

עבודה 2

עידן לוסקי 209203751

אוהב טבול 207691262

שאלה 1:

סעיף א:

$$f(x) = x^4 - 3$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f(5) = 5^4 - 3 > 0$$

$$f'(5) = 4 * 5^3 = 500$$

$$f(a) * f(5) < 0$$



$$f(a) < 0$$

$$f'(a) > 0$$

ניתן לראות כי הנגזרות מסדר ראשון ושני מתאפסות רק עבור $x=0$

$$\left| \frac{f(5)}{f'(5)} \right| < 5 - a$$

$$\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| = \left| \frac{a^4 - 3}{4 * a^3} \right| = \frac{a^4 - 3}{4 * a^3} < 5 - a$$



$$0 < a < \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}$$

מקיים את הנדרש. $a = \frac{1}{3^{\frac{1}{6}}}$

כל a בתחום $[a, 5]$ מקיים את הנדרש, ולכן לפי ניוטון רפסון מתכנס לכל x בתחום.

משפט: תהי $F(x)$ פונקציה ממשיה המוגדרת בקטע $[a, b]$ ואשר מקיימת את התנאים הבאים:

1. $F'(x) \neq 0$ (פונקציה מונוטונית)

2. $F''(x) \neq 0$ (אין פגוע של הפונקציה במחיצה)

3. $F(a)F(b) < 0$ (יש שורש במחיצה)

$$\text{אם } \left| \frac{F(a)}{F'(a)} \right| < b - a \text{ ; } \left| \frac{F(b)}{F'(b)} \right| < b - a$$

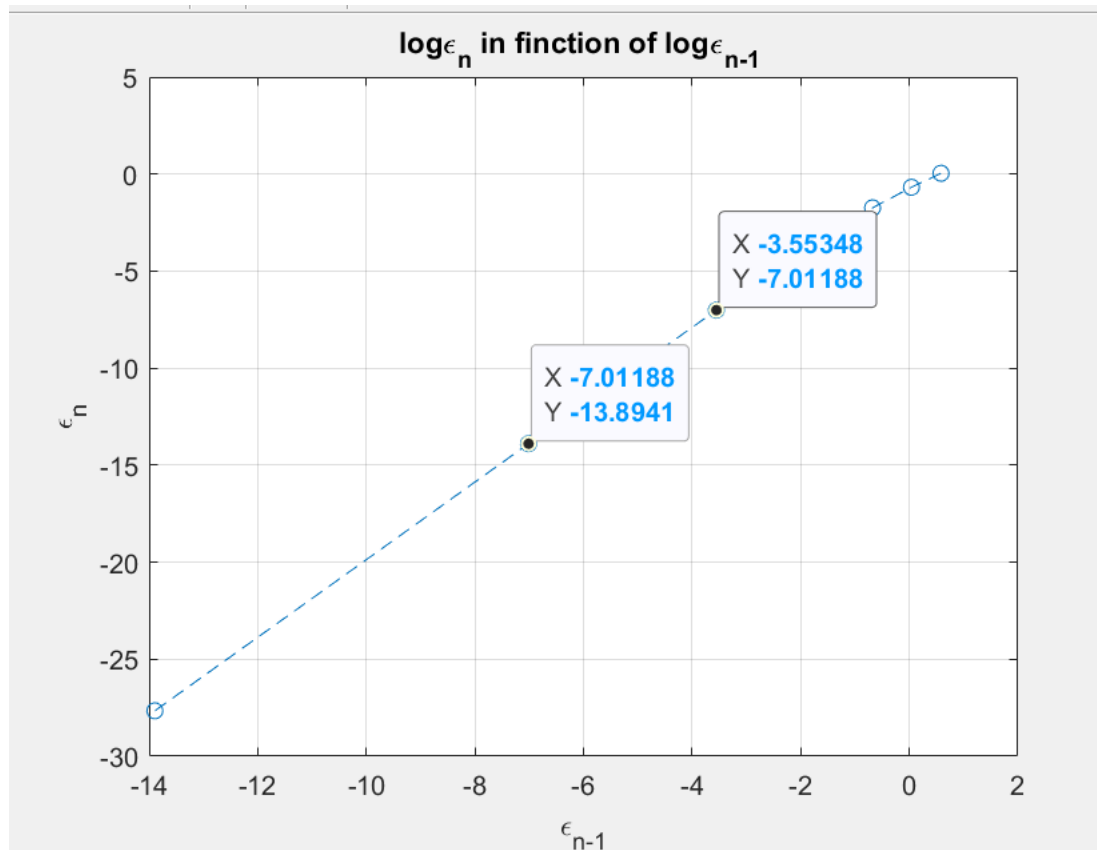
אז יש נקודה יחידה x_0 במחיצה $[a, b]$ המקיימת $F(x_0) = 0$

סעיף ב: נדרשו $N = 8$ איטרציות להתכנסות

iteration number:	x_n	$ x_n - x_{n_next} $	relative error
0	3.10735995012476	0	0
1	2.35551688669604	0.751843063428722	1.79128593717227
2	1.82402322147861	0.53149366521743	1.03944287374355
3	1.49160367175871	0.3324195497199	0.507949208526116
4	1.34469884731327	0.146904824445441	0.175529658806216
5	1.31697512343795	0.0277237238753201	0.0286248343607745
6	1.31607493737744	0.000900186060504238	0.000901110485454382
7	1.31607401295347	9.24423976034205e-07	9.24424950143887e-07
8	1.31607401295249	9.73887637201187e-13	9.74109681806112e-13

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad x_0 = a + \frac{I_1}{I_1 + I_2} (b - a)$$

סעיף ג:



