מבוא לשיטות חישוביות 361-1-2251
תרגיל מחשב II: פתרון משוואה לא לינארית

תאריך אחרון להגשה 15/06/2023

<u>הנחיות כלליות:</u> מטרת מטלה זו לתרגל את פתרונן הנומרי של בעיות באלגברה לינארית, בשיטות החישוב שנלמדו בקורס, בעזרת MATLAB. יש להגיש **מסמך מסכם לעבודה, כקובץ PDF**, ובו כל התשובות לסעיפים השונים, כולל כל הפיתוחים והביטויים הסופיים, תרשימים ואיורים, הסברים, ופרשנות של התוצאות. יש לצרף את כל קבצי ה-MATLAB שכתבתם במסגרת העבודה, **מתועדים במידה מספקת** המאפשרת הבנת מה מומש. ניתן להגיש מספר קבצי קוד, אך יש להכין קובץ MAIN יחיד, שרק אותו יריץ הבודק, שיקרא לשאר הקבצים. אין להגיש קבצי ZIP, RAR וכו'. עבודה שלא תשחזור של כל התרשימים בה בקריאה לקובץ MAIN יחיד או שהקוד המצורף לה אינו נהיר, לא תבדק ותחשב כלא הוגשה. על התרשימים להיות נוחים להבנה (מקרא, כותרות צירים, קווים וסמנים נוחים לקריאה). יופחת ניקוד על תרשימים לא ברורים. למטלה משקל של 1/3 מסך תרגילי המחשב בציון הסופי וניתן לבצעה בזוגות.

חשוב! בכל השאלות בהן הפעלת שיטה מסוימת דורשת חישוב של פונקציות ו\או נגזרותיה, יש לממש **שגרות נפרדות** לחישוב פונקציה או נגזרת **המחזירות ערך מספרי בנקודה מסוימת**. אין לפשט את הביטויים עבור צעד האיטרציה ואין להשתמש בביטויים סימבוליים עבור צעד האיטרציה (למשל של Alpha Wolfram או ymss של MATLAB).

<u>שאלה 1: פתרון משוואה בשיטת ניוטון-רפסון המניחה שורש פשוט (25 נקודות)</u>

א. עבור המשוואה

$$x^4 - 3 = 0$$

מצאו קטע $[a,b]$ בו יש לבחור את הניחוש ההתחלתי x_0 להבטחת התכנסות <u>שיטת ניטון-רפסון</u> לפתרון המדויק (החיובי) $s = 3^{1/4}$. לשם כך, הניחו כי $b = 5$. נמקו את תשובתכם באמצעות חקירה (אנליטית או נומרית) של התנאים להתכנסות השיטה.

ב. כתבו תכנית מחשב <u>בשיטת ניוטון-רפסון</u> לפתרון המשוואה בסעיף א'. השתמשו במספרי תעודת הזהות שלכם (נסמנם ב- I_1 ו- I_2 , עבור יחידים – השתמשו באותו המספר לשניהם), לצורך חישוב הניחוש ההתחלתי לפי הנוסחה:

$$x_0 = a + \frac{I_1}{I_1 + I_2}(b - a)$$

עצרו את החישוב האיטרטיבי לאחר התייצבות 12 הספרות המשמעותיות הראשונות של התוצאה. הציגו בטבלה בת 3 עמודות את ערכי x_n , את ההפרש בין זוג ניחושים עוקבים $|x_n - x_{n-1}|$ ואת השגיאה $|x_n - s|$ ביחס לפתרון המדויק (החיובי) $s = 3^{1/4}$ (אותו נחשב ב- MATLAB ע"י פעולת חזקה פשוטה). כמה איטרציות N נדרשו?

ג. לבחינת קצב התכנסות השגיאה, נגדיר את השגיאה בצעד ה- n כ-

$$\varepsilon_n = |x_n - s|$$

צרו תרשים, עבור $n \ge 1$, המציג את $\log(\varepsilon_n)$ כפונקציה של $\log(\varepsilon_{n-1})$. חלצו מהתרשים את סדר ההתכנסות וקבוע ההתכנסות. השוו את סדר ההתכנסות שהתקבל לזה שנידון בכיתה והסבירו את התוצאה.

שאלה 2: פתרון בשיטת המיתר (25 נקודות)

א. כתבו תכנית מחשב בשיטת המיתר לפתרון המשוואה

$$x^4-3=0$$

השתמשו במספרי תעודת הזהות שלכם וב- $[a,b]$ שחישבתם בשאלה הקודמת לצורך חישוב הניחושים ההתחלתיים:

$$x_0=a+\frac{I_1}{I_1+I_2}(b-a)\ ;\quad x_1=x_0+\frac{I_1}{I_1+I_2}(b-x_0)$$

עצרו את החישוב האיטרטיבי לאחר התייצבות 12 הספרות המשמעותיות הראשונות של התוצאה. הציגו בטבלה בת 3 עמודות את ערכי x_n, את ההפרש בין זוג ניחושים עוקבים $|x_n-x_{n-1}|$, ואת השגיאה $|x_n-s|$ ביחס לפתרון המדויק (החיובי) s. כמה איטרציות N נדרשו?

