפוח.

ג. הוכיחו בעזרת תכונות סגירות ש- L' איננה רגולרית, כאשר אין להסתמך על סעיף א', אך ניתן להסתמך על העובדה ש- $\{ww \mid w\in\{b,c\}^*\}$ היא שפה שאינה רגולרית.

פתרון:

א. יהי $n>0$ טבעי. נבחר את המילה $z=b^nc^nb^nc^n$. יהי פירוק של z, $z=uvw$ כך ש- $|uv|\leq n$ ו- $|v|\geq 1$. אז מתקיים $u=b^s, v=b^t, w=b^{n-s-u}c^nb^nc^n$ כאשר $s+t\leq n$, ו- $t\geq 1$. נבחר ניפוח $i=0$, ואז $uv^iw=b^sb^{n-s-t}c^nb^nc^n=b^{n-t}c^nb^nc^n$, אך $t\geq 1$ ולכן החזקה של b בתחילת המילה שונה מהחזקה של b באמצע המילה, ובנוסף המילה אינה מכילה a-ים, ולכן $uv^iw\notin L$. כלומר, L אינה ניתנת לניפוח, ולכן איננה רגולרית.

ב. נבחר $n=3$. תהי $z\in L'$ המקיימת $|z|\geq 3$. נחלק למקרים:

- אם $z\in\{b,c\}^*$, אז נבחר $u=\varepsilon$, את v נבחר כאות הראשונה של z, ואת w כשאר המילה. כל ניפוח עדיין יהיה מורכב רק מ-b ומ-c, ולכן יהיה שייך ל- $\{b,c\}^*\subseteq L'$.
- אם $z\in a^+(b+c)^*$, אז מספר ה-a-ים שבו מתחלק בשלוש לפי ההגדרה, ואז נבחר $u=\varepsilon$, את v כשלושת אותיות ה-a הראשונות של z. ואז כל ניפוח עדיין ישאיר את חלק ה- ww שבמילה כפי שהוא, וישאיר את מספר ה-a-ים להתחלק בשלוש, ולכן יהיה שייך ל- $L\subseteq L'$.

ג. נניח בשלילה ש - L' רגולרית. מסגירות לחיסור נקבל ש- $\hat{L}=L'-(b+c)^*=\{a^{3i}ww \mid w\in\{b,c\}^*, i\geq \mathbf{1}\}$ היא שפה רגולרית. נגדיר הומומורפיזם $h:\{a,b,c\}\to\{b,c\}^*$ כך:

$h(a)=\varepsilon$.

$h(b)=b, h(c)=c$.

ואז $h(\hat{L})=\{ww \mid w\in\{b,c\}^*\}$ היא שפה רגולרית, בסתירה. לכן ההנחה שגויה, ולכן L' אינה רגולרית.

38. תהי L שפה רגולרית. הוכיחו **באמצעות תכונות סגירות** שהשפה $Max(L)$ רגולרית.

פתרון:

מתקיים $Max(L) = L - Prefix(L)$, כאשר $Prefix(L) = L / \Sigma^+$. כל התכונות כאן הן תכונות סגירות, ולכן $Max(L)$ רגולרית.

39. תהי L שפה רגולרית. הוכיח ש- $Init(L)$ רגולרית:

$Init(L) = \{w \in L \mid \exists x \neq \varepsilon : wx \in L\}$.

פתרון:

$Init(L) = Prefix(L) \cap L$, והכל תכונות סגירות, לכן $Init(L)$ רגולרית.

40. תהי L שפה רגולרית. הוכיחו ש- L' רגולרית:

$L' = \{a_1 a_2 ... a_n \mid \exists b_1 b_2 ... b_{2n} \in L : \forall i : a_i \in \{b_{2i-1}, b_{2i}\}\}$.

פתרון:

נגדיר הומומורפיזם $h : (\Sigma \times \Sigma) \to \Sigma^*$ כך:

לכל $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$,

$h((\sigma_1, \sigma_2)) = \sigma_1 \sigma_2$.

ובנוסף נגדיר הצבה $f : (\Sigma \times \Sigma) \to 2^{\Sigma^*}$ כך:

לכל $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, $f((\sigma_1, \sigma_2)) = \sigma_1 + \sigma_2$.

אז מתקיים $f(h^{-1}(L)) = L'$, ולכן מתכונות סגירות, L' רגולרית.

הסבר: תחילה לוקחים באמצעות הומומורפיזם הפוך כל זוג אותיות לאות אחת, שתסמן בעצם את זוג האותיות ממנה היא הגיעה. לאחר מכן, באמצעות הצבה – בוחרים האם להשתמש באות השמאלית, או בימנית, וכך מגיעים ל-L'.

פתרון אחר:

נגדיר הצבה $f : \Sigma \to 2^{(\Sigma \cup \Sigma')^*}$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $f(\sigma) = \sigma + \sigma'$.

זוהי הצבה רגולרית ולכן $f(L)$ רגולרית.

כעת, $f(L) \cap (\Sigma\Sigma' + \Sigma'\Sigma)^*$ היא שפת כל המילים ב-L שבהן יש תג כל פעם באות הזוגית, או באות האי זוגית.

נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \Sigma' \to \Sigma^*$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$ ו- $h(\sigma') = \varepsilon$.

ואז $h(f(L) \cap (\Sigma\Sigma' + \Sigma'\Sigma)^*) = L'$, הכל תכונות סגירות ולכן L' רגולרית.

41. תהי L שפה רגולרית. הוכח שהשפה $Cycle(L)$ רגולרית:

$Cycle(L) = \{x_2 x_1 \mid x_1, x_2 \in \Sigma^*, x_1 x_2 \in L\}$.

פתרון:

L רגולרית ולכן קיים לה אס"ד $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$.

לכל $q \in Q$, נגדיר אוטומט סופי A_q, שיקבל את כל המילים מ- $Cycle(L)$ שבסיום קריאת x_1, A היה מגיע למצב q.

$A_q = (\Sigma, Q \times Q \times \{1,2\}, (q, q_0, 1), F \times \{q\} \times \{2\}, \delta')$, ואת δ' נגדיר כך:

לכל $p \in Q$, $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((p, q_0, 1), \sigma) = (\delta(p, \sigma), q_0, 1)$.

לכל $p \in F$, $\delta'((p, q_0, 1), \varepsilon) = (p, q_0, 2)$.

לכל $p_1, p_2 \in Q$, ולכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((p_1, p_2, 2), \sigma) = (p_1, \delta(p_2, \sigma), 2)$.

כעת, מתקיים $Cycle\ (L) = \bigcup_{q \in Q} L(A_q)$, ולכן $Cycle\ (L)$ היא איחוד סופי של שפות רגולריות, ולכן היא רגולרית.

42. נתון: L רגולרית מעל Σ. הוכח ש- $\tilde{L}$ רגולרית:

$\tilde{L} = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L\}$.

פתרון:

L רגולרית ולכן קיים לה אס"ד: $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$.

לכל $q \in Q$, נבנה אוטומט סופי $A_q = (\Sigma, Q \times Q, (q_0, q), \{q\} \times F, \delta')$, ונגדיר את δ' להלן:

לכל $\sigma \in \Sigma$, ולכל $q_1, q_2 \in Q$, $\delta'((q_1, q_2), \sigma) = (\delta(q_1, \sigma), \delta(q_2, \sigma))$.

אז לכל $q \in Q$, $L(A_q) = \{w \in \Sigma^* \mid ww \in L, \delta(q_0, w) = q\}$, ולכן מתקיים:

$\tilde{L} = \bigcup_{q \in Q} L(A_q)$.

43. תהי L שפה רגולרית. הוכח ש- $\hat{L}$ רגולרית:

$\hat{L} = \{y \mid \exists x, z : |x| = |z|, xyz \in L\}$.

פתרון:

L רגולרית ולכן קיים לה אס"ד $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$. לכל זוג מצבים $q_1, q_2 \in Q$, נגדיר אוטומט A_{q_1, q_2}:

$A_{q_1, q_2} = (\Sigma, Q \times Q \times Q, (q_0, q_1, q_2), \{q_1\} \times \{q_2\} \times F, \delta')$ כשאת δ' נגדיר כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, ולכל $p_1, p_2, p_3 \in Q$, $\delta'((p_1, p_2, p_3), \sigma) = (p_1, \delta(p_2, \sigma), p_3)$.

לכל $p_1, p_2, p_3 \in Q$, $\delta'((p_1, p_2, p_3), \varepsilon) = \{\delta(p_1, \sigma), p_2, \delta(p_3, \sigma) \mid \sigma \in \Sigma\}$.

ואז לכל $q_1, q_2 \in Q$,

$L(A_{q_1, q_2}) = \{y \mid \exists x, z : |x| = |z|, xyz \in L, \delta(q_0, x) = q_1, \delta(q_1, y) = q_2\}$, ולכן

$\hat{L} = \bigcup_{q_1, q_2 \in Q} L(A_{q_1, q_2})$, ולכן היא רגולרית כאיחוד סופי.

44. נתון שהשפה L היא שפה רגולרית. הוכח ש- $Drop - Equal\ (L)$ היא גם רגולרית.

$Drop - Equal\ (L) = \{xz \mid \exists y : |x| = |y|, xyz \in L\}$.

פתרון:

L רגולרית ולכן קיים לה אס"ד $L = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$. לכל $q \in Q$ נגדיר אוטומט סופי $A_q = (\Sigma, Q \times Q \times \{1,2\}, (q_0, q, 1), \{q\} \times F, \delta')$, ונגדיר את δ' כך:

לכל $q_1, q_2 \in Q$, $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((q_1, q_2, 1), \sigma) = \{\delta(q_1, \sigma), \delta(q_1, \mu), 1 \mid \mu \in \Sigma\}$.

ולכל $p \in Q$, $\delta'((q, p, 1), \varepsilon) = (q, p, 2)$.

לכל $p \in Q$ ולכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((q,p,2),\sigma) = (q,\delta(p,\sigma),2)$.