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^\eta} = A$$

$$\log(\varepsilon_{n+1}) = \log(A) + \eta \log(\varepsilon_n)$$

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1.99 \sim 2$$

$$\eta = \frac{-13.8941 + 7.01188}{-7.01188 + 3.55348} = 1.990047191$$

$$A = 1.137$$

• הסיבות להבדלים מהתוצאות המצופות הן שגיאות נומריות של המחשב(שגיאת מכונה)

שאלה 2:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

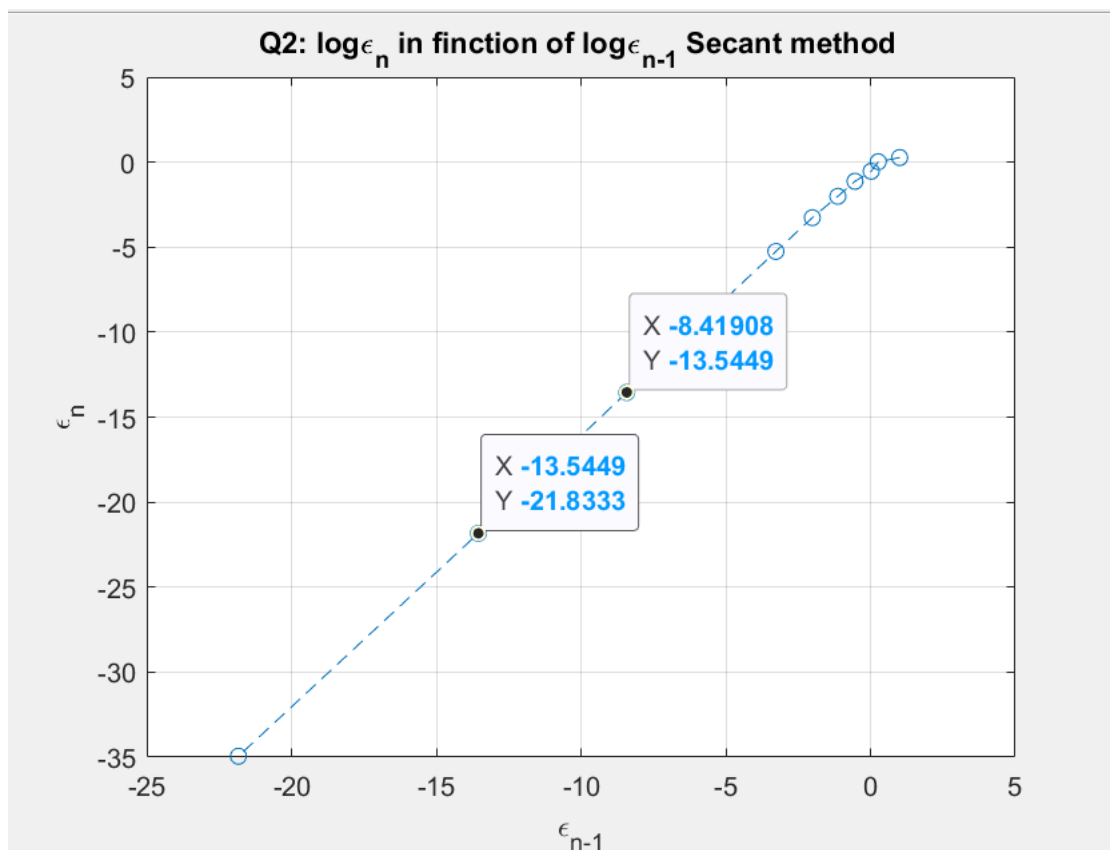
$$x_0 = a + a \frac{I_1}{I_1 + I_2} (b - a)$$

$$x_1 = x_0 + \frac{I_1}{I_1 + I_2} (b - x_0)$$

סעיף א: N = 12 איטרציות להתכנסות

iteration number:	x_n	x_n - x_n_next	relative error
0	4.05711321025005	0	0
1	2.62510866096639	1.43200454928366	2.74103919729756
2	2.33999674488577	0.285111916080629	1.3090346480139
3	1.90056696968808	0.439429775197687	1.02392273193327
4	1.63984023466987	0.260726735018204	0.584492956735586
5	1.45017936568827	0.189660868981604	0.323766221717382
6	1.35410119670387	0.0960781689843961	0.134105352735778
7	1.32130468600643	0.0327965106974419	0.0380271837513817
8	1.316294631209	0.00501005479743588	0.00523067305393976
9	1.31607532367772	0.000219307531275081	0.000220618256503879
10	1.31607401328203	1.31039569262192e-06	1.31072522879805e-06
11	1.31607401295249	3.29535509990819e-10	3.29536176124634e-10
12	1.31607401295249	6.66133814775094e-16	6.66133814775094e-16

סעיף ב:



$$\log(\epsilon_{n+1}) = \log(A) + \eta \log(\epsilon_n)$$

$$\eta = \frac{-21.833 + 13.5449}{-13.5449 + 8.41908} = 1.61$$

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1.61 \sim 1.618$$

$$A = 1.08$$

קצב ההתכנסות קטן בהשוואה לשיטת ניוטון רפסון – כמצופה.

