

מבוא לשיטות חישוביות 361-1-2251
תרגיל מחשב I: אלגברה לינארית חישובית

תאריך אחרון להגשה 19/05/2023

הנחיות כלליות: מטרת מטלה זו לתרגל את פתרון הנומרי של בעיות באלגברה לינארית, בשיטות החישוב שנלמדו בקורס, בעזרת MATLAB. יש להגיש מסמך מסכם לעבודה, כקובץ PDF, ובו כל התשובות לסעיפים השונים, כולל כל הפיתוחים והביטויים הסופיים, תרשימים ואיורים, הסברים, ופרשנות של התוצאות. יש לצרף את כל קבצי ה-MATLAB שכתבתם במסגרת העבודה, מתועדים במידה מספקת המאפשרת הבנת מה מומש. ניתן להגיש מספר קבצי קוד, אך יש להכין קובץ MAIN יחיד, שרק אותו יריץ הבודק, שיקרא לשאר הקבצים. אין להגיש קבצי ZIP, RAR וכו'. עבודה שלא תשחזור של כל התרשימים בה בקריאה לקובץ MAIN יחיד או שהקוד המצורף לה אינו נהיר, לא תבדק ותחשב כלא הוגשה. על התרשימים להיות נוחים להבנה (מקרא, כותרות צירים, קווים וסמנים נוחים לקריאה). יופחת ניקוד על תרשימים לא ברורים. למטלה משקל של 1/3 מסך תרגילי המחשב בציון הסופי וניתן לבצעה בזוגות.

רקע: המטריצה A מתארת את מדידות פוטנציאל אלקטרוסטטי מאוסף מקורות נקודתיים. במערכת ישנם M מטענים שנשמם $q_n, n \in [1, 2, \dots, M]$ והפוטנציאל $v_m, m \in [1, 2, \dots, M]$ נמדד ב- M נקודות. מטרתנו לבחון שיטות לחישוב המטענים מתוך המדידות. לשם כך מנסחים את הבעיה כמערכת משוואות לינאריות בהצגה מטריצית $Aq = v$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2M} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix}$$

$A \qquad \qquad q \qquad \qquad v$

עבור המקרה בו כל המטענים וכל נקודות המדידה מסודרים במרווח זוויתי אחיד, לאורך שתי קשתות מעגליות מקבילות שרדיוסן $\rho = 1m$ ושמוכזיהן נמצאים במרחק h כלשהו זה מזה, ניתן לכתוב את אברי המטריצה במפורש:

$$a_{mn} = \frac{1}{4\pi r_{mn}} = \frac{1}{4\pi \sqrt{[h + \rho \sin(m\pi/M) - \rho \sin(n\pi/M)]^2 + [\rho \cos(m\pi/M) - \rho \cos(n\pi/M)]^2}}$$

הניחו וקטור q באורך $M = 18$ המורכב מספרות 1.2. שלכם משמאל לימין (ליחידים – השתמשו במספר 1.2. פעמיים).

שאלה 1: אלימיניציה גאוסית ופירוק LU (40 נק')