אז לכל $q \in Q$, $L(A_q) = \{xz \mid \exists y : |x| = |y|, xyz \in L, \delta(q_0,x) = q\}$.

ואז מתקיים $Drop-Equal(L) = \bigcup_{q \in Q} L(A_q)$, ולכן זו שפה רגולרית כאיחוד של שפות רגולריות.

45. נתון שהשפות L_1, L_2 רגולריות מעל Σ. הוכח שהשפה L גם היא רגולרית:

$$L = \left\{ \begin{array}{ll} x \in \Sigma^* \mid x = uvw & \\ & u,v,w \in L_1 \\ & wvu \in L_2 \\ & w^R \in a^*b^* \end{array} \right\}.$$

פתרון:

תחילה נוכיח שהשפה $\tilde{L} = \{u\$v\$w \mid wvu \in L_2\}$ היא שפה רגולרית.

L_2 היא שפה רגולרית, ולכן קיים לה אס"ד, נאמר $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$.

לכל $q_1, q_2 \in Q$, נגדיר אוטומט סופי $A_{q_1,q_2} = (\Sigma, Q \times \{1,2,3\}, (q_2,1), \{q_1\} \times \{3\}, \delta')$

כאשר את δ' נגדיר כך:

לכל $q \in Q$ ו- $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((q,1),\sigma) = (\delta(q,\sigma),1)$

ולכל $q \in F$, $\delta'((q,1),\$) = (q_1,2)$.

לכל $q \in Q$ ולכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((q,2),\sigma) = (\delta(q,\sigma),2)$,

ו- $\delta'((q_2,2),\$) = (q_0,3)$.

לכל $q \in Q$ ולכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((q,3),\sigma) = (\delta(q,\sigma),3)$.

ואז לכל $q_1, q_2 \in Q$ מתקיים

$L(A_{q_1,q_2}) = \{u\$v\$w \mid wvu \in L_2, \delta(q_0,w) = q_1, \delta(q_1,v) = q_2\}$, ולכן מתקיים ש-

$\tilde{L} = \bigcup_{q_1,q_2 \in Q} L(A_{q_1,q_2})$ ולכן היא שפה רגולרית כאיחוד סופי של שפות רגולריות.

כעת, נגדיר $\hat{L} = \tilde{L} \cap L_1\$L_1\$L_1 \cap \Sigma^*\$\Sigma^*\$b^*a^*$, והיא רגולרית בגלל סגירות לחיתוך ולשרשור. נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \{\$\} \rightarrow \Sigma$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$.

$h(\$) = \varepsilon$.

ואז $h(\hat{L}) = L$, ומסגירות להומומורפיזם, נקבל ש- L רגולרית.

46. נתון שהשפה L רגולרית. הוכח שהשפה $InOrder(L)$ רגולרית:

$InOrder(L) = \{x\#y \mid xy \in L, yx \notin L\}$.

פתרון:

נוכיח תחילה שהשפה $L' = \{x\#y \mid yx \in \overline{L}\}$ היא שפה רגולרית.

מסגירות להשלמה השפה $\overline{L}$ רגולרית. יהי $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ אס"ד המקבל אותה.

לכל $q \in Q$, נגדיר אוטומט סופי A_q:

$A_q = (\Sigma, Q \times \{1,2\}, (q,1), (q,2), \delta')$ כשאת δ' נגדיר כך:

לכל $q \in Q$ ולכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((q,1), \sigma) = (\delta(q,\sigma),1)$.

ולכל $q \in F$, $\delta'((q,1), \#) = (q_0,2)$.

לכל $q \in Q$ ולכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((q,2), \sigma) = (\delta(q,\sigma),2)$.

ואז $L' = \bigcup_{q \in Q} L(A_q)$, ולכן היא רגולרית. כעת נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \{\#\} \to \Sigma^*$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$, ו- $h(\#) = \varepsilon$.

ואז $InOrder(L) = L' \cap (h^{-1}(L) \cap \Sigma^* \# \Sigma^*)$.

47. נגדיר פעולה על מילים מעל Σ: $w|_\Sigma$ היא w כשמושמטות ממנה כל האותיות שאינן ב-Σ. תהיינה L_1 שפה מעל Σ_1, ו - L_2 שפה מעל Σ_2. נגדיר $A(L_1, L_2) = \{w \mid w|_{\Sigma_1} \in L_1,\ w|_{\Sigma_2} \in L_2\}$.

הוכח או הפרך: L_1, L_2 רגולריות מעל Σ_1, Σ_2 בהתאמה $\Leftarrow$ $A(L_1, L_2)$ רגולרית.

פתרון:

הטענה נכונה. נגדיר הומומורפיזם $h_1 : \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \to \Sigma_1$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma_1$, $h_1(\sigma) = \sigma$,

ולכל $\sigma \in \Sigma_2$, $h_1(\sigma) = \varepsilon$.

ואז h^{-1} "מצמיח" אותיות מהאלפבית השני בכל מילה.

בדומה, $h_2 : \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \to \Sigma_2$:

לכל $\sigma \in \Sigma_1$, $h_2(\sigma) = \varepsilon$,

ולכל $\sigma \in \Sigma_2$, $h_2(\sigma) = \sigma$.

ואז $A(L_1, L_2) = h_1^{-1}(L_1) \cap h_2^{-1}(L_2)$, והכל תכונות סגירות, לכן $A(L_1, L_2)$ רגולרית.

48. תהי L שפה רגולרית. הוכח שהשפה $two - third\ (L)$ גם היא רגולרית.

$two - third\ (L) = \{xy \mid \exists z : |x| = |y| = |z|,\ xyz \in L\}$.

פתרון:

L רגולרית, ולכן קיים לה אס"ד $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$. לכל מצב $q \in Q$, נגדיר אוטומט A_q:

$A_q = (\Sigma, Q \times Q \times \{1,2\}, (q_0, q, 1), \{q\} \times F \times \{1\}, \delta')$ כאשר את δ' נגדיר כך:

לכל $q_1, q_2 \in Q$, ולכל $\sigma \in \Sigma$,

$\delta'((q_1, q_2, 1), \sigma) = (\delta(q_1, \sigma), q_2, 2)$

$\delta'((q_1, q_2, 2), \sigma) = \{(\delta(q_1, \sigma), \delta(q_2, \mu), 1) \mid \mu \in \Sigma\}$.

ואז לכל $q \in Q$, $A_q = \{xy \mid \exists z : |x| = |y| = |z|,\ xyz \in L, \delta(q_0, xy) = q\}$, ולכן $two - third\ (L) = \bigcup_{q \in Q} L(A_q)$, ולכן $two - third\ (L)$ רגולרית כאיחוד סופי של שפות רגולריות.

49. תהי L שפה רגולרית. הוכח שגם השפה הבאה רגולרית:

$\hat{L} = \{xy \in \Sigma^* \mid xxy \in L\}$.

פתרון:

L רגולרית ולכן קיים לה אס"ד, נאמר $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$. לכל $q \in Q$, נגדיר אוטומט סופי $A_q = (\Sigma, Q \times Q \times \{1,2\}, (q_0, q, 1), \{q\} \times F \times \{2\}, \delta')$ כשאת δ' נגדיר כך:

לכל $q_1, q_2 \in Q$, ולכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((q_1, q_2, 1) = (\delta(q_1, \sigma), \delta(q_2, \sigma), 1)$

$\delta'((q_1, q_2, 2), \sigma) = (q_1, \delta(q_2, \sigma), 2)$

ונגדיר לכל $p \in F$, $\delta'((q, p, 1), \varepsilon) = (q, p, 2)$.

ואז מתקיים $\hat{L} = \bigcup_{q \in Q} L(A_q)$, ולכן היא רגולרית כאיחוד סופי של שפות רגולריות.

50. תהי L שפה רגולרית מעל Σ. הוכח שהשפה $\overleftrightarrow{L}$ גם היא רגולרית:

$\overleftrightarrow{L} = \{\sigma^n vw \mid \sigma \in \Sigma; n \geq 1; v, w \in \Sigma^*; v\sigma w \in L\}$.

פתרון:

נגדיר הצבה $f : \Sigma \to 2^{(\Sigma \cup \Sigma')^*}$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $f(\sigma) = \sigma + \sigma'$.

כעת, לכל $\sigma \in \Sigma$, נגדיר $L^\sigma = f(L) \cap \Sigma^* \sigma' \Sigma^*$. זו שפה רגולרית מסגירות להצבה רגולרית ולחיתוך.

כעת נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \Sigma' \to \Sigma$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$, $h(\sigma') = \varepsilon$.

ואז נגדיר $L_\sigma = \sigma^+ h(L^\sigma)$. זו שפה רגולרית מסגירות לשרשור ולהומומורפיזם.

מתקיים $\overleftrightarrow{L} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} L_\sigma$, ולכן זו שפה רגולרית כאיחוד של שפות רגולריות.

51. תהי L שפה רגולרית מעל Σ. הוכח שגם השפה $\overleftrightarrow{L}$ רגולרית:

$\overleftrightarrow{L}$ היא שפת כל המילים מהצורה $\tilde{u} v \tilde{w}$, כאשר $|v| \geq 1$, קיימת w כך ש- $\tilde{w}$ התקבלה ממנה על ידי השמטת לפחות אות a אחת, וקיימת u כך ש- $\tilde{u}$ התקבלה ממנה על ידי הפיכת רצף ab אחד ויחיד לרצף ba. $uvw \in L$.

פתרון:

נגדיר הצבה $f : \Sigma \to 2^{(\Sigma \cup \Sigma' \cup \Sigma'' \cup \Sigma''' \cup \Sigma'''')^*}$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $f(\sigma) = \sigma + \sigma' + \sigma'' + \sigma'''$.

נגדיר $L' = f(L) \cap \Sigma'^* a'''b'''\Sigma'^* \Sigma\Sigma''^* a''''\Sigma''^*$. זו שפה רגולרית מסגירות להצבה רגולרית ולחיתוך.