השגיאות בין התוצאות המצויות לצפויות הן בעקבות שגיאות נומריות של המחשב(שגיאת מכונה)

שאלה 3:

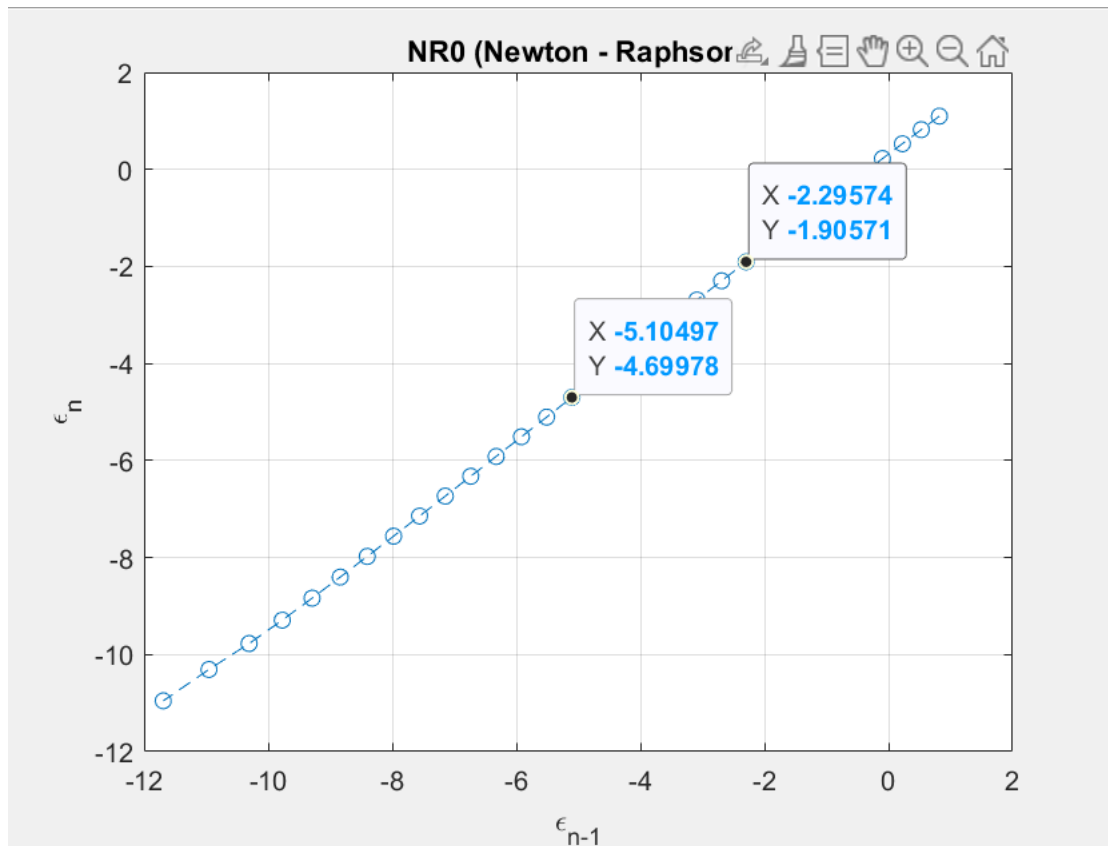
$f(x) = x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 20x^2 + 24x - 16 = 0$

סעיף א: $N = 32$ איטרציות להתכנסות

f(x) iteration number:	f(x) x_n	f(x) x_n - x_n_next	f(x) relative error
0	4.27027027027027	0.72972972972973	2.27025691714722
1	3.69670869227641	0.573561577993864	1.69669533915335
2	3.25029602872051	0.446412663555897	1.25028267559746
3	2.90745603648442	0.342839992236089	0.907442683361368
4	2.64853762395967	0.25891841252475	0.648524270836618
5	2.45672394658974	0.191813677369928	0.456710593466689
6	2.31744793498237	0.139276011607369	0.31743458185932
7	2.21823378278394	0.0992141521984351	0.218220429660885
8	2.14873036650705	0.0695034162768882	0.148717013383997
9	2.10070004897207	0.0480303175349777	0.100686695849019
10	2.06785564765303	0.0328444013190401	0.0678422945299793
11	2.04556927541931	0.0222863722337188	0.0455559222962605
12	2.03053063257579	0.0150386428435234	0.0305172794527371
13	2.02042198561853	0.0101086469572631	0.020408632495474
14	2.01364530576534	0.00677667985318164	0.0136319526422923
15	2.00911058967189	0.00453471609345213	0.0090972365488402
16	2.00607985304579	0.0030307366261062	0.006066499922734
17	2.00405596701884	0.00202388602694858	0.00404261389578542
18	2.00270519465495	0.00135077236388437	0.00269184153190105
19	2.00180400450656	0.000901190148391073	0.00179065138350998
20	2.0012029108954	0.00060109361115801	0.00118955777235197
21	2.00080204686367	0.00040086403173234	0.000788693740619628
22	2.00053474593304	0.000267300930629766	0.000521392809989862
23	2.00035651986262	0.000178226070420617	0.000343166739569245
24	2.00023769871003	0.000118821152594428	0.000224345586974817
25	2.00015845979699	7.92389130341853e-05	0.000145106673940631
26	2.00010558187856	5.28779184358896e-05	9.22287555047419e-05
27	2.00007035117409	3.52307044617639e-05	5.69980510429779e-05
28	2.00004674423474	2.36069393553251e-05	3.33911116876529e-05
29	2.00003084682793	1.58974068078521e-05	1.74937048798007e-05
30	2.00002172028762	9.1265403110441e-06	8.36716456875664e-06
31	2.00001335312305	8.36716456875664e-06	0
32	0	0	0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^\eta} = A$$

$$A = 1.497 \quad -x_1 = 0.99 \sim 1 \quad \text{og}(\varepsilon_n)$$



סעיף ב: $N = 5$ איטרציות להתכנסות

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x)}{u'(x)}$$

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$u(x) = 1 - \frac{f(x) * f''(x)}{f'(x) * f'(x)}$$