- הניחו $h = \pi\rho/M$. בנו את המטריצה A . חשבו את המכפלה $\bar{v} = Aq$. חשבו את פירוק LU (עם Pivoting) ומספר המצב של A , ואת הנורמות $\|q\|_2$, $\|\bar{v}\|_2$ ו- $\|A\|_F$. (ראו פונקציות MATLAB שימושיות בעמוד הבא).
- ממשו בעצמכם (ללא קריאה לפקודות חישוב הופכי או פתרון מערכת) שתי שגרות, לפתרון מערכות מהצורה $Ly = b$ ומהצורה $Ux = y$. הפעילו שגרות אלה לחישוב פתרון \bar{q} למשוואה $A\bar{q} = \bar{v}$. חשבו השגיאה היחסית (בנורמה 2) של \bar{q} ביחס ל- q .
- לוקטור המדידות \bar{v} , נוסף בטעות וקטור שגיאת מדידה δv שאיבריו: $\|\delta v\|_2 = 10^{-3}$. חזרו על סעיף ב' עבור המשוואה $A\bar{q} = \bar{v} + \delta v$. הסבירו את ההבדל בתוצאה.
- כעת נפלה טעות במטריצה A ולכל איבר שלה נוספה שגיאה $\|A\|_F = 10^{-3} \cdot \delta A_{mn}$. חזרו על סעיף ב' עבור המשוואה $(A + \delta A)\bar{q} = \bar{v}$. הסבירו את ההבדל בתוצאה.
- חזרו (ע"י לולאת for) על סעיפים א'-ד' עבור $h \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\} \times \pi\rho/M$. הדפיסו (ע"י פקודת loglog) את שגיאת החישוב היחסית בפתרון ואת מספר המצב, כפונקציה של h . הסבירו את ההתנהגות שהתקבלה.

שאלה 2: פתרון מקורב בשיטות איטרטיביות (35 נק')

א. עבור $h = \pi\rho / (5M)$, בנו את המטריצה A . חשבו את המכפלה $\bar{v} = Aq$ ופתרו את המשוואה $A\bar{q} = \bar{v}$ בשיטת Seidel-Gauss. השתמשו בסיבולת שגיאה יחסית של 10^{-3} ובניחוש התחלתי $\bar{q}^{(0)} = 0$. שרטטו (ע"י שימוש ב-semilogy) את המרחק היחסי $\|\bar{q}^{(k-1)} - \bar{q}^{(k)}\|_\infty / \|\bar{q}^{(k-1)}\|_\infty$ בין זוג פתרונות עוקבים כפונקציה של האינדקס k . לשם השוואה, הוסיפו לשרטוט גם את השגיאה היחסית האמיתית $\|\bar{q}^{(k)} - q\|_\infty / \|q\|_\infty$. מה מספר האיטרציות

שנדרש להתכנסות? מה השגיאה היחסית של \bar{q} הסופי בהשוואה ל- q ?

ב. חזרו על סעיף א' עבור $h = \pi\rho / (2M)$ ו- $h = \pi\rho / M$. תארו את ההבדלים בתוצאות.

ג. חזרו על סעיף א', עבור שיטת Jacobi. דונו בתוצאות – האם השיטה מתכנסת? אם לא, מדוע?

ד. חזרו על סעיף ג' עבור מטריצה חדשה (לשימוש בסעיף זה בלבד) שאיבריה נתונים ע"י

$$a_{mn} = \frac{1}{4\pi r_{mn}^2} = \frac{1}{4\pi \left\{ \left[h + \rho \sin(m\pi / M) - \rho \sin(n\pi / M) \right]^2 + \left[\rho \cos(m\pi / M) - \rho \cos(n\pi / M) \right]^2 \right\}}$$

תארו ונמקו את ההבדלים המתקבלים בתוצאות.

שאלה 3: פתרון בשיטת Least Squares עבור מטריצה ריבועית (25 נק')

א. בנו את המטריצה A עבור $h = 10\pi\rho / M$. חשבו את הדטרמיננטה של A ואת המכפלה $\bar{v} = Aq$. חשבו פתרון

\hat{q} הממזער את השארית $\|\bar{v} - A\hat{q}\|_2$. חשבו את השגיאה היחסית של \hat{q} ביחס ל- q .

ב. חזרו (ע"י לולאת for) על סעיף א', כך שתחושבנה התוצאות עבור הערכים $h \in \{1/5, 1/2, 2, 5, 10\} \times \pi\rho / M$. הדפיסו (ע"י פקודת loglog) את הדטרמיננטה ואת שגיאת החישוב היחסית בפתרון כפונקציה של h . הסבירו את ההתנהגות שהתקבלה.

פקודות MATLAB שימושיות לביצוע התרגיל: meshgrid, lu, cond, inv, diag, norm.

בהצלחה!