כעת נגדיר הצבה $f' : \Sigma \cup \Sigma' \cup \Sigma'' \cup \Sigma''' \cup \Sigma'''' \to \Sigma^*$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$,

$f'(\sigma) = \sigma$.

$f'(\sigma') = \sigma$.

ואם $\sigma \neq a$, $f'(\sigma'') = \sigma$.

$f'(a''') = ba$.

$f'(b''') = \varepsilon$.

$f'(a'') = \varepsilon + a$.

$f'(a'''') = \varepsilon$.

ואז יתקיים $\ddot{L} = f'(L')$, ומסגירות להצבה רגולרית, נקבל ש- $\ddot{L}$ רגולרית.

52. תהי L שפה רגולרית. הוכח שהשפה הבאה גם היא רגולרית:

$\hat{L} = \{w \mid ww^R \in L\}$.

פתרון:

L היא שפה רגולרית, ולכן קיים לה אס"ד, נאמר $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$.

נגדיר אוטומט סופי A' בעל מספר מצבים התחלתיים – על פי הרחבה מהספר; $A' = (\Sigma, Q \times Q, \{q_0\} \times F, \{(q,q) \mid q \in Q\}, \delta')$, כאשר את δ' נגדיר כך:

לכל $q_1, q_2 \in Q$, ולכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta'((q_1, q_2), \sigma) = \{(\delta(q_1, \sigma), p \mid \delta(p, \sigma) = q_2\}$.

כלומר, פונקציית המעברים δ' מסמלצת את הקלט באופן רגיל על האוטומט המקורי, ועושה את התהליך ההפוך – מהסוף להתחלה, עבור אותו קלט, על מנת לסמלץ את w^R, ולוודא שלבסוף שני הסמלוצים מגיעים לאותו מצב.

$\hat{L} = L(A')$ ולכן היא שפה רגולרית.

53. נתון ש- L_1, L_2 רגולריות. הוכח ש- L הבאה גם היא רגולרית:

$$L = \left\{ \begin{array}{l} uvw \mid u, v \in L_1, \\ \quad w^R v^R \in L_1, \\ \quad uw \in L_2 \end{array} \right\} .$$

פתרון:

נגדיר $L' = \left\{ \begin{array}{l} u\$v\$w \mid u, v \in L_1, \\ \quad vw \in L_1^R \\ \quad uw \in L_2 \end{array} \right\}$, ונוכיח ששפה זו רגולרית.

נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \{\$\} \to \Sigma^*$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$.

$h(\$) = \varepsilon$.

אז נגדיר $\hat{L}_1^R = h^{-1}(L_1^R) \cap \Sigma^*\$\Sigma^*$, וזו שפה רגולרית מסגירות להיפוך ולהומומורפיזם הפוך. בנוסף גם השפה $\hat{L}_2 = h^{-1}(L_2) \cap \Sigma^*\$\Sigma^*$ היא שפה רגולרית. כעת נגדיר הצבה $f : \Sigma \cup \{\$\} \to 2^{(\Sigma \cup \{\$\})^*}$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $f(\sigma) = \sigma$.

$f(\$) = \$\Sigma^*\$$.

ואז $L' = L_1\$L_1\$\Sigma^* \cap \Sigma^*\$\hat{L}_1^R \cap f(\hat{L}_2)$, ולכן מסגירות להצבה רגולרית, חיתוך ושרשור, נקבל ש- L' רגולרית.

כעת $h(L') = L$ ומסגירות להומומורפיזם, נקבל ש- L רגולרית.

אי סגירות לשפות רגולריות

54. מצא שפה רגולרית L כך שהשפה $A(L)=\{xzy \mid xyz \in L, |x|+|z|=|y|\}$ איננה רגולרית.

פתרון: נבחר $L=a^*b^*c^*$, ונניח בשלילה ש- $A(L)$ רגולרית. וסמן $L'=A(L)\cap a^*c^*b^*$. הפעולה, מחלקת את המילה לשני חלקים שווים, ומזיזה את החלק השני לאמצע החלק הראשון. החיתוך משאיר לנו רק מילים שבהן כל החלקים של המילה נשאר ברצף, כלומר מספר ה-c-ים כפול ממספר ה- a-ים וה- b-ים. כלומר, $L'=\{a^i c^{i+j} b^j \mid i,j\ge 0\}$, והיא שפה רגולרית מסגירות לחיתוך. ניתן להוכיח באמצעות למת הניפוח או באמצעות תכונות סגירות ששפה זו איננה רגולרית, ולקבל סתירה.

55. תן דוגמה לשפה רגולרית L כך ש- $A(L)=\{xy \mid x\in L, y\notin L, |x|=|y|\}$ איננה רגולרית.

פתרון:

נתבונן ב- $L=a^*$. נניח בשלילה ש- $A(L)$ רגולרית.

כעת נסמן $L'=A(L)\cap a^*b^*$. בשפה זו לוקחים מילים מהמשלים ששייכות ל- a^*b^*, ומשרשרים אותן למילים שמכילות רק a באותו אורך. לכן $L'=\{a^i b^j \mid i\ge j\}$. שפה זו אינה רגולרית על פי הספר ולכן ההנחה שגויה, ו- $A(L)$ אינה רגולרית.

56. תן דוגמה לשפה רגולרית L מעל א״ב בו מוגדר יחס סדר בין המילים, כך שהשפה $Sort(L)=\{Sort(w) \mid w\in L\}$, כך ש- $Sort(w)$ היא מיון של האותיות של w, איננה רגולרית.

פתרון:

נתבונן ב- $L=(ab)^*$. אז $Sort(L)=\{a^n b^n \mid n\ge 0\}$, ולכן $Sort(L)$ איננה רגולרית.

57. יהי Σ א״ב כלשהו. נגדיר $g:\Sigma^*\to 2^{\Sigma^*}$ כך:

לכל מילה w באורך זוגי, $g(w)=\varnothing$.

לכל מילה w באורך אי-זוגי, $w=w_1\sigma w_2$ כך ש- $|w_1|=|w_2|$, $g(w)=w_1\sigma^+ w_2$.

נרחיב את ההגדרה של g לשפות כך: עבור שפה L מעל Σ, $g(L)=\{g(w) \mid w\in L\}$.

א. הפרך את הטענה: L רגולרית $\Leftarrow$ $g(L)$ רגולרית.

ב. הוכח את הטענה: L רגולרית $\Leftarrow$ $g(L)$ חופשית הקשר.

פתרון:

א. תהי $L=a^*cb^*$. נניח בשלילה ש- $g(L)$ רגולרית. אז גם $L'=g(L)\cap a^*b^+a^*=\{a^n b^m c^n \mid n\ge 0\}$ היא שפה רגולרית. אך מתיקון קל של הוכחת שאלה 12 מעמוד 224 בכרך א׳ נקבל ששפה זו אינה רגולרית, וזו סתירה. לכן ההנחה שגויה, ולכן $g(L)$ איננה רגולרית.

ב. נגדיר הצבה $f:\Sigma\to\Sigma\cup\Sigma'$ כך:

לכל $\sigma\in\Sigma$, $f(\sigma)=\sigma+\sigma'$.

כעת נגדיר שפה $L'=\{w_1\sigma' w_2 \mid |w_1|=|w_2|, w_1,w_2\in\Sigma^*, \sigma\in\Sigma\}$. נוכיח ששפה זו חופשית הקשר על ידי בניית דקדוק חופשי הקשר מתאים:

$S\to TST \mid T'$, כאשר לכל $\sigma\in\Sigma$, $T\to\sigma$, ו- $T'\to\sigma'$.

כעת, מסגירות לחיתוך עם שפה רגולרית, נקבל ש- $f(L) \cap L' = \{w_1\sigma' w_2 \mid |w_1| = |w_2|, w_1\sigma w_2 \in L\}$.

כעת נגדיר הצבה $f': \Sigma \cup \Sigma' \to \Sigma$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$,

$f'(\sigma) = \sigma,\ f'(\sigma') = \sigma^+$.

ואז $f'(f(L) \cap L') = g(L)$, ולכן מסגירות להצבה חופשית הקשר, נקבל ש- $g(L)$ חופשית הקשר.

58. נגדיר פעולה Q על מילים מעל $\{a,b,c\}$:

לכל מילה z שצורתה $w\sigma w^R$ כך ש- $\sigma \in \Sigma$, ו- $w \in \Sigma^*$, $Q(z) = \sigma$.

ולכל מילה אחרת, $Q(z) = z$.

נגדיר כעת את הפעולה על שפות: $Q(L) = \bigcup_{z \in L} Q(z)$.

האם הטענה: L רגולרית $\Leftarrow$ $Q(L)$ רגולרית נכונה?

פתרון:

נתבונן ב- $L = a^*ba^*$. $Q(L) = b \cup \{a^i ba^j \mid i \neq j; i,j \geq 0\}$.

נוכיח ששפה זו איננה רגולרית. נניח בשלילה שהיא רגולרית.

אז גם $L' = \overline{Q(L) - \{b\}} \cap a^*ba^*$ היא שפה רגולרית (סגירות לחיסור, השלמה, וחיתוך).

כעת, $L' = \{a^n ba^n \mid n \geq 0\}$. כעת נגדיר הצבה $f: \{a,b\} \to 2^{\{a,b\}^*}$ כך:

$f(a) = a + b$.

$f(b) = \varepsilon$.

אז $f(L') \cap a^*b^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ וזו שפה שאינה רגולרית, בסתירה לסגירות להצבה רגולרית ולחיתוך. לכן $Q(L)$ אינה חופשית הקשר.

59. נגדיר פעולה P על מילה $w \in \Sigma^*$ כך:

אם w באורך זוגי, $P(w) = w$.

אחרת, $w = w_1\sigma w_2$, $|w_1| = |w_2|$ ו- $\sigma \in \Sigma$, אז $P(w) = w_1 w_2$.

א. הפרך את הטענה L רגולרית $\Leftarrow$ $P(L)$ רגולרית.

ב. הוכח את הטענה L רגולרית $\Leftarrow$ $P(L)$ חופשית הקשר.