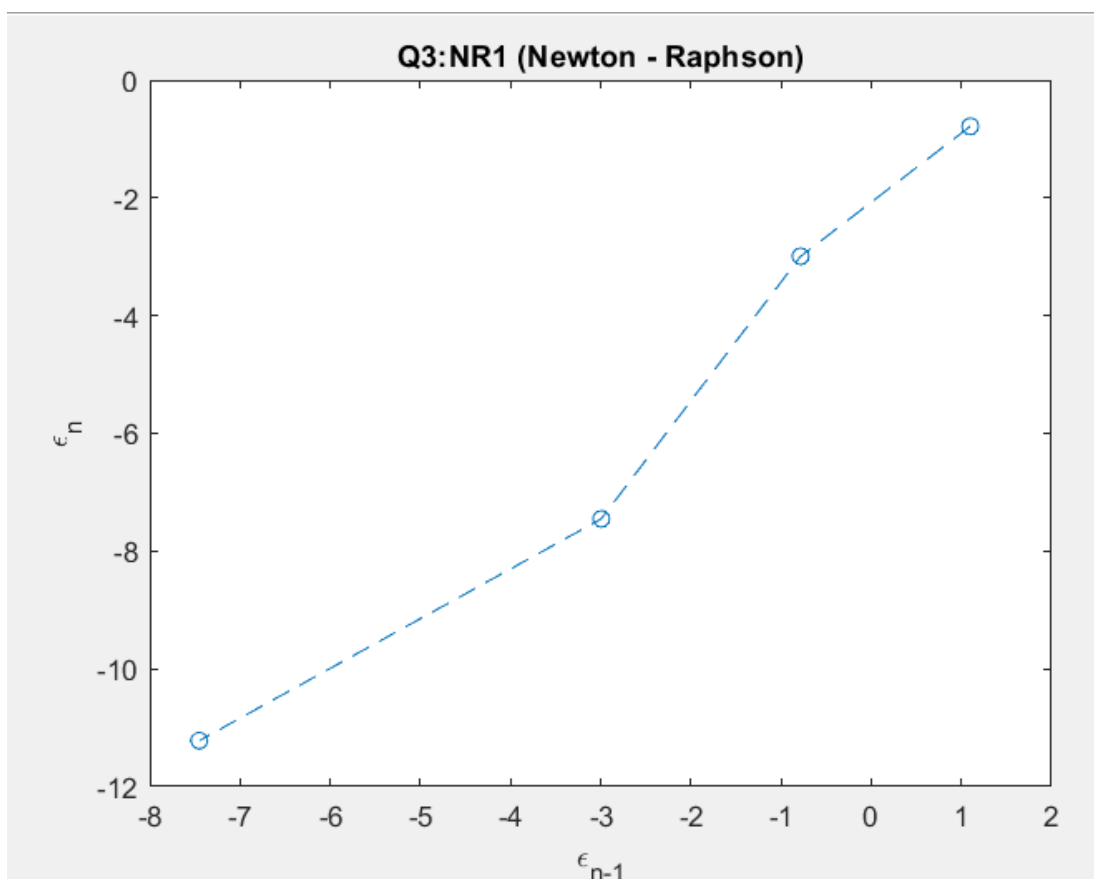
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n^\eta} = A$$

$$\log(\epsilon_{n+1}) = \log(A) + \eta \log(\epsilon_n)$$

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2.01 \sim 2$$

$$A = 4.328$$

iteration number:	x_n	x_n - x_n_next	relative error
0	1.54325259515571	3.45674740484429	0.456760757967343
1	1.94989089525764	0.406638300101928	0.0501224578654151
2	1.99943300037377	0.0495421051161298	0.000580352749285362
3	1.99999994072547	0.000566940351703016	1.34123975823464e-05
4	1.9999999207466	1.9978866117043e-08	0
0	0	0	0