א. לבחינת קצב התכנסות השגיאה, נגדיר את השגיאה בצעד ה- n כ-

$$\varepsilon_n=|x_n-s|$$

צרו תרשים, עבור $n\geq 1$, המציג את $\log(\varepsilon_n)$ כפונקציה של $\log(\varepsilon_{n-1})$. חלצו מהתרשים את סדר ההתכנסות וקבוע ההתכנסות. השוו את הקצב שהתקבל לזה שנידון בכיתה והסבירו את התוצאה.

שאלה 3: פתרון בשיטת ניוטון-רפסון המניחה שורש מרובה (25 נקודות)

א. פתרו באמצעות האלגוריתם האיטרטיבי משאלה 1 את המשוואה

$$f(x)=x^5-6x^4+14x^3-20x^2+24x-16=0$$

תוך שימוש בניחוש התחלתי $x_0=5$. עצרו את החישוב לאחר התייצבות 12 הספרות המשמעותיות הראשונות של התוצאה. כמה איטרציות N נדרשו? הציגו בטבלה את ערכי x_n, את ההפרש בין זוג ניחושים עוקבים $|x_n-x_{n-1}|$ ואת השגיאה $|x_n-s|$ ביחס לפתרון שקיבלתם $s=x_N$, בשלוש עמודות תחת הכותרת NR0 (NR- Newton Raphson).

לבחינת קצב התכנסות השגיאה, נגדיר את השגיאה בצעד ה- n כ-

$$\varepsilon_n=|x_n-s|$$

צרו תרשים, עבור $n\geq 1$, המציג את $\log(\varepsilon_n)$ כפונקציה של $\log(\varepsilon_{n-1})$. חלצו מהתרשים את סדר ההתכנסות וקבוע ההתכנסות. השוו את הקצב שהתקבל לזה שנידון בכיתה והסבירו את התוצאה.

ב. כעת מניחים שלמשוואה שורש מריבוי q לא ידוע הגבוה מ-1. עבור הפונקציה $f(x)$, כתבו פונקציה חדשה $u(x)$ בעלת אותם שורשים אך בריבוי $q'=1$ והפעילו עליה את האלגוריתם האיטרטיבי משאלה 1. **הוסיפו** לטבלה מסעיף א' עמודות ובהן ערכי x_n, את ההפרש בין זוג ניחושים עוקבים $|x_n-x_{n-1}|$ ואת השגיאה $|x_n-s|$ שחושבו עבור $u(x)$, תחת הכותרת NR1.

צרו תרשים, עבור $n\geq 1$, המציג את $\log(\varepsilon_n)$ כפונקציה של $\log(\varepsilon_{n-1})$. חלצו מהתרשים את סדר ההתכנסות וקבוע ההתכנסות. השוו את הקצב שהתקבל לזה שהתקבל בסעיף א' והסבירו את התוצאה.

ג. חשבו את הריבוי האמיתי q ע"י שימוש בקשר:

$$\lim_{x\to s}\frac{u(x)}{x-s}=\frac{1}{q}$$

על סמך הריבוי שחישבתם, עדכנו את האלגוריתם משאלה 1 כך שיאפשר התמודדות עם ריבוי זה וחזרו על החישוב האיטרטיבי. הוסיפו לטבלה מסעיפים א' ו-ב' עמודות ובהן ערכי x_n, ההפרש בין זוג ניחושים עוקבים $|x_n-x_{n-1}|$ והשגיאה $|x_n-s|$ שחושבו עבור $f(x)$, תחת הכותרת NR2.

צרו תרשים, עבור $n\geq 1$, המציג את $\log(\varepsilon_n)$ כפונקציה של $\log(\varepsilon_{n-1})$. חלצו מהתרשים את סדר ההתכנסות וקבוע ההתכנסות. השוו את הקצב שהתקבל לזה שהתקבל בסעיף א' והסבירו את התוצאה.

<u>**שימו לב:**</u> בסעיפים ב' ו-ג', במידה והפתרון לא מגיע עד להתייצבות 12 ספרות לאחר הנקודה העשרונית, בחרו את $s=x_M$ כך ש- M הינו האינדקס הגדול ביותר עבורו השגיאה עדיין קטנה מונוטונית.

<u>**שאלה 4: פתרון משוואה בשיטת נקודת שבת (25 נק')**</u>

א. פתרו את המשוואה $f(x)=x-2\sin(x)=0$ בשיטת נקודת השבת, עבור הבחירה $g(x)=2\sin(x)$ ונקודת התחלה $x_0=\pi/2$. מתוך התוצאות שהתקבלו עבור השגיאה לאורך תהליך הפתרון, באופן דומה לזה שבשאלות 1-3, העריכו את סדר וקבוע ההתכנסות. השוו את קצב ההתכנסות שקיבלתם לזה התיאורטי עבור בחירה זאת של $g(x)$

ב. חזרו על סעיף א' בשיטת NR והשוו את קצב ההתכנסות המתקבל לזה מסעיף א'.

ג. למשוואה $f(x)=x-2\sin(x)=0$ שורשים נוספים. האם ניתן להשתמש ב - $g(x)$ מסעיף א' למציאתם? עבור כל שורש כזה, אם התשובה היא כן, מצאו תנאי התחלה שיובילו להתכנסות אליו. אם לא, הסבירו מדוע.

ד. עבור הבחירה $g(x)=\sin^{-1}(x/2)$, מצאו את תחום ערכי x בו יש לבחור את הניחוש ההתחלתי על מנת לקבל התכנסות לשורש ב $x=0$ וחזרו על סעיף א'.

בהצלחה!