פתרון:

א. נבחר $L = a^*cb^*$. אז $P(L) = a^*cb^* \cup \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, משום שכאשר מורידים c, מספר ה- a-ים שווה למספר ה- b-ים. נניח בשלילה שהיא רגולרית. אז גם $L' = P(L) - a^*cb^*$ רגולרית. אך $L' = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ וזו שפה שאיננה רגולרית, אז קיבלנו סתירה. לכן ההנחה שגויה, ולכן $P(L)$ איננה רגולרית.

ב. נגדיר $L_{even} = L \cap (\Sigma\Sigma)^*$. נגדיר הצבה $f: \Sigma \to 2^{(\Sigma \cup \Sigma')^*}$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $f(\sigma) = \sigma + \sigma'$.

כעת נגדיר $L' = f(L) \cap \{w_1\sigma' w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*, |w_1| = |w_2| \geq 0, \sigma \in \Sigma\}$. השפה השנייה חופשית הקשר, להלן דקדוק חופשי הקשר היוצר אותה:

$S \to aSa \mid bSb \mid cSc \mid a' \mid b' \mid c'$.

מסגירות לחיתוך עם שפה רגולרית נקבל ש-L' חופשית הקשר. נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \Sigma' \to \Sigma^*$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$,

$h(\sigma) = \sigma$

$h(\sigma') = \varepsilon$.

אז $h(L') = P(L)$. ומסגירות להומומורפיזם, נקבל ש-$P(L)$ חופשית הקשר.

60. נגדיר פעולה P על מילים מעל $\{a, b, c\}$:

$P(\varepsilon) = \varepsilon$, ולכל $w = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ כאשר $n \geq 1$,

$P(w) = \{a_1 a_2 \ldots a_n \mid a_1 \ldots a_n \text{ is a Permutation of } w\}$.

וכעת נגדיר את P על שפות: לכל L מעל $\{a, b, c\}$, $P(L) = \{P(w) \mid w \in L\}$.

תן דוגמה ל-L רגולרית כך ש-$P(L)$ איננה רגולרית.

פתרון: תהי $L = (ab)^*$. אז $P(L) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ מכילה את כל המילים מעל $\{a, b\}$ שבהן מספר ה-a-ים שווה למספר ה-b-ים, אך זו, כידוע, שפה שאיננה רגולרית.

61. מצא שפה רגולרית L כך שהשפה $L' = \{xy \mid |x| = |y|, \exists w \in \Sigma^* : xwy \in L\}$ איננה רגולרית.

פתרון: נבחר $L = a^* \$ c \$ b^*$. נניח בשלילה ש-$L'$ רגולרית. נגדיר $L'' = L' \cap a^* \$\$ b^*$. נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \{\$\} \to \Sigma$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$.

$h(\$) = \varepsilon$.

אז $h(L'') = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ וזו כידוע שפה לא רגולרית. הגענו לסתירה, ולכן ההנחה שגויה, כלומר L' אינה רגולרית.

62. מצא שפה רגולרית L כך שהשפה $double(L) = \{ww \mid w \in L\}$ איננה רגולרית.

פתרון (מתחכם):

$L = \Sigma^*$. ואז $double(L) = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$. מוכח בספר שהשפה הזו איננה חופשית הקשר, ולכן בפרט איננה רגולרית.

63. תן דוגמה לשפה **רגולרית** L כך שהשפה $double(L)$ איננה חופשית הקשר:

$double(L) = \{ww \mid w \in L\}$.

פתרון:

$L = a^* b^* = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$. ואז $double(L) = \{a^i b^j a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$. ניתן להוכיח בנקל ששפה זו איננה חופשית הקשר באמצעות למת הניפוח ($z = a^n b^n a^n b^n$ וניפוח $i = 0$ - פירוק למקרים לפי vx).

64. נגדיר פעולה על מילים Q באופן הבא:

אם w מהצורה $w = w'\sigma w'$, אז $Q(w) = w'^* \sigma$.

אחרת, $Q(w) = w$.

נרחיב את הפעולה לשפות: עבור שפה L, $Q(L)=\bigcup_{w\in L} Q(w)$.

האם L רגולרית $\Leftarrow$ $Q(L)$ רגולרית?

פתרון:

לא. נבחר $L=a^*ba^*$. נניח בשלילה ש- $Q(L)$ רגולרית. אז גם $L'=Q(L)\cap a^*ba^*$ היא שפה רגולרית. אך $L'=\{a^iba^j \mid i\neq j\}$ וזו כידוע מהשאלה הקודמת על Q שפה לא רגולרית. סתירה. לכן השפה $Q(L)$ לא רגולרית.

65. תהי L שפה רגולרית. האם השפה $\tilde{L}=\{ww^R \mid w\in L\}$ היא שפה רגולרית?

פתרון:

לא. נבחר $L=a^*b$. אז $\tilde{L}=\{a^nbba^n \mid n\geq 0\}$. ניתן להניח בשלילה שהיא רגולרית, להגדיר הצבה ששולחת a ל- a או b, ו- b ל- ε, ולחתוך עם השפה a^*b^* ולקבל את "a^nb^n".

דקדוקים

66. בנה דקדוק חופשי הקשר לשפה $L = \{a^i b^j \mid j \le i \le 2j, i \bmod 3 = 1\}$.

פתרון: הרעיון הוא להחזיק שלושה משתנים, A_0, A_1, A_2 שכל אחד מהם יסמן את שארית החלוקה ב-3 של מספר ה-a-ים עד עכשיו במילה. בכל אחד מהם ניתן להוסיף שני a-ים על כל b, או a אחד, ובהתאם לשנות את החלוקה. רק מהמשתנה A_1 גוזרים אפסילון, שכן רק כשמגיעים אליו מתקיים התנאי השני.

$$
\begin{aligned}
S &\to A_0 \\
A_0 &\to aA_1b \mid aaA_2b \\
A_1 &\to aA_2b \mid aaA_1b \mid \varepsilon \\
A_2 &\to aA_0b \mid aaA_1b
\end{aligned}
$$

67. בנה דקדוק חופשי הקשר לשפה:

$$
L = \left\{ \begin{array}{ll} w_1cw_2c\ldots cw_k \mid k \ge 5 & \\ & \forall 1 \le j \le k: \quad w_j \in (a+b)^* \\ & \exists 2 \le i \le k-2: \ \#_a(w_i) \le |w_{i+2}| \end{array} \right\}.
$$

פתרון:

$$
\begin{aligned}
S &\to ABC \\
A &\to WcA \mid Wc \\
B &\to bB \mid Ba \mid Bb \mid aBa \mid aBb \mid cWc \\
C &\to cWcWD \\
D &\to cWD \mid \varepsilon \\
W &\to aW \mid bW \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

רעיון הדקדוק הוא לחלק את המילה לשלושה חלקים – הראשון, עד w_i, השני בין w_i ל-w_{i+2}, והשלישי מ-w_{i+2} והלאה. בחלק השני, ניתן להוסיף b-ים כרצוננו ל-w_i, ועל כל אות שמוסיפים ל-w_{i+2}, יש להוסיף a אחד ל-w_i או לא.

68. בנה דקדוק חופשי הקשר עבור $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$.

פתרון:

הרעיון הוא להכניס על כל a b, ולחלק למקרים לפי האות ההתחלתית.

$S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$.

69. בנה דקדוק חופשי הקשר עבור השפה $L = \{a^i b^j c^k \mid j \ne 2i + 2k\}$.

פתרון:

נחלק למקרים, עבור $j < 2i + 2k$, או להיפך.

במקרה הראשון, שוב יש לנו שני מקרים – האחד, הוא: "היתרון" הוא של ה-a-ים, והשני הוא שהיתרון הוא של ה-b-ים.

כלומר $A \to A_1A_2 \mid A_3A_4$.

כאשר $A_1 \to aA_1bb \mid aA_1b \mid aA_1 \mid a \mid ab$

$A_2 \to bbA_2c \mid bA_2c \mid A_2c \mid \varepsilon$.

ו- $A_3 \to aA_3bb \mid aA_3b \mid aA_3 \mid \varepsilon$

$A_4 \to bbA_4c \mid bA_4c \mid A_4c \mid bc \mid c$.

במקרה השני, שוב נקבל שני מקרים:

$B \to B_1B_2 \mid B_3B_4$.

$B_1 \to aB_1bbK \mid b$

$B_2 \to bbKB_2c \mid \varepsilon$

$K \to bK \mid \varepsilon$

ו- $B_3 \to aB_3bbK \mid \varepsilon$

$B_4 \to bbKB_4c \mid b$

70. נתון א״ב Σ ואות $c \notin \Sigma$.

א. בנה דקדוק חופשי הקשר עבור השפה $L_1 = \{wcu \mid w,u \in \Sigma^*; |w|>|u|\}$.

ב. בנה אוטומט מחסנית עבור השפה הבאה:

$L_2 = \{wcu \mid w,u \in \Sigma^*$;
קיים i, $1 \le i \le \min\{|w|,|u|\}$
שעבורו האות ה-i-ית של w שונה
מהאות ה-i-ית של u. }

ג. הוכח שהשפה $L = \{wcu \mid w,u \in \Sigma^*, w \neq u\}$ היא שפה חופשית הקשר.

פתרון:

א. $S \to ASA \mid AS \mid Ac$, ולכל $\sigma \in \Sigma$, $A \to \sigma$.
מאפשר יתרון לצד שמאל או שוויון, ולבסוף מוסיף אות אחת שמוודאת שאכן בצד שמאל יש יותר אותיות.

ב. תחילה מנחשים איזו אות תהיה האות ה-i-ית, ואז מאחסנים אותה במחסנית, ומאחסנים עד האות הזו מונה במחסנית. לאחר מכן מפסיקים לאחסן, וכשמתחילים לקרוא את המילה השנייה, מרוקנים את המחסנית, עד שמגיעים לאות מ-Σ, ובודקים שהן שונות, ואז ממשיכים לקרוא.