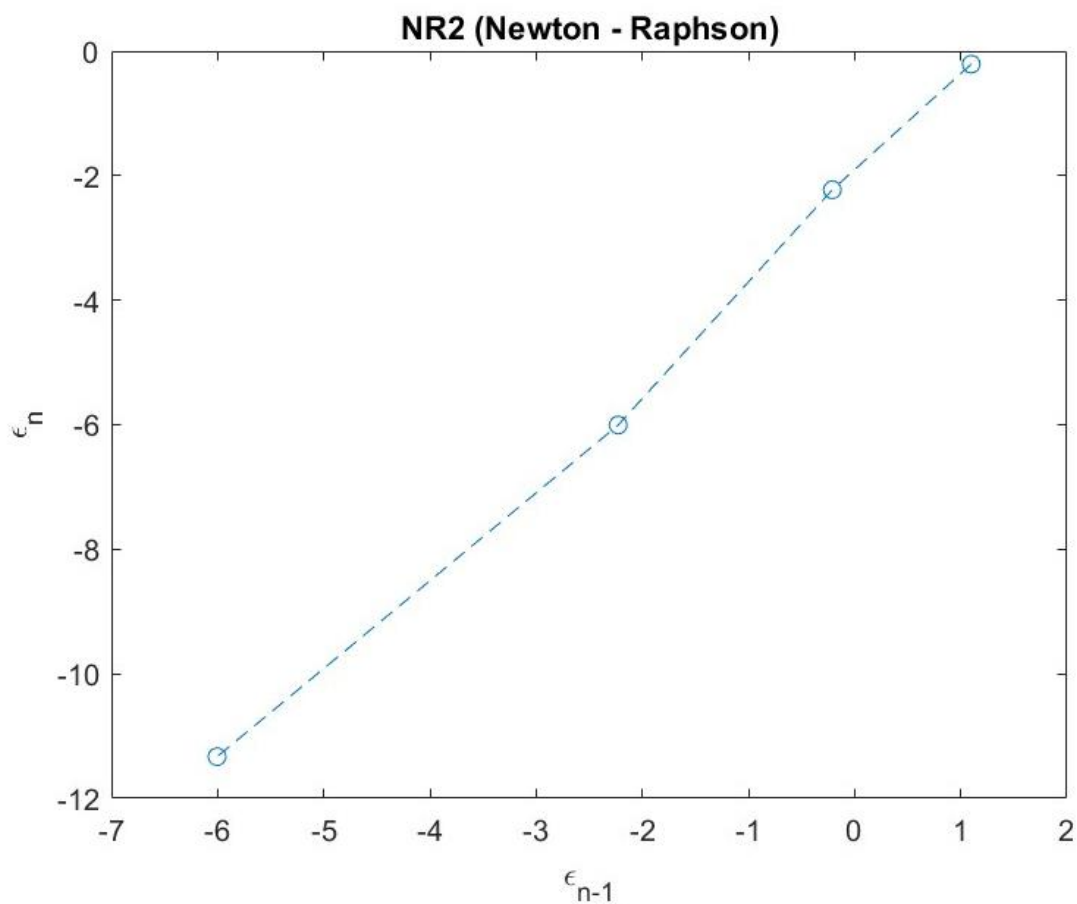


סעיף ג: 5 איטרציות להתכנסות

$$\lim_{x \rightarrow s} \frac{u(x)}{x - s} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(x-2)(x^2+2)}{5x^2-4x+6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+2)}{5x^2-4x+6} = \frac{1}{3} = \frac{1}{q} \rightarrow q = 3$$

$$x_{n+1} = x_n - q * \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

iteration number:	x_n	x_n - x_n_next	relative error
0	2.81081081081081	2.18918918918919	0.810797457687759
1	2.10787300028697	0.702937810523841	0.107859647163918
2	2.00247960518739	0.105393395099575	0.00246625206434287
3	2.00000136500346	0.00247824018393458	1.19881195917061e-05
4	2.000000000000041	1.36500304597127e-06	0



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n^\eta} = A$$

$$\log(\epsilon_{n+1}) = \log(A) + \eta \log(\epsilon_n)$$

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1.873 \sim 2$$

$$A = 0.212$$

נשים לב כי השיטה מהירה יותר כאשר חישבנו עם אלגוריתם הריבוי

$$p = q$$

NR0

סיכום המבלאות:

f(x)	iteration number:	f(x) x_n	f(x) x_n - x_n_next	f(x) relative error
0		4.27027027027027	0.72972972972973	2.27025691714722
1		3.69670869227641	0.573561577993864	1.69669533915335
2		3.25029602872051	0.446412663555897	1.25028267559746
3		2.90745603648442	0.342839992236089	0.907442683361368
4		2.64853762395967	0.25891841252475	0.648524270836618
5		2.45672394658974	0.191813677369928	0.456710593466689
6		2.31744793498237	0.139276011607369	0.31743458185932
7		2.21823378278394	0.0992141521984351	0.218220429660885
8		2.14873036650705	0.0695034162768882	0.148717013383997
9		2.10070004897207	0.0480303175349777	0.100686695849019
10		2.06785564765303	0.0328444013190401	0.0678422945299793
11		2.04556927541931	0.0222863722337188	0.0455559222962605
12		2.03053063257579	0.0150386428435234	0.0305172794527371
13		2.02042198561853	0.0101086469572631	0.020408632495474
14		2.01364530576534	0.00677667985318164	0.0136319526422923
15		2.00911058967189	0.00453471609345213	0.0090972365488402
16		2.00607985304579	0.0030307366261062	0.006066499922734
17		2.00405596701884	0.00202388602694858	0.00404261389578542
18		2.00270519465495	0.00135077236388437	0.00269184153190105
19		2.00180400450656	0.000901190148391073	0.00179065138350998
20		2.0012029108954	0.00060109361115801	0.00118955777235197
21		2.00080204686367	0.00040086403173234	0.000788693740619628
22		2.00053474593304	0.000267300930629766	0.000521392809989862
23		2.00035651986262	0.000178226070420617	0.000343166739569245
24		2.00023769871003	0.000118821152594428	0.000224345586974817
25		2.00015845979699	7.92389130341853e-05	0.000145106673940631
26		2.00010558187856	5.28779184358896e-05	9.22287555047419e-05
27		2.00007035117409	3.52307044617639e-05	5.69980510429779e-05
28		2.00004674423474	2.36069393553251e-05	3.33911116876529e-05
29		2.00003084682793	1.58974068078521e-05	1.74937048798007e-05
30		2.00002172028762	9.1265403110441e-06	8.36716456875664e-06
31		2.00001335312305	8.36716456875664e-06	0
32		0	0	0

NR1

iteration number:	x_n	x_n - x_n_next	relative error
0	1.54325259515571	3.45674740484429	0.456760757967343
1	1.94989089525764	0.406638300101928	0.0501224578654151
2	1.99943300037377	0.0495421051161298	0.000580352749285362
3	1.99999994072547	0.000566940351703016	1.34123975823464e-05
4	1.9999999207466	1.9978866117043e-08	0
0	0	0	0

NR2

iteration number:	x_n	x_n - x_n_next	relative error
0	2.81081081081081	2.18918918918919	0.810797457687759
1	2.10787300028697	0.702937810523841	0.107859647163918
2	2.00247960518739	0.105393395099575	0.00246625206434287
3	2.00000136500346	0.00247824018393458	1.19881195917061e-05
4	2.000000000000041	1.36500304597127e-06	0

שאלה 4:

סעיף א: 59 איטרציות להתכנסות

iteration number:	x_n	x_n - x_n_next	relative error
0	1.5707963267949	0	0
1	2	0.429203673205103	0.324697940238747
2	1.81859485365136	0.181405146348637	0.104505732966357
3	1.93890945306856	0.120314599417193	0.07689941338228
4	1.86601601636051	0.0728934367080492	0.043415186034913
5	1.91347649344167	0.0474604770811644	0.0294782506731361
6	1.88371495915469	0.0297615342869826	0.0179822264080283
7	1.90287832191698	0.0191633627622889	0.0117793078789543
8	1.89073127521091	0.0121470467060727	0.0073840548833346
9	1.89851175825404	0.00778048304313739	0.00476299182273809
10	1.89356034515336	0.00495141310068314	0.00301749122039929
11	1.89672465092032	0.00316430576696058	0.00193392188028385
12	1.89470779214427	0.00201685877604829	0.00123038388667673
13	1.89599548716914	0.00128769502486703	0.000786474889371558
14	1.89517422792746	0.000821259241675198	0.000501220135495473
15	1.89569836932464	0.000524141397174827	0.000320039106179726
16	1.89536400109798	0.000334368226659443	0.000204102290995101
17	1.89557736648665	0.000213365388669118	0.000130265935664342
18	1.89544123929507	0.000136127191581625	8.30994530047757e-05
19	1.89552809845519	8.68591601255186e-05	5.30277385768496e-05
20	1.89547267997845	5.54184767456167e-05	3.3831421548669e-05
21	1.89550804010622	3.53601277731652e-05	2.15870551969477e-05
22	1.89548547901365	2.25610925652653e-05	1.37730725762175e-05
23	1.89549987411364	1.43950999862419e-05	8.78801998904777e-06
24	1.89549068943477	9.18467886834584e-06	5.60707999719412e-06
25	1.89549654969131	5.86025653803723e-06	3.57759887115172e-06
26	1.89549281059084	3.73910047346548e-06	2.28265766688551e-06
27	1.89549519630831	2.38571747002148e-06	1.45644280657997e-06
28	1.89549367411428	1.52219402660414e-06	9.29274663441504e-07
29	1.89549464534313	9.71228846458061e-07	5.92919363162636e-07
30	1.89549402565557	6.19687558600646e-07	3.78309483295425e-07
31	1.89549442104423	3.953886587027e-07	2.41378075305221e-07
32	1.89549416876848	2.52275743184427e-07	1.54010583397479e-07

$f(x) = x - 2 \sin(x)$

$g(x) = 2\sin (x)$

$x_0 = \frac{\pi}{2}$;

33	1.89549432973179	1.60963302020534e-07	9.82651597869477e-08
34	1.89549422702995	1.02701832371821e-07	6.26981422335859e-08
35	1.89549429255835	6.55283978190369e-08	4.0003690138235e-08
36	1.89549425074828	4.18100687404888e-08	2.55247076808018e-08
37	1.89549427742499	2.66767077317098e-08	1.62853610596869e-08
38	1.89549426040405	1.70209411010092e-08	1.03913466720229e-08
39	1.89549427126418	1.08601272419406e-08	6.62959442898625e-09
40	1.89549426433493	6.92925050671533e-09	4.23053281295438e-09
41	1.8954942687561	4.42117409349407e-09	2.69871769376095e-09
42	1.89549426593519	2.82090839576199e-09	1.72245639973312e-09
43	1.89549426773506	1.79986670012511e-09	1.09845199602887e-09
44	1.89549426658666	1.14839604492545e-09	7.01414704096237e-10
45	1.89549426731939	7.3272854450579e-10	4.46981340829211e-10
46	1.89549426685188	4.67514027491234e-10	2.85747203676578e-10
47	1.89549426715017	2.98295166345497e-10	1.81766823814655e-10
48	1.89549426695985	1.90325755156096e-10	1.16528342530842e-10
49	1.89549426708128	1.21436416478105e-10	7.37974126252539e-11
50	1.8954942670038	7.74820207993798e-11	4.76390038528507e-11
51	1.89549426705324	4.94371210635336e-11	2.98430169465291e-11
52	1.89549426702169	3.15432124864401e-11	1.95941041170045e-11
53	1.89549426704182	2.01261229904048e-11	1.19491083694356e-11
54	1.89549426702898	1.28415056366293e-11	8.1770146209692e-12
55	1.89549426703717	8.19344592173366e-12	4.66449101566013e-12
56	1.89549426703194	5.22781817835494e-12	3.52895490607352e-12
57	1.89549426703528	3.33577609978875e-12	1.69886327228141e-12
58	1.89549426703315	2.12851958281135e-12	1.63691282750733e-12
59	1.89549426703451	1.35824684832642e-12	4.91606755304019e-13

בשיטת נקודת השבת נקבל

s =

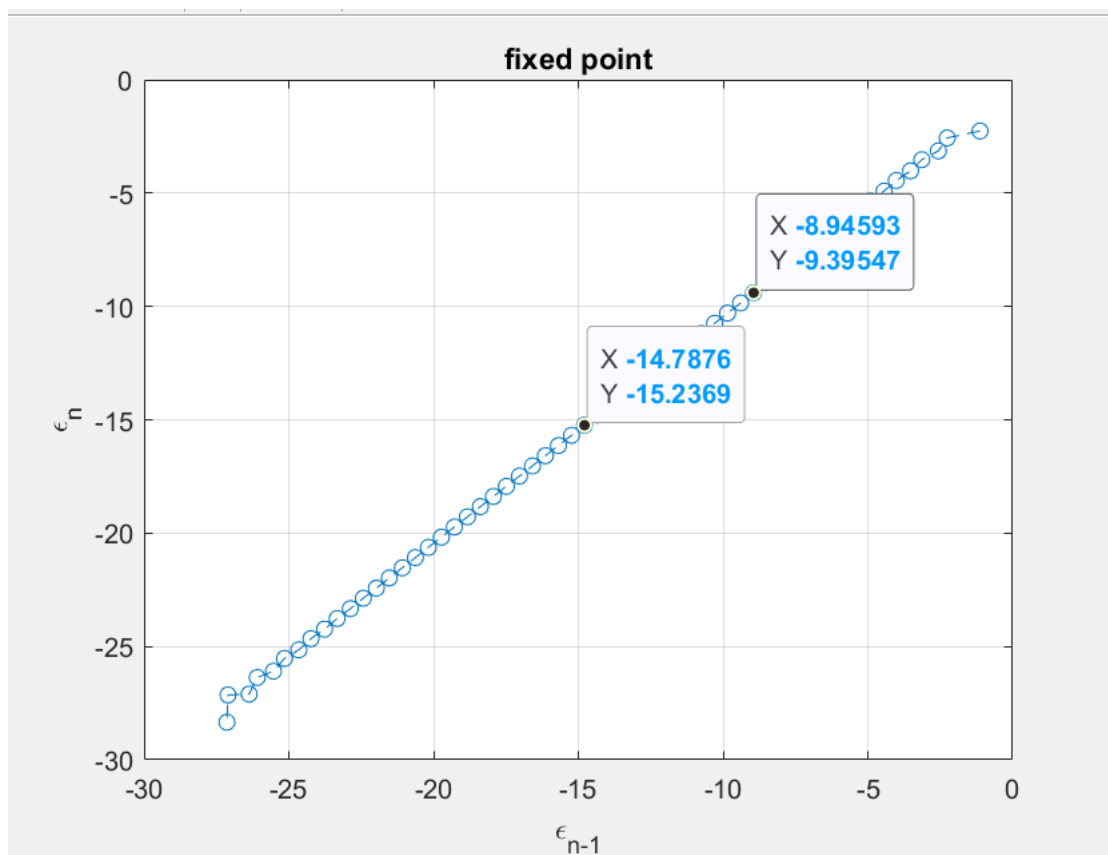
1.895494267033643

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^\eta} = A$$

$$\log(\varepsilon_{n+1}) = \log(A) + \eta \log(\varepsilon_n)$$

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1.001 \sim 1$$

$$A = 0.638$$



סעיף ב: $N = 5$ איטרציות להתכנסות

iteration number:	x_n	$ x_n - x_{n_next} $	relative error
0	2	0.429203673205103	0.104505732966357
1	1.90099559420391	0.099004405796091	0.00550132717026552
2	1.89551164537959	0.00548394882431436	1.73783459511689e-05
3	1.89549426720871	1.73781708814325e-05	1.75069736485511e-10
4	1.89549426703398	1.74732228686025e-10	3.37507799486048e-13

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^\eta} = A$$

$$\log(\varepsilon_{n+1}) = \log(A) + \eta \log(\varepsilon_n)$$

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

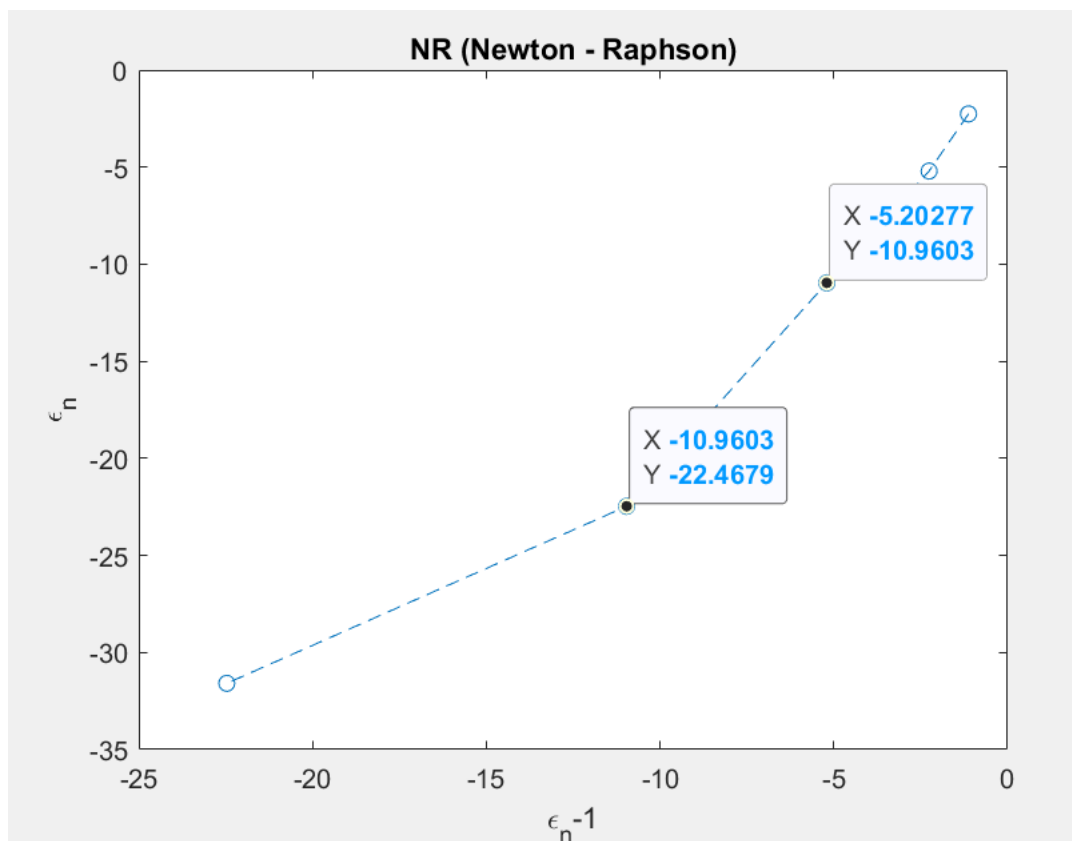
$$A = \frac{-10.9603 + 22.4679}{-5.20277 + -10.9603} = 1.998704250$$

ניתן לשים לב כי יש שגיאה קטנה בעקבות האיבוד ספרות בתכנה.