$M = (\Sigma \cup \{c\}, \{A,Z\} \cup \Sigma, \{q_0,q_1,q_2,q_3\}, q_0, Z, \delta, \{q_3\})$, כאשר δ תוגדר כך:

(אחסון וניחוש:)

לכל $\sigma_1,\sigma_2 \in \Sigma$,

$\delta(q_0,\sigma_1,Z) = (q_0,\sigma_2,Z)$

$\delta(q_0,\sigma_1,\sigma_2) = (q_0,A\sigma_2)$

$\delta(q_0,\varepsilon,A) = (q_1,A)$

$\delta(q_0,\varepsilon,\sigma) = (q_1,\sigma)$

(המשך קריאה:)

לכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta(q_1,\sigma,A) = (q_1,A)$.

לכל $\sigma_1,\sigma_2 \in \Sigma$, $\delta(q_1,\sigma_1,\sigma_2) = (q_1,\sigma_2)$.

(מעבר ל- u:)

$\delta(q_1,c,A) = (q_2,A)$.

ולכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta(q_1,c,\sigma) = (q_2,\sigma)$.

(ריקון:)

לכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta(q_2,\sigma,A)=(q_2,\varepsilon)$.

(בדיקה:)

עבור $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\sigma_1,\sigma_2 \in \Sigma$, $\delta(q_2,\sigma_1,\sigma_2)=(q_3,\varepsilon)$.

(המשך קריאה:)

לכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta(q_3,\sigma,Z)=(q_3,Z)$.

ג. עבור כל $w,u \in \Sigma^*$, מתקיים $w \neq u$ אםם:

1. $|w| \neq |u|$ או:
2. קיים i כך שהאות ה-i של w שונה מהאות ה-i של u.

לכן, $L = L_1 \cup L_1^R \cup L_2$, ואיחוד זו תכונת סגירות, לכל L חופשית הקשר.

71. הצג דקדוק חופשי הקשר היוצר את השפה $L=\{w\in\{0,1,2\}^* \mid \#_0(w) > \#_2(w)+1\}$.

פתרון:

$$S \to K0K0K$$
$$K \to 0K2 \mid 2K0 \mid 0K \mid K0 \mid 1K \mid K1$$

תחילה מוסיפים שני אפסים על מנת ליצור את הפער. לאחר מכן ניתן להמשיך עם שוויון, או לחלופין לאפשר להגדיל את הפער לטובת האפסים.

72. הצג דקדוק חופשי הקשר היוצר את השפה

$$L=\left\{\begin{array}{l} 0w_1 0w_2 0\ldots w_n 0 \mid n\geq 5, \forall k: w_k \in \{1,2,3\}^*, \\ \qquad \exists k(3\leq k\leq n-3): \\ \qquad\qquad \#_1(w_k)+\#_3(w_k) \leq |w_{k+2}| \end{array}\right\}.$$

פתרון:

$$S \to ABA$$
$$A \to 0W0W0 \mid 0W0W0A$$
$$B \to 1BT \mid 3BT \mid 2B \mid BT$$
$$W \to TW \mid \varepsilon$$
$$T \to 0 \mid 1 \mid 2$$

A יגזור את הצדדים, מה שמחוץ ל-k, ו-B יגזור את האמצע. B מוסיף על כל אות מימין לכל היותר 1 או 3 יחיד. הוא מאפשר גם להוסיף 2-ים ל-w_k.

73. הצג דקדוק חופשי הקשר היוצר את השפה

$$L=\left\{\begin{array}{l} w_1 0w_2 0w_3 0w_4 \mid \forall i: w_i \in \{1,2\}^*, \\ \qquad |w_2| \geq \#_2(w_1), \\ \qquad w_3 \neq w_4^R \end{array}\right\}.$$

פתרון:

$$S \to A0B$$
$$A \to 2AT \mid AT \mid 1A \mid 0$$
$$B \to 1B1 \mid 2B2 \mid 1C2 \mid 2C1$$
$$C \to TC \mid CT \mid 0$$

B עובר למשתנה שגוזר מילה טרמינלית רק כשהוא גוזר שתי מילים שמפרות את השוויון בין w_3 ל- $w_4{}^R$.

74. הצג דקדוק חופשי הקשר היוצר את שפת כל המילים מתוך $(a+b)^* c(a+b)^*$ כך שמספר ה- a-ים משמאל ל- c שווה למספר הרצפים ba שמימין ל- c.

פתרון:

ניצור משתנה שיגזור מילים מתוך $b^* + a^* b^*$, כלומר מילים שבהן אין רצף ba. ואז נקבל

$$S \rightarrow AaAaASbaB \quad | \, cB$$
$$A \rightarrow bA \; | \, \varepsilon$$
$$B \rightarrow A \, | \, C$$
$$C \rightarrow aC \; | \, bD \; | \, \varepsilon$$
$$D \rightarrow bD \; | \, \varepsilon$$

75. הצג דקדוק חופשי הקשר, שיוצר את שפת כל המילים מהשפה $0^+1^*2^*$, שאורכן מתחלק ב-3 בלי שארית, ושבהן מספר אותיות ה-2 $<$ (מספר אותיות ה- 0 ועוד פעמיים מספר אותיות ה- 1).

פתרון:

בדקדוק שעונה על התנאי השני, ניצור שלושה עותקים מכל משתנה, ו"נשחק" איתם בהתאם להתחלקות בשלוש.

השפה היא $\{0^{i+1}1^j2^k \mid i, j, k \geq 0; k < 2j + i + 1\}$. ניתן לכתוב אותה גם כך:

$0\{0^i1^j2^k \mid i, j, k \geq 0; k \leq 2j + i\}$.

$S \rightarrow 0A_0B_2 \mid 0A_1B_1 \mid 0A_2B_0$.

כאשר A-ים יטפלו באפסים ובאחדים, ו- B-ים בשתיים ובאחד.

$$A_0 \rightarrow 0A_11 \mid 0A_2 \mid \varepsilon$$
$$A_1 \rightarrow 0A_01 \mid 0A_1 \mid \varepsilon$$
$$A_2 \rightarrow 0A_21 \mid 0A_0 \mid \varepsilon$$
$$B_0 \rightarrow 1B_022 \mid 1B_12 \mid 1B_2 \mid \varepsilon$$
$$B_1 \rightarrow 1B_222 \mid 1B_02 \mid 1B_1 \mid \varepsilon$$
$$B_2 \rightarrow 1B_122 \mid 1B_22 \mid 1B_0 \mid \varepsilon$$

76. הצג דקדוק חופשי הקשר היוצר את השפה הבאה:

77. $$L = \left\{ \begin{array}{r} w_18w_28\ldots8w_{k-1}8w_k \mid k \geq 5 \\ \forall i : w_i \in \{4,6\}^* \\ \exists i, 2 \leq i \leq k-2 : \\ \#_6(w_i) > |w_{i+2}| \end{array} \right\}.$$

פתרון:

חלוקה לשלושה חלקים כרגיל.

$$S \rightarrow ABC$$
$$A \rightarrow W \mid W8A$$
$$B \rightarrow 4B \mid 6B4 \mid 6B6 \mid 6B \mid 68W8$$
$$C \rightarrow CW\,8W \mid W8W$$
$$W \rightarrow 4W \mid 6W \mid \varepsilon$$

המשתנה B גוזר את החלק ה"בעייתי", כשהוא דואג שעל כל 6 תהיה לכל היותר אות אחת מימין, ודואג לבסוף לפחות ל-6 אחד יותר משמאל.

78. הצג דקדוק חופשי הקשר היוצר את שפת כל המילים מעל $\{a, b, c, d\}$, המקיימות שני תנאים:

א. האותיות d נמצאות ברצף אחד ויחיד שאורכו לפחות 1.

ב. תהי $n_{l,a}$ שארית החלוקה של מספר אותיות ה- a שמשמאל לרצף ה- d-ים ב-3, ותהי $n_{r,b}$ שארית החלוקה של מספר אותיות ה- b שמימין לרצף ה- d-ים ב-3. אז $n_{l,a} = n_{r,b}$.

פתרון:

$$S \to W_l S \mid SW_r \mid W_l aW_l SW_r bW_r \mid W_l aW_l aW_l aW_l S \mid SW_r bW_r bW_r bW_r$$

כאשר

$$W_l \to cW_l \mid bW_l \mid \varepsilon$$

$$W_r \to W_r c \mid W_r a \mid \varepsilon$$

79. הצג דקדוק חופשי הקשר היוצר את השפה הבאה:

$$L = \{w_1 2 w_2 2 \ldots 2 w_{k-1} 2 w_k 2 \mid k \geq 4; \forall i : w_i \in \{0,1\}^*; \#_0(w_1) \leq \#_1(w_3) + \#_1(w_4)\}.$$

פתרון:

$$S \to A2B$$

$$A \to 0A1 \mid A1 \mid 1A \mid A0 \mid C2$$

$$C \to 0C1 \mid C1 \mid 1C \mid C0 \mid 2W$$

$$B \to WB \mid \varepsilon$$

$$W \to 0W \mid 1W \mid 2$$

שינוי דקדוק

80. נתון דקדוק $G = (V, T, P, S)$ שכל כללי הגזירה שלו הם מהצורה $A \to aB$ או $A \to a$.
הצג באמצעותו דקדוק שכל כלליו מהצורה $A \to Ba$ או $A \to \varepsilon$, שיוצר את השפה:

$$L = \left\{ \begin{array}{l} w \in T^* \mid w = v_1 \dots v_n \\ \qquad n \geq 1 \\ \qquad \forall i : v_i \in T \\ \qquad \exists w_1, \dots, w_n, u_1, \dots, u_n \in T : \\ \qquad u_1 v_1 w_1 \dots u_n v_n w_n \in \left(L(G) \right)^R \end{array} \right\}.$$

פתרון:

תחילה נגדיר משתנה E, ונוסיף את הכלל $E \to \varepsilon$.

כל כלל $A \to a$ נחליף בכלל $A \to Ea$.

בהינתן שלושה כללים:

$V_1 \to aV_2$

$V_2 \to bV_3$

$V_3 \to cV_4$

ניצור כלל $V_1 \to V_4 b$.

כלומר, כל שלשה הפכנו, וויתרנו על שתי האותיות האמצעיות.

81. נתון דקדוק חופשי הקשר $G = (V, T, P, S)$, שכל כלליו הם מהצורה $A \to bC$ או $A \to b$.

הציגו באמצעותו דקדוק חופשי הקשר עבור השפה L:

$$L = \left\{ \begin{array}{l} a_1 a_2 \dots a_n \mid \exists b_1, \dots, b_n \in T : \\ \qquad a_1 b_1 \dots a_n b_n \in L(G) \end{array} \right\}.$$

פתרון: ניתן לפתור באותה דרך כמו בפתרון שאלה 56, אך נציג כאן דרך פתרון שונה.

נגדיר את הקבוצה $\overset{\frown}{V}$ ככל משתני V עם כובע, ונגדיר $G' = (V \cup \overset{\frown}{V}, T, P', S)$. לכל כלל מהצורה $A \to bc \in P$, נוסיף ל-P' שני כללים:

$A \to b\overset{\frown}{C}$.

$\overset{\frown}{A} \to C$.

לכל כלל מהצורה $A \to b \in P$, נוסיף את הכללים:

$A \to b$.

$\overset{\frown}{A} \to \varepsilon$.

כך אנו דואגים לא לגזור את האותיות הזוגיות, וכן את האותיות האי זוגיות.

82. נתונים דקדוקים לינאריים ימניים: $G_1 = (V_1, T, P_1, S_1)$, $G_2 = (V_2, T, P_2, S_2)$. כמו כן נתון $\varepsilon \notin L(G_1) \cup L(G_2)$. צור באמצעותם דקדוק לינארי ימני היוצר את השפה:

$$L = \{\sigma_1 \mu_1 \sigma_2 \mu_2 \dots \sigma_n \mu_n \mid n \geq 1; \sigma_1 \dots \sigma_n \in L(G_1); \mu_1 \dots \mu_n \in L(G_2)\}.$$

פתרון:

נגדיר $G = (V_1 \times V_2 \times \{1,2\} \cup V_2, T, P, (S_1, S_2, 1))$.

לכל כלל גזירה $A \to aB \in P_1$ ולכל $C \in V_2$, נוסיף ל-P את כלל הגזירה $(A, C, 1) \to a(B, C, 2)$.

בדומה, לכל כלל גזירה $A \to aB \in P_2$, ולכל $C \in V_1$ נוסיף ל- P את הכלל $(C, A, 2) \to a(C, B, 1)$.

לכל כלל גזירה $A \to a \in P_1$, ולכל $B \in V_2$, נוסיף ל- P את הכלל $(A, B, 1) \to aB$. נוסיף ל- P בנוסף את כל הכללים מהצורה $A \to a \in P_2$.

83. בנה דקדוק חופשי הקשר עבור השפה $L = \{0^i 1^j \mid 1 \le i \le j \le 4i; i \bmod 3 = 2\}$.

פתרון:

$$S \to 0A_2 1 \mid 0A_2 11 \mid 0A_2 111 \mid 0A_2 1111$$

$$A_0 \to 0A_2 1 \mid 0A_2 11 \mid 0A_2 111 \mid 0A_2 1111 \mid \varepsilon$$

$$A_1 \to 0A_1 1 \mid 0A_1 11 \mid 0A_1 111 \mid 0A_1 1111 \mid \varepsilon$$

$$A_2 \to 0A_0 1 \mid 0A_0 11 \mid 0A_0 111 \mid 0A_0 1111 \mid \varepsilon$$

אוטומט מחסנית

הערה: לאוטומטי מחסנית לרוב לא מצורפים כאן פתרונות, בגלל שצריך לסרוק את הכל...

84. בנה אוטומט מחסנית **דטרמיניסטי** בעל **שני מצבים** עבור השפה:

$L = \{w \mid \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$.

85. בנה אוטומט מחסנית עבור השפה הבאה:

$L = \{a^n b^m c^k \mid n,m,k \geq 1, (n = m \vee n = 3m)\}$.

86. בנו אוטומט מחסנית **דטרמיניסטי** עבור השפה L:

$L = \{a^m b^n c^{m-n} \mid 0 \leq n \leq m\}$.

87. בנה אוטומט מחסנית עבור שפת כל המילים מעל $\{0,1,...,9\}$ כך שמספר הספרות הזוגיות בהן שווה למספר הספרות האי-זוגיות בהן.

פתרון:

נגדיר $M = (\{q_0, q_1\}, \{0,1,...,9\}, \{E, O, Z\}, \delta, q_0, Z, \{q_1\})$, ואת δ' נגדיר כך:

לכל ספרה זוגית $e \in \{0,1,...,9\}$,

$\delta'(q_0, e, Z) = (q_0, EZ)$

$\delta'(q_0, e, E) = (q_0, EE)$

$\delta'(q_0, e, O) = (q_0, \varepsilon)$

לכל ספרה אי זוגית $o \in \{0,1,...,9\}$,

$\delta'(q_0, o, Z) = (q_0, OZ)$

$\delta'(q_0, o, O) = (q_0, OO)$

$\delta'(q_0, o, E) = (q_0, \varepsilon)$

בנוסף נגדיר $\delta'(q_0, \varepsilon, Z) = (q_1, Z)$.

88. בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה הבאה:

$L = \{cw_1cw_2c...cw_kc^l w_{k+1}c...w_{k+l}c \mid k \geq 1, l \geq 2, \forall i: w_i \in \{a,b\}^*, |w_{k+l}| = |w_k|\}$.

רעיון הפתרון: לנחש מתי מגיע w_k, ולאגור A על כל אות ממנו, ו- l אותיות B.

89. בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה הבאה:

$$L = \left\{ a^{i_1} b^{j_1} c^{k_1} \ldots a^{i_n} b^{j_n} c^{k_n} \;\middle|\; \begin{array}{l} n \geq 2; \\ \forall l: 0 \leq i_l < j_l, k_l \geq 1; \\ k_{n-1} < k_n \end{array} \right\}.$$

90. בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה $L = \{ww^R xx^R \mid w, x \in \{a,b\}^+\}$.

91. בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה:

$$L = \left\{ ur_1vr_2wr_3xr_4y \;\middle|\; \begin{array}{l} u,v,w,x,y \in \{a,b\}^* \\ r_1, r_2, r_3, r_4 \in c^+ \\ u = w^R \\ \#_b(x) = 2|y| \end{array} \right\}.$$

92. בנה אוטומט מחסנית **בעל מצב יחיד** המקבל על ידי ריקון המחסנית את השפה $L = \{a^n b^m \mid n \geq m \geq 1\}$.

93. בנה אוטומט מחסנית המקבל **על ידי הגעה למצב מקבל** את השפה $L = \overline{\{a^n b^n \mid n \geq 1\}}$.

94. בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה $L = \{a^{i-j}b^i c^j \mid i, j \geq 0, i \geq j\}$.

95. בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \#_a(w) < \#_c(w) \;\; or \;\; \#_a(w) + \#_c(w) \neq \#_b(w)$.

אי-חופשיות הקשר

96. הוכח באמצעות למת הניפוח שהשפה $L = \{a^i b^{2i-j} c^j \mid 2 \le j < i\}$ איננה חופשית הקשר.

פתרון:

יהי $n > 0$. נבחר את המילה $z = a^n b^{n+1} c^{n-1}$, המקיימת $z \in L$. יהי פירוק של z, $z = uvwxy$ כך ש- $|vwx| \le n$, ו- $|vx| \ge 1$. נחלק למקרים לפי vx:

1. $vx \in a^+$. אז נבחר ניפוח 0, ואז לא יתקיים התנאי $i > j$.
2. $vx \in b^+$. אז נבחר ניפוח 0, ואז החזקה של b תהיה שונה מ- $2i - j$.
3. $vx \in c^+$. אז נבחר ניפוח 2, ואז לא יתקיים התנאי $i > j$.
4. $vx \in a^+b^+$. אז נבחר ניפוח 0, ואז לא יתקיים התנאי $i > j$.
5. $vx \in b^+c^+$. אז נבחר ניפוח $i = 2$, ואז לא יתקיים התנאי $i > j$.

כלומר בכל מקרה, ראינו שלא מתקיימת למת הניפוח, ולכן השפה איננה חופשית הקשר.

97. הוכח באמצעות למת הניפוח שהשפה $L = \{a^i b^j a^k \mid j > i \ge 0, k = 2j\}$ איננה חופשית הקשר.

פתרון:

יהי $n > 0$. נבחר את המילה $z = a^n b^{n+1} a^{2n+2}$. יהי פירוק של z: $z = uvwxy$ המקיים $|vwx| \le n$ ו- $|vx| \ge 1$. נחלק למקרים לפי vx:

1. $vx \in a^+$. נבחר ניפוח $i = 2$, וכך לא יתקיים התנאי $j > i$.
2. $vx \in b^+$. נבחר ניפוח $i = 0$, וכך לא יתקיים התנאי $i < j$.
3. $vx \in c^+$. נבחר ניפוח $i = 0$, ואז לא יתקיים התנאי $k = 2j$.
4. $vx \in a^+b^+$. נבחר ניפוח $i = 0$ ואז לא יתקיים התנאי $k = 2j$.
5. $vx \in b^+c^+$. נבחר ניפוח $i = 0$, וכך לא יתקיים התנאי $i < j$.

כלומר בכל מקרה, הוכחנו שלא מתקיימים תנאי למת הניפוח, ולכן השפה איננה חופשית הקשר.

98. נתון שהשפה $L = \{a^{i+1} b^i c^j \mid 2 \le j \le i\}$ איננה חופשית הקשר. הוכח באמצעות תכונה זו ובאמצעות תכונות סגירות, שהשפה L_4 איננה חופשית הקשר:

$L_4 = \{(01)^m (11)^n (00000)^k (101)^{2k} \mid 2 \le m \le k, 2 \le n\}$.