סעיף ג:

$$g'(x) = 2\cos(x) \quad g(x) = 2\sin(x)$$

משום ש $\sin x$ הינה פונקציה אי זוגית ניתן להסיק כי אם **S** נקודת שבת, **S-** הינה גם נקודת שבת. בנוסף ניתן לראות כי גם אפס הינה נקודת שבת.



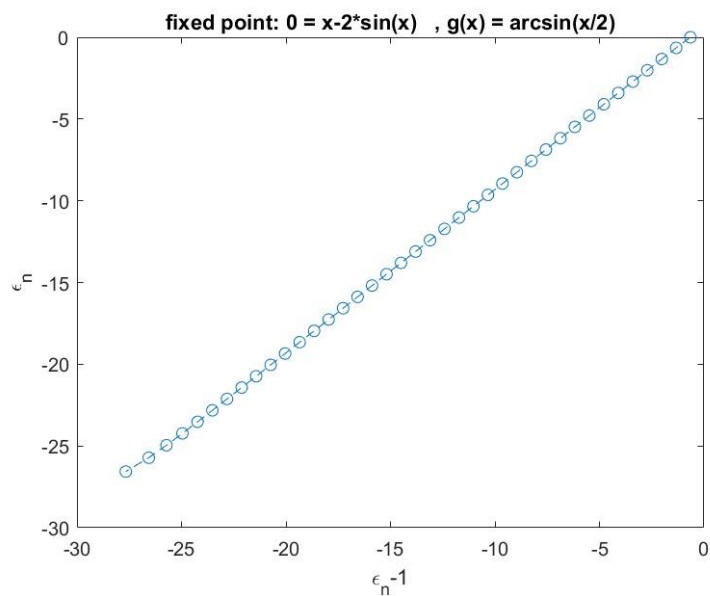
$$|g'(x_0)| = |2 \cos(x_0)| = \left| 2 \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \right| = 0 < 1$$

$$|g'(\pm s_{2,3})| = |2 \cos(\pm s_{2,3})| = |2 \cos(\pm 1.895)| = 0.638 < 1$$

$$|g'(s = 0)| = |2 \cos(0)| = 2 > 1$$

לכן בעזרת הניחוש ההתחלתי ניתן להגיע להתכנסות עבור S , אך לא עבור הנקודה אפס. באפס לא תהיה התכנסות עבור כל נקודת התחלה שנבחר.

סעיף ד: $N = 40$ איטרציות להתכנסות:



iteration number:	x_n	x_n - x_n_next	relative error
0	1	0	0
1	0.523598775598299	0.476401224401701	0.999999999999033
2	0.264886147024236	0.258712628574063	0.523598775597331
3	0.132833363219109	0.132052783805127	0.264886147023269
4	0.0664656080665305	0.0663677551525782	0.132833363218141
5	0.033238924233585	0.0332266838329455	0.066465608065563
6	0.0166202272792028	0.0166186969543822	0.0332389242326175
7	0.00831020928919613	0.00831001799000662	0.0166202272782353
8	0.00415511660093159	0.00415509268826455	0.00831020928822869
9	0.00207755979501168	0.00207755680591991	0.00415511659996415
10	0.0010387800843242	0.00103877971068747	0.00207755979404424
11	0.000519390065514402	0.000519390018809802	0.00103878008335676
12	0.000259695035676239	0.000259695029838163	0.00051939006454696
13	0.000129847518202999	0.00012984751747324	0.000259695034708799
14	6.49237591471095e-05	6.49237590558896e-05	0.00012984751723556
15	3.2461879579256e-05	3.24618795678535e-05	6.49237581796701e-05
16	1.62309397903406e-05	1.62309397889153e-05	3.24618786118166e-05
17	8.11546989525941e-06	8.11546989508124e-06	1.62309388229012e-05
18	4.05773494764084e-06	4.05773494761857e-06	8.11546892782001e-06
19	2.02886747382181e-06	2.02886747381903e-06	4.05773398020144e-06
20	1.01443373691108e-06	1.01443373691073e-06	2.02886650638241e-06
21	5.07216868455562e-07	5.07216868455518e-07	1.01443276947168e-06
22	2.53608434227783e-07	2.53608434227778e-07	5.07215901016161e-07
23	1.26804217113892e-07	1.26804217113891e-07	2.53607466788383e-07
24	6.34021085569461e-08	6.3402108556946e-08	1.26803249674491e-07
25	3.1701054278473e-08	3.1701054278473e-08	6.34011411175455e-08
26	1.58505271392365e-08	1.58505271392365e-08	3.17000868390725e-08
27	7.92526356961826e-09	7.92526356961826e-09	1.58495596998359e-08
28	3.96263178480913e-09	3.96263178480913e-09	7.92429613021767e-09
29	1.98131589240457e-09	1.98131589240457e-09	3.96166434540854e-09
30	9.90657946202283e-10	9.90657946202283e-10	1.98034845300398e-09
31	4.95328973101141e-10	4.95328973101141e-10	9.89690506801694e-10
38	3.86975760235267e-12	3.86975760235267e-12	6.77207580411717e-12
39	1.93487880117633e-12	1.93487880117633e-12	2.9023182017645e-12
40	9.67439400588167e-13	9.67439400588167e-13	9.67439400588167e-13

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = A$$

$$\log(\varepsilon_{n+1}) = \log(A) + \eta \log(\varepsilon_n)$$

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0.999 \sim 1$$

$$A = 0.499$$

$$g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$|g'(x)| < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} < 1$$

$$x^2 < 3$$

$$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

יום מעולה 😊