פתרון: ננחל בשלילה ש- L_4 חופשית הקשר. נגדיר הצבה $f : \{0,1\} \to 2^{\{0,1\}^*}$, כך:

$f(0) = 0$

$f(1) = 1 + \varepsilon$

f היא הצבה חופשית הקשר, ולכן $f(L_4)$ גם היא חופשית הקשר. מסגירות לחיתוך עם שפה רגולרית נקבל ש-

$f(L_4) \cap \left((01)^+ (00000)^+ (101)^+\right)$ היא שפה חופשית הקשר, אך

$f(L_4) \cap \left((01)^+ (00000)^+ (101)^+\right) = \{(01)^m (00000)^k (101101)^k \mid k \ge m \ge 2\} = L'$,

כלומר L' חופשית הקשר.

כעת, מסגירות להיפוך ולשרשור, נקבל ש- $\overline{L} = \{101101\}L'^R = \{(101101)^{k+1}(00000)^k(10)^m \mid k \ge m \ge 2\}$ היא שפה חופשית הקשר.

כעת נגדיר הומומורפיזם $h:\{a,b,c\} \to \{0,1\}^*$ כך:

$h(a) = 101101$.

$h(b) = 000000$.

$h(c) = 10$.

מסגירות להומומורפיזם הפוך נקבל ש- $L = h^{-1}(\overline{L})$ היא שפה חופשית הקשר, בסתירה לנתון. כלומר, ההנחה שגויה, ולכן השפה L_4 איננה חופשית הקשר.

99. השפה $L = \{0^i1^j2^k3^l \mid i \ne 2 \; or \; j = k = l\}$ איננה חופשית הקשר.

א. הוכיחו שהיא ניתנת לניפוח.

ב. הוכיחו שהיא אינה חופשית הקשר.

פתרון:

א. נבחר קבוע ניפוח $n = 4$. תהי $z \in L$ המקיימת $|z| \ge 4$.

נחלק למקרים:

1. $i = 2$. אז נבחר $u = \varepsilon, v = 2, w = \varepsilon, x = 2, y = 1^j2^j3^j$. יהי $i \ge 0$. אז אם $i \ne 1$ נקבל ש- uv^iwx^iy הוא מהצורה המקורית, כאשר $i \ne 2$, ולכן $uv^iwx^iy \in L$.

2. $i \ne 2$. אם $i = 0$ נבחר את הפירוק כפירוק כלשהו המקיים את התנאים, ועדיין כל ניפוח ישאיר את התנאי $i \ne 2$. אם $i > 0$, והמילה לא מכילה רק 0, נבחר פירוק כך שלא יכיל אפסים. שוב מספר ה- i-ים לא ישתנה, ועדיין כל ניפוח ישאיר בשפה. אם המילה מכילה רק 0, אז היא מכילה לפחות ארבעה אפסים. נבחר פירוק כך ש- $u = 0, x = \varepsilon$. ואז ניפוח עדיין ישאיר את $i > 2$.

ב. נניח בשלילה ש- L חופשית הקשר. נסמן $L' = L \cap 001^*2^*3^*$. אז מסגירות לחיתוך עם שפה רגולרית, נקבל ש - L' חופשית הקשר. כעת נגדיר הומומורפיזם $h:\{0,1,2,3\} \to \{a,b,c\}^*$ כך:

$h(0) = \varepsilon$.

$h(1) = a$

$h(2) = b$

$h(3) = c$

אז $h(L') = \{a^nb^nc^n \mid n \ge 0\}$, וזו שפה שאינה חופשית הקשר, בסתירה לסגירות להומומורפיזם. לכן ההנחה שגויה, ולכן השפה L איננה חופשית הקשר.

רגולרית => חופשית הקשר

100. נתון ש- L_1, L_2 הן שפות רגולריות מעל Σ. האם השפה L הבאה חופשית הקשר?

$$L = \{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_{n+1} c \mid n \ge 0, c \in \Sigma, a_1 \dots a_n \in L_1, b_1 \dots b_{2n+1} \in L_2\}$$

פתרון: השפה חופשית הקשר. תהי $L' = \{w_1 \$ w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*, |w_2| = 2|w_1| + 1\}$. נבנה לשפה זו דקדוק חופשי הקשר G:

$$S \to AT$$

$$A \to TATT$$

ולכל $\sigma \in \Sigma$, נגדיר $T \to \sigma$.

לכן נקבל שהשפה L' היא חופשית הקשר.

כעת, נגדיר $\overline{L} = L_1 \$ L_2 \cap L'$. השפות הרגולריות סגורות תחת שרשור, ולכן השפה $L_1 \$ L_2$ רגולרית גם היא, וכמו כן השפות חופשיות ההקשר סגורות תחת פעולת החיתוך עם שפה רגולרית, ולכן נקבל ש - $\overline{L}$ חופשית הקשר. כעת נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \{\$\} \to \Sigma$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$.

$h(\$) = \varepsilon$.

ואז מתקיים ש- $h(\overline{L})$ חופשית הקשר מסגירות להומומורפיזם, ושוב מסגירות לשרשור נקבל ש- $L = h(\overline{L}) \cdot c$ חופשית הקשר, כלומר L אכן חופשית הקשר.

101. נתון כי L רגולרית מעל $\{a,b,c\}$. הוכח כי $\vec{L}$ חופשית הקשר:

$$\vec{L} = \left\{ uv \mid \begin{array}{l} u \in L \\ u \in c^* \\ v \text{ is a word in } L \\ \text{without } |u| \text{ letters} \end{array} \right\}.$$

פתרון: נגדיר תחילה את השפה $L' = \{u \$ v \mid u \in \Sigma^*, v \text{ is like in } \vec{L}\}$. נבנה בשביל האוטומט מחסנית.

מכך ש- L רגולרית נסיק שקיים לה אס"ד, $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$. נגדיר א"מ

$$M = (\Sigma, \{A, Z\}, \{q_0', q_f\} \cup Q, q_0', Z, \delta', q_f).$$

ואת δ' נגדיר כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $\delta'(q_0', \sigma, Z) = (q_0', AZ)$, $\delta'(q_0', \sigma, A) = (q_0', AA)$.

$$\delta'(q_0', \$, Z) = (q_0, Z), \ \delta'(q_0', \$, A) = (q_0, A).$$

וכעת נעבור לריקון על כל מסע אפסילון, או קריאה רגילה:

לכל כלל $\delta(q, \sigma) = q'$, נוסיף שני כללים:

$$\delta'(q, \sigma, A) = (q', A).$$

$$\delta'(q, \varepsilon, A) = (q', \varepsilon).$$

לכל $q \in F$ נגדיר $\delta'(q, \varepsilon, Z) = (q_f, Z)$.

ואז $L_f(M) = L'$, ולכן L' חופשית הקשר.

כעת נגדיר $L_N = L' \cap ((L \cap c^*)\$\Sigma^*)$, זהו חיתוך עם שפה רגולרית, ולכן L_N חופשית הקשר. נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \{\$\} \to \Sigma$ כך שלכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$, ו- $h(\$) = \varepsilon$.
ואז $h(L_N) = \vec{L}$ ומסגירות להומומורפיזם נקבל ש- $\vec{L}$ חופשית הקשר.

102. הוכיחו שאם L_1, L_2 רגולריות מעל Σ אז השפה L חופשית הקשר:

$$L = \left\{ uvw \;\middle|\; \begin{matrix} v \in L_1^R \\ u \in L_1 \\ w^R u^R \in \overline{L_2} \\ |u| = |vw| \end{matrix} \right\}.$$

פתרון: ראשית, מסגירות למשלים ולהיפוך, נקבל ש- $\overline{L_2}^R$ היא שפה רגולרית. כעת, נגדיר הצבה רגולרית $f_1 : \Sigma \to \Sigma \cup \{\&\}$ כך:
לכל $\sigma \in \Sigma$, $f_1(\sigma) = \sigma\& + \&\sigma$.
מסגירות להצבה רגולרית, לחיתוך ולאיחוד, נקבל ש-
$L' = \left(f_1\left(\overline{L_2}^R\right) \cup \{\&\} \right) \cap \Sigma^* \& \Sigma^*$ היא שפה רגולרית.
כעת נגדיר הצבה $f_2 : \Sigma \cup \{\&\} \to \Sigma \cup \{\$\}$ כך:
לכל $\sigma \in \Sigma$, $f_2(\sigma) = \sigma$.
$f_2(\&) = \$L_1^R\$$.
זוהי הצבה רגולרית, ולכן נקבל ש- $L'' = f_2(L') = \left\{ u\$v\$w \;\middle|\; \begin{matrix} uw \in \overline{L_2}^R \\ v \in L_1^R \end{matrix} \right\}$ היא שפה רגולרית. כעת שוב מסגירות לחיתוך נקבל ש- $\vec{L} = L'' \cap L_1\$\Sigma^*\$\Sigma^*$ היא שפה רגולרית.
כעת נציג דקדוק חופשי הקשר שיצור את השפה $\{w_1\$w_2\$w_3 \,\|\, |w_1| = |w_2| + |w_3|\}$:

$$S \to TST \mid TKT\$$$
$$K \to TKT \mid \$$$

ולכל $\sigma \in \Sigma$, $T \to \sigma$.
אז השפה שהצגנו חופשית הקשר, ולכן מסגירות לחיתוך עם שפה רגולרית, נקבל ש-
$L^c = \vec{L} \cap \{w_1\$w_2\$w_3 \,\|\, |w_1| = |w_2| + |w_3|\}$.
כעת נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \{\$\} \to \Sigma$ כך:
לכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$.
$h(\$) = \varepsilon$.
ואז $h(L^c) = L$ ומסגירות להומומורפיזם נקבל ש- L חופשית הקשר.

103. יהיו L_1, L_2 שפות רגולריות מעל Σ. הוכח ש- L הבאה חופשית הקשר:

$$. L = \left\{ \begin{array}{ll} uvw \mid & u \in L_1 \\ & w \in L_2^R \\ & vw \in L_1 \\ & |w| = |uv| \end{array} \right\}$$

פתרון:

נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \{\$\} \to \Sigma^*$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$.

$h(\$) = \varepsilon$.

ונגדיר $\vec{L} = h^{-1}(L_1) \cap \Sigma^*\$\Sigma^*$. אז $\vec{L}$ רגולריות מסגירות להומומורפיזם ולחיתוך. נגדיר $\overleftrightarrow{L} = L_1\$\vec{L}$. גם זו שפה רגולרית מסגירות לשרשור.

כעת נגדיר $\hat{L} = \overleftrightarrow{L} \cap \Sigma^*\$\Sigma^*\$L_2^R$. גם זו שפה רגולרית מסגירות לחיתוך, להיפוך ולשרשור.

כעת נגדיר את השפה $L_w = \{u\$v\$w \mid |uv| = |w|\}$ קל לבנות לה דקדוק ולכן היא חופשית הקשר.

כעת מתקיים $L = h(\hat{L} \cap L_w)$ ומסגירות להומומורפיזם, L חופשית הקשר.

104. יהיו L_1, L_2 שפות רגולריות. הוכח שהשפה L חופשית הקשר:

$$. L = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2, |w_1| = 2|w_2|\}$$

פתרון:

ראשית, מסגירות לשרשור, נקבל שהשפה $L' = L_1\$L_2$ היא שפה רגולרית.

כעת, נגדיר את השפה $L_e = \{w_1\$w_2 \mid |w_1| = 2|w_2|\}$. את השפה הזו, יוצר הדקדוק:

$$S \to TTST \mid \varepsilon$$

ולכל $\sigma \in \Sigma$, $T \to \sigma$.

לכן L_e חופשית הקשר, ומסגירות לחיתוך עם שפה רגולרית, $L' \cap L_e$ חופשית הקשר.

כעת נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \{\$\} \to \Sigma$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$.

$h(\$) = \varepsilon$.

ואז $h(L' \cap L_e) = L$, ולכן מסגירות להומומורפיזם, L חופשית הקשר.

105. תהי L שפה רגולרית. הוכח שהשפה הבאה חופשית הקשר:

$$. \hat{L} = \{wv \mid w \in L, v \in L^R, |w| = \frac{1}{3}|v|\}$$

פתרון:

מסגירות להיפוך, נקבל ש- L^R רגולרית.

כעת נגדיר $L' = \{w\$v \mid w, v \in \Sigma^*, |w| = \frac{1}{3}|v|\}$. נוכיח ששפה זו חופשית הקשר על ידי בניית דקדוק חופשי הקשר שיוצר אותה:

$$S \to ASAAA \mid \$$$

לכל $\sigma \in \Sigma$, $A \to \sigma$.

כעת נגדיר $L'' = L\$L^R \cap L'$. זוהי שפה חופשית הקשר מסגירות לשרשור ולחיתוך עם שפה רגולרית. כעת נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \{\$\} \to \Sigma^*$ כך:

לכל $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) = \sigma$.

$h(\$) = \varepsilon$.

ואז $\hat{L} = h(L'')$, ומסגירות להומומורפיזם, נקבל ש- $\hat{L}$ חופשית הקשר.

חופשית הקשר => חופשית הקשר?

106. תן דוגמה לשפה חופשית הקשר L כך שמתקיים ש- $Drop-Middle(L)$ איננה חופשית הקשר.

$Drop-Middle(L)=\{xy \mid |x|=|y|, \exists a\in\Sigma^*: xay\in L\}$.

פתרון:

נתבונן ב- $L=\{1^i2^i3^j4^j \mid i,j\ge 0\}$. זוהי שפה חופשית הקשר כשרשור של שתי שפות חופשיות הקשר.

כעת, נניח בשלילה ש- $Drop-Middle(L)$ היא שפה חופשית הקשר.

נסמן $L'=Drop-Middle(L)\cap 0^+1^+3^+$. אז L' חופשית הקשר מסגירות לחיתוך עם שפה רגולרית. מתקיים $L'=\{0^i1^j3^k \mid k=i+j, i\ge j\}$, נוכיח ששפה זו איננה חופשית הקשר, באמצעות למת הניפוח.

יהי $n>0$. נבחר את המילה $z=0^n1^n3^{2n}$. יהי פירוק של $z=uvwxy$, המקיים $|vwx|\le n$ ו- $|vx|\ge 1$. נחלק למקרים לפי vx:

1. $vx\in 0^+$. אז נבחר ניפוח $i=0$, וייסתר התנאי $i\ge j$.
2. $vx\in 1^+$. אז נבחר ניפוח $i=2$, ושוב ייסתר התנאי $j\le i$.
3. $vx\in 3^+ + 0^+1^+$. אז נבחר ניפוח $i=0$, וייסתר התנאי $i+j=k$.
4. $vx\in 1^+3^+$. אז נבחר ניפוח $i=2$, וייסתר התנאי $i\ge j$.

כלומר בכל מקרה קיבלנו סתירה ללמת הניפוח, ולכן השפה $Drop-Middle(L)$ אינה חופשית הקשר.

107. תהי L שפה חופשית הקשר מעל Σ. הוכח שהשפה הבאה חופשית הקשר:

$\overleftrightarrow{L}=\{w\in\Sigma^* \mid \exists u,v\in\Sigma^*: uwv\in L\}$.

פתרון:

נגדיר הצבה $f:\Sigma\to 2^{(\Sigma\cup\Sigma')^*}$ כך:

לכל $\sigma\in\Sigma$, $f(\sigma)=\sigma+\sigma'$.

ואז נגדיר $L'=f(L)\cap\Sigma'^*\Sigma^*\Sigma'^*$. זו שפה חופשית הקשר מסגירות לחיתוך עם שפה רגולרית, ולהצבה חופשית הקשר.

נגדיר הומומורפיזם $h:\Sigma\cup\Sigma'\to\Sigma^*$ כך:

לכל $\sigma\in\Sigma$, $h(\sigma)=\sigma$, ו- $h(\sigma')=\varepsilon$.

ואז $h(L')=\overleftrightarrow{L}$, ומסגירות להומומורפיזם נקבל ש- $\overleftrightarrow{L}$ חופשית הקשר.

108. תן דוגמה לשפה חופשית הקשר L כך ש- $two-third(L)$ איננה חופשית הקשר. (ר' שאלה 50).

פתרון:

נתבונן ב- $L=\{0^n1^n2^m3^m \mid n,m\ge 1\}$, שהיא שפה חופשית הקשר (שרשור של שתי שפות חופשיות הקשר). נניח בשלילה ש - $two-third(L)$ חופשית הקשר, ונסמן $L'=two-third(L)\cap 0^+1^+2^+$. מסגירות לחיתוך עם שפה רגולרית, L' היא שפה חופשית הקשר. כעת נוכיח באמצעות למת הניפוח שהשפה L' איננה חופשית הקשר.

יהי $n > 0$. נבחר את המילה $z = 0^n1^n2^{2n}$. קל לוודא שהמילה שייכת ל-L'. כעת יהי פירוק של z, $z = uvwxy$ המקיים $|vwx| \le n$, ו-$|vx| \ge 1$. נחלק למקרים לפי vx:

1. $vx \in a^+ + b^+ + b^+c^+$. אז נבחר ניפוח $i = 0$, אז החזקה של a תהיה שונה מזו של b בסתירה.
2. $vx \in c^+$. אז נבחר ניפוח $i = 2$. המילה אינה בשפה, שכן אילו הייתה, אז השני שליש מהמילה היה כולל גם 3.
3. $vx \in a^+b^+$. מאותו נימוק של 2 נבחר ניפוח $i = 0$.

כלומר בכל מקרה הוכחנו שלא מתקיימת למת הניפוח, ולכן השפה L' לא חופשית הקשר בסתירה להנחה, כלומר $two - third\ (L)$ אינה חופשית הקשר.

109. תן דוגמה לשפות L_1, L_2 חופשיות הקשר, כך ש-$L_3 = \{xyz \mid xy \in L_1, yz \in L_2\}$ איננה חופשית הקשר.

פתרון:

נבחר $L_1 = \{a^nb^n \mid n \ge 0\}$, $L_2 = \{b^nc^n \mid n \ge 0\}$. אלו שפות חופשיות הקשר. נניח בשלילה ש-L_3 חופשית הקשר.

$L_3 \cap a^+b^+c^+ = \{a^ib^jc^k \mid j \ge i, k\}$, גם היא חופשית הקשר מסגירות לחיתוך. ניתן להוכיח ששפה זו איננה חופשית הקשר באמצעות למת הניפוח.

110. תן דוגמה לשפה חופשית הקשר L, כך ש-$Half\ (L) = \{w \mid ww \in L\}$ איננה חופשית הקשר.

פתרון:

תהי $L = \{0^i1^i2^n0^m1^j2^j \mid i, j, n, m \ge 1\}$. אז $Half\ (L) = \{0^i1^i2^i \mid i \ge 1\}$, כי לוקחים רק את המילים שבהן החלק הראשון שווה לחלק השני, כלומר $j = i$ בגלל 1, ולכן גם מספר ה-2-ים שווה. זו כידוע שפה לא חופשית הקשר.

111. תן דוגמה לשפה חופשית הקשר L כך שהשפה $Drop - Equal\ (L) = \{xz \mid \exists y \in \Sigma^* : |x| = |y|, xyz \in L\}$ אינה חופשית הקשר.

פתרון:

נבחר $L = \{0^i1^i2^j3^j \mid i, j \ge 0\}$. זו שפה חופשית הקשר כשרשור של שפות חופשיות הקשר. אז $Drop - Equal\ (L) \cap 0^+1^+3^+ = \{0^i1^j3^k \mid i, j, k \ge 1; i \ge j; k \le 2i\}$. זו שפה שאינה חופשית הקשר, ניתן להוכיח זאת באמצעות למת הניפוח: לכל n, $z = 0^n1^n3^{2n}$. לכל פירוק יהיה קיים ניפוח מתאים שיוציא את המילה מהשפה.